

A számításelmélet alapjai I.

8. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

KÖRNYEZETFÜGGETLEN GRAMMATIKÁK

Mostantól környezetfüggetlen grammatikákat fogunk tekinteni.

KÖRNYEZETFÜGGETLEN GRAMMATIKÁK

Mostantól környezetfüggetlen grammatikákat fogunk tekinteni.

Emlékeztetőül egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ környezetfüggetlen grammatika szabályai $A \rightarrow u$ alakúak, ahol $A \in N, u \in (T \cup N)^*$.

Aktív és elérhető nemterminálisok

Definíció

A környezetfüggetlen grammatika egy nemterminálisát **inaktívnak** vagy **nem aktívnak** nevezzük, ha nem vezethető le belőle terminális szó; egyébként **aktívnak** mondjuk.

Aktív és elérhető nemterminálisok

Definíció

A környezetfüggetlen grammatika egy nemterminálisát **inaktívnak** vagy **nem aktívnak** nevezzük, ha nem vezethető le belőle terminális szó; egyébként **aktívnak** mondjuk.

Definíció

A környezetfüggetlen grammatika egy nemterminálisát **nem elérhetőnek** nevezzük, ha nem fordul elő egyetlen olyan mondatformában sem, amely a kezdőszimbólumból levezethető; egyébként **elérhetőnek** mondjuk.

Aktív és elérhető nemterminálisok

Definíció

A környezetfüggetlen grammatika egy nemterminálisát **inaktívnak** vagy **nem aktívnak** nevezzük, ha nem vezethető le belőle terminális szó; egyébként **aktívnak** mondjuk.

Definíció

A környezetfüggetlen grammatika egy nemterminálisát **nem elérhetőnek** nevezzük, ha nem fordul elő egyetlen olyan mondatformában sem, amely a kezdőszimbólumból levezethető; egyébként **elérhetőnek** mondjuk.

Definíció

Egy környezetfüggetlen grammatika **redukált**, ha minden nemterminálisa aktív és elérhető.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$A_1 := \{X \mid X \rightarrow u \in P, u \in T^*\},$$

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$A_1 := \{X \mid X \rightarrow u \in P, u \in T^*\},$$

$$A_{i+1} := A_i \cup \{X \mid X \rightarrow w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$A_1 := \{X \mid X \rightarrow u \in P, u \in T^*\},$$

$$A_{i+1} := A_i \cup \{X \mid X \rightarrow w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nyilván $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$A_1 := \{X \mid X \rightarrow u \in P, u \in T^*\},$$

$$A_{i+1} := A_i \cup \{X \mid X \rightarrow w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nyilván $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Ebből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, amelyre $A_k = A_{k+1}$. Ekkor $\forall \ell \geq k$ esetén $A_\ell = A_k$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$A_1 := \{X \mid X \rightarrow u \in P, u \in T^*\},$$

$$A_{i+1} := A_i \cup \{X \mid X \rightarrow w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nyilván $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Ebből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, amelyre $A_k = A_{k+1}$. Ekkor $\forall \ell \geq k$ esetén $A_\ell = A_k$.

$A := A_k$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$A_1 := \{X \mid X \rightarrow u \in P, u \in T^*\},$$

$$A_{i+1} := A_i \cup \{X \mid X \rightarrow w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nyilván $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Ebből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, amelyre $A_k = A_{k+1}$. Ekkor $\forall \ell \geq k$ esetén $A_\ell = A_k$.

$A := A_k$.

Tétel

A fenti módon előállított A halmaz éppen a G grammatika aktív nemterminálisainak halmaza.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: Legyen $X \in A$, ekkor $X \in A_k$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: Legyen $X \in A$, ekkor $X \in A_k$.

Állítás: Minden $0 \leq i \leq k$ esetén létezik $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w$. ($A_0 := \emptyset$).

Aktív nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: Legyen $X \in A$, ekkor $X \in A_k$.

Állítás: Minden $0 \leq i \leq k$ esetén létezik $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w$. ($A_0 := \emptyset$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: Legyen $X \in A$, ekkor $X \in A_k$.

Állítás: Minden $0 \leq i \leq k$ esetén létezik $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w$. ($A_0 := \emptyset$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 0$ -ra nyilvánvaló, hiszen $X \Rightarrow^* X$ és $X \in A_k \subseteq (T \cup A_{k-0})^*$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: Legyen $X \in A$, ekkor $X \in A_k$.

Állítás: Minden $0 \leq i \leq k$ esetén létezik $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w$. ($A_0 := \emptyset$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 0$ -ra nyilvánvaló, hiszen $X \Rightarrow^* X$ és $X \in A_k \subseteq (T \cup A_{k-0})^*$.

Ha pedig $X \Rightarrow_G^* w$, $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, akkor A_{k-i} definíciója szerint w minden nemterminálisából egy lépésben levezethető egy $(T \cup A_{k-(i+1)})^*$ -beli szó, azaz létezik $w' \in (T \cup A_{k-(i+1)})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w'$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: Legyen $X \in A$, ekkor $X \in A_k$.

Állítás: Minden $0 \leq i \leq k$ esetén létezik $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w$. ($A_0 := \emptyset$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 0$ -ra nyilvánvaló, hiszen $X \Rightarrow^* X$ és $X \in A_k \subseteq (T \cup A_{k-0})^*$.

Ha pedig $X \Rightarrow_G^* w$, $w \in (T \cup A_{k-i})^*$, akkor A_{k-i} definíciója szerint w minden nemterminálisából egy lépésben levezethető egy $(T \cup A_{k-(i+1)})^*$ -beli szó, azaz létezik $w \in (T \cup A_{k-(i+1)})^*$, melyre $X \Rightarrow_G^* w$.

$i = k$ -ra alkalmazva az állítást adódik, hogy A minden nemterminálisa aktív.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 1$ -re: az utolsó lépés egy A_1 -beli nemterminálissal ír át.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 1$ -re: az utolsó lépés egy A_1 -beli nemterminálissal ír át.

Tegyük fel, hogy i -re igaz az állítás. A $w_{i+1} \Rightarrow w_i$ levezetési lépésben átírt nemterminális $w_i \in (A_i \cup T)^*$ egy részszavára íródik át, így ez a részszó is $(A_i \cup T)^*$ -beli, vagyis az átírt nemterminális A_{i+1} -beli és így $w_{i+1} \in (A_{i+1} \cup T)^*$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 1$ -re: az utolsó lépés egy A_1 -beli nemterminálist ír át.

Tegyük fel, hogy i -re igaz az állítás. A $w_{i+1} \Rightarrow w_i$ levezetési lépésben átírt nemterminális $w_i \in (A_i \cup T)^*$ egy részszavára íródik át, így ez a részszó is $(A_i \cup T)^*$ -beli, vagyis az átírt nemterminális A_{i+1} -beli és így $w_{i+1} \in (A_{i+1} \cup T)^*$.

Tehát, $X = w_n \in (A_n \cup T)^*$, és így $X \in A_n \subseteq A$.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 1$ -re: az utolsó lépés egy A_1 -beli nemterminálist ír át.

Tegyük fel, hogy i -re igaz az állítás. A $w_{i+1} \Rightarrow w_i$ levezetési lépésben átírt nemterminális $w_i \in (A_i \cup T)^*$ egy részszavára íródik át, így ez a részszó is $(A_i \cup T)^*$ -beli, vagyis az átírt nemterminális A_{i+1} -beli és így $w_{i+1} \in (A_{i+1} \cup T)^*$.

