MATURA PODSTAWOWA CZERWIEC 2023

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb całkowitych dodatnich spełniających nierówność $|x+5| < 15$ jest

A. 9 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 21

Zadanie 2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x iloczyn $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$ jest równy

A. x **B.** $\sqrt[10]{x}$ **C.** $\sqrt[18]{x}$ **D.** x^2

Zadanie 3. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k reszta z dzielenia liczby $49k^2 + 7k - 2$ przez 7 jest równa 5.

Zadanie 4. (0–1)

Klient wpłacił do banku $30\,000$ zł na lokatę dwuletnią. Po każdym rocznym okresie oszczędzania bank dolicza odsetki w wysokości 7% od kwoty bieżącego kapitału znajdującego się na lokacie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po dwóch latach oszczędzania łączna wartość doliczonych odsetek na tej lokacie (bez uwzględniania podatków) jest równa

A. 2100 zł **B.** 2247 zł **C.** 4200 zł **D.** 4347 zł

Zadanie 5. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_2 \frac{1}{8} + \log_2 4$ jest równa

A. (-1) **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** 5

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2$ jest równa

A. 0 **B.** (-10) **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $2+2\sqrt{5}$

Zadanie 7. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od 0 i 2 wyrażenie $\frac{x^2+x}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{x}$ jest równe

A. $\frac{x^2+1}{x-2}$ **B.** $\frac{x+1}{2}$ **C.** $\frac{x^2}{(x-2)^2}$ **D.** $\frac{x+1}{x-2}$

Zadanie 8. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$x(2x-1) < 2x$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{(x^2-3x)(x+2)}{x^2-4} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

A. jedno rozwiązanie.

B. dwa rozwiązania.

C. trzy rozwiązania.

D. cztery rozwiązania.

Zadanie 11. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresy funkcji liniowych $f(x) = (2m + 3)x + 5$ oraz $g(x) = -x$ nie mają punktów wspólnych dla

A. $m = -2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Zadanie 12. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $y = ax + b$ przechodzi przez punkty $A = (-3, -1)$ oraz $B = (4, 3)$.

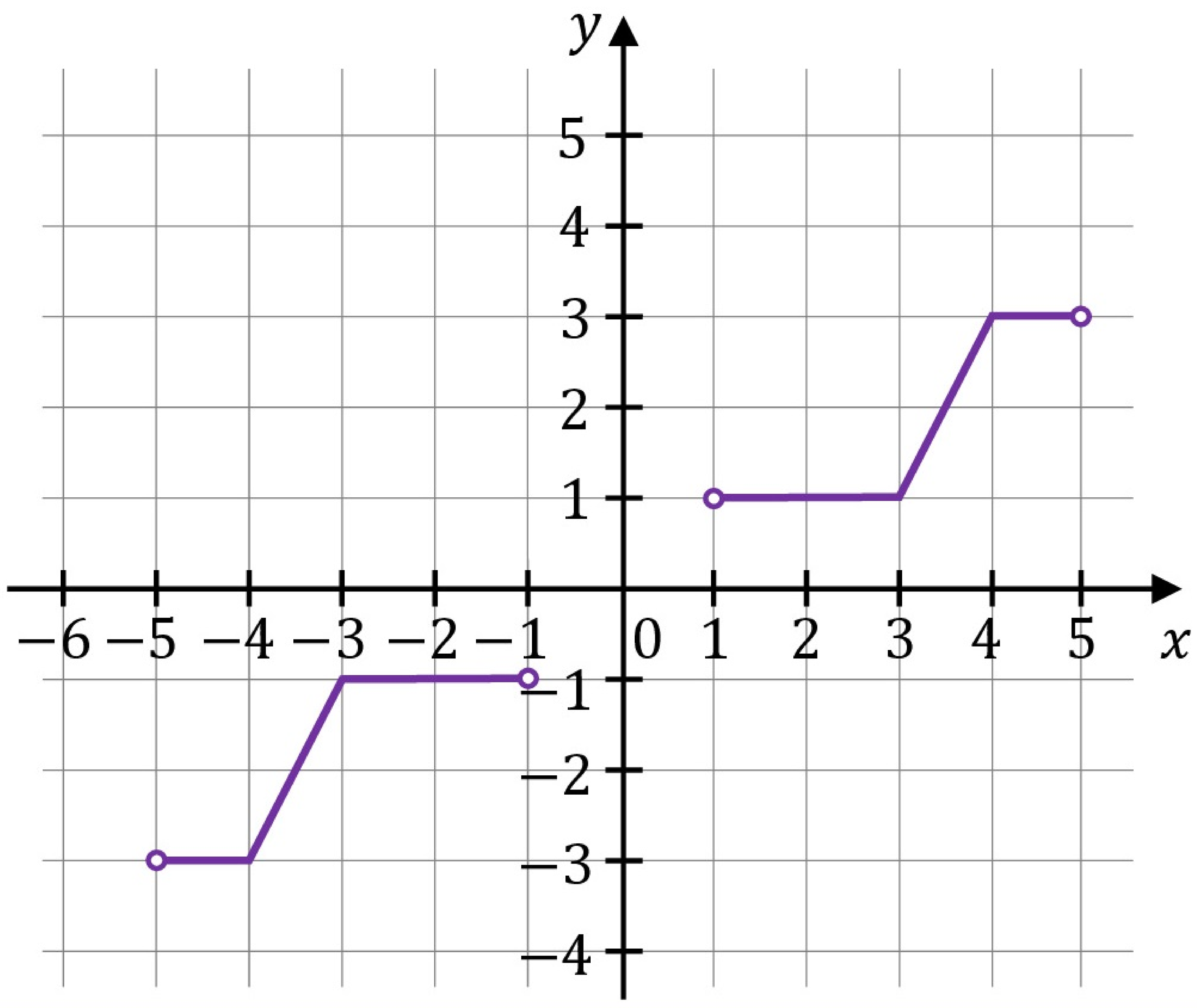
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik a w równaniu tej prostej jest równy

A. (-4) **B.** $\left(-\frac{1}{2}\right)$ **C.** 2 **D.** $\frac{4}{7}$

Zadanie 13.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) narysowano wykres funkcji $y = f(x)$ (zobacz rysunek).



Zadanie 13.1. (0–2)

Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–F.

Dziedziną funkcji f jest zbiór	
Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór	

A. $[-3, -1] \cup [1, 3]$ **D.** $[-5, -1] \cup [1, 5]$

B. $(-3, 3)$ **E.** $(-5, 5)$

C. $(-3, -1) \cup (1, 3)$ **F.** $(-5, -1) \cup (1, 5)$

Zadanie 13.2. (0–1)

Zapisz poniżej zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) < -1$.

