

# 經濟學原理與實習

## CH.18 經濟成長

李祖福

March 9, 2022

- 1 成長會計
- 2 **Cobb-Douglas** 生產函數
- 3 固定投資
- 4 補充：勞動份額與資本份額
- 5 經濟成長的動力：**Solow model** 與 **Catch up**

- 生產函數:  $y = f(l, k, h)$ 
  - ▶  $l$ : 勞動投入,  $k$ : 固定資本投入,  $h$ : 人力資本投入
- 總合生產函數:  $Y = F(L, K)$ 
  - ▶  $L$ : 總勞動投入,  $K$ : 總固定資本投入, 人力資本一般放在技術水準裡

- 勞動與資本對產出的邊際貢獻:

- ▶ 勞動邊際產量 (Marginal Production of Labor, MPL)

$$= \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$$

- ▶ 資本邊際產量 (Marginal Production of Capital, MPK)

$$= \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$$

- 幾個常見的生產函數:

- ▶ Leontief 生產函數:  $Y = F(K, L) = \min[\alpha L, \beta K]$  (生產要素完全互補)

- ▶ 線性生產函數:  $Y = F(K, L) = \alpha L^\gamma + \beta K^\lambda$  (生產要素完全替代)

- ▶ Cobb-Douglas 生產函數:  $Y = F(K, L) = AL^\alpha K^\beta$  (以上兩種極端之間)

- $Y = F(K, L) = AL^\alpha K^\beta$ ,  $A$  :

全要素生產力 (Total Factor Productivity, TFP)

- ▶ 勞動邊際產量 (Marginal Production of Labor, MPL)

$$= \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta = \alpha \left( A \frac{K^\beta}{L^{1-\alpha}} \right)$$

- ▶ 資本邊際產量 (Marginal Production of Capital, MPK)

$$= \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \beta AL^\alpha K^{\beta-1} = \beta \left( A \frac{K^{\beta-1}}{L^{-\alpha}} \right)$$

- 市場均衡時 :

- $MPL = \frac{w}{p}$

- $MPK = r$

索洛剩餘是指除勞動和資本投資貢獻外，由綜合要素生產率 (TFP) 帶來的產出的增長。

- 生產函數： $Y(t) = A(t)L(t)^\alpha K(t)^\beta$

- ▶ 取對數： $\ln Y(t) = \ln A(t) + \alpha \ln L(t) + \beta \ln K(t) \Rightarrow$

- ▶ 對時間 (t) 微分： $\frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \alpha \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial t} + \beta \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \left( \frac{\Delta L}{L} \right) + \beta \left( \frac{\Delta K}{K} \right)$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \left( \frac{\Delta L}{L} \right) - \beta \left( \frac{\Delta K}{K} \right), \text{ 其中 solow residual 即為 } \frac{\Delta A}{A}$$

$$Y = F(K, L) = AL^\alpha K^\beta, A :$$

全要素生產力 (Total Factor Productivity, TFP)

- 假設 K, L, A 的成長率皆為 3% ,  $\alpha = 0.7$  ,  $\beta = 0.5$  , 請問經濟成長率為何?

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + \alpha \left( \frac{\Delta L}{L} \right) + \beta \left( \frac{\Delta K}{K} \right) = 0.03 + 0.7 \times 0.03 + 0.5 \times 0.03 = \\ &0.03 + 0.021 + 0.015 = 0.066 = 6.6\% \end{aligned}$$

- 假設 K, L 的成長率皆為 3% , A 不變,  $\alpha = 0.7$  ,  $\beta = 0.3$  , 請問經濟成長率為何?

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + \alpha \left( \frac{\Delta L}{L} \right) + \beta \left( \frac{\Delta K}{K} \right) = 0.7 \times 0.03 + 0.3 \times 0.03 = \\ &0.021 + 0.009 = 0.03 = 3\% \end{aligned}$$

- 假設：固定規模報酬 (CRS)

- ▶ 在技術水準不變下，所有生產要素增加  $k$  倍，產量增加  $m$  倍。
- ▶  $Y = F(L, K) \Rightarrow mY = mF(L, K) = F(mL, mK)$
- ▶ 在 Cobb-Douglas 生產函數中，若  $\alpha + \beta = 1$ ，則為固定規模報酬，如上頁第 2 個例子。

