MATURA PODSTAWOWA CZERWIEC 2014

Zadanie 1. *(1 pkt)*
Która z poniższych równości jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x?

A. $\sqrt{x^2} = x$ **B.** $|-x| = x$ **C.** $|x-1| = x-1$ **D.** $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

Zadanie 2. *(1 pkt)*
Czterech przyjaciół zarejestrowało spółkę.
Wysokość udziałów poszczególnych wspólników w kapitale zakładowym spółki wyraża stosunek 12 : 8 : 3 : 2. Jaką część kapitału zakładowego stanowi udział największego inwestora?

A. 12% **B.** 32% **C.** 48% **D.** 52%

Zadanie 3. *(1 pkt)*
Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b wyrażenie $ab+a-b-1$ jest równe

A. $(a-1)(b-1)$ **B.** $(a+1)(b-1)$ **C.** $(a-1)(b+1)$ **D.** $(a+1)(b+1)$

Zadanie 4. *(1 pkt)*
Na prostej o równaniu $y = ax+b$ leżą punkty $K=(1,0)$ i $L=(0,1)$. Wynika stąd, że

A. $a=-1$ i $b=1$ **B.** $a=1$ i $b=-1$ **C.** $a=-1$ i $b=-1$ **D.** $a=1$ i $b=1$

Zadanie 5. *(1 pkt)*
Dane są liczby: $a=\log_3\frac{1}{9}$, $b=\log_3 3$, $c=\log_3\frac{1}{27}$. Który z poniższych warunków jest prawdziwy?

A. $c<b<a$ **B.** $b<c<a$ **C.** $a<c<b$ **D.** $c<a<b$

Zadanie 6. *(1 pkt)*
Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=3x-4$ dla każdej liczby z przedziału $\langle -2,2\rangle$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział

A. $\langle -10,2\rangle$ **B.** $(-10,2\rangle$ **C.** $\langle 2,10\rangle$ **D.** $(2,10\rangle$

Zadanie 7. *(1 pkt)*
Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x)=3x^2+7x+c$ jest liczba $\frac{-7}{3}$.
Wówczas c jest równe

A. 0 **B.** 1 **C.** –98 **D.** 98

Zadanie 8. *(1 pkt)*
Liczba $\frac{3^{27}+3^{26}}{3^{26}+3^{25}}$ jest równa

A. 1 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 9

Zadanie 9. *(1 pkt)*
Dane są wielomiany: $W(x)=2x^2-1$, $P(x)=x^3+x$ i $Q(x)=(1-x)(x+1)$. Stopień wielomianu $W(x)\cdot P(x)\cdot Q(x)$ jest równy

A. 3 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 12

Zadanie 10. *(1 pkt)*

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli o równaniu $y=(x+2)(x-4)$ jest równa

A. -8 **B.** -4 **C.** 1 **D.** 2

Zadanie 11. *(1 pkt)*

W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, wyraz $a_1 = 5$, natomiast iloraz $q = -2$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. -1705 **B.** -1023 **C.** 1705 **D.** 5115

Zadanie 12. *(1 pkt)*

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_2 = 11$ i $a_4 = 7$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 36 **B.** 40 **C.** 13 **D.** 20

