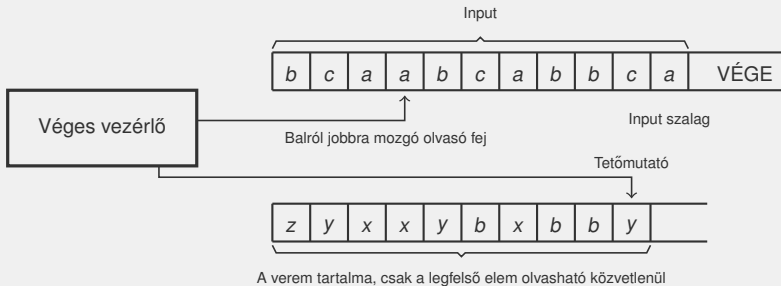


A számításelmélet alapjai I

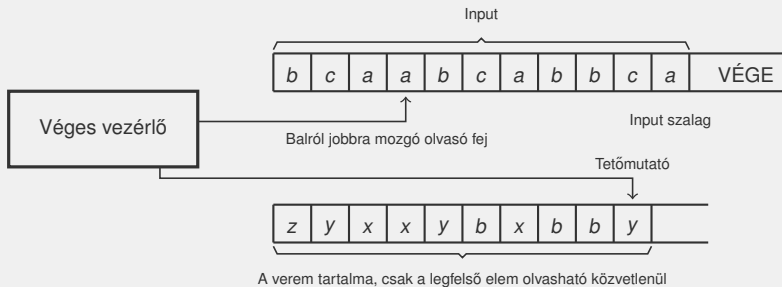
9. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Veremautomata

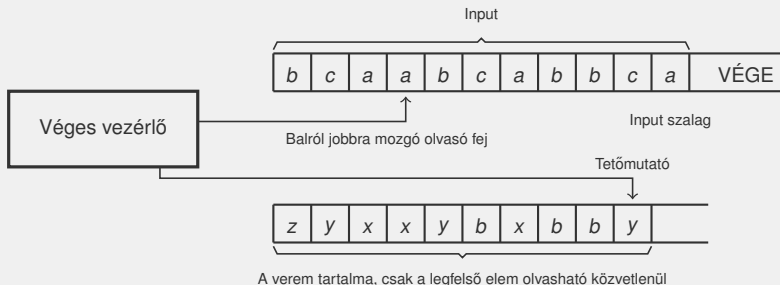


Veremautomata



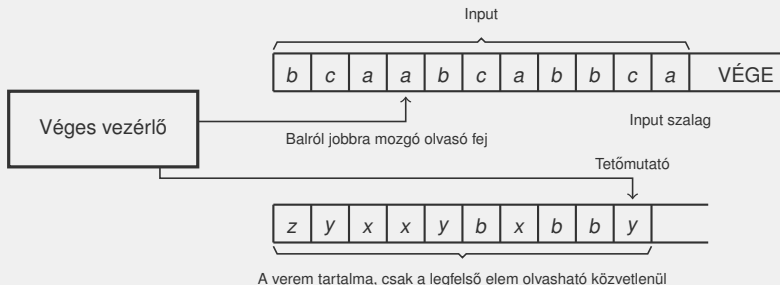
- ▶ A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.

Veremautomata



- ▶ A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- ▶ A verem esetében az új adat mindig a már meglévő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.

Veremautomata



- ▶ A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- ▶ A verem esetében az új adat mindig a már meglévő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.
- ▶ alapértelmezetten nemdeterminisztikus

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- ▶ $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- ▶ $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- ▶ $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- ▶ $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- ▶ $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- ▶ $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- ▶ $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- ▶ $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- ▶ $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- ▶ $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- ▶ $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- ▶ $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- ▶ $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- ▶ $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- ▶ Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- ▶ Q az állapotok véges halmaza,
- ▶ T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- ▶ $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- ▶ $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- ▶ $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- ▶ $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- ▶ Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. (0, 1, 2, ... darabot)

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- ▶ Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. (0, 1, 2, ... darabot)

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- ▶ Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. (0, 1, 2, ... darabot)
- ▶ Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε -átmenet** (ε -lépés, ε -mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát, hogy valamilyen szimbólumot olvasson az inputszalagról.

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- ▶ Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. (0, 1, 2, ... darabot)
- ▶ Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε -átmenet** (ε -lépés, ε -mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát, hogy valamilyen szimbólumot olvasson az inputszalagról.

