A számításelmélet alapjai I.

3. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Lineáris grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S\rangle$ környezetfüggetlen grammatikát **lineárisnak** nevezünk, ha minden szabálya vagy

a) $A \rightarrow u$, $A \in N, u \in T^*$ vagy

b) $A \rightarrow u_1 B u_2$ alakú, ahol $A, B \in N$ és $u_1, u_2 \in T^*$.

A G lineáris grammatikát **bal-lineárisnak** nevezzük, ha minden b) alakú szabályában $u_1 = \varepsilon$.

A G lineáris grammatikát **jobb-lineárisnak** mondjuk, ha minden b) alakú szabályában $u_2 = \varepsilon$.

Lineáris grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ környezetfüggetlen grammatikát **lineárisnak** nevezünk, ha minden szabálya vagy

a) $A \to u$, $A \in N, u \in T^*$ vagy

b) $A \to u_1 B u_2$ alakú, ahol $A, B \in N$ és $u_1, u_2 \in T^*$.

A G lineáris grammatikát **bal-lineárisnak** nevezzük, ha minden b) alakú szabályában $u_1 = \varepsilon$.

A G lineáris grammatikát **jobb-lineárisnak** mondjuk, ha minden b) alakú szabályában $u_2 = \varepsilon$.

Megjegyzés: A jobb-lineáris grammatika egy másik elnevezés a reguláris (3-típusú) grammatikákra.

Lineáris grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S\rangle$ környezetfüggetlen grammatikát **lineárisnak** nevezünk, ha minden szabálya vagy

a) $A \rightarrow u$, $A \in N, u \in T^*$ vagy

b) $A \rightarrow u_1 B u_2$ alakú, ahol $A, B \in N$ és $u_1, u_2 \in T^*$.

A G lineáris grammatikát **bal-lineárisnak** nevezzük, ha minden b) alakú szabályában $u_1 = \varepsilon$.

A G lineáris grammatikát **jobb-lineárisnak** mondjuk, ha minden b) alakú szabályában $u_2 = \varepsilon$.

Megjegyzés: A jobb-lineáris grammatika egy másik elnevezés a reguláris (3-típusú) grammatikákra.

Példa:

1. $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$	lineáris, de nem bal- és nem jobblineáris
2. $S \rightarrow Saa \mid b$	bal-lineáris
3. $S \rightarrow aS \mid bbS \mid c$	jobb-lineáris

Lineáris grammatikák és nyelvek

Definíció

Egy L nyelvet lineárisnak, bal-lineárisnak, illetve jobb-lineárisnak mondunk, ha van olyan G lineáris, bal-lineáris, illetve jobb-lineáris grammatika, amelyre $L = L(G)$ teljesül.

Lineáris grammatikák és nyelvek

Definíció

Egy L nyelvet lineárisnak, bal-lineárisnak, illetve jobb-lineárisnak mondunk, ha van olyan G lineáris, bal-lineáris, illetve jobb-lineáris grammatika, amelyre $L = L(G)$ teljesül.

Megjegyzés: A jobb-lineáris nyelvek tehát azonosak a reguláris (3-típusú) nyelvekkel.

Lineáris grammatikák és nyelvek

Definíció

Egy L nyelvet lineárisnak, bal-lineárisnak, illetve jobb-lineárisnak mondunk, ha van olyan G lineáris, bal-lineáris, illetve jobb-lineáris grammatika, amelyre $L = L(G)$ teljesül.

Megjegyzés: A jobb-lineáris nyelvek tehát azonosak a reguláris (3-típusú) nyelvekkel.

Tétel

Minden bal-lineáris grammatika reguláris (3-típusú) nyelvet generál.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, T, P', S \rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, T, P', S\rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

1. $S \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$,

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, T, P', S \rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

1. $S \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$,
2. $S \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to u \in P$,

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, T, P', S \rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

1. $S \rightarrow u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \rightarrow u \in P$,
2. $S \rightarrow uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \rightarrow u \in P$,
3. $A_j \rightarrow uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \rightarrow A_j u \in P$,

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, T, P', S\rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

1. $S \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$,
2. $S \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to u \in P$,
3. $A_j \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to A_j u \in P$,
4. $A_j \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to A_j u \in P$.

($u \in T^*$ minden a 4 pontban)

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, T, P', S \rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

1. $S \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$,
2. $S \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to u \in P$,
3. $A_j \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to A_j u \in P$,
4. $A_j \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to A_j u \in P$.

($u \in T^*$ minden a 4 pontban)

Megmutatjuk, hogy $L(G) = L(G')$.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bal- és jobblineáris nyelvek

$L(G) \subseteq L(G')$:

Legyen $w \in L(G)$.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}}$$

Bal- és jobblineáris nyelvek

$L(G) \subseteq L(G')$**:**

Legyen $w \in L(G)$.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}}$$

1. eset Ha $S \to w \in P$, akkor $S \to w \in P'$, így $w \in L(G')$.

