

Divisibilité

a est divisible par b si le reste de la division euclidienne est 0

$$a = b \times k \quad (k \text{ entier})$$

on note $b \mid a$ pour « b divise a »

Ex : 312 - somme chiffres = 6 → div. par 3
dernier chiffre pair → div. par 2 → div. par 6

12 Critères de divisibilité

Par	Critère
2	Dernier chiffre pair (0, 2, 4, 6, 8)
3	Somme des chiffres divisible par 3
4	Les deux derniers chiffres div. par 4
5	Dernier chiffre 0 ou 5
9	Somme des chiffres divisible par 9
10	Dernier chiffre 0

÷ Division euclidienne

$$a = b \times q + r \quad (0 \leq r < b)$$

a dividende

b diviseur

q quotient

r reste

$r = 0 \rightarrow b$ divise a

$r \neq 0 \rightarrow b$ ne divise pas a

Ex : $127 = 9 \times 14 + 1 \rightarrow$ reste 1 → 9 ne divise pas 127

★ Nombres premiers

$n \geq 2$ est premier s'il a exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 ...

⚠ 1 n'est pas premier · 2 est le seul premier pair

Tester si n est premier

Tester tous les diviseurs jusqu'à \sqrt{n}

Ex : 37 premier ? $\sqrt{37} \approx 6,08$

Tester 2, 3, 5 → aucun ne divise → 37 est premier

🐛 Décomposition en facteurs premiers

Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers

Méthode : divisions successives

Diviser par le plus petit premier qui divise, recommencer.

Applications :

- Calculer PGCD et PPCM
- Simplifier des fractions
- Reconnaître un carré parfait

Exemple : 360

Nombre	Diviseur premier
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

📐 PGCD - Plus Grand Commun Diviseur

Plus grand entier divisant à la fois a et b

Méthode 1 - facteurs premiers

Facteurs communs avec le plus petit exposant

Méthode 2 - Algorithme d'Euclide

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

où r = reste de $a \div b$ - s'arrête quand $r = 0$

Ex : $\text{PGCD}(48, 36)$

$$48 = 36 \times 1 + 12$$

$$36 = 12 \times 3 + 0$$

→ PGCD = 12

Si $\text{PGCD}(a, b) = 1 \rightarrow a$ et b sont premiers entre eux

🔗 PPCM - Plus Petit Commun Multiple

Plus petit entier positif divisible par a et par b

$$\text{PPCM}(a, b) = (a \times b) / \text{PGCD}(a, b)$$

Ex : $\text{PPCM}(48, 36)$

$$\text{PPCM} = 48 \times 36 / 12 = 144$$

Avec facteurs premiers

Prendre chaque facteur avec le plus grand exposant

$$48 = 2^4 \times 3 \quad 36 = 2^2 \times 3^2$$

$$\text{PPCM} = 2^4 \times 3^2 = 144 \checkmark$$

À retenir : $\text{PGCD} \times \text{PPCM} = a \times b$