A számításelmélet alapjai I.

1. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Irodalom

- Révész György, Bevezetés a formális nyelvek elméletébe, Tankönyvkiadó, 1977.
- Bach Iván: Formális nyelvek, Typotex, 2001.
- Fülöp Zoltán, Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük, Polygon, Szeged, 2004.
- Hunyadvári László, Manhertz Tamás, Automaták és formális nyelvek, Elektronikus előadásjegyzet, 2006.
- Csima Judit, Friedl Katalin: Nyelvek és automaták, BMGE jegyzet, 2013.
- A. Salomaa, Formal Languages, Academic Press, 1973.
- J. E. Hopcroft, Rajeev Motwani, J.D. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. Second Edition. Addison-Wesley, 2001.
- M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation, 2nd ed., Thomson, 2006.

Miről fogunk tanulni?

- Alapfogalmak és jelölések, szavak, nyelvek, grammatikák, a grammatikák Chomsky-féle hierarchiája.
- Műveletek nyelveken: definíciók, Chomsky-féle nyelvosztályok bizonyos zártsági tulajdonságai.
- Reguláris grammatikák, reguláris nyelvek, reguláris kifejezések. Tulajdonságaik.
- Környezetfüggetlen grammatikák és nyelvek: redukált grammatikák, normálformák, levezetési fa.
- Környezetfüggő- és mondatszerkezetű grammatikák: hossznemcsökkentő grammatikák, normálformák. A generált nyelvek és nyelvosztályok tulajdonságai.
- Automaták és nyelvek: véges automaták, veremautomaták. Az automaták tulajdonságai, a felismert nyelvosztályok, az automaták és a grammatikák kapcsolatai.
- Szintaktikai elemzés: kapcsolat szintaxis és szemantika között; környezetfüggetlen grammatikák és nyelvek egyértelműsége; LL(k) és LR(k) grammatikák.

Hol használják a formális nyelveket?

- A természetes nyelvek gépi feldolgozása, matematikai modellezése, matematikai nyelvészet,
- programozási nyelvek, fordítóprogramok elmélete,
- kódelmélet,
- képfeldolgozás,
- mintafelismerés,
- biológiai folyamatok modellezése (pl. Lindenmayer rendszerek),
- természet által inspirált új számítási modellek

Alapfogalmak, jelölések

ábécé, betű, szó, szó hossza

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.

Alapfogalmak, jelölések

ábécé, betű, szó, szó hossza

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betűk**nek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$.
A 0 hosszú sorozat jelölése ε, ezt **üres szónak** nevezzük ($|\varepsilon| = 0$).

Alapfogalmak, jelölések

ábécé, betű, szó, szó hossza

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betűk**nek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$. A 0 hosszú sorozat jelölése ε, ezt **üres szónak** nevezzük ($|\varepsilon| = 0$).

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, ekkor a és b a V ábécé két betűje. *abba* és *aabba* egy-egy V feletti szó. $|aabba| = 5$. *aabba* és *baaba* különböző szavak, bár mindkettő 5 hosszú valamint 3 a-t és 2 b-t tartalmaz. A betűk sorrendje számít!

Alapfogalmak, jelölések

az összes szavak halmaza

V^* jelöli a V **ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

Alapfogalmak, jelölések

az összes szavak halmaza

V^* jelöli a V **ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ a V **ábécé feletti, nemüres szavak halmazát** jelöli.

Alapfogalmak, jelölések

az összes szavak halmaza

V^* jelöli a V **ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ a V **ábécé feletti, nemüres szavak halmazát** jelöli.

Példa: $V = \{a, b\}$, ekkor
$V^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$.

Alapfogalmak, jelölések

az összes szavak halmaza

V^* jelöli a V **ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ a V **ábécé feletti, nemüres szavak halmazát** jelöli.

Példa: $V = \{a, b\}$, ekkor
$V^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$.

V^* szavainak egy lehetséges felsorolása a **hosszlexikografikus (shortlex) rendezés** szerinti:

- Feltesszük, hogy az ábécé rendezett. (A fenti példában, mondjuk a előbb van, mint b.)
- A rövidebb szó mindig megelőzi a hosszabbat.
- Az azonos hosszúságú szavak az ábécé rendezettsége alapján meghatározott ábécésorrendben követik egymást.

Alapfogalmak, jelölések

az összes szavak halmaza

V^* jelöli a V **ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ a V **ábécé feletti, nemüres szavak halmazát** jelöli.

Példa: $V = \{a, b\}$, ekkor
$V^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$.

V^* szavainak egy lehetséges felsorolása a **hosszlexikografikus (shortlex) rendezés** szerinti:

- Feltesszük, hogy az ábécé rendezett. (A fenti példában, mondjuk a előbb van, mint b.)
- A rövidebb szó mindig megelőzi a hosszabbat.
- Az azonos hosszúságú szavak az ábécé rendezettsége alapján meghatározott ábécésorrendben követik egymást.

Ez a rendezés egyértelműen meghatározza a szavak sorrendjét.

Műveletek szavakon

konkatenáció

Legyen V egy ábécé továbbá legyenek $u = s_1 \cdots s_n$ és $v = t_1 \cdots t_k$ V feletti szavak (azaz legyen $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_k \in V$). Ekkor az $uv := s_1 \cdots s_n t_1 \cdots t_k$ szót az u és v szavak **konkatenáltjának** nevezzük. (Az u szó betűi után írjuk a v szó betűit.)

Műveletek szavakon

konkatenáció

Legyen V egy ábécé továbbá legyenek $u = s_1 \cdots s_n$ és $v = t_1 \cdots t_k$ V feletti szavak (azaz legyen $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_k \in V$). Ekkor az $uv := s_1 \cdots s_n t_1 \cdots t_k$ szót az u és v szavak **konkatenáltjának** nevezzük. (Az u szó betűi után írjuk a v szó betűit.)

Nyilván $|uv| = |u| + |v|$.

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abb$ és $v = aaaba$ egy-egy V feletti szó. Ekkor $uv = abbaaaba$ illetve $vu = aaabaabb$.

Műveletek szavakon

konkatenáció

A konkatenáció mint művelet asszociatív, de **általában nem kommutatív**.

Műveletek szavakon

konkatenáció

A konkatenáció mint művelet asszociatív, de **általában nem kommutatív**.