Tehát, $X = w_n \in (A_n \cup T)^*$, és így $X \in A_n \subseteq A$.

Tehát minden aktív nemterminális A -beli. Ezzel a tételt beláttuk.

Aktív nemterminálisok meghatározása

Legyen most $X \in G$ egy aktív nemterminálisa. Ekkor létezik G -beli $X = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$ levezetés ($n \geq 1$), ahol $w \in T^*$.

Állítás: $w_i \in (A_i \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$).

i -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$i = 1$ -re: az utolsó lépés egy A_1 -beli nemterminálist ír át.

Tegyük fel, hogy i -re igaz az állítás. A $w_{i+1} \Rightarrow w_i$ levezetési lépésben átírt nemterminális $w_i \in (A_i \cup T)^*$ egy részszavára íródik át, így ez a részszó is $(A_i \cup T)^*$ -beli, vagyis az átírt nemterminális A_{i+1} -beli és így $w_{i+1} \in (A_{i+1} \cup T)^*$.

Tehát, $X = w_n \in (A_n \cup T)^*$, és így $X \in A_n \subseteq A$.

Tehát minden aktív nemterminális A -beli. Ezzel a tételt beláttuk.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$R_1 := \{S\},$$

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$R_1 := \{S\},$$

$$R_{i+1} := R_i \cup \{Y \in N \mid X \rightarrow uYw \in P, X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\},$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$R_1 := \{S\},$$

$$R_{i+1} := R_i \cup \{Y \in N \mid X \rightarrow uYw \in P, X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\},$$
$$i = 1, 2, \dots$$

Nyilván $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$R_1 := \{S\},$$

$$R_{i+1} := R_i \cup \{Y \in N \mid X \rightarrow uYw \in P, X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\},$$

$i = 1, 2, \dots$

Nyilván $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Ebből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, amelyre $R_k = R_{k+1}$. Ekkor $\forall \ell \geq k$ esetén $R_\ell = R_k$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$R_1 := \{S\},$$

$$R_{i+1} := R_i \cup \{Y \in N \mid X \rightarrow uYw \in P, X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\},$$

$i = 1, 2, \dots$

Nyilván $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Ebből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, amelyre $R_k = R_{k+1}$. Ekkor $\forall \ell \geq k$ esetén $R_\ell = R_k$.

$$R := R_k.$$

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy a környezetfüggetlen grammatika

$$R_1 := \{S\},$$

$$R_{i+1} := R_i \cup \{Y \in N \mid X \rightarrow uYw \in P, X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\},$$

$i = 1, 2, \dots$

Nyilván $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq N$.

Ebből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, amelyre $R_k = R_{k+1}$. Ekkor $\forall \ell \geq k$ esetén $R_\ell = R_k$.

$$R := R_k.$$

Tétel

A fenti módon előállított R halmaz éppen a G grammatika elérhető nemterminálisainak halmaza.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: i -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy az R_i -beli nemterminálisok elérhetőek.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: i -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy az R_i -beli nemterminálisok elérhetőek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: i -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy az R_i -beli nemterminálisok elérhetőek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz, és legyen $Y \in R_{i+1}$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: i -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy az R_i -beli nemterminálisok elérhetőek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz, és legyen $Y \in R_{i+1}$.

Ekkor létezik $X \in R_i$, $u, w \in (N \cup T)^*$, hogy $p = X \rightarrow uYw \in P$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: i -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy az R_i -beli nemterminálisok elérhetőek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz, és legyen $Y \in R_{i+1}$.

Ekkor létezik $X \in R_i$, $u, w \in (N \cup T)^*$, hogy $p = X \rightarrow uYw \in P$. Az indukciós feltevés szerint létezik $v_1, v_2 \in (N \cup T)^*$, melyre $S \Rightarrow^* v_1 X v_2$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Bizonyítás: i -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy az R_i -beli nemterminálisok elérhetőek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz, és legyen $Y \in R_{i+1}$.

Ekkor létezik $X \in R_i$, $u, w \in (N \cup T)^*$, hogy $p = X \rightarrow uYw \in P$. Az indukciós feltevés szerint létezik $v_1, v_2 \in (N \cup T)^*$, melyre $S \Rightarrow^* v_1 X v_2$. Ekkor p alkalmazásával: $S \Rightarrow^* v_1 X v_2 \Rightarrow v_1 u Y w v_2$, tehát Y elérhető.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

i -re vonatkozó teljes indukcióval látható, hogy w_i nemterminálisai R_i -beliek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

i -re vonatkozó teljes indukcióval látható, hogy w_i nemterminálisai R_i -beliek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz és Y w_{i+1} -beli nemterminális.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

i -re vonatkozó teljes indukcióval látható, hogy w_i nemterminálisai R_i -beliek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz és Y w_{i+1} -beli nemterminális. Ha Y w_i -ben is előfordul, akkor az indukciós feltevés miatt $Y \in R_i \subseteq R_{i+1}$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

i -re vonatkozó teljes indukcióval látható, hogy w_i nemterminálisai R_i -beliek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz és Y w_{i+1} -beli nemterminális. Ha Y w_i -ben is előfordul, akkor az indukciós feltevés miatt $Y \in R_i \subseteq R_{i+1}$. Ha Y nem fordul elő w_i -ben, akkor a $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ levezetés során egy $X \rightarrow uYw \in P$ szabály került alkalmazásra, ahol $u, w \in (N \cup T)^*$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

i -re vonatkozó teljes indukcióval látható, hogy w_i nemterminálisai R_i -beliek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz és Y w_{i+1} -beli nemterminális. Ha Y w_i -ben is előfordul, akkor az indukciós feltevés miatt $Y \in R_i \subseteq R_{i+1}$. Ha Y nem fordul elő w_i -ben, akkor a $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ levezetés során egy $X \rightarrow uYw \in P$ szabály került alkalmazásra, ahol $u, w \in (N \cup T)^*$. Az indukciós feltevés miatt $X \in R_i$ és így $Y \in R_{i+1}$.

Elérhető nemterminálisok meghatározása

Másrészt legyen $S = w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = uZw$ egy levezetés ($n \geq 1$), ahol $w_i, u, w \in (N \cup T)^*$ ($1 \leq i \leq n$) és $Z \in N$.

i -re vonatkozó teljes indukcióval látható, hogy w_i nemterminálisai R_i -beliek.

$i = 1$ -re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy i -re igaz és Y w_{i+1} -beli nemterminális. Ha Y w_i -ben is előfordul, akkor az indukciós feltevés miatt $Y \in R_i \subseteq R_{i+1}$. Ha Y nem fordul elő w_i -ben, akkor a $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ levezetés során egy $X \rightarrow uYw \in P$ szabály került alkalmazásra, ahol $u, w \in (N \cup T)^*$. Az indukciós feltevés miatt $X \in R_i$ és így $Y \in R_{i+1}$.

Tehát $Z \in R_n \subseteq R$, ezzel a tételt beláttuk.

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Bizonyítás: Hagyjuk el a G grammatika inaktív nemterminálisait és az őket tartalmazó valamennyi szabályt (G''), majd hagyjuk el az így kapott grammatika nem elérhető nemterminálisait és az ezeket tartalmazó szabályokat (G').

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Bizonyítás: Hagyjuk el a G grammatika inaktív nemterminálisait és az őket tartalmazó valamennyi szabályt (G''), majd hagyjuk el az így kapott grammatika nem elérhető nemterminálisait és az ezeket tartalmazó szabályokat (G').

