



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Andrea Campisi

**IMPLEMENTAZIONE DI UN MODELLO DIFFERENZIALE DEL
COMPORTAMENTO TERMOFLUIDODINAMICO DI UN
CIRCUITO TOROIDALE A CIRCOLAZIONE NATURALE**

Relatore:

Prof. Ing. Arturo Pagano

Anno Accademico 2014-2015

“Una volta che abbiate conosciuto il volo, camminerete sulla terra guardando il cielo, perché là siete stati e là desidererete tornare.”

Leonardo Da Vinci

Indice

Introduzione	4
Capitolo 1 – Stato dell’arte sui sistemi a circolazione naturale	6
Capitolo 2 – Studio dei sistemi caotici	8
2.1 – La teoria del caos	8
2.2 – Attrattore	9
2.3 – Biforcazione	11
2.4 – Dimensione frattale	13
2.5 – Esponenti di Lyapunov	14
Capitolo 3 – Il modello analitico per circuiti toroidali	16
3.1 – Descrizione della geometria del circuito toroidale	16
3.2 – Il modello matematico	18
Capitolo 4 – Sviluppo e analisi del modello simulato	23
4.1 – Implementazione e simulazione su Simulink	23
4.2 – Rappresentazioni grafiche delle simulazioni	29
4.2.1 – Rappresentazione nel dominio del tempo	29
4.2.2 – Rappresentazione nello spazio di stato	32
4.3 – Variazione del numero di Rayleigh	36
Conclusioni	43
Ringraziamenti	44
Bibliografia	46

Introduzione

La convezione è un meccanismo combinato di scambio termico e trasporto di materia tipico dei fluidi. Essa è dovuta alla formazione di moti di circolazione all'interno del fluido stesso, prodotti da un gradiente di densità dovuto, a sua volta, ad un gradiente termico.

Nel caso in cui la massa fluida sia interamente coinvolta in una dinamica complessa, che interessa in generale tutto il volume a sua disposizione, il fenomeno viene definito convezione naturale.

Se invece il moto convettivo avviene in un sistema la cui conformazione geometrica determina un moto sostanzialmente monodimensionale, è prassi comune riferirsi ad esso come circolazione naturale.

La circolazione naturale viene sfruttata in diversi settori, da quello industriale (i.e. per il raffreddamento dei reattori degli impianti nucleari) a quello domestico (per il riscaldamento delle abitazioni) grazie alla semplicità del principio di funzionamento. Inoltre, la mancanza di organi di pompaggio, i costi di esercizio nulli e una quasi totale assenza di guasti, rendono la circolazione naturale il meccanismo di scambio termico ideale negli impianti in cui si intendono ridurre le spese e soprattutto mantenere elevata la sicurezza.

Un circuito a circolazione naturale è un dispositivo termofluidodinamico in cui un fluido, percorrendo una traiettoria chiusa, consente di trasferire per convezione calore da una sorgente, posta inferiormente, ad un pozzo, posto superiormente. Attualmente, gli schemi degli apparati sperimentali più utilizzati per lo studio teorico della circolazione naturale sono il circuito toroidale e quello rettangolare.

L'obiettivo di questo elaborato consiste nel ripercorrere gli aspetti fondamentali riguardanti gli studi che hanno avuto ad oggetto i circuiti toroidali ed in particolare l'implementazione di un modello analitico, in grado di descriverne il comportamento

dinamico, in termini di equazioni differenziali del primo ordine. Successivamente tale modello sarà utilizzato per simulare in ambiente Matlab-Simulink le dinamiche del circuito toroidale in alcune condizioni caratteristiche. Lo scopo è quello di illustrare la dinamica del sistema e mostrare come, variando opportunamente le condizioni al contorno imposte nelle sezioni di scambio termico, il sistema possa passare da un comportamento stabile ad un comportamento caotico.

Il Capitolo 1 espone lo stato dell'arte sullo studio dei sistemi a circolazione naturale.

Nel Capitolo 2 verranno fornite alcune nozioni fondamentali per lo studio dei sistemi caotici.

Il Capitolo 3 è dedicato alla descrizione del circuito toroidale e al procedimento seguito per ricavare il modello analitico.

Nel Capitolo 4 verrà spiegato come implementare il modello su Matlab, e verranno mostrati i risultati di diverse simulazioni.

Capitolo 1 – Stato dell’arte sui sistemi a circolazione naturale

I circuiti a circolazione naturale (CCN) trovano un vasto impiego in numerosi campi di applicazione. L’assenza di organi meccanici di pompaggio li rende particolarmente adatti ad applicazioni in cui la sicurezza o ragioni di economicità rappresentano requisiti fondamentali, quali, ad esempio, circuiti di raffreddamento in centrali termonucleari, sistemi di circolazione in sistemi geotermici, nei pannelli solari termici e per il raffreddamento di motori a combustione interna e di dispositivi elettronici.

Uno dei primi modelli matematici di CCN fu realizzato da Welander [1], e descriveva un circuito simmetrico verticale, costituito da una sorgente di calore inferiore e un pozzo superiore supposti puntiformi, collegati da due gambe adiabatiche.

Successivamente furono introdotti i modelli matematici per circuiti di forma rettangolare e toroidale. Tutti presentano somiglianze con il modello di Welander (la disposizione verticale degli elementi e la simmetria) ma solo il circuito toroidale non presenta gambe adiabatiche a collegamento delle sezioni di scambio termico.

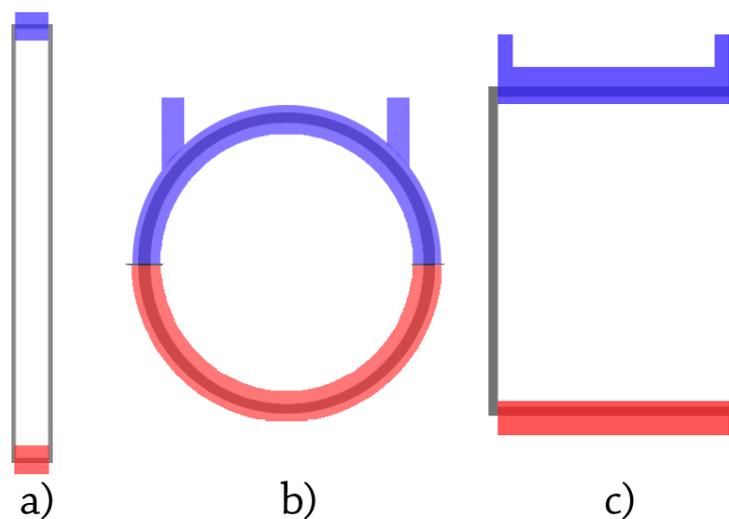


Figura 1.1 - Rappresentazione dei modelli di Welander (a), toroidale (b) e rettangolare (c). In rosso sono evidenziate le zone poste a contatto con le sorgenti di calore, mentre in blu quelle sottoposte a raffreddamento.

In letteratura si trovano diversi studi [2,3,4], sia teorici che sperimentali, che dimostrano come la circolazione naturale sia fortemente dipendente dalla geometria del sistema e dalla natura del fluido di lavoro. Infatti, il comportamento termofluidodinamico di un CCN può variare con la conducibilità termica delle pareti, con l'inclinazione della sorgente di calore, del pozzo o dell'intera struttura [5]. Attualmente, gli studi sono incentrati sulle analisi di stabilità e miglioramento delle prestazioni degli apparati a circolazione naturale. Per modellizzare il comportamento di un CCN possono essere impiegate reti neurali [6], mentre per stabilizzare un sistema si può ricorrere all'impiego di sistemi di controllo in feedback [7,8].

Una caratteristica fondamentale comune a tutti i modelli matematici ritrovabili in letteratura è quella di essere riconducibili al modello matematico proposto da E.N. Lorenz [10]. Non a caso il modello di Lorenz, che pose le basi per lo studio dei sistemi deterministici complessi, si proponeva proprio la descrizione semplificata dei fenomeni di circolazione convettiva che interessano l'atmosfera terrestre.

Capitolo 2 – Studio dei sistemi caotici

In questo capitolo verranno richiamati alcuni concetti utili per l'analisi dei sistemi caotici, in relazione al ruolo che ricoprono nello studio dei circuiti a circolazione naturale.

Inizialmente verranno descritte le strutture topologiche degli attrattori e delle biforcazioni. In seguito, saranno definite due caratteristiche fondamentali degli attrattori, ovvero la dimensione frattale e gli esponenti di Lyapunov.

2.1 – La teoria del caos

La teoria del caos si occupa dello studio di particolari sistemi dinamici deterministici, il cui comportamento, a partire da condizioni iniziali note, può essere previsto per intervalli di tempo limitati.

La causa della predicibilità a breve termine è la forte dipendenza del sistema dalle condizioni iniziali: piccole variazioni, infatti, determinano evoluzioni divergenti.

La nascita dello studio dei sistemi caotici ebbe inizio con il cosiddetto "problema dei tre corpi" (noto già ai tempi di J.L. Lagrange) [9], che consisteva nel calcolare la posizione reciproca di tre corpi soggetti ad una reciproca forza di attrazione gravitazionale.

La teoria del caos nacque tuttavia solo nel 1963, anno in cui Edward Norton Lorenz pubblicò il suo articolo dal titolo "*Deterministic nonperiodic flow*" [10], in cui mostrò i risultati dei suoi studi su modelli semplificati dei moti convettivi che generano fenomeni atmosferici. Lorenz studiò due modelli: una ruota idraulica (Figura 2.1.1), su cui agivano forze meccaniche, e un CCN toroidale, su cui agivano forze di galleggiamento.

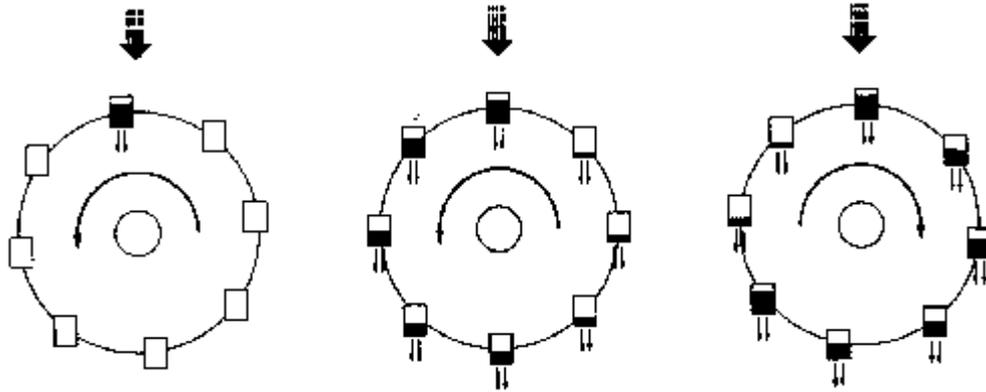


Figura 2.1.1 - Rappresentazione della ruota idraulica. Essa è costituita da una ruota, sul cui bordo sono presenti dei secchi forati, e sulla sua sommità è presente una sorgente d'acqua a portata costante. Procedendo da sinistra a destra, le immagini mostrano come, aumentando la portata, vari il verso di rotazione della ruota.

Egli notò che questi sistemi idrodinamici non-conservativi, su cui agivano forzanti non periodiche, potevano sviluppare un comportamento periodico o irregolare al crescere delle forze esterne.

Lorenz giunse a questa conclusione grazie alla soluzione numerica (tramite integrazione) delle equazioni differenziali ordinarie associate al sistema in esame.

I risultati ottenuti mostrarono che:

- 1- il sistema era fortemente dipendente dalle condizioni iniziali;
- 2- era impossibile prevedere lo stato del sistema dopo un numero indefinito di iterazioni;
- 3- la rappresentazione delle variabili nello spazio di stato presentava una forma frattale.

Vengono definiti caotici i sistemi che soddisfano le condizioni precedentemente elencate.

2.2 – Attrattore

I sistemi dinamici possono essere di tipo conservativo o dissipativo, a seconda che l'energia si conservi o venga dissipata da forze d'attrito interne.

Nel caso dei sistemi deterministici dissipativi si verifica che, superata la fase transitoria iniziale, il loro comportamento converga verso una regione limitata dello spazio delle fasi. Tale regione viene chiamata attrattore.

Esistono diversi tipi di attrattori, distinti a seconda della loro struttura:

- Punto fisso: si verifica quando il sistema raggiunge la condizione di equilibrio in uno stato ben definito (Figura 2.2.1 a).
- Ciclo limite: l'attrattore assume una forma orbitale chiusa (Figura 2.2.1 b).
- Toro limite: presente quando la traiettoria è quasiperiodica, ovvero esistono almeno due frequenze di oscillazione, e il rapporto tra queste è irrazionale (Figura 2.2.1 c).
- Attrattore caotico: si verifica quando il sistema descrive una traiettoria che non si chiude mai su se stessa, e che risulta fortemente dipendente dalle condizioni iniziali (Figura 2.2.1 d).

