



*Rallye  
Mathématique  
Transalpin*



LIVRET RMT

Tome 2 - Épreuves 2004-2005

Mai 2006

# 13<sup>e</sup> Rallye Mathématique Transalpin.

1<sup>re</sup> participation de la section belge

organisée par la  
Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française  
<http://www.enseignement.be/rallyemaths bpm>

avec le soutien de



*Ministère  
de la Communauté  
française*



Ce livret a été réalisé grâce à la participation active des membres du Comité RMT. La mise en page a été réalisée par J. MIEWIS et PH. SKILBECQ, qui en assure la responsabilité éditoriale pour le Comité RMT et la SBPMef.

La publication de ce livret est rendue possible grâce au soutien de Madame la Ministre-Présidente de la Communauté française de Belgique en charge de l'Enseignement obligatoire et de Promotion sociale.

Siège administratif : Rue de la Halle, 15, 7000 – Mons

Courriel : [sbpm@sbpm.be](mailto:sbpm@sbpm.be)

web : <http://www.sbpm.be>



*Rallye  
Mathématique  
Transalpin*

Tome 2 - Épreuves 2004-2005

*Sommaire*

- *Préface* 3
  
- N. ROUCHE, *Une fleur au printemps...* 5
- PH. SKILBECQ & P. STEGEN, *Situons les mots!* 7
- PH. SKILBECQ, *Une enquête de satisfaction quant à la participation au premier RMT en Communauté française de Belgique* 11
- P. STEGEN, *Un triangle qui grandit... un outil pour aborder les suites numériques à l'école primaire* 21
- C. VILLERS, *Avec des pentaminos* 35
- COMITÉ RMT, *Plus loin avec des polyminos* 39
- PH. SKILBECQ, *Un problème de géométrie!* 47
- ARMT, *D'autres problèmes pour diversifier le travail en classe* 65
- COMITÉ RMT, *MATÉRIEL : les pentaminos* 70

Une publication de la  
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (asbl)

## Entre nous. . .

Le deuxième tome du LIVRET RMT est maintenant entre vos mains. . . C'est pour nous une immense joie et aussi un soulagement. Nous avons pu tenir notre promesse de revenir vers vous avec des analyses de problèmes et des propositions d'exploitation en classe. Cependant, le défi demeure entier. En effet, si nous pouvons nous réjouir de cette première année de publication, il serait dommage que celle-ci soit unique. Ce deuxième tome devrait donc initier une série que nous espérons longue, tant les possibilités d'exploitation des problèmes sont nombreuses.

Comme annoncé donc, ce deuxième tome revêt un caractère novateur car contrairement au précédent, il a pour objet de vous communiquer des analyses de problèmes et de vous proposer des exploitations pour votre classe. Ainsi, cette deuxième publication rencontre-t-elle le deuxième objectif du RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN, à savoir l'analyse didactique dans une perspective d'utilisation dans les classes, ce qui, pour nous, est essentiel. Notre volonté est aussi de vous communiquer des outils d'analyse de l'activité mathématique ou de l'enseignement – apprentissage des mathématiques.

Communiquer. . . l'activité principale de tout enseignant. C'est aussi la nôtre au travers de cette publication. Vous trouverez ainsi dans ce livret une rubrique intitulée humblement *Lexique didactique*. Elle a pour objet de rencontrer ce que d'aucuns comprennent comme des « monstres » du vocabulaire didactique. Nous tenterons au travers de ces articles de répondre à la question : « quels mots utiliser pour parler, décrire ou modéliser des pratiques dans une revue à vocation didactique ? ».

Communiquer avec quels outils ? Vous trouverez à la fin de ce LIVRET RMT un modèle à photocopier pour construire des pentaminos. Ce matériel accompagne les articles de Claude Villers qui a analysé le problème *Avec des pentaminos*, extrait de la première épreuve du 13<sup>e</sup>RMT. Je tiens particulièrement à remercier Claude Villers qui nous a autorisé à synthétiser trois de ses articles parus précédemment dans la revue *Math Jeunes* éditée par la SBPMef.

Deux autres problèmes sont également analysés : *un triangle qui grandit* et *RMT 2005*. Toutes ces analyses sont réalisées selon un canevas que nous essaierons de respecter au mieux :

- une présentation du problème et son analyse *a priori* ;
- la présentation des résultats et leur mise en perspective par rapport à l'analyse *a priori* ;
- l'analyse des démarches utilisées par les groupes d'élèves ;
- des propositions d'utilisation du problème en classe et des variations de celui-ci ;
- des liens vers d'autres activités et d'autres niveaux d'apprentissage, notamment avec le maternel et le début du primaire et du secondaire.

Communiquer pour qui ? Nicolas Rouche répond quelque peu à cette question. Ce fondateur du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques nous livre une réflexion emplie de sagesse.

Le contenu de ce tome 2 est le reflet du travail du comité qui souhaite rendre cette publication la plus pragmatique possible : « il faut que ça serve ! ». Nous espérons donc que ces articles pourront vous être utiles pour votre pratique de classe. Nous sommes par ailleurs toujours à l'écoute de vos remarques tant en ce qui concerne l'organisation du RMT et les problèmes proposés que le contenu et la forme de cette publication qui doit être une aide et une source de réflexion pour vos pratiques quotidiennes.

Pour terminer, je souhaiterais citer Samuel Roller, fondateur de la revue suisse *Math-École*, extrait de l'éditorial de François Jaquet du numéro 206 de cette même revue.

À propos des concours...

« Vos jeux et concours, c'est bien beau, mais qu'offrez-vous à ceux qui n'ont pas la vivacité d'esprit requise pour ce type d'activités et qui ont besoin d'outils de base plutôt que de haute voltige ! »

C'est aussi à tous ces élèves, demandeurs d'outils de base, que nous pensons en écrivant ces lignes. C'est la raison pour laquelle, nous soutenons et organisons ce concours de classe dans lequel chacun peut intervenir.

De même, si nous tentons par cette publication de promouvoir l'enseignement – apprentissage des mathématiques au travers de problèmes ouverts, nous annonçons clairement que « problème ouvert » ne signifie pas « l'action pour l'action ». Rien n'empêche la mise en commun, le partage des savoirs et la synthèse écrite qui mettent en évidence les procédures d'action soutenues par des savoirs. Vous avez dit *compétence*... ?

Bonne lecture.  
Philippe Skilbecq  
Rédacteur responsable du LIVRET RMT

# Une fleur au printemps. . .

## NICOLAS ROUCHE, *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*

Les filles et les garçons qui s'acharnent sur un problème — par exemple dans le cadre du RMT — essaient de comprendre, hésitent, cherchent des exemples, des contre-exemples, des arguments, se trompent et se reprennent, s'approchent petit à petit de la solution, et finalement comprennent « comment ça marche ».

En ce faisant, même s'ils travaillent en groupe et sans doute aussi grâce à ce travail de groupe, ils développent une pensée personnelle, une pensée qui fait partie d'eux-mêmes.

Je voudrais leur dédier, ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants, une citation du philosophe allemand SCHOPENHAUER qui exprime cela de façon particulièrement lumineuse et convaincante.

« Une pensée étrangère, lue, est à une pensée personnelle, grandissant en nous, ce qu'une plante fossile est à une plante fleurissant au printemps. . . Et quand parfois, à force de réflexion et de combinaisons mentales, nous avons mis à jour difficilement, lentement, une vérité, une connaissance, que nous aurions pu trouver commodément toute faite dans un livre, alors cette vérité a cent fois plus de valeur parce qu'elle est sortie de notre propre pensée. Car c'est seulement alors qu'elle s'incorpore, comme une partie intégrante, comme un membre vivant, au système entier de notre pensée, qu'elle s'articule avec lui avec une cohérence complète et ferme, qu'elle est comprise avec tous ses antécédents et conséquents, qu'elle porte la couleur, la tonalité, l'empreinte de notre pensée entière, qu'elle est arrivée précisément au moment opportun quand le besoin s'en faisait sentir, qu'elle est fermement installée et ne peut plus disparaître. Les vers de GOETHE prennent ici toute leur portée, tout leur sens :

*"Ce que tu as hérité de tes pères*

*Gagne-le pour le posséder"*

La vérité simplement apprise n'adhère à nous que comme un membre rapporté une fausse dent, un nez de cire, alors que celle qui a été conquise par notre pensée personnelle ressemble à un membre naturel : elle seule nous appartient véritablement. »

Le RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN est bien parti pour favoriser, dans les écoles de la Communauté française de Belgique, la croissance de ces plantes mathématiques qui fleurissent au printemps dans le jardin personnel de chacune et de chacun. C'est un bonheur. . .



# Situons les mots !

PH. SKILBECQ & P. STEGEN, *Comité RMT*

## Introduction

Ah, le vocabulaire employé pour parler d'enseignement. . . S'il s'inspire de la pratique quotidienne, il est qualifié de non scientifique ou d'intuitif ! S'il s'inspire de la recherche, il est qualifié de pédant et d'incompréhensible par les enseignants ! Alors, quels mots utiliser pour parler, décrire ou modéliser des pratiques dans une revue à vocation didactique ? Comment concilier ces deux points de vue ? Comment amener les enseignants et les chercheurs à pouvoir communiquer et à échanger sur les pratiques quotidiennes et sur les résultats de recherches ?

Il est évident que cet article ne peut apporter toutes les réponses à ces questions pourtant fondamentales. Plus modestement, il ambitionne de fournir quelques balises qui devraient à terme nous permettre de mieux communiquer les résultats de recherches menées en marge du RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN.

Pour aborder la question du développement pris ces dernières années par le jargon scientifique dans le domaine des sciences de l'éducation, une première piste intéressante est fournie par un texte de Jean-Pierre ASTOLFI <sup>(1)</sup>. Pour ce dernier, le vocabulaire utilisé pour décrire une situation d'enseignement–apprentissage est fonction de nos conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage. L'auteur postule que les réformes du système éducatif ont provoqué la disparition de certains mots dans le vocabulaire des sciences de l'éducation — élève, programme, connaissance, . . . — au profit d'autres — apprenant, curriculum, compétence, . . . Il démontre que ce qui est parfois interprété comme un prétentieux jargon de spécialistes correspond en réalité à une véritable évolution des conceptions de « l'apprendre ». Plus concrètement, des paires de mots comme *Transmission* — *Construction*, *Élève* — *Apprenant*, *Leçon* — *Dispositif*, *Notion* — *Concept*, *Connaissance* — *Compétence* sont analysés et resitués dans le cadre précis des modèles d'enseignement qui les ont produits.

Il nous a paru intéressant au début de ce cette publication, de situer certains termes que nous utiliserons régulièrement. Dans ce premier article, nous nous intéresserons à deux expressions fréquemment utilisées dans le petit monde du RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN : l'analyse *a priori* et la notion de problème ouvert. Nous aurons l'occasion, dans de prochaines publications, de poursuivre ce travail de clarification.

