السؤال 1 من بجروت الفيزياء — كهرباء ومغناطيسيّة — بجروت 2005

(هنا نحلّ هذا السؤال كاملًا.)

نصّ السؤال

لدينا كرة مليئة مصنوعة من مادّة موصلة. نشحنها حتّى يصبح جهدها معلومًا. بعد ذلك نصلها بسلك موصل ودقيق بكرة مجوّفة غير مشحونة موجودة على بعد كبير جدًّا منها، وننتظر زمنًا طويلًا. في النهاية نزيل السلك وندخل الكرة المليئة إلى داخل الكرة المجوّفة بحيث يصبح لهما مركز مشترك.

المعطيات:

- نصف قطر الكرة المليئة $R_1 = 4.5\ \text{cm}$، وجهدها بعد الشحن $V_0 = 1000\ \text{V}$.
- نصف قطر الكرة المجوّفة $R_2 = 9\ \text{cm}$، وهي غير مشحونة في البداية.
- النقطة C تقع على بعد $r = 6\ \text{cm}$ من المركز المشترك.

أ. المطلوب: مقدار الشحنة على الكرة المليئة.

ب. المطلوب: أين تكون هذه الشحنة: في مركز الكرة، أم في كلّ حجمها، أم على سطحها فقط؟ مع الشرح.

ج. نصل الكرتين بالسلك وننتظر زمنًا طويلًا. المطلوب: جهد الكرة المليئة في هذه الحالة.

د. نزيل السلك وندخل الكرة المليئة إلى داخل الكرة المجوّفة بمركز مشترك. المطلوب: شدّة الحقل الكهربائيّ في النقطة C، مع تفصيل الحقل الناتج عن كلّ كرة على حدة.

هـ. المطلوب: الجهد الكهربائيّ في النقطة C.

حقوق النشر محفوظة لدى فيفو. يُحظر نشر أو توزيع أو نسخ أو تصوير أو إعادة كتابة هذه الحلول بأيّ أداة أو أيّ صورة، كلّها أو جزء منها، بدون إذن خطّيّ من فيفو.

الحلّ: **أ.** $q = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$ **ب.** على سطح الكرة فقط **ج.** $V \approx 333\ \text{V}$ **د.** $E_C \approx 4167\ \text{N/C}$
كلّه من الكرة المليئة، والكرة المجوّفة لا تعطي حقلًا في الداخل **هـ.** $V_C \approx 583\ \text{V}$

(صياغة السؤال والرسومات والحلّ: فيفو · vevo.)
نفترض أنّ الكرة شُحنت بشحنة موجبة (جهدها موجب)، وأنّ جدار الكرة المجوّفة رقيق، وأنّ شحنة السلك الدقيق مهملة.

الحلّ الكامل:

البند أ

جهد كرة موصلة مشحونة يساوي جهد شحنة نقطيّة في مركزها، محسوبًا على بعد نصف القطر:

$$V = \frac{kq}{R}$$

(القانون موجود في لائحة القوانين التي تكون معك في الامتحان.)

نعزل الشحنة ونعوّض بالوحدات الأساسيّة:

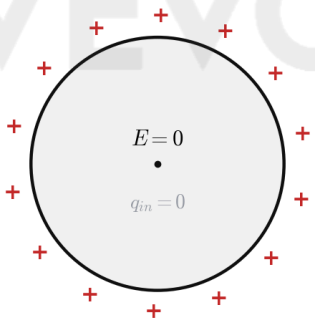
$$q = \frac{V_0 R_1}{k} = \frac{1000 \cdot 0.045}{9 \cdot 10^{9}} = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

$$\boxed{q = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}$$

الجواب النهائيّ للبند أ

البند ب

في حالة التوازن الكهروستاتيكيّ يكون الحقل داخل مادّة الموصل صفرًا. لو كانت هناك شحنة داخل الكرة لنشأ حقل يحرّك الإلكترونات الحرّة.



الشحنات المتشابهة تتنافر وتبتعد بعضها عن بعض أكثر ما يمكن، فتصل كلّها إلى السطح الخارجيّ. بحسب قانون جاوس: الحقل صفر داخل الكرة، إذن الشحنة داخلها صفر.

الكرة مليئة، لكنّ هذا لا يغيّر شيئًا: الشحنة لا تكون في المركز ولا في الحجم.

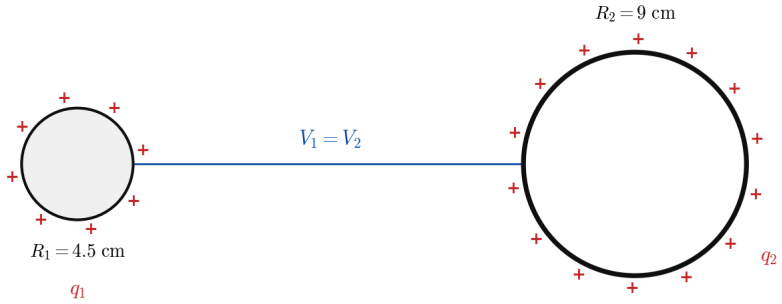
$$\boxed{\text{الشحنة موزّعة بانتظام على سطح الكرة فقط}}$$

الجواب النهائيّ للبند ب

حقوق النشر محفوظة لدى فيفو. يُحظر نشر أو توزيع أو نسخ أو تصوير أو إعادة كتابة هذه الحلول بأيّ أداة أو أيّ صورة، كلّها أو جزء منها، بدون إذن خطّيّ من فيفو.