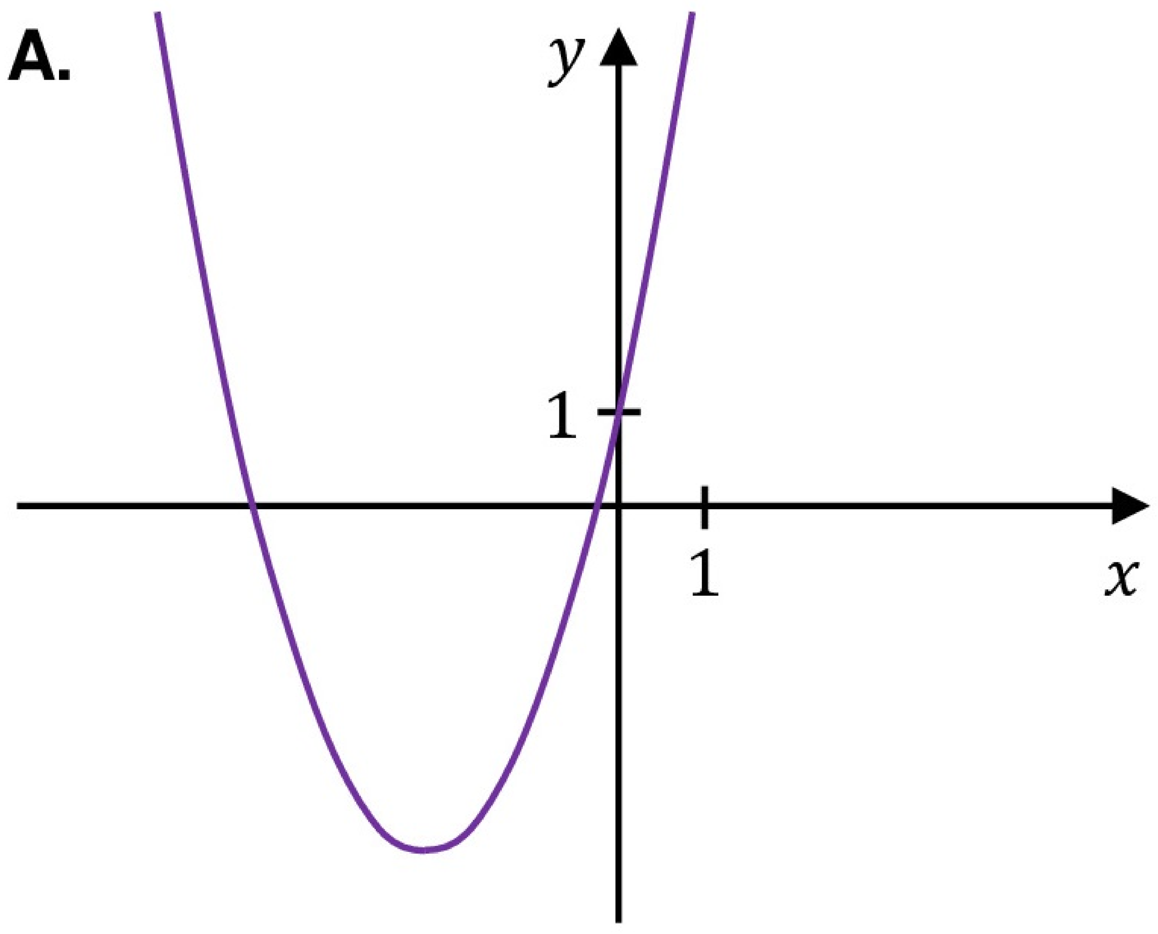
Zadanie 14. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + 1$, gdzie a oraz b są pewnymi liczbami rzeczywistymi, takimi, że $a < 0$ i $b > 0$. Na jednym z rysunków A–D przedstawiono fragment wykresu tej funkcji w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y).

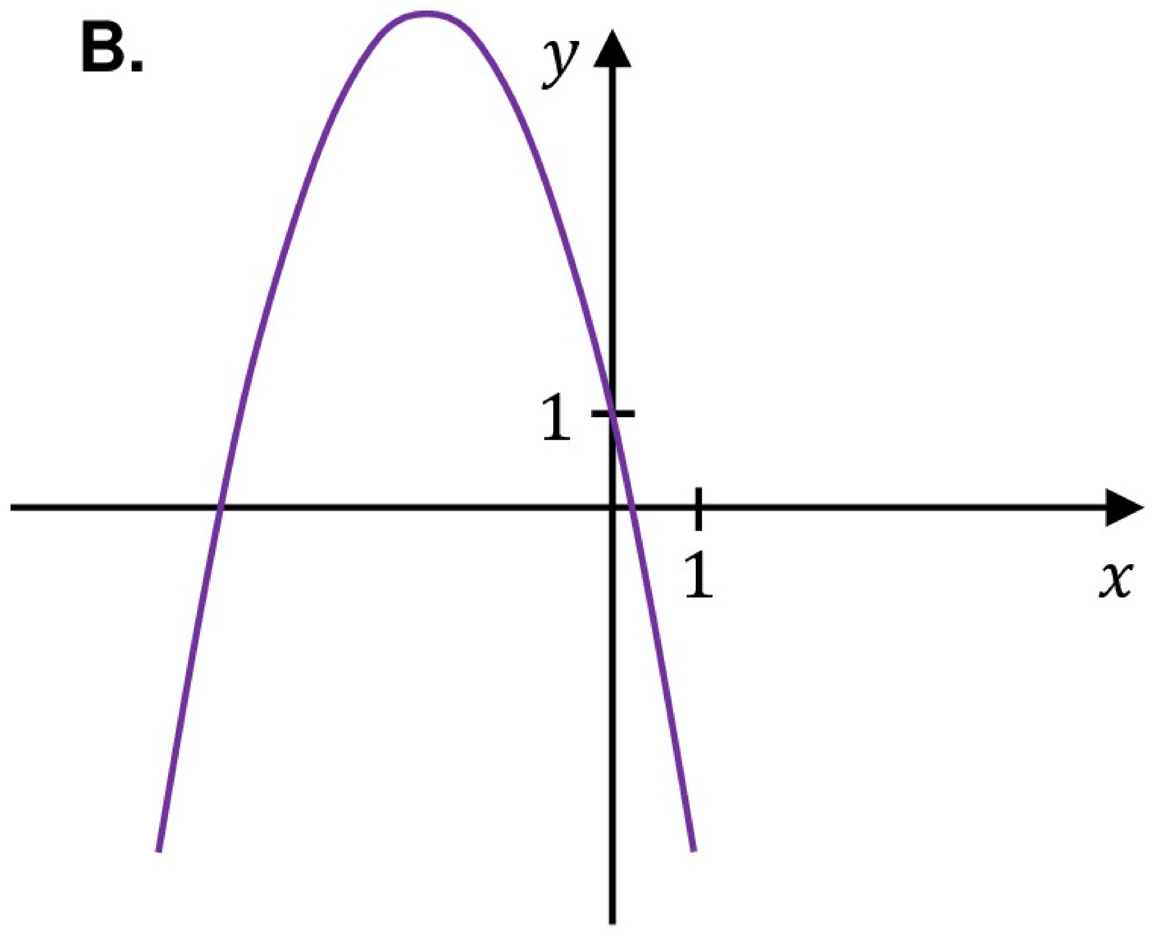
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Fragment wykresu funkcji f przedstawiono na rysunku

