Podstawa programowa kształcenia ogólnego

z komentarzem

Szkoła ponadpodstawowa: liceum ogólnokształcące, technikum oraz branżowa szkoła I i II stopnia

Matematyka

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Podstawa programowa kształcenia ogólnego

z komentarzem

Szkoła ponadpodstawowa:
4-letnie liceum
5-letnie technikum

Matematyka

Spis treści

Preambuła podstawy programowej kształcenia ogólnego

III etap edukacyjny: 4-letnie liceum ogólnokształcące oraz 5-letnie technikum

Kształcenie ogólne w szkole ponadpodstawowej tworzy programowo spójną całość i stanowi fundament wykształcenia, umożliwiający zdobycie zróżnicowanych kwalifikacji zawodowych, a następnie ich doskonalenie lub modyfikowanie, otwierając proces uczenia się przez całe życie.

Celem kształcenia ogólnego w liceum ogólnokształcącym i technikum jest:
1) traktowanie uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności;
2) doskonalenie umiejętności myślowo-językowych, takich jak: czytanie ze zrozumieniem, pisanie twórcze, formułowanie pytań i problemów, posługiwanie się kryteriami, uzasadnianie, wyjaśnianie, klasyfikowanie, wnioskowanie, definiowanie, posługiwanie się przykładami itp.;
3) rozwijanie osobistych zainteresowań ucznia i integrowanie wiedzy przedmiotowej z różnych dyscyplin;
4) zdobywanie umiejętności formułowania samodzielnych i przemyślanych sądów, uzasadniania własnych i cudzych sądów w procesie dialogu we wspólnocie dociekającej;
5) łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia z umiejętnościami wyobrażeniowo-twórczymi;
6) rozwijanie wrażliwości społecznej, moralnej i estetycznej;
7) rozwijanie narzędzi myślowych umożliwiających uczniom obcowanie z kulturą i jej rozumienie;
8) rozwijanie u uczniów szacunku dla wiedzy, wyrabianie pasji poznawania świata i zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości.

Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w liceum ogólnokształcącym i technikum należą:

1) myślenie – rozumiane jako złożony proces umysłowy, polegający na tworzeniu nowych reprezentacji za pomocą transformacji dostępnych informacji, obejmującej interakcję wielu operacji umysłowych: wnioskowanie, abstrahowanie, rozumowanie, wyobrażanie sobie, sądzenie, rozwiązywanie problemów, twórczość. Dzięki temu, że uczniowie szkoły ponadpodstawowej uczą się równocześnie różnych przedmiotów, możliwe jest rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego, komputacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija zarówno myślenie percepcyjne, jak i myślenie pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia;
2) czytanie – umiejętność łącząca zarówno rozumienie sensów, jak i znaczeń symbolicznych wypowiedzi; kluczowa umiejętność lingwistyczna i psychologiczna prowadząca do

rozwoju osobowego, aktywnego uczestnictwa we wspólnocie, przekazywania doświadczeń między pokoleniami;
3) umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w językach obcych, zarówno w mowie, jak i w piśmie, to podstawowa umiejętność społeczna, której podstawą jest znajomość norm językowych oraz tworzenie podstaw porozumienia się w różnych sytuacjach komunikacyjnych;
4) kreatywne rozwiązywanie problemów z różnych dziedzin ze świadomym wykorzystaniem metod i narzędzi wywodzących się z informatyki, w tym programowanie;
5) umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi, w tym dbałość o poszanowanie praw autorskich i bezpieczne poruszanie się w cyberprzestrzeni;
6) umiejętność samodzielnego docierania do informacji, dokonywania ich selekcji, syntezy oraz wartościowania, rzetelnego korzystania ze źródeł;
7) nabywanie nawyków systematycznego uczenia się, porządkowania zdobytej wiedzy i jej pogłębiania;
8) umiejętność współpracy w grupie i podejmowania działań indywidualnych.

Jednym z najważniejszych zadań liceum ogólnokształcącego i technikum jest rozwijanie kompetencji językowej i kompetencji komunikacyjnej stanowiących kluczowe narzędzie poznawcze we wszystkich dyscyplinach wiedzy. Istotne w tym zakresie jest łączenie teorii i praktyki językowej. Bogacenie słownictwa, w tym poznawanie terminologii właściwej dla każdego z przedmiotów, służy rozwojowi intelektualnemu ucznia, a wspomaganie i dbałość o ten rozwój należy do obowiązków każdego nauczyciela.

Ważnym zadaniem szkoły jest przygotowanie uczniów do życia w społeczeństwie informacyjnym. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni stwarzać uczniom warunki do nabywania umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz dokumentowania swojej pracy, z uwzględnieniem prawidłowej kompozycji tekstu i zasad jego organizacji, z zastosowaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych.

Realizację powyższych celów powinna wspomagać dobrze wyposażona biblioteka szkolna, dysponująca aktualnymi zbiorami, zarówno w postaci księgozbioru, jak i w postaci zasobów multimedialnych. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni odwoływać się do zasobów biblioteki szkolnej i współpracować z nauczycielami bibliotekarzami w celu wszechstronnego przygotowania uczniów do samokształcenia i świadomego wyszukiwania, selekcjonowania i wykorzystywania informacji.

Ponieważ środki społecznego przekazu odgrywają coraz większą rolę, zarówno w życiu społecznym, jak i indywidualnym, każdy nauczyciel powinien poświęcić dużo uwagi edukacji medialnej, czyli wychowaniu uczniów do właściwego odbioru i wykorzystania mediów.

Ważnym celem działalności szkoły jest skuteczne nauczanie języków obcych. Bardzo ważne jest dostosowanie zajęć do poziomu przygotowania ucznia, które uzyskał na wcześniejszych etapach edukacyjnych.

Ważnym zadaniem szkoły jest także edukacja zdrowotna, której celem jest rozwijanie u uczniów postawy dbałości o zdrowie własne i innych ludzi oraz umiejętności tworzenia środowiska sprzyjającego zdrowiu.

W procesie kształcenia ogólnego szkoła kształtuje u uczniów postawy sprzyjające ich dalszemu rozwojowi indywidualnemu i społecznemu, takie jak: uczciwość, wiarygodność, odpowiedzialność, wytrwałość, poczucie własnej wartości, szacunek dla innych ludzi, ciekawość poznawcza, kreatywność, przedsiębiorczość, kultura osobista, gotowość do uczestnictwa w kulturze, podejmowania inicjatyw oraz do pracy zespołowej. W rozwoju społecznym bardzo ważne jest kształtowanie postawy obywatelskiej, postawy poszanowania tradycji i kultury własnego narodu, a także postawy poszanowania dla innych kultur i tradycji.

Kształcenie i wychowanie w liceum ogólnokształcącym i technikum sprzyja rozwijaniu postaw obywatelskich, patriotycznych i społecznych uczniów. Zadaniem szkoły jest wzmacnianie poczucia tożsamości narodowej, etnicznej i regionalnej, przywiązania do historii i tradycji narodowych, przygotowanie i zachęcanie do podejmowania działań na rzecz środowiska szkolnego i lokalnego, w tym do angażowania się w wolontariat. Szkoła dba o wychowanie młodzieży w duchu akceptacji i szacunku dla drugiego człowieka, kształtuje postawę szacunku dla środowiska przyrodniczego, motywuje do działań na rzecz ochrony środowiska oraz rozwija zainteresowanie ekologią.

Duże znaczenie dla rozwoju młodego człowieka oraz jego sukcesów w dorosłym życiu ma nabywanie kompetencji społecznych, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie, w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami.

Strategia uczenia się przez całe życie wymaga umiejętności podejmowania ważnych decyzji, poczynając od wyboru szkoły ponadpodstawowej, kierunku studiów lub konkretnej specjalizacji zawodowej, poprzez decyzje o wyborze miejsca pracy, sposobie podnoszenia oraz poszerzania swoich kwalifikacji, aż do ewentualnych decyzji o zmianie zawodu. I te umiejętności kształtowane będą w szkole ponadpodstawowej.

Przedmioty w liceum ogólnokształcącym i technikum mogą być nauczane w zakresie podstawowym lub w zakresie rozszerzonym:

1) tylko w zakresie podstawowym – przedmioty: muzyka, plastyka, podstawy przedsiębiorczości, wychowanie fizyczne, edukacja dla bezpieczeństwa, wychowanie do życia w rodzinie, etyka;
2) w zakresie podstawowym i w zakresie rozszerzonym: język polski, język obcy nowożytny,

matematyka, język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz język regionalny – język kaszubski, historia, wiedza o społeczeństwie, geografia, biologia, chemia, filozofia, fizyka, informatyka;

3) tylko w zakresie rozszerzonym – przedmioty: historia muzyki, historia sztuki, język łaciński i kultura antyczna.

Szkoła ma stwarzać uczniom warunki do nabywania wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązywania problemów z wykorzystaniem metod i technik wywodzących się z informatyki, w tym logicznego i algorytmicznego myślenia, programowania, posługiwania się aplikacjami komputerowymi, wyszukiwania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł, posługiwania się komputerem i podstawowymi urządzeniami cyfrowymi oraz stosowania tych umiejętności na zajęciach z różnych przedmiotów, m.in. do pracy nad tekstem, wykonywania obliczeń, przetwarzania informacji i jej prezentacji w różnych postaciach.

Każda sala lekcyjna powinna mieć dostęp do internetu, uczniowie i nauczyciele powinni mieć zapewniony dostęp do pracowni stacjonarnej lub mobilnej oraz możliwość korzystania z własnego sprzętu. Wszystkie pracownie powinny być wyposażone w monitor interaktywny (z wbudowanym komputerem i oprogramowaniem) lub zestaw: komputer, projektor i tablica interaktywna lub ekran.

Szkoła ma również przygotowywać uczniów do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji, bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami sieci.

Szkoła oraz poszczególni nauczyciele podejmują działania mające na celu zindywidualizowane wspomaganie rozwoju każdego ucznia, stosownie do jego potrzeb i możliwości.

Uczniom z niepełnosprawnościami szkoła zapewnia optymalne warunki pracy. Wybór form indywidualizacji nauczania powinien wynikać z rozpoznania potencjału każdego ucznia. Zatem nauczyciel powinien tak dobierać zadania, aby z jednej strony nie przerastały one możliwości ucznia (uniemożliwiały osiągnięcie sukcesu), a z drugiej nie powodowały obniżenia motywacji do radzenia sobie z wyzwaniami.

Bardzo istotna jest edukacja zdrowotna, która prowadzona konsekwentnie i umiejętnie będzie przyczyniać się do poprawy kondycji zdrowotnej społeczeństwa oraz pomyślności ekonomicznej państwa.

Zastosowanie metody projektu, oprócz wspierania w nabywaniu opisanych wyżej kompetencji, pomaga również rozwijać u uczniów przedsiębiorczość i kreatywność oraz umożliwia stosowanie w procesie kształcenia innowacyjnych rozwiązań programowych, organizacyjnych lub metodycznych.

Opis wiadomości i umiejętności zdobytych przez ucznia w szkole ponadpodstawowej jest przedstawiany w języku efektów uczenia się, zgodnie z Polską Ramą Kwalifikacji[1)].

Działalność edukacyjna szkoły określona jest przez:

1) szkolny zestaw programów nauczania;
2) program wychowawczo-profilaktyczny szkoły.

Szkolny zestaw programów nauczania oraz program wychowawczo-profilaktyczny szkoły tworzą spójną całość i muszą uwzględniać wszystkie wymagania opisane w podstawie programowej. Ich przygotowanie i realizacja są zadaniem zarówno całej szkoły, jak i każdego nauczyciela.

Obok zadań wychowawczych i profilaktycznych nauczyciele wykonują również działania opiekuńcze odpowiednio do istniejących potrzeb.

Działalność wychowawcza szkoły należy do podstawowych celów polityki oświatowej państwa. Wychowanie młodego pokolenia jest zadaniem rodziny i szkoły, która w swojej działalności musi uwzględniać wolę rodziców, ale także i państwa, do którego obowiązków należy stwarzanie właściwych warunków wychowania. Zadaniem szkoły jest ukierunkowanie procesu wychowawczego na wartości, które wyznaczają cele wychowania i kryteria jego oceny. Wychowanie ukierunkowane na wartości zakłada przede wszystkim podmiotowe traktowanie ucznia, a wartości skłaniają człowieka do podejmowania odpowiednich wyborów czy decyzji. W realizowanym procesie dydaktyczno-wychowawczym szkoła podejmuje działania związane z miejscami ważnymi dla pamięci narodowej, formami upamiętniania postaci i wydarzeń z przeszłości, najważniejszymi świętami narodowymi i symbolami państwowymi.