- 在固定規模報酬假設下，Cobb-Douglas 還有非常多好用的數學性質，且不偏離現實。

- 例如， $Y = F(K, L) = AL^\alpha K^{1-\alpha}$

- ▶  $\alpha =$  勞動報酬份額 (Labor Income share)
- ▶  $1 - \alpha =$  資本報酬份額 (Capital Income share)



- 勞動生產力 (Labor Productivity): 平均每單位勞動在單位時間內所創造的附加價值。

- ▶  $y = \frac{Y}{L} = \frac{AL^\alpha K^{1-\alpha}}{L} = AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}$

- ▶ 其中,  $k = \frac{K}{L} \Rightarrow y = Ak^{1-\alpha}$

- 人均 GDP

- ▶  $N$ : 勞動人口,  $\tilde{N}$ : 總人口,  $H$ : 平均每人工時

- ▶  $\tilde{y} = \frac{Y}{\tilde{N}}, L = H \times N, N = \phi \tilde{N}$

- ▶  $y = \frac{Y}{L} = \frac{Y}{H \times N} = \frac{Y}{H \times \phi \tilde{N}} = \frac{\tilde{y}}{H \times \phi} = a \times \tilde{y}$

$y = \frac{\tilde{y}}{H \times \phi} \Rightarrow \tilde{y} = (H \times \phi)y$  H 代表工作時數,  $\phi$  代表就業人口佔總人口比例。

- (a) 若  $y$  之成長率為 4%, 而  $H$  與  $\phi$  都是固定值, 請計算  $\tilde{y}$  之成長率等於多少?
- (b) 台灣在 1950–90 年代, 因為婦女就業率上升,  $\phi$  值並非固定, 而是呈現增加趨勢。若  $\frac{\Delta\phi}{\phi} = 1\%$ , 而  $y$  之成長率仍為 4%, 請計算  $\tilde{y}$  之成長率為何

$$y = \frac{\tilde{y}}{H \times \phi} \Rightarrow \tilde{y} = (H \times \phi)y$$

- (a) 若  $y$  之成長率為 4%，而  $H$  與  $\phi$  都是固定值，請計算  $\tilde{y}$  之成長率等於多少？

- ▶  $\ln \tilde{y} = \ln H + \ln \phi + \ln y$

- ▶  $\frac{\Delta \tilde{y}}{\tilde{y}} = \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta \phi}{\phi} + \frac{\Delta y}{y} = 0 + 0 + 4\% = 4\%$

- (b) 台灣在 1950–90 年代，因為婦女就業率上升， $\phi$  值並非固定，而是呈現增加趨勢。若  $\frac{\Delta \phi}{\phi} = 1\%$ ，而  $y$  之成長率仍為 4%，請計算  $\tilde{y}$  之成長率為何

- ▶  $\frac{\Delta \tilde{y}}{\tilde{y}} = \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta \phi}{\phi} + \frac{\Delta y}{y} = 0 + 1\% + 4\% = 5\%$

清國統治台灣的 212 年之間，台灣的人均 GDP 幾乎不變，但人口每年約成長 1.4%。

- (a) 請問 212 年之間，勞動生產力之年成長率等於多少？（假設傳統農業經濟裡，就業人口占總人口之比率為固定，平均工時也是固定值。）
- (b) 接續 (a) 小題，請問 GDP 之年成長率等於多少？

清國統治台灣的 212 年之間，台灣的人均 GDP 幾乎不變，但人口每年約成長 1.4%。

- (a) 請問 212 年之間，勞動生產力之年成長率等於多少？（假設傳統農業經濟裡，就業人口占總人口之比率為固定，平均工時也是固定值。）

- 勞動生產力之成長率 =  $\frac{\Delta y}{y}$

- $y = \frac{Y}{L} \Rightarrow$  取對數  $\Rightarrow \ln y = \ln Y - \ln L \Rightarrow$  微分  $\Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L}$

$$Y = \tilde{y} \times \tilde{N} \Rightarrow \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta \tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{\Delta \tilde{N}}{\tilde{N}} = 0 + 1.4\%$$

$$\frac{\Delta y}{y} = 1.4\% - 1.4\% = 0$$

清國統治台灣的 212 年之間，台灣的人均 GDP 幾乎不變，但人口每年約成長 1.4%。

- (b) 接續 (a) 小題，請問 GDP 之年成長率等於多少？

- $$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta \tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{\Delta \tilde{N}}{\tilde{N}} = 0 + 1.4\%$$

- 存量 ( Stock )

