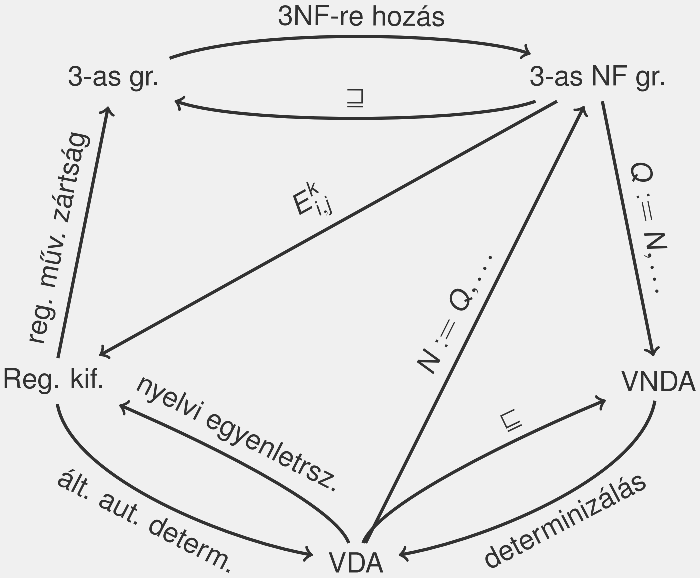
A számításelmélet alapjai I.

7. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

$\mathcal{L}_3$-at leíró formális eszközök



Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

(Emlékeztető:)

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. Az $X = Q \cdot X + R$ egyenletnek X-re vonatkozó megoldása $X = Q^* \cdot R$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

(Emlékeztető:)

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. Az $X = Q \cdot X + R$ egyenletnek X-re vonatkozó megoldása $X = Q^* \cdot R$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Arden tételét általánosabb alakban is kimondhatjuk (a bizonyítás ugyanaz):

Arden tétele

Legyenek az L_1 és L_2 nyelvek adottak. Az $X = L_1 X \cup L_2$ egyenletnek X-re vonatkozó megoldása $X = L_1^* L_2$. Amennyiben $\varepsilon \notin L_1$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

(Emlékeztető:)

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. Az $X = Q \cdot X + R$ egyenletnek X-re vonatkozó megoldása $X = Q^* \cdot R$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Arden tételét általánosabb alakban is kimondhatjuk (a bizonyítás ugyanaz):

Arden tétele

Legyenek az L_1 és L_2 nyelvek adottak. Az $X = L_1 X \cup L_2$ egyenletnek X-re vonatkozó megoldása $X = L_1^* L_2$. Amennyiben $\varepsilon \notin L_1$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

A zártsági tétel miatt ha L_1 és L_2 $\mathcal{L}_i$-beli, akkor X is.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Tétel

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} \cup \mathbf{v}$ nyelvi egyenletrendszer, ahol az

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$ nyelvmátrix és a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ nyelvvektor

adottak és az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ ismeretlen nyelvekből álló vektort

keressük.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Tétel

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} \cup \mathbf{v}$ nyelvi egyenletrendszer, ahol az $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$ nyelvmátrix és a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ nyelvvektor adottak és az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ ismeretlen nyelvekből álló vektort keressük. Ha $\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{n} \{L_{jk}\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{L_j\} \subseteq \mathcal{L}_i$ $(i \in \{0, 1, 2, 3\})$ és $\varepsilon \notin L_{jk}$ $(1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n)$, akkor az egyenletrendszernek egyértelműen létezik $\mathcal{L}_i$-beli megoldása, melynek elemei $\mathcal{L}$ elemeiből reguláris műveletekkel megkaphatók.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Tétel

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} \cup \mathbf{v}$ nyelvi egyenletrendszer, ahol az
$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$ nyelvmátrix és a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ nyelvvektor adottak és az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ ismeretlen nyelvekből álló vektort keressük. Ha $\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{n} \{L_{jk}\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{L_j\} \subseteq \mathcal{L}_i$ $(i \in \{0, 1, 2, 3\})$ és $\varepsilon \notin L_{jk}$ $(1 \le j \le n, 1 \le k \le n)$, akkor az egyenletrendszernek egyértelműen létezik $\mathcal{L}_i$-beli megoldása, melynek elemei $\mathcal{L}$ elemeiből reguláris műveletekkel megkaphatók.

Megjegyzés: A j. egyenlet tehát $X_j = L_{j1}X_1 \cup \cdots \cup L_{jn}X_n \cup L_j$.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Bizonyításvázlat:

Gauss eliminációval redukáljuk az egyenletek és az ismeretlenek számát:

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Bizonyításvázlat:

Gauss eliminációval redukáljuk az egyenletek és az ismeretlenek számát:

Az utolsó egyenlet: $X_n = L_{nn}X_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n$.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Bizonyításvázlat:

Gauss eliminációval redukáljuk az egyenletek és az ismeretlenek számát:

Az utolsó egyenlet: $X_n = L_{nn}X_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n$.

Arden tétele alapján az utolsó egyenletből $X_n = L_{nn}^*(\bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n)$, amiből az $\mathbf{x}' = \mathbf{M}'\mathbf{x}' \cup \mathbf{v}'$ nyelvi egyenletrendszer adódik az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$ ismeretlenekre, ahol

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Bizonyításvázlat:

Gauss eliminációval redukáljuk az egyenletek és az ismeretlenek számát:

Az utolsó egyenlet: $X_n = L_{nn}X_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n$.

Arden tétele alapján az utolsó egyenletből $X_n = L_{nn}^*(\bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n)$, amiből az $\mathbf{x}' = \mathbf{M}'\mathbf{x}' \cup \mathbf{v}'$ nyelvi egyenletrendszer adódik az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$ ismeretlenekre, ahol

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} L'_{11} & \cdots & L'_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_{(n-1)1} & \cdots & L'_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \text{nyelvmátrix és } \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} L'_1 \\ \vdots \\ L'_{n-1} \end{bmatrix},$$

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Bizonyításvázlat:

Gauss eliminációval redukáljuk az egyenletek és az ismeretlenek számát:

Az utolsó egyenlet: $X_n = L_{nn}X_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n$.

Arden tétele alapján az utolsó egyenletből $X_n = L_{nn}^*(\bigcup_{k=1}^{n-1} L_{nk}X_k \cup L_n)$, amiből az $\mathbf{x}' = \mathbf{M}'\mathbf{x}' \cup \mathbf{v}'$ nyelvi egyenletrendszer adódik az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$ ismeretlenekre, ahol

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} L'_{11} & \cdots & L'_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_{(n-1)1} & \cdots & L'_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$ nyelvmátrix és $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} L'_1 \\ \vdots \\ L'_{n-1} \end{bmatrix}$,

továbbá $L'_{jk} = L_{jk} \cup L_{jn}L_{nn}^*L_{nk}$ és $L'_j = L_j \cup L_{jn}L_{nn}^*L_n$.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Eggyel kevesebb egyenlet, eggyel kevesebb ismeretlen. Látható, hogy $\varepsilon \notin L'_{jk}$ továbbá $L'_{jk} \in \mathcal{L}_i$ a zártsági tétel miatt.

Végül egyetlen, egyismeretlenes lineáris nyelvi egyenletünk marad, amit Arden tétele alapján megoldhatunk. A többi ismeretlen értéke visszahelyettesítéssel adódik.

Az egyértelműséget nem bizonyítjuk, hasonlóan látható, mint Arden tételének bizonyításában.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{aligned} X &= a^*bX + b^*aY + ba \\ Y &= b^*aX + a^*bY + ab \end{aligned}$ egyenletrendszert!

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{array}{l} X = a^*bX + b^*aY + ba \\ Y = b^*aX + a^*bY + ab \end{array}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{array}{l} X = a^*bX + b^*aY + ba \\ Y = b^*aX + a^*bY + ab \end{array}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

$X = (a^*b)^*(ba + b^*aY)$.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{aligned} X &= a^*bX + b^*aY + ba \\ Y &= b^*aX + a^*bY + ab \end{aligned}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

$X = (a^*b)^*(ba + b^*aY)$.

$Y = b^*a(a^*b)^*(ba + b^*aY) + a^*bY + ab$

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{aligned} X &= a^*bX + b^*aY + ba \\ Y &= b^*aX + a^*bY + ab \end{aligned}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

$X = (a^*b)^*(ba + b^*aY)$.

$Y = b^*a(a^*b)^*(ba + b^*aY) + a^*bY + ab$

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)Y + (b^*a(a^*b)^*ba + ab)$,

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{aligned} X &= a^*bX + b^*aY + ba \\ Y &= b^*aX + a^*bY + ab \end{aligned}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

$X = (a^*b)^*(ba + b^*aY)$.

$Y = b^*a(a^*b)^*(ba + b^*aY) + a^*bY + ab$

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)Y + (b^*a(a^*b)^*ba + ab)$, amiből

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ba + ab)$.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{aligned} X &= a^*bX + b^*aY + ba \\ Y &= b^*aX + a^*bY + ab \end{aligned}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

$X = (a^*b)^*(ba + b^*aY)$.

$Y = b^*a(a^*b)^*(ba + b^*aY) + a^*bY + ab$

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)Y + (b^*a(a^*b)^*ba + ab)$, amiből

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ba + ab)$.

Hasonlóan: $X = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ab + ba)$.

Lineáris nyelvi egyenletrendszerek megoldása

Példa:

Oldjuk meg az $\begin{aligned} X &= a^*bX + b^*aY + ba \\ Y &= b^*aX + a^*bY + ab \end{aligned}$ egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et Arden tétele alapján:

$X = (a^*b)^*(ba + b^*aY)$.

$Y = b^*a(a^*b)^*(ba + b^*aY) + a^*bY + ab$

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)Y + (b^*a(a^*b)^*ba + ab)$, amiből

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ba + ab)$.