W czteroletnim liceum ogólnokształcącym i pięcioletnim technikum są realizowane następujące przedmioty:

1) język polski;
2) język obcy nowożytny;
3) filozofia;
4) język łaciński i kultura antyczna;
5) muzyka;
6) historia muzyki;
7) plastyka;
8) historia sztuki;

[1] Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji (Dz. U. z 2017 r. poz. 986 i 1475).

9) historia;
10) wiedza o społeczeństwie;
11) geografia;
12) podstawy przedsiębiorczości;
13) biologia;
14) chemia;
15) fizyka;
16) matematyka;
17) informatyka;
18) wychowanie fizyczne;
19) edukacja dla bezpieczeństwa;
20) wychowanie do życia w rodzinie[2)];
21) etyka;
22) język mniejszości narodowej lub etnicznej[3)];
23) język regionalny – język kaszubski[3)].

Matematyka

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na trzech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, kształceniu sprawności rachunkowej i przekazywaniu wiedzy o własnościach obiektów matematycznych.

Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobre opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego. Na wyższym poziomie, przy działaniach na wyrażeniach algebraicznych, sprawność rachunkowa pozwala doskonalić umiejętność operowania obiektami matematycznymi.

[2] Sposób nauczania przedmiotu wychowanie do życia w rodzinie określają przepisy wydane na podstawie art. 4 ust. 3 ustawy z dnia 7 stycznia 1993 r. o planowaniu rodziny, ochronie płodu ludzkiego i warunkach dopuszczalności przerywania ciąży (Dz. U. poz. 78, z 1995 r. poz. 334, z 1996 r. poz. 646, z 1997 r. poz. 943 i poz. 1040, z 1999 r. poz. 32 oraz z 2001 r. poz. 1792).

[3] Przedmiot język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz przedmiot język regionalny – język kaszubski jest realizowany w szkołach (oddziałach) z nauczaniem języka mniejszości narodowych lub etnicznych oraz języka regionalnego – języka kaszubskiego, zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 13 ust. 3 ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz. U. z 2017 r. poz. 2198, 2203 i 2361).

Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne własności obiektów rzeczywistych.

Podstawa programowa przedmiotu matematyka

III etap edukacyjny: 4-letnie liceum ogólnokształcące oraz 5-letnie technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.

Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
   a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
   b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x+4| = 5$, $|x-2| < 3$, $|x+3| \geq 4$;
8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$;
7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x+1}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$;
3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x)>0$, $W(x)\geq 0$, $W(x)<0$, $W(x)\leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{x+1}{x(x-1)}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$;
3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2|x+3|+3|x-1|=13$, $|x+2|+2|x-3|<11$;
5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax+by=e \\ x^2+y^2+cx+dy=f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax+by=e \\ y=cx^2+dx+f \end{cases}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=c \\ x^2+y^2+dx+ey=f \end{cases}$.

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x-a)$, $y = f(x)+b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
2) posługuje się złożeniami funkcji;
3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:

a) $\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n), \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
5) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
6) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$
6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \le 1$.

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
5) oblicza odległość punktu od prostej;
6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;

3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

XI. Kombinatoryka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
   a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
   b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na

liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;
2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
2) stosuje skalę centylową;
3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
2) stosuje schemat Bernoulliego.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);
2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;
3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Warunki i sposób realizacji

Korelacja. Ze względu na użyteczność matematyki i jej zastosowania w szkolnym nauczaniu fizyki, informatyki, geografii i chemii zaleca się zrealizować treści nauczania określone w działach: I pkt 9 (logarytmy) i w miarę możliwości V pkt 14, V pkt 1 (pojęcie funkcji) i V pkt 5 (funkcje liniowe) w pierwszym półroczu klasy pierwszej, zaś treści nauczania określone w działach: V pkt 11 (funkcje kwadratowe) i V pkt 13 (proporcjonalność odwrotna) nie później niż do końca klasy pierwszej. Treści nauczania określone w dziale VI pkt 2 (obliczanie początkowych wyrazów ciągów określonych rekurencyjnie) można realizować w korelacji z analogicznym zagadnieniem podstawy programowej z informatyki.

Oznaczenia. Uczniowie powinni używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbolu Z, dla liczb wymiernych – Q, dla liczb rzeczywistych – R.

Przedziały. Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2-9x+20>0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:
– rozwiązaniem nierówności może być każda liczba x, która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;
– rozwiązaniami są wszystkie liczby x mniejsze od 4 i wszystkie liczby x większe od 5;
– $x<4$ lub $x>5$;
– $x\in\left(-\infty,4\right)$ lub $x\in\left(5,\infty\right)$;
– $x\in\left(-\infty,4\right)\cup\left(5,\infty\right)$.

Zastosowania logarytmów. Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Poniższe przykładowe zadania ilustrują zastosowania logarytmu.

Z1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R=\log\frac{A}{A_0}$, gdzie *A* oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}\,\mathrm{cm}$ jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 25 kwietnia 2015 r. w Nepalu miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

Z2. Chory przyjął dawkę 100 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie *t* określa zależność $M\left(t\right)=a\cdot b^t$. Po pięciu godzinach organizm usuwa 30% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

Złożenia funkcji i funkcje odwrotne. Definicja funkcji złożonej pojawia się dopiero w zakresie rozszerzonym, ale już w zakresie podstawowym oczekuje się od ucznia umiejętności operowania równocześnie danymi zaczerpniętymi z kilku źródeł. Nie wymaga to jednak formalnego wprowadzenia operacji złożenia czy odwracania funkcji.

Przekształcenia równoważne. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcanie tezy.

Zastosowania algebry. Warunkiem powodzenia procesu nauczania matematyki jest sprawne posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych i na odwrót – ilustracja geometryczna pozwala lepiej zrozumieć zagadnienia algebraiczne.

Ciągi. Zagadnienie to należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w dziale VI pkt 2 lit. a ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało). Podobny model może być użyty do opisu rozprzestrzeniania się epidemii.

Granica ciągu. Przed sformułowaniem definicji granicy ciągu warto zadawać uczniom pytania w rodzaju: czy istnieje taka liczba naturalna *k*, że dla każdej liczby naturalnej *n* większej od *k* zachodzi nierówność $\frac{1}{3} < \frac{n}{2n+1} < \frac{2}{3}$? Twierdzenie o trzech ciągach także wspiera budowanie intuicji granicy ciągu. Obliczanie granic ciągów warto poprzedzić wykorzystaniem programów komputerowych do rysowania wykresów ciągów. Dokładniejsze obliczenia ułatwią w odpowiednio dobranych przykładach formułowanie hipotez na temat istnienia wartości granicy ciągu.

Planimetria. Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy rozwiązują zadania konstrukcyjne, nabywają przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu, na przykład uczeń z łatwością przyswoi własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt, jeśli potrafi skonstruować te figury. Nauczanie konstrukcji geometrycznych można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych, takich jak np. GeoGebra.

Dwumian Newtona. Ważne jest, żeby przy okazji nauczania wzoru na $(a+b)^n$ podkreślić znaczenie współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona) $\binom{n}{k}$ w kombinatoryce. Warto go również zapisywać w postaci $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}$, gdyż w tej formie jest bardziej widoczna jego interpretacja i łatwiej obliczyć jego wartość dla małych *k*.

Rachunek prawdopodobieństwa. Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązanymi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, na przykład: przy analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu i omówić niektóre z nich. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty, np. eksperyment, w którym uczniowie zapisują długi ciąg orłów i reszek bez losowania, a następnie zapisują ciąg orłów i reszek powstały w wyniku losowych rzutów monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny pojawiać się długie sekwencje orłów (albo reszek), podczas kiedy w rzeczywistości takie długie sekwencje orłów (lub reszek) występują. Omawianie w zakresie podstawowym wartości oczekiwanej nie wymaga wprowadzania pojęcia zmiennej losowej. Wskazane jest raczej posługiwanie się intuicyjnym rozumieniem wartości oczekiwanej zysku czy ustalanie liczby obiektów spełniających określone własności. W ten sposób uczeń ma możliwość dostrzeżenia związków prawdopodobieństwa z życiem codziennym, ma także szanse kształtowania umiejętności unikania zachowań ryzykownych, np. przy decyzjach finansowych.

W zakresie rozszerzonym ważne jest uświadomienie uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa nie ogranicza się jedynie do schematu klasycznego i używanej tam kombinatoryki. Dobrą ilustracją są przykłady zastosowania schematu Bernoulliego dla dużej liczby prób.

Pochodne. Posługiwanie się pojęciem granicy ilorazu różnicowego konieczne do zrozumienia pojęcia pochodnej wymaga dużych możliwości poznawczych. Dlatego też pochodne należy wprowadzać w pierwszej kolejności intuicyjnie, posługując się interpretacją fizyczną (prędkość chwilowa, natężenie prądu) oraz geometryczną (styczna, nachylenie wykresu). Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna.

Dowody. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija takie umiejętności, jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód. Umiejętność formułowania poprawnych rozumowań i uzasadnień jest ważna również poza matematyką. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody powinien uczeń poznać.

Twierdzenia, dowody – zakres podstawowy

1. Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych.
2. Niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów.
5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x-a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.
6. Wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
7. Twierdzenie o kątach w okręgu:
   1) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;
   2) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.
8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek *CD* jest wysokością trójkąta prostokątnego *ABC* o kącie prostym *ACB*, to $|AD|\cdot|BD|=|CD|^2$, $|AC|^2=|AB|\cdot|AD|$ oraz $|BC|^2=|AB|\cdot|BD|$.
9. Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$.
10. Wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
11. Twierdzenie sinusów.
12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia, dowody – zakres rozszerzony

1. Dowód kombinatoryczny tożsamości: jeśli $0<k<n$, to $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.
2. Wzór dwumianowy Newtona. Wzory skróconego mnożenia na $a^n \pm b^n$ (przy odpowiednich założeniach o *n*) oraz jako wniosek: dla liczb całkowitych *a* i *b*, $a-b \mid a^n-b^n$.
3. Wzory Viète'a.
4. Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.
5. Twierdzenia o istnieniu niektórych punktów szczególnych trójkąta:

a) symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie i (jako wniosek) proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie,

b) środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

6. Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg. Czworokąt wypukły *ABCD* można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|\angle BAD| + |\angle BCD| = |\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ$.
7. Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.
8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny. Dane są proste *k*, *l* i *m* leżące na jednej płaszczyźnie. Jeśli proste *k* i *l* przecinają się i prosta *n* jest do nich prostopadła, to prosta
   n jest także prostopadła do prostej *m*.
9. Twierdzenie o trzech prostopadłych. Prosta *k* przecina płaszczyznę *P* i nie jest do niej prostopadła. Prosta *l* jest rzutem prostokątnym prostej *k* na płaszczyznę *P*. Prosta *m* leży na płaszczyźnie *P*. Wówczas proste *k* i *m* są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste *l* i *m* są prostopadłe.

Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka

Liceum i technikum

dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

Informacje o podstawie programowej matematyki do szkół ponadpodstawowych

Przy pracy nad podstawą programową do szkół ponadpodstawowych, podobnie jak przy tworzeniu podstawy do ośmioletniej szkoły podstawowej, za punkt wyjścia przyjęto część podstawy gimnazjum oraz podstawę liceum ogólnokształcącego obecnie obowiązującą. Część zmian, które dokonano w stosunku do obecnej podstawy, ma charakter korekt zapisów, które okazały się być interpretowane niezgodnie z intencjami twórców poprzedniej podstawy; inne powodowane są chęcią zmiany filozofii nauczania danego zagadnienia. W niniejszym komentarzu omawiamy różnice i wyjaśniamy, na czym polegają zmiany.

Cele ogólne – zmiany

W celach ogólnych dokonano zasadniczo dwóch zmian.

1. Pierwsza – celem uproszczenia, usunięto dość sztuczny, jak się zdawało, podział na cele ogólne dla zakresu podstawowego matematyki i cele ogólne dla zakresu rozszerzonego. Przyczynia się to do zwiększenia zwięzłości podstawy.
2. Druga – dodano punkt dotyczący szeroko rozumianej sprawności rachunkowej. W podstawie sprawność rachunkowa rozumiana jest również jako umiejętność operowania wyrażeniami algebraicznymi, a nie tylko jako umiejętność przeprowadzania rachunków na liczbach.

