A számításelmélet alapjai I.

6. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$-ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p, ahol $L_p := \{v \mid pv \in L\}$.

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$-ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p, ahol $L_p := \{v \mid pv \in L\}$.

L_p tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyekkel v-t jobbról kiegészítve L-beli szót kapunk.

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$-ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p, ahol $L_p := \{v \mid pv \in L\}$.

L_p tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyekkel v-t jobbról kiegészítve L-beli szót kapunk.

Például, ha $L = \{ab, aac, bc, aabc\}$, akkor $L_{aa} = \{c, bc\}$.

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$-ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p, ahol $L_p := \{v \,|\, pv \in L\}$.

L_p tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyekkel v-t jobbról kiegészítve L-beli szót kapunk.

Például, ha $L = \{ab, aac, bc, aabc\}$, akkor $L_{aa} = \{c, bc\}$.

Tulajdonságai:

- $(L_p)_q = L_{pq}$,

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$-ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p, ahol $L_p := \{v \mid pv \in L\}$.

L_p tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyekkel v-t jobbról kiegészítve L-beli szót kapunk.

Például, ha $L = \{ab, aac, bc, aabc\}$, akkor $L_{aa} = \{c, bc\}$.

Tulajdonságai:

- $(L_p)_q = L_{pq}$,
- $L_\varepsilon = L$,

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$-ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p, ahol $L_p := \{v \mid pv \in L\}$.

L_p tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyekkel v-t jobbról kiegészítve L-beli szót kapunk.

Például, ha $L = \{ab, aac, bc, aabc\}$, akkor $L_{aa} = \{c, bc\}$.

Tulajdonságai:

- $(L_p)_q = L_{pq}$,
- $L_\varepsilon = L$,
- $\varepsilon \in L_p \iff p \in L$.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A, q) := \{v \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A, q) := \{v \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A, q) := \{v \,|\, \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A,q) := \{v \,|\, \delta(q,v) \in F\}$ nyelvet az A **automata $q \in Q$ állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Az $L(A,q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

(Azaz, ez lenne az elfogadott nyelv, ha q lenne a kezdőállapot.)

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A, q) := \{v \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

(Azaz, ez lenne az elfogadott nyelv, ha q lenne a kezdőállapot.)

Tulajdonságai:

- $L(A, q)_w = L(A, \delta(q, w)) \quad (w \in T^*)$,

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A,q) := \{v \,|\, \delta(q,v) \in F\}$ nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Az $L(A,q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

(Azaz, ez lenne az elfogadott nyelv, ha q lenne a kezdőállapot.)

Tulajdonságai:

- $L(A,q)_w = L(A, \delta(q,w)) \quad (w \in T^*)$,
- $L(A,q_0) = L(A)$,

Automata adott állapotra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A, q) := \{v \mid \delta(q, v) \in F\}$ nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állapotra vonatkozó maradék nyelvnek** nevezzük.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q-ból végállapotba kerül.

(Azaz, ez lenne az elfogadott nyelv, ha q lenne a kezdőállapot.)

Tulajdonságai:

- $L(A, q)_w = L(A, \delta(q, w)) \quad (w \in T^*)$,
- $L(A, q_0) = L(A)$,
- $\varepsilon \in L(A, q) \iff q \in F$.

Myhill—Nerode tétel

Myhill—Nerode tétel

$L \in \mathcal{L}_3 \iff \left|\{L_p\}_{p \in T^*}\right| < \infty$, ahol T az L nyelv ábécéje.

Bizonyítás:

$(\Leftarrow)$:

Konstruálunk egy véges, determinisztikus automatát, melynek az állapothalmaza $\{L_p\}_{p \in T^*}$. Ez a feltétel szerint véges halmaz.

Myhill—Nerode tétel

Myhill—Nerode tétel

$L \in \mathcal{L}_3 \iff \left|\{L_p\}_{p \in T^*}\right| < \infty$, ahol T az L nyelv ábécéje.

Bizonyítás:

$(\Leftarrow)$:

Konstruálunk egy véges, determinisztikus automatát, melynek az állapothalmaza $\{L_p\}_{p \in T^*}$. Ez a feltétel szerint véges halmaz.

Az L_p állapottól azt várjuk, hogy a kezdőállapotból p input elolvasása után ő legyen az aktuális állapot.

Myhill—Nerode tétel

Myhill—Nerode tétel

$L \in \mathcal{L}_3 \iff \left|\{L_p\}_{p \in T^*}\right| < \infty$, ahol T az L nyelv ábécéje.

Bizonyítás:

$(\Leftarrow)$:

Konstruálunk egy véges, determinisztikus automatát, melynek az állapothalmaza $\{L_p\}_{p \in T^*}$. Ez a feltétel szerint véges halmaz.

Az L_p állapottól azt várjuk, hogy a kezdőállapotból p input elolvasása után ő legyen az aktuális állapot.

$A_L^{MN} := \langle \{L_p\}_{p \in T^*}, T, \delta, L_\varepsilon, F \rangle$,

Myhill—Nerode tétel

Myhill—Nerode tétel

$L \in \mathcal{L}_3 \iff \left|\{L_p\}_{p \in T^*}\right| < \infty$, ahol T az L nyelv ábécéje.

Bizonyítás:

$(\Leftarrow)$:

Konstruálunk egy véges, determinisztikus automatát, melynek az állapothalmaza $\{L_p\}_{p \in T^*}$. Ez a feltétel szerint véges halmaz.