Hasonlóan: $X = (b^*a(a^*b)^*b^*a + a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ab + ba)$.

A megoldás egyértelmű.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

(Emlékeztető:)

Egy $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata egy $q \in Q$ **állapotára vonatkozó maradéknyelve** alatt az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet értettük.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

(Emlékeztető:)

Egy $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata egy $q \in Q$ **állapotára vonatkozó maradéknyelve** alatt az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet értettük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

(Emlékeztető:)

Egy $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata egy $q \in Q$ **állapotára vonatkozó maradéknyelve** alatt az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet értettük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

Tehát $L(A, q_0) = L(A)$ és $\varepsilon \in L(A, q) \iff q \in F$.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

(Emlékeztető:)

Egy $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata egy $q \in Q$ **állapotára vonatkozó maradéknyelve** alatt az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet értettük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

Tehát $L(A, q_0) = L(A)$ és $\varepsilon \in L(A, q) \iff q \in F$.

Vegyük továbbá észre, hogy fennállnak a következő nyelvi egyenletek:

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

(Emlékeztető:)

Egy $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata egy $q \in Q$ **állapotára vonatkozó maradéknyelve** alatt az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet értettük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

Tehát $L(A, q_0) = L(A)$ és $\varepsilon \in L(A, q) \iff q \in F$.

Vegyük továbbá észre, hogy fennállnak a következő nyelvi egyenletek:

$$L(A, q) = \sum_{t \in T} t\, L(A, \delta(q, t)) + \begin{cases} \emptyset & \text{ha } q \notin F \\ \varepsilon & \text{ha } q \in F \end{cases}$$

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

(Emlékeztető:)

Egy $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata egy $q \in Q$ **állapotára vonatkozó maradéknyelve** alatt az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet értettük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

Tehát $L(A, q_0) = L(A)$ és $\varepsilon \in L(A, q) \iff q \in F$.

Vegyük továbbá észre, hogy fennállnak a következő nyelvi egyenletek:

$$L(A, q) = \sum_{t \in T} t\, L(A, \delta(q, t)) + \begin{cases} \emptyset & \text{ha } q \notin F \\ \varepsilon & \text{ha } q \in F \end{cases}$$

Megoldjuk $L(A) = L(A, q_0)$-ra. A megoldás egyértelmű az előző tétel szerint, de azért is, mert $L(A, q)$ egyértelmű.

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $\quad Y := L(A, q_1)$,

$Z := L(A, q_2)$, $\quad V := L(A, q_3)$,

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $Y := L(A, q_1)$,

$Z := L(A, q_2)$, $V := L(A, q_3)$,

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\to q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $\quad Y := L(A, q_1)$,

$Z := L(A, q_2)$, $\quad V := L(A, q_3)$,

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

$$\boxed{\begin{array}{ll} X = aY + bZ + cV & \\ Y = bZ & \\ Z = aX + cV & \\ V = bV + \varepsilon & \qquad X = ? \end{array}}$$

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $Y := L(A, q_1)$,

$Z := L(A, q_2)$, $V := L(A, q_3)$,

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= aY + bZ + cV \\ Y &= bZ \\ Z &= aX + cV \\ V &= bV + \varepsilon \qquad\qquad X = ? \end{aligned}}$$

$V = b^*,$

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $Y := L(A, q_1)$,
$Z := L(A, q_2)$, $V := L(A, q_3)$,

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= aY + bZ + cV \\ Y &= bZ \\ Z &= aX + cV \\ V &= bV + \varepsilon & X &= ? \end{aligned}}$$

$V = b^*$, $Z = aX + cb^*$, $Y = b(aX + cb^*)$,

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0), \qquad Y := L(A, q_1),$

$Z := L(A, q_2), \qquad V := L(A, q_3),$

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

$$\begin{aligned} X &= aY + bZ + cV \\ Y &= bZ \\ Z &= aX + cV \\ V &= bV + \varepsilon \end{aligned} \qquad X = ?$$

$V = b^*, \quad Z = aX + cb^*, \quad Y = b(aX + cb^*),$

$X = ab(aX + cb^*) + b(aX + cb^*) + cb^*,$

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $\quad Y := L(A, q_1)$,

$Z := L(A, q_2)$, $\quad V := L(A, q_3)$,

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

$$\boxed{\begin{array}{ll} X = aY + bZ + cV & \\ Y = bZ & \\ Z = aX + cV & \\ V = bV + \varepsilon & X = ? \end{array}}$$

$V = b^*, \quad Z = aX + cb^*, \quad Y = b(aX + cb^*),$

$X = ab(aX + cb^*) + b(aX + cb^*) + cb^*,$

$X = (aba + ba)X + (abc + bc + c)b^*,$

VDA-hoz reguláris kifejezés

Példa:

	a	b	c
$\to q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$X := L(A, q_0)$, $\quad Y := L(A, q_1)$,

$Z := L(A, q_2)$, $\quad V := L(A, q_3)$,

Észrevétel: $L(A, q_4) = \emptyset$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= aY + bZ + cV \\ Y &= bZ \\ Z &= aX + cV \\ V &= bV + \varepsilon \qquad\qquad X = ? \end{aligned}}$$

$$V = b^*, \quad Z = aX + cb^*, \quad Y = b(aX + cb^*),$$

$$X = ab(aX + cb^*) + b(aX + cb^*) + cb^*,$$

$$X = (aba + ba)X + (abc + bc + c)b^*,$$

$$X = (aba + ba)^*(abc + bc + c)b^*.$$

Általánosított automata

Legyen $\mathcal{R}(T)$ a T feletti reguláris kifejezések halmaza.

Általánosított automata

Legyen $\mathcal{R}(T)$ a T feletti reguláris kifejezések halmaza.

Definíció

Az **általánosított automata** defíciója megegyezik a véges nemdeteminisztikus automata definíciójával azzal a kivétellel, hogy δ átmenetfüggvényére $\delta : Q \times \mathcal{R}(T) \to \mathcal{P}(Q)$ teljesül.

Általánosított automata

Legyen $\mathcal{R}(T)$ a T feletti reguláris kifejezések halmaza.

Definíció

Az **általánosított automata** defíciója megegyezik a véges nemdeteminisztikus automata definíciójával azzal a kivétellel, hogy δ átmenetfüggvényére $\delta: Q \times \mathcal{R}(T) \to \mathcal{P}(Q)$ teljesül.

Átmenetdiagramos ábrázolásában az a különbség, hogy az éleinek címkéi betűk helyett általánosabban, T feletti reguláris kifejezések lehetnek.

Általánosított automata által felismert nyelv

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy általánosított automata és legyenek $u, v \in QT^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $q, p \in Q$, $z, w \in T^*$, $R \in \mathcal{R}(T)$, hogy $p \in \delta(q, R)$, $z \in L(R)$, $u = qzw$ és $v = pw$ teljesül.

Általánosított automata által felismert nyelv

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy általánosított automata és legyenek $u, v \in QT^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $q, p \in Q$, $z, w \in T^*$, $R \in \mathcal{R}(T)$, hogy $p \in \delta(q, R)$, $z \in L(R)$, $u = qzw$ és $v = pw$ teljesül.

A többlépéses redukció és a felismert nyelv fogalma nem változik.

Általánosított automata által felismert nyelv

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy általánosított automata és legyenek $u, v \in QT^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $q, p \in Q$, $z, w \in T^*$, $R \in \mathcal{R}(T)$, hogy $p \in \delta(q, R)$, $z \in L(R)$, $u = qzw$ és $v = pw$ teljesül.

A többlépéses redukció és a felismert nyelv fogalma nem változik.

$u \Rightarrow_A^* v$, ha $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow_A w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Általánosított automata által felismert nyelv

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy általánosított automata és legyenek $u, v \in QT^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $q, p \in Q$, $z, w \in T^*$, $R \in \mathcal{R}(T)$, hogy $p \in \delta(q, R)$, $z \in L(R)$, $u = qzw$ és $v = pw$ teljesül.

A többlépéses redukció és a felismert nyelv fogalma nem változik.

$u \Rightarrow_A^* v$, ha $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow_A w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}$

Általánosított automata

Észrevétel: Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ általánosított automata elfogadja az $u \in T^*$ szót $\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in T^*$, $R_1, \ldots R_n \in \mathcal{R}(T)$, $q_0 \in Q_0$ és $q_1, \ldots, q_n \in Q$, melyre $u = u_1 \cdots u_n$, továbbá minden $1 \leq i \leq n$ esetén $u_i \in L(R_i)$, $q_i \in \delta(q_{i-1}, R_i)$ és $q_n \in F$.

Általánosított automata

Észrevétel: Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ általánosított automata elfogadja az $u \in T^*$ szót $\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in T^*$, $R_1, \ldots R_n \in \mathcal{R}(T)$, $q_0 \in Q_0$ és $q_1, \ldots, q_n \in Q$, melyre $u = u_1 \cdots u_n$, továbbá minden $1 \leq i \leq n$ esetén $u_i \in L(R_i)$, $q_i \in \delta(q_{i-1}, R_i)$ és $q_n \in F$.

Észrevétel: Átmenetdiagramos reprezentáció esetén A akkor és csak akkor fogadja el az $u \in T^*$ szót, ha létezik irányított séta q_0-ból valamely F-beli állapotba úgy, hogy ha a séta mentén az élek címkéje az élek sorrendjében rendre $R_1, \ldots, R_n$, akkor $u \in L(R_1 R_2 \cdots R_n)$.