---

<sup>(1)</sup> Ce texte d'une quinzaine de page est téléchargeable sur le site du *CeDoP* de l'*Université Libre de Bruxelles*, à l'adresse suivante : <http://www.ulb.ac.be:8070/cedop/tools/stat.php?file=Astolfi.pdf&titre=Les>



## 1. L'analyse *a priori*

Sans doute, HABRAN [1991] avait-il raison d'évoquer, lors de la Semaine pédagogique de 1990, que la manière d'enseigner les mathématiques était étroitement dépendante d'une maîtrise suffisante de la matière à enseigner. D'une certaine manière, cette maîtrise constituerait une condition nécessaire à la mise en place d'autres pratiques d'enseignement des compétences mathématiques. Quinze ans plus tard, il apparaît nécessaire de préciser ces propos en soulignant, d'une part, que la maîtrise de la matière est certes une condition nécessaire mais qu'elle n'est pas suffisante et, d'autre part, qu'au niveau de l'enseignement des mathématiques, la matière ne se résume pas à des savoirs mathématiques *stricto sensu*.

L'analyse *a priori* est un terme technique issu de ce qu'il convient aujourd'hui d'appeler l'École française de recherche en didactique des mathématiques <sup>(2)</sup>. Il désigne l'analyse des conduites possibles des élèves confrontés à une tâche ou une situation de résolution de problèmes. Cette démarche d'investigation préalable fait intervenir deux ensembles d'informations : l'analyse des connaissances mathématiques en jeu (cadre théorique mathématique ou cadre conceptuel) et des notions plus didactiques (que sait-on de la manière dont les élèves s'approprient les connaissances mathématiques en jeu ? Quels sont les dispositifs qui facilitent cette appropriation ?).

Au niveau du RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN, l'analyse *a priori* est une étape essentielle dans le dispositif de conception et de choix de problèmes. En effet, elle permet de :

- s'interroger sur la nature et la pertinence mathématiques des tâches adressées aux élèves au travers de la résolution du problème posé. Autrement dit, quelle est la validité mathématique des problèmes proposés aux élèves ?
- définir de manière objective le barème de notation utilisé lors de la phase de correction. C'est en effet sur la base de l'analyse *a priori* que les équipes chargées de l'élaboration des problèmes d'une épreuve définissent au préalable les critères de notation valables pour toutes les sections participantes. Quels points attribuer en fonction de la qualité des réponses produites ?
- réaliser une analyse *a posteriori* afin de confirmer ou d'infirmer, totalement ou partiellement, les hypothèses développées lors de l'analyse *a priori* et de réfléchir ainsi au potentiel que recèle la situation-problème pour la mise en place de situations d'apprentissage. Quels enseignements peut-on tirer de l'analyse formative des productions des élèves ?

Pour réaliser l'analyse *a priori* d'un problème, il faut notamment répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la tâche attendue des élèves ?
- Le problème a-t-il une ou des solutions ? Combien ? Lesquelles ?
- Quel(s) est (sont) le(s) domaine(s) de connaissances mathématiques (cadre théorique mathématique ou cadre conceptuel) ?
- Quelles stratégies, procédures permettent d'aboutir à ces solutions ?
- Quelles connaissances supposent-elles ?

---

<sup>(2)</sup> Voir notamment les travaux de Guy BROUSSEAU, Yves CHEVALLARD et Gérard VERGNAUD.

- Dans le cas où les élèves ne disposent pas de procédures expertes pour aboutir à la solution, quelles sont les stratégies plus empiriques à leur disposition ?
- Le problème peut-il se formuler dans différents registres (verbal, graphique...) ou dans différents domaines mathématiques (arithmétique, géométrie, algèbre) ?
- Les élèves peuvent-ils décider eux-mêmes de la validité de leurs solutions sans l'intervention de l'enseignant ? C'est-à-dire les élèves possèdent-ils les outils (savoirs et compétences) pour vérifier si la ou les réponses obtenues sont correctes par rapport aux données du problèmes ?
- ...

## 2. Les problèmes ouverts

Les problèmes du RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN s'apparentent à ce que d'autres appellent des *problèmes ouverts*. Ces problèmes se caractérisent par des énoncés relativement courts qui n'induisent ni la méthode ni la solution. La recherche de celle-ci ne consiste pas en la simple utilisation ou application des dernières notions vues en classe. C'est aux élèves d'inventer une stratégie, de la vérifier et, le cas échéant, de justifier leur solution.

Cette conception se situe à l'opposé des démarches classiques de résolution d'un problème type (échelle, partages inégaux, *etc.*) ou d'un problème d'application donné en illustration d'une notion mathématique abordée au préalable. Ce que nous appellerons des problèmes de type *algorithmique* : « j'applique une procédure apprise ».

Dans une situation de problème ouvert, pour que de telles démarches soient possibles, il importe que celui-ci se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves sont familiarisés. Ils peuvent ainsi facilement s'emparer du problème et s'engager dans une démarche empirique de résolution. Pour illustrer l'intérêt de la contextualisation, prenons le problème *Les confitures*, extrait de la finale de ce 13<sup>e</sup>RMT :

### Les confitures (Cat. 3)

Une paysanne du village de Forêt Verte prépare cinq confitures différentes : aux châtaignes, aux abricots, aux figues, aux melons, aux tomates vertes. Elle les met dans des pots et les vend aux touristes. Un client achète deux pots de confitures différentes.

Quelles confitures peut-il avoir achetées ?

Indiquez toutes les façons possibles d'acheter deux confitures différentes.

En première analyse, les élèves connaissent les confitures, ils en mangent ou en ont à la maison. Donc c'est un contexte qui ne devrait pas leur poser problèmes. Sauf que... Il est en effet peu courant de trouver chez nous des confitures aux châtaignes, aux melons ou aux tomates vertes ! Quelle conséquence cela peut-il avoir sur la résolution du problème ? Nous avons constaté lors de la correction des épreuves que certains élèves n'utilisent pas

ces confitures pour rechercher les mélanges possibles puisque pour eux, ces confitures n'existent pas!

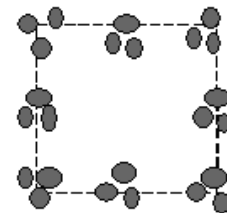
Tenir compte du contexte dans lequel s'inscrit le problème est donc particulièrement important. Nous reprendrons l'analyse et l'exploitation de ce problème dans un prochain tome de ce *Livret RMT*.

Un autre problème du RMT pour illustrer la possibilité de se lancer dans une résolution empirique, sans « méthode » particulière, sans démarche classique de résolution :

Un oeil sur les pierres (Cat. 5)

Julien est en vacances à la mer. Sur la plage, il ramasse des pierres et les dispose par petits tas de trois, en forme de carré, comme sur ce dessin.

Selon cette disposition, il y a 9 pierres par côté.



Julien ramasse encore 4 autres pierres et, avec les premières, forme une nouvelle disposition :

- il y a de nouveau 8 tas, disposés en carré ;
- il y a de nouveau 9 pierres par côté ;
- il y a le même nombre de pierres dans tous les tas situés au milieu des côtés du carré.

Combien peut-il y avoir de pierres dans les tas de la nouvelle disposition ?

Montrez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

Pour ce problème, la résolution peut s'effectuer en dessinant les pierres et en cherchant les possibilités d'obtenir 9 en additionnant 3 nombres. Nul n'est besoin de modéliser la situation par une quelconque équation. Remarquons qu'il n'y a pour ce problème aucune méthode particulière de résolution qui serait directement applicable et rencontrée au préalable en classe.

Au niveau de l'enseignement primaire en Communauté française, une récente étude menée par la « Commission Didactique des mathématiques » de l'Inspection de l'enseignement fondamental subventionné n'incite guère au triomphalisme. Trop souvent, il apparaît que nos élèves sont soumis au traditionnel « j'apprends- j'applique ». Ce type d'enseignement est marqué par un volume horaire important consacré aux applications destinées à assimiler, renforcer voire étendre le champ d'application des connaissances enseignées. Les compétences transversales valorisées dans ce type d'apprentissage concernent essentiellement les deux premiers ensembles de compétences transversales définies dans le document *Socles de compétences*, soit la compréhension et l'application.

À l'inverse, les problèmes ouverts permettent aux élèves de vivre une démarche comparable à celle des mathématiciens confrontés à des problèmes qu'ils n'ont pas appris à résoudre. De nombreux pédagogues et didacticiens considèrent que cette approche constitue l'une des stimulations essentielles des apprentissages par le sens qu'elle donne aux situations à mathématiser.

# Une enquête de satisfaction quant à la participation au premier RMT en Communauté française de Belgique

PHILIPPE SKILBECQ, *Responsable du Comité belge*

## Introduction

Mai 2004, dans les couloirs de la SBPMef, on discute d'une possible organisation du Rallye Mathématique Transalpin en Communauté française de Belgique. Un an plus tard, le 07 mai exactement, la première finale du RMT est organisée à Nivelles. Entre-temps,...

En octobre 2004, une invitation à participer à cette première édition du RMT est envoyée à l'ensemble des écoles en Communauté française, soit près de 2200 envois. En janvier 2005, 148 classes sont définitivement inscrites au RMT. Au terme de cette première édition cependant, comme le montre la figure 1, seulement 80% des classes inscrites ont réalisé le parcours complet, c'est-à-dire l'épreuve d'essai et les deux épreuves qualificatives. Dans la perspective de mieux comprendre la motivation à participer à cet événement mathématique et surtout de connaître l'avis des enseignants afin d'améliorer son organisation, une enquête de satisfaction a été préparée et envoyée aux classes participantes. Cette enquête écrite et confidentielle a été réalisée entre le 14 novembre et le 16 décembre 2005.

Dans cet article, nous commenterons les résultats de cette enquête, d'abord item par item, ensuite en émettant un avis global à partir des commentaires rédigés par les enseignants. Mais nous commencerons par commenter la différence nette entre le nombre de classes inscrites à l'épreuve d'essai et le nombre de classes effectivement inscrites à cette première édition du RMT.

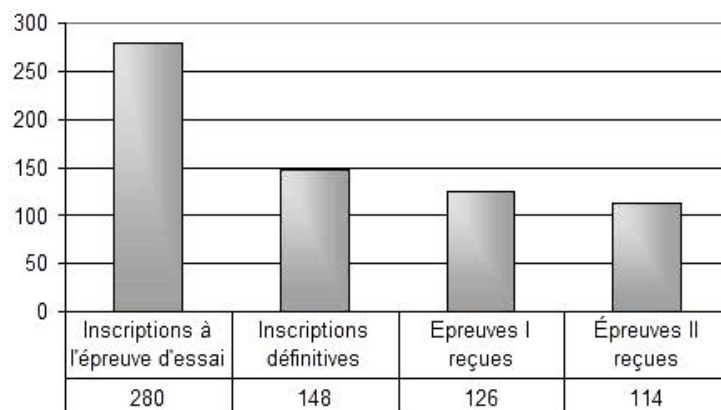


Fig. 1 — Classes inscrites et épreuves reçues — 2005

## 1. Inscription et participation

Comme le montre la figure 1, près de 300 classes se sont inscrites à l'épreuve d'essai entre septembre et décembre 2004. Or seulement 148 d'entre elles ont envoyé leur inscription définitive, soit à peine la moitié. De plus, si l'on considère une moyenne de 4 classes par école de la 3<sup>e</sup> à la 6<sup>e</sup>, le taux d'inscription est de moins de 2% (148 classes sur  $\pm 9000$ ). Il était donc raisonnable de s'interroger sur ce fait.