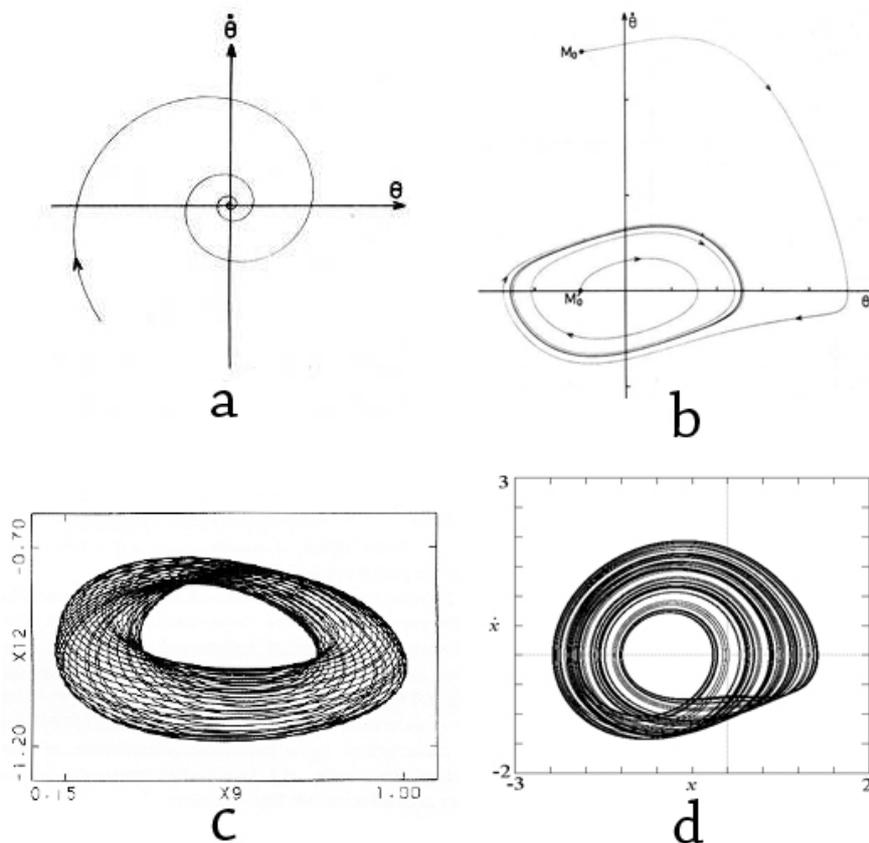


Figura 2.2.1 – Rappresentazione dei diversi tipi di attrattori: punto fisso (a), ciclo limite (b), toro limite (c) e attrattore caotico (d)

L'importanza storica del modello di Lorenz risiede nel fatto che fu il primo per il quale si pervenne all'osservazione di un attrattore definito "*strano*" o, appunto, "*caotico*".

2.3 – Biforcazione

La teoria delle biforcazioni è uno studio matematico che si occupa dei cambiamenti topologici di un dato insieme, sia esso un campo vettoriale o l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Nello studio dei sistemi dinamici, una biforcazione si presenta quando una piccola variazione di uno specifico parametro (detto di biforcazione), determina un cambiamento sostanziale del comportamento del sistema in esame, ovvero una modifica dell'attrattore che lo descrive.

L'analisi delle biforcazioni è di notevole importanza nello studio dei sistemi deterministici, poiché permette di conoscere per quali valori, assunti dai parametri di biforcazione, il sistema assume un comportamento piuttosto che un altro.

Uno dei primi studiosi ad osservare le biforcazioni fu Robert May [11], un fisico interessato alle dinamiche delle popolazioni, e alla relazione tra complessità e stabilità nelle comunità naturali. Egli sviluppò un modello analitico di una comunità in cui il parametro fondamentale era la fertilità della popolazione.

Per valori bassi del parametro, May vide che la popolazione si assestava su un valore singolo; incrementando il parametro oltre una soglia critica, tuttavia, la popolazione oscillava tra due valori. Per analizzare meglio questo fenomeno, piuttosto che rappresentare l'andamento della popolazione in funzione del tempo, al variare del parametro, May e altri studiosi riportarono su un grafico la popolazione "finale" (ovvero a transitorio esaurito) in funzione della fertilità, ottenendo un diagramma di biforcazione.

Nel diagramma riportato in figura 2.3.1, sull'asse delle ascisse è riportato il valore del parametro di biforcazione, mentre su quello delle ordinate quello della variabile di stato. Quando il parametro ha valori bassi, la variabile ha un comportamento stabile e converge, volta per volta, verso un singolo valore stazionario. Al crescere del parametro, tuttavia, l'equilibrio della variabile si scinde in due zone differenti, e poi ciascuna di queste si scinde ulteriormente. Le scissioni, o biforcazioni, diventano sempre più ravvicinate, ovvero hanno luogo per variazioni del parametro via via più ridotte, finché il sistema diventa caotico.

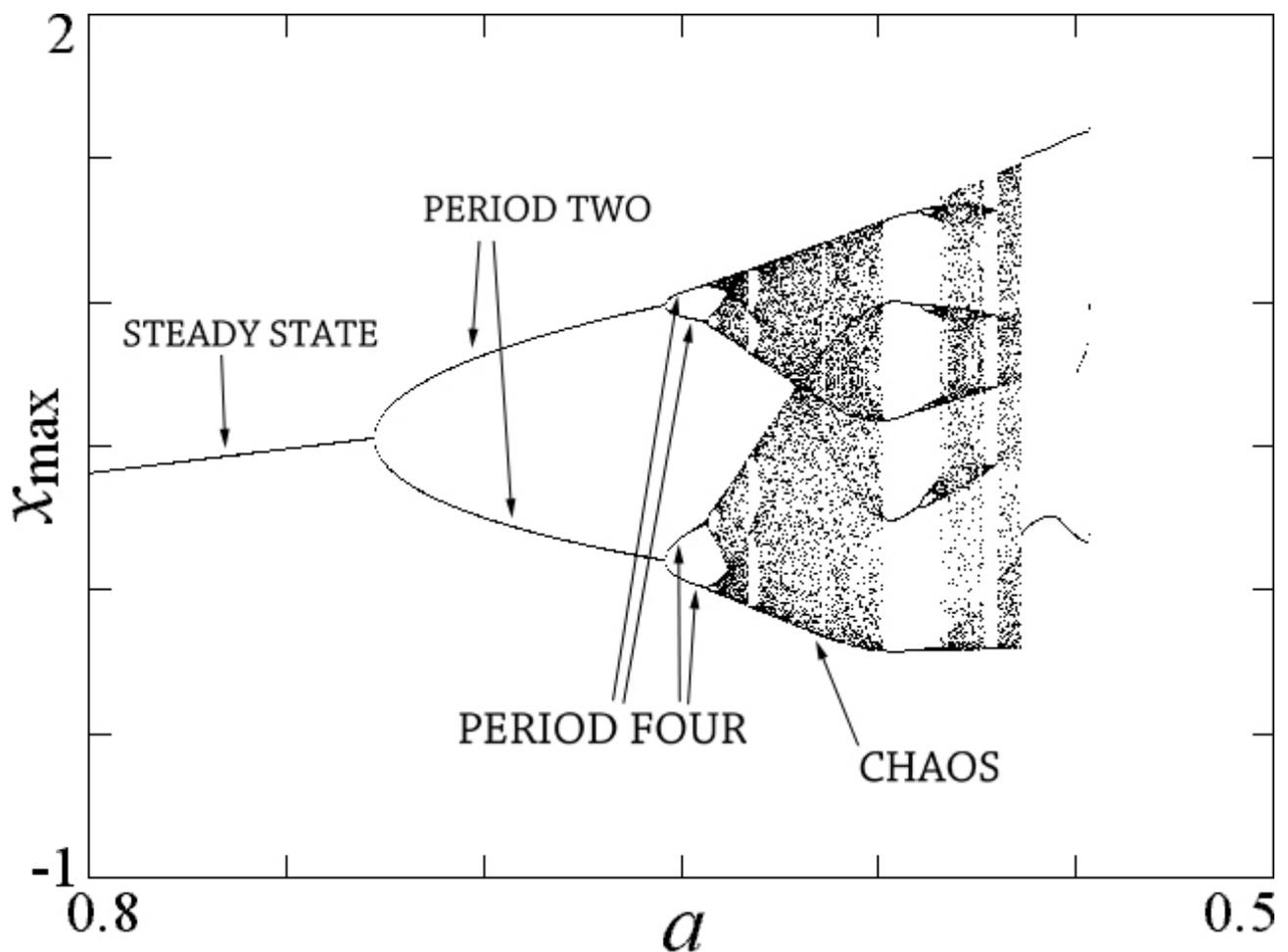


Figura 2.3.1 - Diagramma di biforcazione; sono evidenziati i quattro tratti fondamentali: stato stazionario, periodo due, periodo quattro e regione caotica.

Nella figura 2.3.2 sono mostrate le serie temporali della variabile di stato prima e dopo le biforcazioni. Nel caso rappresentato, si passa dallo stato stazionario a

successivi raddoppiamenti di periodo fino al comportamento caotico, secondo quello che viene denominato "*period-doubling route to chaos*".

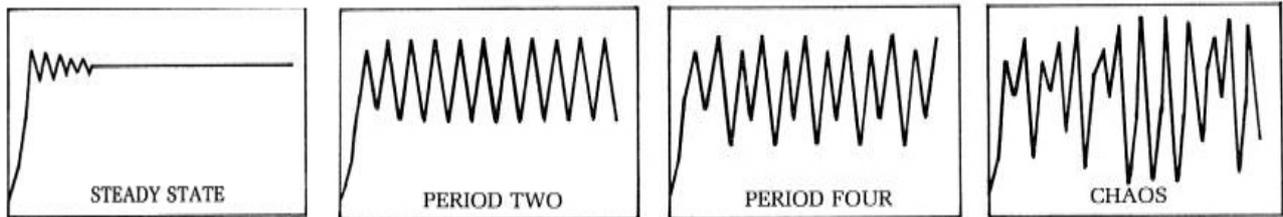


Figura 2.3.2

2.4 – Dimensione frattale

Una proprietà tipica del comportamento caotico risiede nella sua connessione alle strutture geometriche dei frattali. Questo legame è talmente forte che, perché un sistema sia definito caotico, il suo attrattore deve avere una geometria frattale, come accennato in precedenza.

Le caratteristiche principali delle strutture frattali sono l'autosomiglianza e la mancanza di liscenza.

La prima descrive che, dopo ripetuti ingrandimenti, la struttura mantiene lo stesso aspetto geometrico, da cui consegue una inerente invarianza di scala. La seconda si riferisce alla distribuzione disconnessa mostrata da gruppi di traiettorie che costituiscono un attrattore caotico.

Da un punto di vista analitico, queste proprietà sono misurate dalla *dimensione frattale* d_A , che non deve essere necessariamente intera e, per un sistema caotico, deve essere superiore a due [17,18]. Esistono diverse definizioni di dimensione frattale, e le più comuni sono quelle di dimensione di capienza, dimensione di informazione e dimensione di correlazione [18]. Il problema principale di queste definizioni è che il loro calcolo richiede notevoli sforzi computazionali ed è molto sensibile ai disturbi, sempre presenti negli apparati sperimentali. Per queste ragioni,

per valutare la dimensione frattale spesso si ricorre ad un metodo indiretto, basato sul calcolo della dimensione di *embedding* e sul teorema di Taken [19].

Infatti, le dinamiche di un sistema non-lineare generalizzato possono essere descritte a partire dalle serie temporali che misurano specifiche variabili del sistema. La dimensione di embedding viene definita come il numero delle variabili di stato necessarie per rappresentare correttamente le dinamiche del sistema. Il suo valore deve essere pertanto scelto in maniera opportuna. Questo problema, definito come "ricostruzione dello spazio delle fasi", viene spesso risolto impiegando il metodo del *delay embedding* proposto da Taken [19]. Questo metodo permette di valutare sia la dimensione minima dello spazio di stato in cui può essere rappresentato correttamente l'attrattore, sia le variabili che possono essere usate per definire lo spazio di stato.

Il metodo di Taken si basa sulla inclusione di una singola serie temporale, che mostra l'andamento di una variabile di stato di un sistema dinamico dA -dimensionale, all'interno di un vettore dE -dimensionale. Il teorema di embedding assicura che se:

$$dE \geq 2dA + 1 \quad (2.4.1)$$

La creazione del vettore dE -dimensionale coincide con la ricostruzione di uno spazio di stato contenente una varietà liscia per il sistema dA -dimensionale. dA indica la dimensione frattale del sistema, mentre dE indica la dimensione di embedding, che non è propriamente la dimensione del sistema ma il numero delle coordinate dello spazio delle fasi necessarie per includere correttamente l'attrattore nello spazio delle fasi.

