

## Transformations du plan

| Transformation              | $z'$ en fonction de $z$                 |
|-----------------------------|-----------------------------------------|
| Translation $\vec{t}(t_0)$  | $z' = z + t_0$                          |
| Homothétie $(\Omega, k)$    | $z' - \omega = k(z - \omega)$           |
| Rotation $(\Omega, \theta)$ | $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ |
| Similitude directe          | $z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*$       |

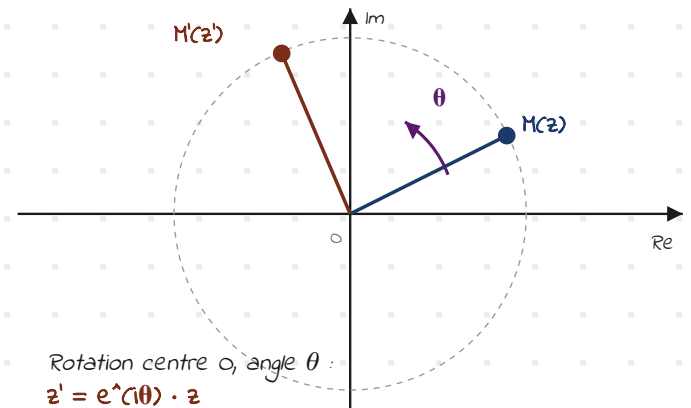
Cas usuels rotation  $O$  :

- angle  $\frac{\pi}{2}$  → multiplier par  $i$
- angle  $\pi$  → multiplier par  $-1$
- angle  $-\frac{\pi}{2}$  → multiplier par  $-i$

Similitude  $z' = az + b$ .  
rapport  $|a|$  · angle  $\arg(a)$  · centre  $\Omega : \omega = z'$

Ex ·  $z' = (1+i)z - 2$   
 $|a| = \sqrt{2}, \arg(a) = \frac{\pi}{4}$ , point fixe  $\omega = -2i$   
→ similitude  $(\Omega(-2i), \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

## Rotation centrée à l'origine



$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega) \text{ rotation } (\Omega, \theta)$$

## Angles · alignement · orthogonalité

Trois points distincts  $A, B, C$ . L'angle orienté en  $A$  s'exprime via l'argument :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Alignés  
quotient  $\in \mathbb{R}$

Orthogonaux  
quotient  $\in i\mathbb{R}$

vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  d'affixes  $z_u, z_v$  :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) [2\pi]$$

Ex ·  $ABCD$  avec  $z_A = 0, z_B = 1, z_D = i$   
 $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i \in i\mathbb{R}$  et  $|i| = 1$   
→  $AB \perp AD$  et  $|AB| = |AD|$  → carré

Arc capable ·  $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \alpha$  → arc de cercle passant par  $A, B$  vu sous angle  $\alpha$ .

## Distances · vecteurs · milieux

| Notion                       | Affixe / valeur             |
|------------------------------|-----------------------------|
| Affixe $\overrightarrow{AB}$ | $z_B - z_A$                 |
| Distance $AB$                | $ z_B - z_A $               |
| Milieu $[AB]$                | $\frac{z_A + z_B}{2}$       |
| Centre de gravité            | $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ |
| Sym. de $A$ p.r. à $C$       | $z_E = 2z_C - z_A$          |

Parallélogramme  $ABCD$  :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ ssi } z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$\text{ssi } z_A + z_C = z_B + z_D \text{ (mêmes milieux)}$$

Identité du parallélogramme :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

## Lieux géométriques classiques

| Condition                | Lieu               |
|--------------------------|--------------------|
| $ z - z_0  = r$          | cercle $(z_0, r)$  |
| $ z - z_0  \leq r$       | disque fermé       |
| $ z - z_A  =  z - z_B $  | médiatrice $[AB]$  |
| $\arg(z - z_0) = \theta$ | demi-droite        |
| $\text{Im}(z) = k$       | droite horizontale |
| $\text{Re}(z) = k$       | droite verticale   |

Méthode · faire apparaître un module  $|z - z_0|$ .

Pour  $|az + \beta| = r$ , factoriser :

$$|a| \cdot |z - (-\frac{\beta}{a})| = r$$

Ex factorisation ·  $|(1+i)z - 2i| = 2$

$$|1+i| \cdot |z - \frac{2i}{1+i}| = 2$$

$$\frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2} = 1+i$$

$$\sqrt{2} \cdot |z - (1+i)| = 2$$

$$|z - (1+i)| = \sqrt{2} \rightarrow \text{cercle } (1+i, \sqrt{2})$$

Réflexe · identifier la forme canonique  $|z - z_0|$  avant d'interpréter géométriquement.

## Suites complexes · convergence

$(z_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$  ssi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - \ell| = 0$$

Les points images de  $z_n$  se rapprochent de  $\ell$  dans le plan complexe. Suite géométrique  $(q^n)$  avec  $|q| < 1$  → converge vers 0.

Récurrance affine  $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$  :

① point fixe  $\ell = \frac{\beta}{1-\alpha}$

②  $b_n = a_n - \ell$  géom. de raison  $\alpha$

③ si  $|\alpha| < 1$  →  $b_n \rightarrow 0$  →  $a_n \rightarrow \ell$

$$\text{Ex 1} \cdot z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2i}{3}\right)^n$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{2i}{3}\right| = \frac{5}{6} < 1 \rightarrow z_n \rightarrow 0$$

$$\text{Ex 2} \cdot a_{n+1} = \frac{1+i}{2}a_n + 1 - i, a_0 = i$$

$$\text{point fixe } \ell = 2, |q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \rightarrow \lim a_n = 2$$