

Raisonnement par récurrence

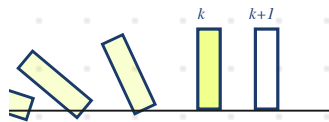


Image des dominos : si le 1^{er} tombe et que chaque domino fait tomber le suivant, alors **tous** tombent.

Pour démontrer $P(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$:

- ① Initialisation · vérifier $P(n_0)$
- ② Hérédité · supposer $P(k)$ (HR), démontrer $P(k+1)$
- ③ Conclusion · par récurrence, $P(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$

Initialisation indispensable ! « 2^n divisible par 3» est héréditaire mais faux à tout rang.

Inégalité de Bernoulli

$$\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1+na$$

Démo (récurrence) :

- Init $n=0$: $(1+a)^0 = 1 = 1+0 \cdot a$ ✓
- Hér. $(1+a)^k \geq 1+ka$ et $1+a > 0$:
 $(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka)$
 $= 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$ ✓

Application clé · sert à prouver $\lim q^n = +\infty$ pour $q > 1$:
 poser $a = q-1$, alors $q^n \geq 1+na \rightarrow +\infty$.

Limites d'une suite

$\lim u_n = +\infty$: tout intervalle $]A; +\infty[$ contient les u_n à partir d'un certain rang.

$\lim u_n = \ell$: tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n à partir d'un certain rang.

Convergente · limite finie

Divergente · pas de limite finie

Divergente \neq tend vers $\pm\infty$. Ex : $u_n = (-1)^n$ alterne, sans limite.

Limites usuelles à connaître

$$\lim n = +\infty$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim n^2 = +\infty$$

$$\lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

valeur de q

$\lim q^n$

$$q \leq -1$$

pas de limite

$$-1 < q < 1$$

0

$$q = 1$$

1

$$q > 1$$

$+\infty$

Hierarchie en $+\infty$: $\ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll q^n (q > 1) \ll n!$

Opérations · Formes indéterminées

Opération	Cas Fil.
Somme $u+v$	$+\infty - \infty$
Produit $u \cdot v$	$0 \times \infty$
Quotient u/v	$\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

$$\infty - \infty \cdot 0 \times \infty \cdot \frac{\infty}{\infty} \cdot \frac{0}{0}$$

Ne JAMAIS écrire « $\infty - \infty = 0$ ». Une Fil. exige de transformer l'expression.

Lever une indétermination

- ① Polynôme : factoriser par le monôme dominant
 $n^2 - 5n + 1 = n^2(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}) \rightarrow +\infty$
- ② Quotient : factoriser num. et dén. par leur monôme dominant
 $\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3} \rightarrow \frac{5}{4}$
- ③ Racines : expression conjuguée
 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$

Comparaison · Gendarmes

Comparaison \rightarrow limite infinie

$$u_n \leq v_n \text{ et } \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty$$

Gendarmes \rightarrow limite finie

$$v_n \leq u_n \leq w_n \text{ et } \lim v_n = \lim w_n = \ell \Rightarrow \lim u_n = \ell$$

Ex. $1 + \frac{\sin n}{n}$: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$, gendarmes $\rightarrow \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$, donc limite = 1.

Convergence monotone

croissante + majorée \Rightarrow convergente
 décroissante + minorée \Rightarrow convergente

Le théorème prouve la convergence mais ne donne pas la limite.

Méthode (suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$) :

1. monotonie (par récurrence)
2. majoration / minoration (par récurrence)
3. conclure par convergence monotone

Corollaire : croissante non majorée $\Rightarrow \lim = +\infty$.

Suites géométriques · synthèse

Définition

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

Somme ($q \neq 1$) :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Limite si $-1 < q < 1$

$\lim q^n = 0$ donc :

$$\lim(1 + q + \dots + q^n) = \frac{1}{1 - q}$$

Ex. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

Démo $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$)

$a = q - 1 > 0$, Bernoulli :

$$q^n = (1+a)^n \geq 1+na$$

$\lim(1+na) = +\infty$, par comparaison $\lim q^n = +\infty$.