Az L_p állapottól azt várjuk, hogy a kezdőállapotból p input elolvasása után ő legyen az aktuális állapot.

$A_L^{MN} := \langle \{L_p\}_{p \in T^*}, T, \delta, L_\varepsilon, F \rangle$,

ahol $F := \{L_p \mid \varepsilon \in L_p\}$, és $\delta(L_p, t) := L_{pt}$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.

– A δ definíciója segítségével az u szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.

– A δ definíciója segítségével az u szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható.

3) $L_p \in F \iff p \in L$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.

– A δ definíciója segítségével az u szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható.

3) $L_p \in F \iff p \in L$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.

– A δ definíciója segítségével az u szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható.

3) $L_p \in F \iff p \in L$.

Már csak azt kell belátni, hogy $L(A_L^{MN}) = L$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

– Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.

– A δ definíciója segítségével az u szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható.

3) $L_p \in F \iff p \in L$.

Már csak azt kell belátni, hogy $L(A_L^{MN}) = L$.

Ez pedig könnyen igazolható, hiszen
$u \in L(A_L^{MN}) \iff \delta(L_\varepsilon, u) \in F \iff L_{\varepsilon u} = L_u \in F \iff u \in L$.

Myhill—Nerode tétel

$(\Rightarrow)$:
Legyen $L \in \mathcal{L}_3$. Tudjuk, hogy létezik olyan $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amely az L nyelvet fogadja el, azaz $L = L(A)$.

Myhill—Nerode tétel

$(\Rightarrow)$:
Legyen $L \in \mathcal{L}_3$. Tudjuk, hogy létezik olyan $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amely az L nyelvet fogadja el, azaz $L = L(A)$.

Ekkor biztos, hogy $|\{L(A, q)\}_{q \in Q}| \leq |Q| < \infty$, mert A véges állapotszámú.

Myhill—Nerode tétel

$(\Rightarrow)$:
Legyen $L \in \mathcal{L}_3$. Tudjuk, hogy létezik olyan $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amely az L nyelvet fogadja el, azaz $L = L(A)$.

Ekkor biztos, hogy $|\{L(A, q)\}_{q \in Q}| \leq |Q| < \infty$, mert A véges állapotszámú.

Vegyük tetszőleges $u \in T^*$-ra az L_u maradéknyelvet. Ekkor $L_u = (L(A, q_0))_u = L(A, \delta(q_0, u))$.

Myhill—Nerode tétel

$(\Rightarrow)$:

Legyen $L \in \mathcal{L}_3$. Tudjuk, hogy létezik olyan $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amely az L nyelvet fogadja el, azaz $L = L(A)$.

Ekkor biztos, hogy $|\{L(A, q)\}_{q \in Q}| \leq |Q| < \infty$, mert A véges állapotszámú.

Vegyük tetszőleges $u \in T^*$-ra az L_u maradéknyelvet. Ekkor $L_u = (L(A, q_0))_u = L(A, \delta(q_0, u))$.

Így nyilván fennáll, hogy

$$\{L_u\}_{u \in T^*} \subseteq \{L(A, q)\}_{q \in Q} \,,$$

amivel a tételt beláttuk.

Myhill—Nerode tétel

1. Példa:

Myhill—Nerode tétel

1. Példa:

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Myhill—Nerode tétel

1. Példa:

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ekkor $L_{a^k} = \{a^{n-k} b^n \mid n \geq k\}$. ($k \in \mathbb{N}$)

Myhill—Nerode tétel

1. Példa:

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ekkor $L_{a^k} = \{a^{n-k} b^n \mid n \geq k\}$. $(k \in \mathbb{N})$

$b^i \in L_{a^k} \iff i = k$,

Myhill—Nerode tétel

1. Példa:

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ekkor $L_{a^k} = \{a^{n-k} b^n \mid n \geq k\}$. $(k \in \mathbb{N})$

$b^i \in L_{a^k} \iff i = k$,

Tehát ez a végtelen sok maradéknyelv páronként különböző, így $L \notin \mathcal{L}_3$.

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$L = \{w \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \text{ és } |w|_b \text{ páros}\}.$

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$L = \{w \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a$ és $|w|_b$ páros$\}$.

$L_u = ?$

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$L = \{w \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a$ és $|w|_b$ páros$\}$.

$L_u =?$ Könnyen látható, hogy $|u|_a$ illetve $|u|_b$ paritásától (párosságától) függően az

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$L = \{w \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a$ és $|w|_b$ páros$\}$.

$L_u =?$ Könnyen látható, hogy $|u|_a$ illetve $|u|_b$ paritásától (párosságától) függően az

$L_\varepsilon = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 0 \pmod 2\}$,
$L_b = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 0 \pmod 2, \ |w|_b \equiv 1 \pmod 2\}$,
$L_a = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 1 \pmod 2, \ |w|_b \equiv 0 \pmod 2\}$,
$L_{ab} = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 1 \pmod 2\}$,

nyelvek egyike.

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$L = \{w \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a$ és $|w|_b$ páros$\}$.

$L_u =?$ Könnyen látható, hogy $|u|_a$ illetve $|u|_b$ paritásától (párosságától) függően az

$L_\varepsilon = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$,
$L_b = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2),\ |w|_b \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$,
$L_a = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2),\ |w|_b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$,
$L_{ab} = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$,

nyelvek egyike. Például $L_{abbabbbab} = L_a$.

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$L = \{w \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a$ és $|w|_b$ páros$\}$.