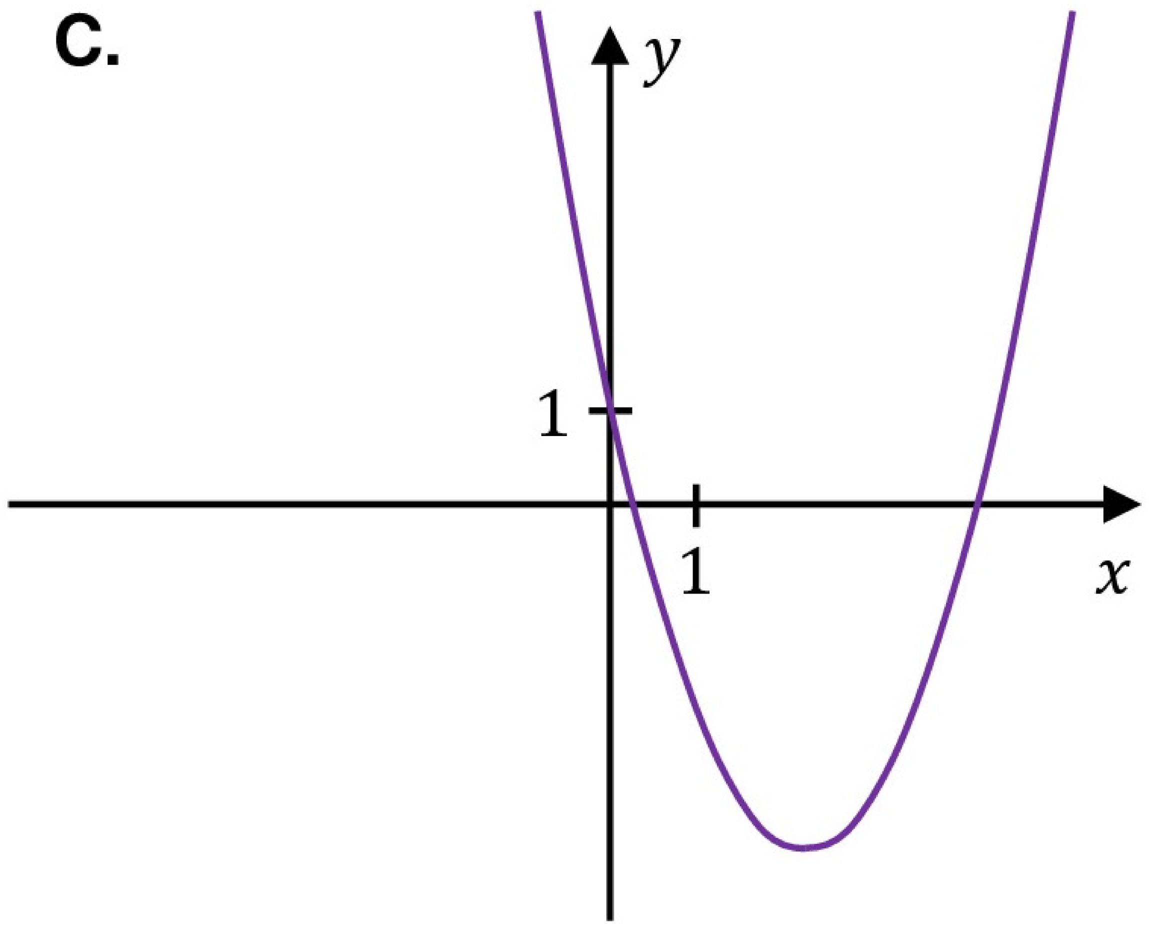
A.



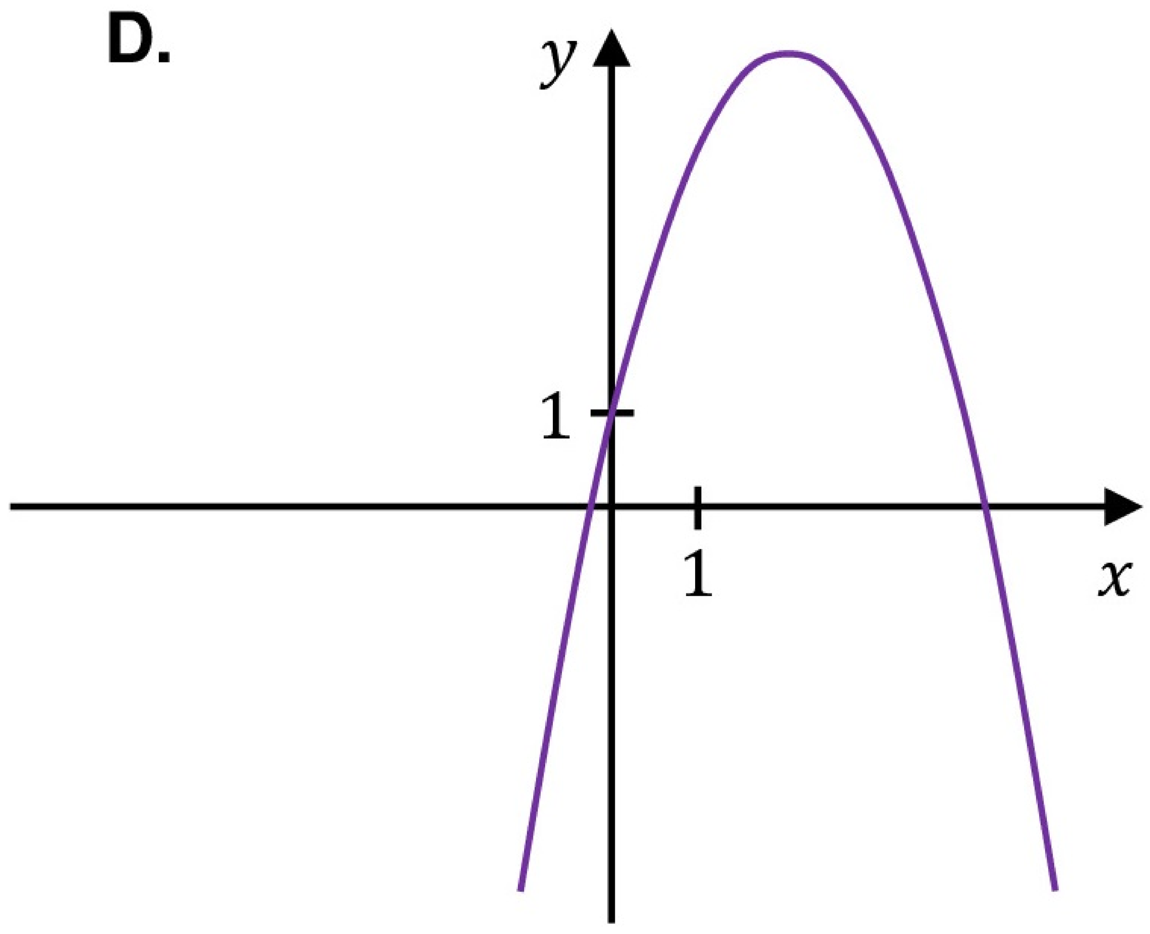
B.