- Ha $u, v \in V^*$, akkor uv általában eltér vu-tól
  (Megjegyzés: unáris (egyetlen betűből álló) ábécé esetén persze fennáll a kommutativitás, de ez nagyon speciális eset.)

Műveletek szavakon

konkatenáció

A konkatenáció mint művelet asszociatív, de **általában nem kommutatív**.

- Ha $u, v \in V^*$, akkor uv általában eltér vu-tól (Megjegyzés: unáris (egyetlen betűből álló) ábécé esetén persze fennáll a kommutativitás, de ez nagyon speciális eset.)
- Ha $u, v, w \in V^*$, akkor $u(vw) = (uv)w$ (asszociativitás).

Műveletek szavakon

konkatenáció

A konkatenáció mint művelet asszociatív, de **általában nem kommutatív**.

- Ha $u, v \in V^*$, akkor uv általában eltér vu-tól
  (Megjegyzés: unáris (egyetlen betűből álló) ábécé esetén persze fennáll a kommutativitás, de ez nagyon speciális eset.)

- Ha $u, v, w \in V^*$, akkor $u(vw) = (uv)w$ (asszociativitás).

V^* a konkatenáció műveletére nézve zárt (azaz bármely $u, v \in V^*$ esetén $uv \in V^*$ teljesül).

Műveletek szavakon

konkatenáció

A konkatenáció mint művelet asszociatív, de **általában nem kommutatív**.

- Ha $u, v \in V^*$, akkor uv általában eltér vu-tól
  (Megjegyzés: unáris (egyetlen betűből álló) ábécé esetén persze fennáll a kommutativitás, de ez nagyon speciális eset.)

- Ha $u, v, w \in V^*$, akkor $u(vw) = (uv)w$ (asszociativitás).

V^* a konkatenáció műveletére nézve zárt (azaz bármely $u, v \in V^*$ esetén $uv \in V^*$ teljesül).

A konkatenáció egységelemes művelet, az egységelem ε (azaz bármely $u \in V^*$ esetén $u = u\varepsilon = \varepsilon u$).

Műveletek szavakon

i-edik hatvány

Legyen i nemnegatív egész szám és legyen u egy V ábécé feletti szó ($u \in V^*$). Az u szó **i-edik hatványa** alatt az u szó i darab példányának konkatenáltját értjük és u^i -vel jelöljük.

Műveletek szavakon

i-edik hatvány

Legyen i nemnegatív egész szám és legyen u egy V ábécé feletti szó ($u \in V^*$). Az u szó **i-edik hatványa** alatt az u szó i darab példányának konkatenáltját értjük és u^i -vel jelöljük.

Konvenció szerint $u^0 := \varepsilon$. Ekkor $u^{n+k} = u^n u^k$ teljesül ($k, n \in \mathbb{N}$)

Műveletek szavakon

i-edik hatvány

Legyen i nemnegatív egész szám és legyen u egy V ábécé feletti szó ($u \in V^*$). Az u szó **i-edik hatványa** alatt az u szó i darab példányának konkatenáltját értjük és u^i -vel jelöljük.

Konvenció szerint $u^0 := \varepsilon$. Ekkor $u^{n+k} = u^n u^k$ teljesül ($k, n \in \mathbb{N}$)

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$ és legyen $u = abb$. Ekkor $u^0 = \varepsilon$, $u^1 = abb$, $u^2 = abbabb$ és $u^3 = abbabbabb$.

Műveletek szavakon

i-edik hatvány

Legyen i nemnegatív egész szám és legyen u egy V ábécé feletti szó ($u \in V^*$). Az u szó ***i*-edik hatványa** alatt az u szó i darab példányának konkatenáltját értjük és u^i -vel jelöljük.

Konvenció szerint $u^0 := \varepsilon$. Ekkor $u^{n+k} = u^n u^k$ teljesül ($k, n \in \mathbb{N}$)

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$ és legyen $u = abb$. Ekkor $u^0 = \varepsilon$, $u^1 = abb$, $u^2 = abbabb$ és $u^3 = abbabbabb$.

$(ab)^3 \neq a^3 b^3$ **! ! ! !**

$(ab)^3 = ababab, \quad a^3 b^3 = aaabbb.$

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Ha $u = u^{-1}$, akkor u-t **palindrom** tulajdonságúnak, vagy palindrómának nevezzük.

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Ha $u = u^{-1}$, akkor u-t **palindrom** tulajdonságúnak, vagy palindrómának nevezzük.

Tehát *abba* egy palindróma.

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Ha $u = u^{-1}$, akkor u-t **palindrom** tulajdonságúnak, vagy palindrómának nevezzük.

Tehát *abba* egy palindróma.

Az alábbi tulajdonságok könnyen meggondolhatóak:

- $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Ha $u = u^{-1}$, akkor u-t **palindrom** tulajdonságúnak, vagy palindrómának nevezzük.

Tehát *abba* egy palindróma.

Az alábbi tulajdonságok könnyen meggondolhatóak:

- $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$
- $(u^{-1})^{-1} = u$

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Ha $u = u^{-1}$, akkor u-t **palindrom** tulajdonságúnak, vagy palindrómának nevezzük.

Tehát *abba* egy palindróma.

Az alábbi tulajdonságok könnyen meggondolhatóak:

- $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$
- $(u^{-1})^{-1} = u$
- $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$

Műveletek szavakon

tükörkép

Legyen u egy V ábécé feletti szó. Az u szó u^{-1}-gyel jelölt **tükörképén** vagy fordítottján azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy u betűit fordított sorrendben írjuk le.
Azaz ha $u = a_1 \cdots a_n,\ a_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$, akkor $u^{-1} = a_n \cdots a_1$.

Példa:
Legyen $V = \{a, b\}$, valamint $u = abba$ és $v = baabba$ egy-egy V ábécé feletti szó. Ekkor $u^{-1} = abba$ és $v^{-1} = abbaab$.

Ha $u = u^{-1}$, akkor u-t **palindrom** tulajdonságúnak, vagy palindrómának nevezzük.

Tehát *abba* egy palindróma.

Az alábbi tulajdonságok könnyen meggondolhatóak:

- $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$
- $(u^{-1})^{-1} = u$
- $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$
- $(u^i)^{-1} = (u^{-1})^i$, minden $i \in \mathbb{N}$-re.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Legyenek u és v V ábécé feletti szavak. u és v szót azonosnak mondjuk, ha mint szimbólumsorozatok elemről-elemre rendre megegyeznek. (Tehát $abb \neq bab$!!!)