$L_u =?$ Könnyen látható, hogy $|u|_a$ illetve $|u|_b$ paritásától (párosságától) függően az

$L_\varepsilon = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 0 \pmod 2\}$,
$L_b = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 0 \pmod 2, \ |w|_b \equiv 1 \pmod 2\}$,
$L_a = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 1 \pmod 2, \ |w|_b \equiv 0 \pmod 2\}$,
$L_{ab} = \{v \in \{a, b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 1 \pmod 2\}$,
nyelvek egyike. Például $L_{abbabbbab} = L_a$. Tehát $L \in \mathcal{L}_3$.

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

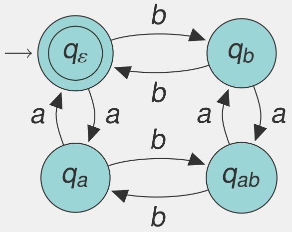
$L = \{w \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a$ és $|w|_b$ páros$\}$.

$L_u =?$ Könnyen látható, hogy $|u|_a$ illetve $|u|_b$ paritásától (párosságától) függően az

$L_\varepsilon = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 0 \pmod 2\}$,
$L_b = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 0 \pmod 2,\ |w|_b \equiv 1 \pmod 2\}$,
$L_a = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv 1 \pmod 2,\ |w|_b \equiv 0 \pmod 2\}$,
$L_{ab} = \{v \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a \equiv |w|_b \equiv 1 \pmod 2\}$,

nyelvek egyike. Például $L_{abbabbbab} = L_a$. Tehát $L \in \mathcal{L}_3$.

A_L^{MN}:



Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u\in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u \in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Következmény

Az A_L^{MN} automata állapotszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges, az L nyelvhez adott véges, determinisztikus automata állapotszáma.

Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u\in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Következmény

Az A_L^{MN} automata állapotszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges, az L nyelvhez adott véges, determinisztikus automata állapotszáma.

Bizonyítás: A bizonyítás végén látott $\{L_u\}_{u\in T^*} \subseteq \{L(A,q)\}_{q\in Q}$ összefüggésből azonnal adódik.

Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u \in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Következmény

Az A_L^{MN} automata állapotszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges, az L nyelvhez adott véges, determinisztikus automata állapotszáma.

Bizonyítás: A bizonyítás végén látott $\{L_u\}_{u \in T^*} \subseteq \{L(A, q)\}_{q \in Q}$ összefüggésből azonnal adódik.

Definíció

Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú (**minimális automata**), ha nincs olyan A-val ekvivalens A' véges determinisztikus automata, aminek kevesebb állapota van mint A-nak.

Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u\in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Következmény

Az A_L^{MN} automata állapotszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges, az L nyelvhez adott véges, determinisztikus automata állapotszáma.

Bizonyítás: A bizonyítás végén látott $\{L_u\}_{u\in T^*} \subseteq \{L(A,q)\}_{q\in Q}$ összefüggésből azonnal adódik.

Definíció

Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú (**minimális automata**), ha nincs olyan A-val ekvivalens A' véges determinisztikus automata, aminek kevesebb állapota van mint A-nak. Egy L nyelv minimális automatája alatt egy L-et felismerő minimális véges determinisztikus automatát értünk.

Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u \in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Következmény

Az A_L^{MN} automata állapotszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges, az L nyelvhez adott véges, determinisztikus automata állapotszáma.

Bizonyítás: A bizonyítás végén látott $\{L_u\}_{u \in T^*} \subseteq \{L(A, q)\}_{q \in Q}$ összefüggésből azonnal adódik.

Definíció

Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú (**minimális automata**), ha nincs olyan A-val ekvivalens A' véges determinisztikus automata, aminek kevesebb állapota van mint A-nak. Egy L nyelv minimális automatája alatt egy L-et felismerő minimális véges determinisztikus automatát értünk.

Tehát A_L^{MN} az L nyelv minimális automatája.

Minimális automata készítése

Cél: Adott automatához minél kevesebb állapotú, vele ekvivalens, azaz az eredeti automata által felismert nyelvet elfogadó automatát megadni. Két lépésben fogjuk ezt elérni:

Minimális automata készítése

Cél: Adott automatához minél kevesebb állapotú, vele ekvivalens, azaz az eredeti automata által felismert nyelvet elfogadó automatát megadni. Két lépésben fogjuk ezt elérni:

1) Összefüggővé alakítás:
Nyilván átmeneteikkel együtt elhagyhatók azok az állapotok, melyekbe nem tud eljutni az automata. Az átmenetdiagramon ez annak felel meg, hogy nincs a kezdőállapotból irányított út a csúcsba.

Minimális automata készítése

Cél: Adott automatához minél kevesebb állapotú, vele ekvivalens, azaz az eredeti automata által felismert nyelvet elfogadó automatát megadni. Két lépésben fogjuk ezt elérni:

1) Összefüggővé alakítás:
Nyilván átmeneteikkel együtt elhagyhatók azok az állapotok, melyekbe nem tud eljutni az automata. Az átmenetdiagramon ez annak felel meg, hogy nincs a kezdőállapotból irányított út a csúcsba.