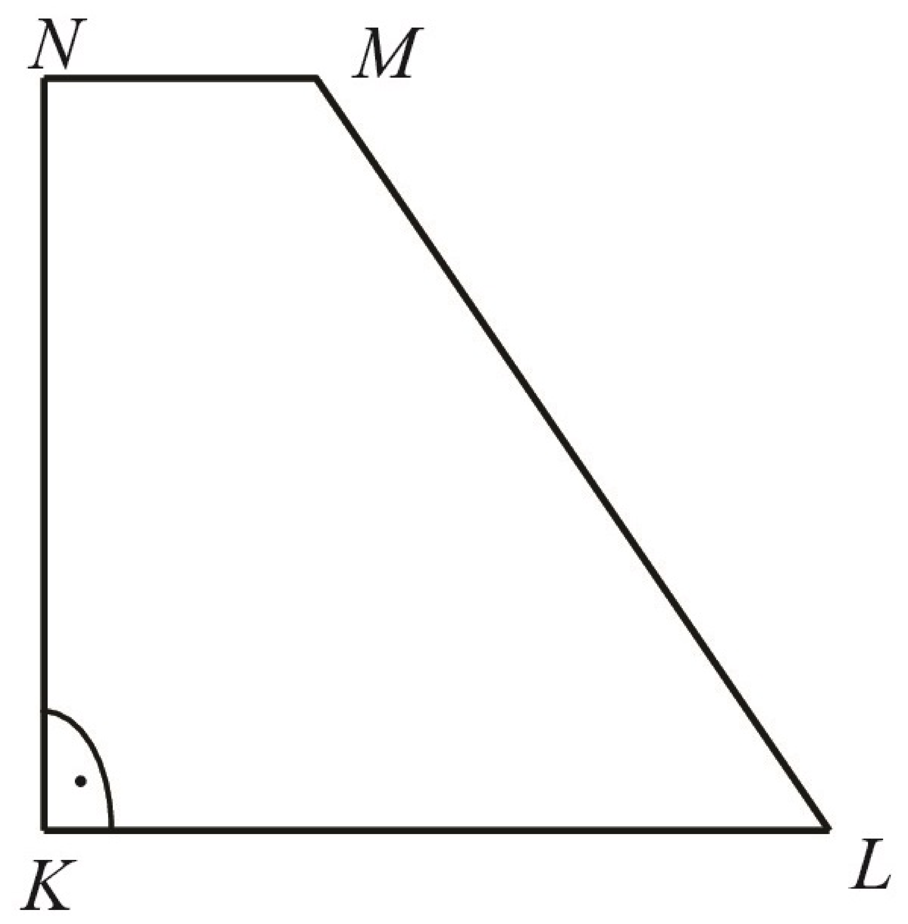
Zadanie 13. *(1 pkt)*

Miara kąta α spełnia warunek: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Wyrażenie $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ jest równe

A. 1 **B.** $2\cos^2\alpha$ **C.** 2 **D.** $2\sin^2\alpha$

Zadanie 14. *(1 pkt)*

W trapezie *KLMN*, w którym $KL \parallel MN$, kąt *LKN* jest prosty (zobacz rysunek) oraz dane są: $|MN| = 3$, $|KN| = 4\sqrt{3}$, $|\sphericalangle KLM| = 60^\circ$. Pole tego trapezu jest równe