- ▶ 是指任何一個事物 (或經濟活動) 從開始以來, 到某一「特定時點」時, 該事物的變量在該時點的數值, 稱為存量。
- ▶ EX : 資產負債表、資本、存款、貨幣。

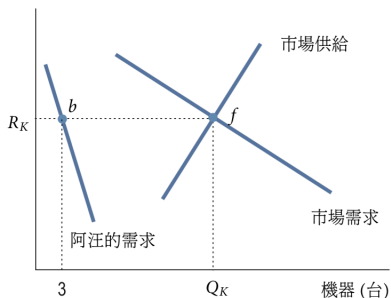
- 流量 ( Flow )

- ▶ 是指任何一個事物, 在某一「特定期間內」, 該事物變量的變動值。
- ▶ EX : GDP、投資、損益表。

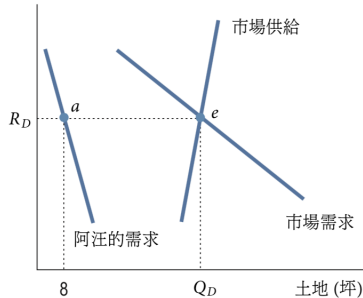
- 生產要素: $L, K$  , 生產要素價格: $W$ (工資率)、 $R$ (利率)
  - ▶  $W$ : 勞動市場的供需決定 (CH15)
  - ▶  $R$ : 固定資本借貸市場的供需決定 (CH15、CH20)
- 借貸市場的供需
  - ▶ 借貸市場的供給: 在不同的報酬率(定存、股票、基金等利率)下, 願意貸出多少 (CH19)。
  - ▶ 借貸市場的需求: 在不同的報酬率(固定資本報酬率)下, 願意借入多少。



A. 機器設備



B. 土地



- 勞動市場均衡:  $W/P = MPL$
- 借貸市場均衡:  $R/P = r = MPK$ 
  - ▶  $MPK > r$  表示若增加資本投入, 利潤會上升。
  - ▶  $MPK < r$  表示若減少資本投入, 利潤會上升。

$$Y = F(K, L) = AL^\alpha K^{1-\alpha}$$

- 勞動市場均衡條件:

$$MPL = W/P \Rightarrow MPL = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha Ak^{1-\alpha}$$

- 借貸市場均衡條件:

$$MPK = r \Rightarrow MPK = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = (1-\alpha)AL^\alpha K^{-\alpha} = (1-\alpha)Ak^\alpha$$

- 固定投資報酬率 ( $R^k$ ) =

$$\frac{P \times MPK + \text{出售二手機器收入} - \text{固定投資支出}}{\text{固定投資支出}}$$

- $R^k > R$  : 增加固定投資
- $R^k < R$  : 減少固定投資

1950年代，電視機產業興起，美國某廠商評估是否要花費100萬美元增設一條生產線，此產線的資本邊際產量 (MPK) 為20,000單位，每單位產品的價格是  $p = 10$  美元。一年之後，若廠商把產線設備在二手市場出售，可得85萬美元。

- (a) 以  $R^k$  代表增設產線的報酬率，請寫出  $R^k$  之公式，再計算  $R^k$  等於多少？
- (b) 此電子廠商另外評估是否要把產線移到台灣，1960年代，台灣的工資遠低於美國。假設在台灣設產線，產品單價與生產線在二手市場出售的價格與 (a) 小題相同，請問在台灣設生產線的  $R^k$ ，或無法確定？請說明你的答案是依據生產要素的哪一個性質。

1950年代，電視機產業興起，美國某廠商評估是否要花費100萬美元增設一條生產線，此產線的資本邊際產量 (MPK) 為20,000單位，每單位產品的價格是  $p = 10$  美元。一年之後，若廠商把產線設備在二手市場出售，可得85萬美元。

- (a) 以  $R^k$  代表增設產線的報酬率，請寫出  $R^k$  之公式，再計算  $R^k$  等於多少？

- $$R^k = \frac{P \times MPK + \text{出售二手機器收入} - \text{固定投資支出}}{\text{固定投資支出}}$$

$$= \frac{10 \times 20,000 + 850,000 - 1,000,000}{1,000,000} = 5\%$$

1950年代，電視機產業興起，美國某廠商評估是否要花費100萬美元增設一條生產線，此產線的資本邊際產量 (MPK) 為20,000單位，每單位產品的價格是  $p = 10$  美元。一年之後，若廠商把產線設備在二手市場出售，可得85萬美元。

