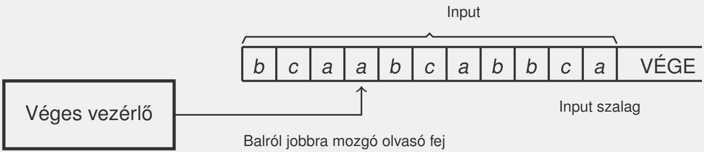
A számításelmélet alapjai I.

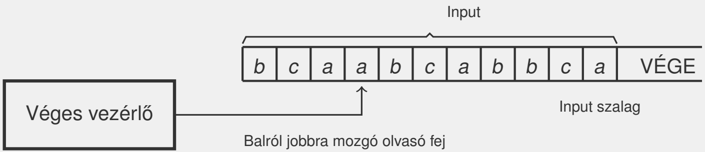
4. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Véges automata

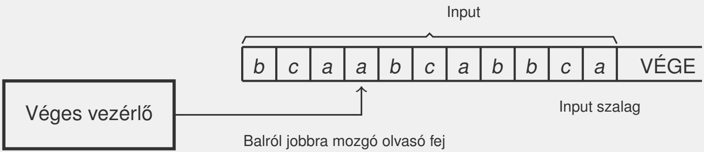


Véges automata



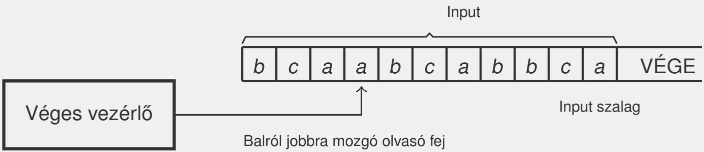
- Formális nyelvek megadása nemcsak generatív eszközökkel, hanem felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyen eszközök az automaták, amelyek szavak feldolgozására és azonosítására alkalmasak.

Véges automata



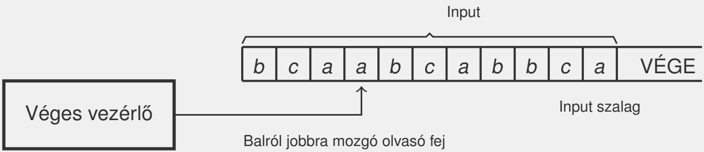
- Formális nyelvek megadása nemcsak generatív eszközökkel, hanem felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyen eszközök az automaták, amelyek szavak feldolgozására és azonosítására alkalmasak.
- A nyelvek megadása grammatikák szintetizáló, míg az automaták analitikus megközelítést alkalmaznak.

Véges automata



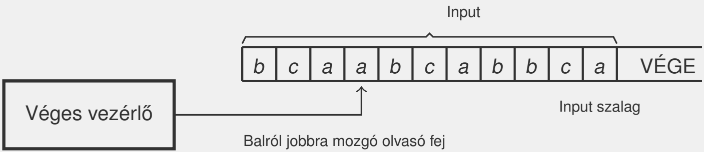
- Formális nyelvek megadása nemcsak generatív eszközökkel, hanem felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyen eszközök az automaták, amelyek szavak feldolgozására és azonosítására alkalmasak.
- A nyelvek megadása grammatikák szintetizáló, míg az automaták analitikus megközelítést alkalmaznak.
- Az automata egy szó feldolgozása után kétféle választ adhat, vagy elfogadja (igen), vagy elutasítja (nem) a bemnetet.

Véges automata



- Formális nyelvek megadása nemcsak generatív eszközökkel, hanem felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyen eszközök az automaták, amelyek szavak feldolgozására és azonosítására alkalmasak.
- A nyelvek megadása grammatikák szintetizáló, míg az automaták analitikus megközelítést alkalmaznak.
- Az automata egy szó feldolgozása után kétféle választ adhat, vagy elfogadja (igen), vagy elutasítja (nem) a bemnetet.

Véges automata



- Formális nyelvek megadása nemcsak generatív eszközökkel, hanem felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyen eszközök az automaták, amelyek szavak feldolgozására és azonosítására alkalmasak.
- A nyelvek megadása grammatikák szintetizáló, míg az automaták analitikus megközelítést alkalmaznak.
- Az automata egy szó feldolgozása után kétféle választ adhat, vagy elfogadja (igen), vagy elutasítja (nem) a bemnetet.

Véges automata

- A véges automata diszkrét időintervallumokban végrehajtott lépések sorozatán keresztül működik.

Véges automata

- A véges automata diszkrét időintervallumokban végrehajtott lépések sorozatán keresztül működik.
- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.

Véges automata

- A véges automata diszkrét időintervallumokban végrehajtott lépések sorozatán keresztül működik.
- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- Az automata, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapot-átmenet függvénye szerint.

Véges automata

- A véges automata diszkrét időintervallumokban végrehajtott lépések sorozatán keresztül működik.
- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- Az automata, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapot-átmenet függvénye szerint.
- Amennyiben az automata még nem olvasta végig a teljes inputot és elfogadó állapotba ér nem dönt még az elfogadásról/elutasításról, tovább működik a szabályai szerint.

Véges automata

- A véges automata diszkrét időintervallumokban végrehajtott lépések sorozatán keresztül működik.
- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- Az automata, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapot-átmenet függvénye szerint.
- Amennyiben az automata még nem olvasta végig a teljes inputot és elfogadó állapotba ér nem dönt még az elfogadásról/elutasításról, tovább működik a szabályai szerint.
- Ha az automata elolvasta az inputot, akkor megáll és aktuális állapota alapján válaszol, hogy felismeri vagy elutasítja a bemeneti szót.

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \rightarrow Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times T$.

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta: \; Q \times T \to Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times T$.
- $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times T$.
- $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times T$.
- $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times T$.
- $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Tehát minden $(q, a) \in Q \times T$ párra **pontosan egy** olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges determinisztikus automata

Definíció

A **véges (determinisztikus) automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times T$.
- $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Tehát minden $(q, a) \in Q \times T$ párra **pontosan egy** olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Megjegyzés: Az elfogadó állapotokra használható alternatívaként a végállapot szó is.

Az átmenetfüggvény kiterjesztése

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ egy véges determinisztikus automata (VDA).

Definíció

A δ leképezés **kiterjesztése** az a $\hat{\delta} : Q \times T^* \to Q$ (teljes) leképezés, amelyre

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := q$
- $\hat{\delta}(q, xa) := \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad (\forall x \in T^*, a \in T)$

Az átmenetfüggvény kiterjesztése

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ egy véges determinisztikus automata (VDA).