Veremautomata

- ▶ A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- ▶ Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. (0, 1, 2, ... darabot)
- ▶ Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε -átmenet** (ε -lépés, ε -mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát, hogy valamilyen szimbólumot olvasson az inputszalagról.
- ▶ ε -mozgásra lehetőség van már az első inputszimbólum elolvasása előtt is illetve még az utolsó inputszimbólum elolvasása után is.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Így a q baloldalán lévő szimbólum van a verem tetején, míg a jobboldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Így a q baloldalán lévő szimbólum van a verem tetején, míg a jobboldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomata $w \in T^*$ bemenethez tartozó **kezdőkonfigurációja** $z_0 q_0 w$.

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- ▶ $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- ▶ $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- ▶ $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- ▶ $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- ▶ $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- ▶ $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z -t lecserélhetjük z' -re a verem tetején ($z' \in Z$)

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- ▶ $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- ▶ $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- ▶ $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z -t lecserélhetjük z' -re a verem tetején ($z' \in Z$)
- ▶ $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z' -t a verem tetejére (z -re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- ▶ $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- ▶ $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- ▶ $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z -t lecserélhetjük z' -re a verem tetején ($z' \in Z$)
- ▶ $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z' -t a verem tetejére (z -re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)
- ▶ Egyéb lehetőségek, például $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$ -t a verem tetejére tehetjük, z'' lesz a tetején ($z', z'' \in Z$).

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- ▶ $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- ▶ $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- ▶ $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z -t lecserélhetjük z' -re a verem tetején ($z' \in Z$)
- ▶ $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z' -t a verem tetejére (z -re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)
- ▶ Egyéb lehetőségek, például $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$ -t a verem tetejére tehetjük, z'' lesz a tetején ($z', z'' \in Z$).
- ▶ Általánosan $(w, r) \in \delta(z, q, t)$, ahol $w \in Z^*$ tetszőleges Z feletti szó. A w szó kerül z helyére és w utolsó betűje lesz a verem tetején.

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$ -val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$ -val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ▶ ha A -ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
 $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cdddq_2babba$ és
 $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$ -val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ▶ ha A -ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
 $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cdddq_2babba$ és
 $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,
- ▶ ha A -ban $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_3ababba \Rightarrow_A z_0cdddq_2ababba$

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$ -val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ▶ ha A -ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
$$z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cdddq_2babba$$
 és
$$z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$$
 is teljesül,
- ▶ ha A -ban $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_3ababba \Rightarrow_A z_0cdddq_2ababba$
- ▶ ha A -ban $\delta(c, q_5, \varepsilon) = \emptyset$ és $\delta(c, q_5, a) = \emptyset$, akkor nem létezik olyan C konfiguráció, melyre $z_0ccq_5aab \Rightarrow_A C$

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$ -val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$.

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$ -val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a \Rightarrow_A reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$ -val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a \Rightarrow_A reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa:

Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor
 $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$ -val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a \Rightarrow_A reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa:

Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor
 $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és
 $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.

Tehát $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cq_4ab$.

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$ -val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a \Rightarrow_A reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa:

Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor
 $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és
 $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.

Tehát $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cq_4ab$.

Definíció

Az A veremautomata által **elfogadó állapottal (végállapottal) elfogadott nyelv**

$L(A) = \{w \in T^* \mid z_0q_0w \Rightarrow_A^* up, \text{ ahol } u \in Z^*, p \in F\}$.

Nemdeterminisztikus működés

Legyen $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ tetszőleges és tegyük fel, hogy

$\delta(z, q, a) = \{(u_1, r_1), \dots, (u_k, r_k)\}$, továbbá

$\delta(z, q, \varepsilon) = \{(u_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (u_n, r_n)\}$, ahol $k \leq n$, $u_i \in Z^*$ és

$r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Nemdeterminisztikus működés

Legyen $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ tetszőleges és tegyük fel, hogy

$\delta(z, q, a) = \{(u_1, r_1), \dots, (u_k, r_k)\}$, továbbá

$\delta(z, q, \varepsilon) = \{(u_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (u_n, r_n)\}$, ahol $k \leq n$, $u_i \in Z^*$ és

$r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Ha az A veremautomata olvasófeje az $a \in T$ inputszimbólumon áll, a $q \in Q$ állapotban van, valamint a verem tetején levő szimbólum $z \in Z$, akkor az A veremautomata következő állapota valamelyik r_i lesz, és egyidejűleg a veremautomata z -t az u_i szóval helyettesíti, továbbá $1 \leq i \leq k$ esetén az olvasófej egy cellával jobbra lép az inputszalagon, míg $k + 1 \leq i \leq n$ esetén az olvasófej nem mozdul.