2) Ekvivalens állapotok összevonása:
Ha két állapotból pontosan ugyanazon szavak hatására kerül az automata végállapotba, akkor az elfogadás szempontjából mindegy, hogy a működés során a két állapotba kezül melyikbe került az automata. Ezek az állapotok nyilván összevonhatók.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$H_0 = \{q_0\}$,

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$H_0 = \{q_0\}$,

$H_{i+1} = H_i \cup \{r \,|\, \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}, \quad i = 1, 2, \ldots$

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$H_0 = \{q_0\}$,

$H_{i+1} = H_i \cup \{r \mid \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}, \quad i = 1, 2, \ldots$

Mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq Q$ ezért létezik olyan $k \geq 0$, amelyre $H_k = H_{k+1}$.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$H_0 = \{q_0\}$,

$H_{i+1} = H_i \cup \{r \mid \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}, \quad i = 1, 2, \ldots$

Mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq Q$ ezért létezik olyan $k \geq 0$, amelyre $H_k = H_{k+1}$. Ekkor minden $\ell \geq k$-ra $H_\ell = K_k$.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$H_0 = \{q_0\}$,

$H_{i+1} = H_i \cup \{r \mid \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}, \quad i = 1, 2, \ldots$

Mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq Q$ ezért létezik olyan $k \geq 0$, amelyre $H_k = H_{k+1}$. Ekkor minden $\ell \geq k$-ra $H_\ell = K_k$. Legyen $H := H_k$.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$H_0 = \{q_0\}$,

$H_{i+1} = H_i \cup \{r \mid \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}, \quad i = 1, 2, \ldots$

Mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq Q$ ezért létezik olyan $k \geq 0$, amelyre $H_k = H_{k+1}$. Ekkor minden $\ell \geq k$-ra $H_\ell = K_k$. Legyen $H := H_k$. Könnyen látható, hogy H azoknak az állapotoknak a halmaza, amelyek a kezdőállapotból elérhetők.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

A $(Q \setminus H)$-beli állapotok elhagyásával kapott $A' = \langle H, T, \delta|_H, q_0, F \cap H \rangle$ determinisztikus véges automata összefüggő és A-val ekvivalens.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

A $(Q \setminus H)$-beli állapotok elhagyásával kapott $A' = \langle H, T, \delta|_H, q_0, F \cap H \rangle$ determinisztikus véges automata összefüggő és A-val ekvivalens.

Példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_3	q_1	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

A $(Q \setminus H)$-beli állapotok elhagyásával kapott $A' = \langle H, T, \delta|_H, q_0, F \cap H \rangle$ determinisztikus véges automata összefüggő és A-val ekvivalens.

Példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_3	q_1	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

$H_0 = \{q_0\}$
$H_1 = \{q_0, q_2, q_4\}$
$H_2 = \{q_0, q_2, q_4, q_5\} =$
$H_3 = H$

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

A $(Q \setminus H)$-beli állapotok elhagyásával kapott $A' = \langle H, T, \delta|_H, q_0, F \cap H\rangle$ determinisztikus véges automata összefüggő és A-val ekvivalens.

Példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_3	q_1	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

$H_0 = \{q_0\}$
$H_1 = \{q_0, q_2, q_4\}$
$H_2 = \{q_0, q_2, q_4, q_5\} =$
$H_3 = H$

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q-t és q'-t nevezzük **megkülönböztethetetlennek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$.
Jelölése: $q \sim q'$.

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q-t és q'-t nevezzük **megkülönböztethetetlennek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$.
Jelölése: $q \sim q'$.

Észrevétel:

- $\sim$ ekvivalenciareláció

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q-t és q'-t nevezzük **megkülönböztethetetlennek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$. Jelölése: $q \sim q'$.

Észrevétel:

- $\sim$ ekvivalenciareláció
- ha $q \sim q'$, akkor minden $t \in T$-re $\delta(q, t) \sim \delta(q', t)$ teljesül. (erre a tulajdonságra úgy hivatkozunk majd, hogy $\sim$ ún. **jobb-kongruencia reláció**)

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q-t és q'-t nevezzük **megkülönböztethetetlennek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$.
Jelölése: $q \sim q'$.

Észrevétel:

- $\sim$ ekvivalenciareláció
- ha $q \sim q'$, akkor minden $t \in T$-re $\delta(q, t) \sim \delta(q', t)$ teljesül. (erre a tulajdonságra úgy hivatkozunk majd, hogy $\sim$ ún. **jobb-kongruencia reláció**)

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q-t és q'-t nevezzük **megkülönböztethetetlennek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$.
Jelölése: $q \sim q'$.

Észrevétel:

- $\sim$ ekvivalenciareláció
- ha $q \sim q'$, akkor minden $t \in T$-re $\delta(q, t) \sim \delta(q', t)$ teljesül. (erre a tulajdonságra úgy hivatkozunk majd, hogy $\sim$ ún. **jobb-kongruencia reláció**)

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q-t és q'-t nevezzük **megkülönböztethetetlennek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$.
Jelölése: $q \sim q'$.

Észrevétel:

- $\sim$ ekvivalenciareláció
- ha $q \sim q'$, akkor minden $t \in T$-re $\delta(q, t) \sim \delta(q', t)$ teljesül. (erre a tulajdonságra úgy hivatkozunk majd, hogy $\sim$ ún. **jobb-kongruencia reláció**)