Bal- és jobblineáris nyelvek

$L(G) \subseteq L(G')$:

Legyen $w \in L(G)$.

$$\begin{array}{ccc} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}$$

1. eset Ha $S \to w \in P$, akkor $S \to w \in P'$, így $w \in L(G')$.

2. eset Egyébként w-hez van G-ben egy

$$S \Rightarrow A_{i_1} w_1 \Rightarrow A_{i_2} w_2 w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{i_{m-1}} w_{m-1} \cdots w_1 \Rightarrow w_m w_{m-1} \cdots w_1 = w$$

levezetés ($m \geq 2$).

Bal- és jobblineáris nyelvek

$L(G) \subseteq L(G')$:

Legyen $w \in L(G)$.

$$\begin{array}{ccc} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}$$

1. eset Ha $S \to w \in P$, akkor $S \to w \in P'$, így $w \in L(G')$.

2. eset Egyébként w-hez van G-ben egy

$$S \Rightarrow A_{i_1} w_1 \Rightarrow A_{i_2} w_2 w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{i_{m-1}} w_{m-1} \cdots w_1 \Rightarrow w_m w_{m-1} \cdots w_1 = w$$

levezetés ($m \geq 2$). Azonban ekkor G'-ben létezik egy

$$S \Rightarrow w_m A_{i_{m-1}} \Rightarrow w_m w_{m-1} A_{i_{m-2}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_m \cdots w_2 A_{i_1} \Rightarrow w_m \cdots w_1 = w$$

levezetés, azaz $w \in L(G')$.

Bal- és jobblineáris nyelvek

$$\begin{array}{ccc} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}$$

$L(G) \subseteq L(G')$:

Legyen $w \in L(G)$.

1. eset Ha $S \to w \in P$, akkor $S \to w \in P'$, így $w \in L(G')$.

2. eset Egyébként w-hez van G-ben egy

$$S \Rightarrow A_{i_1} w_1 \Rightarrow A_{i_2} w_2 w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{i_{m-1}} w_{m-1} \cdots w_1 \Rightarrow w_m w_{m-1} \cdots w_1 = w$$

levezetés ($m \geq 2$). Azonban ekkor G'-ben létezik egy

$$S \Rightarrow w_m A_{i_{m-1}} \Rightarrow w_m w_{m-1} A_{i_{m-2}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_m \cdots w_2 A_{i_1} \Rightarrow w_m \cdots w_1 = w$$

levezetés, azaz $w \in L(G')$.

$L(G') \subseteq L(G)$:

Következik a szimmetriából.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Példa:

$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Példa:

$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}.$

$$\begin{array}{ccc}
S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\
S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\
A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\
A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P.
\end{array}$$

Bal- és jobblineáris nyelvek

$$\begin{array}{ccc} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}$$

Példa:

$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

P	P'
$S \to \varepsilon$	$S \to \varepsilon$
$S \to A_1 b$	$A_1 \to b$
$S \to A_2 a$	$A_2 \to a$
$A_1 \to A_1 b$	$A_1 \to bA_1$
$A_1 \to A_2$	$A_2 \to A_1$
$A_2 \to A_2 a$	$A_2 \to aA_2$
$A_2 \to \varepsilon$	$S \to A_2$

Bal- és jobblineáris nyelvek

$$\begin{array}{|ccc|} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}$$

Példa:

$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}.$

P	P'
$S \to \varepsilon$	$S \to \varepsilon$
$S \to A_1 b$	$A_1 \to b$
$S \to A_2 a$	$A_2 \to a$
$A_1 \to A_1 b$	$A_1 \to bA_1$
$A_1 \to A_2$	$A_2 \to A_1$
$A_2 \to A_2 a$	$A_2 \to aA_2$
$A_2 \to \varepsilon$	$S \to A_2$

$S \Rightarrow A_1 b \Rightarrow A_2 b \Rightarrow A_2 ab \Rightarrow ab.$ $\quad$ $S \Rightarrow A_2 \Rightarrow aA_2 \Rightarrow aA_1 \Rightarrow ab.$

$\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

Állítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy G' bal-lineáris grammatikát, amely $L(G)$ tükörképét generálja.

$\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

Állítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy G' bal-lineáris grammatikát, amely $L(G)$ tükörképét generálja.

Bizonyítás: G'-ben vegyük a G-beli $A \to u$ és $A \to uB$ alakú szabályok helyett az $A \to u^{-1}$ illetve $A \to Bu^{-1}$ szabályokat ($A, B \in N, u \in T^*$).

$\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

Állítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy G' bal-lineáris grammatikát, amely $L(G)$ tükörképét generálja.

Bizonyítás: G'-ben vegyük a G-beli $A \to u$ és $A \to uB$ alakú szabályok helyett az $A \to u^{-1}$ illetve $A \to Bu^{-1}$ szabályokat ($A, B \in N, u \in T^*$).

Következmény:

1. $\mathcal{L}_3$ zárt a tükrözés (megfordítás) műveletére nézve.
2. Minden reguláris nyelv generálható bal-lineáris grammatikával.