Definíció

A δ leképezés **kiterjesztése** az a $\hat{\delta} : Q \times T^* \rightarrow Q$ (teljes) leképezés, amelyre

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := q$
- $\hat{\delta}(q, xa) := \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \ \ (\forall x \in T^*, a \in T)$

$\hat{\delta}(q, u)$ tehát az az állapota az automatának, ahova a q állapotból indulva az u szó feldolgozása után eljut.

Az átmenetfüggvény kiterjesztése

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ egy véges determinisztikus automata (VDA).

Definíció

A δ leképezés **kiterjesztése** az a $\hat{\delta} : Q \times T^* \to Q$ (teljes) leképezés, amelyre

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := q$
- $\hat{\delta}(q, xa) := \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad (\forall x \in T^*, a \in T)$

$\hat{\delta}(q, u)$ tehát az az állapota az automatának, ahova a q állapotból indulva az u szó feldolgozása után eljut.

Ha $\hat{\delta}(q_0, u) \in F$, akkor az u inputot elfogadja A, ha $\hat{\delta}(q_0, u) \notin F$, akkor elutasítja.

Az átmenetfüggvény kiterjesztése

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ egy véges determinisztikus automata (VDA).

Definíció

A δ leképezés **kiterjesztése** az a $\hat{\delta} : Q \times T^* \to Q$ (teljes) leképezés, amelyre

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := q$
- $\hat{\delta}(q, xa) := \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$ $(\forall x \in T^*, a \in T)$

$\hat{\delta}(q, u)$ tehát az az állapota az automatának, ahova a q állapotból indulva az u szó feldolgozása után eljut.

Ha $\hat{\delta}(q_0, u) \in F$, akkor az u inputot elfogadja A, ha $\hat{\delta}(q_0, u) \notin F$, akkor elutasítja.

Mivel $\hat{\delta}$ a δ kiterjesztése, nem zavaró, ha a $\hat{}$-t elhagyjuk.

Véges determinisztikus automata – példa

1. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= q_2, & \delta(q_0, b) &= q_1,\\
\delta(q_1, a) &= q_3, & \delta(q_1, b) &= q_0,\\
\delta(q_2, a) &= q_0, & \delta(q_2, b) &= q_3,\\
\delta(q_3, a) &= q_1, & \delta(q_3, b) &= q_2.
\end{aligned}
$$

Véges determinisztikus automata – példa

1. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = q_2, & \delta(q_0, b) = q_1, \\
\delta(q_1, a) = q_3, & \delta(q_1, b) = q_0, \\
\delta(q_2, a) = q_0, & \delta(q_2, b) = q_3, \\
\delta(q_3, a) = q_1, & \delta(q_3, b) = q_2.
\end{array}$$

Például

$\delta(q_2, abb) = \delta(\delta(\delta(q_2, a), b), b) = \delta(\delta(q_0, b), b) = \delta(q_1, b) = q_0.$

Véges determinisztikus automata – példa

1. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_2, & \delta(q_0, b) = q_1, \\ \delta(q_1, a) = q_3, & \delta(q_1, b) = q_0, \\ \delta(q_2, a) = q_0, & \delta(q_2, b) = q_3, \\ \delta(q_3, a) = q_1, & \delta(q_3, b) = q_2. \end{array}$$

Például

$\delta(q_2, abb) = \delta(\delta(\delta(q_2, a), b), b) = \delta(\delta(q_0, b), b) = \delta(q_1, b) = q_0.$

q_0: eddig páros sok a és páros sok b volt.

q_1: eddig páros sok a és páratlan sok b volt.

q_2: eddig páratlan sok a és páros sok b volt.

q_3: eddig páratlan sok a és páratlan sok b volt.

Véges determinisztikus automata – példda

1. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = q_2, & \delta(q_0, b) = q_1, \\
\delta(q_1, a) = q_3, & \delta(q_1, b) = q_0, \\
\delta(q_2, a) = q_0, & \delta(q_2, b) = q_3, \\
\delta(q_3, a) = q_1, & \delta(q_3, b) = q_2.
\end{array}
$$

Például
$\delta(q_2, abb) = \delta(\delta(\delta(q_2, a), b), b) = \delta(\delta(q_0, b), b) = \delta(q_1, b) = q_0.$

q_0: eddig páros sok *a* és páros sok *b* volt.
q_1: eddig páros sok *a* és páratlan sok *b* volt.
q_2: eddig páratlan sok *a* és páros sok *b* volt.
q_3: eddig páratlan sok *a* és páratlan sok *b* volt.

Az *A* véges automata pontosan azokat a szavakat fogadja el, amelyekben az *a* és *b* betűk paritása (párossága) különbözik.

Véges determinisztikus automata – példa

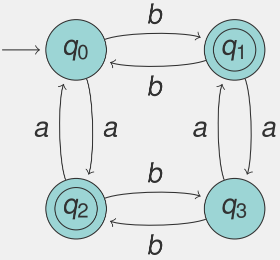
1. Az automatát megadhatjuk **táblázattal** is ($q \in Q$ sorában és $t \in T$ oszlopában a cella tartalma $\delta(q, t)$, $\rightarrow$: kezdőállapot, $\leftarrow$: elfogadó állapot, $\leftrightarrows$: ha a kezdőállapot elfogadó).

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Véges determinisztikus automata – példa

1. Az automatát megadhatjuk **táblázattal** is ($q \in Q$ sorában és $t \in T$ oszlopában a cella tartalma $\delta(q, t)$, $\rightarrow$: kezdőállapot, $\leftarrow$: elfogadó állapot, $\leftrightarrows$: ha a kezdőállapot elfogadó).

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2



2. Vagy **átmenetdiagrammal** (a gráf csúcsai az Q elemeivel vannak címkézve; akkor és csak akkor megy $q \in Q$-ból egy $t \in T$ címkéjű él $r \in Q$-ba, ha $\delta(q, t) = r$. A kezdőállapot $\rightarrow$-al van megjelölve, az elfogadó állapotok duplán vannak bekarikázva.)

Véges nemdeteminisztikus automata

Véges determinisztikus automata:

- A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times T$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges nemdeteminisztikus automata

Véges determinisztikus automata:

- A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times T$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges nemdeterminisztikus automata:

- Megengedjük az állapot-átmenet függvény többértékűségét, azaz δ ekkor egy $Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés.

Véges nemdeteminisztikus automata

Véges determinisztikus automata:

- A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times T$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges nemdeterminisztikus automata:

- Megengedjük az állapot-átmenet függvény többértékűségét, azaz δ ekkor egy $Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés.
- Több kezdőállapot is megengedett (azaz a kezdőállapotok Q_0 halmazára $Q_0 \subseteq Q$).