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Legyenek u és v V ábécé feletti szavak. u és v szót azonosnak mondjuk, ha mint szimbólumsorozatok elemről-elemre rendre megegyeznek. (Tehát $abb \neq bab$!!!)

Legyen V egy ábécé és legyenek u és v szavak V felett. Az u szó a v szó **részszava**, ha $v = xuy$ teljesül, valamely $x, y \in V^*$ szavakra. Az u szó a v szó **valódi részszava**, ha $u \neq v$ és $u \neq \varepsilon$.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Legyenek u és v V ábécé feletti szavak. u és v szót azonosnak mondjuk, ha mint szimbólumsorozatok elemről-elemre rendre megegyeznek. (Tehát $abb \neq bab$!!!)

Legyen V egy ábécé és legyenek u és v szavak V felett. Az u szó a v szó **részszava**, ha $v = xuy$ teljesül, valamely $x, y \in V^*$ szavakra. Az u szó a v szó **valódi részszava**, ha $u \neq v$ és $u \neq \varepsilon$.

Ha $x = \varepsilon$, akkor u-t a v szó **prefixének** (kezdőszeletének), ha pedig $y = \varepsilon$, akkor u-t a v szó **suffixének** (utótagjának, végszeletének) nevezzük.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai:

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai:

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei:

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei: $\varepsilon, a, ab, abb, abba$.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei: $\varepsilon, a, ab, abb, abba$.

u suffixei:

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei: $\varepsilon, a, ab, abb, abba$.

u suffixei: $\varepsilon, a, ba, bba, abba$.

u valódi prefixei:

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei: $\varepsilon, a, ab, abb, abba$.

u suffixei: $\varepsilon, a, ba, bba, abba$.

u valódi prefixei: a, ab, abb.

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei: $\varepsilon, a, ab, abb, abba$.

u suffixei: $\varepsilon, a, ba, bba, abba$.

u valódi prefixei: a, ab, abb.

u valódi suffixei:

Alapfogalmak, jelölések

részszó, prefix, suffix

Példa:

Legyen $V = \{a, b\}$ és $u = abba$.

u részszavai: $\varepsilon, a, b, ab, bb, ba, abb, bba, abba$.

u valódi részszavai: $a, b, ab, bb, ba, abb, bba$.

u prefixei: $\varepsilon, a, ab, abb, abba$.

u suffixei: $\varepsilon, a, ba, bba, abba$.

u valódi prefixei: a, ab, abb.

u valódi suffixei: a, ba, bba.

***abb* nem suffixe *u*-nak!!!** A suffix nem a tükörkép szó prefixe!!!

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$.
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in V^*\}$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$.
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in V^*\}$.
- $L_4 = \{a^n \mid n \geq 1\}$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.
- $L_2 = \{a^i b^i \,|\, i \geq 0\}$.
- $L_3 = \{uu^{-1} \,|\, u \in V^*\}$.
- $L_4 = \{a^n \,|\, n \geq 1\}$.
- $L_5 = \{u \,|\, u \in \{a, b\}^+, u\text{-ban ugyanannyi } a \text{ van, mint } b\}$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.
- $L_2 = \{a^i b^i \,|\, i \geq 0\}$.
- $L_3 = \{uu^{-1} \,|\, u \in V^*\}$.
- $L_4 = \{a^n \,|\, n \geq 1\}$.
- $L_5 = \{u \,|\, u \in \{a, b\}^+, u\text{-ban ugyanannyi } a \text{ van, mint } b\}$.

Alapfogalmak, jelölések

nyelv

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.
Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.
Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Példák:
Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé.

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$.
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$.
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in V^*\}$.
- $L_4 = \{a^n \mid n \geq 1\}$.
- $L_5 = \{u \mid u \in \{a, b\}^+, u\text{-ban ugyanannyi } a \text{ van, mint } b\}$.

L_1 véges nyelv, a többi végtelen.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

$L_1 \cup L_2 = \{u \,|\, u \in L_1 \text{ vagy } u \in L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **uniója**)

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

$L_1 \cup L_2 = \{u \,|\, u \in L_1 \text{ vagy } u \in L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **uniója**)

$L_1 \cap L_2 = \{u \,|\, u \in L_1 \text{ és } u \in L_2\}$ (az L_1 és L_2 nyelv **metszete**)

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

$L_1 \cup L_2 = \{u \,|\, u \in L_1 \text{ vagy } u \in L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **uniója**)

$L_1 \cap L_2 = \{u \,|\, u \in L_1 \text{ és } u \in L_2\}$ (az L_1 és L_2 nyelv **metszete**)

$L_1 - L_2 = \{u \,|\, u \in L_1 \text{ és } u \notin L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **különbsége**)

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

$L_1 \cup L_2 = \{u \mid u \in L_1 \text{ vagy } u \in L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **uniója**)

$L_1 \cap L_2 = \{u \mid u \in L_1 \text{ és } u \in L_2\}$ (az L_1 és L_2 nyelv **metszete**)

$L_1 - L_2 = \{u \mid u \in L_1 \text{ és } u \notin L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **különbsége**)

Példák:

$L_1 = \{\varepsilon, ab, abb\}, L_2 = \{ab, bab\}$. Ekkor

$L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, ab, abb, bab\}$,

$L_1 \cap L_2 = \{ab\}$,

$L_1 - L_2 = \{\varepsilon, abb\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

$L_1 \cup L_2 = \{u \,|\, u \in L_1$ vagy $u \in L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **uniója**)

$L_1 \cap L_2 = \{u \,|\, u \in L_1$ és $u \in L_2\}$ (az L_1 és L_2 nyelv **metszete**)

$L_1 - L_2 = \{u \,|\, u \in L_1$ és $u \notin L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **különbsége**)

Példák:

$L_1 = \{\varepsilon, ab, abb\}, L_2 = \{ab, bab\}$. Ekkor
$L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, ab, abb, bab\}$,
$L_1 \cap L_2 = \{ab\}$,
$L_1 - L_2 = \{\varepsilon, abb\}$.

Az $L \subseteq V^*$ nyelv **komplementere** a V ábécére nézve az $\overline{L} = V^* - L$ nyelv.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

halmazműveletek

Legyen V egy ábécé és legyenek L_1, L_2 nyelvek V felett (vagyis $L_1 \subseteq V^*$ és $L_2 \subseteq V^*$).