2.5 – Esponenti di Lyapunov

Il concetto di dimensione di embedding è collegato all'esistenza di un corrispondente numero di direzioni, lungo le quali si evolvono le dinamiche del

sistema nello spazio delle fasi. La teoria del caos associa a queste direzioni una misura della tendenza di due traiettorie (contigue o indistinguibili) a convergere o divergere.

Considerando per semplicità un sistema monodimensionale, a cui corrisponde un'unica direzione, se δ_0 è la distanza tra due traiettorie nel tempo t_0 , la distanza $\delta(t)$ nel tempo t sarà:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{ht} \quad (2.5.1)$$

L'esponente h è detto esponente di Lyapunov e caratterizza fortemente il comportamento dinamico del sistema [18]. Il segno di questo esponente è di fondamentale importanza poiché descrive se le traiettorie divergono ($h > 0$), convergono ($h < 0$) o mantengono la stessa distanza ($h = 0$).

Per un generico sistema immerso in uno spazio dL -dimensionale, conoscere gli esponenti di Lyapunov dL può essere usato per avere una prova diretta dell'esistenza del caos [17,18]. Da un punto di vista fisico, ad esponenti di Lyapunov positivi e negativi corrisponde l'esistenza di direzioni lungo le quali si verificano, rispettivamente, espansioni e contrazioni dell'attrattore. Un sistema caotico deve avere almeno un esponente di Lyapunov positivo. Inoltre, poiché il sistema deve essere globalmente stabile, la somma di tutti gli esponenti di Lyapunov deve essere negativa.

Capitolo 3 – Il modello analitico per circuiti toroidali

In questo capitolo verrà descritta la geometria del circuito toroidale di riferimento; in seguito si procederà con la sintesi di un modello analitico per analizzare il comportamento del fluido al suo interno.

La procedura seguita ricalca quella proposta da vari autori (Gorman M. *et alii*, 1984; Singer J. *et alii*, 1991; Wang Y. *et alii*, 1992), e conduce ad un modello affidabile di tre equazioni differenziali ordinarie, identico al sistema proposto da Lorenz [10]. Inoltre, si sfrutteranno i risultati matematici ottenuti da Rodriguez-Bernal e Van Vleck [12] per geometrie e condizioni al contorno generiche.

3.1 – Descrizione della geometria del circuito toroidale

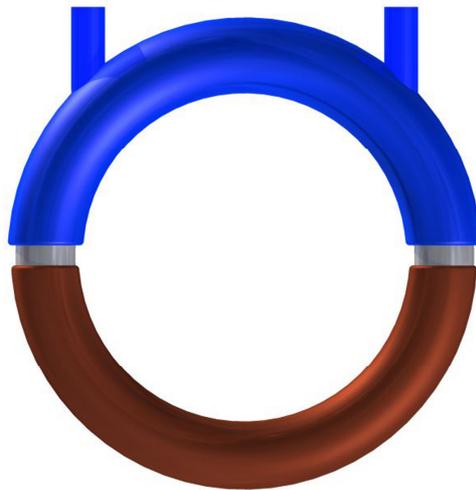


Figura 3.1.1 – Rappresentazione del circuito toroidale

Il circuito toroidale è costituito da un condotto curvato a forma anulare, posto su un piano verticale. Il semianello inferiore è posto a contatto con una sorgente di calore, mentre quello superiore è inserito in uno scambiatore di calore in cui circola acqua

di raffreddamento. La configurazione del sistema e la disposizione degli elementi del circuito è simmetrica rispetto all'asse verticale del toro.

Venendo a contatto con la sorgente di calore, il fluido all'interno del circuito viene riscaldato. La variazione di densità del fluido che ne consegue, determina l'instaurarsi di forze di galleggiamento interne al fluido, che causano quindi un moto di circolazione all'interno dell'anello.

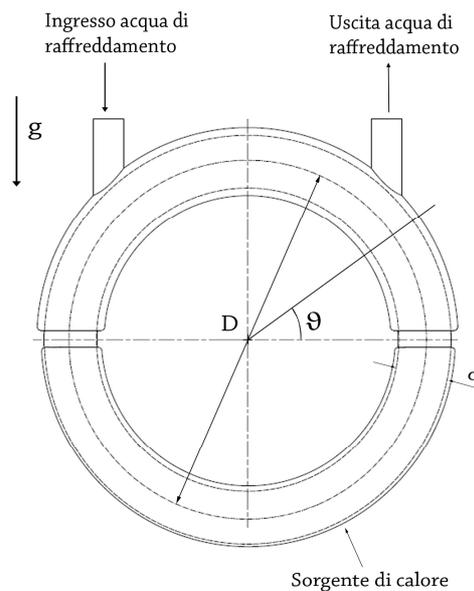


Figura 3.1.2 – Sezione del toroide

Il diametro del condotto è d , mentre quello dell'anello è D . Data la struttura circolare del modello, per comodità si userà un sistema di coordinate polari; con ϑ è indicato l'angolo che individua un generico punto del toroide, mentre la coordinata radiale sarà pari al semidiametro dell'anello.

La temperatura T della superficie esterna del tubo può variare sia in funzione del tempo t sia in funzione dell'angolo ϑ ; inoltre, T è simmetrica rispetto all'asse verticale della struttura. Le variazioni della temperatura superficiale possono indurre il moto nel fluido all'interno dell'anello.

3.2 – Il modello matematico

La definizione del modello matematico si basa sulle ipotesi di fluido incomprimibile e moto unidimensionale.

Scrivendo l'equazione della conservazione della massa risulta che:

$$v = v(t) \quad (3.1)$$

quindi la velocità non dipende dall'angolo ϑ .

Considerando il bilancio della quantità di moto su un elemento infinitesimo del condotto, di lunghezza dx , si ottiene:

$$F_{\vartheta} = \rho \pi r^2 \cdot d\vartheta \cdot \frac{dv}{dt} \quad (3.2)$$

dove ρ è la densità del fluido.

La forza F_{ϑ} può essere considerata come la risultante di tre forze: una dovuta al gradiente di pressione F_p , una dovuta alla forza di gravità F_g e una dovuta allo sforzo di taglio lungo i condotti F_w .

Poiché:

$$F_p = -\pi r^2 \cdot d\vartheta \cdot \frac{dp}{d\vartheta} \quad (3.3)$$

$$F_g = -\rho g \cdot \pi r^2 \cdot d\vartheta \cdot \frac{dz}{d\vartheta} \quad (3.4)$$

$$F_w = -\tau_w \cdot 2\pi r \cdot d\vartheta \quad (3.5)$$

allora l'equazione della conservazione della quantità di moto diventa:

$$\rho \pi r^2 \cdot d\vartheta \cdot \frac{dv(t)}{dt} = -\pi r^2 \cdot d\vartheta \cdot \frac{dp}{d\vartheta} - \rho g \cdot \pi r^2 \cdot d\vartheta \cdot \frac{dz}{d\vartheta} - \tau_w \cdot 2\pi r \cdot d\vartheta \quad (3.6)$$

L'ipotesi di Boussinesq permette di trascurare la dipendenza della densità dalla temperatura, ad eccezione del termine F_g , dove tuttavia è sufficiente considerare una dipendenza lineare dalla temperatura.

Definendo quindi con T_0 la temperatura di riferimento, $\rho_0 = \rho(T_0)$ la densità di riferimento e β il coefficiente volumetrico di espansione, l'ipotesi di Boussinesq diventa:

$$\rho = \rho_0 \cdot [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3.7)$$

Sostituendo questa espressione nella precedente (eq. 3.6), e dividendo per $\pi r^2 \cdot dx$ si ottiene:

$$\rho_0 \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{dp}{d\vartheta} - \rho_0 \cdot [1 - \beta(T - T_0)]g \frac{dz}{d\vartheta} - \frac{2\tau_w}{r} \quad (3.8)$$

Integrando lungo tutto il circuito, si perviene alla seguente relazione:

$$\oint \rho_0 \frac{dv(t)}{dt} d\vartheta = -\oint \frac{dp}{d\vartheta} d\vartheta - \oint \rho_0 \cdot [1 - \beta(T - T_0)]g \frac{dz}{d\vartheta} d\vartheta - \oint \frac{2\tau_w}{r} d\vartheta \quad (3.9)$$

Da cui discende:

$$\rho_0 \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\rho_0 g \beta}{2\pi r} \oint (T - T_0) \frac{dz}{d\vartheta} d\vartheta - \frac{2\tau_w}{r} \quad (3.10)$$

Il bilancio energetico del volume di controllo di lunghezza dx può essere ottenuto considerando i seguenti termini:

- Variazione nell'unità di tempo della energia termica nel volume di controllo:

$$\rho_0 c \pi r^2 d\vartheta \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_0 c \pi r^2 d\vartheta \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right] \quad (3.11)$$

- Energia scambiata per conduzione attraverso le sezioni di ingresso ed uscita del volume di controllo:

$$-k \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \pi r^2 - \left[-k \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta \right] \pi r^2 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) dx \pi r^2 = k \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} d\vartheta \pi r^2 \quad (3.12)$$

- Energia scambiata attraverso la superficie laterale del volume di controllo

$$\Delta Q = -2\pi r d\vartheta \frac{\dot{m}c_p \Delta t}{2\pi r \cdot \pi R} \quad (\text{nel tratto di raffreddamento}) \quad (3.13)$$

$$\Delta Q = 2\pi r \cdot q \cdot d\vartheta \quad (\text{nel tratto di riscaldamento}) \quad (3.14)$$

Per scrivere le condizioni al contorno in maniera compatta, è conveniente introdurre una funzione $h(\vartheta)$ così definita:

$$h(\vartheta) = \begin{cases} -2\pi r d\vartheta \frac{\dot{m}c_p \Delta t}{2\pi r \cdot \pi R} & 0 < \vartheta < \pi r \\ 2\pi r \cdot q \cdot d\vartheta & \pi r < \vartheta < 2\pi r \end{cases} \quad (3.15)$$

Quindi, l'equazione del bilancio dell'energia può essere scritta in questo modo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T}{\partial z} + h(\vartheta) + a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.16)$$

Riassumendo, il modello matematico è costituito dalle equazioni di bilancio della massa, della quantità di moto e dell'energia, che vengono così rappresentate:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{dp}{\rho_0 d\vartheta} - [1 - \beta(T - T_0)]g \frac{dz}{d\vartheta} - \frac{2\tau_w}{\rho_0 r}; \quad v(0) = v_0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T}{\partial z} + h(\vartheta) + a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad T(\vartheta, 0) = T_0(\vartheta) \quad (3.18)$$

È opportuno adimensionalizzare le equazioni 3.17 e 3.18. Per farlo, si introducono i seguenti rapporti adimensionali:

- $\tau = \frac{\rho_0 c_p d}{4h}$ è il tempo adimensionale della circolazione.

- $Ra = \frac{g\beta\Delta T\tau^2}{DP}$, è il numero di Rayleigh, e rappresenta il rapporto tra le forze di galleggiamento e quelle di attrito viscoso; è importante sottolineare che questo numero dipende dalla differenza delle temperature di parete delle superfici di riscaldamento e raffreddamento: proprio questa differenza è la causa del gradiente di densità, e quindi causa del moto del fluido. In definitiva, il numero di Rayleigh è legato alla forzante termica del sistema.

- $P = \frac{32\mu\tau}{d^2} = 8 \frac{Pr}{Nu}$ è il numero di Prandtl del circuito, mentre μ è la viscosità cinematica del fluido.

- $Pr = \frac{\mu}{\alpha}$ il numero di Prandtl del fluido.

- $Nu = \frac{hd}{k}$ è il numero di Nusselt, α e k sono rispettivamente la diffusione termica e il coefficiente di conduzione del fluido.

- $B = \frac{d^2}{NuD^2}$ è il numero di Biot.

Adimensionalizzando le equazioni, si perviene dunque al sistema:

$$\begin{aligned} u &= u(t) \\ \dot{u} &= \frac{1}{\pi} RaP \oint T \cos(\vartheta) d\vartheta - Pu \\ \dot{T} &= -u \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + B \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} + [T_W(\vartheta, t) - T] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il modello matematico ottenuto è costituito da una coppia di equazioni differenziali, di cui una è ordinaria, l'altra è alle derivate parziali. Per la risoluzione del sistema, è necessario pertanto ridurlo ad un modello ad equazioni differenziali ordinarie.

Ricorrendo allo sviluppo in serie di Fourier [13] delle funzioni caratterizzanti il sistema, e sostituendo le serie nelle equazioni di Navier-Stokes precedentemente ricavate, si ottiene un sistema infinito di equazioni differenziali ordinarie. Le prime tre di queste equazioni, riferibili al primo termine dello sviluppo in serie (ovvero al

primo modo, quello fondamentale) possono essere risolte indipendentemente dalle altre e senza ricorrere ad ulteriori troncamenti. Il sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = Pr(y - x) \\ \dot{y} = Ra \cdot x - xz - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (3.20)$$

dove β è un coefficiente geometrico.