Véges nemdeteminisztikus automata

Véges determinisztikus automata:

- A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times T$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges nemdeterminisztikus automata:

- Megengedjük az állapot-átmenet függvény többértékűségét, azaz δ ekkor egy $Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés.
- Több kezdőállapot is megengedett (azaz a kezdőállapotok Q_0 halmazára $Q_0 \subseteq Q$).
- Úgy interpretálhatjuk, hogy a $q \in Q$ állapotból a $a \in T$ betű olvasására a gép egy tetszőleges $\delta(q, a)$-beli új állapotba léphet, azaz adott inputra több működés lehetséges.

Véges nemdeteminisztikus automata

Véges determinisztikus automata:

- A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times T$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges nemdeterminisztikus automata:

- Megengedjük az állapot-átmenet függvény többértékűségét, azaz δ ekkor egy $Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés.
- Több kezdőállapot is megengedett (azaz a kezdőállapotok Q_0 halmazára $Q_0 \subseteq Q$).
- Úgy interpretálhatjuk, hogy a $q \in Q$ állapotból a $a \in T$ betű olvasására a gép egy tetszőleges $\delta(q, a)$-beli új állapotba léphet, azaz adott inputra több működés lehetséges.
- Mivel $\emptyset \in \mathcal{P}(Q)$, ezért előfordulhat, hogy az $\delta(q, a) = \emptyset$ valamely (q, a)-ra, ilyenkor elakad a gép.

Véges nemdeteminisztikus automata

Véges determinisztikus automata:

- A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times T$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Véges nemdeterminisztikus automata:

- Megengedjük az állapot-átmenet függvény többértékűségét, azaz δ ekkor egy $Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés.
- Több kezdőállapot is megengedett (azaz a kezdőállapotok Q_0 halmazára $Q_0 \subseteq Q$).
- Úgy interpretálhatjuk, hogy a $q \in Q$ állapotból a $a \in T$ betű olvasására a gép egy tetszőleges $\delta(q, a)$-beli új állapotba léphet, azaz adott inputra több működés lehetséges.
- Mivel $\emptyset \in \mathcal{P}(Q)$, ezért előfordulhat, hogy az $\delta(q, a) = \emptyset$ valamely (q, a)-ra, ilyenkor elakad a gép.
- Akkor fogad el egy bemenetet, ha van legalább egy F-beli állapotban termináló működése.

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ leképezés, az **állapot-átmenet függvény**,

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés, az **állapot-átmenet függvény**,
- $Q_0 \subseteq Q$ a **kezdőállapotok halmaza**,

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés, az **állapot-átmenet függvény**,
- $Q_0 \subseteq Q$ a **kezdőállapotok halmaza**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ leképezés, az **állapot-átmenet függvény**,
- $Q_0 \subseteq Q$ a **kezdőállapotok halmaza**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Véges nemdeterminisztikus automata

Definíció

A **véges nemdeterminisztikus automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok ábécéje**,
- $\delta : \; Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ leképezés, az **állapot-átmenet függvény**,
- $Q_0 \subseteq Q$ a **kezdőállapotok halmaza**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Megjegyzés: A véges determinisztikus automata a véges nemdeterminisztikus automata speciális esetének tekinthető. Ha minden $(q, a) \in Q \times T$ esetén $|\delta(q, a)| = 1$, akkor minden bemenetre pontosan 1 működés lehetséges és az elfogadás is ugyanazt jelenti.

Véges nemdeterminisztikus automata – példa

2. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automata (VNDA vagy NDA), ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q_0, q_2\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}, & \delta(q_0, b) = \{q_1\}, \\
\delta(q_1, a) = \{q_3\}, & \delta(q_1, b) = \{q_0, q_1\}, \\
\delta(q_2, a) = \{q_0\}, & \delta(q_2, b) = \{q_3\}, \\
\delta(q_3, a) = \{q_1\}, & \delta(q_3, b) = \{\}.
\end{array}$$

Véges nemdeterminisztikus automata – példa

2. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ véges nemdeterminisztikus automata (VNDA vagy NDA), ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q_0, q_2\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}, & \delta(q_0, b) = \{q_1\}, \\
\delta(q_1, a) = \{q_3\}, & \delta(q_1, b) = \{q_0, q_1\}, \\
\delta(q_2, a) = \{q_0\}, & \delta(q_2, b) = \{q_3\}, \\
\delta(q_3, a) = \{q_1\}, & \delta(q_3, b) = \{\}.
\end{array}$$

Ugyanez táblázattal, illetve átmenetdiagrammal:

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\leftrightarrows q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\}$

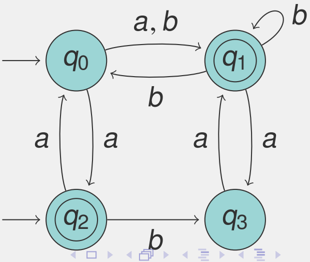
Véges nemdeterminisztikus automata – példa

2. példa: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automata (VNDA vagy NDA), ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q_0, q_2\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

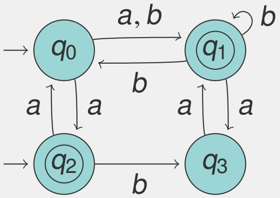
$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}, & \delta(q_0, b) = \{q_1\}, \\
\delta(q_1, a) = \{q_3\}, & \delta(q_1, b) = \{q_0, q_1\}, \\
\delta(q_2, a) = \{q_0\}, & \delta(q_2, b) = \{q_3\}, \\
\delta(q_3, a) = \{q_1\}, & \delta(q_3, b) = \{\,\}.
\end{array}$$

Ugyanez táblázattal, illetve átmenetdiagrammal:

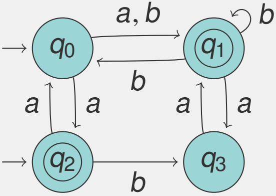
	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\leftrightarrows q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\,\}$



Véges nemdeterminisztikus automata – példa

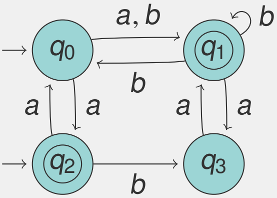


Véges nemdeterminisztikus automata – példa



Nézzük meg az *aab* bemenetre milyen működések lehetségesek!

Véges nemdeterminisztikus automata – példa

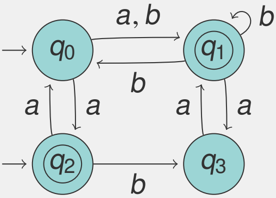


Nézzük meg az *aab* bemenetre milyen működések lehetségesek!