$L_1 \cup L_2 = \{u \,|\, u \in L_1$ vagy $u \in L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **uniója**)

$L_1 \cap L_2 = \{u \,|\, u \in L_1$ és $u \in L_2\}$ (az L_1 és L_2 nyelv **metszete**)

$L_1 - L_2 = \{u \,|\, u \in L_1$ és $u \notin L_2\}$ (az L_1 és az L_2 nyelv **különbsége**)

Példák:

$L_1 = \{\varepsilon, ab, abb\}, L_2 = \{ab, bab\}$. Ekkor
$L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, ab, abb, bab\}$,
$L_1 \cap L_2 = \{ab\}$,
$L_1 - L_2 = \{\varepsilon, abb\}$.

Az $L \subseteq V^*$ nyelv **komplementere** a V ábécére nézve az $\bar{L} = V^* - L$ nyelv.

Példa:

$V = \{a\}$, $L = \{a^{2n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $\bar{L} = \{a^{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1 L_2 = \{u_1 u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \,|\, u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

$V = \{a, b\}$, $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, bba\}$,

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1 L_2 = \{u_1 u_2 \,|\, u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

$V = \{a, b\}$, $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, bba\}$,

$L_1 L_2 = \{ab\varepsilon, bb\varepsilon, ab\,a, bb\,a, ab\,bba, bb\,bba\}$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

$V = \{a, b\}$, $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, bba\}$,

$L_1L_2 = \{ab\varepsilon, bb\varepsilon, ab\,a, bb\,a, ab\,bba, bb\,bba\}$
$= \{ab, bb, aba, bba, abbba, bbbba\}$. (mindenkit mindenkivel!)

$L_3 = \{a, ab\}$, $L_4 = \{bc, c\}$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

$V = \{a, b\}$, $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, bba\}$,

$L_1L_2 = \{ab\varepsilon, bb\varepsilon, aba, bba, abbba, bbbba\}$
$= \{ab, bb, aba, bba, abbba, bbbba\}$. (mindenkit mindenkivel!)

$L_3 = \{a, ab\}$, $L_4 = \{bc, c\}$

$L_3L_4 = \{abc, ac, abbc\}$, $|L_3L_4| < 2 \cdot 2 = 4$, mivel abc kétféleképpen is előállítható!!!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

$V = \{a, b\}$, $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, bba\}$,

$L_1L_2 = \{ab\varepsilon, bb\varepsilon, ab\,a, bb\,a, ab\,bba, bb\,bba\}$
$= \{ab, bb, aba, bba, abbba, bbbba\}$. (mindenkit mindenkivel!)

$L_3 = \{a, ab\}$, $L_4 = \{bc, c\}$

$L_3L_4 = \{abc, ac, abbc\}$, $|L_3L_4| < 2 \cdot 2 = 4$, mivel abc kétféleképpen is előállítható!!!

$L_5 = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_6 = \{a^{3n}b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

konkatenáció

Legyen V egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$. Az L_1 és az L_2 nyelvek **konkatenációján** az $L_1L_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$ nyelvet értjük. Asszociatív, de nyilván **nem kommutatív** művelet.

Példák:

$V = \{a, b\}$, $L_1 = \{ab, bb\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, bba\}$,

$L_1L_2 = \{ab\varepsilon, bb\varepsilon, ab\,a, bb\,a, ab\,bba, bb\,bba\}$
$= \{ab, bb, aba, bba, abbba, bbbba\}$. (mindenkit mindenkivel!)

$L_3 = \{a, ab\}$, $L_4 = \{bc, c\}$

$L_3L_4 = \{abc, ac, abbc\}$, $|L_3L_4| < 2 \cdot 2 = 4$, mivel abc kétféleképpen is előállítható!!!

$L_5 = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_6 = \{a^{3n}b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L_5L_6 = \{a^{2n}b^{2n}a^{3k}b^{3k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

Az L_5L_6 konkatenációnak az is eleme, ha L_5 46. elemét konkatenáljuk L_6 87. elemével!!! ($n = 46, k = 87$)

Nyelvekre vonatkozó műveletek

i-edik hatvány, Kleene lezárt

Észrevétel: $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}L = L$ minden L nyelvre.

Egy L nyelv ***i*-edik hatványát** $L^0 := \{\varepsilon\}$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

i-edik hatvány, Kleene lezárt

Észrevétel: $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}L = L$ minden L nyelvre.

Egy L nyelv **i-edik hatványát** $L^0 := \{\varepsilon\}$ és $L^i := LL^{i-1}$ $(i \geq 1)$ definiálják.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

i-edik hatvány, Kleene lezárt

Észrevétel: $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}L = L$ minden L nyelvre.

Egy L nyelv ***i*-edik hatványát** $L^0 := \{\varepsilon\}$ és $L^i := LL^{i-1}$ $(i \geq 1)$ definiálják.

Azaz L^i jelöli az L i-edik iterációját a konkatenáció műveletére nézve.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

i-edik hatvány, Kleene lezárt

Észrevétel: $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}L = L$ minden L nyelvre.

Egy L nyelv ***i*-edik hatványát** $L^0 := \{\varepsilon\}$ és $L^i := LL^{i-1}$ $(i \geq 1)$ definiálják.

Azaz L^i jelöli az L i-edik iterációját a konkatenáció műveletére nézve.

Példa: $L = \{a, bb\}$.

$L^0 = \{\varepsilon\}$,
$L^1 = \{a, bb\}$,
$L^2 = \{a\,a, a\,bb, bb\,a, bb\,bb\}$,
$L^3 = \{a\,a\,a, a\,a\,bb, a\,bb\,a, a\,bb\,bb, bb\,a\,a, bb\,a\,bb, bb\,bb\,a, bb\,bb\,bb\}$,

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Kleene lezárt

Az L nyelv **iteratív lezártja** (vagy röviden lezártja vagy Kleene-lezártja) alatt az $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ nyelvet értjük.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Kleene lezárt

Az L nyelv **iteratív lezártja** (vagy röviden lezártja vagy Kleene-lezártja) alatt az $L^* = \bigcup_{i\geq 0} L^i$ nyelvet értjük.

