

Notion de continuité

Intuition · f continue sur I = courbe traçable sans lever le crayon.

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Théorème · f dérivable sur $I \Rightarrow f$ continue sur I .

Réciproque fausse · $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en 0.

Définition rigoureuse posée par Karl Weierstrass (1815-1897).

Fonctions de référence & opérations

Fonction	Continue sur
x^n , polynômes, $ x $, e^x	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$
$\ln(x)$	$] 0; +\infty[$

Opérations · si f, g continues sur I :

$\rightarrow f + g, f \times g, f^2, e^f$ continues

$\rightarrow \frac{f}{g}$ continue si g ne s'annule pas

Les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent continuité + stricte monotonie.

Continuité par morceaux

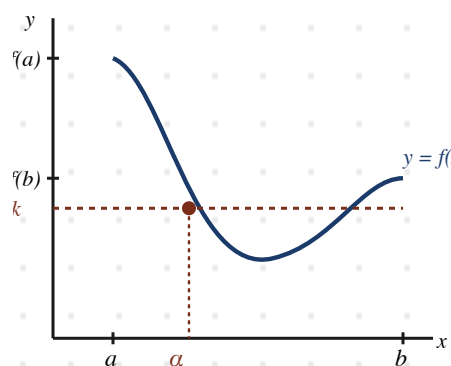
Pour étudier la continuité au point de raccord a :

- 1) Vérifier que chaque morceau est continu sur son intervalle
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limite à gauche)
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limite à droite)
- 4) Comparer aux deux et à $f(a)$

$$\text{continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = f(a)$$

Si limites gauche $\neq$ droite : saut en a · pas continue.

Théorème des valeurs intermédiaires



TVI · f continue sur $[a; b]$.

$\forall k$ entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution $\alpha \in [a; b]$.

Corollaire (bijection)

Si en plus f est strictement monotone, la solution est unique.

Toute droite horizontale entre $f(a)$ et $f(b)$ coupe la courbe au moins une fois (exactement une si stricte monotonie).

Méthode · existence + unicité

Pour montrer que $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[a; b]$:

- 1) f continue sur $[a; b]$ (existence)
- 2) $f(a) \times f(b) < 0$ (changement de signe) (existence)
- 3) f strictement monotone sur $[a; b]$ (signe de f') (unicité)

Pour $f(x) = k$ · condition 2 devient « k entre $f(a)$ et $f(b)$ ».

Astuce · le sens des variations remplace souvent l'étude directe du signe de f' .

Exemple · encadrement par balayage

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1 \text{ sur } [1; 2]$$

$\rightarrow f$ continue (polynôme) ✓

$\rightarrow f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$ ✓

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) > 0$ sur $[1; 2]$: strictement croissante ✓

$$\text{TVI} \Rightarrow \text{unique } \alpha \in [1; 2] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

Balayage calculatrice (pas 0,01) :

$$f(1,46) \approx -0,019 < 0 \quad f(1,47) \approx 0,016 > 0$$

$$\rightarrow 1,46 < \alpha < 1,47$$

À retenir · les essentiels

- $\rightarrow$ Continue · traçable sans lever le crayon · $\lim_a f = f(a)$
- $\rightarrow$ Dérivable $\Rightarrow$ continue (la réciproque est fausse)
- $\rightarrow$ Polynômes, exp, $\sqrt{\cdot}$, $\ln$, $|\cdot|$, $\frac{1}{x}$ continues sur leur domaine

- $\rightarrow$ TVI · f continue + k entre $f(a), f(b) \Rightarrow$ au moins une solution
- $\rightarrow$ unicité · ajouter la stricte monotonie
- $\rightarrow$ Méthode 3 étapes · continuité + signe + monotonie