$\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

Állítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy G' bal-lineáris grammatikát, amely $L(G)$ tükörképét generálja.

Bizonyítás: G'-ben vegyük a G-beli $A \to u$ és $A \to uB$ alakú szabályok helyett az $A \to u^{-1}$ illetve $A \to Bu^{-1}$ szabályokat $(A, B \in N, u \in T^*)$.

Következmény:

1. $\mathcal{L}_3$ zárt a tükrözés (megfordítás) műveletére nézve.
2. Minden reguláris nyelv generálható bal-lineáris grammatikával.

Bizonyítás:
1. Ha $L \in \mathcal{L}_3$, akkor az állítás miatt L^{-1} generálható egy bal-lineáris G grammatikával. Az előző tétel alapján $L^{-1} \in \mathcal{L}_3$.

$\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

Állítás: Minden $G = \langle N, T, P, S\rangle$ jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy G' bal-lineáris grammatikát, amely $L(G)$ tükörképét generálja.

Bizonyítás: G'-ben vegyük a G-beli $A \to u$ és $A \to uB$ alakú szabályok helyett az $A \to u^{-1}$ illetve $A \to Bu^{-1}$ szabályokat $(A, B \in N, u \in T^*)$.

Következmény:

1. $\mathcal{L}_3$ zárt a tükrözés (megfordítás) műveletére nézve.
2. Minden reguláris nyelv generálható bal-lineáris grammatikával.

Bizonyítás:
1. Ha $L \in \mathcal{L}_3$, akkor az állítás miatt L^{-1} generálható egy bal-lineáris G grammatikával. Az előző tétel alapján $L^{-1} \in \mathcal{L}_3$.
2. Ha $L \in \mathcal{L}_3$ előző tétel miatt $L^{-1} \in L_3$ is, azaz L^{-1} jobb-lineáris grammatikával generálható. Az állítás miatt $(L^{-1})^{-1} = L$ bal-lineáris grammatikával generálható.

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- $X \to aY$, $X, Y \in N, a \in T$ vagy
- $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- $X \to aY$, $X, Y \in N, a \in T$ vagy
- $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy

a) $A \to uB$ vagy
b) $A \to u$ alakúak ($A, B \in N, u \in T^*$).

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- $X \to aY$, $X, Y \in N, a \in T$ vagy
- $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy

a) $A \to uB$ vagy

b) $A \to u$ alakúak ($A, B \in N, u \in T^*$).

A G grammatikát a megfelelő alakra transzformáljuk, figyelve arra hogy az eredmény G-vel ekvivalens legyen.

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- $X \to aY$, $X, Y \in N, a \in T$ vagy
- $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy

a) $A \to uB$ vagy

b) $A \to u$ alakúak ($A, B \in N, u \in T^*$).

A G grammatikát a megfelelő alakra transzformáljuk, figyelve arra hogy az eredmény G-vel ekvivalens legyen.

A transzformáció lépései:

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- $X \to aY$, $X, Y \in N, a \in T$ vagy
- $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy

a) $A \to uB$ vagy

b) $A \to u$ alakúak ($A, B \in N, u \in T^*$).

A G grammatikát a megfelelő alakra transzformáljuk, figyelve arra hogy az eredmény G-vel ekvivalens legyen.

A transzformáció lépései:

1. lépés: Hosszredukció

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- $X \to aY$, $X, Y \in N, a \in T$ vagy
- $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy

a) $A \to uB$ vagy

b) $A \to u$ alakúak ($A, B \in N, u \in T^*$).

A G grammatikát a megfelelő alakra transzformáljuk, figyelve arra hogy az eredmény G-vel ekvivalens legyen.

A transzformáció lépései:

1. lépés: Hosszredukció

2. lépés: Láncmentesítés

3-típusú grammatikák normálformája

1. lépés: Hosszredukció

3-típusú grammatikák normálformája

1. lépés: Hosszredukció

a) típusú szabályok:

3-típusú grammatikák normálformája

1. lépés: Hosszredukció

a) típusú szabályok:

Ha $A \rightarrow uB \in P$ $(A, B \in N, u \in T^*)$, $|u| > 1$ és $u = a_1 \cdots a_n, n \geq 2$, akkor helyettesítsük az $A \rightarrow a_1 \cdots a_n B$ szabályt az $\{A \rightarrow a_1 Z_1, Z_1 \rightarrow a_2 Z_2, \dots Z_{n-1} \rightarrow a_n B\}$ szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok.

3-típusú grammatikák normálformája

1. lépés: Hosszredukció

a) típusú szabályok:

Ha $A \to uB \in P$ $(A, B \in N, u \in T^*)$, $|u| > 1$ és $u = a_1 \cdots a_n, n \geq 2$, akkor helyettesítsük az $A \to a_1 \cdots a_n B$ szabályt az $\{A \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \ldots Z_{n-1} \to a_n B\}$ szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok.

b) típusú szabályok:

Hasonlóan, Ha $A \to u \in P$ $(A \in N, u \in T^*)$, $|u| > 0$ és $u = a_1 \cdots a_m, m \geq 1$, akkor helyettesítsük az $A \to a_1 \cdots a_m$ szabályt az $\{A \to a_1 Y_1, Y_1 \to a_2 Y_2, \ldots Y_{m-1} \to a_n E, E \to \varepsilon\}$ szabályhalmazzal, ahol $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok. E szintén új nemterminális, de elég a b) típusú szabályok hosszredukciójához egy közös új ε szabály.