In queste equazioni sono state introdotte tre nuove variabili di stato; nello specifico: x è proporzionale alla velocità del moto convettivo, y è proporzionale alla differenza di temperatura tra le correnti ascendenti e discendenti, z è proporzionale allo scostamento della temperatura dalle condizioni di linearità.

Questo modello matematico coincide con quello ricavato da E. N. Lorenz nel 1963.

Capitolo 4 – Sviluppo e analisi del modello simulato

In questo capitolo verrà spiegato come implementare il modello matematico ricavato su Simulink e come impostare i parametri fondamentali per eseguire correttamente la simulazione. Inoltre, verranno mostrate le serie temporali delle variabili di stato e il comportamento del sistema nello spazio di stato.

Infine, verrà mostrato come cambia l'andamento del sistema variando il numero di Rayleigh (che sintetizza le forze agenti sul sistema).

4.1 – Implementazione e simulazione su Simulink

Per l'analisi del sistema, il modello matematico precedentemente ricavato è stato implementato in Matlab (versione R2013a), tramite l'ambiente Simulink. Questo software permette di rappresentare un modello tramite un diagramma a blocchi. Dalla finestra principale del software, si può accedere alla libreria dei blocchi di Simulink, in cui sono presenti tutti gli operatori analitici utili per realizzare un diagramma.

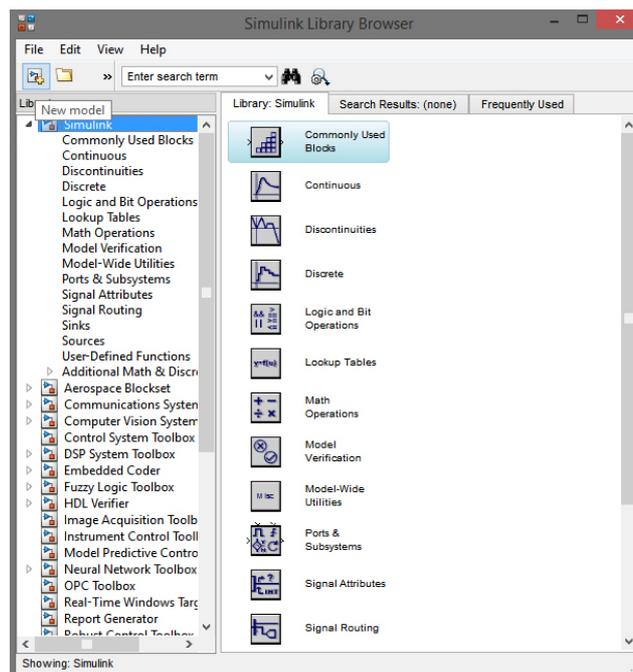


Figura 4.1.1 - Libreria dei blocchi utilizzabili su Simulink

I blocchi impiegati per l'implementazione sono i seguenti:

- Blocco di output, utilizzato per identificare i segnali in uscita e le variabili di stato (Figura 4.1.2 a);
- Nodo sommatore, impiegato per effettuare la somma algebrica delle variabili in ingresso al nodo (Figura 4.1.2 b);
- Nodo moltiplicatore, usato per calcolare il prodotto di due variabili (Figura 4.1.2 c);
- Blocco integratore, serve a ricavare l'integrale di una variabile; al suo interno si possono assegnare le condizioni iniziali (Figura 4.1.2 d);
- Guadagno, impiegato per moltiplicare una variabile per un termine costante (Figura 4.1.2 e).

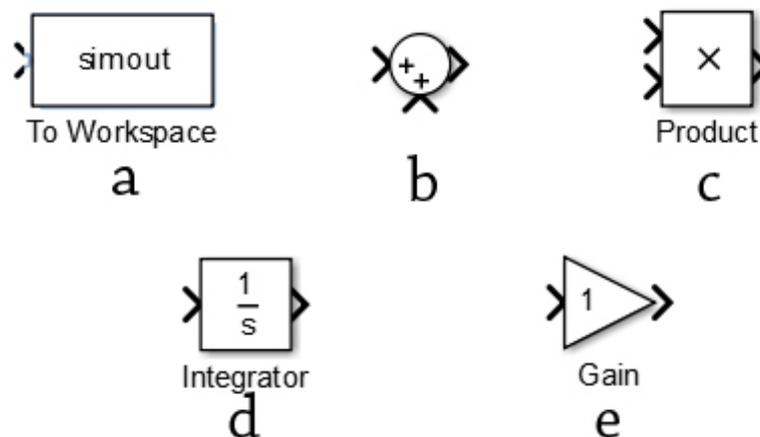


Figura 4.1.2 – Blocchi principali utilizzati per la realizzazione del diagramma.

Per l'implementazione del modello, sono stati sfruttati tre blocchi di output principali, che identificano le variabili x , y e z del sistema di equazioni differenziali ordinarie trovato in precedenza, che viene qui riportato per comodità:

$$\begin{cases} \dot{x} = Pr(y - x) \\ \dot{y} = Ra \cdot x - xz - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (3.20)$$

A monte dei blocchi di output sono stati inseriti dei blocchi integratori; in questo modo, prima dell'integrazione si ricavano i valori delle derivate (quindi il secondo membro di ciascuna equazione), mentre con l'integrazione si ottengono le serie temporali dei valori assunti dalle variabili di stato.

Nel sistema, inoltre, si individuano tre costanti, inserite nel diagramma a blocchi tramite gli operatori di guadagno.

Sfruttando infine i nodi estrattori, è possibile prelevare un segnale per poi inserirlo nei blocchi sommatore o moltiplicatori, a seconda delle esigenze.

Il risultato dell'implementazione è mostrato in figura 4.1.3.

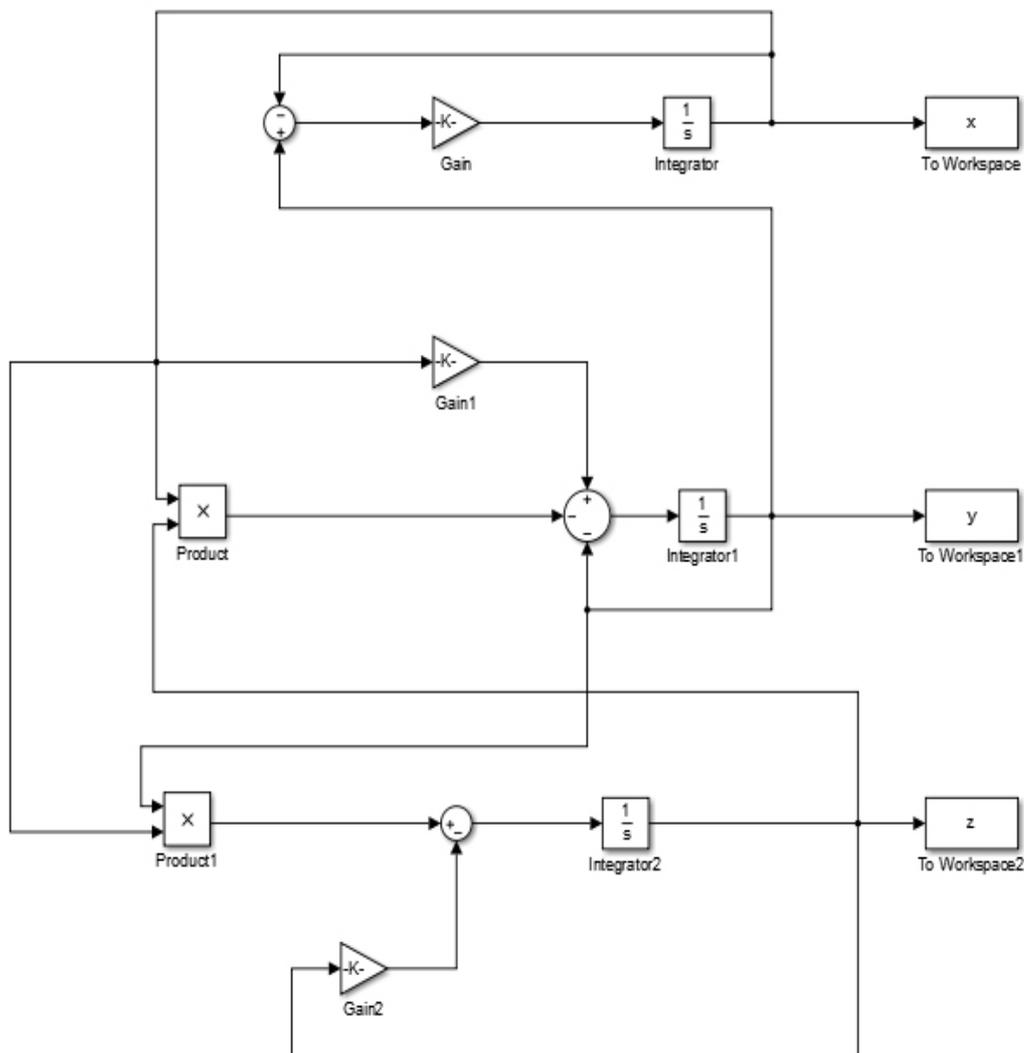


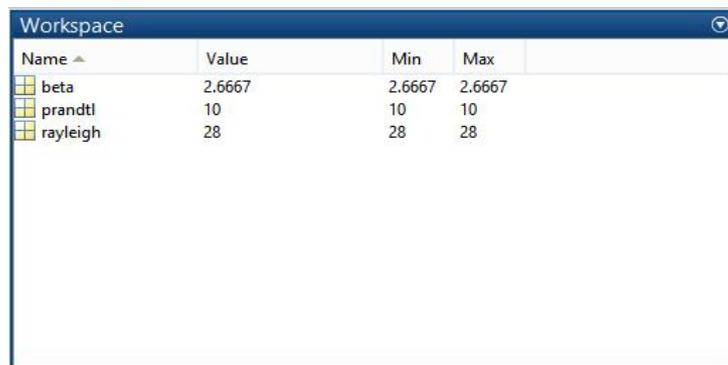
Figura 4.1.3 – Diagramma a blocchi del sistema

Occorre infine assegnare i valori dei parametri adimensionali. Al variare di questi, infatti, si definiscono le condizioni operative del circuito (proprietà del fluido, geometria e condizioni al contorno del sistema).

Nel caso in esame, al fine di rappresentare i risultati, si sono assunti i seguenti valori:

$$Pr = 10, \beta = 2.667, Ra = 28.$$

Dopo essere stati inseriti nella finestra dei comandi di Matlab, essi appariranno nel workspace (Figura 4.1.4).



Name	Value	Min	Max
beta	2.6667	2.6667	2.6667
prandtl	10	10	10
rayleigh	28	28	28

Figura 4.1.4 – Aspetto del workspace dopo l’inserimento dei parametri adimensionali

Tramite un menu apposito, è possibile impostare i parametri necessari per l’integrazione nel tempo delle equazioni differenziali (Figura 4.1.5).

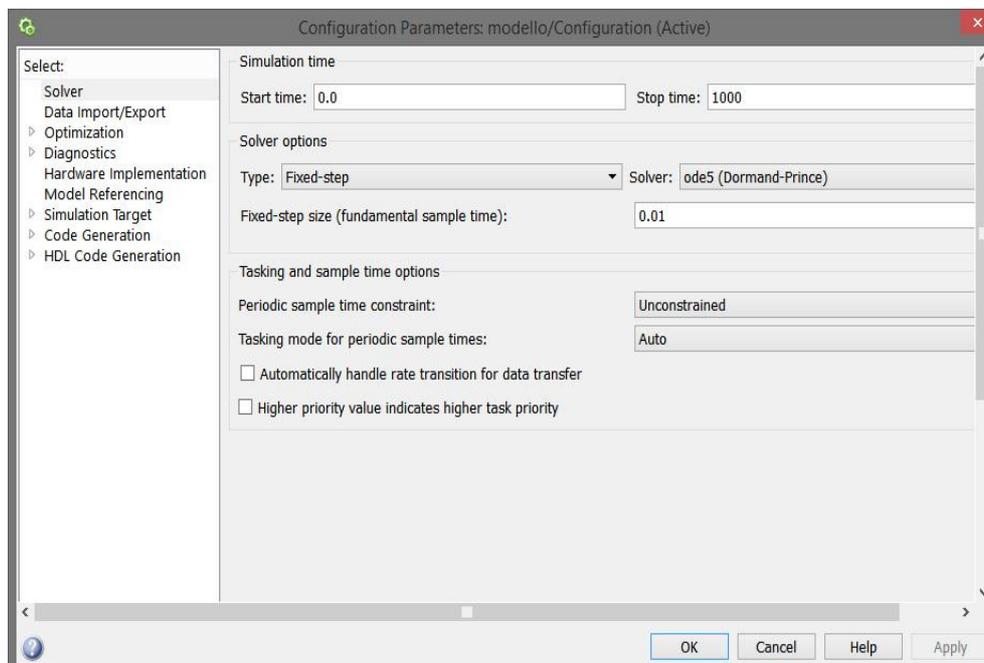


Figura 4.1.5 – Menu di configurazione delle impostazioni di simulazione

Questi parametri sono: il tempo di inizio e di fine della simulazione, il tipo di risolutore (se a step fisso o variabile) e l'algoritmo da utilizzare. Nel caso in esame, si è scelto di terminare la simulazione a $t = 1000s$ e di utilizzare un risolutore a passo fisso d'integrazione (posto inizialmente a $0.01s$) secondo l'algoritmo di Dormand-Prince.