Dodanie punktu poświęconego sprawności rachunkowej podkreśla ciągłość procesu nauczania w zakresie operowania obiektami algebraicznymi: od dodawania liczb naturalnych, poprzez cztery podstawowe działania wykonywane wpierw na liczbach naturalnych, później całkowitych, w końcu ułamkach zwykłych i dziesiętnych, aż po umiejętność dodawania, odejmowania, mnożenia i – w pewnych wypadkach – dzielenia wyrażeń algebraicznych. Wpisanie w podstawę programową sprawności rachunkowej podkreśla, że jeśli powyższy proces jest naruszony w którymś punkcie, inaczej mówiąc, jeśli uczeń zatrzymał się na którymś etapie – a praktyka szkolna pokazuje, iż dzieje się to stosunkowo często – niemożliwe jest dojście do poziomu swobodnego operowania wyrażeniami algebraicznymi. Ten poziom jest jednak niezbędny przy rozwiązywaniu większości zadań poświęconych funkcjom, układom równań, problemom obliczeniowym z geometrii i stereometrii czy rachunkowi prawdopodobieństwa.

Jednym z najważniejszych zadań w nauczaniu matematyki w szkole ponadpodstawowej jest nauczenie ucznia rozumowania matematycznego, w szczególności przeprowadzania dowodów matematycznych. Proces ten, zgodnie z podstawą programową do ośmioletniej szkoły podstawowej powinien rozpocząć się już w klasach VII–VIII szkoły podstawowej, w szkole ponadpodstawowej powinien być kontynuowany. Podstawa programowa przewiduje, że uczeń będzie potrafił dowodzić proste tożsamości algebraiczne (punkt I.2 podstawy), a także przeprowadzać dowody geometryczne (punkt VIII.12).

Nowości w podstawie

Jedną z nowości w podstawie jest umieszczenie w warunkach realizacji wskazania, aby uczeń poznał dowody niektórych twierdzeń matematycznych, związanych z treściami nauczania. Zabieg ten ma na celu uświadomienie uczniom, co to jest dowód oraz jaka jest rola dowodu w matematyce. Bardzo trudno jest wyjaśnić uczniowi, czego oczekuje się od niego, każąc mu rozwiązać zadanie na dowodzenie, jeśli wcześniej nie zobaczy on na lekcji techniki przeprowadzania dowodu. Umieszczenie wybranych dowodów w warunkach realizacji, a nie w treściach nauczania oznacza, że znajomość tych dowodów stanowi uzupełnienie treści kształcenia i takie było założenie twórców podstawy.

Treści nauczania – zmiany

1. *Liczby rzeczywiste*. Pierwszą zmianą, postulowaną przez wiele środowisk, jest rezygnacja z wprowadzania liczb niewymiernych przez rozwinięcia dziesiętne i zastąpienia tego klasyczną definicją (liczby wymierne to ilorazy liczb całkowitych). Dla ilustracji powinien pojawić się dowód niewymierności $log_2 5$ lub $\sqrt{2}$, oba dowody wymienione są w warunkach realizacji. Wysiłek ucznia nakierowany na zrozumienie, czym różni się liczba wymierna od niewymiernej, jest niewspółmiernie duży w stosunku do rozwoju umiejętności matematycznych. Odróżnianie liczby niewymiernej od wymiernej (w tym niewymierność liczby π), było uczone w szkołach z przyczyn historycznych, ale nie znajduje żadnego zastosowania poza akademicką matematyką teoretyczną. Znacznie ważniejsze jest zrozumienie dowodu niewymierności jakiejś liczby od zapamiętania, że np. π nie jest liczbą wymierną.

Druga zmiana w punkcie pierwszym jest nieco mniej widoczna. Autorzy podstawy programowej postulują nauczanie logarytmów w następujący sposób: na początku poznanie przykładów zastosowań, w szczególności zjawiska, do których opisu stosuje się funkcje logarytmiczne i wykładnicze, a dopiero później omówienie własności funkcji logarytmicznej. W podstawie programowej podano kilka przykładów takich zastosowań. Nauczyciele i autorzy podręczników są zachęcani do tego, aby znajdować więcej przykładów pokazujących obecność zagadnień matematycznych w życiu. Taki sposób nauczania uświadamia uczniom, że funkcja logarytmiczna jest niezwykle ważna w opisie przyrody.

Wpisanie punktu I.1 „operacje na liczbach rzeczywistych” jest *de facto* sprawą techniczną. Nie ma on na celu wprowadzania nowych treści, ale ma pozwolić przy rozwiązywaniu zadań na zapisy typu: $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{3}}$, które są de facto sumami liczb rzeczywistych.

2. *Algebra*. W działach poświęconych szeroko rozumianej algebrze (punkty II, III i IV podstawy) w istotny sposób zwiększono materiał do nauczania w zakresie podstawowym. Otóż zamierzeniem twórców podstawy programowej jest, aby każdy uczeń umiał swobodnie dodawać i mnożyć sumy algebraiczne, co w tej chwili nie jest spełnione. Proces uczenia jest dość długi i często żmudny. Umieszczenie dzielenia wielomianu przez dwumian i prostych wyrażeń wymiernych ma na celu urozmaicenie nauczania operowaniem wyrażeniami algebraicznymi. W zamyśle twórców podstawy rozpatrywane na lekcjach przykłady powinny być proste.

Wprowadzono więcej wzorów skróconego mnożenia na poziomie podstawowym. Często zdarzało się bowiem, że uczeń, który znał bardzo dobrze wzór na kwadrat sumy, jeśli była taka potrzeba, wymyślał wzór na sześcian sumy postaci: $(a+b)^3=a^3+b^3$lub $(a+b)^3=a^3+3ab+b^3$. Dodanie wzoru na sześcian sumy ma zapobiec tego typu pomyłkom. Wzór na a^n-b^n tak naprawdę jest cały czas nauczany w szkołach, przy okazji wzoru na sumę wyrazów szeregu geometrycznego. Wpisanie go w punkcie poświęconemu wzorom skróconego mnożenia tworzy połączenie między dwiema dziedzinami matematyki i przy tej okazji zauważa się, że różne wzory są szczególnymi przypadkami jednego twierdzenia. Wielu uczniów szybciej go zapamiętuje i łatwiej go stosuje.

Przy wprowadzaniu równań dokonano próby zmiany metody nauczania, w której kładzie się bardzo duży nacisk na obliczanie wyróżnika (zwanego deltą) w równaniu kwadratowym. Prowadzi to często do absurdalnych przypadków, gdy uczeń, mając równanie zapisane w postaci $x(x-4)=0$, aby wyznaczyć pierwiastki, oblicza wyróżnik. Oznacza to niezrozumienie tego, czym jest pierwiastek; aby temu zaradzić dodano punkt III.6 w podstawie. Według zapisów w podstawie uczeń nie musi znać wzoru na wyróżnik ani nawet nie musi zobaczyć tego wzoru na lekcji: wystarczy, aby umiał rozwiązywać równania kwadratowe przez dopełnianie do pełnego kwadratu. Wzór na wyróżnik może być wygodny przy analizowaniu równań kwadratowych (punkt III.5R podstawy w rozszerzeniu). Dzielenie wielomianu przez dwumian (punkt II.6 podstawy) również służy temu, aby uczeń lepiej zrozumiał, czym jest pierwiastek wielomianu.

3. *Geometria*. W nauczaniu geometrii postawiono na nauczanie całościowe, dlatego twierdzenia sinusów i cosinusów zamieszczono w treściach nauczania w podstawie programowej w zakresie podstawowym, a nie tak jak było poprzednio – w zakresie rozszerzonym. Twierdzenie cosinusów, które jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa, może być wykorzystane i rozumiane jako twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Przy rozwiązywaniu zadań typu: rozstrzygnij czy trójkąt o bokach 5, 6 i 10 jest prostokątny, rozwartokątny czy ostrokątny (zob. punkt VIII.2 podstawy), bardzo wygodnie jest skorzystać z twierdzenia cosinusów. Przy wyznaczaniu, naprzeciwko którego kąta leży najdłuższy bok, twierdzenie sinusów okazuje się bardzo wygodnym narzędziem.

Zadania konstrukcyjne zostały opisane w treściach nauczania jako pomoc przy nauczaniu geometrii. Otóż część nauczycieli bardzo unika takich zadań ze względu na trudności techniczne związane z przedstawieniem rozwiązania na tablicy; inni preferują wykorzystywanie programów komputerowych do konstrukcji. Nie chcąc narzucać ustalonego schematu, twórcy podstawy umieścili zadania konstrukcyjne w warunkach realizacji. Należy zaznaczyć, że punkt VIII.10 podstawy, mówiący o tym, że uczeń wskazuje szczególne punkty w trójkącie, będzie bardzo trudny w realizacji, jeśli zadania konstrukcyjne będą całkowicie pominięte. Zadania konstrukcyjne, których jest wiele, pozwalają uczniom wykazać się umiejętnością znalezienia metody konstruowania, a potem uzasadnienie jej poprawności we wszystkich konfiguracjach lub wskazania zmian w zależności od wzajemnego położenia punktów, prostych itd.

4. *Ciągi*. W dziale dotyczącym ciągów (punkt VI) wprowadzono szereg zmian, które stawiają nauczanie tego zagadnienia w nieco innym świetle. Dotychczasowa praktyka nauczania kładła nacisk przede wszystkim na ciągi arytmetyczne i geometryczne. W obecnej podstawie zmieniono główne założenia. Dwa punkty zasługują na szczególną uwagę. Po pierwsze, uczeń powinien umieć obliczyć kilka pierwszych wyrazów ciągu zadanego rekurencyjnie (punkt VI.2). Zagadnienie to można realizować w korelacji z nauczaniem informatyki, gdzie używanie rekurencji w programowaniu jest dość istotne. Dwa przykłady ciągów podane w podstawie programowej nie są przypadkowe. Pierwszy to ciąg Fibonacciego, który ma wiele własności, niektórych z nich można uczyć na lekcjach ze zdolniejszymi uczniami. Drugi przykład mówi o ciągu opisującym rozprzestrzenianie się plotki. Podobne modele można rozważać przy opisie rozwoju epidemii. W tym miejscu mamy niejako ukrytą korelację z biologią: nauczyciel matematyki lub biologii, opierając się na własnościach tego ciągu, może poruszyć takie problemy jak wyszczepialność populacji. Kluczową informacją, którą uczeń może wynieść z rozpatrywania przykładów ciągów zadanych rekurencyjnie jest to, że niektóre zjawiska fizyczne, przyrodnicze czy społeczne można opisać (w przybliżony sposób) i badać za pomocą ciągów.

Drugi z punktów zasługujących na podkreślenie to badanie monotoniczności ciągu. W zakresie podstawowym oczekujemy, że uczeń będzie badał proste ciągi o wyrazie ogólnym typu: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $d_n = n - 1 + \frac{1}{n^2}$. Można również badać monotoniczność ciągu zadanego rekurencyjnie, który pojawia się w sytuacjach wziętych z życia. Dla przykładu, ktoś ma w banku na lokacie 10 000 PLN oprocentowane na 2% w skali roku, a z lokaty pobiera rocznie 150 PLN: czy stan jego konta będzie rósł, czy malał? Naturalnie, w takim zadaniu można pokusić się o zapisanie stanu konta za pomocą zwartego wzoru, monotoniczność ciągu opisującego stan konta w kolejnych latach jest jednak o wiele łatwiejsza do zauważenia.

W zakresie rozszerzonym przywrócono twierdzenie o trzech ciągach. Dzięki takiemu sformułowaniu punktu VI.1R, typ ciągów, których granice uczeń powinien umieć obliczyć jest

dość precyzyjnie określony. Ciągi o wyrach ogólnych: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $b_n = \frac{sinn}{n}$ czy $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ mieszczą się w tym typie, ale ciągi o wyrazach ogólnych: $a_n = nsin\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{logn}{n}$ już nie. Skala trudności zadań na obliczanie granic jest dość duża, w szczególności dostępne jest sporo nietypowych zadań różnicujących ucznia zdolnego od bardzo zdolnego, które mogą być wykorzystane przy egzaminie maturalnym.
Co więcej, twierdzenie o trzech ciągach jest bardzo intuicyjne, jego dowód jest prosty i pomaga w zrozumieniu pojęcia granicy ciągu.