Általánosított automata

Észrevétel: Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ általánosított automata elfogadja az $u \in T^*$ szót $\Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in T^*$, $R_1, \ldots R_n \in \mathcal{R}(T)$, $q_0 \in Q_0$ és $q_1, \ldots, q_n \in Q$, melyre $u = u_1 \cdots u_n$, továbbá minden $1 \leq i \leq n$ esetén $u_i \in L(R_i)$, $q_i \in \delta(q_{i-1}, R_i)$ és $q_n \in F$.

Észrevétel: Átmenetdiagramos reprezentáció esetén A akkor és csak akkor fogadja el az $u \in T^*$ szót, ha létezik irányított séta q_0-ból valamely F-beli állapotba úgy, hogy ha a séta mentén az élek címkéje az élek sorrendjében rendre $R_1, \ldots, R_n$, akkor $u \in L(R_1 R_2 \cdots R_n)$.

Definíció

Az ε-átmenetes, véges nemdeterminisztikus automata (εVNDA) olyan általánosított automata, ahol minden átmenet $T \cup \{\varepsilon\}$-beli.

Általánosított automata

Észrevétel: Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ általánosított automata elfogadja az $u \in T^*$ szót $\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in T^*$, $R_1, \ldots R_n \in \mathcal{R}(T)$, $q_0 \in Q_0$ és $q_1, \ldots, q_n \in Q$, melyre $u = u_1 \cdots u_n$, továbbá minden $1 \leq i \leq n$ esetén $u_i \in L(R_i)$, $q_i \in \delta(q_{i-1}, R_i)$ és $q_n \in F$.

Észrevétel: Átmenetdiagramos reprezentáció esetén A akkor és csak akkor fogadja el az $u \in T^*$ szót, ha létezik irányított séta q_0-ból valamely F-beli állapotba úgy, hogy ha a séta mentén az élek címkéje az élek sorrendjében rendre $R_1, \ldots, R_n$, akkor $u \in L(R_1 R_2 \cdots R_n)$.

Definíció

Az ε-átmenetes, véges nemdeterminisztikus automata (εVNDA) olyan általánosított automata, ahol minden átmenet $T \cup \{\varepsilon\}$-beli.

Tehát átmenetfüggvénye az input betűnkénti feldolgozása mellett állapotváltásokat engedélyezhet (ε-átmenetek).

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

Példa: Legyen $R = (a^*b)(b^*c)^* + a^*b^*c^*$. Készítsünk olyan A VDA-t, hogy $L(\mathcal{A}) = L(R)$!

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

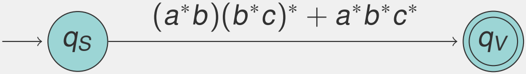
Példa: Legyen $R = (a^*b)(b^*c)^* + a^*b^*c^*$. Készítsünk olyan A VDA-t, hogy $L(\mathcal{A}) = L(R)$!

0. lépés: Adott R reguláris kifejezéshez kiindulunk egy $A = \langle\{q_S, q_V\}, T, \delta, \{q_S\}, \{q_V\}\rangle$ általánosított automatából, ahol $\delta(q_S, R) = \{q_V\}$ az egyetlen átmenet. Nyilvánvalóan $L(A) = L(R)$.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

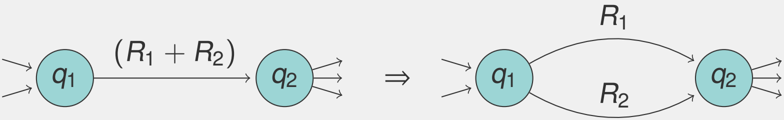
Példa: Legyen $R = (a^*b)(b^*c)^* + a^*b^*c^*$. Készítsünk olyan A VDA-t, hogy $L(\mathcal{A}) = L(R)$!

0. lépés: Adott R reguláris kifejezéshez kiindulunk egy $A = \langle\{q_S, q_V\}, T, \delta, \{q_S\}, \{q_V\}\rangle$ általánosított automatából, ahol $\delta(q_S, R) = \{q_V\}$ az egyetlen átmenet. Nyilvánvalóan $L(A) = L(R)$.



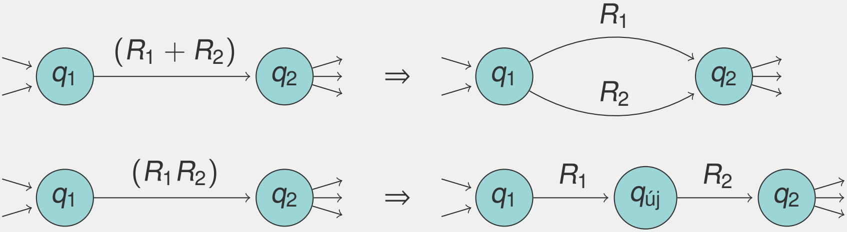
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

1. lépés: Az általánosított automata alábbi transzformációi nem változtatják $L(A)$-t.



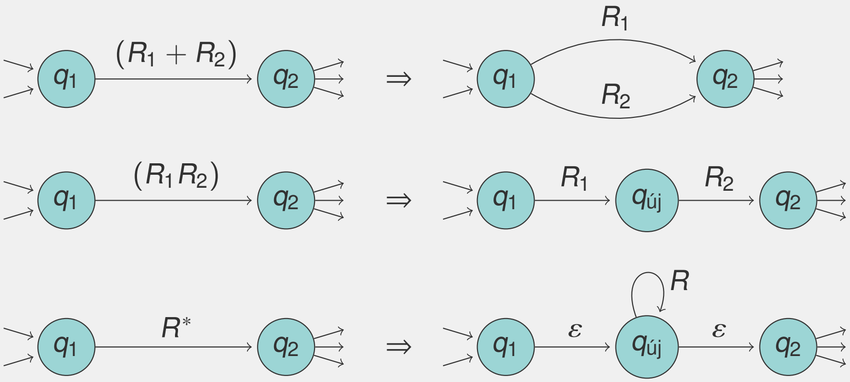
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

1. lépés: Az általánosított automata alábbi transzformációi nem változtatják $L(A)$-t.



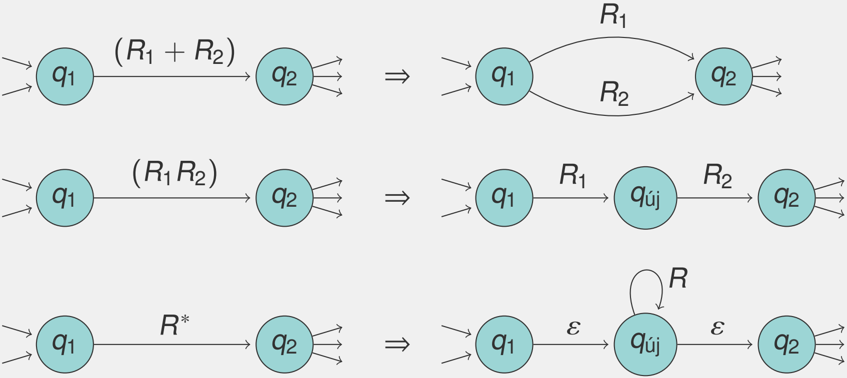
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

1. lépés: Az általánosított automata alábbi transzformációi nem változtatják $L(A)$-t.



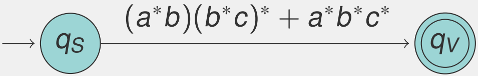
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

1. lépés: Az általánosított automata alábbi transzformációi nem változtatják $L(A)$-t.

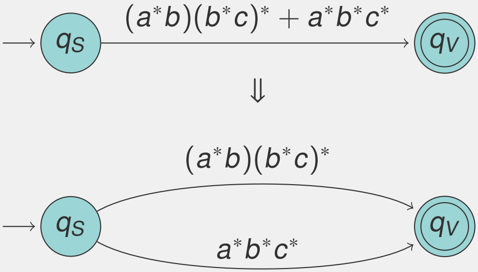


Például a 3. esetben meggondolható, hogy bármelyik új él használata implikálja a $(q_1, q_{új})$ egyszeres, valamely $k \in \mathbb{N}$-re a $(q_{új}, q_{új})$ él k-szoros és $(q_{új}, q_2)$ él egyszeres használatát ebben a sorrendben, ami megfelel egy eredeti R^* címkéjű (q_1, q_2) élhasználatnak.

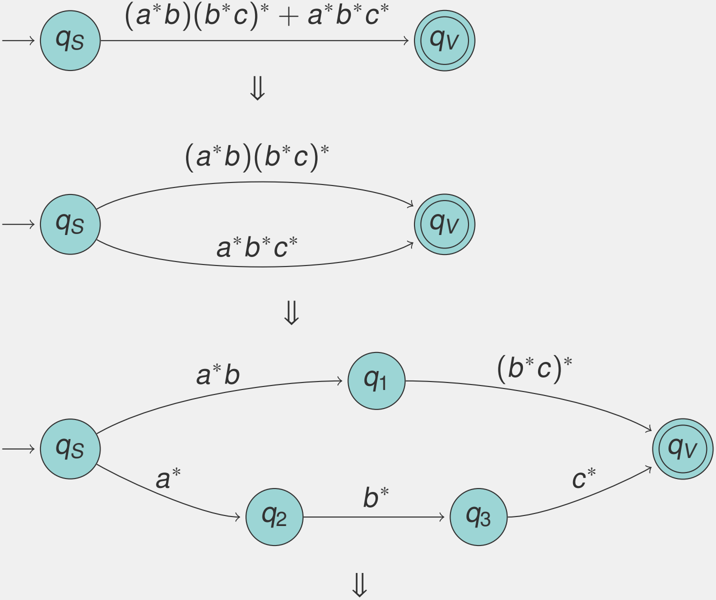
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