A. $4+2\sqrt{3}$ **B.** $10\sqrt{3}$ **C.** $20\sqrt{3}$ **D.** $24+6\sqrt{3}$

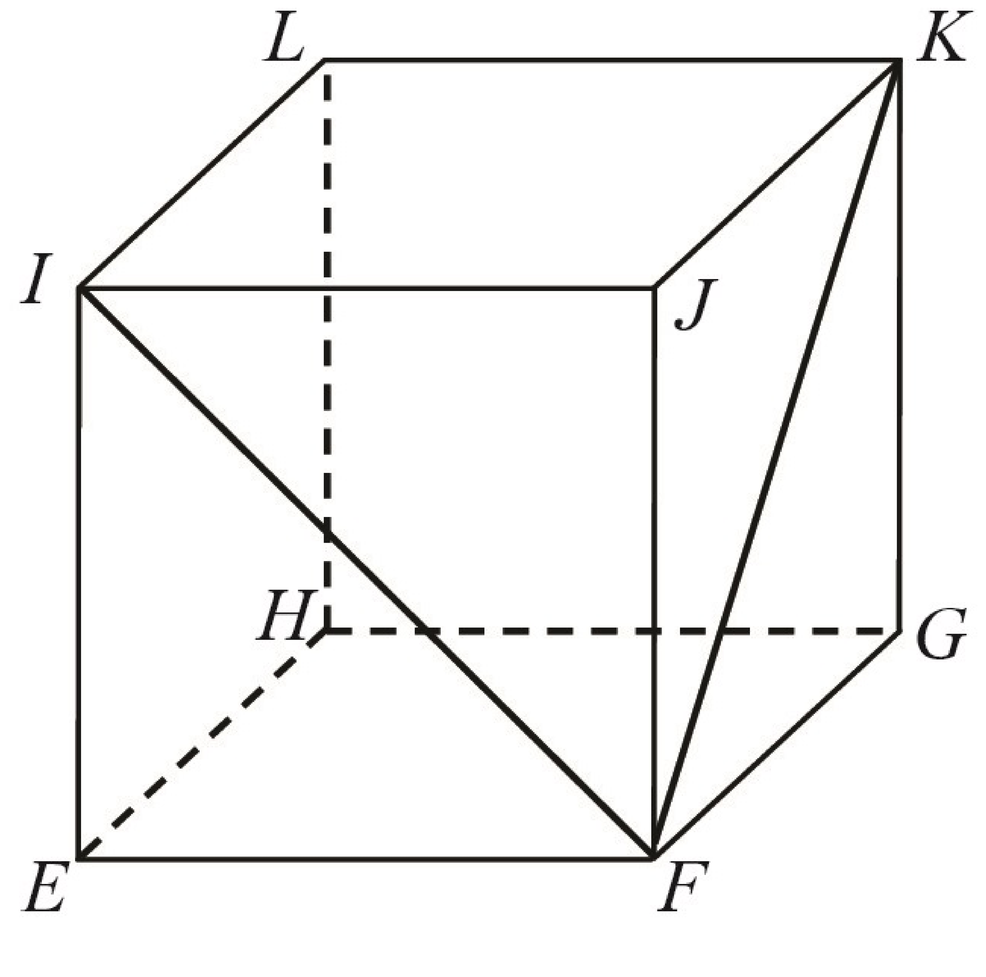
Zadanie 15. *(1 pkt)*

Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych na egzaminie przez studentów I grupy, liczącej 40 studentów, jest równa 30. Dwudziestu studentów tworzących II grupę otrzymało w sumie 1800 punktów. Zatem średni wynik z tego egzaminu, liczony łącznie dla wszystkich studentów z obu grup, jest równy