5. *Prawdopodobieństwo*. Do zagadnień z rachunku prawdopodobieństwa dodano obliczanie wartości oczekiwanej w prostych grach (punkt XII.5). Nie należy tego punktu traktować jako zachętę do wprowadzania całej teorii zmiennej losowej i wartości oczekiwanej, a jedynie przedstawić ogólny algorytm obliczania wartości oczekiwanej wygranej w grach typu „płacę 1 PLN za rzut kostką, jak wypadnie 6 to wygrywam 4 PLN, jeśli wypadnie coś innego: tracę zapłacone pieniądze". Jakkolwiek takiemu podejściu można zarzucać algorytmiczność i nierozwijanie umiejętności matematycznych, to intuicyjne opanowanie algorytmu jest możliwe nawet dla stosunkowo słabych uczniów. Myślą przewodnią, jaką uczeń powinien wynieść z takich lekcji jest to, że można obliczać szanse wygranej i można się kierować obliczeniami z rachunku prawdopodobieństwa w życiu codziennym. Rozwiązanie nawet kilku przykładów zadań podobnego typu może częściowo uchronić uczniów przed podejmowaniem ryzykownych działań ekonomicznych w przyszłości.

Realizując treści z zakresu rozszerzonego, zwłaszcza w klasach o profilach matematyczno--przyrodniczych, warto wyjaśnić uczniom, że prawdopodobieństwo zależy od przyjętego modelu. Służyć temu może paradoks Bertranda: zadanie polega na obliczeniu prawdopodobieństwa, że losowo wybrana cięciwa okręgu o promieniu r>0 jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, łatwo można uzasadnić trzy różne wyniki zależne od przyjętego sposobu losowego wyboru cięciwy.

Na poziomie rozszerzonym powinny pojawiać się też zadania, w których przestrzeń zdarzeń elementarnych ma tak wiele elementów, że do obliczenia ich liczby trzeba użyć kalkulatora/komputera, by zapis wyniku typu $p = \frac{10000!}{5000! \cdot 5000! \cdot 2^{10000}}$ nic nie mówił o jego wielkości ($p \approx 0.008$) i by naiwne użycie kalkulatora nic nie dawało. Trzeba też uświadamiać uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa bywa używany w takich sytuacjach. W podręcznikach powinien pojawiać się, oczywiście bez dowodu, wzór Stirlinga, bo on pozwala na szacowania wyrażeń zawierających $n!$ dla dużych n. Zadania, w których wyniku nie daje się uzyskać za pomocą wypisania wszystkich zdarzeń elementarnych są konieczne dla zrozumienia rachunku oraz przyjęcia do wiadomości tego, że wzory kombinatoryczne są użyteczne.

Obecność w treściach nauczania w podstawie programowej wzoru Bayesa, zwanego też wzorem na odwrócenie, pozwala na rozwiązywanie zadań związanych z praktycznym stosowaniem prawdopodobieństwa. Jednak trzeba pamiętać o tym, że prawdopodobieństwo warunkowe, choć jest pozornie łatwym pojęciem, stwarza uczniom trudności poznawcze.

6. *Statystyka*. W dziale statystyka pozostawiono obliczanie odchylenia standardowego, głównie ze względu na korelacje z przedmiotami eksperymentalnymi. Podobnie jak było do tej pory, w treściach nauczania nie jest wyjaśnione, dlaczego odchylenie standardowe jest ważne i jakie ma zastosowanie. Aby wyjaśnić to zagadnienie, należałoby do nauczania w szkołach wprowadzić rozkład normalny, albo przynajmniej podać regułę empiryczną, to znaczy, że dla rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej E i odchyleniu standardowym D, 95% wyników mieści się w przedziale [E-2D,E+2D]. W klasach, w których jest to możliwe, wprowadzenie takiej reguły jest wskazane, niemniej dodanie tej reguły do podstawy programowej nie jest możliwe ze względu na konieczność zwiększenia liczby godzin na nauczanie matematyki.

7. *Funkcje*. Punkt V.3 umieszczony w dziale „Funkcje" jest również ściśle powiązany ze statystyką. Zdarza się, że uczeń ma trudności z łączeniem danych z różnych źródeł, jak w przykładowych zadaniach:

1. Jaś szedł po górach. Podane są dwa wykresy. Pierwszy oznacza zależność przebytej drogi od czasu, drugi zależność wysokości od położenia. Na jakiej wysokości Jaś był o godzinie 14.00?

2. Dany jest wykres rozpuszczalności azotanu srebra w wodzie w zależności od temperatury. W jakiej temperaturze rozpuszcza się w 100g wody dokładnie połowa tej ilości azotanu srebra, jaka rozpuszcza się w temperaturze 80 stopni?

Przy bliższej analizie zadanie 1 wymaga złożenia funkcji, zadanie 2 wymaga użycia funkcji odwrotnej. W zakresie podstawowym oczekujemy jednak wyłącznie intuicyjnego posługiwania się tymi pojęciami, jak w powyższych dwóch zadaniach. Ten punkt powinien być traktowany jako wstęp do nauki o złożeniach funkcji w zakresie rozszerzonym.

8. *Optymalizacja i rachunek różniczkowy*. W dziale poświęconym rachunkowi różniczkowemu (punkt XIII) zmieniono tytuł na „Optymalizacja i rachunek różniczkowy" oraz dodano punkt w zakresie podstawowym, mówiący o stosowaniu funkcji kwadratowej do optymalizacji. Punkt ten nie jest nowością, był bowiem zamieszczany w poprzednich podstawach w działach poświęconych funkcji kwadratowej. Przeniesienie tego punktu, a także wspomniana zmiana nazwy działu mają dwa cele (dokładniej podać jakie, jest tylko po pierwsze). Po pierwsze, podkreślenie ważności optymalizacji. Uczeń powinien kończyć szkołę z przeświadczeniem, że wiele rzeczy w matematyce da się zoptymalizować; nawet jeśli z czasem zapomni konkretnych metod, będzie mógł do nich wrócić, o ile zachowa „optymalizacyjne" spojrzenie na matematykę.

Wprowadzając pochodne, należy od razu wiązać je z fizyką (prędkość chwilowa, przyspieszenie chwilowe jako granice prędkości średniej i przyspieszenia średniego w krótkich okresach czasu i wspomnieć, że tak działają prędkościomierze) oraz z geometrią (prowadzimy proste przez ustalony punkt wykresu i bliskie mu punkty wykresu, a w granicy otrzymuje styczną do wykresu). Związek pochodnej ze styczną pozwala uczniowi na geometryczne zrozumienie wzoru na wartość przybliżoną funkcji.

Jednym z głównych celów wprowadzania pochodnych jest zrozumienie przez uczniów postępowania pozwalającego na stwierdzenie, gdzie funkcja rośnie, gdzie maleje i wywnioskowania stąd, w których punkach przyjmuje największą lub najmniejszą wartość. Ponieważ w szkole w zasadzie nie ma możliwości omawiania twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą na domkniętym przedziale, więc monotoniczność jest jedynym narzędziem pozwalającym uczniom na stwierdzenie, że w jakimś punkcie funkcja ma największą lub najmniejszą wartość. Twierdzenie Fermata o zerowaniu się pochodnej w tych punktach wewnętrznych dziedziny, w których funkcja przyjmuje wartość ekstremalną jest ważne, ale pozostaje kwestia wyjaśnienia, w których punktach krytycznych rzeczywiście są przyjmowane wartości ekstremalne funkcji. Nauczanie tego twierdzenia często prowadzi do zapamiętania przez uczniów wygodnej, ale niepoprawnej reguły: ,,pochodna się zeruje, znaczy mamy maksimum albo minimum, zależnie od tego, czego szukamy". Szukanie ekstremów przez badanie monotoniczności (znaku pochodnej) pozwala na uniknięcie tego rodzaju błędów.

Twierdzenie o monotoniczności na przedziale funkcji, której pochodna ma stały znak, pozwala również na dowodzenie nierówności, więc szacowanie funkcji, np. łatwo można udowodnić, że dla x>0 zachodzi nierówność podwójna $1+\frac{x}{4}-\frac{3}{32}x^2<\sqrt[4]{1+x}<1+\frac{x}{4}$.

Twierdzenie o pochodnej funkcji potęgowej $(x^a)'=ax^{a-1}$ powinno być formułowane dla dowolnego wykładnika rzeczywistego, a dowodzone w zakresie dostępnym dla ucznia, więc co najwyżej dla wymiernych wykładników, w szczególności dla wykładnika $\frac{1}{2}$ i nie powinno się traktować wzoru na pochodną pierwiastka kwadratowego jako oddzielnego twierdzenia, co ma często miejsce. Warto podkreślić, że wspomniany wzór działa zawsze wtedy, gdy jego prawa strona ma sens, więc również dla niedodatnich x (dla niektórych a, np. dla $a=\frac{1}{3}, a=\frac{2}{7}, a=-\frac{1939}{1683}$, ale nie dla $a=-\frac{5}{2}$).

Jednym z nielicznych rzeczywistych zastosowań fizycznych osiągalnych w szkole jest prawo odbicia światła od zwierciadła w kształcie wykresu funkcji różniczkowalnej: kąt padania równy jest kątowi odbicia, które można wywnioskować z zasady Fermata: światło porusza się z punktu A do punktu B po drodze, na przebycie której potrzebuje najmniej czasu, kąty to kąty, jakie tworzy promień ze styczną do wykresu funkcji. Fakt ten wynika natychmiast z tego, że pochodna w punkcie, w którym funkcja ma najmniejszą wartość jest zerem. Można ten przykład omówić, bo uczniowie dysponować będą wzorem na pochodną funkcji $x^{1/2}$ i wzorem na pochodną złożenia.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego

z komentarzem

Szkoła ponadpodstawowa:
branżowa szkoła I stopnia

Matematyka

Preambuła podstawy programowej kształcenia ogólnego

III etap edukacyjny: branżowa szkoła I stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej

Celem edukacji w branżowej szkole I stopnia jest przygotowanie uczniów do uzyskania kwalifikacji zawodowych, a także, jak w przypadku innych typów szkół, do pracy i życia w warunkach współczesnego świata. Poza kształceniem zawodowym, branżowa szkoła I stopnia ma za zadanie wyposażyć uczniów w odpowiedni zasób wiedzy ogólnej, która stanowi fundament wykształcenia, umożliwiający zdobycie podczas dalszej nauki zróżnicowanych kwalifikacji zawodowych oraz umożliwiający kontynuację kształcenia w branżowej szkole II stopnia w zawodzie, w którym wyodrębniono kwalifikację wspólną dla zawodu nauczanego w branżowej szkole I stopnia, lub w liceum ogólnokształcącym dla dorosłych (począwszy od klasy II), a następnie w szkołach policealnych lub szkołach wyższych.

Celem kształcenia ogólnego w branżowej szkole I stopnia jest:

1) traktowanie uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności;
2) doskonalenie umiejętności myślowo-językowych, takich jak: czytanie ze zrozumieniem, pisanie twórcze, formułowanie pytań i problemów, posługiwanie się kryteriami, uzasadnianie, wyjaśnianie, klasyfikowanie, wnioskowanie, definiowanie, posługiwanie się przykładami itp.;
3) rozwijanie osobistych zainteresowań ucznia;
4) zdobywanie umiejętności formułowania samodzielnych i przemyślanych sądów, uzasadniania własnych i cudzych sądów w procesie dialogu we wspólnocie dociekającej;
5) łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia z umiejętnościami wyobrażeniowo-twórczymi;
6) rozwijanie wrażliwości społecznej, moralnej i estetycznej;
7) rozwijanie narzędzi myślowych umożliwiających uczniom obcowanie z kulturą i jej rozumienie;
8) rozwijanie u uczniów szacunku dla wiedzy, wyrabianie pasji poznawania świata i zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości.

Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w branżowej szkole I stopnia należą:

1) myślenie – rozumiane jako złożony proces umysłowy polegający na tworzeniu nowych reprezentacji za pomocą transformacji dostępnych informacji, obejmującej interakcję wielu operacji umysłowych: wnioskowanie, abstrahowanie, rozumowanie, wyobrażanie, sądzenie, rozwiązywanie problemów, twórczość. Dzięki temu, że uczniowie szkoły ponadpodstawowej uczą się równocześnie różnych przedmiotów, możliwe jest rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego,

komputacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija zarówno myślenie percepcyjne, jak i myślenie pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia;
2) czytanie – umiejętność łącząca zarówno rozumienie sensów, jak i znaczeń symbolicznych wypowiedzi; kluczowa umiejętność lingwistyczna i psychologiczna prowadząca do rozwoju osobowego, aktywnego uczestnictwa we wspólnocie, przekazywania doświadczeń między pokoleniami;
3) umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w językach obcych zarówno w mowie, jak i w piśmie jako podstawowa umiejętność społeczna, której podstawą jest znajomość norm językowych oraz tworzenie podstaw porozumienia się w różnych sytuacjach komunikacyjnych;
4) kreatywne rozwiązywanie problemów z różnych dziedzin ze świadomym wykorzystaniem metod i narzędzi wywodzących się z informatyki, w tym programowanie;
5) umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi, w tym dbałość o poszanowanie praw autorskich i bezpieczne poruszanie się w cyberprzestrzeni;
6) umiejętność samodzielnego docierania do informacji, dokonywania ich selekcji, syntezy oraz wartościowania, rzetelnego korzystania ze źródeł;
7) nabywanie nawyków systematycznego uczenia się, porządkowania zdobytej wiedzy i jej pogłębiania;
8) umiejętność współpracy w grupie i działań indywidualnych.