3-típusú grammatikák normálformája

1. lépés: Hosszredukció

a) típusú szabályok:

Ha $A \to uB \in P$ $(A, B \in N, u \in T^*)$, $|u| > 1$ és $u = a_1 \cdots a_n, n \geq 2$, akkor helyettesítsük az $A \to a_1 \cdots a_n B$ szabályt az $\{A \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \ldots Z_{n-1} \to a_n B\}$ szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok.

b) típusú szabályok:

Hasonlóan, Ha $A \to u \in P$ $(A \in N, u \in T^*)$, $|u| > 0$ és $u = a_1 \cdots a_m, m \geq 1$, akkor helyettesítsük az $A \to a_1 \cdots a_m$ szabályt az $\{A \to a_1 Y_1, Y_1 \to a_2 Y_2, \ldots Y_{m-1} \to a_n E, E \to \varepsilon\}$ szabályhalmazzal, ahol $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok. E szintén új nemterminális, de elég a b) típusú szabályok hosszredukciójához egy közös új ε szabály.

Az eddigi szavakat az átalakítás után is generálni lehet. Mivel az új nemterminálisok szabályonként egyediek, így nem lehetséges az eddigieken felül további szó generálása.

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \,|\, A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \,|\, A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \,|\, A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \,|\, A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \,|\, \exists C \in H_i(A)$ amelyre $C \to B \in P\}$.

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \,|\, A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \,|\, \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}$.

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \dots \subseteq H_k(A) \subseteq \dots \subseteq N$

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \,|\, A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \,|\, \exists C \in H_i(A)$ amelyre $C \to B \in P\}$.

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

$k := \min\{0 \leq i \leq n-1 \,|\, H_i(A) = H_{i+1}(A)\}$.

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}$.

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

$k := \min\{0 \leq i \leq n-1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}$.

$H(A) := H_k(A)$.

3-típusú grammatikák normálformája

2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott P_1 szabályhalmaz elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje P_0 a P_1-beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}$.

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

$k := \min\{0 \leq i \leq n-1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}$.

$H(A) := H_k(A)$.

$P' := \{A \to w \mid \exists B \in H(A), \text{ amelyre } B \to w \in P\} \setminus P_0$.

3-típusú grammatikák normálformája

Példa:

$S \to abS$

$S \to B$

$B \to bB$

$B \to V$

$V \to aa$

$V \to b$

3-típusú grammatikák normálformája

Példa:

$S \to abS$

$S \to B$

$B \to bB$

$B \to V$

$V \to aa$

$V \to b$

1. lépés: Hosszredukció

$S \to aZ_1$	$Z_1 \to bS$
$S \to B$	
$B \to bB$	
$B \to V$	
$V \to aZ_2$	$Z_2 \to aE$
$V \to bE$	$E \to \varepsilon$

3-típusú grammatikák normálformája

Példa:

$S \rightarrow abS$
$S \rightarrow B$
$B \rightarrow bB$
$B \rightarrow V$
$V \rightarrow aa$
$V \rightarrow b$

1. lépés: Hosszredukció

$S \rightarrow aZ_1$	$Z_1 \rightarrow bS$
$S \rightarrow B$	
$B \rightarrow bB$	
$B \rightarrow V$	
$V \rightarrow aZ_2$	$Z_2 \rightarrow aE$
$V \rightarrow bE$	$E \rightarrow \varepsilon$

2. lépés: Láncmentesítés

$S \rightarrow aZ_1$	$Z_1 \rightarrow bS$
$S \rightarrow B$	
$B \rightarrow bB$	
$B \rightarrow V$	
$V \rightarrow aZ_2$	$Z_2 \rightarrow aE$
$V \rightarrow bE$	$E \rightarrow \varepsilon$

3-típusú grammatikák normálformája

Példa:

$S \to abS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aa$
$V \to b$

1. lépés: Hosszredukció

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

2. lépés: Láncmentesítés

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

$H_0(X) = H_1(X) = H(X) = \{X\} \quad (X \in \{V, Z_1, Z_2, E\})$
$H_0(B) = \{B\}$, $H_1(B) = H_2(B) = H(B) = \{B, V\}$.
$H_0(S) = \{S\}$, $H_1(S) = \{S, B\}$, $H_2(S) = H_3(S) = H(S) = \{S, B, V\}$.