Nemdeterminisztikus működés

Legyen $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ tetszőleges és tegyük fel, hogy

$\delta(z, q, a) = \{(u_1, r_1), \dots, (u_k, r_k)\}$, továbbá

$\delta(z, q, \varepsilon) = \{(u_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (u_n, r_n)\}$, ahol $k \leq n$, $u_i \in Z^*$ és

$r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Ha az A veremautomata olvasófeje az $a \in T$ inputszimbólumon áll, a $q \in Q$ állapotban van, valamint a verem tetején levő szimbólum $z \in Z$, akkor az A veremautomata következő állapota valamelyik r_i lesz, és egyidejűleg a veremautomata z -t az u_i szóval helyettesíti, továbbá $1 \leq i \leq k$ esetén az olvasófej egy cellával jobbra lép az inputszalagon, míg $k + 1 \leq i \leq n$ esetén az olvasófej nem mozdul.

Determinisztikus automatáról akkor beszélhetünk, ha $n = 1$ minden $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát

determinisztikusnak nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát

determinisztikusnak nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- ▶ vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát

determinisztikusnak nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- ▶ vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- ▶ vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát

determinisztikusnak nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- ▶ vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- ▶ vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát

determinisztikusnak nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- ▶ vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- ▶ vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Észrevétel: Ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| \leq 1$ akkor a veremautomata a felismert nyelv módosulása nélkül kiegészíthető determinisztikus veremautomatává. Így tágabb értelemben az ezt a feltételt teljesítő veremautomatákat is tekinthetjük determinisztikus veremautomatának.

Alternatív reprezentációk

▶ **Átírási szabályokkal:**

A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Tehát ezzel az alternatív jelöléssel:

$$zqa \rightarrow up : \in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, a),$$

$$zq \rightarrow up : \in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon).$$

$$(p, q \in Q, a \in T, z \in Z, u \in Z^*)$$

Alternatív reprezentációk

▶ Átírási szabályokkal:

A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Tehát ezzel az alternatív jelöléssel:

$$zqa \rightarrow up : \in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, a),$$

$$zq \rightarrow up : \in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon).$$

$$(p, q \in Q, a \in T, z \in Z, u \in Z^*)$$

▶ Átmenetdiagrammal:

$p, q \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, z \in Z, u \in Z^*$ esetén:



A végállapotokat duplán karikázzuk. A kezdőállapotot \rightarrow jelöli.

Veremautomata

1. Példa: Legyen $L_1 = \{w c w^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Veremautomata

1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

$$(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) \quad \forall z, t \in \{a, b\}$$

$$(z, q_2) \in \delta(z, q_1, c) \quad \forall z \in \{a, b\}$$

$$(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon)$$

Veremautomata

1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

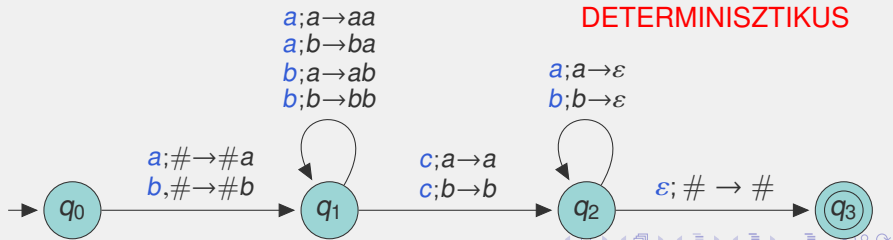
$$(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) \quad \forall z, t \in \{a, b\}$$

$$(z, q_2) \in \delta(z, q_1, c) \quad \forall z \in \{a, b\}$$

$$(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon)$$



Veremautomata

2. Példa: Legyen $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_2$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

$$(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) \quad \forall z, t \in \{a, b\}$$

$$(z, q_2) \in \delta(z, q_1, \varepsilon) \quad \forall z \in \{a, b\}$$

$$(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon)$$

Veremautomata

2. Példa: Legyen $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_2$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