G' nyilván ekvivalens az eredetivel és minden nemterminálisa elérhető.

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Bizonyítás: Hagyjuk el a G grammatika inaktív nemterminálisait és az őket tartalmazó valamennyi szabályt (G''), majd hagyjuk el az így kapott grammatika nem elérhető nemterminálisait és az ezeket tartalmazó szabályokat (G').

G' nyilván ekvivalens az eredetivel és minden nemterminálisa elérhető. Legyen X G' egy tetszőleges nemterminálisa.

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Bizonyítás: Hagyjuk el a G grammatika inaktív nemterminálisait és az őket tartalmazó valamennyi szabályt (G''), majd hagyjuk el az így kapott grammatika nem elérhető nemterminálisait és az ezeket tartalmazó szabályokat (G').

G' nyilván ekvivalens az eredetivel és minden nemterminálisa elérhető. Legyen X G' egy tetszőleges nemterminálisa. G'' -ben X aktív volt, azaz levezethető volt belőle G'' -ben terminális szó.

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Bizonyítás: Hagyjuk el a G grammatika inaktív nemterminálisait és az őket tartalmazó valamennyi szabályt (G''), majd hagyjuk el az így kapott grammatika nem elérhető nemterminálisait és az ezeket tartalmazó szabályokat (G').

G' nyilván ekvivalens az eredetivel és minden nemterminálisa elérhető. Legyen X G' egy tetszőleges nemterminálisa. G'' -ben X aktív volt, azaz levezethető volt belőle G'' -ben terminális szó. Mivel X elérhető G' -ben ezért ezen levezetésben előforduló nemterminálisok elérhetőek G' -ben, így X G' -ben is aktív.

Redukált grammatika

Tétel

Minden környezetfüggetlen G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' környezetfüggetlen grammatikát.

Bizonyítás: Hagyjuk el a G grammatika inaktív nemterminálisait és az őket tartalmazó valamennyi szabályt (G''), majd hagyjuk el az így kapott grammatika nem elérhető nemterminálisait és az ezeket tartalmazó szabályokat (G').

G' nyilván ekvivalens az eredetivel és minden nemterminálisa elérhető. Legyen X G' egy tetszőleges nemterminálisa. G'' -ben X aktív volt, azaz levezethető volt belőle G'' -ben terminális szó. Mivel X elérhető G' -ben ezért ezen levezetésben előforduló nemterminálisok elérhetőek G' -ben, így X G' -ben is aktív.

Tehát G' G -vel ekvivalens redukált grammatika.

Redukált grammatika

Mivel minden 3-as típusú grammatika egyben 2-es típusú is és a fenti bizonyításokban a szabályok közül csak elhagytunk néhányat azonnal adódik a következő:

Redukált grammatika

Mivel minden 3-as típusú grammatika egyben 2-es típusú is és a fenti bizonyításokban a szabályok közül csak elhagytunk néhányat azonnal adódik a következő:

Következmény

Minden reguláris G grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens redukált G' reguláris grammatikát.

Redukált grammatika

Példa

$$S \rightarrow A \mid bBD$$
$$A \rightarrow AB \mid A$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow AS \mid a$$
$$D \rightarrow BB$$

Redukált grammatika

Példa

$S \rightarrow A \mid bBD$

$A \rightarrow AB \mid A$

$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$

$C \rightarrow AS \mid a$

$D \rightarrow BB$

Aktívak: $A_1 = \{B, C\}$, $A_2 = \{B, C, D\}$, $A_3 = A_4 = \{B, C, D, S\}$, az A-t tartalmazó szabályok elhagyhatók.

Redukált grammatika

Példa

$$S \rightarrow A \mid bBD$$

$$A \rightarrow AB \mid A$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$

$$C \rightarrow AS \mid a$$

$$D \rightarrow BB$$

Aktívak: $A_1 = \{B, C\}$, $A_2 = \{B, C, D\}$, $A_3 = A_4 = \{B, C, D, S\}$, az A-t tartalmazó szabályok elhagyhatók.

$$S \rightarrow bBD$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$

$$C \rightarrow a$$

$$D \rightarrow BB$$

Redukált grammatika

Példa

$$S \rightarrow A \mid bBD$$
$$A \rightarrow AB \mid A$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow AS \mid a$$
$$D \rightarrow BB$$

Aktívak: $A_1 = \{B, C\}$, $A_2 = \{B, C, D\}$, $A_3 = A_4 = \{B, C, D, S\}$, az A-t tartalmazó szabályok elhagyhatók.

$$S \rightarrow bBD$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow a$$
$$D \rightarrow BB$$

Elérhetőek: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = R_3 = \{S, B, D\}$, C elhagyható.

Redukált grammatika

Példa

$$S \rightarrow A \mid bBD$$
$$A \rightarrow AB \mid A$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow AS \mid a$$
$$D \rightarrow BB$$

Aktívak: $A_1 = \{B, C\}$, $A_2 = \{B, C, D\}$, $A_3 = A_4 = \{B, C, D, S\}$, az A-t tartalmazó szabályok elhagyhatók.

$$S \rightarrow bBD$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow a$$
$$D \rightarrow BB$$

Elérhetőek: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = R_3 = \{S, B, D\}$, C elhagyható.

$$S \rightarrow bBD$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$D \rightarrow BB$$

Redukált grammatika

Példa

$$S \rightarrow A \mid bBD$$
$$A \rightarrow AB \mid A$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow AS \mid a$$
$$D \rightarrow BB$$

Aktívak: $A_1 = \{B, C\}$, $A_2 = \{B, C, D\}$, $A_3 = A_4 = \{B, C, D, S\}$, az A-t tartalmazó szabályok elhagyhatók.

$$S \rightarrow bBD$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$C \rightarrow a$$
$$D \rightarrow BB$$

Elérhető: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = R_3 = \{S, B, D\}$, C elhagyható.

$$S \rightarrow bBD$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid SS$$
$$D \rightarrow BB$$

Az eredmény az eredetivel ekvivalens és redukált.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P -beli szabály alakja a következők valamelyike:

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P -beli szabály alakja a következők valamelyike:

- ▶ $S \rightarrow \varepsilon$

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P -beli szabály alakja a következők valamelyike:

- ▶ $S \rightarrow \varepsilon$
- ▶ $A \rightarrow BC, A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P -beli szabály alakja a következők valamelyike:

- ▶ $S \rightarrow \varepsilon$
- ▶ $A \rightarrow BC, A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$.
- ▶ $A \rightarrow a, A \in N, a \in T$.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P -beli szabály alakja a következők valamelyike:

- ▶ $S \rightarrow \varepsilon$
- ▶ $A \rightarrow BC, A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$.
- ▶ $A \rightarrow a, A \in N, a \in T$.

Tétel

Minden G környezetfüggetlen grammatikához létezik vele ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P -beli szabály alakja a következők valamelyike:

- ▶ $S \rightarrow \varepsilon$
- ▶ $A \rightarrow BC, A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$.
- ▶ $A \rightarrow a, A \in N, a \in T$.

Tétel

Minden G környezetfüggetlen grammatikához létezik vele ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika.

Bizonyítás: Több lépésben átalakítjuk G -t a megfelelő alakra ügyelve arra, hogy az egyes átalakítási lépések után kapott grammatika G -vel ekvivalens legyen.

Chomsky normálforma

1. lépés Új kezdőszimbólum bevezetése

Vezessünk be egy új S_0 kezdőszimbólumot és adjuk hozzá az $S_0 \rightarrow S$ szabályt P -hez. A generált nyelv nyilván nem változik, de a kezdőszimbólum már nem fordul elő szabály jobboldalán.