Inoltre, tramite il menu di regolazione dei blocchi di integrazione (mostrato in figura 4.1.6), sono stati fissati i valori iniziali delle variabili.

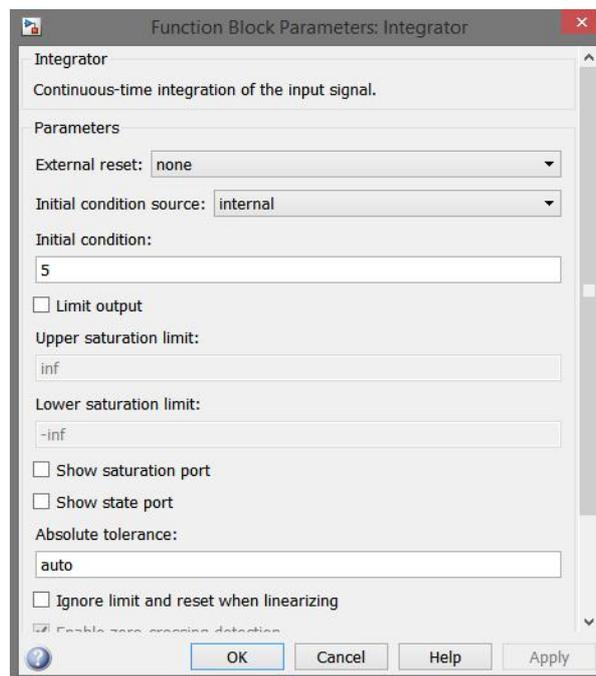


Figura 4.1.6 – Menu di regolazione dei blocchi di integrazione

Le condizioni iniziali sono state fissate a $x(0) = y(0) = z(0) = 5$.

Una volta completata la simulazione, è possibile procedere con la rappresentazione delle serie temporali delle variabili nello spazio di stato. Rappresentando l'andamento di x e y , con la configurazione precedentemente descritta, si è ottenuto l'attrattore di figura 4.1.7.

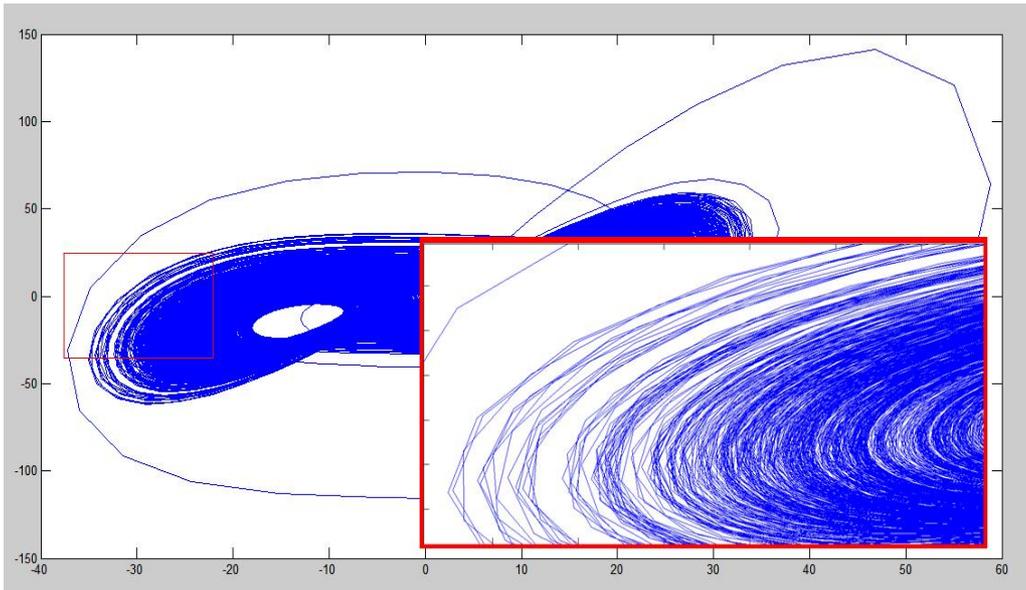


Figura 4.1.7 – Attrattore sul piano x-y ottenuto con passo di integrazione pari a 0.01s.

Come si può notare dall'ingrandimento, la struttura segmentata dell'attrattore indica come la scelta iniziale del passo di integrazione sia inadeguata.

Pertanto, si è optato per una riduzione fino a 0.001s.

Con il nuovo passo di integrazione, il risultato è mostrato in figura 4.1.8.

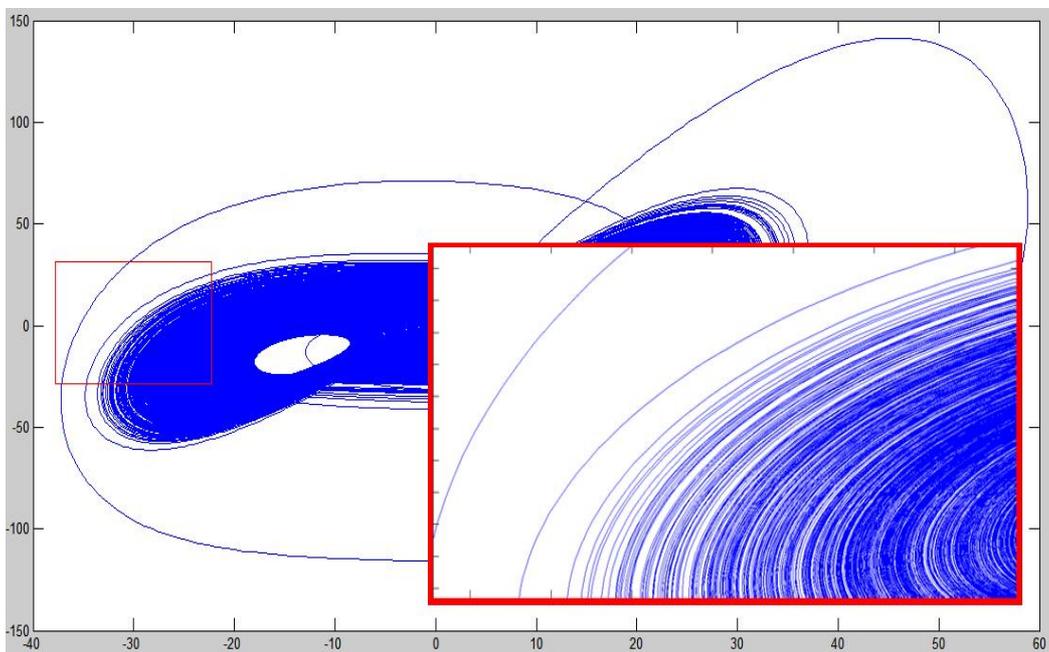


Figura 4.1.8 - Attrattore sul piano x-y ottenuto con passo di integrazione pari a 0.001s.

4.2 – Rappresentazioni grafiche delle simulazioni

Poiché l'andamento della simulazione risulta soddisfacente, si procede con la rappresentazione dell'andamento delle serie temporali.

4.2.1 – Rappresentazione nel dominio del tempo

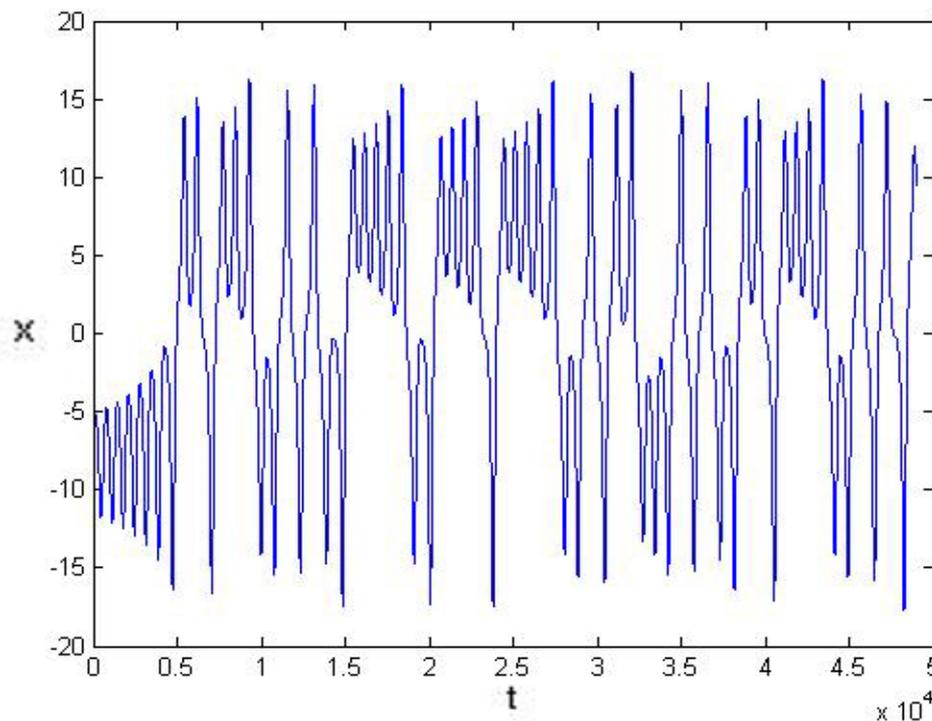


Figura 4.2.1.1

Nella figura 4.2.1.1, è rappresentato l'andamento della variabile x per un intervallo di tempo compreso tra 1000s e 50000s. Si può notare che il moto all'interno del circuito presenta oscillazioni irregolari, con ricorrenti inversioni della direzione del flusso. Infatti, i valori positivi e negativi assunti dalla variabile corrispondono, rispettivamente, ad una direzione antioraria ed oraria assunta dalla circolazione del fluido.

Un comportamento simile si nota anche nella variabile y , mostrata in figura 4.2.1.2. Questo significa che anche la temperatura delle correnti convettive subisce variazioni irregolari.

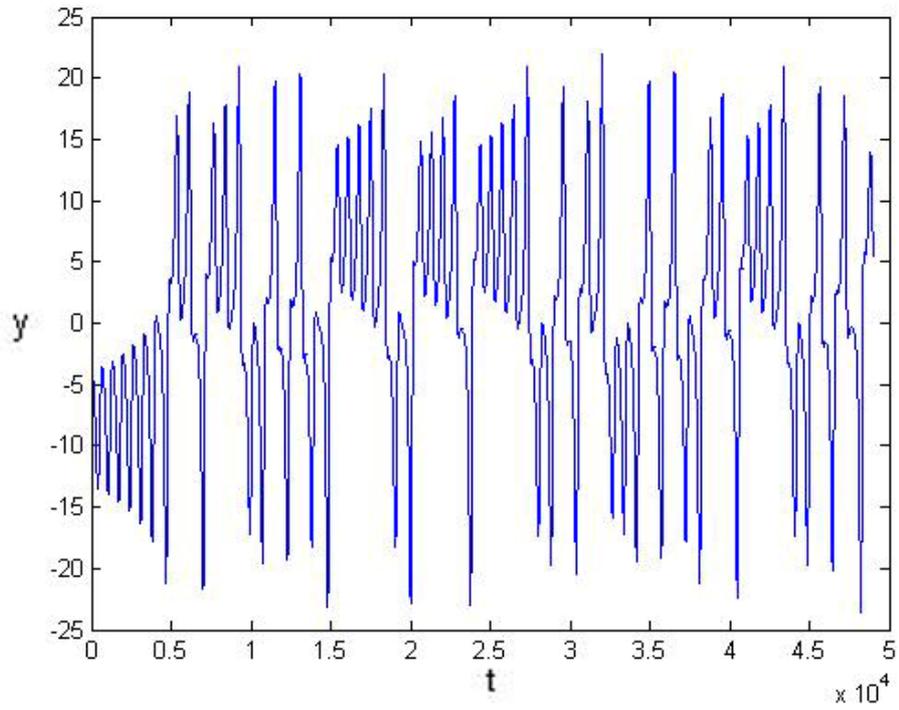


Figura 4.2.1.2

Nell'andamento della variabile z si riconosce invece un moto con frequenze di oscillazione più elevate:

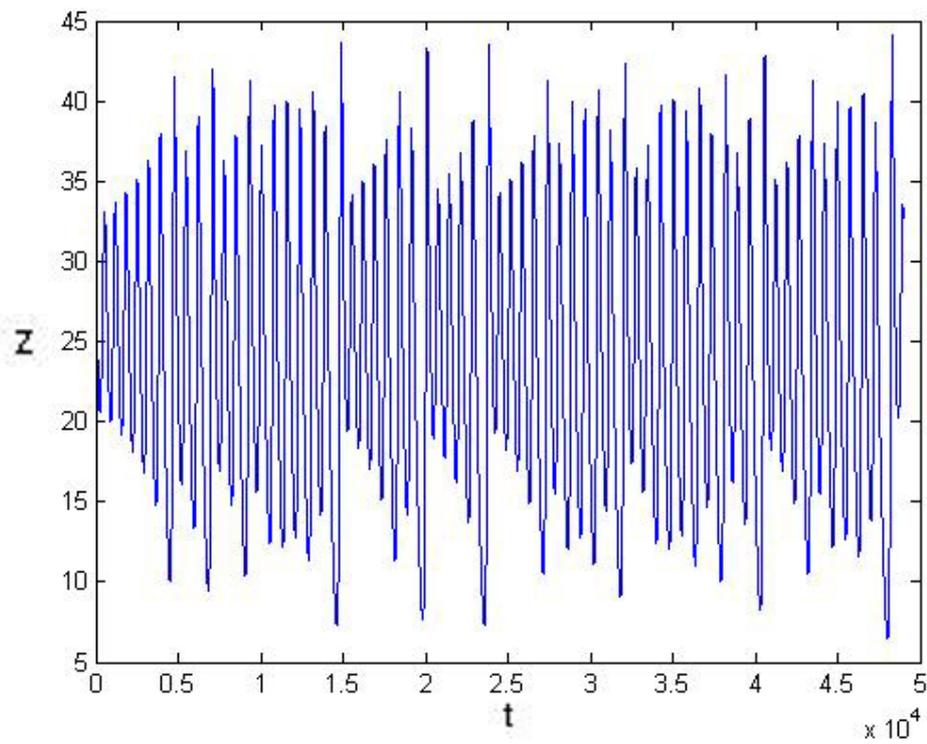


Figura 4.2.1.3

Il moto di circolazione del fluido all'interno del circuito è legato alla variazione di densità, e quindi al calore scambiato durante il contatto con la sorgente.