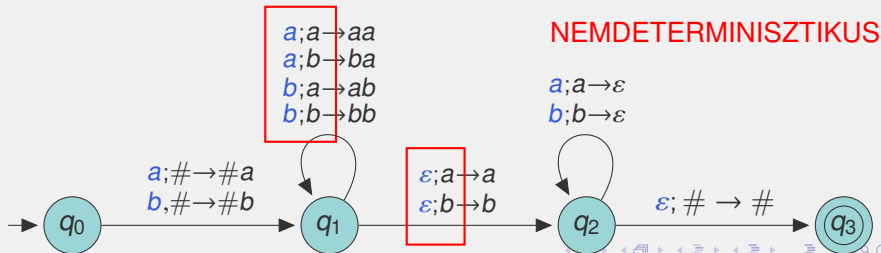
$$(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) \quad \forall z, t \in \{a, b\}$$

$$(z, q_2) \in \delta(z, q_1, \varepsilon) \quad \forall z \in \{a, b\}$$

$$(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) \quad \forall t \in \{a, b\}$$

$$(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon)$$



Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a tartalmazás valódi (ellentétben a véges automatáknál látottakkal). A tételt nem bizonyítjuk.

Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a tartalmazás valódi (ellentétben a véges automatáknál látottakkal). A tételt nem bizonyítjuk.

Tétel

A determinisztikus veremautomaták számítási ereje kisebb, mint a (nemdeterminisztikus) veremautomatáké, de nagyobb a véges automatáknál, azaz van olyan nyelv, amelyik felismerhető veremautomatával, de nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.

Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a tartalmazás valódi (ellentétben a véges automatáknál látottakkal). A tételt nem bizonyítjuk.

Tétel

A determinisztikus veremautomaták számítási ereje kisebb, mint a (nemdeterminisztikus) veremautomatáké, de nagyobb a véges automatáknál, azaz van olyan nyelv, amelyik felismerhető veremautomatával, de nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.

Megjegyzés: Az előbb látott $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$ nyelv ilyen. Míg $L_1 = \{waw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$ felismerhető determinisztikus veremautomatával, addig L_2 nem. (Ez nem következik az előzőekből.)

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv**

$$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}.$$

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv**

$$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}.$$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv**

$$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}.$$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv**

$$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}.$$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Szintén a blokkolás elkerülése végett definiáltuk úgy a kezdőkonfigurációt, hogy a veremábécé egy eleme (z_0) már eleve a veremben van.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv**

$$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}.$$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Szintén a blokkolás elkerülése végett definiáltuk úgy a kezdőkonfigurációt, hogy a veremábécé egy eleme (z_0) már eleve a veremben van.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az elfogadó állapotok halmaza irreleváns $N(A)$ szempontjából.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}, \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}, \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$\$q_0 a \rightarrow \aq_0

$aq_0 a \rightarrow aaq_0$

$aq_0 b \rightarrow q_1$

$aq_1 b \rightarrow q_1$

$\$q_1 \rightarrow q_1.$

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}, \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$\$q_0 a \rightarrow \aq_0

$aq_0 a \rightarrow aaq_0$

$aq_0 b \rightarrow q_1$

$aq_1 b \rightarrow q_1$

$\$q_1 \rightarrow q_1.$

A determinisztikus, $a^2 b^3$ -re:

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}, \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$\$q_0 a \rightarrow \aq_0

$aq_0 a \rightarrow aaq_0$

$aq_0 b \rightarrow q_1$

$aq_1 b \rightarrow q_1$

$\$q_1 \rightarrow q_1.$

A determinisztikus, $a^2 b^3$ -re:

$\$q_0 aabbb \Rightarrow \$aq_0 abbb \Rightarrow \$aaq_0 bbb \Rightarrow \$aq_1 bb \Rightarrow \$q_1 b \Rightarrow q_1 b.$

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}, \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$\$q_0 a \rightarrow \aq_0

$aq_0 a \rightarrow aaq_0$

$aq_0 b \rightarrow q_1$

$aq_1 b \rightarrow q_1$

$\$q_1 \rightarrow q_1.$

A determinisztikus, $a^2 b^3$ -re:

$\$q_0 aabbb \Rightarrow \$aq_0 abbb \Rightarrow \$aaq_0 bbb \Rightarrow \$aq_1 bb \Rightarrow \$q_1 b \Rightarrow q_1 b.$

A elutasítja $aabbb$ -t, mivel hiába lett üres a verem, még volt hátra az inputból.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomata. Legyen $z'_0 \notin Z, q'_0, q'_h \notin Q$. Az $A' = \langle Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_h\}, T, \delta', z'_0, q'_0, \{\} \rangle$ veremautomatát a következőképpen definiáljuk:

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomata. Legyen $z'_0 \notin Z, q'_0, q'_h \notin Q$. Az $A' = \langle Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_h\}, T, \delta', z'_0, q'_0, \{\} \rangle$ veremautomatát a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned}\delta'(z'_0, q'_0, \varepsilon) &:= \{(z'_0 z_0, q_0)\}, \\ \delta'(z, q, a) &:= \delta(z, q, a), \quad z \in Z, q \in Q, a \in T, \\ \delta'(z, q, \varepsilon) &:= \supseteq \delta(z, q, \varepsilon), \quad z \in Z, q \in Q, \\ (\varepsilon, q'_h) &:= \delta'(z, q, \varepsilon), \quad z \in Z \cup \{z'_0\}, q \in F \cup \{q'_h\}.\end{aligned}$$

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomata. Legyen $z'_0 \notin Z, q'_0, q'_h \notin Q$. Az $A' = \langle Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_h\}, T, \delta', z'_0, q'_0, \{\} \rangle$ veremautomatát a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned}\delta'(z'_0, q'_0, \varepsilon) &:= \{(z'_0 z_0, q_0)\}, \\ \delta'(z, q, a) &:= \delta(z, q, a), \quad z \in Z, q \in Q, a \in T, \\ \delta'(z, q, \varepsilon) &:\supseteq \delta(z, q, \varepsilon), \quad z \in Z, q \in Q, \\ (\varepsilon, q'_h) &:\in \delta'(z, q, \varepsilon), \quad z \in Z \cup \{z'_0\}, q \in F \cup \{q'_h\}.\end{aligned}$$

A' szimulálja A működését; a $z'_0 \neq z_0$ veremszimbólum azért szükséges, hogy A' ne fogadja el az olyan szavakat, amelyek kiürítik az A automata vermét anélkül, hogy teljesen feldolgoznák a bemenetet és F -beli állapotba jutnának.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*$, $q \in F$ -re.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*$, $q \in F$ -re.
Ekkor

$$z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'} z'_0 z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z'_0 uq \Rightarrow_A^* z'_0 q'_h \Rightarrow_{A'} q'_h,$$

tehát $w \in N(A')$.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*$, $q \in F$ -re.
Ekkor

$$z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'} z'_0 z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z'_0 uq \Rightarrow_{A'}^* z'_0 q'_h \Rightarrow_{A'} q'_h,$$

tehát $w \in N(A')$.

Legyen most $w \in N(A')$, tehát $z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'}^* p$, valamely $p \in Q \cup \{q'_0, q'_h\}$ -ra.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*$, $q \in F$ -re.
Ekkor

$$z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'} z'_0 z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z'_0 uq \Rightarrow_{A'}^* z'_0 q'_h \Rightarrow_{A'} q'_h,$$

tehát $w \in N(A')$.

Legyen most $w \in N(A')$, tehát $z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'}^* p$, valamely $p \in Q \cup \{q'_0, q'_h\}$ -ra.

Az első lépés $z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'} z'_0 z_0 q_0 w$. Mivel a z'_0 szimbólum csak valamely $(\varepsilon, q'_h) \in \delta'(z'_0, q, \varepsilon)$ átmenetet alkalmazó lépéssel törölhető a veremből, ezért $p = q'_h$ és lennie kell olyan $q \in F$, $z \in Z$, $u \in Z^*$ -nak, amelyre

$$z'_0 z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z'_0 uzq \Rightarrow_{A'} z'_0 uq'_h \Rightarrow_{A'}^* z'_0 q'_h \Rightarrow_{A'} q'_h,$$

ahol az első $\Rightarrow_{A'}^*$, csak A -beli átmeneteket használ,

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*$, $q \in F$ -re.
Ekkor

$$z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'} z'_0 z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z'_0 uq \Rightarrow_A^* z'_0 q'_h \Rightarrow_{A'} q'_h,$$

tehát $w \in N(A')$.

Legyen most $w \in N(A')$, tehát $z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'}^* p$, valamely $p \in Q \cup \{q'_0, q'_h\}$ -ra.

