

Cardinal · principes additif et multiplicatif

Cardinal de A : nombre d'éléments, noté $\text{card}(A)$ ou $|A|$.
Dénombrer = compter le cardinal d'un ensemble fini.

Additif · si $A_1, \dots, A_n$ deux à deux disjoints :

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_n)$$

Sinon : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Multiplicatif · n étapes indépendantes, a_i choix à l'étape i :

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \text{ choix au total}$$

Produit cartésien : $\text{card}(A_1 \times \dots \times A_n) = |A_1| \times \dots \times |A_n|$

Arbre de choix · k -uplets

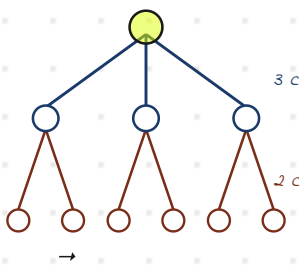
k -uplet · E^k , ordre compte, répétitions OK.

$$|E^k| = n^k$$

→ tirage avec remise, codes, lancers de dés, mots de k lettres.

Code 4 chiffres : $10^4 = 10\,000$ ·

2 lancers de dé : $6^2 = 36$, et $(1, 2) \neq (2, 1)$.



Arrangements · A_n^k

ordre compte, éléments distincts · k -uplet sans répétition.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Factorielle $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 0! = 1! = 1$

→ tirage sans remise, podium, attribution de postes.

Ex. Podium parmi 10 athlètes : $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Permutations · $n!$

Cas $k = n$: on prend tous les éléments.
Façons d'ordonner n objets.

$$\text{Permut.} = n!$$

→ ordres de passage, anagrammes (lettres distinctes), placements.

Astuce bloc côte à côte · 12 places, 3 amis collés :

$10 \times 3! \times 9!$ (positions × interne × autres)

Combinaisons · $\binom{n}{k}$

ordre indifférent, distincts. Sous-ensemble de k éléments parmi n .

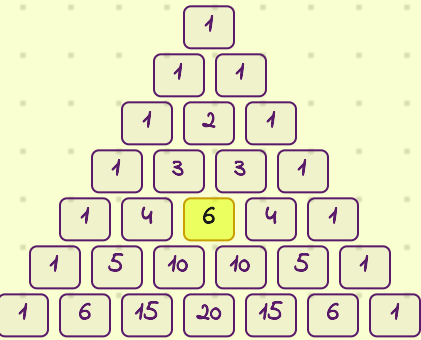
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \cdot \binom{n}{1} = n$

→ tirage simultané, comité, main au poker.

Ex. 4 délégués parmi 34 : $\binom{34}{4} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{4!} = 46\,376$.

Triangle de Pascal · identités



Construction · chaque coeff = somme des deux juste au-dessus.

Symétrie · $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (choisir k inclus ↔ $n - k$ exclus)

Pascal · $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Parties d'un ensemble :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

→ 2 choix indép. par élément (dedans / dehors) : 2^n parties.

Lecture : $\binom{4}{2} = 6$ → ligne 4, position 2.

Ex. $E = \{1, 2, 3\}$ admet $2^3 = 8$ parties :

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

Quel outil choisir ?

Deux questions clés : l'ordre compte ? · répétitions autorisées ?

ordre	Répét.	outil	Formule
oui	oui	k-uplet	n^k
oui	non	Arrangt	$\frac{n!}{(n-k)!}$
oui	non, $k = n$	Permut.	$n!$
non	non	Combin.	$\binom{n}{k}$

Mots-clés à repérer :

- « successivement avec remise » → k -uplet
- « successivement sans remise » → arrangement
- « simultanément » → combinaison
- « tous / toutes » + ordre → permutation

Situation	outil	Calcul
Mots de 3 lettres (rép.)	k -uplet	26^3
3 lettres distinctes	Arrangt	$26 \cdot 25 \cdot 24$
3 jetons simultanés / 6	Combin.	$\binom{6}{3}$

Pièges · « tirage simultané » = combinaison (jamais d'ordre) · loto/cartes/comité = combinaison · podium/code/classement = ordre.