Jednym z najważniejszych zadań branżowej szkoły I stopnia jest rozwijanie kompetencji językowej i kompetencji komunikacyjnej stanowiących kluczowe narzędzie poznawcze we wszystkich dyscyplinach wiedzy. Istotne w tym zakresie jest łączenie teorii i praktyki językowej. Bogacenie słownictwa, w tym poznawanie terminologii właściwej dla danej dziedziny nauki, służy rozwojowi intelektualnemu ucznia, a wspomaganie i dbałość o ten rozwój należy do obowiązków każdego nauczyciela.

Ważnym zadaniem szkoły jest przygotowanie uczniów do życia w społeczeństwie informacyjnym. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni stwarzać uczniom warunki do nabywania umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz dokumentowania swojej pracy, z uwzględnieniem prawidłowej kompozycji tekstu i zasad jego organizacji, z zastosowaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych.

Realizację powyższych celów powinna wspomagać dobrze wyposażona biblioteka szkolna, dysponująca aktualnymi zbiorami, zarówno w postaci księgozbioru, jak i w postaci zasobów multimedialnych. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni odwoływać się do zasobów biblioteki szkolnej i współpracować z nauczycielami bibliotekarzami w celu wszechstronnego przygotowania uczniów do samokształcenia i świadomego wyszukiwania, selekcjonowania i wykorzystywania informacji.

Ze względu na to, że środki społecznego przekazu odgrywają coraz większą rolę, zarówno w życiu społecznym, jak i indywidualnym, każdy nauczyciel powinien poświęcić dużo uwagi edukacji medialnej, czyli wychowaniu uczniów do właściwego odbioru i wykorzystania mediów.

Ważnym celem działalności branżowej szkoły I stopnia jest skuteczne nauczanie języków obcych. Bardzo ważne jest dostosowanie zajęć do poziomu przygotowania ucznia, które uzyskał na wcześniejszych etapach edukacyjnych.

Ważnym zadaniem szkoły jest także edukacja zdrowotna, której celem jest rozwijanie u uczniów postawy dbałości o zdrowie własne i innych ludzi oraz umiejętności tworzenia środowiska sprzyjającego zdrowiu.

W procesie kształcenia ogólnego szkoła kształtuje u uczniów postawy sprzyjające ich dalszemu rozwojowi indywidualnemu i społecznemu, takie jak: uczciwość, wiarygodność, odpowiedzialność, wytrwałość, poczucie własnej wartości, szacunek dla innych ludzi, ciekawość poznawcza, kreatywność, przedsiębiorczość, kultura osobista, gotowość do uczestnictwa w kulturze, podejmowania inicjatyw oraz do pracy zespołowej. W rozwoju społecznym bardzo ważne jest kształtowanie postawy obywatelskiej, postawy poszanowania tradycji i kultury własnego narodu, a także postawy poszanowania dla innych kultur i tradycji.

Kształcenie i wychowanie w branżowej szkole I stopnia sprzyja rozwijaniu postaw obywatelskich, patriotycznych i społecznych uczniów. Zadaniem szkoły jest wzmacnianie poczucia tożsamości narodowej, etnicznej i regionalnej, przywiązania do historii i tradycji narodowych, przygotowanie i zachęcanie do podejmowania działań na rzecz środowiska szkolnego i lokalnego, w tym do angażowania się w wolontariat. Szkoła dba o wychowanie młodzieży w duchu akceptacji i szacunku dla drugiego człowieka, kształtuje postawę szacunku dla środowiska przyrodniczego, motywuje do działań na rzecz ochrony środowiska oraz rozwija zainteresowanie ekologią.

Duże znaczenie dla rozwoju młodego człowieka oraz jego sukcesów w dorosłym życiu ma nabywanie kompetencji społecznych, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie, w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami.

Strategia uczenia się przez całe życie wymaga umiejętności podejmowania ważnych decyzji, poczynając od wyboru szkoły ponadpodstawowej, kierunku studiów lub konkretnej specjalizacji zawodowej, poprzez decyzje o wyborze miejsca pracy, sposobie podnoszenia oraz poszerzania swoich kwalifikacji, aż do ewentualnych decyzji o zmianie zawodu.

Umiejętności te będą kształtowane w branżowej szkole I stopnia.

Szkoła ma stwarzać uczniom warunki do nabywania wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązywania problemów z wykorzystaniem metod i technik wywodzących się z informatyki, w tym logicznego i algorytmicznego myślenia, programowania, posługiwania się aplikacjami komputerowymi, wyszukiwania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł, posługiwania się komputerem i podstawowymi urządzeniami cyfrowymi oraz stosowania tych umiejętności na zajęciach z różnych przedmiotów, m.in. do pracy nad tekstem, wykonywania obliczeń, przetwarzania informacji i jej prezentacji w różnych postaciach.

Każda sala lekcyjna powinna mieć dostęp do internetu. Uczniowie i nauczyciele powinni mieć zapewniony dostęp do pracowni stacjonarnej lub mobilnej oraz możliwość korzystania z własnego sprzętu. Wszystkie pracownie powinny być wyposażone w monitor interaktywny (z wbudowanym komputerem i oprogramowaniem) lub zestaw: komputer, projektor i tablica interaktywna lub ekran.

Szkoła ma również przygotowywać uczniów do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji, bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami sieci.

Szkoła oraz poszczególni nauczyciele podejmują działania mające na celu zindywidualizowane wspomaganie rozwoju każdego ucznia, stosownie do jego potrzeb i możliwości.

Uczniom z niepełnosprawnościami szkoła zapewnia optymalne warunki pracy. Wybór form indywidualizacji nauczania powinien wynikać z rozpoznania potencjału każdego ucznia. Nauczyciel powinien tak dobierać zadania, aby z jednej strony nie przerastały one możliwości ucznia (uniemożliwiały osiągnięcie sukcesu), a z drugiej nie powodowały obniżenia motywacji do radzenia sobie z wyzwaniami.

Zastosowanie metody projektu, oprócz wspierania w nabywaniu opisanych wyżej kompetencji, pomaga również rozwijać u uczniów przedsiębiorczość i kreatywność oraz umożliwia stosowanie w procesie kształcenia innowacyjnych rozwiązań programowych, organizacyjnych lub metodycznych.

Opis wiadomości i umiejętności zdobytych przez ucznia w branżowej szkole I stopnia jest przedstawiany w języku efektów uczenia się, zgodnie z Polską Ramą Kwalifikacji[4].

---

[4] Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji (Dz. U. z 2017 r. poz. 986, z późn. zm.).

Działalność edukacyjna branżowej szkoły I stopnia jest określona przez:

1) szkolny zestaw programów nauczania;
2) program wychowawczo-profilaktyczny szkoły.

Szkolny zestaw programów nauczania oraz program wychowawczo-profilaktyczny szkoły tworzą spójną całość i muszą uwzględniać wszystkie wymagania opisane w podstawie programowej. Ich przygotowanie i realizacja są zadaniem zarówno całej szkoły, jak i każdego nauczyciela.

Obok zadań wychowawczych i profilaktycznych nauczyciele wykonują również działania opiekuńcze odpowiednio do istniejących potrzeb.

Działalność wychowawcza szkoły należy do podstawowych celów polityki oświatowej państwa. Wychowanie młodego pokolenia jest zadaniem rodziny i szkoły, która w swojej działalności musi uwzględniać wolę rodziców, ale także i państwa, do którego obowiązków należy stwarzanie właściwych warunków wychowania. Zadaniem szkoły jest ukierunkowanie procesu wychowawczego na wartości, które wyznaczają cele wychowania i kryteria jego oceny. Wychowanie ukierunkowane na wartości zakłada przede wszystkim podmiotowe traktowanie ucznia, a wartości skłaniają człowieka do podejmowania odpowiednich wyborów czy decyzji. W realizowanym procesie dydaktyczno-wychowawczym szkoła podejmuje działania związane z miejscami ważnymi dla pamięci narodowej, formami upamiętniania postaci i wydarzeń z przeszłości, najważniejszymi świętami narodowymi i symbolami państwowymi.

Przedmioty nauczania z zakresu kształcenia ogólnego w branżowej szkole I stopnia:

1) język polski;
2) język obcy nowożytny;
3) historia;
4) wiedza o społeczeństwie;
5) podstawy przedsiębiorczości;
6) geografia;
7) biologia;
8) chemia;
9) fizyka;
10) matematyka;
11) informatyka;
12) wychowanie fizyczne;
13) edukacja dla bezpieczeństwa;
14) wychowanie do życia w rodzinie[5];

[5] Sposób nauczania przedmiotu wychowanie do życia w rodzinie określają przepisy wydane na podstawie art. 4 u st. 3 ustawy z dnia 7 stycznia 1993 r. o planowaniu rodziny, ochronie płodu ludzkiego i warunkach dopuszczalności przerywania ciąży (Dz. U. poz. 78, z późn. zm.).

15) etyka;
16) język mniejszości narodowej lub etnicznej[6];
17) język regionalny – język kaszubski[6].

Matematyka

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na trzech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, kształceniu sprawności rachunkowej i przekazywaniu wiedzy o właściwościach obiektów matematycznych.

Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobre opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki, nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego.

Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne właściwości obiektów rzeczywistych.

[6] Przedmiot język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz przedmiot język regionalny – język kaszubski jest realizowany w szkołach (oddziałach) z nauczaniem języka mniejszości narodowych lub etnicznych oraz języka regionalnego – języka kaszubskiego, zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 13 ust. 3 ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz. U. z 2018 r. poz. 1457, z późn. zm.).

Podstawa programowa przedmiotu matematyka

III etap edukacyjny: branżowa szkoła I stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, wykonywanie działań na wyrażeniach algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy badaniu sytuacji rzeczywistych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1) Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście matematycznym oraz w formie wykresów, diagramów, tabel.
2) Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1) Przeprowadzanie rozumowań, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania.
2) Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
3) Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, gwarantujących poprawność rozwiązania.
4) Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Uczeń:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;

4) stosuje prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
5) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

II. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2;
2) dodaje, odejmuje i mnoży wyrażenia algebraiczne;
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

III. Równania i nierówności. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne i tożsamościowe;
3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

IV. Układy równań. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
2) stosuje układy równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

V. Funkcje. Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu i wzoru (również różnymi wzorami na różnych przedziałach);
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
4) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
5) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
6) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeżeli istnieje);
8) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
9) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
10) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień

geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;

11) posługuje się funkcją $f(x)=\frac{a}{x}$ w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
12) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji: $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$

VI. Trygonometria. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 90°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeżeli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
4) korzysta ze wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
5) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne).

VII. Planimetria. Uczeń:

1) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa);
2) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
3) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
4) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
5) oblicza pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
6) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
7) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
8) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
9) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

VIII. Geometria analityczna. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeżeli taki istnieje;
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład

przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej);
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

IX. Stereometria. Uczeń:
1) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną;
2) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

X. Kombinatoryka. Uczeń:
1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności.

XI. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Uczeń:
1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym w prostych sytuacjach;
2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną oraz znajduje medianę i dominantę;
3) stosuje skalę centylową.

Warunki i sposób realizacji

Oznaczenia. Uczeń powinien używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbolu Z, dla liczb wymiernych – Q, dla liczb rzeczywistych – R.

Przedziały. Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2 - 9x + 20 > 0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:

– rozwiązaniem nierówności może być każda liczba *x*, która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;
– rozwiązaniami są wszystkie liczby *x* mniejsze od 4 i wszystkie liczby *x* większe od 5;
– $x < 4$ lub $x > 5$;
– $x \in (-\infty, 4)$ lub – $x \in (5, \infty)$;
– $x \in (-\infty, 4) \cup (5, \infty)$.