1. próbálkozás:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_0	$\notin F$
hátravan	aab	ab	b	ε	**elutasítja**

Véges nemdeterminisztikus automata – példa



Nézzük meg az *aab* bemenetre milyen működések lehetségesek!

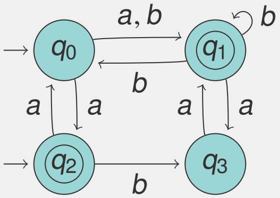
1. próbálkozás:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_0	$\notin F$
hátravan	aab	ab	b	ε	**elutasítja**

2. próbálkozás:

állapot	q_0	q_1	q_2	
hátravan	aab	ab	b	elakadt

Véges nemdeterminisztikus automata – példa



Nézzük meg az *aab* bemenetre milyen működések lehetségesek!

1. próbálkozás:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_0	$\notin F$
hátravan	aab	ab	b	ε	**elutasítja**

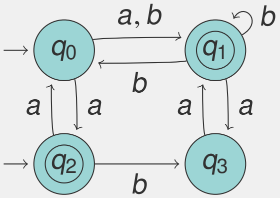
2. próbálkozás:

állapot	q_0	q_1	q_2		
hátravan	aab	ab	b		elakadt

3. próbálkozás:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_1	$\in F$
hátravan	aab	ab	b	ε	**elfogadja**

Véges nemdeterminisztikus automata – példa



Elfogadja *aab*-t mert van legalább 1 elfogadó működés!

Nézzük meg az *aab* bemenetre milyen működések lehetségesek!

1. próbálkozás:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_0	$\notin F$
hátravan	aab	ab	b	ε	**elutasítja**

2. próbálkozás:

állapot	q_0	q_1	q_2	
hátravan	aab	ab	b	elakadt

3. próbálkozás:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_1	$\in F$
hátravan	aab	ab	b	ε	**elfogadja**

Szabály alapú alternatív megközelítés

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Szabály alapú alternatív megközelítés

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Az átmenetek szabály alapon történő megadása:
Az A véges nemdeterminisztikus automatához tartozó M_δ szabályrendszerhez minden $p, q \in Q,\ a \in T,\ p \in \delta(q, a)$ esetén adjuk hozzá a

$$qa \rightarrow p$$

alakú átírási szabályt, azaz

Szabály alapú alternatív megközelítés

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Az átmenetek szabály alapon történő megadása:
Az A véges nemdeterminisztikus automatához tartozó M_δ szabályrendszerhez minden $p, q \in Q,\ a \in T,\ p \in \delta(q, a)$ esetén adjuk hozzá a

$$qa \to p$$

alakú átírási szabályt, azaz

$$M_\delta = \{qa \to p \,|\, p, q \in Q,\ a \in T,\ p \in \delta(q, a)\}$$

Szabály alapú alternatív megközelítés

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Az átmenetek szabály alapon történő megadása:
Az A véges nemdeterminisztikus automatához tartozó M_δ szabályrendszerhez minden $p, q \in Q,\ a \in T,\ p \in \delta(q, a)$ esetén adjuk hozzá a

$$qa \rightarrow p$$

alakú átírási szabályt, azaz

$$M_\delta = \{qa \rightarrow p \,|\, p, q \in Q,\ a \in T,\ p \in \delta(q, a)\}$$

Megjegyzés: Tehát A pontosan akkor determinisztikus, ha minden egyes (q, a) pár esetén pontosan egy $p \in Q$ létezik, melyre $qa \rightarrow p \in M_\delta$.

Szabály alapú alternatív megközelítés

Nézzük meg a 2. (nemdeterminisztikus) példa esetén mely szabályokból áll M_δ.

Példa:

M :

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\leftrightarrows q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\,\}$

M_δ :

$q_0 a \rightarrow q_1 \mid q_2$ $\quad$ $q_0 b \rightarrow q_1$

$q_1 a \rightarrow q_3$ $\quad$ $q_1 b \rightarrow q_0 \mid q_1$

$q_2 a \rightarrow q_0$ $\quad$ $q_2 b \rightarrow q_3$

$q_3 a \rightarrow q_1$

Szabály alapú alternatív megközelítés

Nézzük meg a 2. (nemdeterminisztikus) példa esetén mely szabályokból áll M_δ.

Példa:

M :

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\leftrightarrows q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\}$

M_δ :

$q_0 a \rightarrow q_1 \mid q_2$ $\quad$ $q_0 b \rightarrow q_1$

$q_1 a \rightarrow q_3$ $\quad$ $q_1 b \rightarrow q_0 \mid q_1$

$q_2 a \rightarrow q_0$ $\quad$ $q_2 b \rightarrow q_3$

$q_3 a \rightarrow q_1$

Megjegyzés: Bár M_δ egy szabályrendszer, így önmagában nem tekinthető grammatikának.

Véges automata – egylépéses redukció

Láttuk, hogy az automata további működése mindig csak az aktuális, $q \in Q$ állapottól és a bemenet még hátralévő olvasatlan $w \in T^*$ suffixétől függ. Ez motiválja a következőt.

Véges automata – egylépéses redukció

Láttuk, hogy az automata további működése mindig csak az aktuális, $q \in Q$ állapottól és a bemenet még hátralévő olvasatlan $w \in T^*$ suffixétől függ. Ez motiválja a következőt.

Definíció

Egy $u \in QT^*$ szót az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ VNDA egy **konfigurációjának** nevezzük.

Véges automata – egylépéses redukció

Láttuk, hogy az automata további működése mindig csak az aktuális, $q \in Q$ állapottól és a bemenet még hátralévő olvasatlan $w \in T^*$ suffixétől függ. Ez motiválja a következőt.

Definíció

Egy $u \in QT^*$ szót az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ VNDA egy **konfigurációjának** nevezzük.

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ egy véges automata és legyenek $u, v \in QT^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $qa \rightarrow p \in M_\delta$ szabály (azaz $p \in \delta(q, a)$) és olyan $w \in T^*$ szó, hogy $u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.

Véges automata – egylépéses redukció

Láttuk, hogy az automata további működése mindig csak az aktuális, $q \in Q$ állapottól és a bemenet még hátralévő olvasatlan $w \in T^*$ suffixétől függ. Ez motiválja a következőt.

Definíció

Egy $u \in QT^*$ szót az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ VNDA egy **konfigurációjának** nevezzük.