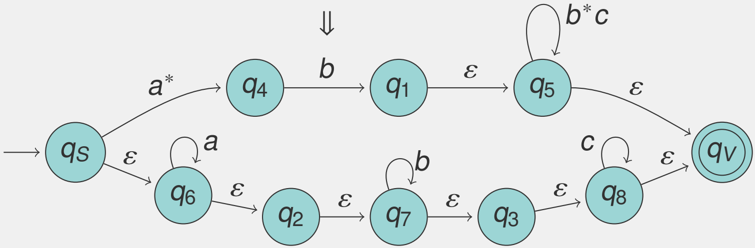
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



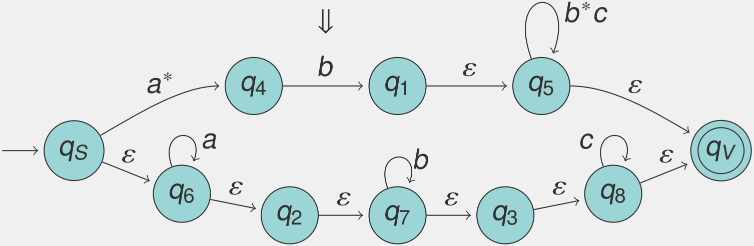
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

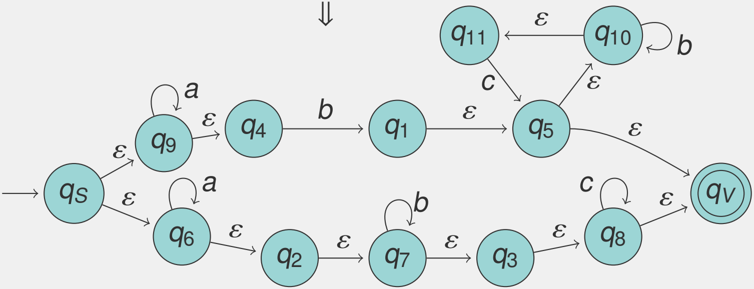


Reguláris kifejezéshez VDA készítése



Reguláris kifejezéshez VDA készítése





Reguláris kifejezéshez VDA készítése

Egyszerűsítési lehetőség: Ha $\delta(q, t) = \{q'\}$ és $\delta(q', t') = \{q''\}$ $(t, t' \in T \cup \{\varepsilon\}$, legalább az egyikük $\varepsilon)$ az **egyetlen** átmenet q'-be illetve q'-ből, akkor q' elhagyható, és legyen $q'' \in \delta(q, tt')$.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

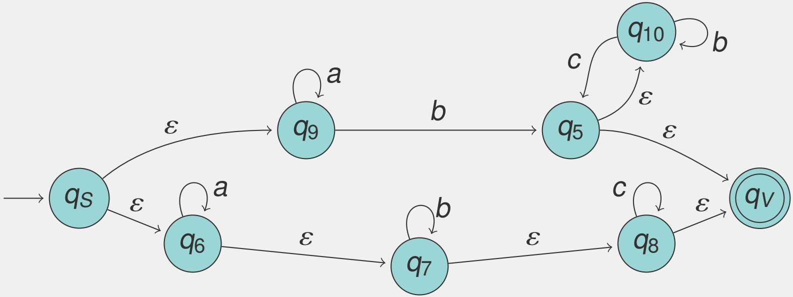
Egyszerűsítési lehetőség: Ha $\delta(q, t) = \{q'\}$ és $\delta(q', t') = \{q''\}$ ($t, t' \in T \cup \{\varepsilon\}$, legalább az egyikük ε) az **egyetlen** átmenet q'-be illetve q'-ből, akkor q' elhagyható, és legyen $q'' \in \delta(q, tt')$.

Például adott esetben $q_1, q_4, q_2, q_3, q_{11}$ elhagyható.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

Egyszerűsítési lehetőség: Ha $\delta(q,t) = \{q'\}$ és $\delta(q',t') = \{q''\}$ ($t, t' \in T \cup \{\varepsilon\}$, legalább az egyikük ε) az **egyetlen** átmenet q'-be illetve q'-ből, akkor q' elhagyható, és legyen $q'' \in \delta(q, tt')$.

Például adott esetben $q_1, q_4, q_2, q_3, q_{11}$ elhagyható.



Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \,|\, q \Rightarrow_A^* q'\}$.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \mid q \Rightarrow_A^* q'\}$.

$H_0(q) := \{q\}$. $\quad H_{i+1}(q) := H_i(q) \cup \{q' \in Q \mid \exists r \in H_i(q) : \; r \Rightarrow_A q'\}$.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \mid q \Rightarrow_A^* q'\}$.

$H_0(q) := \{q\}$. $\quad H_{i+1}(q) := H_i(q) \cup \{q' \in Q \mid \exists r \in H_i(q) : \; r \Rightarrow_A q'\}$.

$H_0(q) \subseteq H_1(q) \subseteq \cdots \subseteq Q$.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \mid q \Rightarrow_A^* q'\}$.

$H_0(q) := \{q\}$. $\quad H_{i+1}(q) := H_i(q) \cup \{q' \in Q \mid \exists r \in H_i(q) : \ r \Rightarrow_A q'\}$.

$H_0(q) \subseteq H_1(q) \subseteq \cdots \subseteq Q$.

A sorozat stabilizálódik és ez a $H(q)$ halmaz. (Meggondolható, hogy csak q-ból ε átmenetekkel elérhető állapotok kerülnek $H_i(q)$-ba, és minden ilyen be is kerül valamely $i \in \mathbb{N}$-re.)

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \,|\, q \Rightarrow_A^* q'\}$.

$H_0(q) := \{q\}$. $\quad H_{i+1}(q) := H_i(q) \cup \{q' \in Q \,|\, \exists r \in H_i(q) : \; r \Rightarrow_A q'\}$.

$H_0(q) \subseteq H_1(q) \subseteq \cdots \subseteq Q$.

A sorozat stabilizálódik és ez a $H(q)$ halmaz. (Meggondolható, hogy csak q-ból ε átmenetekkel elérhető állapotok kerülnek $H_i(q)$-ba, és minden ilyen be is kerül valamely $i \in \mathbb{N}$-re.)

$A' = \langle Q, T, \delta', q_0, F'\rangle$ VNDA-ban

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \mid q \Rightarrow_A^* q'\}$.

$H_0(q) := \{q\}$. $H_{i+1}(q) := H_i(q) \cup \{q' \in Q \mid \exists r \in H_i(q) : \; r \Rightarrow_A q'\}$.

$H_0(q) \subseteq H_1(q) \subseteq \cdots \subseteq Q$.

A sorozat stabilizálódik és ez a $H(q)$ halmaz. (Meggondolható, hogy csak q-ból ε átmenetekkel elérhető állapotok kerülnek $H_i(q)$-ba, és minden ilyen be is kerül valamely $i \in \mathbb{N}$-re.)

$A' = \langle Q, T, \delta', q_0, F' \rangle$ VNDA-ban

$r :\in \delta'(q, t) \iff \exists q' \in H(q) : r \in \delta(q', t) \quad (q \in Q, t \in T)$

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

2. lépés: εVNDA-ból VNDA

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ εVNDA. Határozzuk meg minden $q \in Q$ állapotra azon állapotok $H(q)$ halmazát, amelyekbe az adott állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk.

Azaz $H(q) = \{q' \in Q \,|\, q \Rightarrow_A^* q'\}$.

$H_0(q) := \{q\}$. $\quad H_{i+1}(q) := H_i(q) \cup \{q' \in Q \,|\, \exists r \in H_i(q) : \ r \Rightarrow_A q'\}$.

$H_0(q) \subseteq H_1(q) \subseteq \cdots \subseteq Q$.

A sorozat stabilizálódik és ez a $H(q)$ halmaz. (Meggondolható, hogy csak q-ból ε átmenetekkel elérhető állapotok kerülnek $H_i(q)$-ba, és minden ilyen be is kerül valamely $i \in \mathbb{N}$-re.)

$A' = \langle Q, T, \delta', q_0, F'\rangle$ VNDA-ban

$r :\in \delta'(q,t) \iff \exists q' \in H(q) : r \in \delta(q',t) \quad (q \in Q, t \in T)$

$F' := \{q \in Q \,|\, H(q) \cap F \neq \emptyset\}$.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

$L(A') \subseteq L(A)$, hiszen egy $r \in \delta(q, t)$ új szabály alkalmazása megfelel a $q \Rightarrow_A^* q'$ ε-szabályok és az $r \in \delta(q', t)$ eredeti szabály alkalmazásának ($q' \in H(q)$).

Reguláris kifejezéshez VDA készítése

$L(A') \subseteq L(A)$, hiszen egy $r \in \delta(q, t)$ új szabály alkalmazása megfelel a $q \Rightarrow_A^* q'$ ε-szabályok és az $r \in \delta(q', t)$ eredeti szabály alkalmazásának ($q' \in H(q)$).

Az új szabályokkal azon ε-szabályok alkalmazása elkerülhető, amelyek után alkalmazunk még valamilyen $t \in T$-re szabályt.

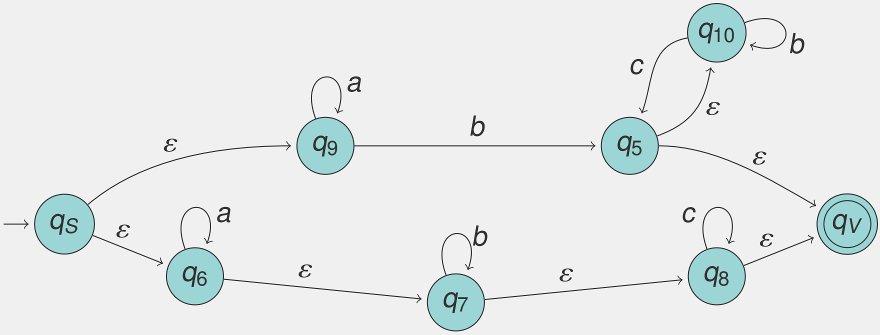
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

$L(A') \subseteq L(A)$, hiszen egy $r \in \delta(q, t)$ új szabály alkalmazása megfelel a $q \Rightarrow_A^* q'$ ε-szabályok és az $r \in \delta(q', t)$ eredeti szabály alkalmazásának ($q' \in H(q)$).