C.



D.



Zadanie 15.

Masa m leku $\mathcal{L}$ zażytego przez chorego zmienia się w organizmie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$m(t) = m_0 \cdot (0{,}6)^{0{,}25t}$$

gdzie:

m_0 – masa (wyrażona w mg) przyjętej w chwili $t = 0$ dawki leku,

t – czas (wyrażony w godzinach) liczony od momentu $t = 0$ zażycia leku.

Zadanie 15.1. (0–1)

Chory przyjął jednorazowo lek $\mathcal{L}$ w dawce 200 mg.

Oblicz, ile mg leku $\mathcal{L}$ pozostanie w organizmie chorego po 12 godzinach od momentu przyjęcia dawki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.2. (0–1)

Liczby $m(2{,}5), m(4{,}5), m(6{,}5)$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny.

Oblicz iloraz tego ciągu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{n-2}{3}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wyrazów tego ciągu mniejszych od 10 jest równa

A. 28 **B.** 31 **C.** 32 **D.** 27

Zadanie 17. (0–1)

Trzywyrazowy ciąg $(1, 4, a + 5)$ jest arytmetyczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba a jest równa

A. 0 **B.** 7 **C.** 2 **D.** 11

Zadanie 18. (0–1)

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. W tym ciągu $a_1 = 3{,}75$ oraz $a_2 = -7{,}5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa

A. $11{,}25$ **B.** $(-18{,}75)$ **C.** 15 **D.** (-15)

Zadanie 19. (0–1)

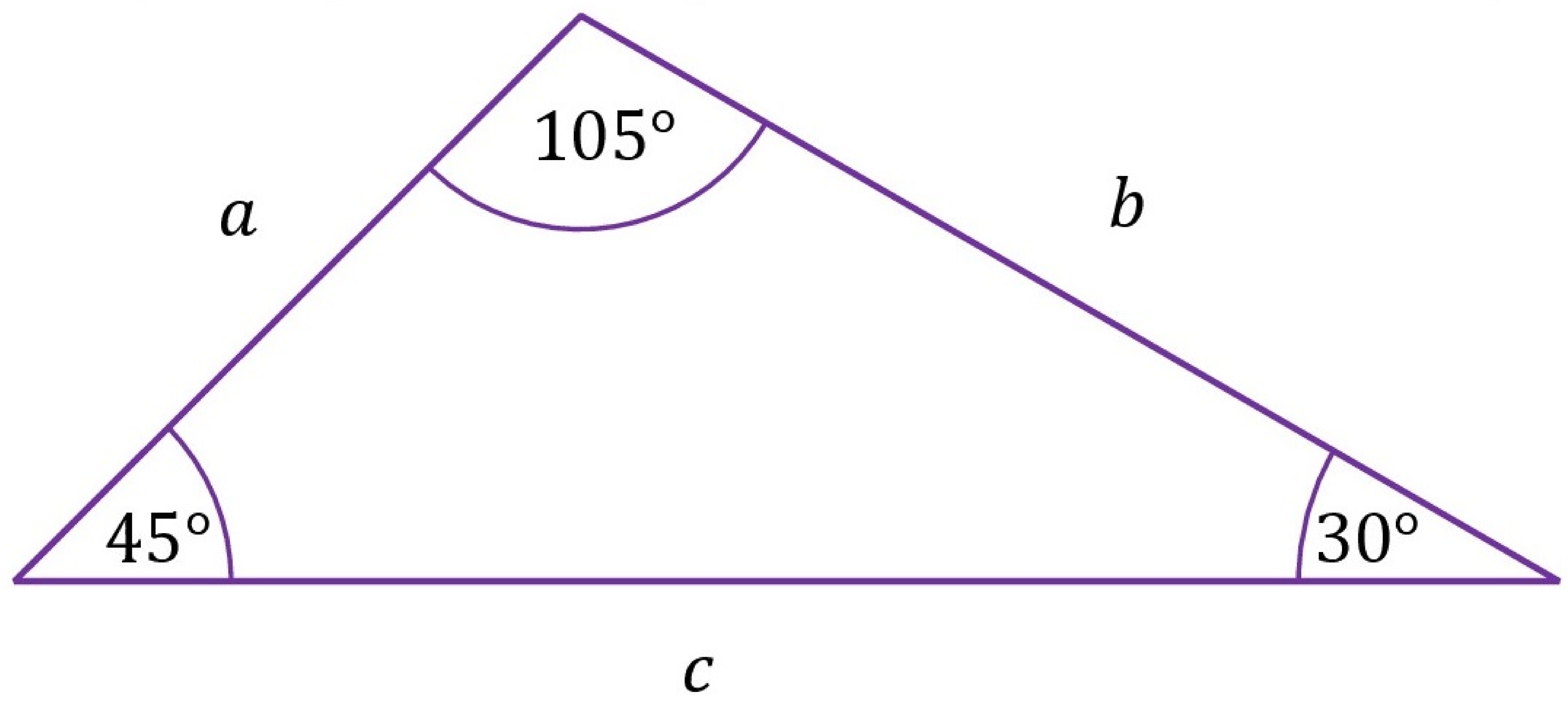
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$ jest równe

A. $\cos^3\alpha$ **B.** $\sin^2\alpha$ **C.** $1 - \sin^2\alpha$ **D.** $\cos\alpha$

Zadanie 20. (0–2)

Dany jest trójkąt, którego kąty mają miary $30°$, $45°$ oraz $105°$. Długości boków trójkąta, leżących naprzeciwko tych kątów są równe – odpowiednio – a, b oraz c (zobacz rysunek).



Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wykropkowanych miejscach.

Pole tego trójkąta poprawnie określają wyrażenia oznaczone literami:

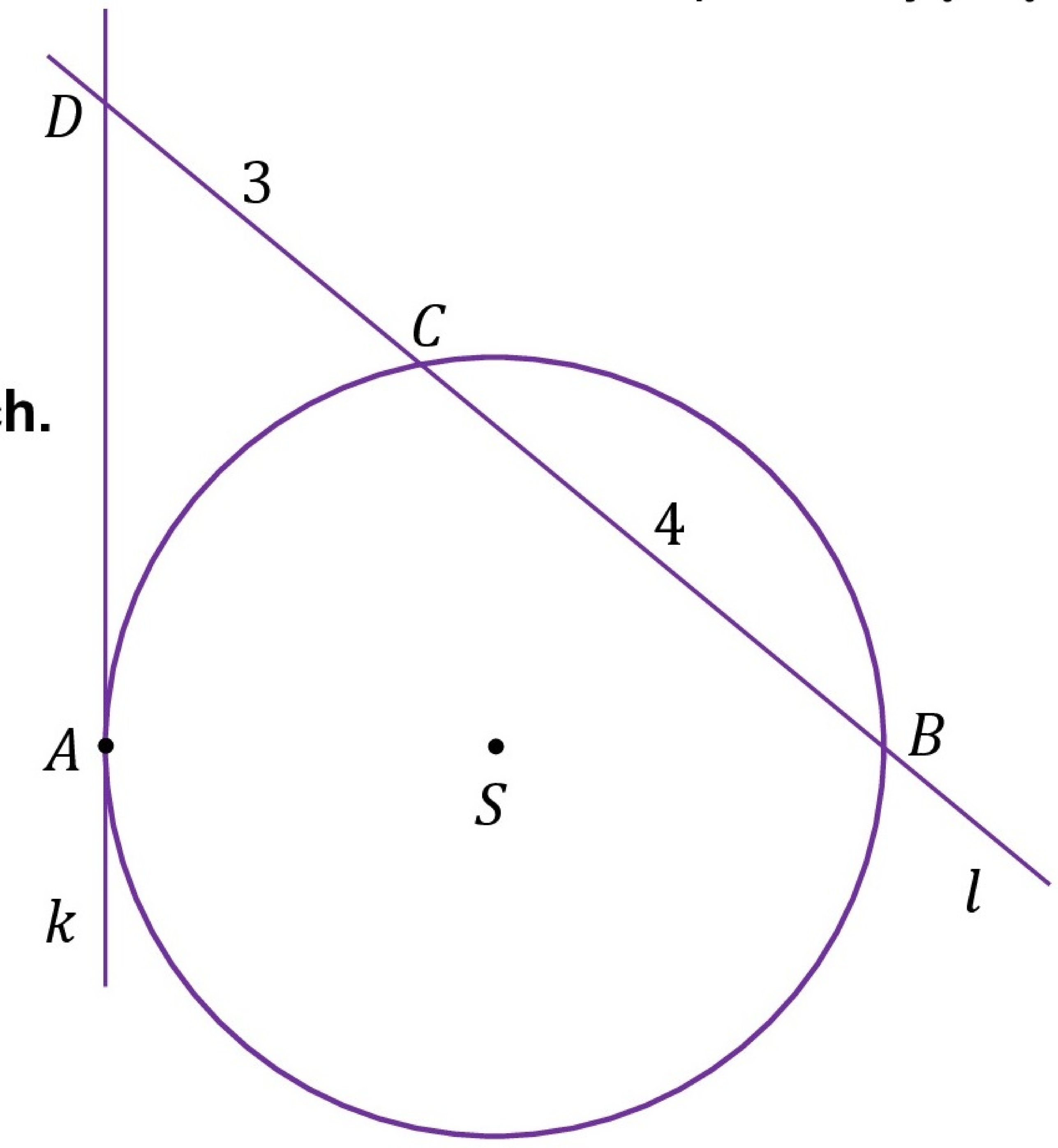
.... oraz ....

A. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot c$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a \cdot c$ **E.** $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c$

B. $\frac{1}{4} \cdot a \cdot c$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b \cdot c$ **F.** $\frac{1}{4} \cdot b \cdot c$

Zadanie 21. (0–1)

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku S. Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Prosta l przecina ten okrąg w punktach B i C. Proste k i l przecinają się w punkcie D, przy czym $|BC| = 4$ i $|CD| = 3$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