Chomsky normálforma

1. lépés Új kezdőszimbólum bevezetése

Vezessünk be egy új S_0 kezdőszimbólumot és adjuk hozzá az $S_0 \rightarrow S$ szabályt P -hez. A generált nyelv nyilván nem változik, de a kezdőszimbólum már nem fordul elő szabály jobboldalán.

Kivétel: Amennyiben S nem fordul elő szabály jobboldalán, ez a lépés kihagyható.

Chomsky normálforma

1. lépés Új kezdőszimbólum bevezetése

Vezessünk be egy új S_0 kezdőszimbólumot és adjuk hozzá az $S_0 \rightarrow S$ szabályt P -hez. A generált nyelv nyilván nem változik, de a kezdőszimbólum már nem fordul elő szabály jobboldalán.

Kivétel: Amennyiben S nem fordul elő szabály jobboldalán, ez a lépés kihagyható.

Megjegyzés: A bizonyítás további része feltételezi, hogy S -sel van jelölve a kezdőszimbólum, ez a nemterminálisok átnevezésével biztosítható.

Chomsky normálforma

2. lépés Álterminálisok bevezetése

Minden $a \in T$ terminálisra végezzük el a következőt. Legyen \bar{a} egy új nemterminális szimbólum és helyettesítsük minden P -beli szabály jobboldalán a előfordulásait \bar{a} -val. Adjuk hozzá ezen kívül P -hez a $\bar{a} \rightarrow a$ új szabályt.

Chomsky normálforma

2. lépés Álterminálisok bevezetése

Minden $a \in T$ terminálisra végezzük el a következőt. Legyen \bar{a} egy új nemterminális szimbólum és helyettesítsük minden P -beli szabály jobboldalán a előfordulásait \bar{a} -val. Adjuk hozzá ezen kívül P -hez a $\bar{a} \rightarrow a$ új szabályt.

Az így kapott grammatika az eredetivel ekvivalens (ezt már korábban meggondoltuk, a zártsági tétel bizonyításánál).

Chomsky normálforma

2. lépés Álterminálisok bevezetése

Minden $a \in T$ terminálisra végezzük el a következőt. Legyen \bar{a} egy új nemterminális szimbólum és helyettesítsük minden P -beli szabály jobboldalán a előfordulásait \bar{a} -val. Adjuk hozzá ezen kívül P -hez a $\bar{a} \rightarrow a$ új szabályt.

Az így kapott grammatika az eredetivel ekvivalens (ezt már korábban meggondoltuk, a zártsági tétel bizonyításánál).

Kivétel: Amennyiben $A \rightarrow a \in P$, akkor a -nak ezt az előfordulását nem szükséges átírni, hiszen ez a szabály már kellő alakú.

Chomsky normálforma

3. lépés Hosszredukció

Ekkor minden $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geq 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \rightarrow Y_1 Z_1, Z_1 \rightarrow Y_2 Z_2, \dots, Z_{k-2} \rightarrow Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol Z_1, \dots, Z_{k-2} új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Chomsky normálforma

3. lépés Hosszredukció

Ekkor minden $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geq 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \rightarrow Y_1 Z_1, Z_1 \rightarrow Y_2 Z_2, \dots, Z_{k-2} \rightarrow Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol Z_1, \dots, Z_{k-2} új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Nyilván minden $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ szabályalkalmazás helyettesíthető a fenti szabályokkal.

Chomsky normálforma

3. lépés Hosszredukció

Ekkor minden $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geq 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \rightarrow Y_1 Z_1, Z_1 \rightarrow Y_2 Z_2, \dots, Z_{k-2} \rightarrow Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol Z_1, \dots, Z_{k-2} új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Nyilván minden $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ szabályalkalmazás helyettesíthető a fenti szabályokkal. Másrészt minden, valamelyik Z_i -t tartalmazó levezetés az átalakított grammatikában Z_1, \dots, Z_{k-2} sorrendben minden Z_i -t tartalmaz, és meggondolható, hogy amennyiben a Z_i -t behozó lépést nem közvetlenül követi a Z_i -t átíró lépés, akkor ez a Z_i -t átíró lépés a levezetésben előrehozható. Tehát feltehető, hogy a Z_i -k a fenti sorrendben, közvetlenül egymást követő lépésekben alakulnak át, vagyis $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ alkalmazását szimulálják.

Chomsky normálforma

4. lépés ε -mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \rightarrow \varepsilon \in P\},$$

Chomsky normálforma

4. lépés ε -mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \rightarrow \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \rightarrow u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}, \quad i \geq 1$$

Chomsky normálforma

4. lépés ε -mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \rightarrow \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \rightarrow u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geq 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \dots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geq k$ -ra.

Chomsky normálforma

4. lépés ε -mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \rightarrow \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \rightarrow u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geq 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \dots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geq k$ -ra.

$$U := U_k.$$

Chomsky normálforma

4. lépés ε -mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \rightarrow \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \rightarrow u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geq 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \dots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geq k$ -ra.

$$U := U_k.$$

Ekkor az aktív nemterminálisok halmazának algoritmikus előállításánál látotthoz hasonló gondolatmenettel meggondolható, hogy $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $X \in U$.

Chomsky normálforma

4. lépés ε -mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \rightarrow \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \rightarrow u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geq 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \dots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geq k$ -ra.

$$U := U_k.$$

Ekkor az aktív nemterminálisok halmazának algoritmikus előállításánál látotthoz hasonló gondolatmenettel meggondolható, hogy $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $X \in U$.

Ebből rögtön következik, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $S \in U$.

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ és $A \rightarrow C$ szabályokat

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ és $A \rightarrow C$ szabályokat
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \rightarrow C$ szabályt

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ és $A \rightarrow C$ szabályokat
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \rightarrow C$ szabályt
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ szabályt

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ és $A \rightarrow C$ szabályokat
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \rightarrow C$ szabályt
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ szabályt

Legyen G' az így kapott grammatika. Ekkor $L(G_1) \subseteq L(G) \setminus \{\varepsilon\}$, hiszen minden új szabály alkalmazása megfelel egy régi szabály alkalmazásának amelyet egy $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ vagy $C \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk.

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ és $A \rightarrow C$ szabályokat
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \rightarrow C$ szabályt
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ szabályt

Legyen G' az így kapott grammatika. Ekkor $L(G_1) \subseteq L(G) \setminus \{\varepsilon\}$, hiszen minden új szabály alkalmazása megfelel egy régi szabály alkalmazásának amelyet egy $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ vagy $C \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk.

Másrészt $L(G) \setminus \{\varepsilon\} \subseteq L(G_1)$. Ugyanis, ha $S \Rightarrow_G^* u$ és $u \neq \varepsilon$, akkor $S \Rightarrow_{G'}^* u$, hiszen az $X \rightarrow \varepsilon$ típusú szabályok alkalmazása elkerülhető egy megfelelő új szabály alkalmazásával.

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P -ből az összes $X \rightarrow \varepsilon$ alakú ún. **ε -szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ és $A \rightarrow C$ szabályokat
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \rightarrow C$ szabályt
- ▶ $A \rightarrow BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \rightarrow B$ szabályt

Legyen G' az így kapott grammatika. Ekkor $L(G_1) \subseteq L(G) \setminus \{\varepsilon\}$, hiszen minden új szabály alkalmazása megfelel egy régi szabály alkalmazásának amelyet egy $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ vagy $C \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk.