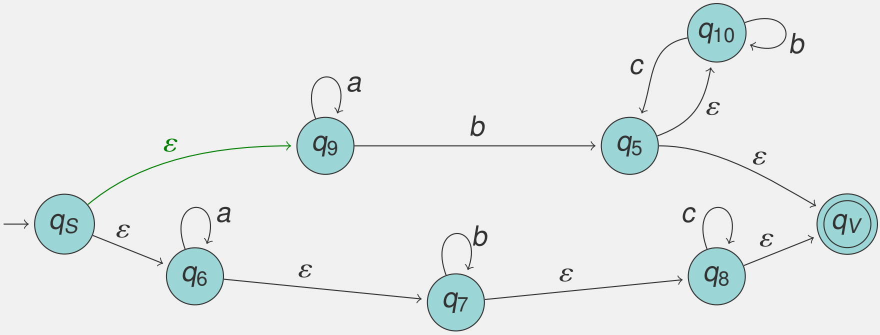
Az új szabályokkal azon ε-szabályok alkalmazása elkerülhető, amelyek után alkalmazunk még valamilyen $t \in T$-re szabályt.

Azonban előfordulhat, hogy ε-szabályok alkalmazása után már semmilyen $t \in T$-re nem alkalmazunk szabályt A-ban. Az elfogadó állapotok "visszahúzásával" az ε-átmeneteken azonban ekkor is elkerülhető az ε-szabályok használata. Így $L(A) \subseteq L(A')$.

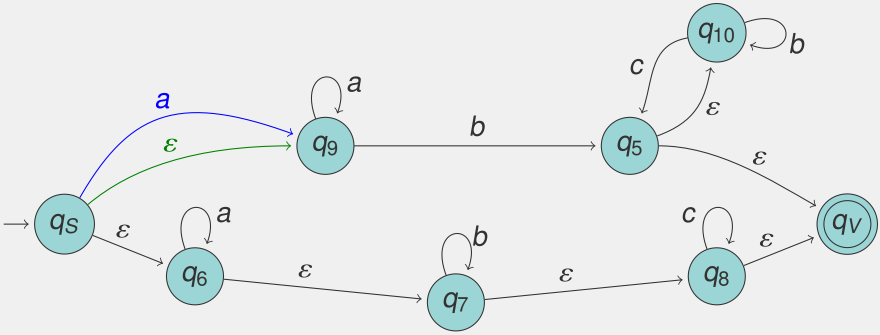
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



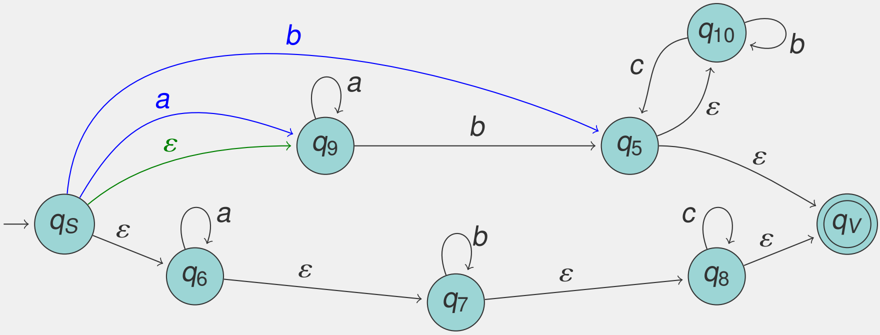
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



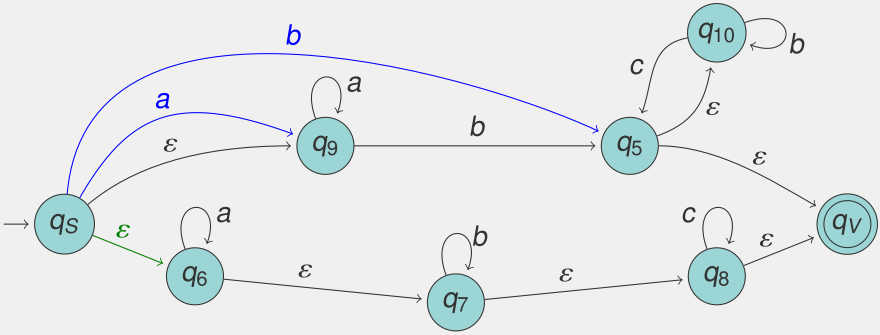
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



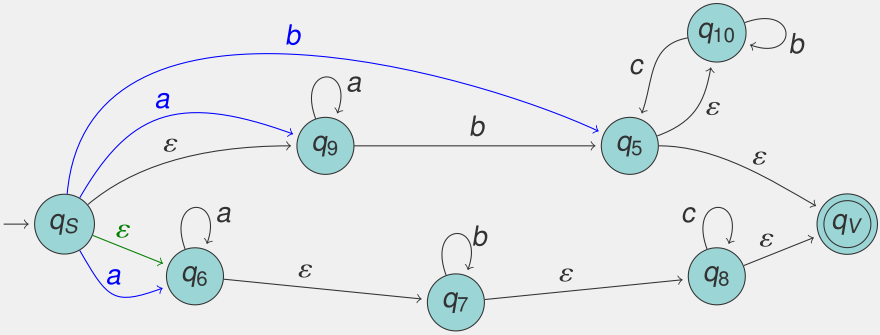
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



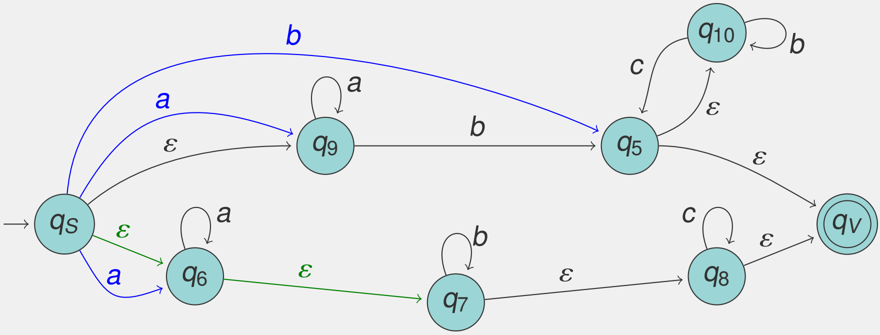
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



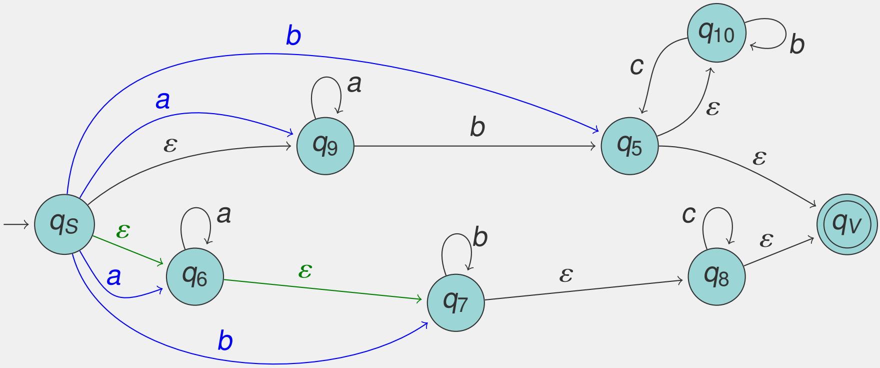
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



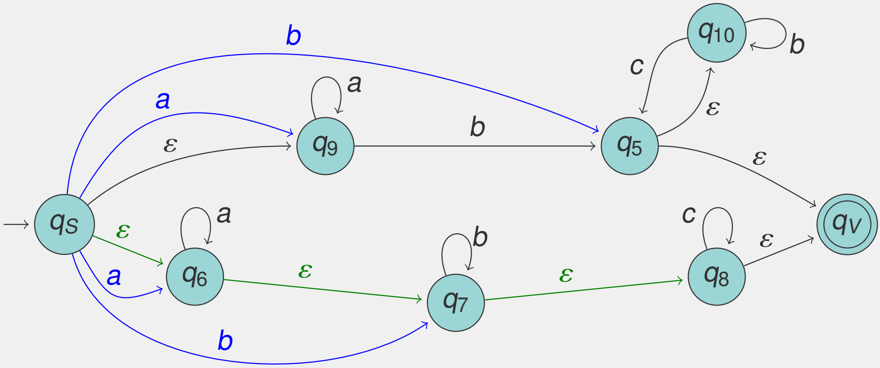
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



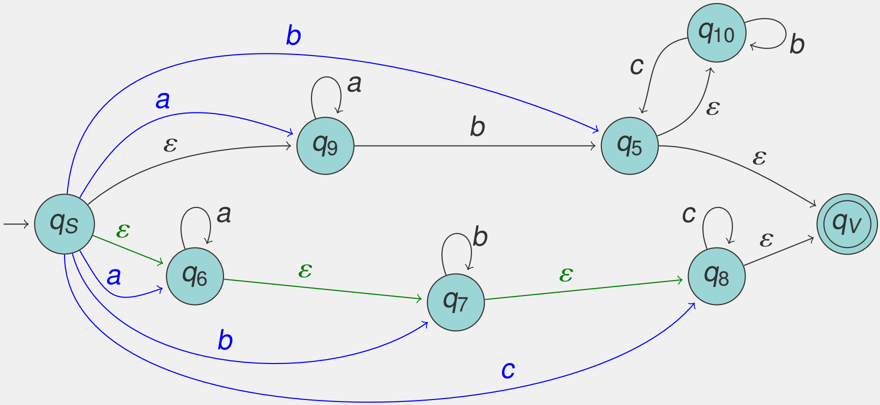
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