Inizialmente, il moto è circolare e, data la simmetria perfetta del circuito, può innescarsi indifferentemente sia in senso orario che antiorario. Il fluido riscaldato sale verso lo scambiatore, e dopo aver ceduto parte del proprio calore torna in basso verso la sorgente. La temperatura del fluido, a questo punto, non sarà la stessa di inizio del processo perché la quantità di calore ceduto all'acqua di raffreddamento è inferiore a quello ricevuto dalla sorgente. Ciò è dovuto alla spinta che il fluido raffreddato subisce da parte del fluido appena allontanatosi dalla sorgente di calore.

Dopo un determinato numero di cicli, questa spinta determinerà una velocità talmente elevata da non consentire una permanenza sufficiente a garantire un adeguato raffreddamento. Il fluido ancora a temperatura relativamente alta torna verso la sorgente e, ricevendo ulteriormente del calore, determina una forza convettiva che tende a farlo risalire verso lo scambiatore, stavolta in verso opposto. Si determina quindi una inversione di flusso.

Il fenomeno delle inversioni si ripete più volte, ed è tipicamente non periodico e, in particolare, caotico.

4.2.2 – Rappresentazione nello spazio di stato

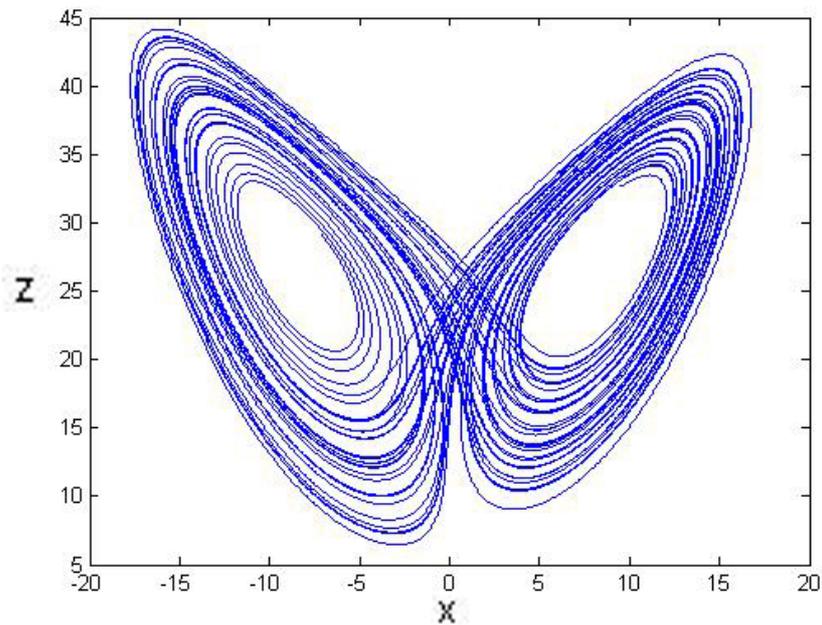


Figura 4.2.2.1

La figura 4.2.2.1 mostra l'andamento del sistema nello spazio di rappresentazione definito dalle variabili di stato $x - z$, seguendo la traiettoria tipica dell'attrattore a *farfalla* del modello di Lorenz. La caratteristica fondamentale di questo attrattore risiede nel fatto che, considerando due punti differenti appartenenti a due traiettorie molto vicine, dopo un certo numero di iterazioni esse saranno molto distanti tra loro. Associata a questa vi è un'altra caratteristica notevole, consistente nella non-periodicità del moto: la traiettoria non si chiude mai, quindi il sistema non passerà mai più di una volta esattamente per lo stesso stato.

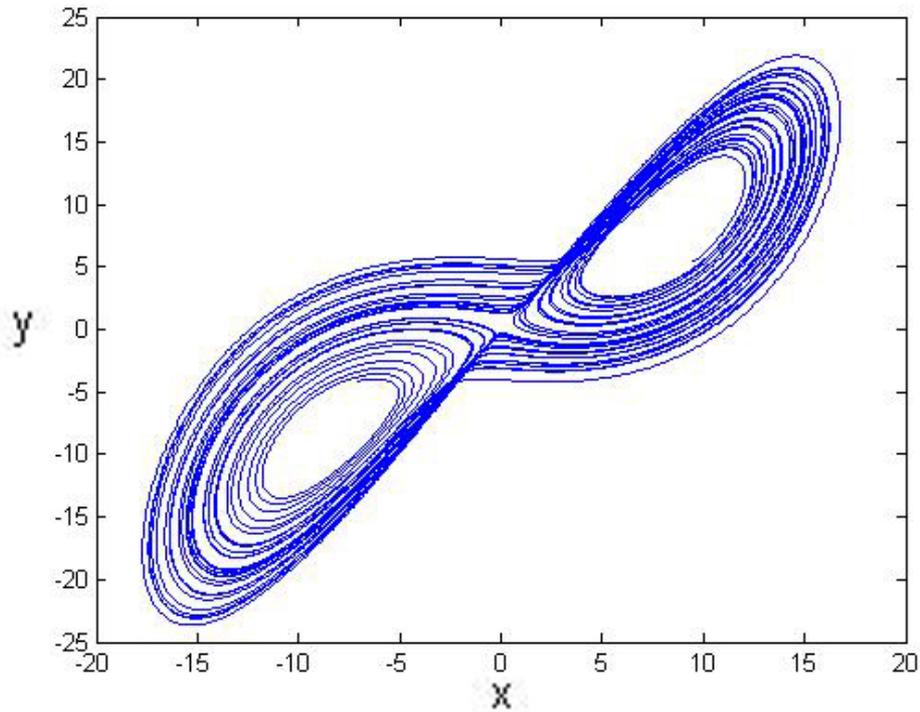


Figura 4.2.2.2

Inoltre, come conseguenza della struttura perfettamente simmetrica del circuito toroidale, il sistema percorre un tragitto che forma due spirali, evolventi in tre dimensioni, che circondano due regioni differenti dello spazio. Il fluido circola per un certo tempo seguendo una direzione, ma è soggetto ad oscillazioni progressivamente crescenti, fino a quando, ad una oscillazione più ampia corrisponderà una inversione della direzione di circolazione. Il passaggio da un'ala all'altra dell'attrattore corrisponde proprio ad una inversione di direzione.

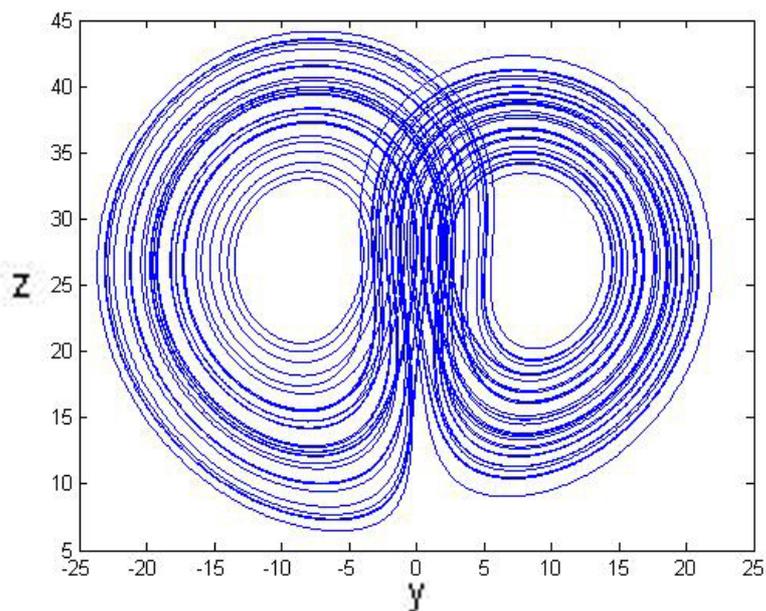


Figura 4.2.2.3

Infine, un'ulteriore caratteristica dell'attrattore del sistema in esame è la struttura frattale, caratteristica tipica delle dinamiche di natura caotica. Infatti, ingrandendo più volte una regione dello spazio, si ottiene localmente una distribuzione in fasce in cui passano le traiettorie alternate a fasce "proibite" in cui non si osserva il passaggio di traiettorie, secondo caratteristiche geometriche analoghe per le diverse scale alle quali si esegue l'osservazione.

Successivi ingrandimenti, infatti mostrano che tale distribuzione si ripete anche all'interno delle singole fasce (Figura 4.2.2.4).

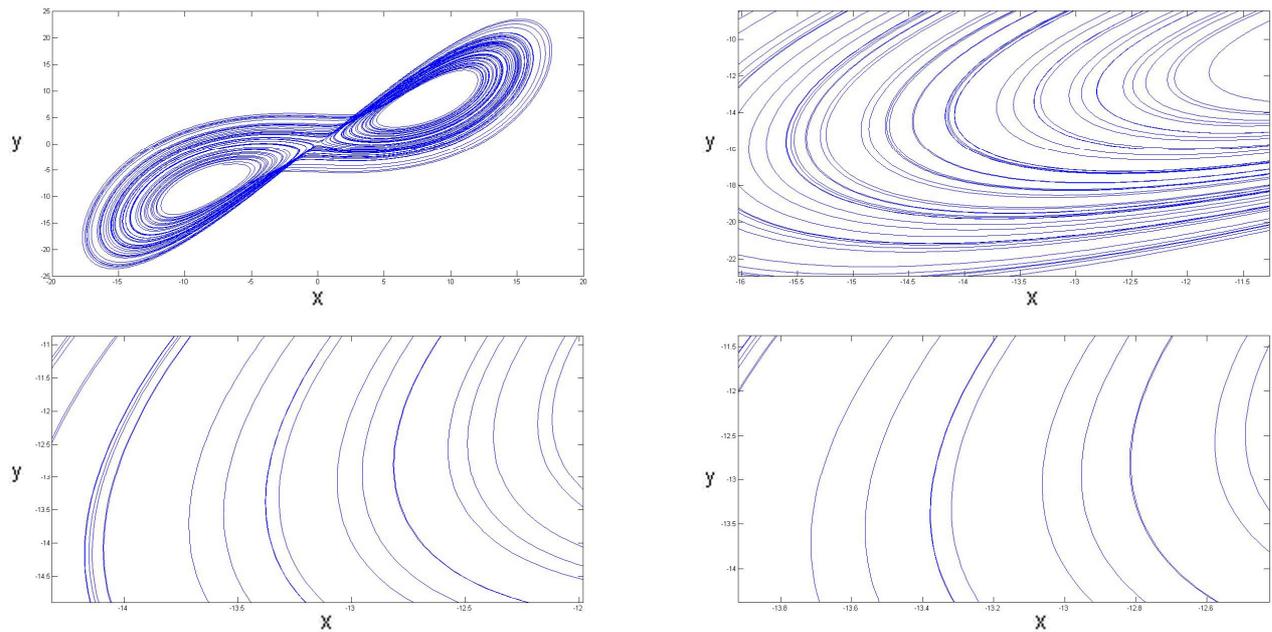


Figura 4.2.2.4 - A partire dall'immagine in alto a sinistra, sono mostrati ingrandimenti successivi di una regione compresa tra $-15 < x < -11$ e $-15 < y < -10$.