Másrészt $L(G) \setminus \{\varepsilon\} \subseteq L(G_1)$. Ugyanis, ha $S \Rightarrow_G^* u$ és $u \neq \varepsilon$, akkor $S \Rightarrow_{G'}^* u$, hiszen az $X \rightarrow \varepsilon$ típusú szabályok alkalmazása elkerülhető egy megfelelő új szabály alkalmazásával.

Tehát $S \notin U$ esetén G_1 ekvivalens G -vel, $S \in U$ esetén adjuk hozzá a grammatika szabályaihoz az $S \rightarrow \varepsilon$ szabályt.

Chomsky normálforma

5. lépés Lánementesítés

Chomsky normálforma

5. lépés Lánccmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **lánccszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P -beli lánccszabályok halmazát.

Chomsky normálforma

5. lépés Lánccmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **lánccszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P -beli lánccszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Chomsky normálforma

5. lépés Lánccmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **lánccszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P -beli lánccszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G -vel ekvivalens, lánccmentes G' grammatika szabályai:

Chomsky normálforma

5. lépés Lánccmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **lánccszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P -beli lánccszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G -vel ekvivalens, lánccmentes G' grammatika szabályai:

$P' := \{A \rightarrow w \mid \exists B \in H(A), \text{ amelyre } B \rightarrow w \in P\} \setminus P_0$.

Chomsky normálforma

5. lépés Lánccmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **lánccszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P -beli lánccszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G -vel ekvivalens, lánccmentes G' grammatika szabályai:

$P' := \{A \rightarrow w \mid \exists B \in H(A), \text{ amelyre } B \rightarrow w \in P\} \setminus P_0$.

$L(G') \subseteq L(G)$, hiszen egy $A \rightarrow w$ új szabály alkalmazása megfelel az $A \Rightarrow^* B$ lánccszabályok és a $B \rightarrow w$ eredeti szabály alkalmazásának ($B \in H(A)$).

Chomsky normálforma

5. lépés Lánccmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **lánccszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P -beli lánccszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G -vel ekvivalens, lánccmentes G' grammatika szabályai:

$P' := \{A \rightarrow w \mid \exists B \in H(A), \text{ amelyre } B \rightarrow w \in P\} \setminus P_0$.

$L(G') \subseteq L(G)$, hiszen egy $A \rightarrow w$ új szabály alkalmazása megfelel az $A \Rightarrow^* B$ lánccszabályok és a $B \rightarrow w$ eredeti szabály alkalmazásának ($B \in H(A)$).

Másrészt $L(G) \subseteq L(G')$, hiszen az új szabályokkal a lánccszabályok alkalmazása elkerülhető.

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

$$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \rightarrow B \in P\}.$$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

$$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \rightarrow B \in P\}.$$

$$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \dots \subseteq H_k(A) \subseteq \dots \subseteq N$$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

$$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \rightarrow B \in P\}.$$

$$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \dots \subseteq H_k(A) \subseteq \dots \subseteq N$$

$$k := \min\{0 \leq i \leq n - 1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}.$$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

$$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \rightarrow B \in P\}.$$

$$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \dots \subseteq H_k(A) \subseteq \dots \subseteq N$$

$$k := \min\{0 \leq i \leq n - 1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}.$$

$$H(A) := H_k(A).$$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geq 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

$$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \rightarrow B \in P\}.$$

$$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \dots \subseteq H_k(A) \subseteq \dots \subseteq N$$

$$k := \min\{0 \leq i \leq n - 1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}.$$

$$H(A) := H_k(A).$$

Ekkor az elérhető nemterminálisok halmazának algoritmikus előállításánál látotthoz hasonló gondolatmenettel meggondolható, hogy $H_k(A)$ valóban az A -ból láncszabályokkal elérhető nemterminálisok halmaza.

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimólum)

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimólum)

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAa \mid C$$

$$B \rightarrow bBb \mid C$$

$$C \rightarrow Cabc \mid b \mid \varepsilon$$

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimbólum)

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAa \mid C$$

$$B \rightarrow bBb \mid C$$

$$C \rightarrow Cabc \mid b \mid \varepsilon$$

Megoldás:

1. lépés: Nincs S a jobboldalon, maradhat S a kezdőszimbólum.

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimbólum)

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow aAa \mid C$$

$$B \rightarrow bBb \mid C$$

$$C \rightarrow Cabc \mid b \mid \varepsilon$$

Megoldás:

1. lépés: Nincs S a jobboldalon, maradhat S a kezdőszimbólum.
2. lépés (Álterminálisok bevezetése):

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow DAD \mid C$$

$$B \rightarrow EBE \mid C$$

$$C \rightarrow CDEF \mid b \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

Chomsky normálforma – példa

3. lépés (Hosszredukció):

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow DAD \mid C$

$B \rightarrow EBE \mid C$

$C \rightarrow CDEF \mid b \mid \varepsilon$

$D \rightarrow a$

$E \rightarrow b$

$F \rightarrow c$

Chomsky normálforma – példa

3. lépés (Hosszredukció):

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow DAD \mid C$$

$$B \rightarrow EBE \mid C$$

$$C \rightarrow CDEF \mid b \mid \varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid C$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid C$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$Z_1 \rightarrow AD$$

$$Z_2 \rightarrow BE$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

Chomsky normálforma – példa

4. lépés (ε -mentesítés):

$$U_0 = \{C\}, U_1 = \{C, A, B\}, U_2 = U_3 = \{S, A, B, C\} = U.$$

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid C$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid C$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$Z_1 \rightarrow AD$$

$$Z_2 \rightarrow BE$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

Chomsky normálforma – példa

4. lépés (ε -mentesítés):

$$U_0 = \{C\}, U_1 = \{C, A, B\}, U_2 = U_3 = \{S, A, B, C\} = U.$$

$$S \rightarrow AB$$

$$S \rightarrow AB \mid A \mid B \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid C$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid C$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid C$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid C$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid Z_3$$

$$D \rightarrow a$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$\implies$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$F \rightarrow c$$

$$Z_1 \rightarrow AD$$

$$Z_1 \rightarrow AD \mid D$$

$$Z_2 \rightarrow BE$$

$$Z_2 \rightarrow BE \mid E$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

Chomsky normálforma – példa

5. lépés (Láncmentesítés):

$$H_0(S) = \{S\}, H_1(S) = \{S, A, B\}, H_2(S) = \{S, A, B, C\}, H_3(S) = \{S, A, B, C, Z_3\} = H(S)$$

Hasonlóan $H(A) = \{A, C, Z_3\}$, $H(B) = \{B, C, Z_3\}$, $H(C) = \{C, Z_3\}$, $H(Z_1) = \{D, Z_1\}$, $H(Z_2) = \{E, Z_2\}$, a többi csak önmagát tartalmazza.

$$S \rightarrow AB \mid A \mid B \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid C$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid C$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid Z_3$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$Z_1 \rightarrow AD \mid D$$

$$Z_2 \rightarrow BE \mid E$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

Chomsky normálforma – példa

5. lépés (Láncmentesítés):

$$H_0(S) = \{S\}, H_1(S) = \{S, A, B\}, H_2(S) = \{S, A, B, C\}, H_3(S) = \{S, A, B, C, Z_3\} = H(S)$$

Hasonlóan $H(A) = \{A, C, Z_3\}$, $H(B) = \{B, C, Z_3\}$, $H(C) = \{C, Z_3\}$, $H(Z_1) = \{D, Z_1\}$, $H(Z_2) = \{E, Z_2\}$, a többi csak önmagát tartalmazza.