Une première réflexion par rapport au pourcentage des classes participantes (2%) est que ce pourcentage ne doit pas être très différent dans les autres régions d'Europe qui participent au RMT. Même pour celles qui y participent depuis plus de 10 ans. Pensons notamment à la section de Suisse romande, berceau du RMT, où  $\pm 300$  classes ont participé à l'édition 2004/2005, pour une population scolaire sensiblement semblable.

Sous-jacente à cette réflexion sur le nombre de classes s'inscrivant au RMT, apparaît celle concernant l'opportunité de voir un nombre important de classes participer à cet événement. Cette réflexion plus fondamentale peut se faire selon deux axes : l'un organisationnel, l'autre plutôt éthique. Succinctement, selon l'axe organisationnel... si 2000 classes s'inscrivaient au RMT, de fait, son organisation serait bien plus compliquée qu'elle ne l'est aujourd'hui par une équipe de bénévoles déjà fort impliqués dans d'autres activités. Succinctement toujours, selon l'axe éthique... si peu de classes s'inscrivent au RMT, celui-ci ne devient-il pas de fait un outil de renforcement des différences inter-écoles ? Il y aurait les écoles dans lesquelles des classes participent au RMT et, on est en droit de le supposer, bénéficient d'une approche des mathématiques différentes, et les autres... ? Ceci est quelque peu en contradiction avec l'objectif de l'ARMT, ainsi que du Comité belge francophone. Cornélien... , vous avez dit cornélien ?

Revenons à l'analyse des inscriptions pour cette première édition dans laquelle nous ne considérerons que la situation des classes inscrites à l'épreuve d'essai et qui ne se sont pas inscrites définitivement. Remarquons qu'à ce jour, nous ne possédons aucune argumentation d'enseignants pour expliciter cette situation. Nous devons donc nous en remettre à quelques hypothèses plausibles que nous pensons pouvoir étayer à l'aide des arguments avancés par les enseignants ayant renvoyé l'enquête de satisfaction.

### 1.1. La difficulté des problèmes

Un premier argument est la *difficulté des problèmes* proposés. Près de 25% des enseignants qui ont renvoyé l'enquête mettent en avant cette difficulté particulière des problèmes. Nous ne pouvons cependant pas dire en quoi consiste cette difficulté. Est-elle due à l'énoncé, au type de problèmes, aux contextes proposés... ?

Force est de constater que les problèmes du RMT demandent bien souvent l'application d'une démarche de type heuristique. Pour résoudre les problèmes, les élèves doivent adopter une démarche de type « essai-erreur ». Dans ce type de démarche, ils doivent également sans cesse en vérifier la pertinence par rapport à la question posée, par rapport à la représentation qu'ils ont de la réponse plausible... Ceci est effectivement plus complexe que l'application d'une démarche de type algorithmique où, après avoir reconnu la

structure du problème et repéré les éléments nécessaires dans l'énoncé, les élèves doivent appliquer une procédure qui mène assurément à la réponse. C'est notamment le cas pour les problèmes de type : *prix d'achat, bénéfice, prix de vente; application d'une formule de calcul d'aire; utilisation de la preuve par neuf pour une multiplication écrite...* Sans doute ce deuxième type de problème est-il le plus fréquemment proposé aux élèves et le plus fréquemment présent dans les manuels scolaires.

## 1.2. La prise en charge des problèmes par les élèves

Un deuxième argument est le type d'organisation interne à la classe lors des épreuves. Le RMT propose en effet aux élèves de prendre en charge entièrement la résolution de 5, 6 ou 7 problèmes en 50 minutes. Il s'agit pour les élèves, sans recourir à l'adulte présent en classe, de constituer des groupes, de lire et comprendre les énoncés, d'imaginer des démarches de résolution, de confronter leurs avis, de régler les conflits au sein du groupe, de synthétiser les discussions, de résoudre le problème, de rédiger la solution et bien souvent une explication. Il faut reconnaître que tout ceci ne leur est pas fréquemment proposé et donc ne leur est pas facile.

Ce type d'organisation peut avoir démotivé ou apeuré certains élèves qui ont ainsi pu influencer la décision finale de participation au RMT.

## 1.3. Le remplacement par un collègue

Un troisième argument est que l'enseignant doit laisser *ses* élèves sous la responsabilité d'un autre adulte. Et, si tel n'est pas le cas comme nous le verrons dans l'analyse ci-dessous, il doit accepter de ne pas répondre aux questionnements des élèves. C'est là également un élément perturbant par rapport à la situation classique de résolution de problèmes. Dans ces situations de toute façon, il ne pourra « aider » les élèves, prendre part à la résolution, expliquer un énoncé,...

## 1.4. Des arguments divers

D'autres arguments peuvent expliquer cette différence de près de 50% entre le nombre de classes inscrites à l'épreuve d'essai et les classes effectivement inscrites au concours :

- certains enseignants ont pu omettre de s'inscrire au concours après avoir réalisé l'épreuve d'essai ;
- l'information concernant cette nécessaire inscription définitive peut avoir été peu claire et avoir conduit les enseignants à penser que seule l'inscription à l'épreuve d'essai était suffisante ;
- un autre argument encore est la surenchère de propositions de participation à des événements divers. En effet, les écoles sont la cible de beaucoup d'actions en provenance de milieux extérieurs. Les enseignants sont donc amenés à faire des choix en fonction de leur sensibilité, des besoins éducatifs, des objectifs de l'équipe éducative, des élèves,...

Certes, la participation au RMT n'est pas obligatoire et l'épreuve d'essai est précisément là pour permettre à chaque enseignant avec ses élèves de juger de l'opportunité de cette inscription. Néanmoins, cette baisse du nombre de participants reste un étonnement, voire une interrogation. . .

## 2. L'enquête de satisfaction

Pour mieux comprendre comment le RMT a été organisé dans les classes et en quelle mesure il a pu influencer l'action didactique des enseignants, nous avons envoyé une enquête écrite aux 148 classes participantes. À la clôture de cette enquête, 25 documents nous ont été renvoyés et ont été encodés. Les résultats ont ensuite été analysés et commentés. Pour permettre une lecture et une compréhension plus aisées des résultats et de leur analyse, les commentaires ci-dessous ne respectent pas l'ordre dans lequel les items étaient présentés dans l'enquête.

### 2.1. Homogénéité des échantillons

Les deux premiers items étaient relatifs aux aspects *administratifs*. Ils avaient pour objectif de vérifier l'homogénéité des échantillons quant à la structure de la classe. Un test du *Chi carré* a été effectué afin de déterminer l'homogénéité des deux échantillons — classes participantes au RMT et classes ayant renvoyé leur enquête — quant à la structure des classes <sup>(1)</sup>. Les résultats du test assure cette homogénéité, il n'y a donc pas de différence significative entre les deux groupes quant à la structure des classes représentées.

Nous serons cependant prudents quant à la généralisation de ces résultats à l'ensemble des classes. En effet, notre échantillon ne représente que 16.58% des classes inscrites. Considérons plutôt cette enquête comme une première « photographie » encore un peu floue.

### 2.2. L'organisation des épreuves dans les classes

#### Item 3 — Comment avez-vous pris connaissance du RMT ?

92%	Courrier
0%	Internet
4%	Collègue
4%	Autre

Ces résultats montrent l'importance de l'information par voie postale pour cette première édition. Ceci reflète également l'effort fourni par la SBPMef au niveau de l'envoi de courrier vers les quelques 2200 écoles en **Communauté française de Belgique**.

---

<sup>(1)</sup> Nous entendons par structure de classe, la distribution des « années » dans la classe. Par exemple, une classe de 3<sup>e</sup> primaire uniquement, ou une classe comprenant la 3<sup>e</sup> et la 4<sup>e</sup> année primaire. . .

### Item 4 — Y a-t-il d'autres classes dans votre école qui ont participé au RMT ?

71%	Oui
29%	Non

Nous constatons que 71% des enseignants de notre échantillon avaient un collègue qui participait également au RMT.

Ceci peut avoir deux conséquences, l'une au niveau de l'organisation de l'épreuve et plus particulièrement pour le remplacement du titulaire, l'autre au niveau des échanges entre enseignants quant à l'organisation de la résolution des problèmes et à leur utilisation en classes. Ces aspects sont plus particulièrement abordés par les items 5, 6 et 7. La mise en correspondance de l'item 4 avec ce groupe d'items permet d'émettre quelques hypothèses quant à l'exploitation en équipe d'un événement didactique tel que le RMT.

### Item 7 — Comment avez-vous organisé la surveillance des élèves pendant les épreuves I et II ?

52%	J'ai été remplacé(e) par un collègue
4%	J'ai été remplacé(e) par la direction
44%	Autre

Nous constatons que 56% des enseignants ayant répondu à l'enquête ont été remplacé, soit par un collègue, soit par la direction de l'école. Ces résultats sont quelque peu étonnants et posent question.

D'une part, le règlement du RMT est très clair : l'enseignant *doit être remplacé* par un autre adulte lors des épreuves, il ne peut être dans sa classe. Or, nous pouvons raisonnablement penser que les 44% de réponse « autre » sont des situations où l'enseignant n'a pas été remplacé. Il était sans doute alors présent dans sa classe lors des épreuves, ce qui est contraire au règlement. À la lecture de ces résultats, le Comité belge francophone a donc décidé d'insister sur ce point du règlement et de le rappeler lors de l'envoi des documents accompagnant chaque épreuve.

D'autre part, les résultats de l'item 4 indiquent que 71% des enseignants de notre échantillon avaient un collègue qui participait aussi au RMT. Nous pouvons ainsi nous attendre à ce que ces 71% des enseignants répondent qu'ils ont été remplacés par un collègue. Or tel n'est pas le cas et outre le respect du règlement relatif au concours qu'est le RMT, un autre argument plaide en la faveur du remplacement du titulaire par un autre : l'observation des élèves. En effet, l'intérêt d'une organisation tel que le RMT tient particulièrement au fait que les élèves sont entièrement responsables de l'organisation de la résolution des problèmes. Les observer lors de la réalisation de cette tâche, sans intervenir, est révélateur de leur capacité à s'organiser, à s'entraider, à lire, à résoudre des problèmes, ... Et il y a un intérêt à ce que cette observation soit réalisée, deux fois par an, par une personne autre que le titulaire. On peut considérer que l'observation réalisée par cette personne sera « originale » par rapport à celle que le titulaire pourrait réaliser. L'échange entre les titulaires qui peut s'en suivre peut aussi constituer un moment d'apprentissage pour chacun des enseignants.