Az első lépés $z'_0 q'_0 w \Rightarrow_{A'} z'_0 z_0 q_0 w$. Mivel a z'_0 szimbólum csak valamely $(\varepsilon, q'_h) \in \delta'(z'_0, q, \varepsilon)$ átmenetet alkalmazó lépéssel törölhető a veremből, ezért $p = q'_h$ és lennie kell olyan $q \in F$, $z \in Z$, $u \in Z^*$ -nak, amelyre

$$z'_0 z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z'_0 uzq \Rightarrow_{A'} z'_0 uq'_h \Rightarrow_A^* z'_0 q'_h \Rightarrow_{A'} q'_h,$$

ahol az első $\Rightarrow_{A'}^*$, csak A -beli átmeneteket használ, azaz $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uzq$, tehát $w \in L(A)$.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat: Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az A' veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen $z'_0 \notin Z$, $q'_0, q'_f \notin Q$ és $A' = \langle Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_f\}, T, \delta', z'_0, q'_0, \{q'_f\} \rangle$.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat: Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az A' veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen $z'_0 \notin Z$, $q'_0, q'_f \notin Q$ és $A' = \langle Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_f\}, T, \delta', z'_0, q'_0, \{q'_f\} \rangle$.

$$\begin{aligned}\delta'(z'_0, q'_0, \varepsilon) &:= \{(z'_0 z_0, q_0)\}, \\ \delta'(z, q, a) &:= \delta(z, q, a), \quad z \in Z, q \in Q, a \in (T \cup \{\varepsilon\}), \\ \delta'(z'_0, q, \varepsilon) &:= \{(z'_0, q'_f)\}, \quad q \in Q.\end{aligned}$$

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat: Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\} \rangle$ veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az A' veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen $z'_0 \notin Z$, $q'_0, q'_f \notin Q$ és $A' = \langle Z \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_f\}, T, \delta', z'_0, q'_0, \{q'_f\} \rangle$.

$$\begin{aligned}\delta'(z'_0, q'_0, \varepsilon) &:= \{(z'_0 z_0, q_0)\}, \\ \delta'(z, q, a) &:= \delta(z, q, a), \quad z \in Z, q \in Q, a \in (T \cup \{\varepsilon\}), \\ \delta'(z'_0, q, \varepsilon) &:= \{(z'_0, q'_f)\}, \quad q \in Q.\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy valahányszor A kiüríti a vermét, akkor A' elfogadó állapotba kerül, továbbá A' csak ebben az esetben kerül elfogadó állapotba. Mivel q'_f -ből nincs átmenet $L(A') = N(A)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához megkonstruálható egy olyan A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához megkonstruálható egy olyan A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ Chomsky normálformájú grammatika. Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor P tartalmazza az $S \rightarrow \varepsilon$ szabályt, de ebben az esetben S ne forduljon elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához megkonstruálható egy olyan A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ Chomsky normálformájú grammatika. Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor P tartalmazza az $S \rightarrow \varepsilon$ szabályt, de ebben az esetben S ne forduljon elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy A veremautomatát, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

(1) $z_0 q_0 \rightarrow z_0 q_S : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

- (1) $z_0 q_0 \rightarrow z_0 q_S \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$,
- (2) $z_0 q_0 a \rightarrow z_0 q_X \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \rightarrow a \in P$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

- (1) $z_0 q_0 \rightarrow z_0 q_S : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$,
- (2) $z_0 q_0 a \rightarrow z_0 q_X : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \rightarrow a \in P$,
- (3) $Z q_Y a \rightarrow Z Y q_X : \in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}$,
 $Y \in N, X \rightarrow a \in P$ esetén,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

- (1) $z_0 q_0 \rightarrow z_0 q_S : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$,
- (2) $z_0 q_0 a \rightarrow z_0 q_X : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \rightarrow a \in P$,
- (3) $Z q_Y a \rightarrow Z Y q_X : \in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}$,
 $Y \in N, X \rightarrow a \in P$ esetén,
- (4) $Z q_Y \rightarrow q_X : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \rightarrow ZY \in P$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

- (1) $z_0 q_0 \rightarrow z_0 q_S : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$,
- (2) $z_0 q_0 a \rightarrow z_0 q_X : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \rightarrow a \in P$,
- (3) $Zq_Y a \rightarrow ZYq_X : \in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}$,
 $Y \in N, X \rightarrow a \in P$ esetén,
- (4) $Zq_Y \rightarrow q_X : \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \rightarrow ZY \in P$,
- (5) $z_0 q_S \rightarrow q_h : \in M_\delta$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Például, ha $G = \langle \{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow XY, X \rightarrow AB, Y \rightarrow ZB, Z \rightarrow BA, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}, S \rangle$, akkor az *abbab* **jobbaldali**

$S \Rightarrow XY \Rightarrow XZB \Rightarrow XZb \Rightarrow XBAb \Rightarrow$

$XBab \Rightarrow Xbab \Rightarrow ABbab \Rightarrow Abbab \Rightarrow abbab$

levezetésének

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Például, ha $G = \langle \{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow XY, X \rightarrow AB, Y \rightarrow ZB, Z \rightarrow BA, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}, S \rangle$, akkor az *abbab* **jobbaldali**