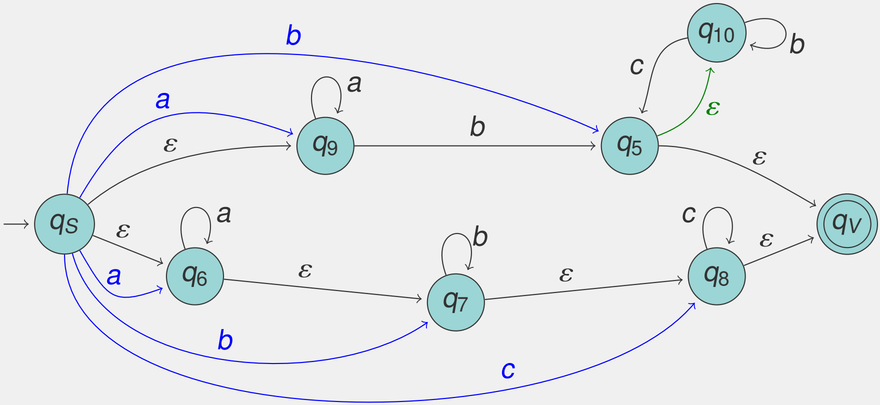
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



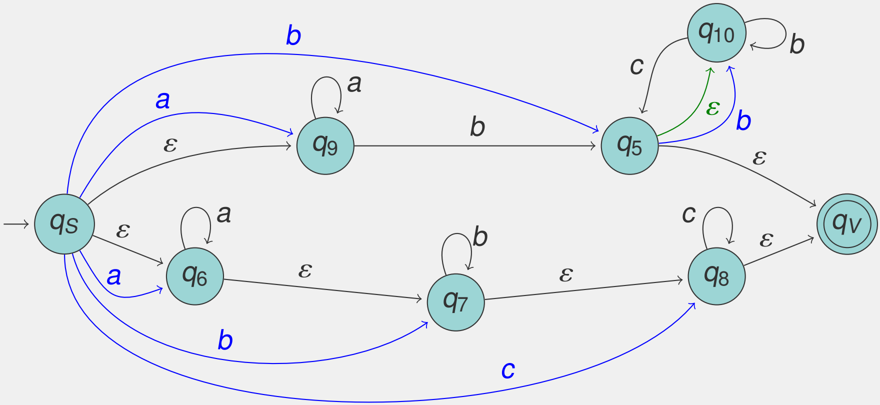
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



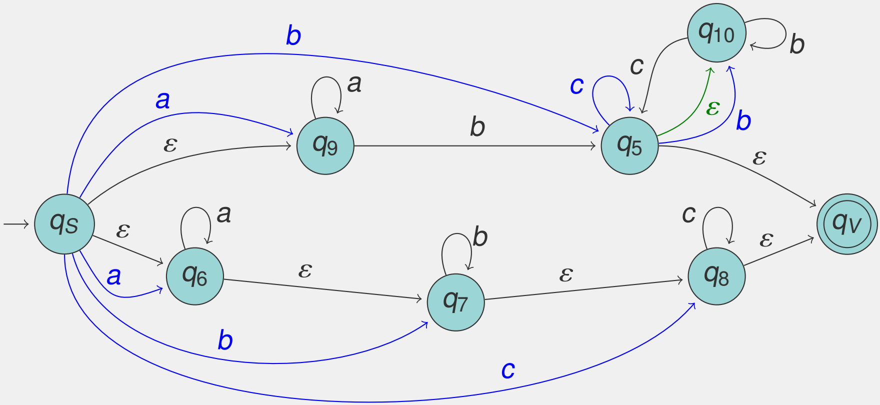
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



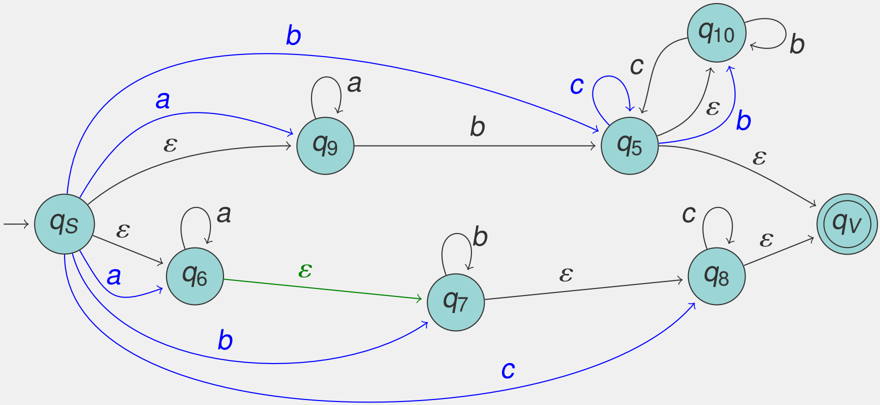
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



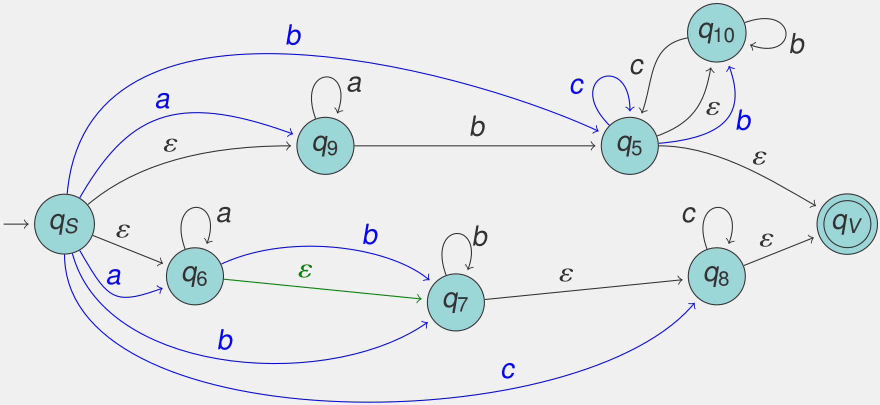
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



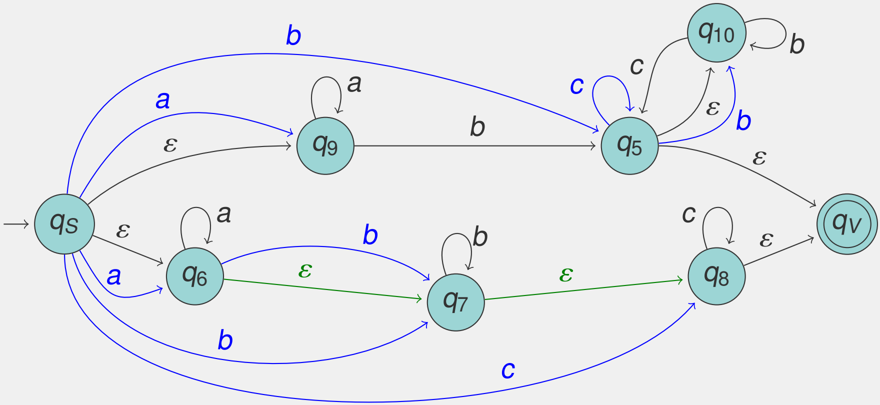
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



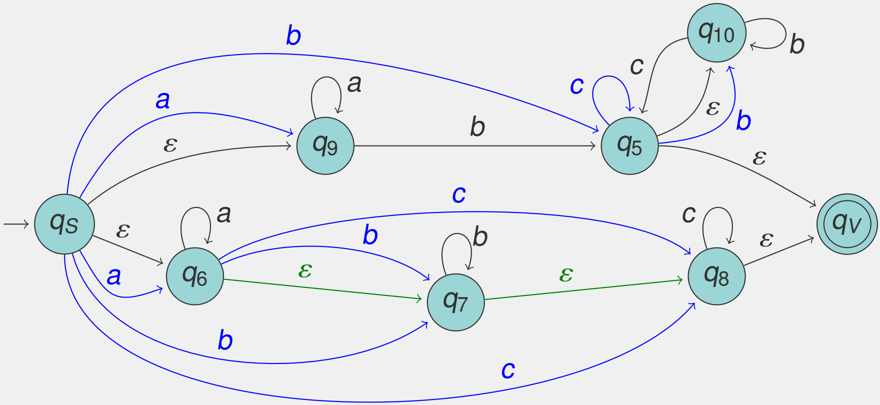
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



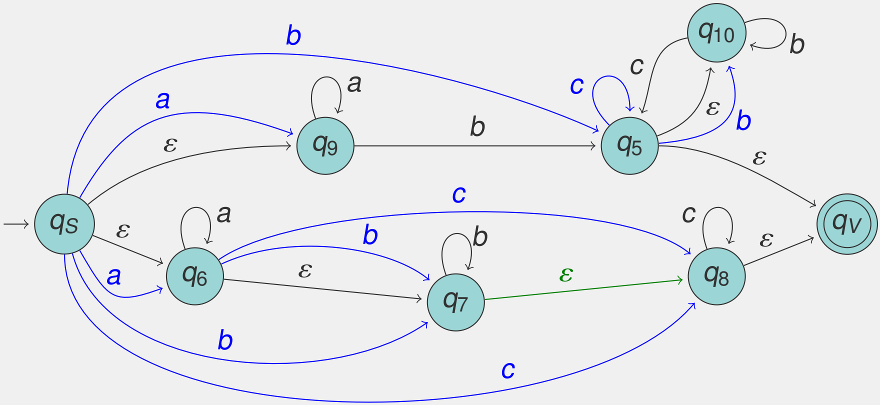
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