3-típusú grammatikák normálformája

Példa:

$S \to abS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aa$
$V \to b$

1. lépés: Hosszredukció

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

2. lépés: Láncmentesítés

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to bB$
$S \to aZ_2$ $\quad S \to bE$
$B \to bB$
$B \to aZ_2$ $\quad B \to bE$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

$H_0(X) = H_1(X) = H(X) = \{X\} \quad (X \in \{V, Z_1, Z_2, E\})$
$H_0(B) = \{B\}$, $H_1(B) = H_2(B) = H(B) = \{B, V\}$.
$H_0(S) = \{S\}$, $H_1(S) = \{S, B\}$, $H_2(S) = H_3(S) = H(S) = \{S, B, V\}$.

Reguláris kifejezések

Motiváció:

Vegyük észre, hogy minden véges nyelv reguláris. Tudjuk továbbá, hogy az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály (a reguláris nyelvek osztálya) zárt az unió, a konkatenáció és az iteratív lezárt műveletekre nézve.

Reguláris kifejezések

Motiváció:

Vegyük észre, hogy minden véges nyelv reguláris. Tudjuk továbbá, hogy az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály (a reguláris nyelvek osztálya) zárt az unió, a konkatenáció és az iteratív lezárt műveletekre nézve.

Következésképpen, kiindulva véges számú véges nyelvből és az előzőekben felsorolt, ún. reguláris műveleteket véges sokszor alkalmazva reguláris nyelvet kapunk.

Reguláris kifejezések

Motiváció:

Vegyük észre, hogy minden véges nyelv reguláris. Tudjuk továbbá, hogy az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály (a reguláris nyelvek osztálya) zárt az unió, a konkatenáció és az iteratív lezárt műveletekre nézve.

Következésképpen, kiindulva véges számú véges nyelvből és az előzőekben felsorolt, ún. reguláris műveleteket véges sokszor alkalmazva reguláris nyelvet kapunk.

Kérdés az, hogy vajon ezzel az eljárással minden reguláris nyelvet elő tudunk-e állítani, azaz, ez a módszer elégséges-e az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály leírására?

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,
2. ε reguláris kifejezés V felett,

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,
2. ε reguláris kifejezés V felett,
3. a reguláris kifejezés V felett, ha $a \in V$,

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,
2. ε reguláris kifejezés V felett,
3. a reguláris kifejezés V felett, ha $a \in V$,
4. Ha R reguláris kifejezés V felett, akkor R^* is reguláris kifejezés V felett,

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,
2. ε reguláris kifejezés V felett,
3. a reguláris kifejezés V felett, ha $a \in V$,
4. Ha R reguláris kifejezés V felett, akkor R^* is reguláris kifejezés V felett,
5. Ha Q és R reguláris kifejezések V felett, akkor $(Q \cdot R)$ is,

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,
2. ε reguláris kifejezés V felett,
3. a reguláris kifejezés V felett, ha $a \in V$,
4. Ha R reguláris kifejezés V felett, akkor R^* is reguláris kifejezés V felett,
5. Ha Q és R reguláris kifejezések V felett, akkor $(Q \cdot R)$ is,
6. Ha Q és R reguláris kifejezések V felett, akkor $(Q + R)$ is.

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,
5. $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések,

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,
5. $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések,
6. $L(Q + R) := L(Q) \cup L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések.

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,
5. $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések,
6. $L(Q + R) := L(Q) \cup L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések.

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,
5. $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések,
6. $L(Q + R) := L(Q) \cup L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések.

Azaz a $*$, $\cdot$ és $+$ szimbólumok jelölik rendre a lezárt, a konkatenáció és az unió műveleteket jelölik.

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,
5. $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések,
6. $L(Q + R) := L(Q) \cup L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések.

Azaz a $*, \cdot$ és $+$ szimbólumok jelölik rendre a lezárt, a konkatenáció és az unió műveleteket jelölik.

Megjegyzés: $(Q + R)$ helyett használatosak még a $(Q \,|\, R)$ illetve a $(Q \cup R)$ jelölések is.

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
5. $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
5. $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$
6. $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
5. $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$
6. $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$
7. $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
5. $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$
6. $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$
7. $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$
8. $P^* = (\varepsilon + P)^*$

Reguláris kifejezések

R-et és $L(R)$-et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
5. $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$
6. $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$
7. $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$
8. $P^* = (\varepsilon + P)^*$
9. $P \cdot \emptyset = \emptyset \cdot P = \emptyset$

Reguláris kifejezések

A műveletek precedenciasorrendje $*, \cdot, +$, ennek és az asszociatív szabályok figyelembevételével bizonyos zárójelpárok elhagyhatók.

Reguláris kifejezések

A műveletek precedenciasorrendje $*, \cdot, +$, ennek és az asszociatív szabályok figyelembevételével bizonyos zárójelpárok elhagyhatók.

Példa:

Az $(a + b)a^*$ és $aa^* + ba^*$ reguláris kifejezések által leírt nyelv ugyanaz: $\{aa^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Reguláris kifejezések

A műveletek precedenciasorrendje $*, \cdot, +$, ennek és az asszociatív szabályok figyelembevételével bizonyos zárójelpárok elhagyhatók.