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow XZB \Rightarrow XZb \Rightarrow XBAb \Rightarrow$$

$$XBab \Rightarrow Xbab \Rightarrow ABbab \Rightarrow Abbab \Rightarrow abbab$$

levezetésének megfelel egy

$$z_0q_0abbab \Rightarrow z_0q_Abbab \Rightarrow z_0Aq_Bbab \Rightarrow z_0q_Xbab \Rightarrow z_0Xq_Bab \Rightarrow$$

$$z_0XBq_Ab \Rightarrow z_0Xq_Zb \Rightarrow z_0XZq_B \Rightarrow z_0Xq_Y \Rightarrow z_0q_S$$

redukció a veremautomatában és viszont.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Például, ha $G = \langle \{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow XY, X \rightarrow AB, Y \rightarrow ZB, Z \rightarrow BA, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}, S \rangle$, akkor az *abbab* **jobbaldali**

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow XZB \Rightarrow XZb \Rightarrow XBAb \Rightarrow$$

$$XBab \Rightarrow Xbab \Rightarrow ABbab \Rightarrow Abbab \Rightarrow abbab$$

levezetésének megfelel egy

$$z_0q_0abbab \Rightarrow z_0q_Abbab \Rightarrow z_0Aq_Bbab \Rightarrow z_0q_Xbab \Rightarrow z_0Xq_Bab \Rightarrow$$

$$z_0XBq_Ab \Rightarrow z_0Xq_Zb \Rightarrow z_0XZq_B \Rightarrow z_0Xq_Y \Rightarrow z_0q_S$$

redukció a veremautomatában és viszont.

Általában is teljesül, hogy $z_0q_0w \Rightarrow_A^* z_0q_S \iff S \Rightarrow_G^* w$. Ez $w \neq \varepsilon$ esetén a (2),(3),(4) szabályok, $w = \varepsilon$ esetén (1) biztosítja.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra.

Az M_δ konstrukciója alapján $u = \varepsilon$ kell, hogy teljesüljön, illetve, pontosabban

$$z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S \Rightarrow_A q_h$$

kell, hogy fennálljon. Tehát $S \Rightarrow_G^* w$ és így $L(A) \subseteq L(G)$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra.

Az M_δ konstrukciója alapján $u = \varepsilon$ kell, hogy teljesüljön, illetve, pontosabban

$$z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S \Rightarrow_A q_h$$

kell, hogy fennálljon. Tehát $S \Rightarrow_G^* w$ és így $L(A) \subseteq L(G)$.

Ha $S \Rightarrow_G^* w$, akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S$. Ekkor az (5) szabály alkalmazásával $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* q_h$, tehát $L(G) \subseteq L(A)$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{ \} \rangle$ veremautomata.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{ \} \rangle$ veremautomata.

Definiáljuk a $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatikát úgy, hogy N elemei $[q, x, p]$ alakú rendezett hármások, ahol $q, p \in Q$ és $x \in Z$. Ezen kívül bevezetjük az S új szimbólumot és legyen $N = Q \times Z \times Q \cup \{S\}$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

- ▶ Legyen $S \rightarrow [q_0, z_0, p] \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

- ▶ Legyen $S \rightarrow [q_0, z_0, p] \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.
- ▶ Ha $xqa \rightarrow y_1 \cdots y_m p_m \in M_\delta$, ahol $a \in (T \cup \{\varepsilon\})$, akkor minden $p_0, p_1, \dots, p_{m-1} \in Q$ állapot sorozatra legyen

$$[q, x, p_0] \rightarrow a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

szabály P -ben.

Tehát, ha $m = 0$, azaz, az $xqa \rightarrow p_0 \in M_\delta$, akkor legyen $[q, x, p_0] \rightarrow a \in P$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

- ▶ Legyen $S \rightarrow [q_0, z_0, p] \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.
- ▶ Ha $xqa \rightarrow y_1 \cdots y_m p_m \in M_\delta$, ahol $a \in (T \cup \{\varepsilon\})$, akkor minden $p_0, p_1, \dots, p_{m-1} \in Q$ állapotsorozatra legyen

$$[q, x, p_0] \rightarrow a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

szabály P -ben.

Tehát, ha $m = 0$, azaz, az $xqa \rightarrow p_0 \in M_\delta$, akkor legyen $[q, x, p_0] \rightarrow a \in P$.