Definíció

Egy véges determinisztikus automata **redukált**, ha nincsenek megkülönböztethetetlen állapotai.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/{\sim} = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ **faktorautomatáját** a követkeképpen.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/\!\sim = \langle Q', T, \delta', q_0', F' \rangle$ **faktorautomatáját** a követkkezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/\!\sim\, = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ **faktorautomatáját** a követkekezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
- Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/\!\sim\, = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ **faktorautomatáját** a követkkezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
- Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.
- q_0' legyen q_0 ekvivalenciaosztálya.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/\!\sim = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ **faktorautomatáját** a kövezkezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
- Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.
- q_0' legyen q_0 ekvivalenciaosztálya.
- $F' = \{q' \in Q' \mid q' \text{ valamely } r \in Q \text{ reprezentánsára } r \in F\}$.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/{\sim} = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ **faktorautomatáját** a kövezkezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
- Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.
- q_0' legyen q_0 ekvivalenciaosztálya.
- $F' = \{q' \in Q' \mid q'$ valamely $r \in Q$ reprezentánsára $r \in F\}$.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/\!\sim = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ **faktorautomatáját** a kövezkezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
- Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.
- q_0' legyen q_0 ekvivalenciaosztálya.
- $F' = \{q' \in Q' \mid q'$ valamely $r \in Q$ reprezentánsára $r \in F\}$.

- δ' definíciójában mindegy melyik reprezentánst választjuk, hiszen $\sim$ jobb-kongrencia reláció.

A faktorautomata

Definíció

Legyen $\sim$ az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ automata megkülönböztethetetlenségi relációja. Definiáljuk A $A/\!\sim\, = \langle Q', T, \delta', q_0', F' \rangle$ **faktorautomatáját** a kövezkezőképpen.

- Legyen Q' a Q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
- Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.
- q_0' legyen q_0 ekvivalenciaosztálya.
- $F' = \{q' \in Q' \mid q'$ valamely $r \in Q$ reprezentánsára $r \in F\}$.

- δ' definíciójában mindegy melyik reprezentánst választjuk, hiszen $\sim$ jobb-kongrencia reláció.
- Ha egy ekvivalenciaosztály valamelyik reprezentánsa F-beli, akkor minden reprezentánsa F-beli (ε-ra se lehet őket megkülönböztetni).

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q_0'$.

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q_0'$.
- $\varphi(F) := \bigcup_{q \in F} \{\varphi(q)\} = F'$.

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q'_0$.
- $\varphi(F) := \bigcup_{q \in F} \{\varphi(q)\} = F'$.
- $\forall q \in Q, t \in T$ esetén $\varphi(\delta(q, t)) = \delta'(\varphi(q), t)$.

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q'_0$.
- $\varphi(F) := \bigcup_{q \in F} \{\varphi(q)\} = F'$.
- $\forall q \in Q, t \in T$ esetén $\varphi(\delta(q, t)) = \delta'(\varphi(q), t)$.

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F'\rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q'_0$.
- $\varphi(F) := \bigcup\limits_{q \in F} \{\varphi(q)\} = F'$.
- $\forall q \in Q, t \in T$ esetén $\varphi(\delta(q,t)) = \delta'(\varphi(q), t)$.

Tétel

Az A automata $A/\sim$ faktorautomatájája

1. ekvivalens A-val,

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q_0'$.
- $\varphi(F) := \bigcup_{q \in F} \{\varphi(q)\} = F'$.
- $\forall q \in Q, t \in T$ esetén $\varphi(\delta(q,t)) = \delta'(\varphi(q), t)$.

Tétel

Az A automata $A/\sim$ faktorautomatájája

1. ekvivalens A-val,
2. redukált, továbbá

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \to Q'$ bijekció, melyre

- $\varphi(q_0) = q_0'$.
- $\varphi(F) := \bigcup\limits_{q\in F}\{\varphi(q)\} = F'$.
- $\forall q \in Q, t \in T$ esetén $\varphi(\delta(q,t)) = \delta'(\varphi(q), t)$.

Tétel

Az A automata $A/\!\sim$ faktorautomatájája

1. ekvivalens A-val,
2. redukált, továbbá
3. izomorfia erejéig az egyetlen összefüggő, redukált A-val ekvivalens automata.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\sim, q')$.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\!\sim, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\!\sim, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható. Valóban, $|u| = 0$ esetén nyilvánvaló.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\!\sim, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható. Valóban, $|u| = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha minden $|u|$-nál rövidebb szóra tudjuk, akkor legyen $u = vt$ $(v \in T^*, t \in T)$.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/{\sim}, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható. Valóban, $|u| = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha minden $|u|$-nál rövidebb szóra tudjuk, akkor legyen $u = vt$ ($v \in T^*, t \in T$). Ekkor $\delta'(q', vt) = \delta'(\delta'(q', v), t)$. v-re teljesül az indukciós feltétel, tehát $\delta'(q', v)$ éppen $\delta(q, v)$ osztálya, így választhatjuk $\delta(q, v)$-t $\delta'(q', v)$ reprezentánsának.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\sim, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható. Valóban, $|u| = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha minden $|u|$-nál rövidebb szóra tudjuk, akkor legyen $u = vt$ ($v \in T^*, t \in T$). Ekkor $\delta'(q', vt) = \delta'(\delta'(q', v), t)$. v-re teljesül az indukciós feltétel, tehát $\delta'(q', v)$ éppen $\delta(q, v)$ osztálya, így választhatjuk $\delta(q, v)$-t $\delta'(q', v)$ reprezentánsának. Így $\delta'(\delta'(q', v), t)$ éppen $\delta(\delta(q, v), t) = \delta(q, vt) = \delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a q $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\!\sim, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható. Valóban, $|u| = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha minden $|u|$-nál rövidebb szóra tudjuk, akkor legyen $u = vt$ ($v \in T^*, t \in T$). Ekkor $\delta'(q', vt) = \delta'(\delta'(q', v), t)$. v-re teljesül az indukciós feltétel, tehát $\delta'(q', v)$ éppen $\delta(q, v)$ osztálya, így választhatjuk $\delta(q, v)$-t $\delta'(q', v)$ reprezentánsának. Így $\delta'(\delta'(q', v), t)$ éppen $\delta(\delta(q, v), t) = \delta(q, vt) = \delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ekkor viszont

$$u \in L(A, q) \Leftrightarrow \delta(q, u) \in F \Leftrightarrow \delta'(q', u) \in F' \Leftrightarrow u \in L(A/\!\sim, q').$$

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges $A/{\sim}$-ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$.