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ egy véges automata és legyenek $u, v \in QT^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $qa \rightarrow p \in M_\delta$ szabály (azaz $p \in \delta(q, a)$) és olyan $w \in T^*$ szó, hogy $u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben bármely $u \in QT^+$ esetén egyértelműen létezik egy olyan $v \in QT^*$, melyre $u \Rightarrow_A v$.

Véges automata – többlépéses redukció

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges automata az $u \in QT^*$ szót a $v \in QT^*$ szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Véges automata – többlépéses redukció

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata az $u \in QT^*$ szót a $v \in QT^*$ szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Megjegyzés: A levezetés hossza ($|u| - |v|$) szerinti rekurzióval is definiálhatnánk a többlépéses redukciót. Azaz $u \Rightarrow_A^* v$ ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in QT^*$, $|z| = |v| + 1$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Véges automata – többlépéses redukció

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata az $u \in QT^*$ szót a $v \in QT^*$ szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Megjegyzés: A levezetés hossza ($|u| - |v|$) szerinti rekurzióval is definiálhatnánk a többlépéses redukciót. Azaz $u \Rightarrow_A^* v$ ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in QT^*$, $|z| = |v| + 1$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Megjegyzés: A $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Véges automata – többlépéses redukció

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata az $u \in QT^*$ szót a $v \in QT^*$ szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Megjegyzés: A levezetés hossza ($|u| - |v|$) szerinti rekurzióval is definiálhatnánk a többlépéses redukciót. Azaz $u \Rightarrow_A^* v$ ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in QT^*$, $|z| = |v| + 1$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Megjegyzés: A $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Megjegyzés: A $\Rightarrow_A^*$ a grammatikák elméletéből ismert levezetés fogalmával azonos (konfigurációk között M_δ-beli szabályok szerint).

Véges automata – többlépéses redukció

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ véges automata az $u \in QT^*$ szót a $v \in QT^*$ szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$-re léteznek $w_0, \ldots, w_k$ konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ $(1 \leq i \leq k)$, $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Megjegyzés: A levezetés hossza (|u| – |v|) szerinti rekurzióval is definiálhatnánk a többlépéses redukciót. Azaz $u \Rightarrow_A^* v$ ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in QT^*$, $|z| = |v| + 1$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Megjegyzés: A $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Megjegyzés: A $\Rightarrow_A^*$ a grammatikák elméletéből ismert levezetés fogalmával azonos (konfigurációk között M_δ-beli szabályok szerint).

Megjegyzés: Míg nemdeterminisztikus esetben egy konfigurációból akár több mint 1, akár 0 darab adott hosszúságú levezetés lehetséges, addig determinisztikus esetben pontosan 1.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automata által **elfogadott nyelv** alatt az
$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}$
nyelvet értjük.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ véges nemdeterminisztikus automata által **elfogadott nyelv** alatt az
$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}$
nyelvet értjük.

Megjegyzés: $L(A)$-t az A által felismert nyelvnek is nevezik.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automata által **elfogadott nyelv** alatt az
$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}$
nyelvet értjük.

Megjegyzés: $L(A)$-t az A által felismert nyelvnek is nevezik.

Megjegyzés: $\varepsilon \in L(A) \iff Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automata által **elfogadott nyelv** alatt az
$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra és $p \in F$-re$\}$
nyelvet értjük.

Megjegyzés: $L(A)$-t az A által felismert nyelvnek is nevezik.

Megjegyzés: $\varepsilon \in L(A) \Longleftrightarrow Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben $Q_0 = \{q_0\}$ egyelemű, és minden $u \in T^*$-ra $q_0 u$ pontosan egyféleképp redukálható valamely $p \in Q$-ra. Ha $p \in F$, akkor A elfogadja u-t, különben elutasítja.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ véges nemdeterminisztikus automata által **elfogadott nyelv** alatt az
$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}$
nyelvet értjük.

Megjegyzés: $L(A)$-t az A által felismert nyelvnek is nevezik.

Megjegyzés: $\varepsilon \in L(A) \iff Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben $Q_0 = \{q_0\}$ egyelemű, és minden $u \in T^*$-ra $q_0 u$ pontosan egyféleképp redukálható valamely $p \in Q$-ra. Ha $p \in F$, akkor A elfogadja u-t, különben elutasítja.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben a kiterjesztett δ függvénnyel is definálhatjuk $L(A)$-t:
$L(A) = \{u \in T^* \mid \delta(q_0, u) \in F\}$.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automata által **elfogadott nyelv** alatt az
$L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}$
nyelvet értjük.

Megjegyzés: $L(A)$-t az A által felismert nyelvnek is nevezik.

Megjegyzés: $\varepsilon \in L(A) \Longleftrightarrow Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben $Q_0 = \{q_0\}$ egyelemű, és minden $u \in T^*$-ra $q_0 u$ pontosan egyféleképp redukálható valamely $p \in Q$-ra. Ha $p \in F$, akkor A elfogadja u-t, különben elutasítja.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben a kiterjesztett δ függvénnyel is definálhatjuk $L(A)$-t:
$L(A) = \{u \in T^* \mid \delta(q_0, u) \in F\}$.

Megjegyzés: Ha egyértelmű, hogy melyik automatában történik a redukció $\Rightarrow_A$ alsó indexe elhagyható.

Véges automata – példák

Az **1. példa** (VDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$q_0 a \to q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0$

$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1, \quad q_3 b \to q_2.$

Véges automata – példák

Az **1. példa** (VDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$q_0 a \to q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0$

$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1, \quad q_3 b \to q_2.$

$q_0 aab \Rightarrow q_2 ab \Rightarrow q_0 b \Rightarrow q_1.$

Véges automata – példák

Az **1. példa** (VDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \to q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0$$

$$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1, \quad q_3 b \to q_2.$$

$$q_0 aab \Rightarrow q_2 ab \Rightarrow q_0 b \Rightarrow q_1.$$

Ez *aab* egyetlen olyan redukciója, amely a teljes szót feldolgozza.
Mivel $q_1 \in F$, ezért $aab \in L(A)$.

Véges automata – példák

Az **1. példa** (VDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$q_0 a \to q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0$

$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1, \quad q_3 b \to q_2.$

$q_0 aab \Rightarrow q_2 ab \Rightarrow q_0 b \Rightarrow q_1.$

Ez *aab* egyetlen olyan redukciója, amely a teljes szót feldolgozza.
Mivel $q_1 \in F$, ezért $aab \in L(A)$.