A. 20 pkt **B.** 30 pkt **C.** 50 pkt **D.** 60 pkt

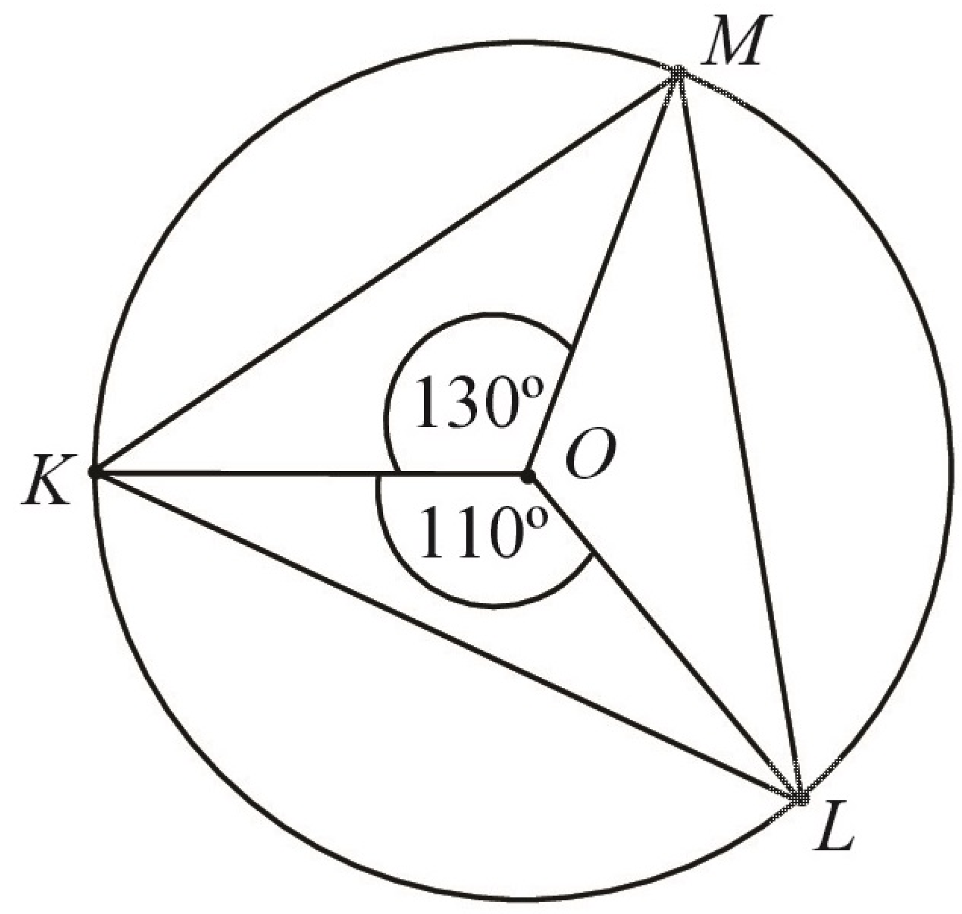
Zadanie 16. *(1 pkt)*

W sześcianie *EFGHIJKL* poprowadzono z wierzchołka *F* dwie przekątne sąsiednich ścian, *FI* oraz *FK* (zobacz rysunek). Miara kąta *IFK* jest równa



A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Zadanie 17. *(1 pkt)*
Punkt *O* jest środkiem okręgu (zobacz rysunek). Miara kąta *LKM* jest równa



A. 30° **B.** 60° **C.** 90° **D.** 120°

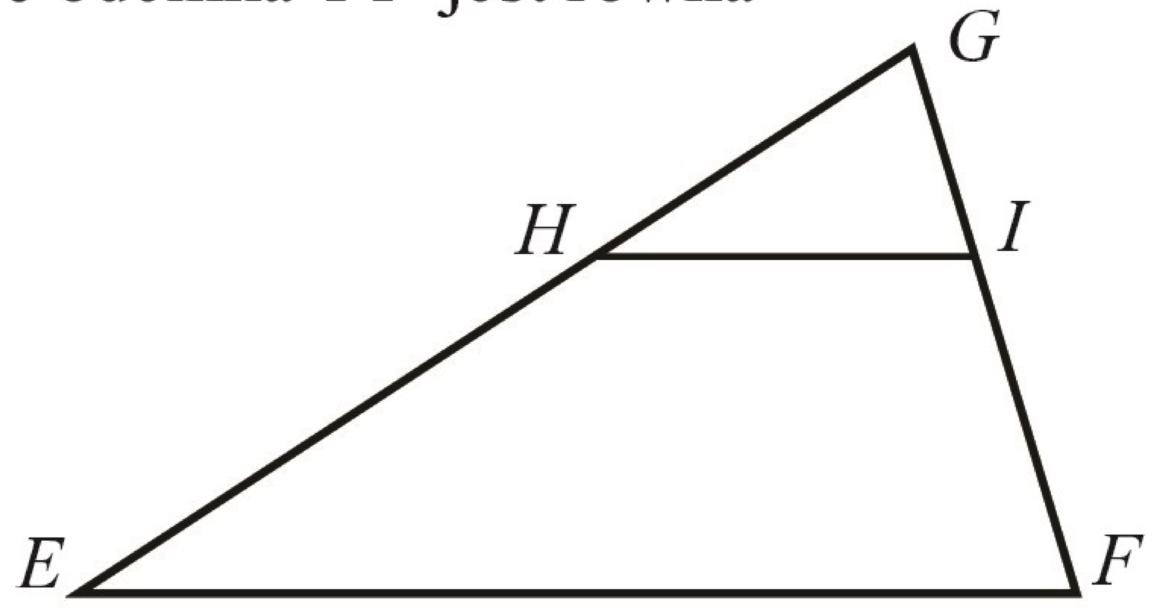
Zadanie 18. *(1 pkt)*
Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy

A. $\sqrt{108}$ **B.** $\frac{15}{2}$ **C.** 15 **D.** $\frac{\sqrt{108}}{2}$

Zadanie 19. *(1 pkt)*
Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, ..., 30\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest kwadratem liczby całkowitej, jest równe