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges $A/{\sim}$-ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$. Ekkor $L(A/{\sim}, q') = L(A/{\sim}, r')$.

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges $A/\!\sim$-ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$. Ekkor $L(A/\!\sim, q') = L(A/\!\sim, r')$. A lemma miatt tetszőleges $q \in q', r \in r'$ reprezentánsokra $L(A, q) = L(A, r)$, azaz $q \sim r$.

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges $A/{\sim}$-ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$. Ekkor $L(A/{\sim}, q') = L(A/{\sim}, r')$. A lemma miatt tetszőleges $q \in q', r \in r'$ reprezentánsokra $L(A, q) = L(A, r)$, azaz $q \sim r$. Tehát $q' = r'$, azaz a faktorautomata redukált.

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges $A/\!\sim$-ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$. Ekkor $L(A/\!\sim, q') = L(A/\!\sim, r')$. A lemma miatt tetszőleges $q \in q', r \in r'$ reprezentánsokra $L(A, q) = L(A, r)$, azaz $q \sim r$. Tehát $q' = r'$, azaz a faktorautomata redukált.

3. Következik az alábbi, általánosabb lemmából:

Lemma

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F'\rangle$ összefüggő, redukált és egymással ekvivalens véges determinisztikus automaták. Ekkor A és A' izomorfak.

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0-ra alkalmazva.

2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges $A/\!\sim$-ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$. Ekkor $L(A/\!\sim, q') = L(A/\!\sim, r')$. A lemma miatt tetszőleges $q \in q', r \in r'$ reprezentánsokra $L(A, q) = L(A, r)$, azaz $q \sim r$. Tehát $q' = r'$, azaz a faktorautomata redukált.

3. Következik az alábbi, általánosabb lemmából:

Lemma

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ összefüggő, redukált és egymással ekvivalens véges determinisztikus automaták. Ekkor A és A' izomorfak.

Az izomorfizmus:

$$\varphi(\delta(q_0, u)) := \delta'(q_0', u)$$

minden $u \in T^*$-ra. Mivel az automaták összefüggőek, ezért $\mathrm{Dom}(\varphi) = Q$ és $\mathrm{Ran}(\varphi) = Q'$.

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v)$$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\Longleftrightarrow} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v))$$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$
$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v$$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v))$$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\iff$ $(\Rightarrow)$ iránya nyilván teljesül, míg a $(\Leftarrow)$ irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\iff$-ra hasonlóan.

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\iff$ $(\Rightarrow)$ iránya nyilván teljesül, míg a $(\Leftarrow)$ irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\iff$-ra hasonlóan.

Tehát φ jól defniált és bijektív.

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\iff$ $(\Rightarrow)$ iránya nyilván teljesül, míg a $(\Leftarrow)$ irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\iff$-ra hasonlóan.

Tehát φ jól defniált és bijektív.

- $\varphi(q_0) = \varphi(\delta(q_0, \varepsilon)) = \delta'(q_0', \varepsilon) = q_0'$,

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \stackrel{\text{redukáltság}}{\Longleftrightarrow} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \Longleftrightarrow$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \stackrel{\text{ekvivalencia}}{\Longleftrightarrow} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \Longleftrightarrow$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \stackrel{\text{redukáltság}}{\Longleftrightarrow} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\Longleftrightarrow$ ($\Rightarrow$) iránya nyilván teljesül, míg a ($\Leftarrow$) irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\Longleftrightarrow$-ra hasonlóan.

Tehát φ jól defniált és bijektív.

- $\varphi(q_0) = \varphi(\delta(q_0, \varepsilon)) = \delta'(q_0', \varepsilon) = q_0'$,
- $\varphi(F) = \bigcup_{u \in L(A)} \{\varphi(\delta(q_0, u))\} = \bigcup_{u \in L(A')} \{\delta'(q_0', u)\} = F'$

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\iff$ $(\Rightarrow)$ iránya nyilván teljesül, míg a $(\Leftarrow)$ irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\iff$-ra hasonlóan.

Tehát φ jól defniált és bijektív.

- $\varphi(q_0) = \varphi(\delta(q_0, \varepsilon)) = \delta'(q_0', \varepsilon) = q_0'$,
- $\varphi(F) = \bigcup_{u \in L(A)} \{\varphi(\delta(q_0, u))\} = \bigcup_{u \in L(A')} \{\delta'(q_0', u)\} = F'$
- tetszőleges $\delta(q_0, u) \in Q$ állapot és $t \in T$ esetén
  $\varphi(\delta(\delta(q_0, u), t)) = \varphi(\delta(q_0, ut)) = \delta'(q_0', ut)$, és
  $\delta'(\varphi(\delta(q_0, u)), t) = \delta'(\delta'(q_0', u), t) = \delta'(q_0', ut)$,

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\iff$ ($\Rightarrow$) iránya nyilván teljesül, míg a ($\Leftarrow$) irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\iff$-ra hasonlóan.