$$S \rightarrow AB \mid A \mid B \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid C$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid C$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid Z_3$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$Z_1 \rightarrow AD \mid D$$

$$Z_2 \rightarrow BE \mid E$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

\implies

$$S \rightarrow AB \mid DZ_1 \mid CZ_3 \mid b \mid DZ_4 \mid EZ_2 \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow DZ_1 \mid CZ_3 \mid b \mid DZ_4$$

$$B \rightarrow EZ_2 \mid CZ_3 \mid b \mid DZ_4$$

$$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid DZ_4$$

$$D \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

$$F \rightarrow c$$

$$Z_1 \rightarrow AD \mid a$$

$$Z_2 \rightarrow BE \mid b$$

$$Z_3 \rightarrow DZ_4$$

$$Z_4 \rightarrow EF$$

Chomsky normálforma – az algoritmus hatékonysága

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy környezetfüggetlen grammatika. Ha $p : X \rightarrow Y_1 \cdots Y_m \in P$, akkor legyen $|p| := m + 1$, a p szabály bal- és jobboldalának összhossza. Jelölje $|G| := \sum_{p \in P} |p|$ a G grammatika **méretét**.

Chomsky normálforma – az algoritmus hatékonysága

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy környezetfüggetlen grammatika. Ha $p : X \rightarrow Y_1 \cdots Y_m \in P$, akkor legyen $|p| := m + 1$, a p szabály bal- és jobboldalának összhossza. Jelölje $|G| := \sum_{p \in P} |p|$ a G grammatika **méretét**.

A Chomsky normálformára hozás hatékonysága:

A fenti algoritmus nagyságrendileg $|G|^2$ lépésben előállít egy nagyságrendileg legfeljebb $|G|^2$ méretű G -vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatikát.

Chomsky normálforma – az algoritmus hatékonysága

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy környezetfüggetlen grammatika. Ha $p : X \rightarrow Y_1 \cdots Y_m \in P$, akkor legyen $|p| := m + 1$, a p szabály bal- és jobboldalának összhossza. Jelölje $|G| := \sum_{p \in P} |p|$ a G grammatika **méretét**.

A Chomsky normálformára hozás hatékonysága:

A fenti algoritmus nagyságrendileg $|G|^2$ lépésben előállít egy nagyságrendileg legfeljebb $|G|^2$ méretű G -vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatikát.

Megjegyzés: A méretnövekedés a lánccmentesítés kivételével lineáris.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Állítás: Legyen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ környezetfüggetlen grammatika és egy $u \in T^*$ egy szó. Eldönthető, hogy $u \stackrel{?}{\in} L(G)$.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Állítás: Legyen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ környezetfüggetlen grammatika és egy $u \in T^*$ egy szó. Eldönthető, hogy $u \stackrel{?}{\in} L(G)$.

Bizonyítás: Az előző algoritmus alapján algoritmikusan előállítható egy G -vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika. Legyen $n = |u|$.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Állítás: Legyen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ környezetfüggetlen grammatika és egy $u \in T^*$ egy szó. Eldönthető, hogy $u \stackrel{?}{\in} L(G)$.

Bizonyítás: Az előző algoritmus alapján algoritmikusan előállítható egy G -vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika. Legyen $n = |u|$.

$n = 0$ esetén $u \in L(G) \Leftrightarrow S \rightarrow \varepsilon \in P$.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Állítás: Legyen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ környezetfüggetlen grammatika és egy $u \in T^*$ egy szó. Eldönthető, hogy $u \stackrel{?}{\in} L(G)$.

Bizonyítás: Az előző algoritmus alapján algoritmikusan előállítható egy G -vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika. Legyen $n = |u|$.

$n = 0$ esetén $u \in L(G) \Leftrightarrow S \rightarrow \varepsilon \in P$.

Teljes indukcióval könnyen látható, hogy $n \geq 1$ esetén u levezetése $n - 1$ darab „ $A \rightarrow BC$ ” típusú és n darab „ $A \rightarrow a$ ” típusú szabály alkalmazásából áll. Mivel adott grammatika és n esetén véges sok ilyen levezetés van ezek megvizsgálása után el tudjuk dönteni, hogy $u \stackrel{?}{\in} L(G)$.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Az előző algoritmus alapján csak exponenciális felső becslést adhatunk a szóprobléma eldöntésének hatékonyságára.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Az előző algoritmus alapján csak exponenciális felső becslést adhatunk a szóprobléma eldöntésének hatékonyságára.

u levezetéseinek keresését azonban hatékonyabban is megszervezhetjük egy „bottom-up” ún. „dinamikus programozás” segítségével, az így kapott algoritmus már polinomiális (azaz hatékony) lesz.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Az előző algoritmus alapján csak exponenciális felső becslést adhatunk a szóprobléma eldöntésének hatékonyságára.

u levezetéseinek keresését azonban hatékonyabban is megszervezhetjük egy „bottom-up” ún. „dinamikus programozás” segítségével, az így kapott algoritmus már polinomiális (azaz hatékony) lesz.

John Cocke, Daniel Younger és Tadao Kasami algoritmus (CYK algoritmus) egy Chomsky normálformában adott grammatika esetében $|G| \cdot n^3$ nagyságrendű lépésben eldönti a szóproblémát.

A környezetfüggetlen grammatikák szóproblémája

Az előző algoritmus alapján csak exponenciális felső becslést adhatunk a szóprobléma eldöntésének hatékonyságára.

u levezetéseinek keresését azonban hatékonyabban is megszervezhetjük egy „bottom-up” ún. „dinamikus programozás” segítségével, az így kapott algoritmus már polinomiális (azaz hatékony) lesz.

John Cocke, Daniel Younger és Tadao Kasami algoritmus (CYK algoritmus) egy Chomsky normálformában adott grammatika esetében $|G| \cdot n^3$ nagyságrendű lépésben eldönti a szóproblémát.

Tetszőleges környezetfüggetlen grammatika esetén tehát a Chomsky normálformára hozással kombinálva a CYK algoritmus hatékonyságára $|G|^2 \cdot n^3$ nagyságrendű felső becslés adható.

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika

Chomsky-normálformában adva és egy $u \in T^*$ szó.

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika

Chomsky-normálformában adva és egy $u \in T^*$ szó.

Output: $u \stackrel{?}{\in} L(G)$

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika
Chomsky-normálformában adva és egy $u \in T^*$ szó.

Output: $u \in L(G)$?

Legyen $u = t_1 \dots t_n$, $t_i \in T$, $n \geq 1$. Legyen A_i a $P_i \in P$ szabály bal-,
 β_i pedig a jobboldala. ($1 \leq i \leq |P|$, $A_i \in N$, $\beta_i \in T \cup N^2$.)

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika
Chomsky-normálformában adva és egy $u \in T^*$ szó.

Output: $u \stackrel{?}{\in} L(G)$

Legyen $u = t_1 \dots t_n$, $t_i \in T$, $n \geq 1$. Legyen A_i a $P_i \in P$ szabály bal-,
 β_i pedig a jobb oldala. ($1 \leq i \leq |P|$, $A_i \in N$, $\beta_i \in T \cup N^2$.)

A CYK algoritmus rekurzíven definiál $H_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ halmazokat
($j-i$) szerint növekvő sorrendben.