A. $\frac{4}{30}$ **B.** $\frac{5}{30}$ **C.** $\frac{6}{30}$ **D.** $\frac{10}{30}$

Zadanie 20. (*1 pkt)*
W trójkącie *EFG* bok *EF* ma długość 21. Prosta równoległa do boku *EF* przecina boki *EG* i *FG* trójkąta odpowiednio w punktach *H* oraz *I* (zobacz rysunek) w taki sposób, że $|HI| = 7$ i $|GI| = 3$. Wtedy długość odcinka FI jest równa



A. 6 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 17

Zadanie 21. *(1 pkt)*
Na planie miasta, narysowanym w skali $1:20000$, park jest prostokątem o bokach 2 cm i 5 cm. Stąd wynika, że ten park ma powierzchnię

A. $20000\,\text{m}^2$ **B.** $40000\,\text{m}^2$ **C.** $200000\,\text{m}^2$ **D.** $400000\,\text{m}^2$

Zadanie 22. *(1 pkt)*
Proste o równaniach: $y = mx - 5$ oraz $y = (1-2m)x + 7$ są równoległe, gdy

A. $m = -1$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = 1$

Zadanie 23. ***(1 pkt)***

Punkty $M=(2,0)$ i $N=(0,-2)$ są punktami styczności okręgu z osiami układu współrzędnych. Które z poniższych równań opisuje ten okrąg?

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

B. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

D. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

Zadanie 24. ***(1 pkt)***

Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 96π. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe

A. 16π **B.** 24π **C.** 32π **D.** 48π

Zadanie 25. ***(1 pkt)***

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 432, a krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 12. Wysokość tego ostrosłupa jest równa

A. 3 **B.** 9 **C.** 27 **D.** 108

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $(2x-3)(3-x)\geq 0$.

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Liczby $6,\ 2x+4,\ x+26$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę r tego ciągu.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

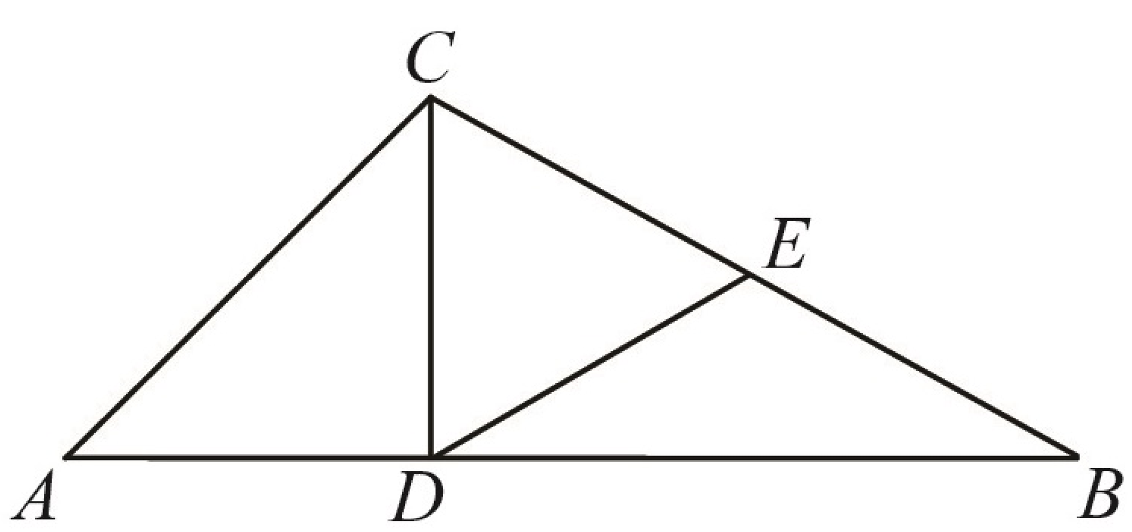
Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych:

$$K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\} \text{ i } L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