- (b) 此電子廠商另外評估是否要把產線移到台灣，1960年代，台灣的工資遠低於美國。假設在台灣設產線，產品單價與生產線在二手市場出售的價格與 (a) 小題相同，請問在台灣設生產線的  $R^k$ ，或無法確定？請說明你的答案是依據生產要素的哪一個性質。
- 台灣的工資較低，表示台灣的勞動供給較多。因為勞動投入與固定資本財具互補特性，故台灣的 MPK 會較高， $R^k$  也較高。

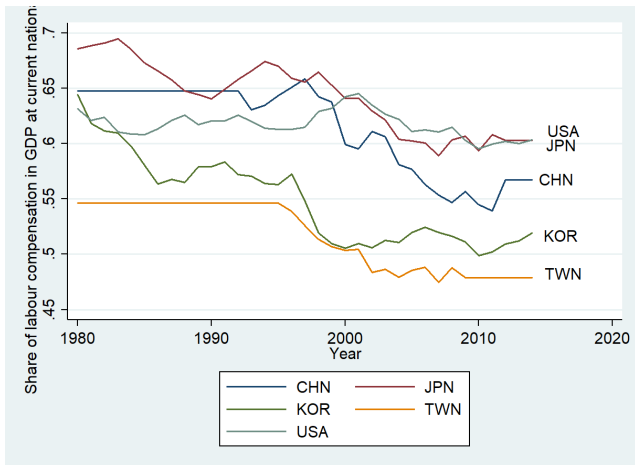
- 勞動 (報酬) 份額 (Labor Income Share): L 所創造的附加價值佔 Y 的比例

$$\text{▶ Labor Income Share} = \frac{\frac{W}{P} \times L}{Y} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha} \times L}{AL^{\alpha} K^{1-\alpha}} = \alpha$$

- 資本 (報酬) 份額 (Capital Income Share): K 所創造的附加價值佔 Y 的比例

$$\text{▶ Capital Income Share} = \frac{r \times K}{Y} = \frac{(1-\alpha) AL^{\alpha} K^{-\alpha} \times K}{AL^{\alpha} K^{1-\alpha}} = 1 - \alpha$$

## 補充：勞動份額與資本份額



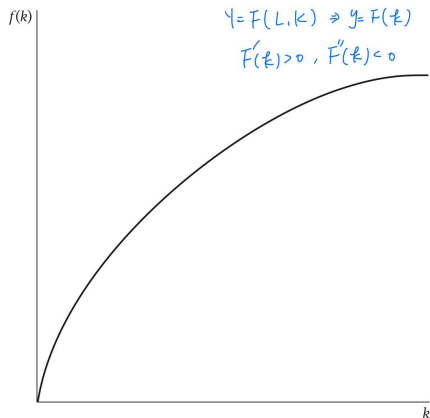
- 一般來說，勞動份額與資本份額不太改變，但近幾年由於低薪等因素造成勞動份額下降。



- 以亞當史密斯為首的古典經濟學家認為經濟成長使是由技術進步、勞動力增加以及許多外在的因素所創造的。簡單來說就是，一國的經濟要成長，必須依靠外生的 shock，而非模型內的變數累積。EX : Solow Model
- 20 世紀80 年代, Lucas 等人認為人力資本的累積也是影響經濟成長的重要因素

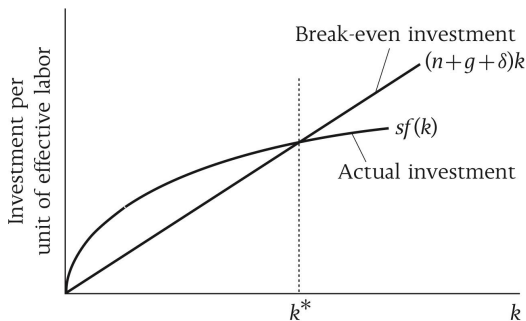
## 補充: 淺談 Solow model

- $Y = C + S = C + I = F(AL, K)$
- $S = s \cdot Y$
- $K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$

