Suites numériques · limites

Limites d'une suite

Limite finie $\lim u_n = \ell$: la suite se rapproche autant qu'on veut de ℓ → convergente.

Limite infinie $\lim u_n = +\infty$: u_n devient aussi grand que voulu.

Divergente = non convergente (limite $\pm\infty$ ou pas de limite).

$$\lim n = +\infty \quad \cdot \quad \lim n^2 = +\infty \quad \cdot \quad \lim \sqrt{n} = +\infty$$
$$\lim \frac{1}{n} = 0 \quad \cdot \quad \lim \frac{1}{n^2} = 0 \quad \cdot \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Piège · une suite divergente peut ne pas avoir de limite : ex. $u_n = (-1)^n$ alterne entre -1 et 1.

Suite géométrique : limite de q^n

Valeur de q	$\lim q^n$	Comportement
$0 \le q < 1$	0	s'écrase
$q = 1$	1	constante
$q > 1$	$+\infty$	explose

→ $\lim 4^n = +\infty$ · $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

→ $\lim(1 + 0{,}5^n) = 1$ car $0{,}5^n \to 0$

Méthode : identifier q → comparer à 0, 1, $[0;1[$ → conclure.

Opérations sur les limites

Opération	Cas standards	F.I.
Somme $u_n + v_n$	$\ell + \ell'$, $\pm\infty$	$\infty - \infty$
Produit $u_n v_n$	$\ell\ell'$, ∞ signé	$0 \times \infty$
Quotient $\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$, ∞ signé	$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

Les 4 F.I. $\infty - \infty$ | $0 \times \infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$

Ex. $\lim \dfrac{2}{-n^2 - 3} = \dfrac{2}{-\infty} = 0$ (pas de F.I.).

Comparaison & gendarmes

Comparaison · si $u_n \le v_n$ et $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.

Gendarmes · si $v_n \le u_n \le w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$ alors $\lim u_n = \ell$.

Gendarmes · $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$ → $\lim \dfrac{\sin n}{n} = 0$

Comparaison · $n^2 + (-1)^n \ge n^2 - 1 \to +\infty$ → limite $+\infty$

Limite infinie → comparaison · **limite finie** → gendarmes.

Somme géométrique

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \ne 1)$$

→ 1er terme u_0 : $u_0 \cdot \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

→ Si $0 \le q < 1$: $\lim = \dfrac{1}{1 - q}$

Ex. $S = 1 + 3 + \ldots + 3^{13} = \dfrac{1 - 3^{14}}{-2} = 2\,391\,484$

Lim. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Suites arithmético-géométriques

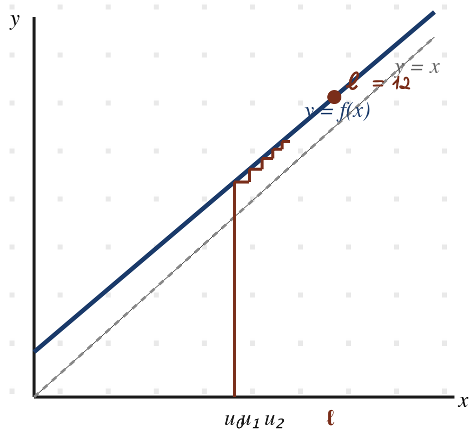
$$u_{n+1} = a\,u_n + b$$

1. **Point fixe** · résoudre $\ell = a\ell + b \Rightarrow \ell = \dfrac{b}{1 - a}$
2. **Poser** $v_n = u_n - \ell$ → géométrique de raison a
3. **Forme explicite** $v_n = v_0 \cdot a^n$
4. **Revenir** à $u_n = v_n + \ell$, étudier la limite

Ex. $u_0 = 5\,000$, $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ · $\ell = -10\,000$

$v_n = u_n + 10\,000 = 15\,000 \cdot 1{,}03^n$ → $u_n = 15\,000 \cdot 1{,}03^n - 10\,000$ → $+\infty$

Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ · escalier



Construction

→ placer u_0 sur l'axe x

→ monter à la courbe : $u_1 = f(u_0)$

→ reporter sur x via $y = x$

→ recommencer : escalier ou spirale

Théorème · si f continue et $u_n \to \ell$ alors $\boxed{f(\ell) = \ell}$

Ne prouve pas la convergence !

Ex. $u_0 = 8$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$: $0{,}85\ell + 1{,}8 = \ell \Rightarrow \ell = 12$.

Méthodes-clés · à retenir

→ **Limite simple** · opérations + limites usuelles

→ $\lim q^n$ · comparer q à 0, 1, $[0;1[$

→ **Somme géom.** · $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

→ **Arithm-géom.** · point fixe + $v_n = u_n - \ell$

→ **Comp / encadrement** · ∞ → comp ; ℓ → gendarmes

→ **Récurrente** · supposer convergence, $f(\ell) = \ell$

Pièges · F.I. ne se résolvent pas seules · q^{n+1} et non q^n au numérateur · le point fixe ne prouve pas la convergence · convergente ≠ « a une limite ».