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej należy podkreślać znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

Planimetria. Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczeń, który poznaje sposoby konstruowania figur, nabywa przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu. Konstrukcje można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych takich, jak np. GeoGebra.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego

z komentarzem

Szkoła ponadpodstawowa: branżowa szkoła II stopnia

Matematyka

Preambuła podstawy programowej kształcenia ogólnego

III etap edukacyjny: branżowa szkoła II stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej

Po ukończeniu branżowej szkoły I stopnia uczeń może kontynuować kształcenie w branżowej szkole II stopnia w zawodach na poziomie technika, które posiadają kwalifikację wspólną z zawodem nauczanym w branżowej szkole I stopnia.

Celem edukacji w branżowej szkole II stopnia jest przygotowanie uczniów do uzyskania kwalifikacji zawodowych, a także, jak w przypadku innych typów szkół, do pracy i życia w warunkach współczesnego świata. Poza kształceniem zawodowym branżowa szkoła II stopnia ma za zadanie wyposażyć uczniów w odpowiedni zasób wiedzy ogólnej, która stanowi fundament wykształcenia, otwierając proces uczenia się przez całe życie. Kształcenie ogólne w branżowej szkole II stopnia stanowi kontynuację kształcenia ogólnego w branżowej szkole I stopnia.

Celem kształcenia ogólnego w branżowej szkole II stopnia jest:
1) traktowanie uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności;
2) doskonalenie umiejętności myślowo-językowych, takich jak: czytanie ze zrozumieniem, pisanie twórcze, formułowanie pytań i problemów, posługiwanie się kryteriami, uzasadnianie, wyjaśnianie, klasyfikowanie, wnioskowanie, definiowanie, posługiwanie się przykładami itp.;
3) rozwijanie osobistych zainteresowań ucznia i integrowanie wiedzy przedmiotowej z różnych dyscyplin;
4) zdobywanie umiejętności formułowania samodzielnych i przemyślanych sądów, uzasadniania własnych i cudzych sądów w procesie dialogu we wspólnocie dociekającej;
5) łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia z umiejętnościami wyobrażeniowo-twórczymi;
6) rozwijanie wrażliwości społecznej, moralnej i estetycznej;
7) rozwijanie narzędzi myślowych umożliwiających uczniom obcowanie z kulturą i jej rozumienie;
8) rozwijanie u uczniów szacunku dla wiedzy, wyrabianie pasji poznawania świata i zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości.

Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w branżowej szkole II stopnia należą:
1) myślenie – rozumiane jako złożony proces umysłowy polegający na tworzeniu nowych reprezentacji za pomocą transformacji dostępnych informacji, obejmującej interakcję

wielu operacji umysłowych: wnioskowanie, abstrahowanie, rozumowanie, wyobrażanie, sądzenie, rozwiązywanie problemów, twórczość. Dzięki temu, że uczniowie szkoły ponadpodstawowej uczą się równocześnie różnych przedmiotów, możliwe jest rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego, komputacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija zarówno myślenie percepcyjne, jak i myślenie pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia;
2) czytanie – umiejętność łącząca zarówno rozumienie sensów, jak i znaczeń symbolicznych wypowiedzi; kluczowa umiejętność lingwistyczna i psychologiczna prowadząca do rozwoju osobowego, aktywnego uczestnictwa we wspólnocie, przekazywania doświadczeń między pokoleniami;
3) umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w językach obcych, zarówno w mowie, jak i w piśmie, jako podstawowa umiejętność społeczna, której podstawą jest znajomość norm językowych oraz tworzenie podstaw porozumienia się w różnych sytuacjach komunikacyjnych;
4) kreatywne rozwiązywanie problemów z różnych dziedzin ze świadomym wykorzystaniem metod i narzędzi wywodzących się z informatyki, w tym programowanie;
5) umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi, w tym dbałość o poszanowanie praw autorskich i bezpieczne poruszanie się w cyberprzestrzeni;
6) umiejętność samodzielnego docierania do informacji, dokonywania ich selekcji, syntezy oraz wartościowania, rzetelnego korzystania ze źródeł;
7) nabywanie nawyków systematycznego uczenia się, porządkowania zdobytej wiedzy i jej pogłębiania;
8) umiejętność współpracy w grupie i działań indywidualnych.

Jednym z najważniejszych zadań branżowej szkoły II stopnia jest rozwijanie kompetencji językowej i kompetencji komunikacyjnej, stanowiących kluczowe narzędzie poznawcze we wszystkich dyscyplinach wiedzy. Istotne w tym zakresie jest łączenie teorii i praktyki językowej. Bogacenie słownictwa, w tym poznawanie terminologii właściwej dla każdego z przedmiotów, służy rozwojowi intelektualnemu ucznia, a wspomaganie i dbałość o ten rozwój należy do obowiązków każdego nauczyciela.

Ważnym zadaniem szkoły jest przygotowanie uczniów do życia w społeczeństwie informacyjnym. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni stwarzać uczniom warunki do nabywania umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz dokumentowania swojej pracy, z uwzględnieniem prawidłowej kompozycji tekstu i zasad jego organizacji, z zastosowaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych.

Realizację powyższych celów powinna wspomagać dobrze wyposażona biblioteka szkolna, dysponująca aktualnymi zbiorami, zarówno w postaci księgozbioru, jak i w postaci zasobów multimedialnych. Nauczyciele wszystkich przedmiotów powinni odwoływać się do zasobów biblioteki szkolnej i współpracować z nauczycielami bibliotekarzami w celu wszechstronnego przygotowania uczniów do samokształcenia i świadomego wyszukiwania, selekcjonowania i wykorzystywania informacji.

Ponieważ środki społecznego przekazu odgrywają coraz większą rolę, zarówno w życiu społecznym, jak i indywidualnym, każdy nauczyciel powinien poświęcić dużo uwagi edukacji medialnej, czyli wychowaniu uczniów do właściwego odbioru i wykorzystania mediów.

Ważnym celem działalności branżowej szkoły II stopnia jest skuteczne nauczanie języków obcych. Bardzo ważne jest dostosowanie zajęć do poziomu przygotowania ucznia, które uzyskał na wcześniejszych etapach edukacyjnych.

Ważnym zadaniem szkoły jest także edukacja zdrowotna, której celem jest rozwijanie u uczniów postawy dbałości o zdrowie własne i innych ludzi oraz umiejętności tworzenia środowiska sprzyjającego zdrowiu.

W procesie kształcenia ogólnego branżowa szkoła II stopnia kształtuje u uczniów postawy sprzyjające ich dalszemu rozwojowi indywidualnemu i społecznemu, takie jak: uczciwość, wiarygodność, odpowiedzialność, wytrwałość, poczucie własnej wartości, szacunek dla innych ludzi, ciekawość poznawcza, kreatywność, przedsiębiorczość, kultura osobista, gotowość do uczestnictwa w kulturze, podejmowania inicjatyw oraz do pracy zespołowej. W rozwoju społecznym bardzo ważne jest kształtowanie postawy obywatelskiej, postawy poszanowania tradycji i kultury własnego narodu, a także postawy poszanowania dla innych kultur i tradycji.

Kształcenie i wychowanie w branżowej szkole II stopnia sprzyja rozwijaniu postaw obywatelskich, patriotycznych i społecznych uczniów. Zadaniem szkoły jest wzmacnianie poczucia tożsamości narodowej, etnicznej i regionalnej, przywiązania do historii i tradycji narodowych, przygotowanie i zachęcanie do podejmowania działań na rzecz środowiska szkolnego i lokalnego, w tym do angażowania się w wolontariat. Szkoła dba o wychowanie młodzieży w duchu akceptacji i szacunku dla drugiego człowieka, kształtuje postawę szacunku dla środowiska przyrodniczego, motywuje do działań na rzecz ochrony środowiska oraz rozwija zainteresowanie ekologią.

Duże znaczenie dla rozwoju młodego człowieka oraz jego sukcesów w dorosłym życiu ma nabywanie kompetencji społecznych, takich jak: komunikacja i współpraca w grupie, w tym w środowiskach wirtualnych, udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami.

Strategia uczenia się przez całe życie wymaga umiejętności podejmowania ważnych decyzji, poczynając od wyboru szkoły ponadpodstawowej, kierunku studiów lub konkretnej specjalizacji zawodowej, poprzez decyzje o wyborze miejsca pracy, sposobie podnoszenia oraz poszerzania swoich kwalifikacji, aż do ewentualnych decyzji o zmianie zawodu.

Szkoła ma stwarzać uczniom warunki do nabywania wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązywania problemów z wykorzystaniem metod i technik wywodzących się z informatyki, w tym logicznego i algorytmicznego myślenia, programowania, posługiwania się aplikacjami komputerowymi, wyszukiwania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł, posługiwania się komputerem i podstawowymi urządzeniami cyfrowymi oraz stosowania tych umiejętności na zajęciach z różnych przedmiotów, m.in. do pracy nad tekstem, wykonywania obliczeń, przetwarzania informacji i jej prezentacji w różnych postaciach.

Każda sala lekcyjna powinna mieć dostęp do internetu, uczniowie i nauczyciele powinni mieć zapewniony dostęp do pracowni stacjonarnej lub mobilnej oraz możliwość korzystania z własnego sprzętu. Wszystkie pracownie powinny być wyposażone w monitor interaktywny (z wbudowanym komputerem i oprogramowaniem) lub zestaw: komputer, projektor i tablica interaktywna lub ekran.

Szkoła ma również przygotowywać uczniów do dokonywania świadomych i odpowiedzialnych wyborów w trakcie korzystania z zasobów dostępnych w internecie, krytycznej analizy informacji, bezpiecznego poruszania się w przestrzeni cyfrowej, w tym nawiązywania i utrzymywania opartych na wzajemnym szacunku relacji z innymi użytkownikami sieci.

Szkoła oraz poszczególni nauczyciele są obowiązani do podejmowania działań mających na celu zindywidualizowane wspomaganie rozwoju każdego ucznia stosownie do jego potrzeb i możliwości. Uczniom ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi nauczanie dostosowuje się do ich możliwości psychofizycznych i tempa uczenia się.

Zastosowanie metody projektu, oprócz wspierania w nabywaniu opisanych wyżej kompetencji, pomaga również rozwijać u uczniów przedsiębiorczość i kreatywność oraz umożliwia stosowanie w procesie kształcenia innowacyjnych rozwiązań programowych, organizacyjnych lub metodycznych.

Opis wiadomości i umiejętności zdobytych przez ucznia w branżowej szkole II stopnia jest przedstawiany w języku efektów uczenia się, zgodnie z Polską Ramą Kwalifikacji[7].

---

[7] Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji (Dz. U. z 2017 r. poz. 986, z późn. zm.).

Działalność edukacyjna branżowej szkoły II stopnia jest określona przez:

1) szkolny zestaw programów nauczania, który uwzględniając wymiar wychowawczy, obejmuje całą działalność szkoły z punktu widzenia dydaktycznego;
2) program wychowawczo-profilaktyczny szkoły, obejmujący wszystkie treści i działania o charakterze wychowawczym i profilaktycznym.

Szkolny zestaw programów nauczania oraz program wychowawczo-profilaktyczny szkoły tworzą spójną całość i muszą uwzględniać wszystkie wymagania opisane w podstawie programowej. Ich przygotowanie i realizacja są zadaniem zarówno całej szkoły, jak i każdego nauczyciela.

Przedmioty nauczania z zakresu kształcenia ogólnego w branżowej szkole II stopnia:

1) język polski;
2) język obcy nowożytny;
3) matematyka;
4) informatyka;
5) wiedza o społeczeństwie;
6) wychowanie fizyczne;
7) etyka;
8) język mniejszości narodowej lub etnicznej[8];
9) język regionalny – język kaszubski[8].

Matematyka

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na trzech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, kształceniu sprawności rachunkowej i przekazywaniu wiedzy o właściwościach obiektów matematycznych.

Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobre opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki, nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie

[8] Przedmiot język mniejszości narodowej lub etnicznej oraz przedmiot język regionalny – język kaszubski jest realizowany w szkołach (oddziałach) z nauczaniem języka mniejszości narodowych lub etnicznych oraz języka regionalnego – języka kaszubskiego, zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 13 ust. 3 ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz. U. z 2018 r. poz. 1457, z późn. zm.).

wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego.

Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne właściwości obiektów rzeczywistych.