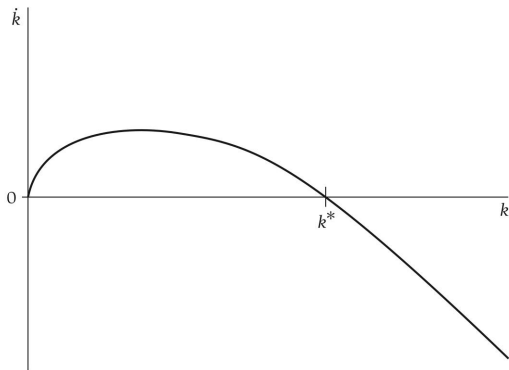


## 補充: 淺談 Solow model

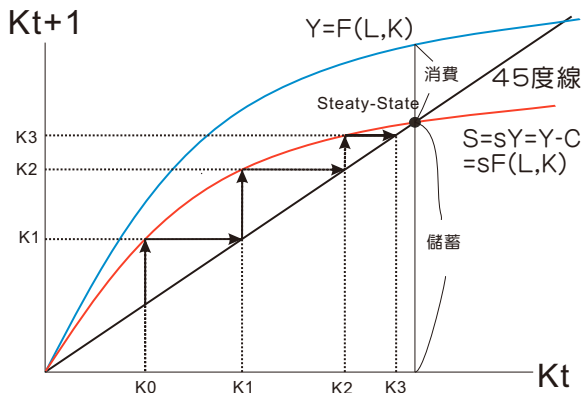
- 資本的折舊量 =  $(n + g + \delta)k$
- 儲蓄 = 資本的增加量 ( $I$ ) =  $sf(k)$
- $dk = sf(k) - (n + g + \delta)k$



- $k$ 成長率

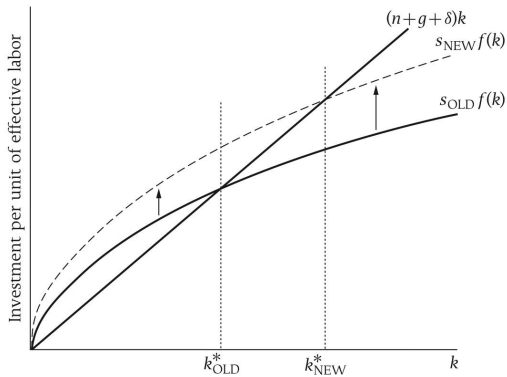


## 補充：淺談 Solow model



- Solow model: 分析固定資本形成如何促進經濟成長。 $S$ : 儲蓄,  $s$ : 儲蓄率
- 藍線的斜率:  $MPK$ 。紅線的斜率:  $s \times MPK$

## 補充：淺談 Solow model



## 補充: 淺談 Solow model

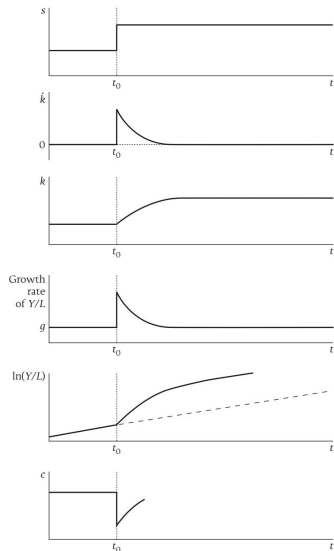
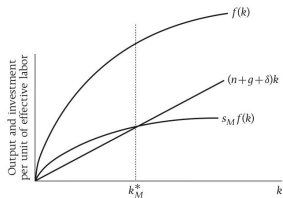
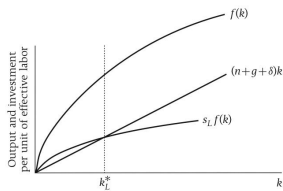
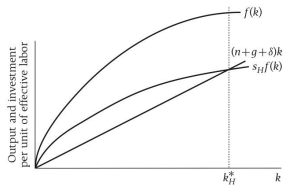


FIGURE 1.5 The effects of an increase in the saving rate

# 補充: 淺談 Solow model





- 雖然每個國家的情形並不相同 (例如儲蓄率不同), 使每個國家的 **Steady-State(恆定狀態)** 不同。
- 但大致上來說, 我們可以從 Solow Model 得出以下結論:
  - ▶ 1. 經濟成長時, 資本/勞動投入比例會 **上升**
  - ▶ 2. 資本/勞動投入 **較高** 的國家, 資本邊際產量 **較低**
  - ▶ 3. 資本/勞動投入 **較低** 的國家, 資本邊際產量 **較高**, 故吸引廠商投資
- 假使兩個國家的 Steady-State 相同, 一國所得較高, 一國所得較低, 所得較低的會逐漸追上所得較高的國家。