Az L nyelv **pozitív lezártja** alatt az $L^+ = \bigcup_{i\geq 1} L^i$ nyelvet értjük.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Kleene lezárt

Az L nyelv **iteratív lezártja** (vagy röviden lezártja vagy Kleene-lezártja) alatt az $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ nyelvet értjük.

Az L nyelv **pozitív lezártja** alatt az $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$ nyelvet értjük.

Észrevétel:
Nyilvánvalóan, $L^+ = L^*$, ha $\varepsilon \in L$ és $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ ha $\varepsilon \notin L$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Kleene lezárt

Az L nyelv **iteratív lezártja** (vagy röviden lezártja vagy Kleene-lezártja) alatt az $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ nyelvet értjük.

Az L nyelv **pozitív lezártja** alatt az $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$ nyelvet értjük.

Észrevétel:
Nyilvánvalóan, $L^+ = L^*$, ha $\varepsilon \in L$ és $L^+ = L^* - \{\varepsilon\}$ ha $\varepsilon \notin L$.

Példa: $L = \{a, bb\}$.

$L^0 = \{\varepsilon\}$,
$L^1 = \{a, bb\}$,
$L^2 = \{a\,a, a\,bb, bb\,a, bb\,bb\}$,
$L^3 = \{a\,a\,a, a\,a\,bb, a\,bb\,a, a\,bb\,bb, bb\,a\,a, bb\,a\,bb, bb\,bb\,a, bb\,bb\,bb\}$,
$L^4 = \{a\,a\,a\,a, a\,a\,a\,bb, a\,a\,bb, a, \ldots\}, \ \ldots$

Ezen szavak uniója együttesen alkotja L^*-t. L^+ ettől csak annyiban tér el, hogy nincs benne az ε szó.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \,|\, u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Példa:

$V = \{a, b\}$, $L = \{ba^{2n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $L^{-1} = \{a^{2n+1}b \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \,|\, u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Példa:
$V = \{a, b\}$, $L = \{ba^{2n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $L^{-1} = \{a^{2n+1}b \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Néhány nyelvműveletek közötti összefüggés (meggondolható/gyakorlaton igazolható):

- $(L^{-1})^{-1} = L$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Példa:
$V = \{a, b\}$, $L = \{ba^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $L^{-1} = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Néhány nyelvműveletek közötti összefüggés (meggondolható/gyakorlaton igazolható):

- $(L^{-1})^{-1} = L$
- $(L_1 L_2 \cdots L_n)^{-1} = L_n^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1}$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Példa:
$V = \{a, b\}$, $L = \{ba^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $L^{-1} = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Néhány nyelvműveletek közötti összefüggés (meggondolható/gyakorlaton igazolható):

- $(L^{-1})^{-1} = L$
- $(L_1 L_2 \cdots L_n)^{-1} = L_n^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1}$
- $(L^i)^{-1} = (L^{-1})^i$, ahol $i \geq 0$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Példa:
$V = \{a, b\}$, $L = \{ba^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $L^{-1} = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Néhány nyelvműveletek közötti összefüggés (meggondolható/gyakorlaton igazolható):

- $(L^{-1})^{-1} = L$
- $(L_1 L_2 \cdots L_n)^{-1} = L_n^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1}$
- $(L^i)^{-1} = (L^{-1})^i$, ahol $i \geq 0$
- $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

tükörkép

Legyen V egy ábécé és legyen $L \subseteq V^*$. Ekkor $L^{-1} = \{u^{-1} \,|\, u \in L\}$ a **tükörképe** (megfordítása) az L nyelvnek.

Példa:
$V = \{a, b\}$, $L = \{ba^{2n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ekkor $L^{-1} = \{a^{2n+1}b \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Néhány nyelvműveletek közötti összefüggés (meggondolható/gyakorlaton igazolható):

- $(L^{-1})^{-1} = L$
- $(L_1 L_2 \cdots L_n)^{-1} = L_n^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1}$
- $(L^i)^{-1} = (L^{-1})^i$, ahol $i \geq 0$
- $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

prefixnyelv, szuffixnyelv

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **prefixnyelvén** a
$\mathrm{PRE}(L) = \{u \,|\, u \in V^*, uv \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

prefixnyelv, szuffixnyelv

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **prefixnyelvén** a
$\mathrm{PRE}(L) = \{u \,|\, u \in V^*, uv \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **szuffixnyelvén** a
$\mathrm{SUF}(L) = \{u \,|\, u \in V^*, vu \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

prefixnyelv, szuffixnyelv

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **prefixnyelvén** a
$\mathrm{PRE}(L) = \{u \mid u \in V^*, uv \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **szuffixnyelvén** a
$\mathrm{SUF}(L) = \{u \mid u \in V^*, vu \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Példa:
$L = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

prefixnyelv, szuffixnyelv

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **prefixnyelvén** a
$\mathrm{PRE}(L) = \{u \mid u \in V^*, uv \in L \text{ valamely } v \in V^*\text{-ra}\}$ nyelvet értjük.

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **szuffixnyelvén** a
$\mathrm{SUF}(L) = \{u \mid u \in V^*, vu \in L \text{ valamely } v \in V^*\text{-ra}\}$ nyelvet értjük.

Példa:
$L = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathrm{PRE}(L) =$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

prefixnyelv, szuffixnyelv

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **prefixnyelvén** a
$\mathrm{PRE}(L) = \{u \mid u \in V^*, uv \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **szuffixnyelvén** a
$\mathrm{SUF}(L) = \{u \mid u \in V^*, vu \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Példa:
$L = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathrm{PRE}(L) = \{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathrm{SUF}(L) =$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

prefixnyelv, szuffixnyelv

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **prefixnyelvén** a
$\mathrm{PRE}(L) = \{u \,|\, u \in V^*, uv \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Egy $L \subseteq V^*$ nyelv **szuffixnyelvén** a
$\mathrm{SUF}(L) = \{u \,|\, u \in V^*, vu \in L$ valamely $v \in V^*$-ra$\}$ nyelvet értjük.

Példa:
$L = \{a^{2n+1}b \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathrm{PRE}(L) = \{a^{2n+1}b \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

$\mathrm{SUF}(L) = \{a^n b \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varepsilon\}$.

Homomorfizmus

Legyen V_1 és V_2 két ábécé. A $h : V_1^* \to V_2^*$ leképezést **homomorfizmusnak** nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

- h egyértelmű, azaz, minden $u \in V_1^*$ szóra pontosan egy $v \in V_2^*$ szó létezik, amelyre $h(u) = v$ teljesül.
- $h(uv) = h(u)h(v)$, minden $u, v \in V_1^*$-ra.