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika
Chomsky-normálformában adva és egy $u \in T^*$ szó.

Output: $u \stackrel{?}{\in} L(G)$

Legyen $u = t_1 \dots t_n$, $t_i \in T$, $n \geq 1$. Legyen A_i a $P_i \in P$ szabály bal-,
 β_i pedig a jobboldala. ($1 \leq i \leq |P|$, $A_i \in N$, $\beta_i \in T \cup N^2$.)

A CYK algoritmus rekurzíven definiál $H_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ halmazokat
($j-i$) szerint növekvő sorrendben.

$$H_{i,i} := \{A_j \mid \beta_j = t_i\}$$

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika
Chomsky-normálformában adva és egy $u \in T^*$ szó.

Output: $u \stackrel{?}{\in} L(G)$

Legyen $u = t_1 \dots t_n$, $t_i \in T$, $n \geq 1$. Legyen A_i a $P_i \in P$ szabály bal-,
 β_i pedig a jobboldala. ($1 \leq i \leq |P|$, $A_i \in N$, $\beta_i \in T \cup N^2$.)

A CYK algoritmus rekurzíven definiál $H_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ halmazokat
($j-i$) szerint növekvő sorrendben.

$$H_{i,i} := \{A_j \mid \beta_j = t_i\}$$

$$H_{i,j} := \{A_k \mid \beta_k \in \bigcup_{h=i}^{j-1} H_{i,h} H_{h+1,j}\} \quad (i < j)$$

CYK algoritmus 2-es típusú szóproblémára

Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus

Input: Egy környezetfüggetlen $G = \langle T, N, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky-normálformában** adva és egy $u \in T^*$ szó.

Output: $u \in L(G)$?

Legyen $u = t_1 \dots t_n$, $t_i \in T$, $n \geq 1$. Legyen A_i a $P_i \in P$ szabály bal-, β_i pedig a jobboldala. ($1 \leq i \leq |P|$, $A_i \in N$, $\beta_i \in T \cup N^2$.)

A CYK algoritmus rekurzíven definiál $H_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ halmazokat $(j-i)$ szerint növekvő sorrendben.

$$H_{i,i} := \{A_j \mid \beta_j = t_i\}$$

$$H_{i,j} := \{A_k \mid \beta_k \in \bigcup_{h=i}^{j-1} H_{i,h} H_{h+1,j}\} \quad (i < j)$$

$$u \in L(G) \iff S \in H_{1,n}.$$

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden

$1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j$ levezetést.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$ levezetést. Mivel a levezetendő szó legalább 2 hosszú ezért a levezetés első lépése $X \Rightarrow YZ$ valamely $Y, Z \in N$ -re.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$ levezetést. Mivel a levezetendő szó legalább 2 hosszú ezért a levezetés első lépése $X \Rightarrow YZ$ valamely $Y, Z \in N$ -re. Ekkor létezik egy olyan $i \leq h < j$, melyre $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$ levezetést. Mivel a levezetendő szó legalább 2 hosszú ezért a levezetés első lépése $X \Rightarrow YZ$ valamely $Y, Z \in N$ -re. Ekkor létezik egy olyan $i \leq h < j$, melyre $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$. Mivel $h - i < j - i$ és $j - (h + 1) < j - i$ ezért az indukciós feltevés szerint $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$ és így $X \in H_{i,j}$.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$ levezetést. Mivel a levezetendő szó legalább 2 hosszú ezért a levezetés első lépése $X \Rightarrow YZ$ valamely $Y, Z \in N$ -re. Ekkor létezik egy olyan $i \leq h < j$, melyre $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$. Mivel $h - i < j - i$ és $j - (h + 1) < j - i$ ezért az indukciós feltevés szerint $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$ és így $X \in H_{i,j}$.

Fordítva, ha $X \in H_{i,j}$ ($j > i$), akkor van olyan $i \leq h < j$ és $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$, melyre $X \rightarrow YZ \in P$,

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$ levezetést. Mivel a levezetendő szó legalább 2 hosszú ezért a levezetés első lépése $X \Rightarrow YZ$ valamely $Y, Z \in N$ -re. Ekkor létezik egy olyan $i \leq h < j$, melyre $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$. Mivel $h - i < j - i$ és $j - (h + 1) < j - i$ ezért az indukciós feltevés szerint $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$ és így $X \in H_{i,j}$.

Fordítva, ha $X \in H_{i,j}$ ($j > i$), akkor van olyan $i \leq h < j$ és $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$, melyre $X \rightarrow YZ \in P$, azaz $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$.

A CYK algoritmus helyessége

Az algoritmus helyességéhez elég belátni, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén $H_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* t_i \cdots t_j\}$.

Ezt $(j - i)$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$j - i = 0$ esetén világos, hogy t_i éppen $H_{i,i}$ nemterminálisaiból vezethető le.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan $1 \leq k \leq \ell \leq n$ -re, melyre $\ell - k < j - i$ és legyen $1 \leq i < j \leq n$.

Tekintsük egy $X \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$ levezetést. Mivel a levezetendő szó legalább 2 hosszú ezért a levezetés első lépése $X \Rightarrow YZ$ valamely $Y, Z \in N$ -re. Ekkor létezik egy olyan $i \leq h < j$, melyre $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$. Mivel $h - i < j - i$ és $j - (h + 1) < j - i$ ezért az indukciós feltevés szerint $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$ és így $X \in H_{i,j}$.

Fordítva, ha $X \in H_{i,j}$ ($j > i$), akkor van olyan $i \leq h < j$ és $Y \in H_{i,h}$, $Z \in H_{h+1,j}$, melyre $X \rightarrow YZ \in P$, azaz $Y \Rightarrow^* t_i \cdots t_h$ és $Z \Rightarrow^* t_{h+1} \cdots t_j$. Ekkor $X \Rightarrow YZ \Rightarrow^* t_i \cdots t_h Z \Rightarrow^* t_i \cdots t_j$.

CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$

Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal döntünk el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

t_1

t_2

\dots

t_n

CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$$S \rightarrow AB \mid BC$$

$$A \rightarrow XA \mid a$$

$$X \rightarrow a$$

$$C \rightarrow YC \mid c$$

$$Y \rightarrow c$$

$$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$$

$$U \rightarrow XX$$

$$W \rightarrow YY \mid XS$$

$$V \rightarrow ZZ$$

$$Z \rightarrow b$$

$H_{1,1}$	$H_{2,2}$	\dots	$H_{n,n}$
t_1	t_2	\dots	t_n

CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

	$H_{1,2}$	$H_{2,3}$	\dots	$H_{n-1,n}$
$H_{1,1}$	$H_{2,2}$		\dots	$H_{n,n}$
t_1	t_2	\dots		t_n

CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

		$H_{1,3}$	$H_{2,4}$		
	$H_{1,2}$	$H_{2,3}$	\dots	$H_{n-1,n}$	
$H_{1,1}$	$H_{2,2}$		\dots	$H_{n,n}$	
t_1	t_2		\dots	t_n	

CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$$S \rightarrow AB \mid BC$$

$$A \rightarrow XA \mid a$$

$$X \rightarrow a$$

$$C \rightarrow YC \mid c$$

$$Y \rightarrow c$$

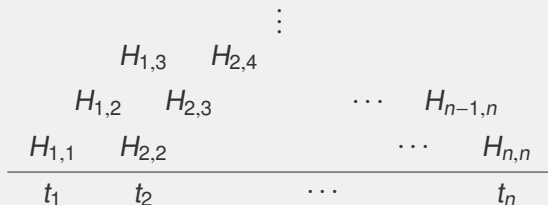
$$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$$

$$U \rightarrow XX$$

$$W \rightarrow YY \mid XS$$

$$V \rightarrow ZZ$$

$$Z \rightarrow b$$



CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$$S \rightarrow AB \mid BC$$

$$A \rightarrow XA \mid a$$

$$X \rightarrow a$$

$$C \rightarrow YC \mid c$$

$$Y \rightarrow c$$

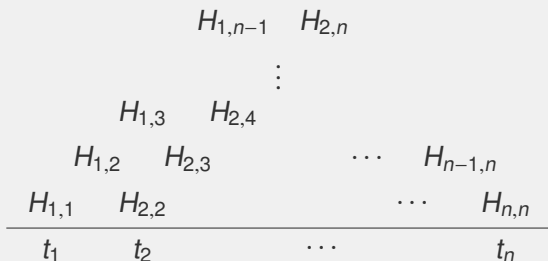
$$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$$

$$U \rightarrow XX$$

$$W \rightarrow YY \mid XS$$

$$V \rightarrow ZZ$$

$$Z \rightarrow b$$



CYK algoritmus

Példa: A $G = \langle \{S, A, B, C, U, V, W, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$
Chomsky normálformájú grammatika esetén CYK algoritmussal
döntsük el, hogy az $aabbcc$ szót generálja-e G , ahol P :

$$S \rightarrow AB \mid BC$$

$$A \rightarrow XA \mid a$$

$$X \rightarrow a$$

$$C \rightarrow YC \mid c$$

$$Y \rightarrow c$$

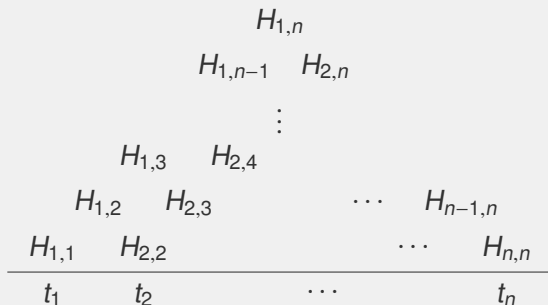
$$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$$

$$U \rightarrow XX$$

$$W \rightarrow YY \mid XS$$

$$V \rightarrow ZZ$$

$$Z \rightarrow b$$



CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

a

a

b

b

c

c

CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow \mathbf{XA} \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow \mathbf{XX}$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

$\{A, X\}$	$\{A, X\}$	$\{Z\}$	$\{Z\}$	$\{Y, C\}$	$\{Y, C\}$
a	a	b	b	c	c

$\{A, X\}\{A, X\} = \{AA, AX, XA, XX\}$

CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

	{A, U}	{}	{V}	{}	{C, W}	
{A, X}	{A, X}	{Z}	{Z}	{Y, C}	{Y, C}	
a	a	b	b	c	c	

$\{A, X\}\{\} = \{\}$

$\{A, U\}\{Z\} = \{AZ, UZ\}$

CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

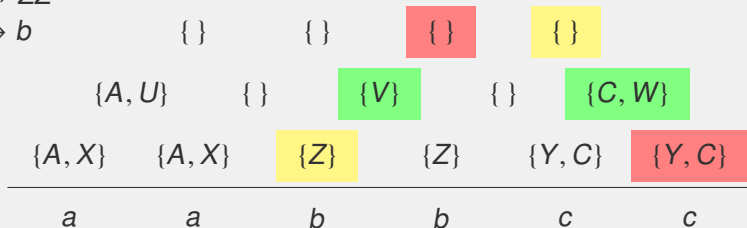
$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$



$\{Z\}\{\} = \{\}$

$\{V\}\{C, W\} = \{VC, VW\}$

$\{\}\{Y, C\} = \{\}$

CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

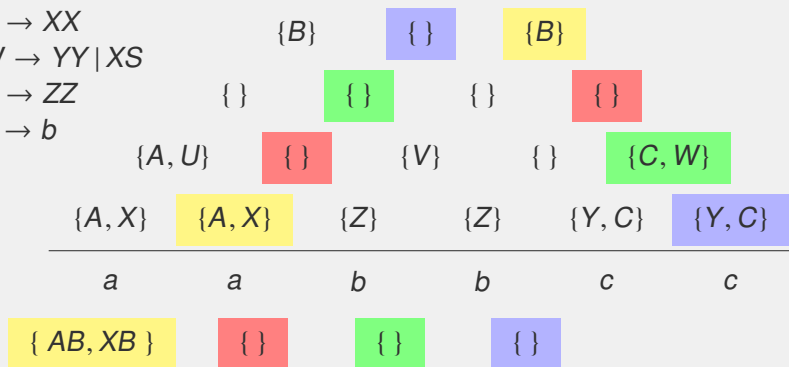
$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$



CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

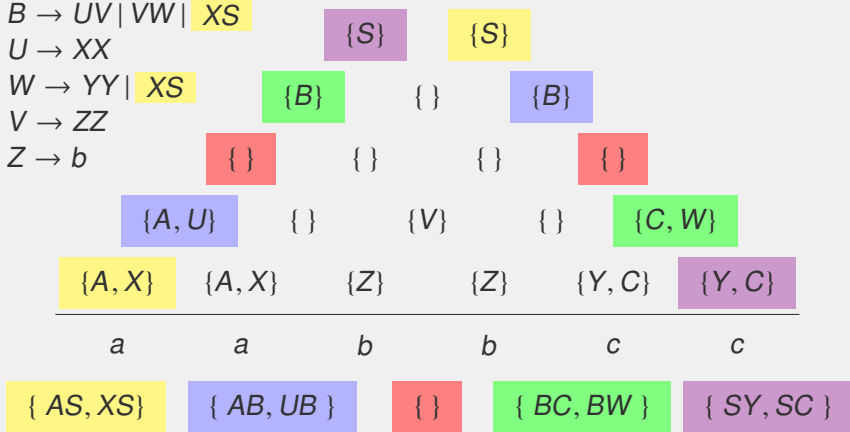
$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$



CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$V \rightarrow ZZ$

$Z \rightarrow b$

{S, B, W}

{S} {S}

{B} {} {B}

{}

{A, U} {} {V} {} {C, W}

{A, X} {A, X} {Z} {Z} {Y, C} {Y, C}

a

a

b

b

c

c

CYK algoritmus

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow XA \mid a$

$X \rightarrow a$

$C \rightarrow YC \mid c$

$\{S, B, W\}$

$Y \rightarrow c$

$B \rightarrow UV \mid VW \mid XS$

$\{S\}$

$\{S\}$

$U \rightarrow XX$

$W \rightarrow YY \mid XS$

$\{B\}$

$\{\}$

$\{B\}$

$V \rightarrow ZZ$

$\{\}$

$\{\}$

$\{\}$

$\{\}$

$Z \rightarrow b$

$\{A, U\}$

$\{\}$

$\{V\}$

$\{\}$

$\{C, W\}$

$\{A, X\}$

$\{A, X\}$

$\{Z\}$

$\{Z\}$

$\{Y, C\}$

$\{Y, C\}$

a

a

b

b

c

c

Mivel $S \in H_{1,6}$, ezért $aabbcc \in L(G)$.

Visszafejthető például a következő levezetés:

$S \Rightarrow AB \Rightarrow XAB \Rightarrow XAVW \Rightarrow XAZZW \Rightarrow XAZZYY \Rightarrow^* aabbcc.$