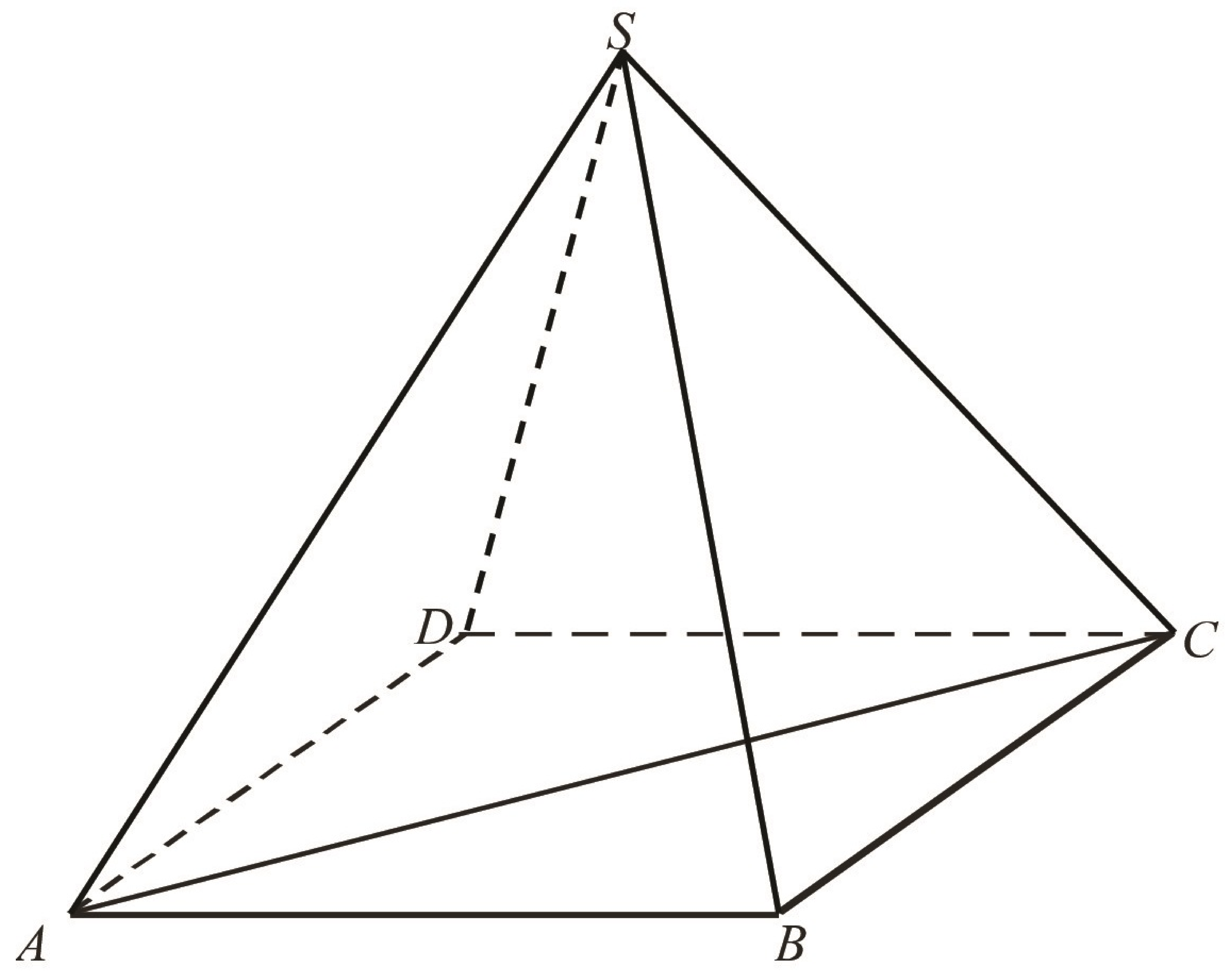
Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Dany jest trójkąt ABC. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, punkt E jest środkiem boku BC (tak jak na rysunku) i $|CD|=|DE|$. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.



Zadanie 32. ***(4 pkt)***
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* (zobacz rysunek) przekątna *AC* podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Kąt *ASC* między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa ma miarę 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 33. ***(5 pkt)***
Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

Zadanie 34. ***(4 pkt)***
Podstawą trójkąta równoramiennego *ABC* jest bok *AB,* gdzie $A=(2,1)$ i $B=(5,2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x-y-3=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka *C.*