Podstawa programowa przedmiotu matematyka

III etap edukacyjny: branżowa szkoła II stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1) Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
2) Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.
3) Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
4) Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1) Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
2) Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
3) Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
4) Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia, nie trudniejsze niż:
   a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
   b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
3) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
4) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
5) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x+4| = 5$, $|x-2| < 3$, $|x+3| \geq 4$;
6) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

II. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
3) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
4) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
5) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
6) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;
7) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

III. Równania. Uczeń:

1) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
2) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się

doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

3) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdy wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

IV. Układy równań. Uczeń:

1) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
2) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$.

V. Funkcje. Uczeń:

1) odczytuje i interpretuje wartości funkcji, określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
2) wykorzystuje własności funkcji liniowej, kwadratowej i funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ do rozwiązywania zadań, również w zastosowaniach praktycznych;
3) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

VI. Ciągi. Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie jak w przykładach

   a) $\begin{cases} a_1 = 0{,}001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n), \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny, czy geometryczny;
5) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
6) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

VII. Trygonometria. Uczeń:

1) wykorzystuje definicję funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$;

2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
3) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma$;
4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (stosuje m.in. twierdzenie cosinusów), stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
3) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
4) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
5) przeprowadza dowody geometryczne.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

1) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu itp.);
2) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$;
3) oblicza odległość punktu od prostej;
4) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
5) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

X. Stereometria. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2) posługuje się pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

XI. Kombinatoryka. Uczeń zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
1) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2;
2) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Uczeń:
1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
2) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
3) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

XIII. Optymalizacja. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Warunki i sposób realizacji

Zastosowania logarytmów. Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowanie w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Poniższe przykładowe zadania ilustrują zastosowania logarytmu.

Z1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie *A* oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}\,\mathrm{cm}$ jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 25 kwietnia 2015 r. w Nepalu miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

Z2. Chory przyjął dawkę 100 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie *t* określa zależność $M\left(t\right)=a\cdot b^{t}$. Po pięciu godzinach organizm usuwa 30% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

Przekształcenia równoważne. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcanie tezy.

Zastosowania algebry. Warunkiem powodzenia procesu nauczania matematyki jest sprawne posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych i na odwrót – ilustracja geometryczna pozwala lepiej zrozumieć zagadnienia algebraiczne.

Ciągi. Zagadnienie to należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w dziale VI pkt 2 lit. a ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało). Podobny model może być użyty do opisu rozprzestrzeniania się epidemii.

Rachunek prawdopodobieństwa. Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązanymi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, np. przy analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu i omówić niektóre z nich. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty, np. eksperyment, w którym uczniowie zapisują długi ciąg orłów i reszek bez losowania, a następnie zapisują ciąg orłów i reszek powstały w wyniku losowych rzutów monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny pojawiać się długie sekwencje orłów (albo reszek), podczas gdy w rzeczywistości takie długie sekwencje orłów (lub reszek) występują. Omawianie wartości oczekiwanej nie wymaga wprowadzania pojęcia zmiennej losowej. Wskazane jest raczej posługiwanie się intuicyjnym rozumieniem wartości oczekiwanej zysku czy ustalanie liczby obiektów spełniających określone własności. W ten sposób uczeń ma możliwość dostrzeżenia związków prawdopodobieństwa z życiem codziennym, ma także szanse kształtowania umiejętności unikania zachowań ryzykownych, np. przy decyzjach finansowych.

Planimetria. Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy poznają sposoby konstruowania figur, nabywają przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu. Konstrukcje można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych takich jak np. GeoGebra.

Dowody. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija takie umiejętności jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód. Umiejętność formułowania poprawnych rozumowań i uzasadnień jest ważna również poza matematyką. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody powinien uczeń poznać.

Twierdzenia, dowody

1. Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych.
2. Niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów.
5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x-a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.
6. Wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
7. Twierdzenie o kątach w okręgu:
   a) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;
   b) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.
8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek *CD* jest wysokością trójkąta prostokątnego *ABC* o kącie prostym *ACB*, to $|AD|\cdot|BD|=|CD|^2$, $|AC|^2=|AB|\cdot|AD|$ oraz $|BC|^2=|AB|\cdot|BD|$.
9. Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$.
10. Wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
11. Twierdzenie sinusów.
12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka

Branżowa szkoła

dr hab. Maciej Borodzik, dr Michał Krych, Regina Pruszyńska

Branżowa szkoła I stopnia

Część zmian, które dokonano w stosunku do obecnej podstawy, ma charakter korekt zapisów, które okazały się być interpretowane niezgodnie z intencjami twórców poprzedniej podstawy; inne powodowane są chęcią zmiany filozofii nauczania danego zagadnienia. W niniejszym komentarzu omawiamy te różnice, które dotyczą wymagań ogólnych i wymagań szczegółowych podstawy matematyki dla branżowej szkoły I stopnia.

Cele ogólne – zmiany

W celach ogólnych dodano punkt dotyczący szeroko rozumianej sprawności rachunkowej. W podstawie sprawność rachunkowa rozumiana jest również jako umiejętność operowania wyrażeniami algebraicznymi, a nie tylko jako umiejętność przeprowadzania rachunków na liczbach.

Punkt podstawy poświęcony sprawności rachunkowej, jest zawarty w punkcie „wykorzystywanie reprezentacji". Dodanie punktu poświęconego sprawności rachunkowej podkreśla ciągłość procesu nauczania w zakresie operowania obiektami algebraicznymi: od dodawania liczb naturalnych, poprzez cztery podstawowe działania wykonywane wpierw na liczbach naturalnych, później całkowitych, w końcu ułamkach zwykłych i dziesiętnych, aż po umiejętność dodawania, odejmowania, mnożenia wyrażeń algebraicznych. Wpisanie w podstawę programową sprawności rachunkowej podkreśla, że jeśli powyższy proces jest naruszony w którymś punkcie, inaczej mówiąc, jeśli uczeń zatrzymał się na którymś etapie – a praktyka szkolna pokazuje, iż dzieje się to stosunkowo często – niemożliwe jest dojście do poziomu swobodnego operowania wyrażeniami algebraicznymi. Ten poziom jest jednak niezbędny przy rozwiązywaniu większości zadań poświęconych funkcjom, układom równań, problemom obliczeniowym z geometrii i stereometrii czy rachunkowi prawdopodobieństwa.

Treści nauczania – zmiany

1. *Liczby rzeczywiste*. Zmianą, postulowaną przez wiele środowisk, jest rezygnacja z wprowadzania liczb niewymiernych przez rozwinięcia dziesiętne i zastąpienie tego klasyczną definicją (liczby wymierne to ilorazy liczb całkowitych). Wysiłek ucznia nakierowany na zrozumienie, czym różni się liczba wymierna od niewymiernej, jest niewspółmiernie duży w stosunku do rozwoju umiejętności matematycznych. Odróżnianie liczby niewymiernej od wymiernej (w tym niewymierność liczby π), było uczone w szkołach z przyczyn historycznych, ale nie znajduje żadnego zastosowania poza akademicką matematyką teoretyczną.

2. *Algebra*. Zamierzeniem twórców podstawy programowej jest, aby każdy uczeń umiał swobodnie dodawać i mnożyć sumy algebraiczne, co w tej chwili nie jest spełnione. Wprowadzone wzory skróconego mnożenia na kwadrat sumy, kwadrat różnicy i różnicę kwadratów mają temu służyć. Proces uczenia jest dość długi i często żmudny. W zamyśle twórców podstawy, rozpatrywane na lekcjach przykłady powinny być proste.

   Przy wprowadzaniu równań dokonano próby zmiany, pokutującej w wielu szkołach, metody nauczania, w której kładzie się bardzo duży nacisk na obliczanie wyróżnika (zwanego deltą) w równaniu kwadratowym. Prowadzi to często do absurdalnych przypadków, gdy uczeń mając równanie zapisane w postaci $x(x-4)=0$, aby wyznaczyć pierwiastki oblicza wyróżnik. Według zapisów w podstawie preferuje się rozkład na czynniki.

   Uczeń nie musi znać wzoru na wyróżnik, ani nawet nie musi zobaczyć tego wzoru na lekcji, wystarczy, aby umiał rozwiązywać równania kwadratowe przez dopełnianie do pełnego kwadratu.

3. *Geometria*. Zadania konstrukcyjne zostały opisane w treściach nauczania jako pomoc przy nauczaniu geometrii. Otóż część nauczycieli bardzo unika takich zadań ze względu na trudności techniczne związane z przedstawieniem rozwiązania na tablicy; inni preferują wykorzystywanie programów komputerowych do konstrukcji. Nie chcąc narzucać ustalonego schematu, twórcy podstawy umieścili zadania konstrukcyjne w warunkach realizacji. Należy zaznaczyć, że punkt VII.8 podstawy (Treści nauczania), mówiący o tym, że uczeń wskazuje szczególne punkty w trójkącie, będzie bardzo trudny w realizacji, jeśli zadania konstrukcyjne będą całkowicie pominięte. Zadania konstrukcyjne, których jest wiele, pozwalają uczniom wykazać się umiejętnością znalezienia metody konstruowania, a potem uzasadnienie jej poprawności we wszystkich konfiguracjach lub wskazania zmian w zależności od wzajemnego położenia punktów, prostych itd.

4. *Funkcje*. Punkt V.1 umieszczony w dziale „Funkcje" jest również ściśle powiązany ze statystyką. Zdarza się, że uczeń ma trudności z łączeniem danych z różnych źródeł, jak w przykładowych zadaniach:
   1. Jaś szedł po górach. Podane są dwa wykresy. Pierwszy oznacza zależność przebytej drogi od czasu, drugi zależność wysokości od położenia. Na jakiej wysokości Jaś był o godzinie 14.00?
   2. Dany jest wykres rozpuszczalności azotanu srebra w wodzie w zależności od temperatury. W jakiej temperaturze rozpuszcza się w 100g wody dokładnie połowa tej ilości azotanu srebra, jaka rozpuszcza się w temperaturze 80 stopni?

Przy bliższej analizie zadanie pierwsze wymaga złożenia funkcji, zadanie drugie wymaga użycia funkcji odwrotnej. Oczekujemy jednak wyłącznie intuicyjnego posługiwania się tymi pojęciami, jak w powyższych dwóch zadaniach.

Branżowa szkoła II stopnia

Treści nauczania podstawy programowej z matematyki mają układ spiralny, co umożliwi uczniom przypomnienie i rozszerzenie zagadnień omawianych na lekcjach matematyki w branżowej szkole I stopnia.

Część dokonanych zmian w stosunku do obecnej podstawy, ma charakter korekt zapisów, które okazały się być interpretowane niezgodnie z intencjami twórców poprzedniej podstawy; inne powodowane są chęcią zmiany filozofii nauczania danego zagadnienia. W niniejszym komentarzu omawiamy te różnice i wyjaśniamy na czym polegają zmiany.

Cele ogólne – zmiany

W celach ogólnych dodano punkt dotyczący szeroko rozumianej sprawności rachunkowej. W podstawie sprawność rachunkowa rozumiana jest również jako umiejętność operowania wyrażeniami algebraicznymi, a nie tylko jako umiejętność przeprowadzania rachunków na liczbach.

Dodanie punktu poświęconego sprawności rachunkowej podkreśla ciągłość procesu nauczania w zakresie operowania obiektami algebraicznymi: od dodawania liczb naturalnych, poprzez cztery podstawowe działania wykonywane wpierw na liczbach naturalnych, później całkowitych, w końcu ułamkach zwykłych i dziesiętnych, aż po umiejętność dodawania, odejmowania, mnożenia i – w pewnych przypadkach – dzielenia wyrażeń algebraicznych. Wpisanie w podstawę programową sprawności rachunkowej podkreśla, że jeśli powyższy proces jest naruszony w którymś punkcie, inaczej mówiąc, jeśli uczeń zatrzymał się na którymś etapie – a praktyka szkolna pokazuje, iż dzieje się to stosunkowo często – niemożliwe jest dojście do poziomu swobodnego operowania wyrażeniami algebraicznymi. Ten poziom jest jednak niezbędny przy rozwiązywaniu większości zadań poświęconych funkcjom, układom równań, problemom obliczeniowym z geometrii i stereometrii czy rachunkowi prawdopodobieństwa.

Jednym z najważniejszych zadań w nauczaniu matematyki w szkole ponadpodstawowej jest nauczenie ucznia rozumowania matematycznego, w szczególności przeprowadzania dowodów matematycznych. Proces ten, zgodnie z podstawą programową do ośmioletniej szkoły podstawowej powinien rozpocząć się już w klasach VII – VIII szkoły podstawowej, w szkole ponadpodstawowej powinien być kontynuowany. Podstawa programowa przewiduje, że uczeń będzie potrafił dowodzić proste tożsamości algebraiczne (Treści nauczania, punkt I.2 podstawy), a także przeprowadzać dowody geometryczne (Treści nauczania, punkt VIII.5).