- ▶ A P szabályhalmaz ne tartalmazzon további szabályt.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \rightarrow p \in M_\delta$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \rightarrow p \in M_\delta$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $[q, x, p_0] \Rightarrow_G^* u$ levezetés $n + 1$ lépésből.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \rightarrow p \in M_\delta$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $[q, x, p_0] \Rightarrow_G^* u$ levezetés $n + 1$ lépésből.

Akkor a levezetés alakja

$$[q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0] \Rightarrow_G^* u,$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \rightarrow p \in M_\delta$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $[q, x, p_0] \Rightarrow_G^* u$ levezetés $n + 1$ lépésből.

Akkor a levezetés alakja

$$[q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0] \Rightarrow_G^* u,$$

ahonnan az adódik, hogy léteznek olyan $u_m, u_{m-1}, \dots, u_1 \in T^*$ szavak, amelyekre $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és $[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i$, $1 \leq i \leq m$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m.$$

Így

$$\begin{aligned} xqu = xqau_m \cdots u_1 &\Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m u_m \cdots u_1 \Rightarrow_A^* \\ &y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} u_{m-1} \cdots u_1 \Rightarrow_A^* p_0. \end{aligned}$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m.$$

Így

$$\begin{aligned} xqu = xqau_m \cdots u_1 &\Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m u_m \cdots u_1 \Rightarrow_A^* \\ &y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} u_{m-1} \cdots u_1 \Rightarrow_A^* p_0. \end{aligned}$$

Ha $u \in L(G)$, akkor van olyan $p \in Q$, amelyre

$$S \Rightarrow_G [q_0, z_0, p] \Rightarrow_G^* u,$$

ahonnan az előbb bizonyított állítás miatt $z_0 q_0 u \Rightarrow_A^* p$, azaz $u \in N(A)$ adódik.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \rightarrow p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \rightarrow a \in P$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \rightarrow p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \rightarrow a \in P$.

Egynél több lépés esetén az $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m v \Rightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \rightarrow p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \rightarrow a \in P$.

Egynél több lépés esetén az $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m v \Rightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

A veremautomaták redukciójának definíciója miatt a redukció során mindenképp elő kell forduljon egy $y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} v_1$ konfiguráció, ahol $v = u_m v_1$ valamely $u_m, v_1 \in T^*$ -ra és $p_{m-1} \in Q$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \rightarrow p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \rightarrow a \in P$.

Egynél több lépés esetén az $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m v \Rightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

A veremautomaták redukciójának definíciója miatt a redukció során mindenképp elő kell forduljon egy $y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} v_1$ konfiguráció, ahol $v = u_m v_1$ valamely $u_m, v_1 \in T^*$ -ra és $p_{m-1} \in Q$, azaz

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m u_m v_1 \Rightarrow_A^* y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} v_1 \Rightarrow_A^* p.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan u_{m-1}, \dots, u_1 szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \dots, m.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan u_{m-1}, \dots, u_1 szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \dots, m.$$

és $p_0 = p$. Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i, \text{ ha } i = 1, \dots, m$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan u_{m-1}, \dots, u_1 szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \dots, m.$$

és $p_0 = p$. Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i, \text{ ha } i = 1, \dots, m$$

és a G grammatika definíciója alapján

$$[q, x, p] = [q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

teljesül

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan u_{m-1}, \dots, u_1 szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \dots, m.$$

és $p_0 = p$. Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i, \text{ ha } i = 1, \dots, m$$

és a G grammatika definíciója alapján

$$[q, x, p] = [q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

teljesül, ahonnan $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ következik.

Így, ha $u \in N(A)$, akkor $z_0 q_0 u \Rightarrow_A^* p$ valamely p állapotra, és így az imént bizonyított állítás alapján $S \Rightarrow_G [q_0, z_0, p] \Rightarrow_G^* u$, azaz, $N(A) \subseteq L(G)$.

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:

Bármely L nyelvre ekivalensek a következő állítások

- ▶ L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:

Bármely L nyelvre ekivalensek a következő állítások

- ▶ L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- ▶ L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:

Bármely L nyelvre ekivalensek a következő állítások

- ▶ L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- ▶ L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető
- ▶ L (nemdeterminisztikus) veremautomatával üres veremmel felismerhető

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:

Bármely L nyelvre ekivalensek a következő állítások

- ▶ L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- ▶ L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető
- ▶ L (nemdeterminisztikus) veremautomatával üres veremmel felismerhető

Másrészt létezik olyan környezetfüggetlen nyelv, ami nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.