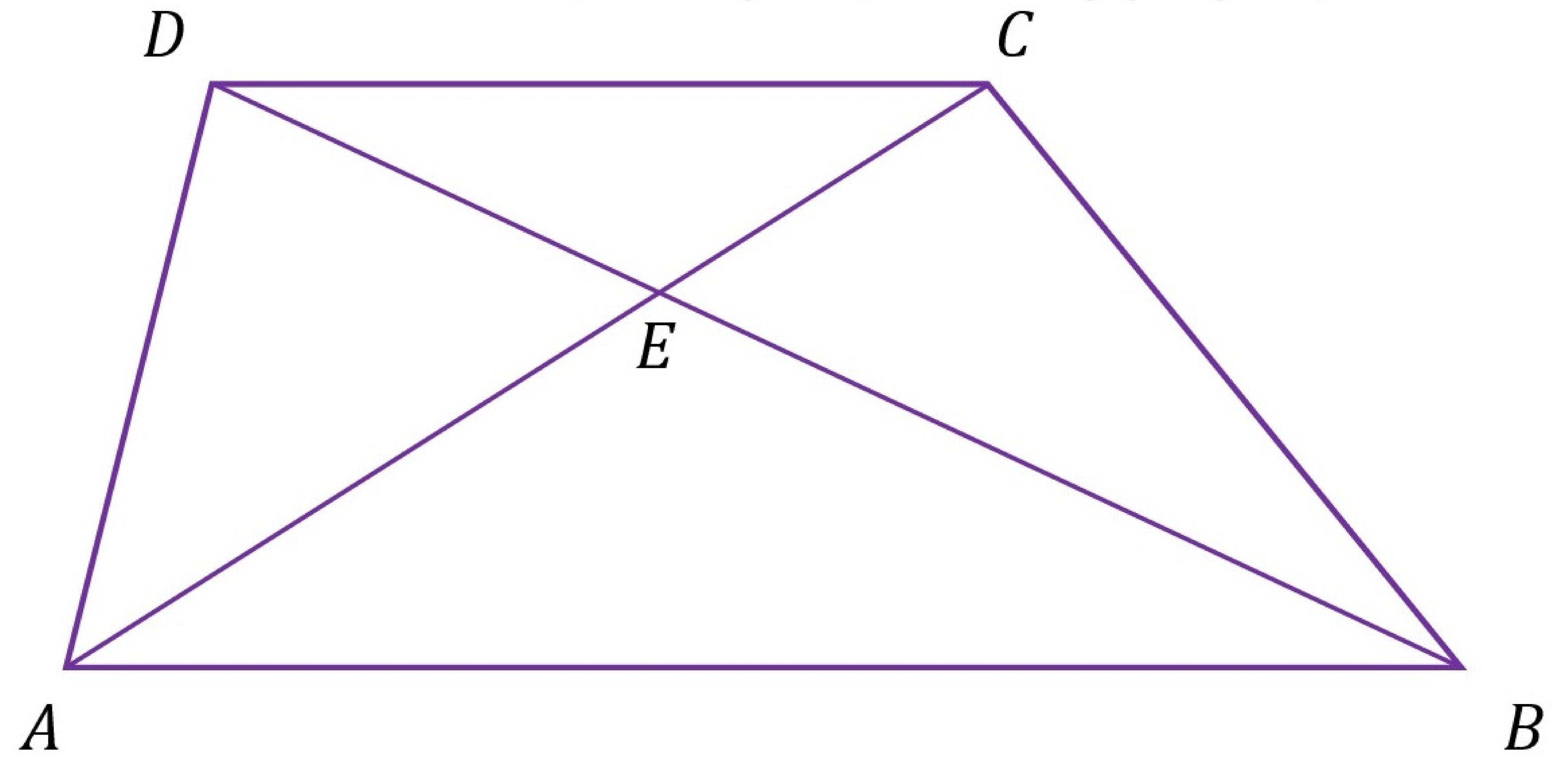
Odległość punktu A od prostej l jest równa

A. $\frac{7}{2}$ **B.** 5

C. $\sqrt{12}$ **D.** $\sqrt{3} + 2$

Zadanie 22. (0–1)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABE jest podobny do trójkąta CDE.	**P**	**F**
Pole trójkąta ACD jest równe polu trójkąta BCD.	**P**	**F**

Zadanie 23. (0–1)

Na łukach AB i CD okręgu są oparte kąty wpisane ADB i DBC, takie, że $|\sphericalangle ADB| = 20°$ i $|\sphericalangle DBC| = 40°$ (zobacz rysunek). Cięciwy AC i BD przecinają się w punkcie K.

Dokończ zdanie.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

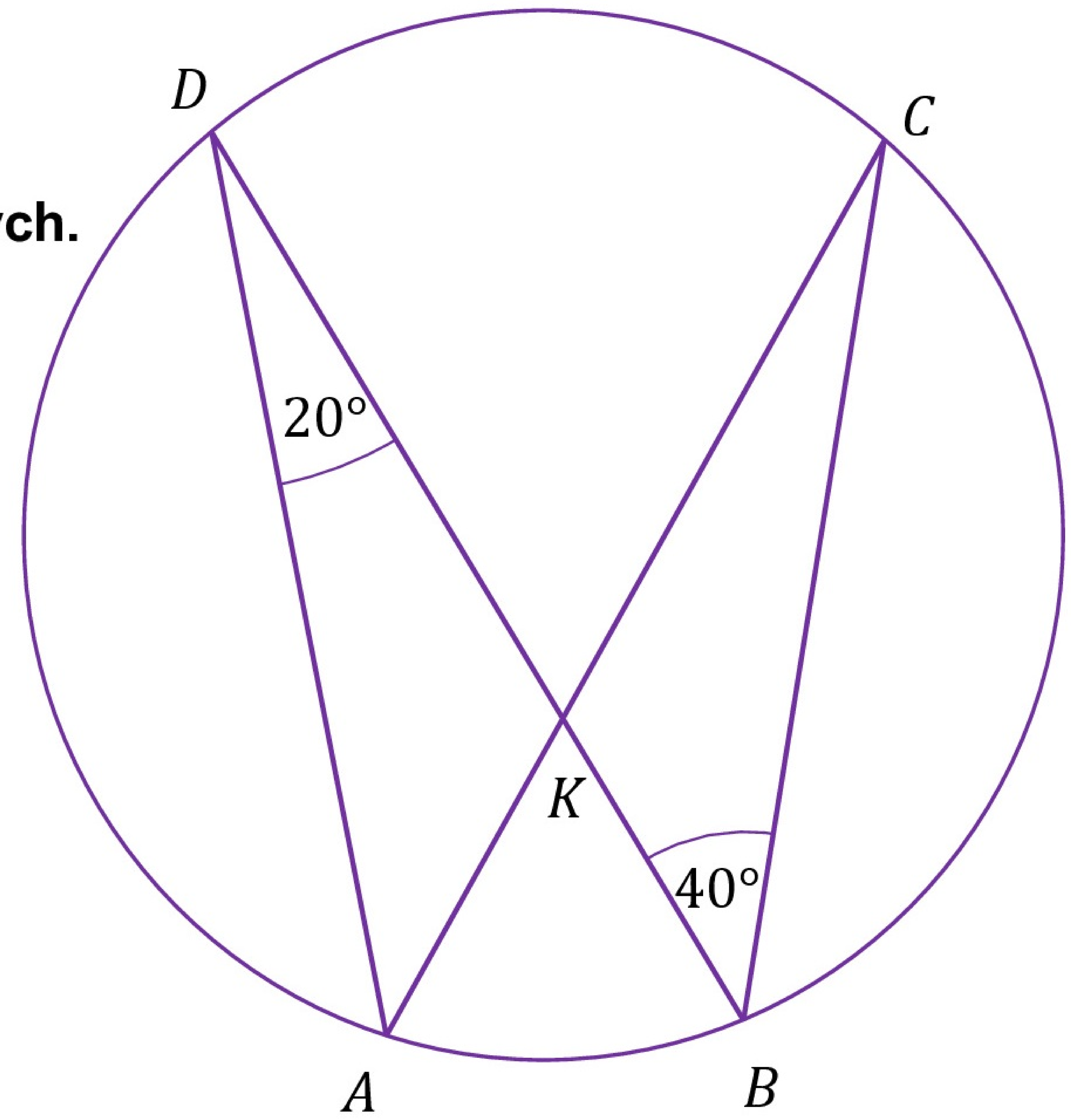
Miara kąta DKC jest równa

A. $80°$

B. $60°$

C. $50°$

D. $40°$



Zadanie 24. (0–1)