البند ج

بعد زمن طويل يتوقّف مرور الشحنات في السلك. هذا يحدث عندما يتساوى جهدا الكرتين. الكرتان بعيدتان جدًّا، فجهد كلّ كرة ينتج عن شحنتها فقط.



$$\frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2}$$

الشحنة الكلّيّة محفوظة، لأنّ الكرة المجوّفة كانت غير مشحونة:

$$q_1 + q_2 = q = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

نحلّ المعادلتين معًا. نصف القطر الثاني ضعف الأوّل، فشحنة الكرة المجوّفة ضعف شحنة الكرة المليئة:

$$q_1 = q\,\frac{R_1}{R_1 + R_2} \approx 1.67 \cdot 10^{-9}\ \text{C}, \qquad q_2 \approx 3.33 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

الآن نحسب جهد الكرة المليئة:

$$V = \frac{kq_1}{R_1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1.67 \cdot 10^{-9}}{0.045} \approx 333\ \text{V}$$

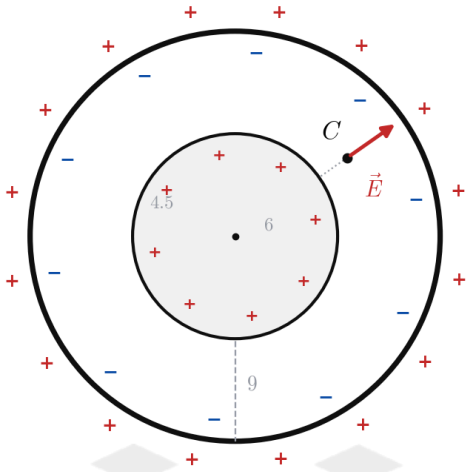
$$\boxed{V \approx 333\ \text{V}}$$

الجواب النهائيّ للبند ج

حقوق النشر محفوظة لدى فيفو. يُحظر نشر أو توزيع أو نسخ أو تصوير أو إعادة كتابة هذه الحلول بأيّ أداة أو أيّ صورة، كلّها أو جزء منها، بدون إذن خطّيّ من فيفو.

البند د

بعد إزالة السلك تبقى الشحنتان كما هما. ندخل الكرة المليئة إلى داخل الكرة المجوّفة. الشحنة الموجبة في الداخل تجذب شحنة سالبة إلى السطح الداخليّ للكرة المجوّفة، وتبقى على سطحها الخارجيّ شحنة موجبة.



النقطة C على بعد ستّة سنتيمترات من المركز: هي خارج الكرة المليئة وداخل الكرة المجوّفة.

الحقل الناتج عن الكرة المليئة: في نقطة خارجها يشبه حقل شحنة نقطيّة في مركزها، واتّجاهه نحو الخارج:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1.67 \cdot 10^{-9}}{0.06^2} \approx 4167\ \mathrm{N/C}$$

(القانون موجود في لائحة القوانين التي تكون معك في الامتحان.)

الحقل الناتج عن الكرة المجوّفة: شحنتها موزّعة بانتظام على سطحين كرويّين حول النقطة C، والحقل داخل سطح كرويّ مشحون بانتظام صفر:

$$E_2 = 0$$

إذن الحقل الكلّيّ في النقطة C هو حقل الكرة المليئة وحده، واتّجاهه نحو الخارج على امتداد نصف القطر:

$$E_C = E_1 + E_2 \approx 4167\ \mathrm{N/C}$$

$$\boxed{E_C \approx 4.17 \cdot 10^3\ \mathrm{N/C}}$$

الجواب النهائيّ للبند د

البند هـ

الجهد مقدار عدديّ، فنجمع جهد كلّ كرة في النقطة C.

جهد الكرة المليئة في النقطة C، كأنّ شحنتها نقطيّة في المركز:

$$V_1 = \frac{kq_1}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1.67 \cdot 10^{-9}}{0.06} = 250\ \mathrm{V}$$

حقوق النشر محفوظة لدى فيفو. يُحظر نشر أو توزيع أو نسخ أو تصوير أو إعادة كتابة هذه الحلول بأيّ أداة أو أيّ صورة، كلّها أو جزء منها، بدون إذن خطّيّ من فيفو.

داخل الكرة المجوّفة الحقل الناتج عنها صفر، فجهدها ثابت في كلّ داخلها ويساوي جهد سطحها:

$$V_2 = \frac{kq_2}{R_2} = \frac{9 \cdot 10^{9} \cdot 3.33 \cdot 10^{-9}}{0.09} \approx 333 \text{ V}$$

ملاحظة: الشحنة السالبة على السطح الداخليّ والشحنة الموجبة على السطح الخارجيّ مجموعهما هو الشحنة نفسها، والسطحان على البعد نفسه تقريبًا، فالنتيجة لا تتغيّر.

$$V_C = V_1 + V_2 = 250 + 333 \approx 583 \text{ V}$$

$$\boxed{V_C \approx 583 \text{ V}}$$

الجواب النهائيّ للبند هـ

نصّ الأسئلة والصور: وزارة التربية والتعليم، النموذج قديم، بجروت 2005. صياغة الأسئلة والرسومات والحلّ: فيفو · vevo. حقوق الطبع للوزارة: «النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم».

حقوق النشر محفوظة لدى فيفو. يُحظر نشر أو توزيع أو نسخ أو تصوير أو إعادة كتابة هذه الحلول بأيّ أداة أو أيّ صورة، كلّها أو جزء منها، بدون إذن خطّيّ من فيفو.