Példa:

Az $(a+b)a^*$ és $aa^* + ba^*$ reguláris kifejezések által leírt nyelv ugyanaz: $\{aa^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Viszont $(a+b)a^* \neq a + ba^*$, hiszen az utóbbi által leírt nyelv $\{a, b, ba, ba^2, ba^3, \ldots\}$.

Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. A $P = R + P \cdot Q$ egyenletnek P-re vonatkozó megoldása $P = R \cdot Q^*$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. A $P = R + P \cdot Q$ egyenletnek P-re vonatkozó megoldása $P = R \cdot Q^*$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Példa: A $P = ab^* + Pbc^*$ egyenlet egyértelmű megoldása $P = ab^*(bc^*)^*$.

Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. A $P = R + P \cdot Q$ egyenletnek P-re vonatkozó megoldása $P = R \cdot Q^*$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Példa: A $P = ab^* + Pbc^*$ egyenlet egyértelmű megoldása $P = ab^*(bc^*)^*$.

Bizonyítás:
(1) $P = R \cdot Q^*$ megoldás:

Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. A $P = R + P \cdot Q$ egyenletnek P-re vonatkozó megoldása $P = R \cdot Q^*$. Amennyiben $\varepsilon \notin Q$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Példa: A $P = ab^* + Pbc^*$ egyenlet egyértelmű megoldása $P = ab^*(bc^*)^*$.

Bizonyítás:
(1) $P = R \cdot Q^*$ megoldás:

$$R + P \cdot Q = R + (R \cdot Q^*) \cdot Q = R + R \cdot (Q \cdot Q^*) = R \cdot (\varepsilon + Q \cdot Q^*) = R \cdot Q^* = P.$$

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \cdots =$
$R + RQ + \cdots RQ^n + PQ^{n+1}$, ahol n tetszőleges nagy lehet,

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \cdots =$ $R + RQ + \cdots RQ^n + PQ^{n+1}$, ahol n tetszőleges nagy lehet, azaz

$$P = R(\varepsilon + Q + \cdots Q^n) + PQ^{n+1}. \qquad (*)$$

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \cdots = R + RQ + \cdots RQ^n + PQ^{n+1}$, ahol n tetszőleges nagy lehet, azaz

$$P = R(\varepsilon + Q + \cdots Q^n) + PQ^{n+1}. \qquad (*)$$

Legyen $w \in P$ és $n = |w|$ az előző (*) képletben. Mivel $\varepsilon \notin Q$ ezért $w \notin PQ^{n+1}$ (minden szava legalább $n + 1$ hosszú), tehát $w \in R(\varepsilon + Q + \ldots + Q^n) \subseteq RQ^*$.

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \cdots =$ $R + RQ + \cdots RQ^n + PQ^{n+1}$, ahol n tetszőleges nagy lehet, azaz

$$P = R(\varepsilon + Q + \cdots Q^n) + PQ^{n+1}. \qquad (*)$$

Legyen $w \in P$ és $n = |w|$ az előző (*) képletben. Mivel $\varepsilon \notin Q$ ezért $w \notin PQ^{n+1}$ (minden szava legalább $n + 1$ hosszú), tehát $w \in R(\varepsilon + Q + \ldots + Q^n) \subseteq RQ^*$.

Fordítva, ha $w \in RQ^*$, akkor $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $w \in RQ^n$, azaz benne van (*) jobboldalában, azaz P-ben is.

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \cdots =$ $R + RQ + \cdots RQ^n + PQ^{n+1}$, ahol n tetszőleges nagy lehet, azaz

$$P = R(\varepsilon + Q + \cdots Q^n) + PQ^{n+1}. \qquad (*)$$

Legyen $w \in P$ és $n = |w|$ az előző (*) képletben. Mivel $\varepsilon \notin Q$ ezért $w \notin PQ^{n+1}$ (minden szava legalább $n+1$ hosszú), tehát $w \in R(\varepsilon + Q + \ldots + Q^n) \subseteq RQ^*$.

Fordítva, ha $w \in RQ^*$, akkor $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $w \in RQ^n$, azaz benne van (*) jobboldalában, azaz P-ben is.

Tehát csak $P = R \cdot Q^*$ lehetséges.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Tétel

Minden reguláris kifejezés egy reguláris (3-típusú) nyelvet jelöl, és megfordítva, minden reguláris nyelvhez megadható egy, ezen nyelvet jelölő reguláris kifejezés.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Tétel

Minden reguláris kifejezés egy reguláris (3-típusú) nyelvet jelöl, és megfordítva, minden reguláris nyelvhez megadható egy, ezen nyelvet jelölő reguláris kifejezés.

Bizonyítás:

1. Az, hogy reguláris kifejezések csak reguláris nyelvet jelölhetnek következik az $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{a\}$ $(a \in V)$ nyelvek reguláris voltából és $\mathcal{L}_3$ reguláris műveletekre való zártságából.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Tétel

Minden reguláris kifejezés egy reguláris (3-típusú) nyelvet jelöl, és megfordítva, minden reguláris nyelvhez megadható egy, ezen nyelvet jelölő reguláris kifejezés.