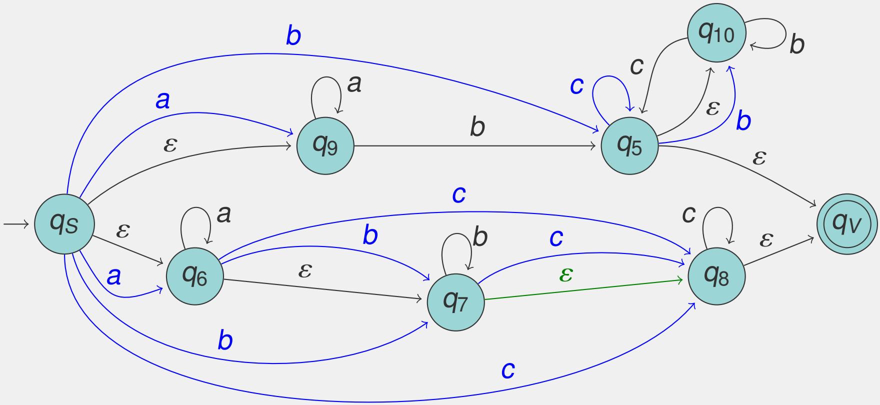
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



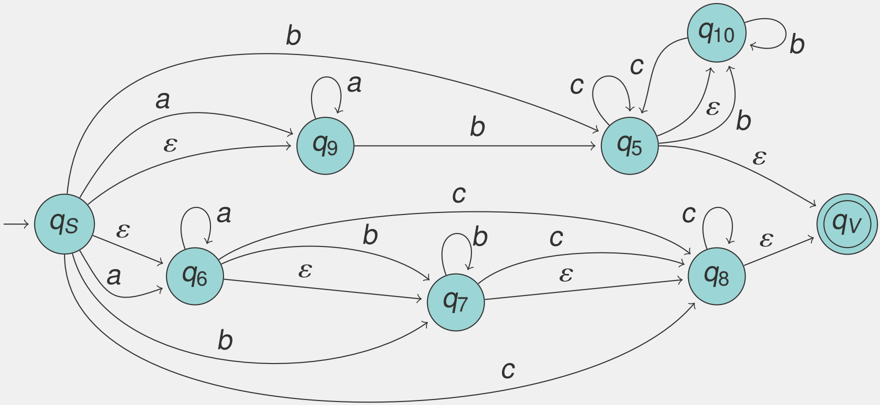
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



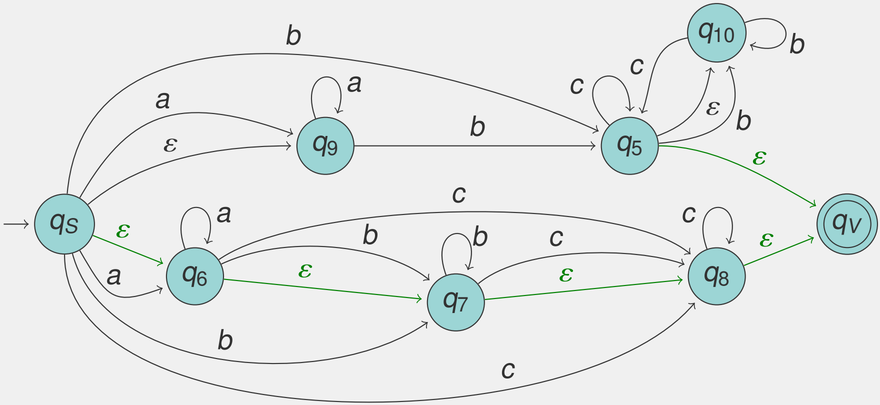
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



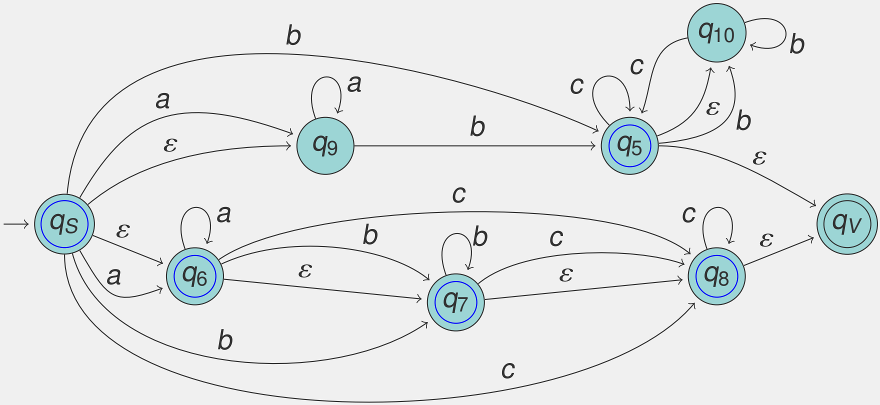
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



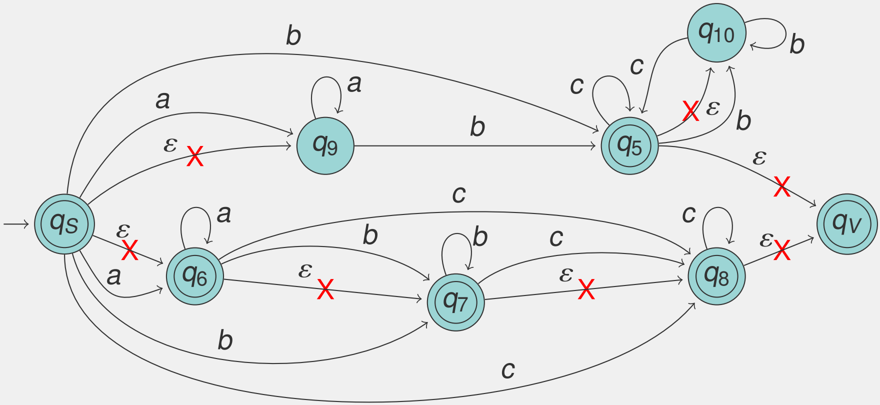
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



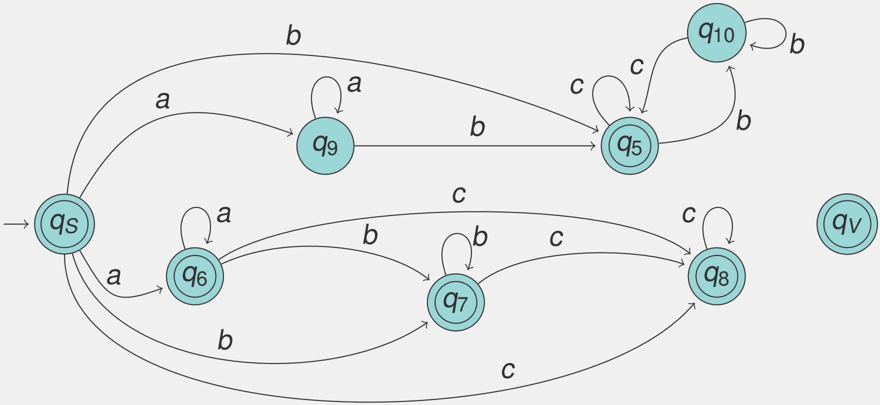
Reguláris kifejezéshez VDA készítése



Reguláris kifejezéshez VDA készítése

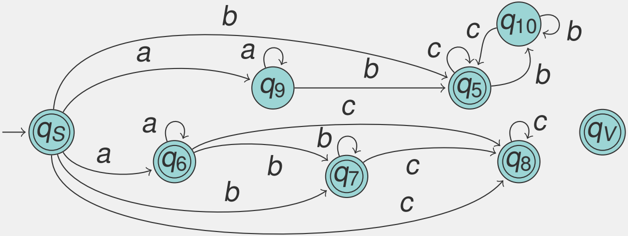


Reguláris kifejezéshez VDA készítése



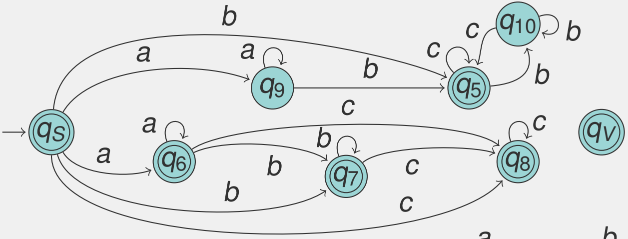
Reguláris kifejezéshez VDA készítése

3. lépés: VNDA-hoz VDA



Reguláris kifejezéshez VDA készítése

3. lépés: VNDA-hoz VDA



		a	b	c
$\leftrightarrows$	$\{q_S\}$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_5, q_7\}$	$\{q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_5, q_7\}$	$\{q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_5, q_7\}$	$\{\}$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_8\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_8\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{\}$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_5, q_8\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
	$\{q_{10}\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5\}$
$\leftarrow$	$\{q_5\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5\}$

Kis Bar-Hillel lemma

Kis Bar-Hillel lemma

Minden $L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ konstans, hogy minden $w \in L$ szó esetén ha tekintjünk egy tetszőleges olyan $w = uw'v$ felbontását, ahol $|w'| \geq n$, akkor van w'-nek olyan y részszava ($w' = xyz$), hogy $0 < |y| \leq n$, és minden $i \geq 0$ esetén $uxy^izv \in L$.

Kis Bar-Hillel lemma

Kis Bar-Hillel lemma

Minden $L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ konstans, hogy minden $w \in L$ szó esetén ha tekintjünk egy tetszőleges olyan $w = uw'v$ felbontását, ahol $|w'| \geq n$, akkor van w'-nek olyan y részszava ($w' = xyz$), hogy $0 < |y| \leq n$, és minden $i \geq 0$ esetén $uxy^izv \in L$.