Az **2. példa** (VNDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$q_0 a \to q_1 \,|\, q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0 \,|\, q_1$

$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1.$

Véges automata – példák

Az **1. példa** (VDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \to q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0$$
$$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1, \quad q_3 b \to q_2.$$

$$q_0 aab \Rightarrow q_2 ab \Rightarrow q_0 b \Rightarrow q_1.$$

Ez *aab* egyetlen olyan redukciója, amely a teljes szót feldolgozza. Mivel $q_1 \in F$, ezért $aab \in L(A)$.

Az **2. példa** (VNDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \to q_1 \,|\, q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0 \,|\, q_1$$
$$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1.$$

$$q_2 aab \Rightarrow q_0 ab \Rightarrow q_1 b \Rightarrow q_0. \qquad \text{(1. próbálkozás)}$$
$$q_2 aab \Rightarrow q_0 ab \Rightarrow q_1 b \Rightarrow q_1. \qquad \text{(3. próbálkozás)}$$

Véges automata – példák

Az **1. példa** (VDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \to q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0$$
$$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1, \quad q_3 b \to q_2.$$

$$q_0 aab \Rightarrow q_2 ab \Rightarrow q_0 b \Rightarrow q_1.$$

Ez *aab* egyetlen olyan redukciója, amely a teljes szót feldolgozza. Mivel $q_1 \in F$, ezért $aab \in L(A)$.

Az **2. példa** (VNDA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \to q_1 \,|\, q_2, \quad q_0 b \to q_1, \quad q_1 a \to q_3, \quad q_1 b \to q_0 \,|\, q_1$$
$$q_2 a \to q_0, \quad q_2 b \to q_3, \quad q_3 a \to q_1.$$

$$q_2 aab \Rightarrow q_0 ab \Rightarrow q_1 b \Rightarrow q_0. \qquad \text{(1. próbálkozás)}$$
$$q_2 aab \Rightarrow q_0 ab \Rightarrow q_1 b \Rightarrow q_1. \qquad \text{(3. próbálkozás)}$$

Ez *aab* bemenet esetén több olyan redukció is létezik, amely a teljes szót feldolgozza. Mivel $q_1 \in F$, ezért a 3. próbálkozás alapján $aab \in L(A)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Minden $qa \to p \in M_\delta$ $(q, p \in Q, a \in T, p \in \delta(q, a))$ állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Minden $qa \to p \in M_\delta$ $(q, p \in Q, a \in T, p \in \delta(q, a))$ állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika, melyre $N = Q \cup \{S\}$ $(S \notin Q)$. és definálljuk a P szabályrendszert a következőképpen.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Minden $qa \to p \in M_\delta$ $(q, p \in Q, a \in T, p \in \delta(q, a))$ állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika, melyre $N = Q \cup \{S\}$ $(S \notin Q)$. és definiáljuk a P szabályrendszert a következőképpen.

1. $p \to a :\in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \to p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra,

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Minden $qa \to p \in M_\delta$ $(q, p \in Q, a \in T, p \in \delta(q, a))$ állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika, melyre $N = Q \cup \{S\}$ $(S \notin Q)$. és definiáljuk a P szabályrendszert a következőképpen.

1. $p \to a :\in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \to p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra,
2. $p \to qa :\in P$ akkor és csak akkor, ha $qa \to p \in M_\delta$,

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Minden $qa \to p \in M_\delta$ $(q, p \in Q, a \in T, p \in \delta(q, a))$ állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika, melyre $N = Q \cup \{S\}$ $(S \notin Q)$. és definiáljuk a P szabályrendszert a következőképpen.

1. $p \to a :\in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \to p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra,
2. $p \to qa :\in P$ akkor és csak akkor, ha $qa \to p \in M_\delta$,
3. $S \to p :\in P$ akkor és csak akkor, ha $p \in F$,

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ egy véges nemdeterminisztikus automata.

Minden $qa \to p \in M_\delta$ $(q, p \in Q, a \in T, p \in \delta(q, a))$ állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika, melyre $N = Q \cup \{S\}$ $(S \notin Q)$. és definiáljuk a P szabályrendszert a következőképpen.

1. $p \to a :\in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \to p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra,
2. $p \to qa :\in P$ akkor és csak akkor, ha $qa \to p \in M_\delta$,
3. $S \to p :\in P$ akkor és csak akkor, ha $p \in F$,
4. $S \to \varepsilon :\in P$ akkor és csak akkor, ha $Q_0 \cap F \neq \emptyset$

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L(G)$:

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L(G)$**:**

- Tegyük fel, hogy $u \neq \varepsilon, u \in L(A)$. Akkor van olyan $q_0 \in Q_0$ kezdőállapot és olyan $p \in F$ elfogadó állapot, hogy $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ teljesül. Tekintve ennek a redukciónak a megfordítását, a 2. csoportba tartozó szabályok használatával meg tudjuk konstruálni a $p \Rightarrow_G^* q_0 u$ levezetést.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L(G)$:

- Tegyük fel, hogy $u \neq \varepsilon, u \in L(A)$. Akkor van olyan $q_0 \in Q_0$ kezdőállapot és olyan $p \in F$ elfogadó állapot, hogy $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ teljesül. Tekintve ennek a redukciónak a megfordítását, a 2. csoportba tartozó szabályok használatával meg tudjuk konstruálni a $p \Rightarrow_G^* q_0 u$ levezetést.
- Ez a G-beli levezetés egy $p_1 \to q_0 a$ alakú szabály alkalmazásával ér véget valamely $p_1 \in Q$-ra. Ekkor a 2. pont szerint $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$, de ekkor az 1. pont szerint $p_1 \to a \in P$. Tehát $p \Rightarrow_G^* u$ is igaz, ha a $p_1 \to a$ szabályt alkalmazzuk $p_1 \to q_0 a$ helyett utoljára.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L(G)$:

- Tegyük fel, hogy $u \neq \varepsilon, u \in L(A)$. Akkor van olyan $q_0 \in Q_0$ kezdőállapot és olyan $p \in F$ elfogadó állapot, hogy $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ teljesül. Tekintve ennek a redukciónak a megfordítását, a 2. csoportba tartozó szabályok használatával meg tudjuk konstruálni a $p \Rightarrow_G^* q_0 u$ levezetést.
- Ez a G-beli levezetés egy $p_1 \to q_0 a$ alakú szabály alkalmazásával ér véget valamely $p_1 \in Q$-ra. Ekkor a 2. pont szerint $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$, de ekkor az 1. pont szerint $p_1 \to a \in P$. Tehát $p \Rightarrow_G^* u$ is igaz, ha a $p_1 \to a$ szabályt alkalmazzuk $p_1 \to q_0 a$ helyett utoljára.
- Mivel $p \in F$, ezért a 3. pont alapján $S \to p \in P$, tehát $S \Rightarrow_G^* u$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L(G)$:

- Tegyük fel, hogy $u \neq \varepsilon, u \in L(A)$. Akkor van olyan $q_0 \in Q_0$ kezdőállapot és olyan $p \in F$ elfogadó állapot, hogy $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ teljesül. Tekintve ennek a redukciónak a megfordítását, a 2. csoportba tartozó szabályok használatával meg tudjuk konstruálni a $p \Rightarrow_G^* q_0 u$ levezetést.
- Ez a G-beli levezetés egy $p_1 \to q_0 a$ alakú szabály alkalmazásával ér véget valamely $p_1 \in Q$-ra. Ekkor a 2. pont szerint $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$, de ekkor az 1. pont szerint $p_1 \to a \in P$. Tehát $p \Rightarrow_G^* u$ is igaz, ha a $p_1 \to a$ szabályt alkalmazzuk $p_1 \to q_0 a$ helyett utoljára.
- Mivel $p \in F$, ezért a 3. pont alapján $S \to p \in P$, tehát $S \Rightarrow_G^* u$.
- Tehát mivel u tetszőleges $L(A)$-beli volt, $L(A) \subseteq L(G)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$**:**

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.
- A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \to a \in P$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.
- A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

  levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \to a \in P$.
- Mivel $p_1 \to a \in P$, ezért az 1. pont alapján $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra, és így a 2. pont alapján $p_1 \to q_0 a \in P$. Ha az utolsóként alkalmazott $p_1 \to a$ szabályt $p_1 \to q_0 a$-ra cseréljük a levezetésben kapjuk, hogy $p \Rightarrow_G^* q_0 u$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.
- A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \to a \in P$.
- Mivel $p_1 \to a \in P$, ezért az 1. pont alapján $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra, és így a 2. pont alapján $p_1 \to q_0 a \in P$. Ha az utolsóként alkalmazott $p_1 \to a$ szabályt $p_1 \to q_0 a$-ra cseréljük a levezetésben kapjuk, hogy $p \Rightarrow_G^* q_0 u$.
- A 2. pont szabályaival ebből $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ következik.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.
- A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

  levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \to a \in P$.
- Mivel $p_1 \to a \in P$, ezért az 1. pont alapján $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra, és így a 2. pont alapján $p_1 \to q_0 a \in P$. Ha az utolsóként alkalmazott $p_1 \to a$ szabályt $p_1 \to q_0 a$-ra cseréljük a levezetésben kapjuk, hogy $p \Rightarrow_G^* q_0 u$.
- A 2. pont szabályaival ebből $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ következik.
- Mivel $p \in F$, ezért $u \in L(A)$, azaz mivel u tetszőleges $L(G)$-beli volt, $L(G) \subseteq L(A)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.
- A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

  levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \to a \in P$.
- Mivel $p_1 \to a \in P$, ezért az 1. pont alapján $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra, és így a 2. pont alapján $p_1 \to q_0 a \in P$. Ha az utolsóként alkalmazott $p_1 \to a$ szabályt $p_1 \to q_0 a$-ra cseréljük a levezetésben kapjuk, hogy $p \Rightarrow_G^* q_0 u$.
- A 2. pont szabályaival ebből $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ következik.
- Mivel $p \in F$, ezért $u \in L(A)$, azaz mivel u tetszőleges $L(G)$-beli volt, $L(G) \subseteq L(A)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in T^+$.
- A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

  levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \to a \in P$.
- Mivel $p_1 \to a \in P$, ezért az 1. pont alapján $q_0 a \to p_1 \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$-ra, és így a 2. pont alapján $p_1 \to q_0 a \in P$. Ha az utolsóként alkalmazott $p_1 \to a$ szabályt $p_1 \to q_0 a$-ra cseréljük a levezetésben kapjuk, hogy $p \Rightarrow_G^* q_0 u$.
- A 2. pont szabályaival ebből $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ következik.
- Mivel $p \in F$, ezért $u \in L(A)$, azaz mivel u tetszőleges $L(G)$-beli volt, $L(G) \subseteq L(A)$.

A G grammatika szabályai bal-lineárisak, de ismeretes, hogy minden bal-lineáris grammatikához létezik vele ekvivalens jobb-lineáris grammatika, így a tétel állítása fennáll.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Következmény:

VNDA	VNDA (M_δ)	bal-lineáris	jobb-lineáris
q_0 kezdőállapot		S ÚJ kezdőszimbólum	
$p \in \delta(q_0, a)$	$q_0 a \to p\ (q_0 \in Q_0)$	$p \to a$	$S \to ap$
$p \in \delta(q, a)$	$qa \to p$	$p \to qa$	$q \to ap$
$p \in F$		$S \to p$	$p \to \varepsilon$
$Q_0 \cap F \neq \emptyset$		$S \to \varepsilon$	$S \to \varepsilon$

Véges automaták és reguláris nyelvek

Következmény:

VNDA	VNDA (M_δ)	bal-lineáris	jobb-lineáris
q_0 kezdőállapot		S ÚJ kezdőszimbólum	
$p \in \delta(q_0, a)$	$q_0 a \to p$ ($q_0 \in Q_0$)	$p \to a$	$S \to ap$
$p \in \delta(q, a)$	$qa \to p$	$p \to qa$	$q \to ap$
$p \in F$		$S \to p$	$p \to \varepsilon$
$Q_0 \cap F \neq \emptyset$		$S \to \varepsilon$	$S \to \varepsilon$

Következmény: (ha A determinisztikus)

VDA	VDA (M_δ)	jobb-lineáris
q_0 kezdőállapot		q_0 kezdőszimbólum
$\delta(q, a) = p$	$qa \to p$	$q \to ap$
$p \in F$		$p \to \varepsilon$

Véges automaták és reguláris nyelvek

1. példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

3-as típusú grammatika:

$$q_0 \rightarrow aq_2 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_3 \mid bq_0 \mid \varepsilon$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_3 \rightarrow aq_1 \mid bq_2$$

Véges automaták és reguláris nyelvek

1. példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

3-as típusú grammatika:

$$q_0 \rightarrow aq_2 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_3 \mid bq_0 \mid \varepsilon$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_3 \rightarrow aq_1 \mid bq_2$$

2. példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\leftrightarrows q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\}$

3-as típusú grammatika:

$$S \rightarrow aq_1 \mid aq_2 \mid bq_1 \mid aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid aq_2 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_3 \mid bq_0 \mid bq_1 \mid \varepsilon$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_3 \rightarrow aq_1$$

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden 3-típusú G grammatikához meg tudunk adni egy A véges nemdeterminisztikus automatát úgy, hogy $L(A) = L(G)$ teljesül.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden 3-típusú G grammatikához meg tudunk adni egy A véges nemdeterminisztikus automatát úgy, hogy $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyítás:

- Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ normálformában van (minden szabály vagy $X \to aY$, vagy $X \to \varepsilon$ alakú, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$).