Bizonyítás:

1. Az, hogy reguláris kifejezések csak reguláris nyelvet jelölhetnek következik az $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{a\}$ $(a \in V)$ nyelvek reguláris voltából és $\mathcal{L}_3$ reguláris műveletekre való zártságából.

2. Megmutatjuk, hogy minden L reguláris nyelvhez, amelyet a $G = \langle N, T, P, S \rangle$ normálformában adott reguláris grammatika generál, meg tudunk konstruálni egy reguláris kifejezést, amely az L nyelvet jelöli.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T, 1 \leq i, j \leq n$.)

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T, 1 \leq i, j \leq n$.)

Azt mondjuk, hogy az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ $(u \in T^*)$ levezetés **érinti** az A_m nemterminálist, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetésben.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T, 1 \leq i, j \leq n$.)

Azt mondjuk, hogy az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ ($u \in T^*$) levezetés **érinti** az A_m nemterminálist, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetésben.

Az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetést **ℓ-megszorítottnak** nevezzük, ha $1 \leq m \leq \ell$ teljesül minden A_m nemterminálisra, amelyet a levezetés érint.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T, 1 \leq i, j \leq n$.)

Azt mondjuk, hogy az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ $(u \in T^*)$ levezetés **érinti** az A_m nemterminálist, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetésben.

Az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetést **ℓ-megszorítottnak** nevezzük, ha $1 \leq m \leq \ell$ teljesül minden A_m nemterminálisra, amelyet a levezetés érint.

Definiáljuk a következő halmazokat $0 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n$-re:

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T, 1 \leq i, j \leq n$.)

Azt mondjuk, hogy az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ ($u \in T^*$) levezetés **érinti** az A_m nemterminálist, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetésben.

Az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetést **ℓ-megszorítottnak** nevezzük, ha $1 \leq m \leq \ell$ teljesül minden A_m nemterminálisra, amelyet a levezetés érint.

Definiáljuk a következő halmazokat $0 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n$-re:

$$E_{i,j}^k = \{u \in T^* \,|\, \text{létezik } A_i \Rightarrow^* uA_j \ k\text{-megszorított levezetés}\}.$$

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T, 1 \leq i, j \leq n$.)

Azt mondjuk, hogy az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ ($u \in T^*$) levezetés **érinti** az A_m nemterminálist, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetésben.

Az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetést **ℓ-megszorítottnak** nevezzük, ha $1 \leq m \leq \ell$ teljesül minden A_m nemterminálisra, amelyet a levezetés érint.

Definiáljuk a következő halmazokat $0 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n$-re:

$$E_{i,j}^k = \{u \in T^* \,|\, \text{létezik } A_i \Rightarrow^* uA_j \text{ } k\text{-megszorított levezetés}\}.$$

Az $i \neq j$ esetben az $E_{i,j}^0$ halmaz vagy üres vagy T-beli betűkből áll: $a \in E_{i,j}^0$, akkor és csak akkor, ha $A_i \to aA_j \in P$.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \to aA_i \in P$).

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \to aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ reguláris kifejezéssel jelölhető.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \to aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ reguláris kifejezéssel jelölhető.

Tegyük fel, hogy rögzített k-ra $(0 < k \leq n)$, az $E^{k-1}_{i,j}$ nyelvek mindegyike jelölhető reguláris kifejezéssel.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \to aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ reguláris kifejezéssel jelölhető.

Tegyük fel, hogy rögzített k-ra $(0 < k \leq n)$, az $E^{k-1}_{i,j}$ nyelvek mindegyike jelölhető reguláris kifejezéssel.

Nyilvánvaló, hogy

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \rightarrow aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ reguláris kifejezéssel jelölhető.

Tegyük fel, hogy rögzített k-ra ($0 < k \leq n$), az $E^{k-1}_{i,j}$ nyelvek mindegyike jelölhető reguláris kifejezéssel.

Nyilvánvaló, hogy

$$E^k_{i,j} = E^{k-1}_{i,j} + E^{k-1}_{i,k} \cdot (E^{k-1}_{k,k})^* \cdot E^{k-1}_{k,j}$$

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \to aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ reguláris kifejezéssel jelölhető.

Tegyük fel, hogy rögzített k-ra ($0 < k \leq n$), az $E^{k-1}_{i,j}$ nyelvek mindegyike jelölhető reguláris kifejezéssel.

Nyilvánvaló, hogy

$$E^k_{i,j} = E^{k-1}_{i,j} + E^{k-1}_{i,k} \cdot (E^{k-1}_{k,k})^* \cdot E^{k-1}_{k,j}$$

ezért az indukciós hipotézis alapján $E^k_{i,j}$ szintén jelölhető reguláris kifejezéssel.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét T-nek (ha $A_i \to aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ reguláris kifejezéssel jelölhető.

Tegyük fel, hogy rögzített k-ra ($0 < k \leq n$), az $E^{k-1}_{i,j}$ nyelvek mindegyike jelölhető reguláris kifejezéssel.