Kevésbé formálisan: L minden szavának elég hosszú részszavában létezik elég rövid, nemüres, beiterálható részszava.

Kis Bar-Hillel lemma

Kis Bar-Hillel lemma

Minden $L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ konstans, hogy minden $w \in L$ szó esetén ha tekintjünk egy tetszőleges olyan $w = uw'v$ felbontását, ahol $|w'| \geq n$, akkor van w'-nek olyan y részszava ($w' = xyz$), hogy $0 < |y| \leq n$, és minden $i \geq 0$ esetén $uxy^izv \in L$.

Kevésbé formálisan: L minden szavának elég hosszú részszavában létezik elég rövid, nemüres, beiterálható részszava.

Bizonyítás:

Kis Bar-Hillel lemma

Kis Bar-Hillel lemma

Minden $L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ konstans, hogy minden $w \in L$ szó esetén ha tekintjünk egy tetszőleges olyan $w = uw'v$ felbontását, ahol $|w'| \geq n$, akkor van w'-nek olyan y részszava ($w' = xyz$), hogy $0 < |y| \leq n$, és minden $i \geq 0$ esetén $uxy^izv \in L$.

Kevésbé formálisan: L minden szavának elég hosszú részszavában létezik elég rövid, nemüres, beiterálható részszava.

Bizonyítás:

Mivel $L \in \mathcal{L}_3$, ezért létezik $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amelyre $L(A) = L$ teljesül. Legyen $n = |Q|$.

Kis Bar-Hillel lemma

Kis Bar-Hillel lemma

Minden $L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ konstans, hogy minden $w \in L$ szó esetén ha tekintjünk egy tetszőleges olyan $w = uw'v$ felbontását, ahol $|w'| \geq n$, akkor van w'-nek olyan y részszava ($w' = xyz$), hogy $0 < |y| \leq n$, és minden $i \geq 0$ esetén $uxy^izv \in L$.

Kevésbé formálisan: L minden szavának elég hosszú részszavában létezik elég rövid, nemüres, beiterálható részszava.

Bizonyítás:

Mivel $L \in \mathcal{L}_3$, ezért létezik $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amelyre $L(A) = L$ teljesül. Legyen $n = |Q|$.

Tekintsünk egy $w \in L$ szót és egy olyan $w = uw'v$ felbontását, ahol $|w'| \geq n$. Legyen $w' = t_1 \cdots t_m$, ahol $t_i \in T$ $(1 \leq i \leq m)$ és $m \geq n$.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \leq j < k \leq n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \leq j < k \leq n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Legyen $x = t_1 \cdots t_j$, $y = t_{j+1} \cdots t_k$, $z = t_{k+1} \cdots t_m$. Világos, hogy j, k választása miatt $0 < |y| \leq n$.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \leq j < k \leq n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Legyen $x = t_1 \cdots t_j$, $y = t_{j+1} \cdots t_k$, $z = t_{k+1} \cdots t_m$. Világos, hogy j, k választása miatt $0 < |y| \leq n$.

Azt kell csak belátni, hogy minden $i \geq 0$ esetén $uxy^i zv \in L$.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \le j < k \le n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Legyen $x = t_1 \cdots t_j$, $y = t_{j+1} \cdots t_k$, $z = t_{k+1} \cdots t_m$. Világos, hogy j, k választása miatt $0 < |y| \le n$.

Azt kell csak belátni, hogy minden $i \ge 0$ esetén $uxy^i zv \in L$.

Minden $i \ge 0$ esetén $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j$.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \leq j < k \leq n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Legyen $x = t_1 \cdots t_j$, $y = t_{j+1} \cdots t_k$, $z = t_{k+1} \cdots t_m$. Világos, hogy j, k választása miatt $0 < |y| \leq n$.

Azt kell csak belátni, hogy minden $i \geq 0$ esetén $uxy^i zv \in L$.

Minden $i \geq 0$ esetén $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j$.

Valóban, $i = 0$-ra $r_j \Rightarrow_A^* r_j$, $i = 1$-re $r_j y \Rightarrow_A^* r_k = r_j$, innen i-re vonatkozó teljes indukcióval $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j y^{i-1} \Rightarrow_A^* r_j$.

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \leq j < k \leq n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Legyen $x = t_1 \cdots t_j$, $y = t_{j+1} \cdots t_k$, $z = t_{k+1} \cdots t_m$. Világos, hogy j, k választása miatt $0 < |y| \leq n$.

Azt kell csak belátni, hogy minden $i \geq 0$ esetén $uxy^i zv \in L$.

Minden $i \geq 0$ esetén $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j$.

Valóban, $i = 0$-ra $r_j \Rightarrow_A^* r_j$, $i = 1$-re $r_j y \Rightarrow_A^* r_k = r_j$, innen i-re vonatkozó teljes indukcióval $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j y^{i-1} \Rightarrow_A^* r_j$.

Tehát minden $i \geq 0$-ra

Kis Bar-Hillel lemma

Ekkor $q_0 w \Rightarrow_A^* r_0 t_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A r_1 t_2 \cdots t_m v \Rightarrow_A \cdots \Rightarrow_A r_m v \Rightarrow_A^* p$ valamely $r_0, \ldots, r_m$ és $p \in F$ állapotokra.

A skatulyaelv alapján biztosan léteznek k, j számok, melyekre $0 \leq j < k \leq n$ és $r_j = r_k$, ugyanis $n = |Q| < m + 1$.

Legyen $x = t_1 \cdots t_j$, $y = t_{j+1} \cdots t_k$, $z = t_{k+1} \cdots t_m$. Világos, hogy j, k választása miatt $0 < |y| \leq n$.

Azt kell csak belátni, hogy minden $i \geq 0$ esetén $uxy^i zv \in L$.

Minden $i \geq 0$ esetén $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j$.

Valóban, $i = 0$-ra $r_j \Rightarrow_A^* r_j$, $i = 1$-re $r_j y \Rightarrow_A^* r_k = r_j$, innen i-re vonatkozó teljes indukcióval $r_j y^i \Rightarrow_A^* r_j y^{i-1} \Rightarrow_A^* r_j$.

Tehát minden $i \geq 0$-ra

$q_0 uxy^i zv \Rightarrow_A^* r_j y^i zv \Rightarrow_A^* r_j zv = r_k zv \Rightarrow_A^* p$, tehát $uxy^i zv \in L$.

Kis Bar-Hillel lemma

Példa: Legyen $L = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = u^{-1}\}$ az $\{a, b\}$ feletti palindrómák nyelve.

Kis Bar-Hillel lemma

Példa: Legyen $L = \{u \in \{a,b\}^* \,|\, u = u^{-1}\}$ az $\{a,b\}$ feletti palindrómák nyelve.

Tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}_3$. Legyen $w = a^n b a^n$, ahol n a Kis Bar-Hillel lemma konstansa. Ekkor nyilván w palindróma, azaz $w \in L$. Legyen $u = \varepsilon, w' = a^n, v = ba^n$.

Kis Bar-Hillel lemma

Példa: Legyen $L = \{u \in \{a,b\}^* \mid u = u^{-1}\}$ az $\{a,b\}$ feletti palindrómák nyelve.

Tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}_3$. Legyen $w = a^n b a^n$, ahol n a Kis Bar-Hillel lemma konstansa. Ekkor nyilván w palindróma, azaz $w \in L$. Legyen $u = \varepsilon, w' = a^n, v = ba^n$.

Mivel $|w'| \geq n$, ezért a Kis Bar-Hillel Lemma szerint van w'-nek olyan $w' = xyz$ felbontása, amelyre $0 < |y| \leq n$ és többek között a 0-adik iterált, azaz $uxy^0zv = uxzv \in L$.

Kis Bar-Hillel lemma

Példa: Legyen $L = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = u^{-1}\}$ az $\{a, b\}$ feletti palindrómák nyelve.

Tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}_3$. Legyen $w = a^n b a^n$, ahol n a Kis Bar-Hillel lemma konstansa. Ekkor nyilván w palindróma, azaz $w \in L$. Legyen $u = \varepsilon, w' = a^n, v = ba^n$.

Mivel $|w'| \geq n$, ezért a Kis Bar-Hillel Lemma szerint van w'-nek olyan $w' = xyz$ felbontása, amelyre $0 < |y| \leq n$ és többek között a 0-adik iterált, azaz $uxy^0zv = uxzv \in L$.

De ez nem lehetséges, hiszen a feltételekből következően $y = a^k$ valamely $0 < k \leq n$-re, és így $uxzv = a^{n-k}ba^n$, ami $k > 0$ esetén $\notin L$ (nem palindróma).

Kis Bar-Hillel lemma

Példa: Legyen $L = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = u^{-1}\}$ az $\{a, b\}$ feletti palindrómák nyelve.

Tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}_3$. Legyen $w = a^n ba^n$, ahol n a Kis Bar-Hillel lemma konstansa. Ekkor nyilván w palindróma, azaz $w \in L$. Legyen $u = \varepsilon, w' = a^n, v = ba^n$.

Mivel $|w'| \geq n$, ezért a Kis Bar-Hillel Lemma szerint van w'-nek olyan $w' = xyz$ felbontása, amelyre $0 < |y| \leq n$ és többek között a 0-adik iterált, azaz $uxy^0zv = uxzv \in L$.

De ez nem lehetséges, hiszen a feltételekből következően $y = a^k$ valamely $0 < k \leq n$-re, és így $uxzv = a^{n-k}ba^n$, ami $k > 0$ esetén $\notin L$ (nem palindróma).

Ellentmondásra jutottunk, tehát a palindrómák fenti L nyelve nem reguláris.