Treści nauczania – zmiany

1. *Liczby rzeczywiste*. Pierwszą zmianą, postulowaną przez wiele środowisk, jest rezygnacja z wprowadzania liczb niewymiernych przez rozwinięcia dziesiętne i zastąpienie tego klasyczną definicją (liczby wymierne to ilorazy liczb całkowitych). Dla ilustracji powinien pojawić się dowód niewymierności $log_2 5$ lub $\sqrt{2}$. Oba dowody wymienione są w warunkach realizacji. Wysiłek ucznia nakierowany na zrozumienie, czym różni się liczba wymierna od niewymiernej, jest niewspółmiernie duży w stosunku do rozwoju umiejętności matematycznych. Odróżnianie liczby niewymiernej od wymiernej (w tym niewymierność liczby π), było uczone w szkołach z przyczyn historycznych, ale nie znajduje żadnego zastosowania poza akademicką matematyką teoretyczną. Znacznie ważniejsze jest zrozumienie dowodu niewymierności jakiejś liczby od zapamiętania, że np. π nie jest liczbą wymierną.

   Druga zmiana w punkcie pierwszym jest nieco mniej widoczna. Autorzy podstawy programowej postulują nauczanie logarytmów w następujący sposób: na początku poznanie przykładów zastosowań, w szczególności zjawiska do których opisu stosuje się funkcje logarytmiczne i wykładnicze, a dopiero później omówienie własności funkcji logarytmicznej. W podstawie programowej podano kilka przykładów takich zastosowań. Nauczyciele i autorzy podręczników są zachęcani do tego, aby znajdować więcej przykładów pokazujących obecność zagadnień matematycznych w życiu. Taki sposób nauczania uświadamia uczniom, że funkcja logarytmiczna jest niezwykle ważna w opisie przyrody.

   Wpisanie punktu I.1 „działania na liczbach rzeczywistych” jest sprawą techniczną. Nie ma on na celu wprowadzania nowych treści, ale uniknięcie odwołań od wyniku egzaminu maturalnego, jeśli w rozwiązaniu zadania pojawi się wyrażenie np. $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$, które jest de facto sumą liczb rzeczywistych.

2. *Algebra*. Zamierzeniem twórców podstawy programowej jest, aby każdy uczeń umiał swobodnie dodawać i mnożyć sumy algebraiczne, co w tej chwili nie jest spełnione. Proces uczenia jest dość długi i często żmudny. Umieszczenie dzielenia wielomianu przez dwumian i prostych wyrażeń wymiernych ma na celu urozmaicenie nauczania operowaniem wyrażeniami algebraicznymi. W zamyśle twórców podstawy, rozpatrywane na lekcjach przykłady powinny być proste.

   Wprowadzono więcej wzorów skróconego mnożenia. Zdarzało się bowiem, że uczeń który znał bardzo dobrze wzór na kwadrat sumy, jeśli była taka potrzeba, wymyślał wzór na sześcian sumy postaci: $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ lub $(a+b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$. Dodanie wzoru na sześcian sumy ma zapobiec tego typu pomyłkom. Wzór na $a^n - b^n$ tak naprawdę jest cały czas nauczany w szkołach, przy okazji wzoru na sumę wyrazów szeregu geometrycznego. Wpisanie go w punkcie poświęconym wzorom skróconego mnożenia łączy dwie dziedziny matematyki i przy tej okazji zauważa się, że różne wzory są szczególnymi przypadkami jednego twierdzenia. Wielu uczniów szybciej go zapamiętuje i łatwiej go stosuje.

Przy wprowadzaniu równań dokonano próby zmiany, pokutującej w wielu szkołach, metody nauczania, w której kładzie się bardzo duży nacisk na obliczanie wyróżnika (zwanego deltą) w równaniu kwadratowym. Prowadzi to często do absurdalnych przypadków, gdy uczeń mając równanie zapisane w postaci $x(x-4)=0$, aby wyznaczyć pierwiastki oblicza wyróżnik. Oznacza to dramatyczne niezrozumienie tego, czym jest pierwiastek. Według zapisów w podstawie uczeń nie musi znać wzoru na wyróżnik, ani nawet nie musi zobaczyć tego wzoru na lekcji, wystarczy, aby umiał rozwiązywać równania kwadratowe przez dopełnianie do pełnego kwadratu. Dzielenie wielomianu przez dwumian (Treści nauczania, punkt II.5 podstawy) również służy temu, aby uczeń lepiej zrozumiał, czym jest pierwiastek wielomianu.

3. *Trygonometria i geometria*. W nauczaniu geometrii postawiono na nauczanie całościowe, dlatego twierdzenia sinusów i cosinusów zamieszczono w treściach nauczania. Twierdzenie cosinusów, które jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa, może być wykorzystane i rozumiane jako twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Przy rozwiązywaniu zadań typu: rozstrzygnij czy trójkąt o bokach 5, 6 i 10 jest prostokątny, rozwartokątny czy ostrokątny (zob. punkt VIII.2 podstawy), bardzo wygodnie jest skorzystać z twierdzenia cosinusów. Przy wyznaczaniu, naprzeciwko którego kąta leży najdłuższy bok, twierdzenie sinusów okazuje się bardzo wygodnym narzędziem.

   Zadania konstrukcyjne zostały opisane w treściach nauczania jako pomoc przy nauczaniu geometrii. Otóż część nauczycieli bardzo unika takich zadań ze względu na trudności techniczne związane z przedstawieniem rozwiązania na tablicy; inni preferują wykorzystywanie programów komputerowych do konstrukcji. Nie chcąc narzucać ustalonego schematu, twórcy podstawy umieścili zadania konstrukcyjne w warunkach realizacji.

4. *Ciągi*. W dziale dotyczącym ciągów (Treści nauczania, punkt VI) wprowadzono szereg zmian, które stawiają nauczanie tego zagadnienia w nieco inny sposób. Dotychczasowa praktyka nauczania kładła nacisk przede wszystkim na ciągi arytmetyczne i geometryczne. W obecnej podstawie zmieniono główne założenia. Dwa punkty zasługują na szczególną uwagę.

   Po pierwsze, uczeń powinien umieć obliczyć kilka pierwszych wyrazów ciągu zadanego rekurencyjnie (punkt VI.2). Zagadnienie to można realizować w korelacji z nauczaniem informatyki, gdzie używanie rekurencji w programowaniu jest dość istotne. Dwa przykłady ciągów podane w podstawie programowej nie są przypadkowe. Pierwszy to ciąg Fibonacciego, który ma wiele pięknych własności, niektórych z nich można uczyć na lekcjach ze zdolniejszymi uczniami. Drugi przykład mówi o ciągu opisującym rozprzestrzenianie się plotki. Podobne modele można rozważać przy opisie rozwoju epidemii. W tym miejscu mamy niejako ukrytą korelację z biologią: nauczyciel matematyki lub biologii, opierając się na własnościach tego ciągu może poruszyć takie problemy jak wyszczepialność populacji. Kluczową informacją, którą uczeń może wynieść z rozpatrywania przykładów ciągów zadanych rekurencyjnie jest to, że niektóre zjawiska fizyczne, przyrodnicze czy społeczne można opisać (w przybliżony sposób) i badać za pomocą ciągów.

Drugi z punktów wymagań szczegółowych związanych z ciągami, zasługujących na podkreślenie, to badanie monotoniczności ciągu. Autorzy podstawy oczekują, że uczeń będzie badał proste ciągi o wyrazach ogólnych typu: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $d_n = n - 1 + \frac{1}{n^2}$. Można również badać monotoniczność ciągu zadanego rekurencyjnie, który pojawia się w sytuacjach wziętych z życia. Dla przykładu, ktoś ma w banku na lokacie 10000 PLN oprocentowane na 2% w skali roku, a z lokaty pobiera rocznie 150 PLN: czy stan jego konta będzie rósł czy malał? Naturalnie, w takim zadaniu można pokusić się o zapisanie stanu konta za pomocą zwartego wzoru, monotoniczność ciągu opisującego stan konta w kolejnych latach jest jednak o wiele łatwiejsza do zauważenia.

5. *Prawdopodobieństwo*. Do zagadnień z rachunku prawdopodobieństwa dodano obliczanie wartości oczekiwanej w prostych grach (punkt XII.3). Nie należy tego punktu traktować jako zachętę do wprowadzania całej teorii zmiennej losowej i wartości oczekiwanej, a jedynie przedstawić ogólny algorytm obliczania wartości oczekiwanej wygranej w grach typu „płacę 1 PLN za rzut kostką, jak wypadnie 6 to wygrywam 4 PLN, jeśli wypadnie coś innego: tracę zapłacone pieniądze”. Jakkolwiek takiemu podejściu można zarzucać algorytmiczność i nierozwijanie umiejętności matematycznych, to intuicyjne opanowanie algorytmu jest możliwe nawet dla stosunkowo słabych uczniów. Myślą przewodnią, jaką uczeń powinien wynieść z takich lekcji jest to, że można obliczać szanse wygranej i można się kierować obliczeniami z rachunku prawdopodobieństwa w życiu codziennym. Rozwiązanie nawet kilku przykładów zadań podobnego typu może w przyszłości częściowo uchronić uczniów przed podejmowaniem ryzykownych działań ekonomicznych.

6. *Statystyka*. W dziale statystyka pozostawiono obliczanie odchylenia standardowego, głównie ze względu na korelacje z przedmiotami eksperymentalnymi. Podobnie jak było do tej pory, w treściach nauczania nie jest wyjaśnione, dlaczego odchylenie standardowe jest ważne i jakie ma zastosowanie. Aby wyjaśnić to zagadnienie należałoby do nauczania w szkołach wprowadzić rozkład normalny, albo przynajmniej podać regułę empiryczną, to znaczy, że dla rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej E i odchyleniu standardowym D, 95% wyników mieści się w przedziale

[E- 2D,E+2D]. W klasach, w których jest to możliwe, wprowadzenie takiej reguły jest wskazane, niemniej dodanie tej reguły do podstawy programowej nie jest możliwe ze względu na konieczność zwiększenia liczby godzin na nauczanie matematyki.

7. *Funkcje*. Punkt V.1 Treści nauczania umieszczony w dziale „Funkcje" jest również ściśle powiązany ze statystyką. Zdarza się, że uczeń ma trudności z łączeniem danych z różnych źródeł, jak w przykładowych zadaniach:
   1. Jaś szedł po górach. Podane są dwa wykresy. Pierwszy oznacza zależność przebytej drogi od czasu, drugi zależność wysokości od położenia. Na jakiej wysokości Jaś był o godzinie 14.00?
   2. Dany jest wykres rozpuszczalności azotanu srebra w wodzie w zależności od temperatury. W jakiej temperaturze rozpuszcza się w 100g wody dokładnie połowa tej ilości azotanu srebra, jaka rozpuszcza się w temperaturze 80 stopni?

   Przy bliższej analizie zadanie pierwsze wymaga złożenia funkcji, zadanie drugie wymaga użycia funkcji odwrotnej. Oczekujemy jednak wyłącznie intuicyjnego posługiwania się tymi pojęciami, jak w powyższych dwóch zadaniach.

8. *Optymalizacja*. Dodano punkt, mówiący o stosowaniu funkcji kwadratowej do optymalizacji. Punkt ten nie jest nowością, był bowiem zamieszczany w poprzednich podstawach w działach poświęconych funkcji kwadratowej. Przeniesienie tego punktu, a także wspomniana zmiana nazwy działu ma na celu podkreślenie ważności optymalizacji. Uczeń powinien kończyć szkołę z przeświadczeniem, że wiele rzeczy w matematyce da się zoptymalizować; nawet jeśli z czasem zapomni konkretnych metod, będzie mógł do nich wrócić, o ile zachowa „optymalizacyjne" spojrzenie na matematykę.

Nowości w podstawie

Nowością w podstawie jest umieszczenie w warunkach realizacji wskazania, aby uczeń poznał dowody niektórych twierdzeń matematycznych, związanych z treściami nauczania. Zabieg ten ma na celu uświadomienie uczniom, co to jest dowód oraz jaka jest rola dowodu w matematyce. Bardzo trudno jest wyjaśnić uczniowi, czego oczekuje się od niego, polecając mu rozwiązać zadanie na dowodzenie, jeśli wcześniej nie zobaczy on na lekcji techniki przeprowadzania dowodu.