Homomorfizmus

Legyen V_1 és V_2 két ábécé. A $h : V_1^* \to V_2^*$ leképezést **homomorfizmusnak** nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

- h egyértelmű, azaz, minden $u \in V_1^*$ szóra pontosan egy $v \in V_2^*$ szó létezik, amelyre $h(u) = v$ teljesül.
- $h(uv) = h(u)h(v)$, minden $u, v \in V_1^*$-ra.

Észrevételek:

- A fenti tulajdonságokból következik, hogy $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Világos, hiszen $h(\varepsilon) = h(\varepsilon\varepsilon) = h(\varepsilon)h(\varepsilon)$, így csak $h(\varepsilon) = \varepsilon$ lehet.

Homomorfizmus

Legyen V_1 és V_2 két ábécé. A $h : V_1^* \to V_2^*$ leképezést **homomorfizmusnak** nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

- h egyértelmű, azaz, minden $u \in V_1^*$ szóra pontosan egy $v \in V_2^*$ szó létezik, amelyre $h(u) = v$ teljesül.
- $h(uv) = h(u)h(v)$, minden $u, v \in V_1^*$-ra.

Észrevételek:

- A fenti tulajdonságokból következik, hogy $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Világos, hiszen $h(\varepsilon) = h(\varepsilon\varepsilon) = h(\varepsilon)h(\varepsilon)$, így csak $h(\varepsilon) = \varepsilon$ lehet.
- Minden $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ szóra, ahol $a_i \in V_1$, $1 \leq i \leq n$, fennáll, hogy $h(u) = h(a_1)h(a_2)\cdots h(a_n)$. Ez azt jelenti, hogy elegendő a h leképezést V_1 elemein megadni, és ez automatikusan kiterjesztődik V_1^* -ra.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

h-homomorf kép

Legyen $h : V_1^* \to V_2^*$ homomorfizmus. A h homomorfizmus **ε-mentes**, ha $h(u) \neq \varepsilon$ bármely $u \in V_1^+$ szóra.

Legyen $h : V_1^* \to V_2^*$ homomorfizmus. Az $L \subseteq V^*$ nyelv **h-homomorf** képén a $h(L) = \{w \in V_2^* \mid w = h(u), u \in V_1^*\}$ nyelvet értjük.

Példa:

$V_1 = \{a, b\}, V_2 = \{b, c\}, L = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$h(a) = cc, h(b) = cbb.$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

h-homomorf kép

Legyen $h : V_1^* \to V_2^*$ homomorfizmus. A h homomorfizmus **ε-mentes**, ha $h(u) \neq \varepsilon$ bármely $u \in V_1^+$ szóra.

Legyen $h : V_1^* \to V_2^*$ homomorfizmus. Az $L \subseteq V^*$ nyelv **h-homomorf** képén a $h(L) = \{w \in V_2^* \mid w = h(u), u \in V_1^*\}$ nyelvet értjük.

Példa:

$V_1 = \{a, b\}, V_2 = \{b, c\}, L = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$h(a) = cc, h(b) = cbb.$

Ekkor $h(L) = \{c^{2n+1} b^2 c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Formális nyelvek megadása

- Véges nyelvek esetén felsorolással:

$L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$

Formális nyelvek megadása

- Véges nyelvek esetén felsorolással:
  $L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$
- Formulával:
  $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Formális nyelvek megadása

- Véges nyelvek esetén felsorolással:
  $L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$
- Formulával:
  $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Reguláris kifejezéssel:
  $L_3 = \{a^{2n+1} b \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
  ez reguláris kifejezéssel így fog majd kinézni: $(aa)^* ab \mid a^*$.

Formális nyelvek megadása

- Véges nyelvek esetén felsorolással:
$L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$

- Formulával:
$L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- Reguláris kifejezéssel:
$L_3 = \{a^{2n+1} b \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
ez reguláris kifejezéssel így fog majd kinézni: $(aa)^* ab \mid a^*$.

- Végtelen nyelvek esetén felsoroló algoritmussal:
$L_4 = \{0, 1\}^*$, ez egy végtelen nyelv, a szavait felsoroló algoritmus pl. a 0 és 1 betűkből álló szavak hosszlexikografikus felsorolása.

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

- Matematikai gépek, automaták segítségével

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

- Matematikai gépek, automaták segítségével

Az automaták elemző, **analitikus** eszközök. Az automaták bemenete egy szó, kimenete egy bináris érték. Az automata szabályrendszere szerint feldolgozza a szavakat, csak bizonyos szavak esetén ad igen választ, ezen szavak egy nyelvet alkotnak, melyet az automata szabályrendszere határoz meg.

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

- Matematikai gépek, automaták segítségével

Az automaták elemző, **analitikus** eszközök. Az automaták bemenete egy szó, kimenete egy bináris érték. Az automata szabályrendszere szerint feldolgozza a szavakat, csak bizonyos szavak esetén ad igen választ, ezen szavak egy nyelvet alkotnak, melyet az automata szabályrendszere határoz meg.

Figyelem! Nem feltétlen lehet minden eszközzel minden nyelvet megadni. Be fogjuk látni például, hogy reguláris kifejezéssel kevesebb nyelvet lehet leírni mint egy általános grammatikával, de az se elég az összes $\{0, 1\}$ ábécé feletti nyelv leírásához.

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:
- $a \in V$: betű

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:
- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:
- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv
- $\mathcal{L} \subseteq P(V^*)$ vagy $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V^*))$: nyelvcsalád

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv
- $\mathcal{L} \subseteq P(V^*)$ vagy $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V^*))$: nyelvcsalád

Példa: $V = \{a, b\}$

- véges nyelvek nyelvcsaládja

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv
- $\mathcal{L} \subseteq P(V^*)$ vagy $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V^*))$: nyelvcsalád

Példa: $V = \{a, b\}$

- véges nyelvek nyelvcsaládja
- csak b betűvel kezdődő szavakat tartalmazó nyelvek nyelvcsaládja

Nyelvcsaládok

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv
- $\mathcal{L} \subseteq P(V^*)$ vagy $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V^*))$: nyelvcsalád

Példa: $V = \{a, b\}$

- véges nyelvek nyelvcsaládja
- csak b betűvel kezdődő szavakat tartalmazó nyelvek nyelvcsaládja
- reguláris kifejezésekkel leírható nyelvek nyelvcsaládja

Grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ rendezett négyest **grammatikának** (generatív grammatikán vagy (generatív) nyelvtannak) nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.

Grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S\rangle$ rendezett négyest **grammatikának** (generatív grammatikán vagy (generatív) nyelvtannak) nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.
- $S \in N$ a grammatika **kezdőszimbóluma**.

Grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ rendezett négyest **grammatikának** (generatív grammatikán vagy (generatív) nyelvtannak) nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.
- $S \in N$ a grammatika **kezdőszimbóluma**.
- P rendezett (x, y) párok véges halmaza, ahol $x, y \in (N \cup T)^*$ és x legalább egy nemterminális szimbólumot tartalmaz.

Grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S\rangle$ rendezett négyest **grammatikának** (generatív grammatikán vagy (generatív) nyelvtannak) nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.
- $S \in N$ a grammatika **kezdőszimbóluma**.
- P rendezett (x, y) párok véges halmaza, ahol $x, y \in (N \cup T)^*$ és x legalább egy nemterminális szimbólumot tartalmaz.

Grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ rendezett négyest **grammatikának** (generatív grammatikán vagy (generatív) nyelvtannak) nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.
- $S \in N$ a grammatika **kezdőszimbóluma**.
- P rendezett (x, y) párok véges halmaza, ahol $x, y \in (N \cup T)^*$ és x legalább egy nemterminális szimbólumot tartalmaz.

A P halmaz elemeit **szabályoknak** (vagy átírási szabályoknak vagy produkcióknak) hívjuk. A gyakorlatban az (x, y) jelölés helyett szinte mindig az $x \to y$ jelölést használjuk amennyiben $\to$ nem eleme $N \cup T$-nek.

Grammatikák

Példák:

$G_1 = \langle\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, \{S \to c, S \to AB, A \to aA, B \to \varepsilon, abb \to aSb\}, S\rangle$ **nem** grammatika, mivel minden szabály baloldalának tartalmaznia kell legalább egy N-beli szimbólumot.

Grammatikák

Példák:

$G_1 = \langle \{S, A, B\}, \{a, b, c\}, \{S \to c, S \to AB, A \to aA, B \to \varepsilon, abb \to aSb\}, S\rangle$ **nem** grammatika, mivel minden szabály baloldalának tartalmaznia kell legalább egy N-beli szimbólumot.

$G_2 = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, \{S \to a, S \to AB, A \to Ab, B \to \varepsilon, aCA \to aSc\}, S\rangle$ grammatika.

Generatív grammatikák

egylépéses levezetés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy generatív grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \to y \in P$.

Generatív grammatikák

egylépéses levezetés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy generatív grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \rightarrow y \in P$.

Példa:

$$G_2 = \langle\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow a, S \rightarrow AB, A \rightarrow Ab, \\ B \rightarrow \varepsilon, aCA \rightarrow aSc\}, S\rangle.$$

Ekkor $BB\mathbf{aCA}a \Rightarrow BB\mathbf{aSc}a$, $\mathbf{A}BB \Rightarrow \mathbf{Ab}BB$, $B\mathbf{B} \Rightarrow B$.

Grammatikák

többlépéses levezetés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. u-ból (több lépésben) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geq 1$ és $w_0, \ldots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leq i \leq n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

Grammatikák

többlépéses levezetés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. u-ból (több lépésben) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geq 1$ és $w_0, \ldots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leq i \leq n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

A kezdőszimbólumból levezethető szavakat **mondatformának** nevezzük.

Grammatikák

többlépéses levezetés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. u-ból (több lépésben) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geq 1$ és $w_0, \ldots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leq i \leq n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

A kezdőszimbólumból levezethető szavakat **mondatformának** nevezzük.

Megjegyzés: $\Rightarrow_G$ bináris reláció az $(N \cup T)^*$ alaphalmazon. A $\Rightarrow_G^*$ reláció nem más, mint a $\Rightarrow_G$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Grammatikák

többlépéses levezetés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. u-ból (több lépésben) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geq 1$ és $w_0, \ldots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leq i \leq n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

A kezdőszimbólumból levezethető szavakat **mondatformának** nevezzük.

Megjegyzés: $\Rightarrow_G$ bináris reláció az $(N \cup T)^*$ alaphalmazon. A $\Rightarrow_G^*$ reláció nem más, mint a $\Rightarrow_G$ reláció reflexív, tranzitív lezártja. Ha egyértelmű melyik nyelvtanról van szó, akkor $\Rightarrow_G$ helyett röviden $\Rightarrow$-t írhatunk.

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

- Legyenek $X_1, \dots X_n$ halmazok és $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$, ekkor R-et ***n*-változós relációnak** nevezzük.

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

- Legyenek $X_1, \ldots X_n$ halmazok és $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$, ekkor R-et ***n*-változós relációnak** nevezzük.
- $R \subseteq X \times Y$ és $S \subseteq Y \times Z$ bináris relációk **kompozíciója** $R \circ S = \{(x, z) \subseteq X \times Z \,|\, \exists y \in Y : (x, y) \in R \land (y, z) \in S\}$

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

- Legyenek $X_1, \dots X_n$ halmazok és $R \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$, ekkor R-et ***n*-változós relációnak** nevezzük.
- $R \subseteq X \times Y$ és $S \subseteq Y \times Z$ bináris relációk **kompozíciója** $R \circ S = \{(x, z) \subseteq X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
- $R^1 := R$, $R^i := R \circ R^{i-1}$ $(i \geq 2)$ definiálja R ***i*-edik hatványát**

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

- Legyenek $X_1, \ldots X_n$ halmazok és $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$, ekkor R-et ***n*-változós relációnak** nevezzük.
- $R \subseteq X \times Y$ és $S \subseteq Y \times Z$ bináris relációk **kompozíciója** $R \circ S = \{(x, z) \subseteq X \times Z \,|\, \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
- $R^1 := R$, $R^i := R \circ R^{i-1}$ $(i \geq 2)$ definiálja R ***i*-edik hatványát**
- Ha $R \subseteq X \times X$, akkor $S := R \cup \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ az R reláció **reflexív lezártja**