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden 3-típusú G grammatikához meg tudunk adni egy A véges nemdeterminisztikus automatát úgy, hogy $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyítás:

- Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ normálformában van (minden szabály vagy $X \to aY$, vagy $X \to \varepsilon$ alakú, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$).
- Legyen $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ az a véges nemdeterminisztikus automata melyre

$$Q = N, \quad Q_0 = \{S\}, \text{ és } F = \{Z \in N \,|\, Z \to \varepsilon \in P\}.$$

Legyen M_δ úgy definiálva, hogy

$$Xa \to Y \in M_\delta \text{ akkor és csak akkor, ha } X \to aY \in P.$$

Véges automaták és reguláris nyelvek

- A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy minden $X, Y \in N$, $u \in T^*$ esetén
$$X \Rightarrow_G^* uY \iff Xu \Rightarrow_A^* Y.$$

Véges automaták és reguláris nyelvek

- A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy minden $X, Y \in N$, $u \in T^*$ esetén
$$X \Rightarrow_G^* uY \iff Xu \Rightarrow_A^* Y.$$
- Az $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow_G u$ G-beli levezetéshez tehát van A-ban olyan redukció, amelyre $Su \Rightarrow_A^* Z$ teljesül. Mivel G a $Z \to \varepsilon$ szabályt használta ezért $Z \in F$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

- A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy minden $X, Y \in N$, $u \in T^*$ esetén
$$X \Rightarrow_G^* uY \iff Xu \Rightarrow_A^* Y.$$
- Az $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow_G u$ G-beli levezetéshez tehát van A-ban olyan redukció, amelyre $Su \Rightarrow_A^* Z$ teljesül. Mivel G a $Z \to \varepsilon$ szabályt használta ezért $Z \in F$.
- Megfordítva, minden A-beli $Su \Rightarrow_A^* Z$, $Z \in F$ redukcióhoz tudunk egy megfelelő $S \Rightarrow_G^* uZ$ levezetést találni G-ben. Mivel $Z \in F$, ezért van $Z \to \varepsilon$ szabály, tehát $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow u$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

- A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy minden $X, Y \in N$, $u \in T^*$ esetén
$$X \Rightarrow_G^* uY \iff Xu \Rightarrow_A^* Y.$$
- Az $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow_G u$ G-beli levezetéshez tehát van A-ban olyan redukció, amelyre $Su \Rightarrow_A^* Z$ teljesül. Mivel G a $Z \to \varepsilon$ szabályt használta ezért $Z \in F$.
- Megfordítva, minden A-beli $Su \Rightarrow_A^* Z$, $Z \in F$ redukcióhoz tudunk egy megfelelő $S \Rightarrow_G^* uZ$ levezetést találni G-ben. Mivel $Z \in F$, ezért van $Z \to \varepsilon$ szabály, tehát $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow u$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

- A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy minden $X, Y \in N$, $u \in T^*$ esetén
$$X \Rightarrow_G^* uY \iff Xu \Rightarrow_A^* Y.$$
- Az $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow_G u$ G-beli levezetéshez tehát van A-ban olyan redukció, amelyre $Su \Rightarrow_A^* Z$ teljesül. Mivel G a $Z \to \varepsilon$ szabályt használta ezért $Z \in F$.
- Megfordítva, minden A-beli $Su \Rightarrow_A^* Z$, $Z \in F$ redukcióhoz tudunk egy megfelelő $S \Rightarrow_G^* uZ$ levezetést találni G-ben. Mivel $Z \in F$, ezért van $Z \to \varepsilon$ szabály, tehát $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow u$.

Példa:

$S \to aA \,|\, aB \,|\, bB \,|\, \varepsilon$

$A \to bS \,|\, bB$

$B \to aS \,|\, aA \,|\, \varepsilon$

	a	b
$\leftrightarrows S$	$\{A, B\}$	$\{B\}$
A	$\{\}$	$\{S, B\}$
$\leftarrow B$	$\{S, A\}$	$\{\}$

Véges automata determinizálása

Tétel

Minden $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automatához megkonstruálható egy $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F' \rangle$ véges determinisztikus automata úgy, hogy $L(A) = L(A')$ teljesül.

Véges automata determinizálása

Tétel

Minden $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ véges nemdeterminisztikus automatához megkonstruálható egy $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ véges determinisztikus automata úgy, hogy $L(A) = L(A')$ teljesül.

A konstrukció:

$Q' := \mathcal{P}(Q), \quad q_0' := Q_0, \quad F' := \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\},$

$$\delta'(q', a) := \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a).$$

Véges automata determinizálása

Tétel

Minden $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F\rangle$ véges nemdeterminisztikus automatához megkonstruálható egy $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F'\rangle$ véges determinisztikus automata úgy, hogy $L(A) = L(A')$ teljesül.

A konstrukció:

$Q' := \mathcal{P}(Q), \quad q_0' := Q_0, \quad F' := \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\},$

$$\delta'(q', a) := \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a).$$

A konstrukció helyességét a jövő héten látjuk be.

Véges automata determinizálása

Tétel

Minden $A = \langle Q, T, \delta, Q_0, F \rangle$ véges nemdeterminisztikus automatához megkonstruálható egy $A' = \langle Q', T, \delta', q_0', F' \rangle$ véges determinisztikus automata úgy, hogy $L(A) = L(A')$ teljesül.

A konstrukció:

$Q' := \mathcal{P}(Q), \quad q_0' := Q_0, \quad F' := \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\},$

$$\delta'(q', a) := \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a).$$

A konstrukció helyességét a jövő héten látjuk be.

Tehát mind a véges determinisztikus automaták, mind a véges nemdeterminisztikus automaták reguláris ($\mathcal{L}_3$-beli) nyelveket leíró formális eszközök.

Véges automata determinizálása – példa

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftrightarrows q_1$	$\{q_0\}$	$\{\}$
$\leftarrow q_2$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$

VNDA

Véges automata determinizálása – példa

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftrightarrows q_1$	$\{q_0\}$	$\{\}$
$\leftarrow q_2$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$

VNDA

	a	b
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_0\}$	$\{\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{\}$
$\leftarrow \{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\leftrightarrows \{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$
$\leftarrow \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$

VDA