## Item 8 — De quelle manière la résolution des problèmes a-t-elle été organisée ?

80%	Un groupe résout un problème
4%	Toute la classe résout tous les problèmes
16%	Autre
39%	Résolution en 50 minutes
48%	Résolution en plus de 50 minutes
13%	Résolution en plusieurs périodes
0%	Autre

La première partie de l’item 8 s’intéressait à l’organisation de la résolution des problèmes par les élèves. Pour 80% des classes de notre échantillon, les problèmes ont été résolus en groupes, plus particulièrement, un problème était résolu par un groupe.

Ceci n’empêche pas l’entraide entre les groupes. En effet, comme nous l’avons constaté lors de la finale, un groupe ayant terminé plus tôt peut aider un groupe en difficulté. Ou encore, un groupe en difficulté peut faire appel aux autres pour les aider. Ou encore, les groupes peuvent échanger leurs problèmes pour vérifier les réponses et les justifications fournies si le temps le permet.

Nous nous interrogeons cependant sur le type d’organisation des 16% des classes qui ont répondu « Autre ». Notre expérience, à partir des feuilles réponses renvoyées par les classes aux épreuves I et II, nous fait dire que soit tous les problèmes ont été résolus par chacun des groupes, soit tous les problèmes ont été résolus d’abord individuellement puis discutés en groupe classe. Certes, dans le cadre d’un travail en classe, ces méthodologies peuvent être intéressantes. Cependant, dans le cadre du RMT, il apparaît que ceci est contraire à au moins deux points du règlement : un groupe résout un problème, tous les problèmes doivent être résolus en 50 minutes.

La deuxième partie de l’item 8 s’intéressait à la durée de l’épreuve. Le règlement prévoit 50 minutes pour une épreuve or, dans notre échantillon, seuls 39% des classes respectent cette durée. Quelques 13% des classes organisent même la résolution en plusieurs périodes, ce qui est contraire au règlement. Ces constats ont également conduit notre Comité à rappeler ce point du règlement dans le courrier d’accompagnement des épreuves.

### 2.3. Utilisation des problèmes du RMT

Un des deux objectifs du RMT est de développer une réflexion didactique sur les pratiques d’enseignement des mathématiques. C’est pourquoi nous nous sommes intéressés à l’utilisation des problèmes dans les classes et dans les écoles. Les items 9 et 10 rencontraient cet intérêt.

## Item 9 — Avez-vous utilisé les problèmes du RMT en classe après les épreuves ?

72%	Oui	72% des enseignants de notre échantillon ont déclaré avoir utilisé les problèmes dans leur classe à la suite des épreuves du RMT.
28%	Non	

Les circonstances les plus citées sont :

- retravailler la *lecture-compréhension* ;
- corriger collectivement les problèmes, chaque groupe présente sa solution et celle-ci est discutée en groupe ;
- découvrir les différents procédés pour parvenir à la solution ;
- travailler l'organisation des groupes ;
- mettre en évidence des outils de résolution tels que les dessins, les tableaux. . .

La lecture de ces utilisations des problèmes du RMT montre combien l'emploi *a posteriori* peut être riche au niveau de l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Nous y retrouvons les éléments fondamentaux de la résolution de problèmes :

- la prise de connaissance du problème, bien souvent par la lecture d'un énoncé, parfois aussi par la lecture d'un dessin, d'un schéma. . .

Durant cette première phase, les élèves doivent aussi se représenter le problème et faire apparaître les éléments essentiels, le réorganiser peut-être. . . tout cela en s'appuyant sur un schéma ou un tableau ; mais aussi émettre quelques hypothèses sur la ou les démarches possibles de résolution, ainsi qu'une hypothèse sur la ou les solutions.

- la résolution du problème, soit en appliquant une procédure connue dans le cas d'un problème algorithmique, soit par essai-erreur dans le cas d'un problème heuristique ;

Durant cette deuxième phase, les élèves doivent aussi comparer leur démarche à ce qu'ils ont émis comme hypothèse à la phase précédente ; discuter des résultats des calculs ou des essais-erreurs. . .

- l'élaboration de la réponse et la validation de celle-ci ;

Durant cette troisième phase, les élèves doivent aussi discuter de la manière la plus efficace et pertinente de communiquer cette solution, mais aussi d'expliquer ou de justifier leur démarche.

Nous reviendrons dans un prochain article sur ces différentes phases de la résolution de problème et sur leurs implications dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Certains aspects de ces différentes phases sont cependant déjà exploités dans les analyses de problèmes présentes dans ce tome 2 du livret RMT 2005.

## Items 5 et 6 — Échanges entre enseignants, concertations

Les items 5 et 6 avaient pour objet de déterminer si les épreuves du RMT avaient favorisé les échanges entre enseignants, en quelque sorte, si une dynamique collaborative pouvait naître à partir du RMT. Nous avons donc proposé deux items aux enseignants, l'un pour savoir si des échanges avaient eu lieu entre enseignants de manière informelle (item 5), l'autre pour savoir si ces échanges avaient eu lieu dans le cadre des concertations obligatoires (item 6).

83%	Oui	83% des enseignants de notre échantillon ont déclaré avoir échangé avec un plusieurs de leurs collègues concernant le RMT.
17%	Non	

Les enseignants de notre échantillon annoncent que ces échanges avaient pour objet :

- trouver les solutions aux problèmes ;
- l'organisation du concours ;
- le bilan des apprentissages.

Dans les mêmes proportions, sans qu'il n'y ait correspondance systématique, les enseignants disent que le RMT a fait l'objet d'une ou plusieurs séances de concertation. Les sujets abordés lors de ces séances ont été :

- le temps nécessaire aux élèves pour résoudre les problèmes ;
- la manière avec laquelle les élèves résolvent les problèmes ;
- l'évaluation ;
- les réactions des élèves face aux problèmes ;
- la comparaison des solutions trouvées par les élèves ;
- la mise en commun et la résolution des problèmes.

Globalement, nous pouvons constater que le RMT a pu susciter dans certaines écoles des échanges entre enseignants. C'est aussi l'objet de cette publication. Apporter aux enseignants des informations à partir desquelles ils peuvent poursuivre une réflexion est un objectif que peut viser le RMT.

## Item 11 — Sentiment des enseignants

Cet item 11 proposait aux enseignants de situer leur sentiment par rapport à leur participation au RMT sur une échelle allant d'*insatisfait* à *très satisfait* : plus de 75% des enseignants de notre échantillon se disent satisfaits ou très satisfaits de leur participation. De ce point de vue, nous pouvons dire que cette première édition a été un succès. Espérons que la deuxième édition soit aussi satisfaisante, voire davantage.

Un autre constat apparaît à l'analyse des commentaires : les problèmes semblent d'un niveau assez élevé pour les élèves.

« Les épreuves me paraissaient assez difficiles pour le niveau de la classe. »

Ce constat réalisé par les enseignants devrait être analysé plus longuement pour déterminer ce qui constitue effectivement la difficulté des problèmes. Est-ce le fait que ce soit des problèmes ouverts pour lesquels une démarche unique, institutionnalisée par une règle, ne soit pas applicable ? Est-ce le fait que les problèmes doivent être résolus entièrement par les élèves, sans l'aide des adultes ? Est-ce le fait que les élèves doivent également expliciter leurs démarches ou justifier leurs réponses ? Est-ce la rédaction des énoncés qui pose problème ? Est-ce un peu de chacune de ces causes ?... À chacun sans doute de déterminer ces causes en fonction de sa classe. Les publications que nous proposerons auront aussi cet objectif d'aider les enseignants à analyser les erreurs de leurs élèves pour mieux les comprendre et mieux les aider à les surmonter.

À nouveau, ceci n'est que le reflet de l'opinion de notre échantillon réduit à 25 enseignants globalement satisfaits du RMT. Il aurait été intéressant de connaître l'avis d'enseignants insatisfaits de cet événement.

### 3. Conclusion

Nous concluons cette analyse de l'enquête de satisfaction d'abord en émettant un « ressenti » par rapport au RMT et à son organisation en **Communauté française de Belgique** et ensuite en synthétisant les résultats de cette enquête en insistant principalement sur ses deux objectifs fondamentaux du RMT, le concours et l'analyse didactique. Nous resterons cependant prudents, comme nous l'avons annoncé au point 2.1, quant à la généralisation possible de ces résultats à l'ensemble des classes ayant participé au RMT en 2005.

D'abord un ressenti, peut-être un sentiment de « mal-être » par rapport à l'organisation générale. Le sentiment en tout cas que cet événement ne soit pas compris de la même manière par toutes et tous. Et ceci implique de notre part un effort supplémentaire de pédagogie et d'information. Cet effort devrait se traduire l'an prochain par l'organisation d'après-midi de rencontre avec les enseignants en différents endroits en Communauté française, un courrier à chaque école et une réorganisation du site Internet. Ensuite, le sentiment qu'il n'est pas aisé pour un titulaire d'organiser ce type de concours au vu des contraintes organisationnelles qui obligent notamment l'enseignant à « délaissé » sa classe.

Ensuite, une synthèse par rapport aux deux aspects du RMT. Cet événement est d'abord un concours, et comme tel il possède quelques règles dont le respect assure sa bonne organisation. L'enquête a montré que toutes les classes ne respectent pas systématiquement ces règles. C'est pourquoi nous avons insisté sur leur respect dans le courrier d'accompagnement envoyé avec les épreuves de cette deuxième saison.

Remarquons que lors de la finale à Nivelles, ce sont des étudiants des départements pédagogiques des Hautes Écoles qui assurent la surveillance et l'observation des élèves. Il y a donc tout intérêt à ce que les élèves soient habitués à ce genre d'organisation pour réussir au mieux l'épreuve finale.

Mais le RMT est aussi un événement didactique. Il a pour objectif de fournir aux enseignants de nouvelles pistes de travail, des aides en terme d'analyse de production d'élèves, des analyses de savoirs mathématiques... Mais pour que les feuilles réponses puissent être utilisées et analysées, il faut à nouveau que le règlement ait été respecté.

Donc tout ne va pas encore comme cela le devrait. Mais ce bilan intervient juste après la première année d'organisation et est réalisé à partir d'un échantillon restreint. Des points positifs apparaissent cependant. Des enseignants se sont concertés à propos de ces problèmes; des élèves ont peut-être découvert que l'on pouvait « faire des maths » ensemble, en cherchant, en s'amusant; de nouveaux problèmes entreront dans les classes chaque année; une publication, dont vous tenez le deuxième tome entre les mains, propose aux enseignants des exploitations de ces problèmes...

La volonté du comité d'organisation, tant au niveau belge qu'au niveau international, est vraiment d'organiser un événement qui puisse aider à l'enseignement-apprentissage des mathématiques.