Nyilvánvaló, hogy

$$E^k_{i,j} = E^{k-1}_{i,j} + E^{k-1}_{i,k} \cdot (E^{k-1}_{k,k})^* \cdot E^{k-1}_{k,j}$$

ezért az indukciós hipotézis alapján $E^k_{i,j}$ szintén jelölhető reguláris kifejezéssel.

Legyen I_ε azon i indexek halmaza, amelyekre $A_i \to \varepsilon \in P$. Akkor $L(G) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} E^n_{1,i}$, azaz L reguláris kifejezéssel jelölhető.

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

$R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*.$

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

$R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*.$

$R_1 :\ A \rightarrow a$

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

$R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*.$

$R_1 :\ A \to a$

$R_2 :\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$ (kezdőszimbólum: B)

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

$R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*.$

$R_1 :\ A \to a$

$R_2 :\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$ (kezdőszimbólum: B)

$R_3 :\ D \to A \,|\, B,\ A \to a,\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$
(kezdőszimbólum: D)

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

$R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*.$

$R_1 :\ A \rightarrow a$

$R_2 :\ B \rightarrow bC,\ C \rightarrow aC \,|\, \varepsilon$ (kezdőszimbólum: B)

$R_3 :\ D \rightarrow A \,|\, B,\ A \rightarrow a,\ B \rightarrow bC,\ C \rightarrow aC \,|\, \varepsilon$
(kezdőszimbólum: D)

$R_4 :\ X \rightarrow D \,|\, \varepsilon,\ D \rightarrow A \,|\, B,\ A \rightarrow a \,|\, aD,\ B \rightarrow bC,\ C \rightarrow aC \,|\, \varepsilon \,|\, D$
(kezdőszimbólum: X)

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-as grammatikát R-hez!

$R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*.$

$R_1 :\ A \to a$

$R_2 :\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$ (kezdőszimbólum: B)

$R_3 :\ D \to A \,|\, B,\ A \to a,\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$
(kezdőszimbólum: D)

$R_4 :\ X \to D \,|\, \varepsilon,\ D \to A \,|\, B,\ A \to a \,|\, aD,\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon \,|\, D$
(kezdőszimbólum: X)

$R :\ S \to aX, X \to D \,|\, \varepsilon,\ D \to A \,|\, B,\ A \to a \,|\, aD,\ B \to bC,$
$C \to aC \,|\, \varepsilon \,|\, D$ (kezdőszimbólum: S)

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \rightarrow bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \rightarrow bA_1 \mid \varepsilon$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \to bA_1 \mid \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon + b$	a
$i=2$	b	ε

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \to bA_1 \mid \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	$\varepsilon + b$	a
$i = 2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	b^*	b^*a
$i = 2$	b^+	$\varepsilon + b^+a$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \to bA_1 \mid \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon + b$	a
$i=2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon + b^+a$

$E^2_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^* + b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \,|\, aA_2$

$A_2 \to bA_1 \,|\, \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon + b$	a
$i=2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon + b^+a$

$E^2_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^* + b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Például:

$$E^2_{12} = E^1_{12} + E^1_{12}(E^1_{22})^*E^1_{22} =$$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \rightarrow bA_1 \,|\, aA_2$

$A_2 \rightarrow bA_1 \,|\, \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon+b$	a
$i=2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon+b^+a$

$E^2_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^*+b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Például:

$E^2_{12} = E^1_{12} + E^1_{12}(E^1_{22})^*E^1_{22} =$

$b^*a + b^*a(\varepsilon+b^+a)^*(\varepsilon+b^+a) =$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \,|\, aA_2$

$A_2 \to bA_1 \,|\, \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon+b$	a
$i=2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon+b^+a$

$E^2_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^*+b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Például:

$$E^2_{12} = E^1_{12} + E^1_{12}(E^1_{22})^*E^1_{22} =$$

$$b^*a + b^*a(\varepsilon + b^+a)^*(\varepsilon + b^+a) = \; b^*a + b^*a(b^+a)^* =$$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \to bA_1 \mid \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon+b$	a
$i=2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon+b^+a$

$E^2_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^*+b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Például:

$$E^2_{12} = E^1_{12} + E^1_{12}(E^1_{22})^*E^1_{22} =$$

$$b^*a+b^*a(\varepsilon+b^+a)^*(\varepsilon+b^+a) = b^*a+b^*a(b^+a)^* = b^*a(b^+a)^*.$$

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$A_1 \to bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \to bA_1 \mid \varepsilon$

$E^0_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon+b$	a
$i=2$	b	ε

$E^1_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon+b^+a$

$E^2_{i,j}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^*+b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Például:

$E^2_{12} = E^1_{12} + E^1_{12}(E^1_{22})^*E^1_{22} =$

$b^*a + b^*a(\varepsilon+b^+a)^*(\varepsilon+b^+a) = b^*a + b^*a(b^+a)^* = b^*a(b^+a)^*.$

$L(G) = E^2_{12} = b^*a(b^+a)^*.$