Tehát φ jól defniált és bijektív.

- $\varphi(q_0) = \varphi(\delta(q_0, \varepsilon)) = \delta'(q_0', \varepsilon) = q_0'$,
- $\varphi(F) = \bigcup_{u \in L(A)} \{\varphi(\delta(q_0, u))\} = \bigcup_{u \in L(A')} \{\delta'(q_0', u)\} = F'$
- tetszőleges $\delta(q_0, u) \in Q$ állapot és $t \in T$ esetén
  $\varphi(\delta(\delta(q_0, u), t)) = \varphi(\delta(q_0, ut)) = \delta'(q_0', ut)$, és
  $\delta'(\varphi(\delta(q_0, u)), t) = \delta'(\delta'(q_0', u), t) = \delta'(q_0', ut)$,

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff$$
$$L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v \overset{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q_0')_u = L(A', q_0')_v \iff$$
$$L(A', \delta'(q_0', u)) = L(A', \delta'(q_0', v)) \overset{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q_0', u) = \delta'(q_0', v).$$

Az első $\iff$ $(\Rightarrow)$ iránya nyilván teljesül, míg a $(\Leftarrow)$ irány A redukáltságából következik. Az utolsó $\iff$-ra hasonlóan.

Tehát φ jól defniált és bijektív.

- $\varphi(q_0) = \varphi(\delta(q_0, \varepsilon)) = \delta'(q_0', \varepsilon) = q_0'$,
- $\varphi(F) = \bigcup_{u \in L(A)} \{\varphi(\delta(q_0, u))\} = \bigcup_{u \in L(A')} \{\delta'(q_0', u)\} = F'$
- tetszőleges $\delta(q_0, u) \in Q$ állapot és $t \in T$ esetén
  $\varphi(\delta(\delta(q_0, u), t)) = \varphi(\delta(q_0, ut)) = \delta'(q_0', ut)$, és
  $\delta'(\varphi(\delta(q_0, u)), t) = \delta'(\delta'(q_0', u), t) = \delta'(q_0', ut)$,

azaz φ valóban izomorfizmus, a lemmát és így a tételt beláttuk.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

Jelölés: $T^{\leq i} := \left\{ w \in T^* \,\middle|\, |w| \leq i \right\}$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

Jelölés: $T^{\leq i} := \left\{ w \in T^* \,\middle|\, |w| \leq i \right\}$

q és q' megkülönböztethetetlensége azt jelenti, hogy:

$$q \sim q' \iff L(A,q) = L(A,q') \iff$$
$$\iff \forall u \in T^* : \big(\delta(q,u) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta(q',u) \in F\big).$$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

Jelölés: $T^{\leq i} := \left\{ w \in T^* \,\middle|\, |w| \leq i \right\}$

q és q' megkülönböztethetetlensége azt jelenti, hogy:

$$q \sim q' \iff L(A,q) = L(A,q') \iff$$
$$\iff \forall u \in T^* : \Big(\delta(q,u) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta(q',u) \in F\Big).$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $q \in Q$ ***i*-megkülönböztethetetlen** ($i \geq 0$) $q' \in Q$-tól (jelölés: $q \overset{i}{\sim} q'$), ha

$$\forall u \in T^{\leq i} : \;\; \Big(\delta(q,u) \in F \;\Leftrightarrow\; \delta(q',u) \in F\Big).$$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- minden $q, q' \in Q$-ra
  $q \overset{i+1}{\sim} q' \;\Leftrightarrow\; q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q,t) \overset{i}{\sim} \delta(q',t))$,

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- minden $q, q' \in Q$-ra
  $q \overset{i+1}{\sim} q' \;\Leftrightarrow\; q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q,t) \overset{i}{\sim} \delta(q',t))$,
- $\overset{0}{\sim} \prec \overset{1}{\sim} \prec \overset{2}{\sim} \prec \cdots \prec \sim$,

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- minden $q, q' \in Q$-ra
  $q \overset{i+1}{\sim} q' \;\Leftrightarrow\; q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q,t) \overset{i}{\sim} \delta(q',t))$,
- $\overset{0}{\sim} \prec \overset{1}{\sim} \prec \overset{2}{\sim} \prec \cdots \prec \sim$,
- $q \sim q' \;\Leftrightarrow\; \forall i \geq 0 : q \overset{i}{\sim} q'$.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x \varrho_2 y \Rightarrow x \varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- minden $q, q' \in Q$-ra
  $q \overset{i+1}{\sim} q' \;\Leftrightarrow\; q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q,t) \overset{i}{\sim} \delta(q',t))$,
- $\overset{0}{\sim} \prec \overset{1}{\sim} \prec \overset{2}{\sim} \prec \cdots \prec \sim$,
- $q \sim q' \;\Leftrightarrow\; \forall i \geq 0 : q \overset{i}{\sim} q'$.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- minden $q, q' \in Q$-ra
  $q \overset{i+1}{\sim} q' \;\Leftrightarrow\; q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q,t) \overset{i}{\sim} \delta(q',t))$,
- $\overset{0}{\sim} \prec \overset{1}{\sim} \prec \overset{2}{\sim} \prec \cdots \prec \sim$,
- $q \sim q' \;\Leftrightarrow\; \forall i \geq 0 : q \overset{i}{\sim} q'$.

$\overset{i}{\sim}$ egy ponton túl tehát nem finomodhat tovább.