# Un triangle qui grandit... un outil pour aborder les suites numériques à l'école primaire

PIERRE STEGEN, *Comité RMT*

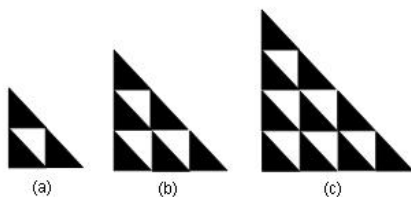
## Introduction

Le problème « Un triangle qui grandit » sert de fil conducteur aux diverses réflexions développées dans cet article. Ce problème de dénombrement ne se rencontre guère dans les classes primaires. Il est par contre plus fréquemment utilisé au début de l'enseignement secondaire au moment où les élèves effectuent leurs premiers pas vers l'algèbre. Comment les élèves de l'école primaire se sont-ils débrouillés avec cette tâche de résolution inhabituelle? Quelles stratégies ont-ils développées? Avec quels résultats? Pourquoi les confronter avec ce type de problème? Voilà toute une série de questions auxquelles cet article va tenter d'apporter des éléments de réponse. Le premier temps de la réflexion sera consacré à l'analyse a priori du problème. Les différents éléments dégagés de cette analyse seront ensuite confrontés aux démarches réellement effectuées par des groupes d'élèves - celles qui se dégagent de l'analyse formative des différentes productions reçues. En conclusion, des pistes seront proposées pour l'utilisation de ce problème dans la mise en place de situations d'apprentissage. À cette occasion, une attention particulière sera accordée à son positionnement dans le cursus de formation des élèves. En effet, introduire des problèmes de suites numériques dès l'école primaire conduit à s'intéresser à la liaison primaire-secondaire et à la spécificité des approches de ces deux niveaux d'enseignement.

## 1. Le problème

Un triangle qui grandit (Cat. 4, 5, 6)

Pour construire la figure à deux niveaux (a), on utilise 3 triangles noirs et 1 triangle blanc.



Pour construire la figure à trois niveaux (b), on utilise 6 triangles noirs et 3 triangles blancs. Pour construire la figure à quatre niveaux (c), on utilise 10 triangles noirs et 6 triangles blancs.

Roland a construit une grande figure en utilisant exactement 55 triangles noirs.

De combien de niveaux se compose cette figure ?  
 Combien de triangles blancs ont été nécessaires à Roland pour sa construction ?  
 Expliquez comment vous avez trouvé.

### 1.1. Analyse de la tâche

Lors de la mise au point du problème, l'analyse *a priori* avait mis en évidence les comportements suivants :

- Comprendre que chaque figure a un niveau de plus que la précédente et essayer de dessiner les figures suivantes. Comme les triangles sont en fait des demi-carrés, le dessin en est facilité sur du papier quadrillé.
- Comprendre la construction géométrique des étages successifs supplémentaires.
- Compter les triangles noirs jusqu'à arriver à 55. On en déduit le nombre d'étages et l'on peut compter les triangles blancs que Roland a utilisés. Ou, pour éviter les dessins, travailler dans le domaine numérique et tenir une liste précise du comptage des triangles noirs pour trouver le nombre d'étages ; par exemple :

nombre de triangles noirs	3	6	10	15	21	28	36	45	55
nombre d'étages	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Pour établir cette liste, comprendre la régularité de sa construction ; soit en remarquant que l'on passe d'un nombre de triangles noirs au suivant en ajoutant 3, puis 4, puis 5, ... puis 10 ; soit en remarquant que le nombre de triangles noirs de la figure à  $n$  étages s'obtient en ajoutant  $n$  au nombre de triangles noirs de la figure précédente (celle qui est à  $n - 1$  étages).

- Se rendre compte que l'on peut ajouter à cette liste de comptage des triangles noirs une liste soigneusement coordonnée du comptage des triangles blancs, par exemple :

nombre de triangles noirs	3	6	10	15	21	...	55
nombre d'étages	2	3	4	5	6	...	10
nombre de triangles blancs	1	3	6	10	15	...	45

Pour établir cette liste de comptage des triangles blancs, comprendre soit qu'on y trouve les mêmes nombres que sur la liste du comptage des triangles noirs avec un « décalage » vers la droite de chacun des nombres de la liste ; soit en remarquant que l'on passe d'un nombre de triangles blancs au suivant en ajoutant 2, puis 3, puis 4, ... puis 9. Ou, constater que le nombre de triangles noirs correspond à la somme des nombres naturels jusqu'à  $n$  ( $n =$  nombre d'étages) et que le nombre de triangles blancs correspond à la somme des nombres naturels jusqu'à  $n - 1$  ( $n =$  nombre d'étages) ou que ce nombre de triangles blancs est égal au nombre de triangles noirs moins  $n$ . Ou, constater que le nombre total des triangles est 1, 4, 9, 16, ... (suite des carrés) et calculer le nombre de triangles blancs par différence.

## 1.2. Attribution des points

- 4 points : les deux réponses correctes (10 étages et 45 triangles blancs) avec explications détaillées (dessin, tableau, calculs, ...).
- 3 points : les deux réponses correctes avec explication peu claire ou incomplète ou explication claire et complète mais avec une erreur de calcul dans le comptage des étages ou des triangles blancs.
- 2 points : réponse correcte à une seule des deux questions, avec explications
- 1 point : début de raisonnement
- 0 point : incompréhension du problème

## 1.3. Quel est le domaine mathématique concerné ?

Il s'agit ici d'un problème de dénombrement ; les groupes d'élèves doivent découvrir un moyen ou une formule pour trouver rapidement le nombre de niveaux à développer pour obtenir une figure géométrique composée de 55 triangles noirs et, accessoirement, le nombre de triangles blancs utilisés pour la construire. S'il fallait identifier la compétence poursuivie, en référence aux Socles de compétences <sup>(1)</sup>, on pourrait citer : « Dénombrer en organisant le comptage et en le remplaçant par un calcul (cette première partie de la compétence doit être certifiée à 12 ans) et, le cas échéant par une formule (à certifier, cette fois, à 14 ans) ». Dans ce même document de référence, en introduction à l'identification des compétences numériques à maîtriser au terme des trois premières étapes de la scolarité obligatoire (8, 12 et 14 ans), il est précisé ceci : « la découverte et l'élaboration des propriétés relatives à certaines catégories de nombres naturels contribuent aussi à assurer une aisance dans le domaine des nombres. De plus, l'analyse de ces phénomènes arithmétiques conduit à établir des preuves et à employer des lettres pour généraliser. Cette étude constitue ainsi un tremplin pour accéder à l'algèbre ».

Le problème analysé ici s'inscrit bien dans cette optique ; en effet, une première lecture fait apparaître qu'il s'agit d'un problème classique d'identification d'une suite numérique régulière comme on en trouve dans de nombreux manuels de mathématiques du premier degré de l'enseignement secondaire (collège). Ce type de problème constitue souvent le point de départ vers de premières aventures algébriques.

Un exemple parmi d'autres extrait du manuel *Mathématiques, des situations pour apprendre* <sup>(2)</sup>.



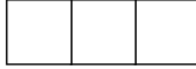
---

<sup>(1)</sup> Socles de compétences pour l'enseignement fondamental et le premier degré de l'enseignement secondaire. Bruxelles : Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique - Ministère de la Communauté française de Belgique.

<sup>(2)</sup> CASTIAUX, M., CLOSE, P. & JANSSENS, R., [2002], *Mathématiques, des situations pour apprendre* - Manuel de référence, Bruxelles : Editions De Boeck.



**Chacun des assemblages d'allumettes suivants est formé par la répétition d'une même figure**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
		

**(a) Invente une formule qui exprime le nombre d'allumettes nécessaires pour fabriquer la n<sup>e</sup> figure ( $N \in \mathbb{N}_0$ ).**  
**(b) Utilise cette formule pour calculer le nombre d'allumettes de la 87<sup>ème</sup> figure.**  
**(c) Quel est le numéro de la figure qui comporte 46 allumettes ?**

Au début de l'enseignement secondaire, ce problème *Un triangle qui grandit* devrait apparaître aux yeux des élèves comme un simple problème de suites numériques dont la résolution fait appel à des procédures et des outils de représentation bien établis. Qu'en est-il au niveau de l'enseignement primaire? Quelles démarches de résolution peut-on attendre de la part des élèves de ce niveau d'enseignement? Quels sont les outils de résolution à leur disposition?

### 1.4. Quelles sont les stratégies attendues des élèves ?

Pour dénombrer le nombre d'étages et de triangles blancs, les groupes d'élèves doivent identifier que chacune des figures comporte un étage de plus que la précédente. Dans l'énoncé, l'association du texte (description, registre verbal) et du dessin (représentation, registre graphique) a pour but de faciliter cette prise de conscience.

Le passage du registre géométrique (dessin) au registre numérique fait apparaître l'existence d'une certaine régularité (qui reste à définir) entre les trois variables suivantes : nombre d'étages - nombre de triangles noirs et nombre de triangles blancs. Cette régularité est plus facilement perceptible lorsque l'on positionne les données disponibles dans un tableau de ce type :

Nombre d'étages	Nombre de triangles noirs	Nombre de triangles blancs
2	3	1
3	6	3
4	10	6
...	...	...
?	55	?

Une telle mise en forme peut être qualifiée, à ce niveau d'enseignement, de procédure experte. Elle permet d'établir les constats suivants :

- On passe d'un nombre de triangles noirs au suivant en ajoutant 3, puis 4, ... ;
- On passe d'un nombre de triangles blancs au suivant en ajoutant 2, puis 3...

Ce type de représentation est privilégié dans les résolutions de tels problèmes au niveau du premier degré de l'enseignement secondaire. En primaire, ce problème peut être résolu sans faire appel à une procédure experte (les élèves de ce niveau, peu familiarisés avec ce type de problème, vont-ils penser à organiser les données de l'énoncé sous la forme d'un tableau? ). L'association du texte et du dessin de l'énoncé risque d'induire davantage un mode de résolution fondé sur le seul dessin. Sur un plan conceptuel, la procédure de résolution la plus simple consiste en effet à dessiner les agrandissements successifs des différentes figures jusqu'à en obtenir une qui contient 55 triangles noirs. Il restera à ce moment à compter le nombre d'étages et le nombre de triangles blancs. Sur un plan conceptuel, le recours au dessin constitue certes la procédure la plus simple mais, sur un plan pratique, rien n'est joué et les risques d'erreurs sont nombreux.

Entre ces deux modes de résolution « extrêmes », il est sans doute plus vraisemblable d'imaginer que l'analyse des productions des différents groupes va permettre d'identifier des procédures plus ou moins mixtes. Ainsi, par exemple, on peut imaginer que des groupes d'élèves vont, dans un premier temps, essayer de dessiner la figure qui suit immédiatement la dernière proposée dans l'énoncé (soit un triangle à 5 étages). Cette réalisation va leur faire percevoir la difficulté de la tâche pour les figures suivantes et les risques d'erreur. L'observation des caractéristiques de ce triangle à 5 étages va peut-être aussi confirmer cette intuition d'une certaine relation numérique qui lie les différentes constructions. Cette prise de conscience peut les inciter à quitter le registre de la représentation dessinée pour le registre numérique (modélisation par les nombres). La nécessité de ce passage sera d'autant plus grande que la régularité dans les suites sera mieux perceptible, c'est-à-dire si la figure à 5 étages est construite correctement.

