Orthogonalité et distances dans l'espace

Produit scalaire · 4 formules

1 · Avec un angle

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

2 · Carré scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

3 · Projeté orthogonal · si H projeté de C sur (AB) :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

4 · Al-Kashi (polarisation)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Outil-clé · $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$. C'est **le** test d'orthogonalité du chapitre.

Dans une base orthonormée (BON)

BON · base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **2 à 2 orthogonale** et de vecteurs **unitaires** ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$).

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Norme · $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Distance · $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$
Test $\perp$ · $\vec{u}\perp\vec{v} \iff xx'+yy'+zz' = 0$

En l'absence de BON · pas de formule simple avec coordonnées. Revenir aux propriétés algébriques (bilinéarité, identités).

Propriétés algébriques · identités

Symétrie · $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
Bilinéarité · $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ · $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

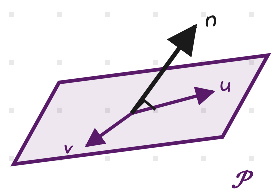
Identités remarquables
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Polarisation (normes connues, angle inconnu) :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

Vecteur normal à un plan



$\vec{n}$ **non nul** est **normal** à $\mathcal{P}$ s'il dirige une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ · équivalent : $\vec{n}$ orthogonal à **2 vecteurs non colinéaires** du plan.

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$$

Trouver $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ · résoudre $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u} = 0\\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 0\end{cases}$ (2 éq. / 3 inc.) en fixant 1 coordonnée (ex. $a = 1$).

Non unique · tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est aussi normal à $\mathcal{P}$. On choisit le plus simple.

Orthogonalité de droites & plans

Droites orthogonales · leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires.

Terme	Définition
Perpendiculaires	orthogonales + sécantes
Orthogonales	peuvent être non coplanaires

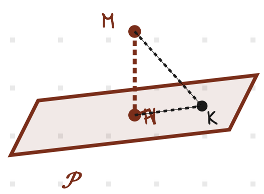
Perpendiculaires $\Rightarrow$ orthogonales · l'inverse est **faux** dans l'espace.

$d \perp \mathcal{P}$ · d est orthogonale à **toutes** les droites de $\mathcal{P}$.

$$d \perp \mathcal{P} \iff d \perp \text{2 droites sécantes de } \mathcal{P}$$

→ **transitivité** : si $d \perp \mathcal{P}$, alors d est orthogonale à **toute** droite de $\mathcal{P}$ (utile pour conclure une orthogonalité difficile).

Projeté orthogonal · distance



Projeté de M sur $\mathcal{P}$ · point $H \in \mathcal{P}$ tel que $(MH) \perp \mathcal{P}$.
H = **point de $\mathcal{P}$ le + proche de** M.

Pythagore · si $K \in \mathcal{P}$, MHK rect. en H : $MK^2 = MH^2 + HK^2 \geq MH^2$.

Méthode · $d(M,\mathcal{P})$ **via plan dirigé par** $\vec{u},\vec{v}$:

1. Poser $H(x;y;z)$, projeté de M
2. $H \in \mathcal{P}$: $\overrightarrow{AH} = s\vec{u} + t\vec{v}$
3. $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$ et $\overrightarrow{MH} \perp \vec{v}$
4. Résoudre, calculer MH

Pièges · orthogonal $\neq$ perpendiculaire · $\vec{n}$ non unique · vérifier la non-colinéarité avant.