$i_0 := \min\{\, i \mid \overset{i}{\sim} = \overset{i+1}{\sim} \}$.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 \prec \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2 y \Rightarrow x\varrho_1 y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

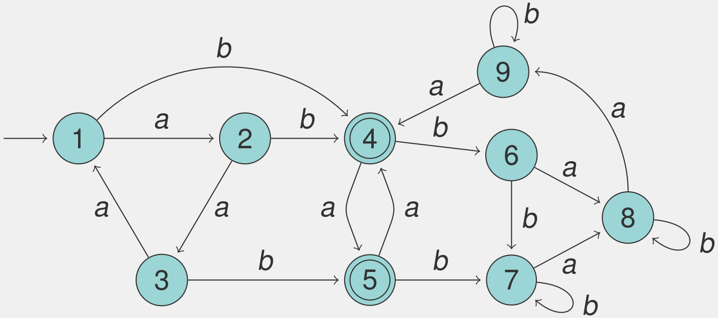
- $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- minden $q, q' \in Q$-ra
  $q \overset{i+1}{\sim} q' \;\Leftrightarrow\; q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q,t) \overset{i}{\sim} \delta(q',t))$,
- $\overset{0}{\sim} \prec \overset{1}{\sim} \prec \overset{2}{\sim} \prec \cdots \prec \sim$,
- $q \sim q' \;\Leftrightarrow\; \forall i \geq 0 : q \overset{i}{\sim} q'$.

$\overset{i}{\sim}$ egy ponton túl tehát nem finomodhat tovább.

$i_0 := \min\{\, i \mid \overset{i}{\sim} = \overset{i+1}{\sim} \}$. Ekkor $i_0 \leq |Q| - 1$, és $\sim = \overset{i_0}{\sim}$.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

Példa: Redukáljuk a következő automatát!



Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{0}{\sim}$: $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$, $\{4, 5\}$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{0}{\sim}$: $\{1,2,3,6,7,8,9\}$, $\{4,5\}$

	a	b
4	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}
5	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

	a	b
1	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
2	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
3	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
6	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
7	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
8	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
9	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

$\overset{1}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7,8\}$, $\{9\}$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{0}{\sim}$: $\{1,2,3,6,7,8,9\}$, $\{4,5\}$

	a	b
1	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
2	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
3	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
6	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
7	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
8	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
9	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

	a	b
4	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}
5	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

$\overset{1}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7,8\}$, $\{9\}$

	a	b
4	{4,5}	{6,7,8}
5	{4,5}	{6,7,8}

	a	b
1	{1,2,3}	{4,5}
2	{1,2,3}	{4,5}
3	{1,2,3}	{4,5}

	a	b
6	{6,7,8}	{6,7,8}
7	{6,7,8}	{6,7,8}
8	{9}	{6,7,8}

$\overset{2}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{0}{\sim}$: $\{1,2,3,6,7,8,9\}$, $\{4,5\}$

	a	b
1	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
2	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
3	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
6	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
7	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
8	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
9	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

	a	b
4	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}
5	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

$\overset{1}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7,8\}$, $\{9\}$

	a	b
4	{4,5}	{6,7,8}
5	{4,5}	{6,7,8}

	a	b
1	{1,2,3}	{4,5}
2	{1,2,3}	{4,5}
3	{1,2,3}	{4,5}

	a	b
6	{6,7,8}	{6,7,8}
7	{6,7,8}	{6,7,8}
8	{9}	{6,7,8}

$\overset{2}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{2}{\sim}$: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{6, 7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{2}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$

	a	b
4	{4,5}	{6,7}
5	{4,5}	{6,7}

	a	b
1	{1,2,3}	{4,5}
2	{1,2,3}	{4,5}
3	{1,2,3}	{4,5}

	a	b
6	{8}	{6,7}
7	{8}	{6,7}

$\overset{3}{\sim} = \overset{2}{\sim} = \sim$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

$\overset{2}{\sim}$: $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$

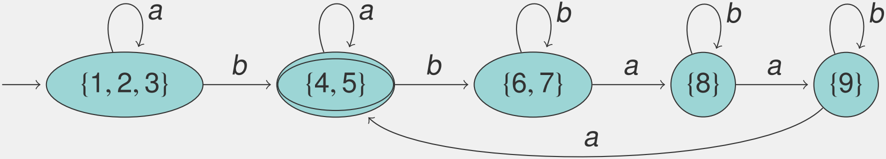
	a	b
4	{4,5}	{6,7}
5	{4,5}	{6,7}

	a	b
1	{1,2,3}	{4,5}
2	{1,2,3}	{4,5}
3	{1,2,3}	{4,5}

	a	b
6	{8}	{6,7}
7	{8}	{6,7}

$\overset{3}{\sim} = \overset{2}{\sim} = \sim$

A redukált automata:



Az átmenetek és elfogadó állapotok meghatározásához tetszőleges reprezentánst tekinthetünk. Az eredeti kezdőállapotot tartalmazó ekvivalenciaosztály lesz az új kezdőállapot.

Minimális automata – összegzés

Egy véges determinisztikus automához minimális automatát készíthetünk ha

1. az elérhetetlen állapotait elhagyjuk ezzel előállítva egy az eredetivel ekvivalens összefüggő automatát,
2. majd a már összefüggő automata $\overset{i}{\sim}$ relációnak meghatározása segítségével előállítjuk a faktorautomatáját.

Az így előállított minimális automata izomorfia erejéig egyértelmű, azaz például izomorf az A_L^{MN} minimális automatával, ahol $L = L(A)$.