Pole trójkąta równobocznego T_1 jest równe $\frac{(1{,}5)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Pole trójkąta równobocznego T_2 jest równe $\frac{(4{,}5)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

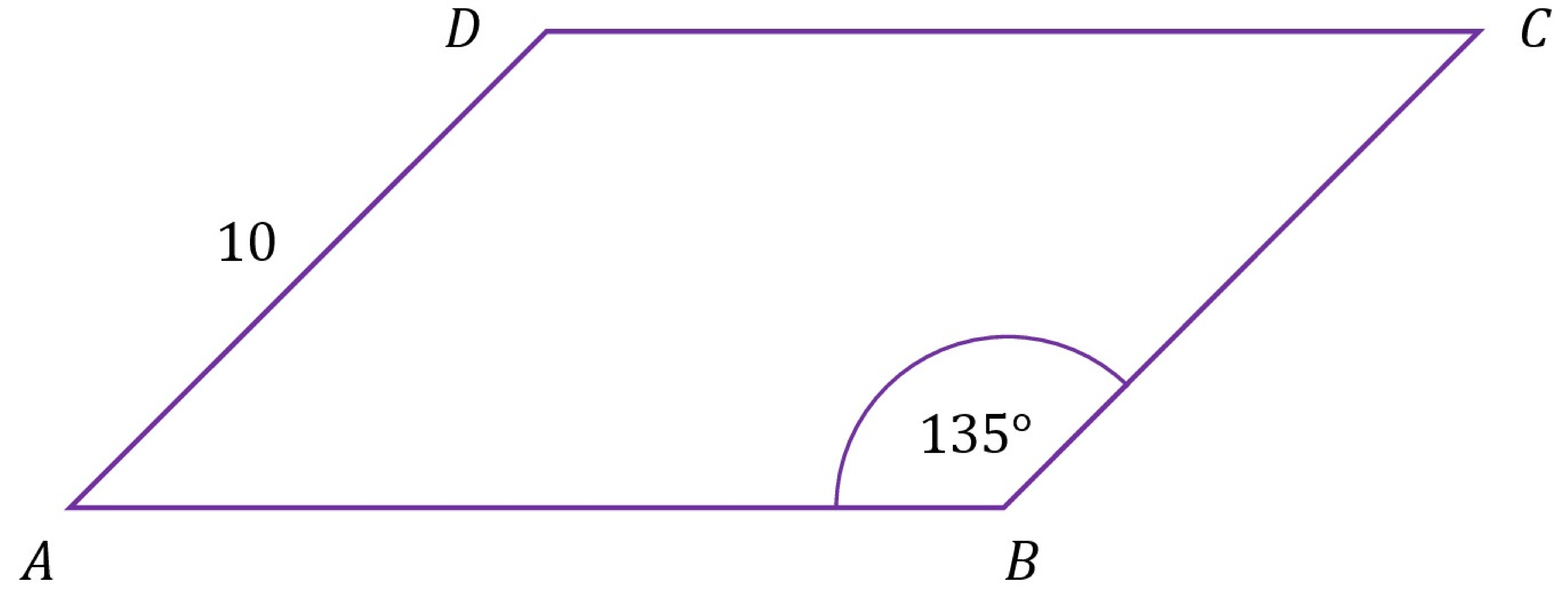
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali

<table>
<tr><td rowspan="2">A.</td><td rowspan="2">3,</td><td rowspan="5">ponieważ</td><td>1.</td><td>każdy z tych trójkątów ma dokładnie trzy osie symetrii.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2">pole trójkąta T_2 jest 9 razy większe od pola trójkąta T_1.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B.</td><td rowspan="3">9,</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">bok trójkąta T_2 jest o 3 dłuższy od boku trójkąta T_1.</td></tr>
<tr></tr>
</table>

Zadanie 25. (0–1)

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe $40\sqrt{6}$. Bok AD tego równoległoboku ma długość 10, a kąt ABC równoległoboku ma miarę $135°$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość boku AB jest równa

A. $8\sqrt{3}$ **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** $16\sqrt{2}$ **D.** $16\sqrt{3}$

Zadanie 26. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = -x + 1$. Funkcja g jest liniowa. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji g przechodzi przez punkt $P = (0, -1)$ i jest prostopadły do wykresu funkcji f.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzorem funkcji g jest

A. $g(x) = x + 1$ **B.** $g(x) = -x - 1$

C. $g(x) = -x + 1$ **D.** $g(x) = x - 1$

Zadanie 27. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-1, 5)$ oraz $C = (3, -3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe

A. $8\sqrt{10}$ **B.** $16\sqrt{5}$ **C.** 40 **D.** 80

Zadanie 28. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (1, 7)$ oraz $P = (3, 1)$. Punkt P dzieli odcinek AB tak, że $|AP| : |PB| = 1 : 3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt B ma współrzędne

A. $(9, -5)$ **B.** $(9, -17)$ **C.** $(7, -11)$ **D.** $(5, -5)$

Zadanie 29.

Dany jest ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat o boku 6. Jedna z krawędzi bocznych tego ostrosłupa ma długość 12 i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 29.1. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią wartość liczbową w wykropkowanym miejscu.

Objętość tego ostrosłupa jest równa ....

