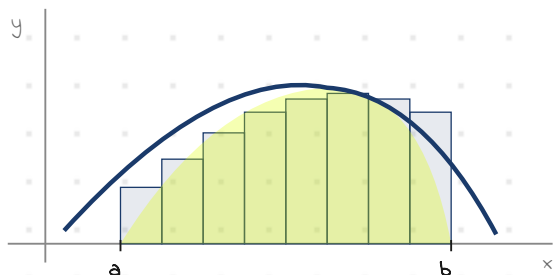


Intégrale & aire sous la courbe



f continue et positive sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{aire (en u.a.) sous la courbe}$$

→ $\int = \ll S \gg$ allongé · somme infinie d'aires

→ $f \leq 0$: aire = $-\int_a^b f$, mais $\int < 0$

→ signe quelconque : **somme algébrique**

Théorème fondamental

f continue sur $[a; b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a : $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ex 1. $\int_1^4 \frac{3}{x^2} dx = \left[-\frac{3}{x} \right]_1^4 = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$

Ex 2. $\int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx = [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5 = 150 - 6 = \boxed{144}$

Bornes · $\int_a^a f = 0$ · $\int_a^b f = -\int_b^a f$

Chasles · $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Propriétés des intégrales

Linéarité

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f \quad \cdot \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Positivité · si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ ($a \leq b$), alors $\int_a^b f \geq 0$.

Comparaison · $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$

Encadrement · sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x \rightarrow e^{x^2} \leq e^x$ et $e^{x^2} \geq 0$

$$\rightarrow 0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

△ $\int = 0$ ne signifie pas $f = 0$ · ex. $\int_{-2}^2 x^3 dx = 0$

Intégration par parties (IPP)

$$\int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx$$

origine · $(uv)' = u'v + uv' \rightarrow$ intégrer.

ALPES · choix de v (à dériver) :

Arctan · Ln · Puissance (x^n) → dériver (v)

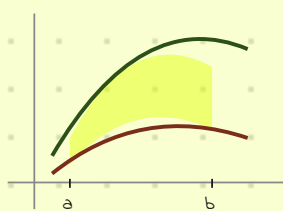
Exp · Sin/cos → intégrer (u')

Ex. $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ · $v = x$, $u' = \sin x \rightarrow u = -\cos x$

$$I = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = \boxed{1}$$

Astuce Ln · $\int \ln x dx$: poser $u' = 1$, $v = \ln x$.

Aire entre deux courbes



$$\mathcal{A} = \int_a^b (f - g) dx \quad (f \geq g)$$

→ on intègre la **différence** courbe du dessus moins courbe du dessous

Ex. $f = -x^2 + 2x + 5$, $g = x^2 + 1$, $f \geq g$ sur $[-1; 2]$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = \boxed{9 \text{ u.a.}}$$

△ Si les courbes se croisent : **découper** aux intersections et adapter le signe.

valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

→ "hauteur moyenne" de la courbe

→ aire $\int_a^b f =$ aire du rectangle $(b-a) \times \mu$

Ex. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $[1; 10]$:

$$\mu = \frac{1}{9} [x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10} = \frac{1}{9} (850 - 4) = \boxed{94}$$

Application · vitesse moyenne, concentration moyenne, nombre moyen.

Suites d'intégrales

$I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ (suite paramétrée par n).

① Calculer I_0 (parfois I_1)

② Récurrence $I_{n+1} \leftrightarrow I_n$ via IPP

③ Monotonie · convergence

Ex. $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

$$I_0 = \int_1^e x dx = \frac{e^2 - 1}{2}$$

IPP $u' = x$, $v = (\ln x)^{n+1} \rightarrow u = \frac{x^2}{2}$:

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

Calculer une aire · récap

Situation	Aire
$f \geq 0$ sur $[a; b]$	$\int_a^b f$
$f \leq 0$ sur $[a; b]$	$-\int_a^b f$
Entre 2 courbes ($f \geq g$)	$\int_a^b (f - g)$

Démarche · primitive $F \rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$ · vérifier le signe.

△ Aire $\neq$ intégrale pour une fonction de signe quelconque.