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

- Legyenek $X_1, \dots X_n$ halmazok és $R \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$, ekkor R-et ***n*-változós relációnak** nevezzük.
- $R \subseteq X \times Y$ és $S \subseteq Y \times Z$ bináris relációk **kompozíciója** $R \circ S = \{(x, z) \subseteq X \times Z \,|\, \exists y \in Y : (x, y) \in R \,\wedge\, (y, z) \in S\}$
- $R^1 := R$, $R^i := R \circ R^{i-1}$ $(i \geq 2)$ definiálja R ***i*-edik hatványát**
- Ha $R \subseteq X \times X$, akkor $S := R \cup \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ az R reláció **reflexív lezártja**
- Ha $R \subseteq X \times X$, akkor $R^+ := \bigcup\limits_{i=1,2,\dots} R^i$ az R reláció **tranzitív lezártja**

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

- Legyenek $X_1, \ldots X_n$ halmazok és $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$, ekkor R-et **n-változós relációnak** nevezzük.
- $R \subseteq X \times Y$ és $S \subseteq Y \times Z$ bináris relációk **kompozíciója** $R \circ S = \{(x, z) \subseteq X \times Z \,|\, \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
- $R^1 := R$, $R^i := R \circ R^{i-1}$ $(i \geq 2)$ definiálja R **i-edik hatványát**
- Ha $R \subseteq X \times X$, akkor $S := R \cup \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ az R reláció **reflexív lezártja**
- Ha $R \subseteq X \times X$, akkor $R^+ := \bigcup\limits_{i=1,2,\ldots} R^i$ az R reláció **tranzitív lezártja**
- Ha $R \subseteq X \times X$, akkor $R^* := R^+ \cup \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ az R reláció **reflexív, tranzitív lezártja**

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

$R^1 = R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

$R^1 = R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

$R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

$R^1 = R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

$R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$R^3 = \{(1, 4)\}$

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

$R^1 = R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

$R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$R^3 = \{(1, 4)\}$

$R^4 = R^5 = \ldots = \emptyset$

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

$R^1 = R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

$R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$R^3 = \{(1, 4)\}$

$R^4 = R^5 = \ldots = \emptyset$

$R^+ = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 3), (2, 4), (1, 5), (1, 4)\}$ az R tranzitív lezártja

Reláció reflexív, tranzitív lezártja

Példa:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$ ekkor

$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív lezártja

$R^1 = R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5)\}$

$R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$R^3 = \{(1, 4)\}$

$R^4 = R^5 = \ldots = \emptyset$

$R^+ = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 3), (2, 4), (1, 5), (1, 4)\}$ az R tranzitív lezártja

$R^* = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 3), (2, 4), (1, 5), (1, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ az R reflexív, tranzitív lezártja

Grammatikák

többlépéses levezetés

Példa:

$$G_2 = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, \{S \to a, S \to AB, A \to Ab, B \to \varepsilon, aCA \to aSc\}, S\rangle.$$

Ekkor $BB\mathbf{aCA}a \Rightarrow BB\mathbf{aSc}a$ és $BBa\mathbf{S}ca \Rightarrow BBa\mathbf{AB}ca$, tehát $BBaCAa \Rightarrow^* BBaABca$.

Grammatikák

többlépéses levezetés

Példa:

$$G_2 = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, \{S \to a, S \to AB, A \to Ab, B \to \varepsilon, aCA \to aSc\}, S\rangle.$$

Ekkor $BB\mathbf{aCA}a \Rightarrow BB\mathbf{aSc}a$ és $BBa\mathbf{S}ca \Rightarrow BBa\mathbf{AB}ca$, tehát $BBaCAa \Rightarrow^* BBaABca$.

$S \Rightarrow AB \Rightarrow AbB \Rightarrow AbbB$, tehát $AbbB$ egy mondatforma.

Generált nyelv

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges generatív grammatika. A G **grammatika által generált nyelv** alatt az $L(G) := \{ w \mid S \Rightarrow_G^* w, w \in T^* \}$ szavakból álló halmazt értjük.

Példák:

- $G = \langle N, T, P, S \rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab, S \rightarrow ba\}$.

Generált nyelv

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges generatív grammatika. A G **grammatika által generált nyelv** alatt az $L(G) := \{w \mid S \Rightarrow_G^* w, w \in T^*\}$ szavakból álló halmazt értjük.

Példák:

- $G = \langle N, T, P, S \rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to aSb, S \to ab, S \to ba\}$.

Generált nyelv

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy tetszőleges generatív grammatika. A G **grammatika által generált nyelv** alatt az $L(G) := \{w \mid S \Rightarrow_G^* w, w \in T^*\}$ szavakból álló halmazt értjük.

Példák:

- $G = \langle N, T, P, S\rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to aSb, S \to ab, S \to ba\}$.

  Ekkor $L(G) = \{a^n abb^n, a^n bab^n \mid n \geq 0\}$.
- $G = \langle N, T, P, S\rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to ASB, S \to \varepsilon, AB \to BA, BA \to AB, A \to a, B \to b\}$.

Generált nyelv

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges generatív grammatika. A G **grammatika által generált nyelv** alatt az $L(G) := \{w \mid S \Rightarrow_G^* w, w \in T^*\}$ szavakból álló halmazt értjük.

Példák:

- $G = \langle N, T, P, S \rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to aSb, S \to ab, S \to ba\}$.

  Ekkor $L(G) = \{a^n abb^n, a^n bab^n \mid n \geq 0\}$.
- $G = \langle N, T, P, S \rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to ASB, S \to \varepsilon, AB \to BA, BA \to AB, A \to a, B \to b\}$.

Generált nyelv

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy tetszőleges generatív grammatika. A G **grammatika által generált nyelv** alatt az $L(G) := \{w \mid S \Rightarrow_G^* w, w \in T^*\}$ szavakból álló halmazt értjük.

Példák:

- $G = \langle N, T, P, S\rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to aSb, S \to ab, S \to ba\}$.

  Ekkor $L(G) = \{a^n abb^n, a^n bab^n \mid n \geq 0\}$.
- $G = \langle N, T, P, S\rangle$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to ASB, S \to \varepsilon, AB \to BA, BA \to AB, A \to a, B \to b\}$.

  Ekkor $L(G) = \{u \in \{a, b\}^* \mid u\text{-ban ugyanannyi } a \text{ van, mint } b\}$.