En effet, le tableau suivant (complété par les observations issues de la construction d'un triangle à 5 étages) permet de mieux percevoir les suites numériques qui lient ces trois ensembles de données.

Nombre d'étages (n)	Nombre de triangles noirs (x)	Nombre de triangles blancs (y)
2	3	1
3	6	3
4	10	6
5	15	10
...	...	...
?	55	?

En complétant de cette manière le tableau, on voit très clairement apparaître un mode de résolution autre que celui basé sur l'idée de suite  $+3, +4, +5$ , d'une part et  $+2, +3, +4$  d'autre part. En effet, la mise en parallèle de ces deux séries observations fait apparaître une sorte de décalage entre les suites « nombre de triangles noirs » et « nombre de triangles blancs ». En réalité, le nombre de triangles noirs (x) ou blancs (y) d'une figure à  $n$  étages s'obtient en ajoutant  $n$  au nombre de triangles de la figure précédente (celle à  $n - 1$  étages).

Plus précisément, le nombre de triangles noirs correspond à la suite des nombres naturels jusqu'à  $n$  ( $n =$  nombre d'étages) tandis que le nombre de triangles blancs correspond, lui,

à la somme de la suite des nombres naturels jusqu'à  $n - 1$ . Autrement dit, si le nombre de triangles noirs vaut 55 (soit  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ ), alors le nombre d'étages est de 10 et il y a 45 triangles blancs ( $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ ). Bien évidemment, on ne s'attend pas à trouver ce type d'explication lors de l'analyse des copies des groupes d'élèves. Il est sans doute plus vraisemblable, au niveau des justifications formulées, de retrouver des procédures plus empiriques.

Pour terminer cette analyse *a priori*, il convient de souligner qu'il n'est pas simplement demandé aux élèves de trouver le nombre d'étages ou de triangles blancs; ils doivent également expliquer (par écrit) comment ils sont parvenus à trouver ces réponses. Cette démarche introduit une sorte de rupture dans les pratiques habituelles de résolution de problèmes. Il est demandé aux élèves d'aller au-delà de la simple production de la réponse attendue. Cet élément est très important au niveau du RMT et se trouve pris en compte au niveau du barème des points affectés à chaque production (voir la section 1.2). On notera toutefois qu'il s'agit ici simplement d'expliquer une démarche de résolution et non de la justifier ou d'en démontrer la pertinence .

## 2. Analyse des productions des groupes d'élèves

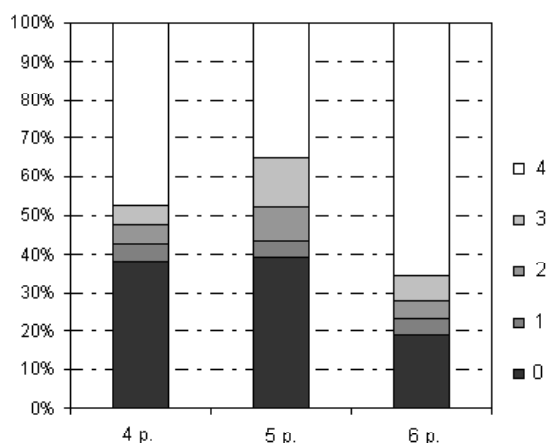
### 2.1. Données quantitatives

Le système d'attribution des points exposé à la section 1.2 permet de dresser un premier tableau des différents scores obtenus par les classes de 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> primaire.

Points attribués	4P	5P	6P
0	8	9	9
1	1	1	2
2	1	2	2
3	1	3	3
4	10	8	31
Nombre de copies	21	23	47
Moyenne	2,19	2	2,96
Mode	4	0	4

Comment lire ce tableau ? En regard de chaque point attribué, on retrouve, classé par année scolaire, le nombre de copies ayant obtenu ce score. On peut ainsi découvrir que 8 copies d'élèves de 4P, 9 de 5P et 9 de 6P ont reçu la note 0. Cela ne signifie pourtant pas qu'il y a plus de copies de 5P ou de 6P qui ont reçu une telle note. En effet, le nombre de classes participantes n'étant pas identique d'une année à l'autre, ces données sont à interpréter avec prudence; elles doivent être mises en relation avec le nombre de copies obtenu pour chaque année.

Ainsi, il est plus correct de dire ceci : « 8 copies sur 21 en 4P ont obtenu la note 0 contre respectivement 9 sur 23 en 5P et 9 sur 47 en 6P ». Ces informations peuvent être visualisées au départ du graphique ci-dessous.



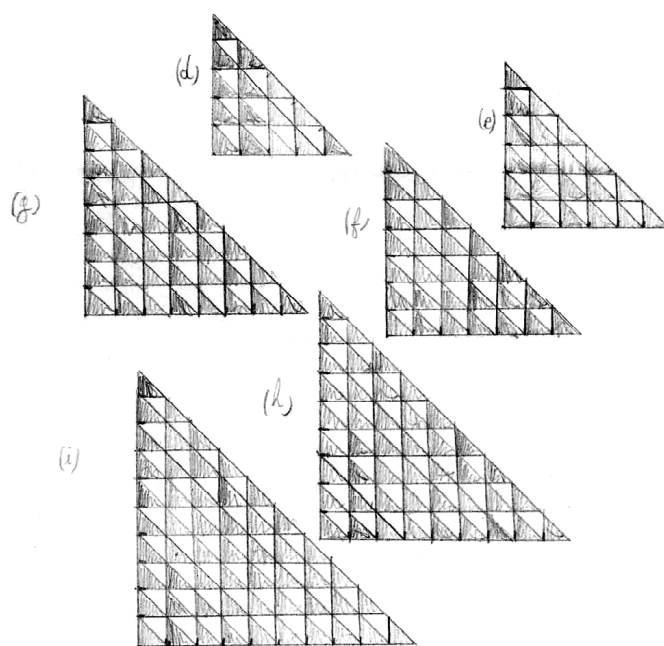
Le tableau précise également deux autres indices statistiques : la moyenne obtenue et le mode (note la plus souvent attribuée au sein de chacun des trois groupes). La prise en compte de ces deux indices permet un premier constat : les résultats obtenus en 4P semblent qualitativement supérieurs à ceux obtenus en 5P. Au-delà de ce constat un peu étonnant et qui reste difficile à interpréter, on notera que la moyenne est très élevée en 6P même si une faible proportion de groupes d'élèves de ce niveau

n'ont manifestement pas compris le problème qui leur était soumis. De manière générale, on note également (et ce constat est valable pour les trois années primaires impliquées) que les notes les plus souvent attribuées sont 0 ou 4 ; les autres notes étant peu attribuées. On se retrouve donc en présence d'un problème de type « tout ou rien » ; soit on échoue totalement, soit, au contraire, on le résout tout à fait correctement.

## 2.2. Analyse de quelques démarches de résolution

Suite aux constats sur la répartition des notes, nous avons décidé d'analyser prioritairement les types de résolution présentes dans les copies ayant obtenu une note de 4. Plus précisément, nous avons distingué trois types de démarches :

1. Les démarches utilisant uniquement le **registre géométrique** : pour résoudre le problème posé, les groupes d'élèves ont effectué un dessin d'un triangle à 10 niveaux. Dans l'exemple ci-dessous, les figures intermédiaires ont également été représentées.



2. Les démarches utilisant uniquement le **registre numérique** : pour résoudre le problème posé, les groupes d'élèves construisent des tableaux faisant apparaître la régularité des suites de nombres. Selon les cas, ces tableaux peuvent faire apparaître ou non une liaison entre les deux séries de suite numérique.

J'ai fait un tableau et j'ai remarqué qu'à chaque fois il y avait un chiffre en plus que au nombre précédent (ex:  $3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$ )

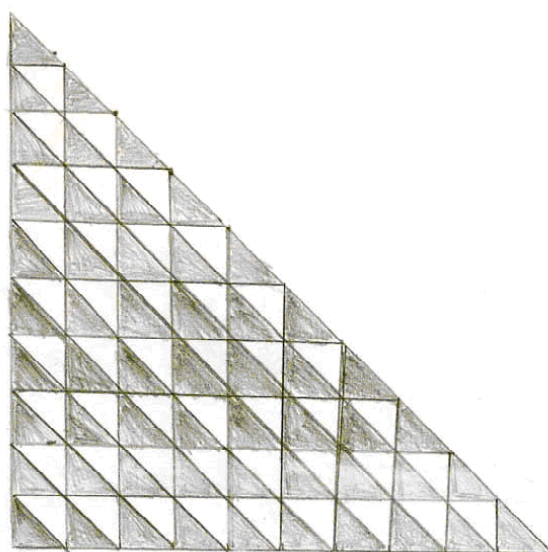
niveaux	t. noir	t. blanc
2	3	1
3	6	3
4	10	6
5	15	10
6	21	15
7	28	21
8	36	28
9	45	36
10	55	45

A chaque niveau, on rajoute un triangle noir et blanc en plus de ce que nous avons au niveau d'avant. Donc, nous avons calculé que au dixième niveau, nous arriverions à 55 triangles noirs. Et nous avons remarqué que le nombre de triangles blancs était le même que celui des triangles noirs au niveau d'avant. Vu qu'il y avait 45 triangles noirs au neuvième niveau il y aura 45 triangles blancs.

$5^{\text{ème}}$  niveau :  $10 + 5 = 15$  triangles noirs.  
 $6^{\text{ème}}$  niveau :  $15 + 6 = 21$  triangles noirs.  
 $7^{\text{ème}}$  niveau :  $21 + 7 = 28$  triangles noirs.  
 $8^{\text{ème}}$  niveau :  $28 + 8 = 36$  triangles noirs.  
 $9^{\text{ème}}$  niveau :  $36 + 9 = 45$  triangles noirs.  
 $10^{\text{ème}}$  niveau :  $45 + 10 = 55$  triangle noir.

La figure de 55 triangles noirs, sera de 10 niveau et 45 triangles blancs seront nécessaire.

3. Les démarches utilisant à la fois les **registres géométrique et numérique**.



*Comme il y a 3 triangles noirs dans le 1<sup>er</sup> grand triangle  
il y aura 3 triangles blancs dans le 2<sup>e</sup> grand triangle  
Comme il y a 6 triangles noirs dans le 2<sup>e</sup> grand triangle  
il y aura 6 triangles blancs dans le 3<sup>e</sup> grand triangle  
ainsi de suite jusqu'au 9<sup>e</sup> triangle*

Le tableau suivant permet d'apprécier l'éventail des stratégies développées par les différents groupes qui ont obtenu la note 4 pour la résolution de ce problème.

		4P	5P	6P
Géométrique	Dessin seul	6	5	12
	Dessin + explication sur la manière de le réaliser			6
Numérique	Tableaux de suites numériques séparés	3		5
	Tableaux de suites numériques liés		1	6
Géométrique + numérique	Dessin + tableaux de suites numériques	1	2	2
		10	8	31

Comment lire ce tableau ? En 4P, 6 classes sur les 10 qui ont reçu une note de 4, ont résolu le problème au départ du cadre géométrique. Elles sont 5 sur 8 en 5P et 18 sur 35 en 6P. Autrement dit, ce mode de résolution est dominant. Quelle que soit l'année scolaire, on ne constate pas de différence qualitative au niveau des stratégies de résolution (si on admet que la résolution dans un cadre numérique est qualitativement supérieure à une démarche faisant appel au seul dessin).