Riassumendo, il sistema dinamico analizzato presenta le seguenti caratteristiche:

- 1- È sensibilmente dipendente dalle condizioni iniziali;
- 2- Non è possibile prevedere l'andamento della traiettoria del suo attrattore per intervalli di tempo molto lunghi;
- 3- Presenta un attrattore di forma frattale.

In definitiva, in base ai parametri scelti per condurre la simulazione, il sistema presenta comportamento caotico.

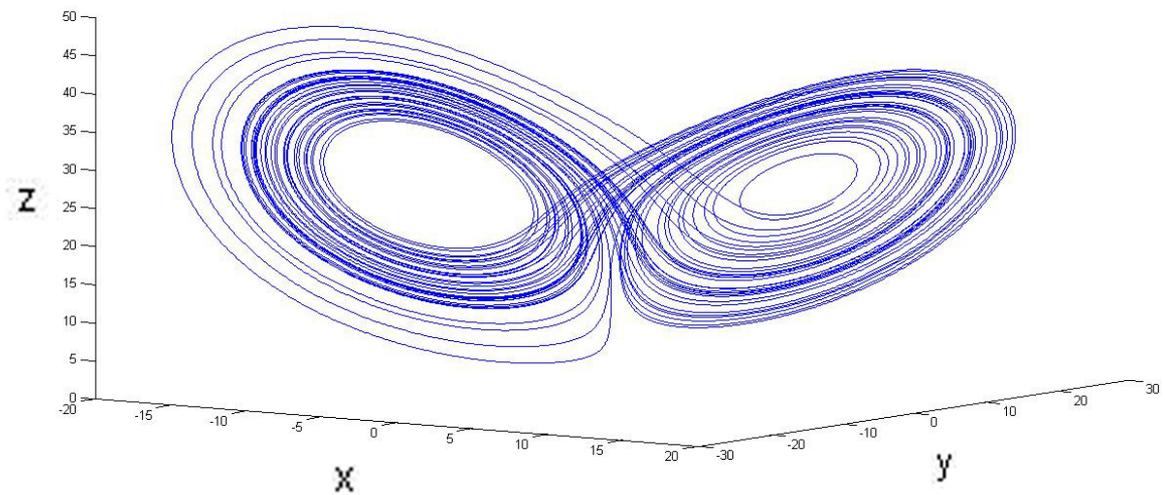


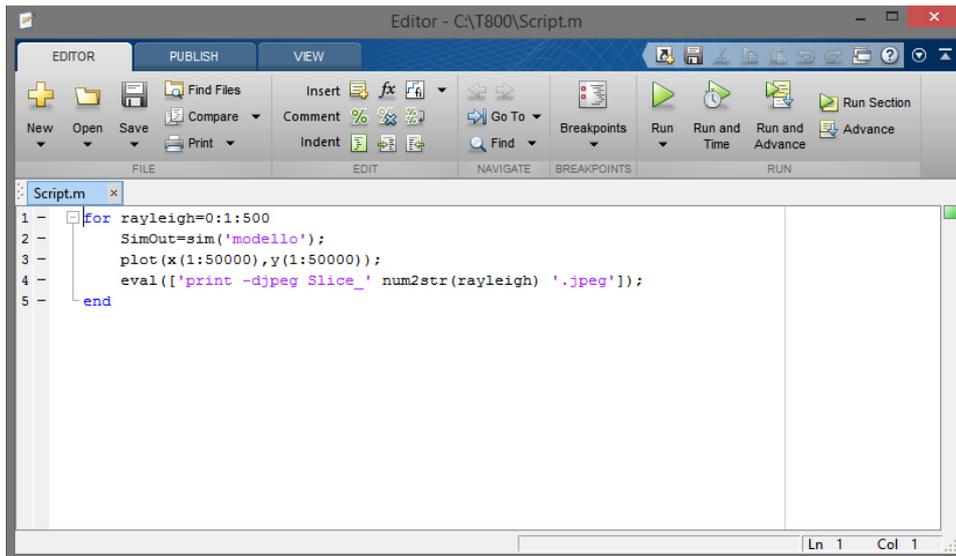
Figura 4.2.2.5 – Rappresentazione dell'attrattore nello spazio di stato tridimensionale

4.3 – Variazione del numero di Rayleigh

Il comportamento del sistema dipende dalla scelta dei parametri poiché questi sono legati alle caratteristiche del fluido presente all'interno dell'anello e dalle condizioni imposte al contorno, come è stato mostrato in precedenza. Variando i valori dei numeri di Prandtl e di Rayleigh, si ottengono quindi risultati differenti, in cui il sistema può presentare o meno comportamento caotico. Chiaramente, si otterranno anche attrattori differenti per ogni set di parametri scelto.

Tuttavia, una volta fissata la geometria ed il fluido, le variazioni che interessa analizzare si ottengono sperimentalmente variando il solo numero di Rayleigh, forzante del sistema e legato al rapporto tra forze di galleggiamento e quelle di attrito viscoso.

Per verificare cosa accade attraverso una serie di simulazioni, è stato scritto un breve script su Matlab, in modo da velocizzare il processo di visualizzazione dei diversi attrattori.



```
Editor - C:\T800\Script.m
EDITOR PUBLISH VIEW
New Open Save Find Files Insert fx f_i
Comment % % % Go To Breakpoints Run Run and Run and Run Section
Print Compare Indent Find Breakpoints Run Run and Run and Advance
FILE EDIT NAVIGATE BREAKPOINTS RUN
Script.m x
1 - for rayleigh=0:1:500
2 -     SimOut=sim('modello');
3 -     plot(x(1:50000),y(1:50000));
4 -     eval(['print -djpeg Slice_' num2str(rayleigh) '.jpeg']);
5 - end
Ln 1 Col 1
```

Figura 4.3.1 – Linee di codice dello script

Lo script consiste di una struttura iterativa (ciclo for) all'interno della quale si fa variare il numero di Rayleigh da 1 a 500, con un passo unitario. Sono presenti inoltre un comando che permette di avviare la simulazione, uno che permette di rappresentare i grafici ed un ultimo che consente di esportare i grafici come immagini.

Di seguito vengono proposti gli attrattori più significativi, rappresentati sul piano $x - y$ per un intervallo di tempo di 100s.

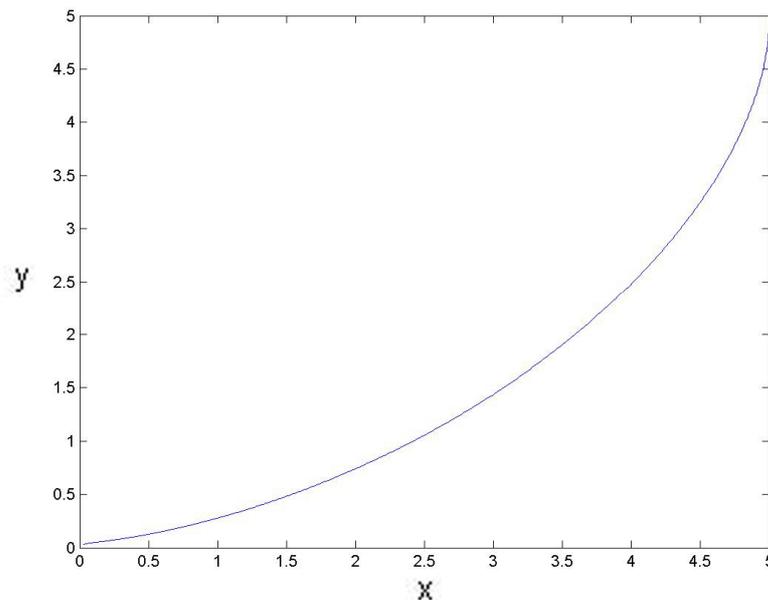


Figura 4.3.2

La figura 4.3.2 mostra l'andamento del sistema per $Ra = 1$. Si può osservare come esso tenda dallo stato iniziale allo stato zero: per il numero di Rayleigh in esame, le forze dissipative prevalgono sulle altre e il sistema, soggetto ad una forzante molto debole e fortemente smorzato, tende rapidamente alla condizione di equilibrio stabile. Questa condizione, data l'assenza di moto, coincide con una stratificazione verticale della temperatura in condizioni di scambio termico puramente conduttivo.

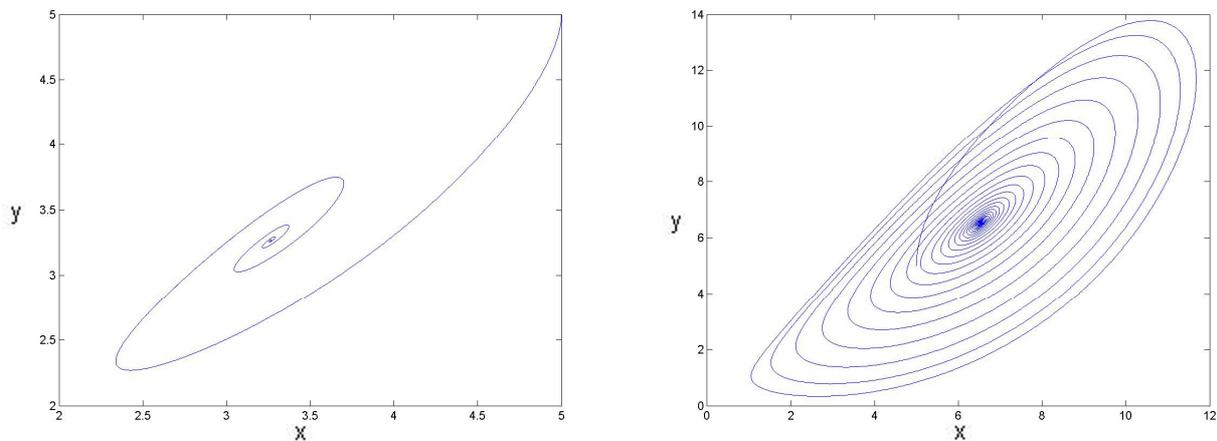


Figura 4.3.3

In figura 4.3.3 vengono rappresentati gli attrattori per $Ra = 5$ (a sinistra) e $Ra = 17$ (a destra). La differenza tra i due risiede nel raggiungimento di una condizione stazionaria descritta da un diverso valore della velocità di circolazione.

Anche in questo caso, l'attrattore è un punto fisso, ma si è osservato che aumentando di poco il numero di Rayleigh, aumentano anche le oscillazioni del sistema attorno al punto di equilibrio.

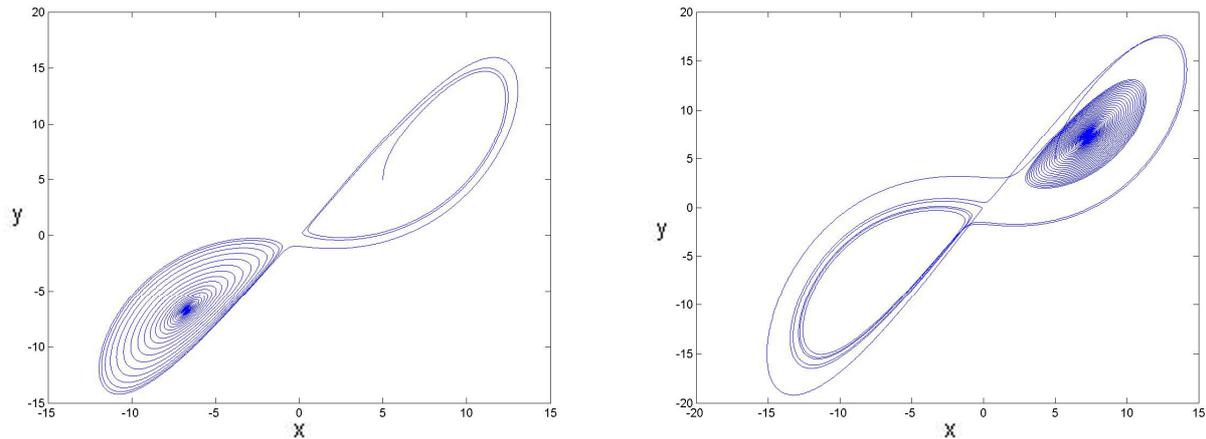


Figura 4.3.4

Nella figura 4.3.4 sono mostrati gli attrattori per $Ra = 18$ e $Ra = 21$.

Si può notare come siano presenti due punti fissi; dopo una serie di oscillazioni più ampie, il sistema viene infine attratto da uno dei due. Inoltre, si verifica una inversione di flusso prima che il sistema esaurisca il transitorio.

Aumentando ulteriormente il numero di Rayleigh, si raggiunge un valore critico (pari a 28), detto di biforcazione, in corrispondenza del quale i due punti fissi perdono la loro stabilità e diventano repulsivi. In corrispondenza della biforcazione si osserva la nascita di un nuovo attrattore, sostanzialmente differente rispetto ai due punti fissi visti in precedenza (figura 4.2.2.2).