Zadanie 29.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 30. (0–1)

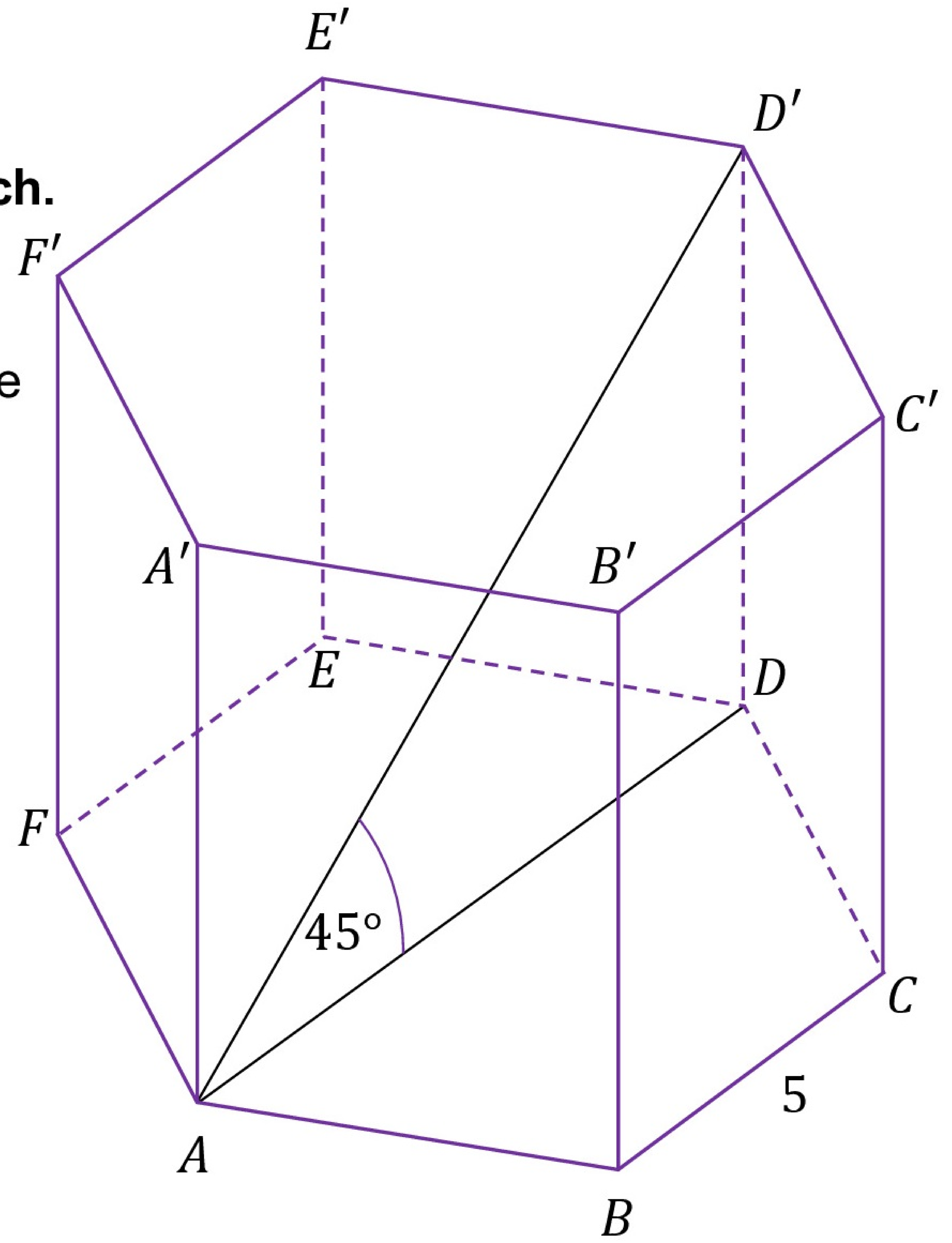
Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, w którym krawędź podstawy ma długość 5. Przekątna AD' tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$ (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie.
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole ściany bocznej tego graniastosłupa jest równe

A. $12{,}5$ **B.** 25

C. 50 **D.** 100



Zadanie 31. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych o sumie cyfr równej 3 jest

A. 8 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Zadanie 32. (0–2)

Ze zbioru ośmiu kolejnych liczb naturalnych – od 1 do 8 – losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej liczbie.

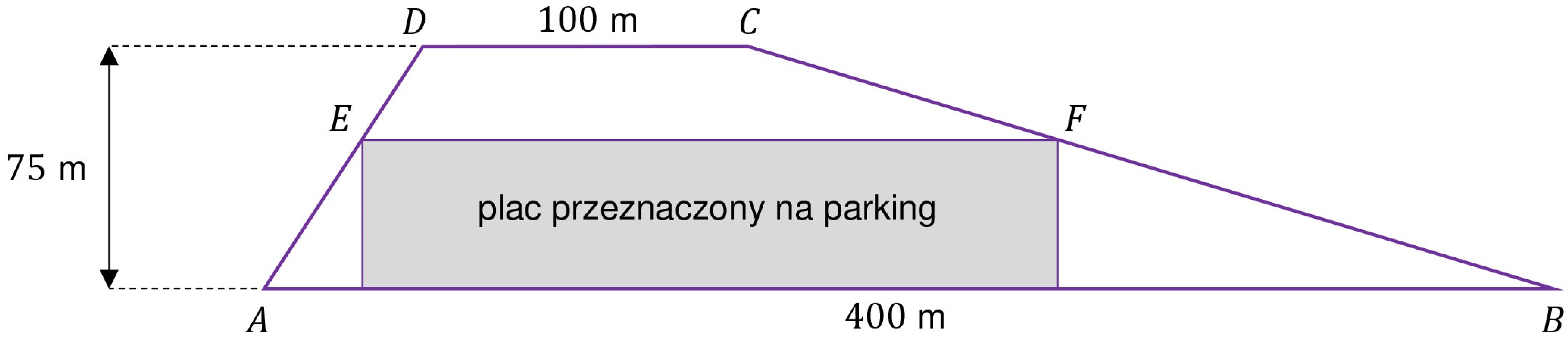
Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest dzielnikiem liczby 8.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A. Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0–4)

Działka ma kształt trapezu. Podstawy AB i CD tego trapezu mają długości $|AB| = 400$ m oraz $|CD| = 100$ m. Wysokość trapezu jest równa 75 m, a jego kąty DAB i ABC są ostre.

Z działki postanowiono wydzielić plac w kształcie prostokąta z przeznaczeniem na parking. Dwa z wierzchołków tego prostokąta mają leżeć na podstawie AB tego trapezu, a dwa pozostałe – E oraz F – na ramionach AD i BC trapezu (zobacz rysunek).



Wyznacz długości boków prostokąta, dla których powierzchnia wydzielonego placu będzie największa. Wyznacz tę największą powierzchnię.
Zapisz obliczenia.

Wskazówka:

Aby powiązać ze sobą wymiary prostokąta, skorzystaj z tego, że pole trapezu $ABCD$ jest sumą pól trapezów $ABFE$ oraz $EFCD$:

$$P_{ABCD} = P_{ABFE} + P_{EFCD}$$