### 3. Pistes pour aller plus loin

Ci-dessous nous envisagerons des pistes pour aller plus loin, ou pour rencontrer la question : « comment inciter les élèves à éviter le recours au seul dessin ? »

Une situation de gestion des apprentissages offre davantage de perspectives pédagogiques qu'une situation de concours. L'enseignant (il est, cette fois, bien présent et participe activement à la gestion du groupe-classe) peut évidemment, dans un premier temps, répartir ses élèves en groupes et leur soumettre le problème. En passant dans les bancs, il a l'occasion d'observer le niveau d'avancement des démarches de résolution adoptées par chaque groupe.

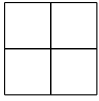
- Si certains groupes ne s'en sortent pas, il peut adapter les consignes de départ en demandant, par exemple, de déterminer d'abord le nombre de triangles noirs et blancs d'une figure à 6 étages, puis de 7 étages ... L'organisation des données joue un rôle important dans la résolution du problème. Il serait peut-être utile de suggérer aux élèves de les regrouper sous la forme d'un tableau. . . Bref, les indices ou relances ne manquent pas pour mettre les élèves sur la voie sans que la réponse à construire n'apparaisse comme évidente ;
- Si les élèves n'éprouvent guère de difficultés mais utilisent le dessin comme démarche de résolution, il est possible de procéder à des variations au niveau du nombre d'étages ou de triangles à découvrir tout en ajoutant comme consigne qu'il est interdit de dessiner pour répondre aux nouvelles questions posées (par exemple : quel est le nombre de triangles blancs et noirs d'une figure à 15 étages?). Il est également possible de leur donner l'indice suivant : le nombre de triangles blancs pour une figure à 10 étages est égal au nombre de triangles noirs pour une figure à 9 étages. Peut-être cet indice les conduira-t-il à recourir à un tableau pour organiser les données recueillies tout au long de la construction de la figure à 10 étages.

Lors de la mise en commun, une communication et une confrontation des démarches obtenues devraient permettre à chaque élève de percevoir l'utilité du recours au raisonnement numérique. Ce dernier repose sur une organisation des données disponibles sous la forme de tableaux tels ceux présentés lors de l'analyse *a priori*.

En application, de nouvelles variations peuvent être proposées aux élèves. Elles ont pour but de vérifier le niveau de compréhension des élèves mais aussi leur capacité à utiliser les outils construits pour répondre à de nouveaux problèmes :

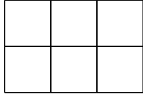
- des applications de même nature que le problème d'origine : je suis composé de 78 triangles blancs, quel est le nombre de triangles noirs et d'étages nécessaires à ma construction ?
- des applications plus élaborées reposant sur une bonne compréhension des liens entre les suites numériques : je suis composé de 136 triangles noirs et 120 triangles blancs. Qui peut préciser très rapidement de combien d'étages je suis composé ?

Par la suite, de nouveaux problèmes portant sur l'identification de suites numériques peuvent être proposés aux élèves et, pourquoi pas, un autre problème du RMT. Ainsi, *Grilles d'allumettes*, extrait de l'épreuve I, offre l'opportunité aux élèves d'utiliser, dans un autre contexte, des suites numériques pour anticiper le résultat de constructions géométriques .... très fastidieuses à dessiner.

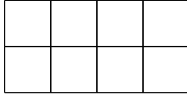


Grilles d'allumettes (Cat. 5, 6, 7)

Pour construire cette figure, il a fallu 12 allumettes.



Pour cette deuxième figure, il a fallu quelques allumettes de plus !



Et pour cette troisième figure, encore davantage d'allumettes !

En continuant à construire des figures de la même façon, combien d'allumettes seront nécessaires à la construction de la 100ème ?

Justifiez votre réponse.

## 4. Conclusion




Les différentes variations et les activités proposées autour du problème *Un triangle qui grandit* sont intéressantes à développer dès la fin de l'école primaire ; elles ouvrent la voie vers la généralisation et le raisonnement algébrique. Il ne s'agit pas ici d'anticiper ou de brûler des étapes mais bien d'amener les élèves à rencontrer ce concept de suite dans des contextes diversifiés. En quoi cela peut-il être utile pour les élèves de fin de primaire ? Pour répondre à cette question, analysons les difficultés rencontrées par des élèves de début de troisième secondaire confrontés au problème ci-dessous <sup>(3)</sup>.

---

<sup>(3)</sup> Extrait de l'épreuve externe de mathématique de 2004 conçue par la Cellule de Pilotage.



On veut construire des suites de triangles avec des allumettes et les compter ensuite.

Etape	1	2	3	4
Construction				
Nombre d'allumettes				

**A/** Complète le tableau.

**B/** Combien d'allumettes faudrait-il pour confectionner les triangles de la 7<sup>e</sup> étape ?

Réponse :

**C/** Si la lettre  $n$  désigne le numéro de l'étape, entoure – parmi les formules suivantes – celle qui permet de calculer le nombre d'allumettes utilisées pour construire les triangles de la  $n^{\text{e}}$  étape.

$3 \cdot n$	$3 \cdot (n - 1)$	$1 + 2 \cdot n$	$2 \cdot n + 2$
-------------	-------------------	-----------------	-----------------

Ce problème est bien plus simple que celui proposé aux élèves de primaire. D'une part, il n'y a qu'une seule suite à identifier et, d'autre part, la démarche à suivre pour le résoudre (la mise en forme du problème sous la forme d'un tableau) est donnée aux élèves. On ne s'étonnera dès lors pas de constater que les sous-questions *A* et *B* sont très bien réussies : plus de 90% des élèves interrogés répondent correctement. Il en va par contre tout à fait différemment pour la troisième sous-question ; celle qui concerne le choix de la bonne expression littérale du problème posé. Un peu plus de 50% seulement des élèves interrogés identifient correctement la modélisation adéquate. Ce constat peut paraître surprenant quand on sait toute l'importance accordée à la généralisation au cours du premier cycle de l'enseignement secondaire et le rôle joué par la formalisation algébrique pour exprimer

cette généralisation. On sait aussi que le travail au départ des suites constitue un moyen de donner du sens aux expressions littérales.

Sans doute faut-il voir dans ces résultats, la conséquence d'un formalisme algébrique introduit trop rapidement surtout et sans suffisamment faire référence à des situations qui lui donnent du sens. Comme l'écrivent les auteurs de cette épreuve, « ces résultats soulignent tout l'intérêt qu'il y a à donner du sens à l'apprentissage algébrique. On pourrait suggérer aux enseignants d'attirer l'attention des élèves sur l'utilité des stratégies par essais et erreurs. La faiblesse des résultats montre que l'étude exploratoire est, de fait, peu présente chez les élèves alors qu'elle aurait suffi à trouver la réponse ».

Ce dernier point mérite une attention particulière; les erreurs commises par les élèves mettent en évidence qu'ils n'ont guère cherché à évaluer le caractère plausible de leur réponse. Il semblait si facile, connaissant le nombre d'allumettes de la figure 3, de valider ou non la réponse choisie. Ainsi, si  $n = 3$ , l'expression  $1 + 2n$  peut s'écrire sous la forme  $1 + 2 \times 3 = 7$  soit la valeur du nombre d'allumettes indiqué correctement par plus de 90% des élèves dans le tableau à compléter.

Il n'en a rien été pour près de 50% des élèves et ce constat doit attirer notre attention sur un certain nombre d'implicites que les élèves semblent avoir construit au contact des situations d'apprentissage des mathématiques rencontrées à l'école primaire puis au premier degré de l'enseignement secondaire. Les élèves ne déduisent-ils pas très rapidement que toutes les histoires qui entourent les problèmes de mathématiques proposés en classe ne sont-là que pour les amener à réaliser des additions, des soustractions, des multiplications? Dans cette perspective, que risquent-ils de répondre à la question « à quoi servent les mathématiques? »?

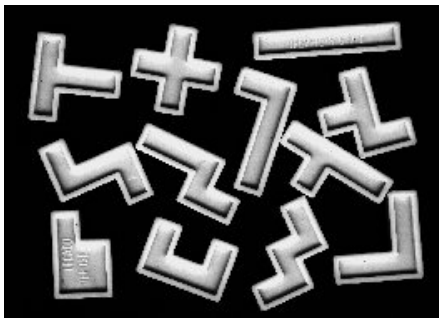
Un problème tel que *Un triangle qui grandit* peut être utilisé avec les élèves du primaire pour leur permettre d'appréhender les possibilités offertes par le raisonnement mathématique... même s'ils ne disposent pas de tous les outils conceptuels pour résoudre de manière experte le problème proposé. La formalisation mathématique devrait s'en trouver par la suite facilitée grâce à la richesse et à la diversité des situations rencontrées. Ce constat conduit à s'interroger sur les spécificités respectives des approches et des problèmes à travailler de part et d'autre de cette douloureuse ligne de démarcation qui sépare l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au début de l'enseignement secondaire.



# Avec des pentaminos

## CLAUDE VILLERS, *Comité RMT*

### Introduction



Les pentaminos...Voici des objets mathématiques « mal connus » des enseignants du fondamental paraît-il. Et pourtant...

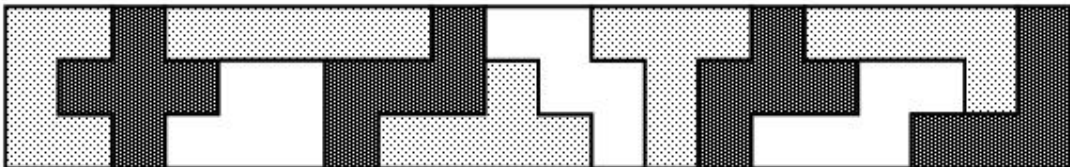
L'article ci-dessous a pour objet d'analyser le problème *Avec des pentaminos*, issu de la première épreuve du 13<sup>e</sup>RMT. Cette analyse est assez courte, les réponses et justifications des élèves ne permettent pas de longs discours. Cependant, nous avons choisi de traiter ce problème car il assure de multiples exploitations en classe.

Ces exploitations, ainsi qu'une analyse des pentaminos, sont décrites dans une deuxième partie de cet article. En fin de ce tome 2, en pages *Matériel didactique*, vous trouverez également la procédure pour construire aisément ce matériel. Bonne lecture...et bonne découverte des pentaminos et autres monominos, dominos, etc...

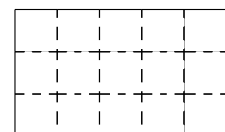
## 1. Le problème

RMT 2005 (Cat. 3, 4)

Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux. Il y a 12 pentaminos différents avec lesquels on peut former un rectangle de «  $3 \times 20$  » :



Éric joue avec ses 12 pentaminos et cherche à faire un rectangle de «  $3 \times 5$  ». Il prend une des 12 pièces, et s'aperçoit qu'il n'arrivera pas à finir son rectangle. Quelles pièces Éric n'arrivera jamais à utiliser pour son rectangle? Expliquez pourquoi.