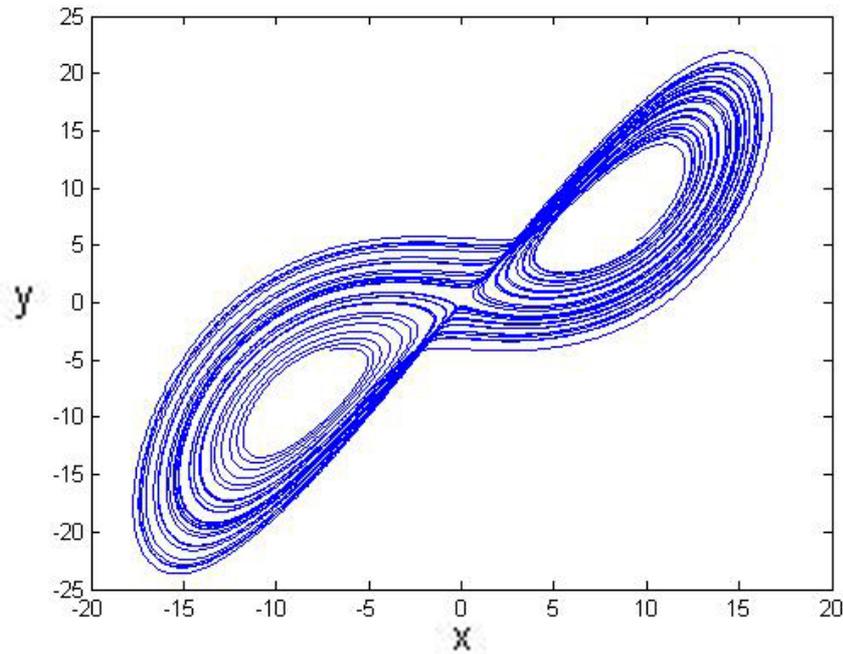


Figura 4.2.2.2

La struttura morfologica degli attrattori, seppur variando, rimane sostanzialmente simile per numeri di Rayleigh crescenti. Tuttavia, raggiunti valori prossimi a 200, la loro forma cambia ulteriormente.

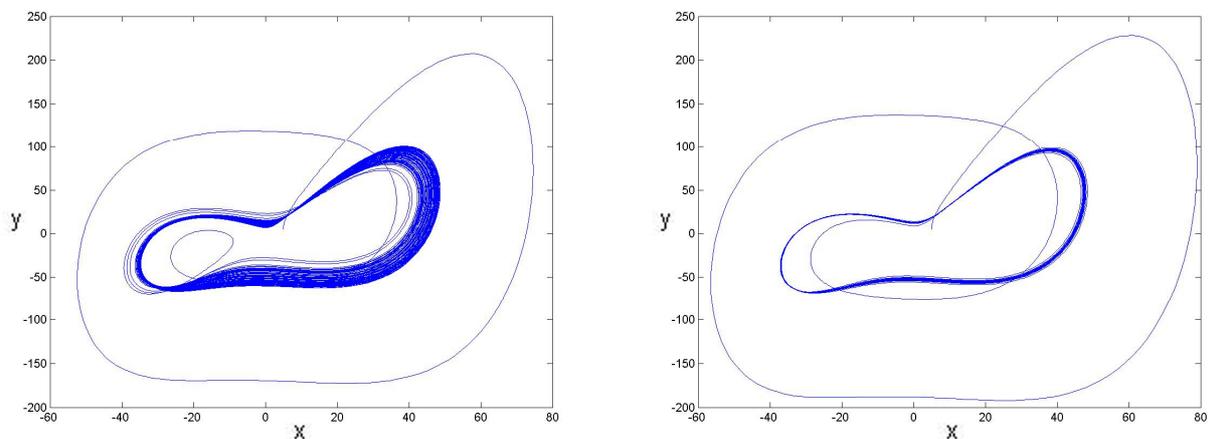


Figura 4.3.5

In figura 4.3.5 sono mostrati gli attrattori per $Ra = 212$ e $Ra = 233$. Si può notare come la traiettoria del sistema si discosti fortemente dalla struttura tipica dell'attrattore strano: infatti, partendo da punti molto vicini, le traiettorie non tendono più a divergere, ma convergono. Quindi, per valori del numero di Rayleigh molto elevati, quando le forze di galleggiamento prevalgono su quelle di attrito

viscoso, l'attrattore assume la forma di un ciclo limite, con circolazione alternata nelle due direzioni.

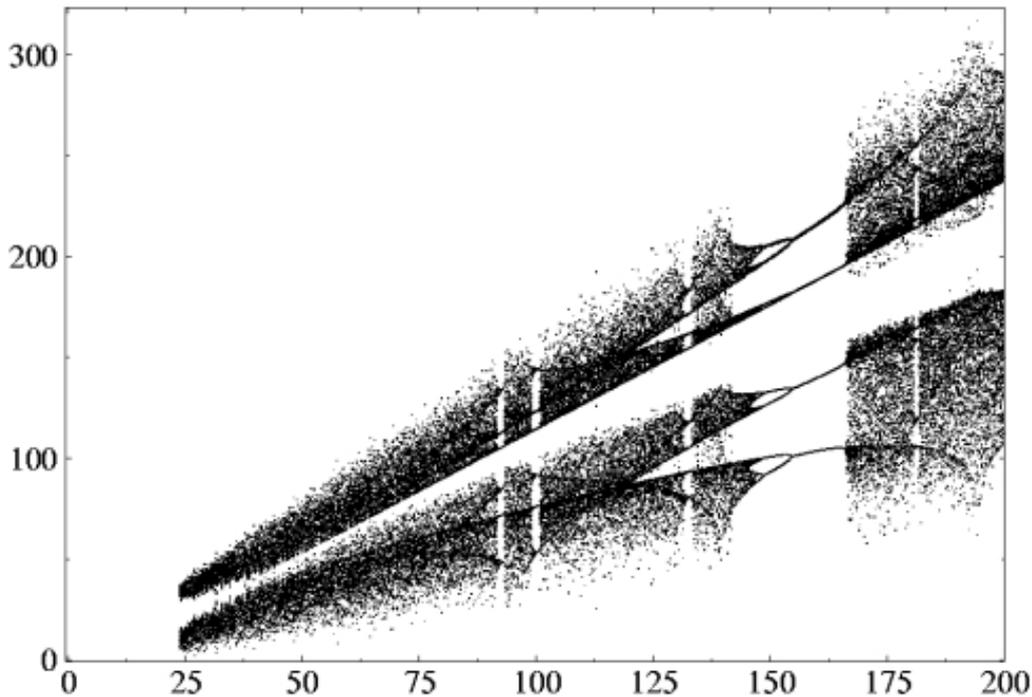


Figura 4.3.6 – Diagramma delle biforcazioni del sistema di Lorenz

In figura 4.3.6 è rappresentato il diagramma delle biforcazioni del sistema in esame, ottenuto usando il numero di Rayleigh come parametro di biforcazione.

Le scissioni sono in generale a cascata, tuttavia si possono notare delle interruzioni (per valori di Ra prossimi a 100, 130, 180) in cui si verificano le cosiddette "crisi" del sistema dinamico. Le crisi sono delle biforcazioni globali che si presentano quando un attrattore caotico entra in contatto con una orbita periodica instabile o con la sua varietà stabile. Nel caso rappresentato, le crisi determinano un comportamento caotico "intermittente": al variare del numero di Rayleigh, si verificano delle improvvise apparizioni e scomparse dell'attrattore caotico.

L'intermittenza del caos giustifica dunque il comportamento dell'attrattore mostrato in figura 4.3.5.

Tuttavia è necessario segnalare che valori di Ra molto elevati sono oltre il limite per cui il modello si può ritenere valido per rappresentare il sistema fisico. Infatti, il modello è stato ricavato a partire da un circuito in cui il fluido è in fase liquida. Poiché, fissate le condizioni al contorno, il tipo di fluido e la geometria del circuito, il numero di Rayleigh è proporzionale al gradiente termico del circuito, valori di Ra molto elevati implicano una elevata temperatura del fluido. Questo comporterebbe una transizione di fase all'interno del circuito, di cui il modello simulato non è in grado di tener conto.

Conclusioni

L'obiettivo del presente elaborato è stato l'approfondimento della tecnica per la modellazione analitica di un particolare sistema convettivo, noto come circuito a circolazione naturale. In particolare, l'attenzione è stata rivolta al caso più semplice, rappresentato dalla geometria toroidale con simmetria verticale.

In questo elaborato sono stati analizzati gli aspetti fondamentali del circuito toroidale a circolazione naturale. Nonostante l'apparente semplicità, questo tipo di sistemi mostra natura caotica e non-lineare nel comportamento dinamico. Pertanto, sono state fornite alcune nozioni sulla teoria del caos e sui metodi principalmente impiegati per rappresentare in maniera adeguata questi sistemi, caratterizzati da dinamiche ricorrenti ma a limitata predicibilità.

È stato riportato il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di Navier-Stokes, che descrive il circuito toroidale. Ricorrendo alla adimensionalizzazione delle equazioni e allo sviluppo in serie di Fourier, seguendo procedimenti già noti in letteratura, è stato ricavato un modello analitico di equazioni differenziali ordinarie, dunque integrabili. Successivamente il modello è stato implementato in Matlab, nell'ambiente grafico Simulink, e attraverso la simulazione sono state ricavate le serie temporali delle variabili di stato.

In seguito si è studiato l'attrattore del sistema nello spazio delle fasi, spiegandone le caratteristiche in relazione al moto di circolazione del fluido all'interno del circuito. Infine, sono stati mostrati i risultati di diverse simulazioni, ottenute al variare del numero di Rayleigh, parametro fondamentale dato dal rapporto tra forze di galleggiamento e forze viscosive e che rappresenta la forzante agente sul sistema. Nonostante la semplicità del circuito toroidale e della forma analitica del modello matematico, risulta evidente che il sistema è in grado di esprimere una varietà di comportamenti dinamici complessi. Questa è una caratteristica tipica dei sistemi

caotici: l'apparente semplicità nasconde una realtà che, pur essendo caratterizzata da una certa regolarità, è comunque imprevedibile se non nel breve periodo.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Ing. Arturo Pagano per la sua grande disponibilità e la sua sapiente guida.

Ringrazio inoltre i miei colleghi, splendide persone che mi hanno accompagnato durante il percorso universitario.

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia, per avermi sempre sostenuto e aiutato in ogni momento della mia vita.

Bibliografia

- [1] Welander, P., *On the oscillatory instability of a differentially heat fluid loop*, J. Fluid Mechanics, vol. 29, 1967
- [2] Damerell P.S. and Schoenhals R.J.: *Flow in a toroidal thermosyphon with angular displacement of heated and cooled sections*, J. of Heat Transfer, vol. 101, pp. 672-676, 1979
- [3] Ehrhard P., and Muller U., *Dynamical behavior of natural convection in a single-phase loop*, J. Fluid Mech, vol. 217, pp. 487-518, 1990
- [4] Ferreri J. C., and Ambrosini, W., *Sensitivity to parameters in singlephase natural circulation via automatic differentiation of Fortran codes*, Eurotherm Seminar No. 63, Single and Two-Phase Natural Circulation, Eds. M. Misale and F. Mayinger, 397-406, 1999
- [5] Misale M., *Overview on single-phase natural circulation loops*, 2014
- [6] Fichera, A. Muscato, G. ; Xibilia, M.G. ; Pagano, A., *Modelling unstable behavior of a natural circulation loop with a neural network*, 2000
- [7] Po Ki Yuen, Haim H. Bau, *Controlling chaotic convection using neural nets*, 1997
- [8] A. Fichera, A. Pagano, *Modelling and control of rectangular natural circulation loops*, 2002
- [9] Alfred Gautier, *Essai historique sur le problème des trois corps, ou Dissertation sur la théorie des mouvemens de la lune et des planètes*, Louis Courcier, 1817.
- [10] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, 1963
- [11] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, 1987
- [12] A. Rodriguez-Bernal, E. Van Vleck, *Diffusion induced chaos in a closed loop thermosyphon*, SIAM J. Appl. Math. 58 (4) (1998)

- [13] R.T. Lahey jr, *Modern developments in multiphase flow & heat transfer – Engineering applications of fractal and chaos theory*, 2001
- [14] Y.A. Cengel, *Termodinamica e trasmissione del calore*, 2013
- [15] J.H. Lienhard IV, J.H. Lienhard V, *A heat transfer textbook*, 3rd edition
- [16] W.M. Rohsenow, J.P. Hartnett, Y.I. Cho, *Handbook of heat transfer*, 3rd edition
- [17] Abarbanel HDI, *Analysis of observed chaotic data. San Diego: The Institute for Non-Linear Science*, 1995
- [18] Rasband SN. *Chaotic dynamics of nonlinear systems*. New York: J. Wiley & Sons, 1990
- [19] Takens F, *Detecting strange attractors in fluid turbulence*. In: Rand DA, Young LS, editors. *Lecture Notes in Mathematics, Dynamical System and Turbulence*, 1981