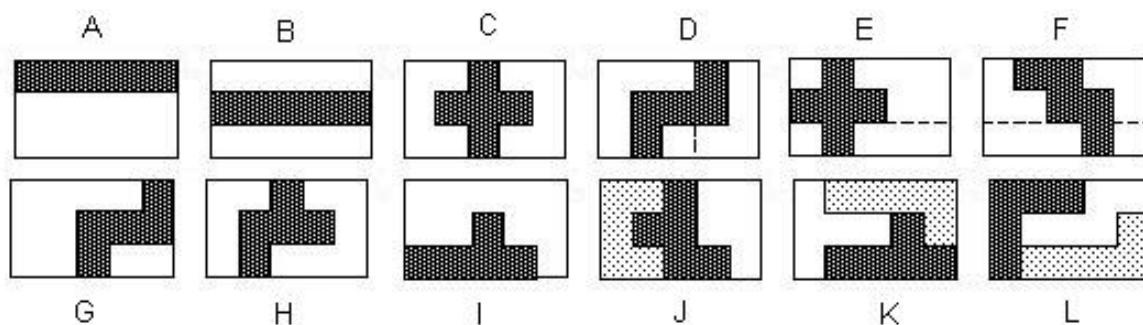


## 1.1. Analyse de la tâche

Lors de l'analyse *a priori* de ce problème, les comportements suivants avaient été mis en évidence :

observer que certaines pièces occupent 3 couches de carrés dans la grille, d'autres seulement 2 couches ou seulement 1 couche (*A, B*).

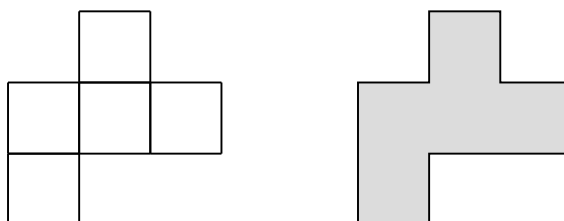
- constater que la « barre » *A*, ne laisse que deux couches qui ne pourraient être complétées que par deux pièces égales ;
- constater qu'une position centrale pour certaines pièces symétriques impliquerait qu'on devrait utiliser deux fois le même pentamino pour compléter le rectangle  $3 \times 5$ , *B, C, D* ;
- observer que certains pentaminos, selon leur disposition, partagent la grille en fragments qui ne comptent pas exactement 5 carrés et rendent donc toute solution impossible *E, F, G, H* ;
- à la suite de ces constatations, vérifier pièce par pièce s'il est possible de compléter la grille  $3 \times 5$  avec deux autres pentaminos différents. Par exemple en modifiant la disposition du pentamino de *H* en *J*, on trouve une solution, de même pour le changement de *I* en *K* ;
- constater que seuls, la « barre » *A, B*, la « croix » *C, E*, le « Z » *D, G* et le « W » *F* ne peuvent être utilisés. On trouve des configurations de trois pentaminos différents pour les huit autres, par exemple *J, K, L*.



## 1.2. Des premiers constats

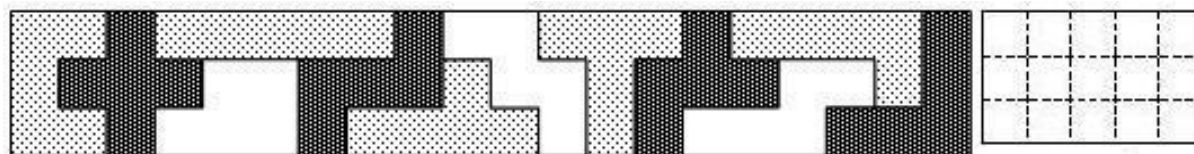
En ce qui concerne le registre « graphique »...

Une première remarque s'impose : il aurait peut-être été souhaitable de dessiner au moins un pentamino où les cinq carrés de base apparaissent. Ceci aurait permis de mieux situer le concept de pentamino en associant un dessin à l'énoncé « Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux. ».



Une deuxième remarque est que les carrés unitaires composant le rectangle «  $3 \times 5$  » proposé au pavage ne sont pas de la même taille que ceux composant le rectangle «  $3 \times 20$  » illustré. Un certain nombre de réponses données à ce problème s'appuient sur cette différence dans les mesures des longueurs de ces carrés unitaires pour conclure que le

pavage «  $3 \times 5$  » n'est pas possible . Ce qui, d'une certaine manière, est exact, particulièrement dans le cas des jeunes élèves habitués à établir des comparaisons par mesurage. Il semble qu'une adéquation correcte des figures proposées, au niveau de la mesure de leurs grandeurs, soit nécessaire.



En ce qui concerne le registre « verbal »...

Pour le domaine verbal, ici uniquement du domaine de l'écrit, il semble que le texte de l'énoncé présente des ambiguïtés plus particulièrement au niveau de la rédaction de la question. Il aurait été plus clair, surtout pour les jeunes élèves, de poser la question comme suit (ce n'est qu'un exemple!!!) :

*Quels sont les pentaminos qui empêchent toujours le pavage complet du rectangle «  $3 \times 5$  »*

### 1.3. Résultats

Le tableau ci-contre présente les résultats à ce problème. Deux catégories étaient concernées, les catégories 5 et 6. Pour chacun des niveaux, un dénombrement des notes obtenues a été dressé sur la base des résultats. Remarquons que la moyenne est assez basse et que la note la plus couramment obtenue est zéro.

	5 <sup>e</sup> année	6 <sup>e</sup> année
Notes	Nombres	Nombres
0	13	21
1	6	10
2	1	11
3	3	12
4	1	0
Moyenne	0,875	1,26
Mode	0	0

#### Attribution des points

- 4 points pour les 4 pièces impossibles (la « barre », la « croix », le « Z » et le « W ») avec justifications
- 3 points pour les 4 pièces « impossibles » avec justifications incomplètes ou 1 erreur avec justifications correspondantes
- 2 points pour 3 pièces « impossibles » trouvées, avec justifications incomplètes ou 2 erreurs, avec justifications correspondantes
- 1 point pour 2 pièces « impossibles » trouvées, avec justifications incomplètes ou 3 erreurs, avec justifications correspondantes
- 0 point si 1 seule pièce trouvée ou plus de 3 erreurs ou incompréhension du problème

## 2. Des démarches de résolution

### 2.1. Première analyse

Au niveau des classes de 5<sup>e</sup> année, les notes correspondent bien à celles de l'analyse *a priori*. Cependant, les explications écrites sont manquantes ou maladroites ce qui n'est pas étonnant vu la nature du problème proposé. Elles ne font que se baser sur des affirmations de constats sans beaucoup de développement. Comme dit précédemment, des classes ont été perturbées par la différence entre les longueurs des côtés des carrés unitaires telles que représentées sur les deux figures qui accompagnaient la question.

Au niveau des classes de 6<sup>e</sup> année, les mêmes constats sont d'actualité. Les classes ayant obtenu une note 3 ou une note 2 ont également simplement cité ce qui était attendu sans vraiment donner de justification autre que celle d'exemples dessinés ou collés après découpages.

## 3. Intérêt du problème

Malgré les résultats relativement faibles qu'il a induit, ce problème ouvre des perspectives non négligeables pour un apprentissage ultérieur de notions mathématiques, pour le développement de compétences disciplinaires ainsi que de compétences transversales. Il peut être à l'origine de recherches de toutes les éventualités de structure de pentaminos, par exemple en les construisant (par dessin éventuellement) progressivement par adjonction d'un carré élémentaire : *monomino*, *domino*, *triminos*, *quadrminos* et enfin *pentaminos*. Il est possible de mener une recherche sur les périmètres et les aires. Les pavages de rectangles conduisent à traiter des multiples et des diviseurs, *etc...* Cela ne se réalise pas, bien entendu, dans le cas d'un problème du RMT mais des portes sont ouvertes pour une exploitation en classe allant au-delà de la simple réponse à la question posée.

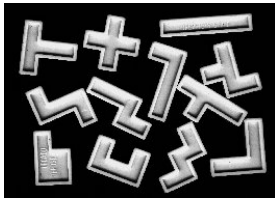
Ces développements sont abordés dans l'article *Plus loin avec des pentaminos*, synthèse de trois articles de C. VILLERS parus dans la revue *Math Jeunes*, n<sup>o</sup>100, 101, 102. Nous remercions particulièrement Claude Villers pour avoir autorisé le Comité RMT de synthétiser ces trois articles.

# Plus loin avec des polyminos

## COMITÉ RMT, *Comité RMT*

Dans l'article précédent, Claude Villers a analysé le problème concernant les pentaminos. Dans les numéros 99, 101 et 102 de *Math jeunes*, revue éditée par la SBPMef, ce membre du comité RMT a écrit trois articles concernant les polyminos. Ces articles sont plus particulièrement destinés aux élèves du début du secondaire. Il nous a donné l'autorisation d'en faire la synthèse afin de rédiger le présent article. Qu'il en soit remercié.

### 1. Des caractéristiques communes



Nous voilà bien désolés! Toutes les pièces du puzzle se sont répandues sur le sol. Bien que muettes par nature, elles semblent nous inviter à les remettre en ordre. Mais avant cela, nous pouvons peut-être les observer attentivement et émettre quelques constatations et conjectures.

- Première constatation, assez immédiate : ce puzzle se compose de 12 pièces. Par ailleurs, elles sont relativement « plates » car elles ont une épaisseur juste suffisante que pour en assurer une certaine rigidité. Nous pouvons admettre qu'elles représentent chacune une partie du plan.
- Deuxième constatation tout aussi évidente : toutes ces pièces sont différentes par la forme. Aucune d'entre elles ne peut se superposer à une autre même après **déplacement ou retournement**.

Et pourtant, elles possèdent une caractéristique commune qui les fait donc se « ressembler » un peu : elles ont toutes la même aire. Par ailleurs, il est possible de décomposer une pièce du puzzle et de recomposer ses parties pour obtenir une autre pièce du puzzle comme le montre la figure 1.

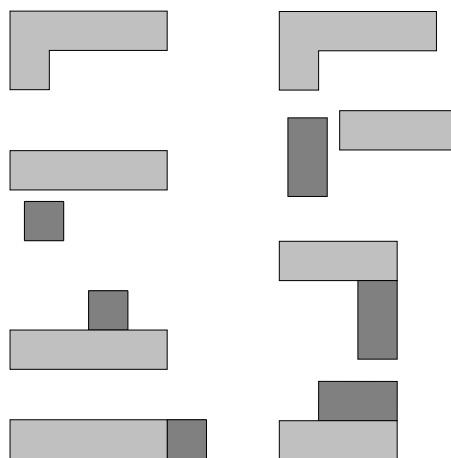


Fig. 1



## 2. Construire d'autres polyminos

Une autre activité intéressante peut être de s'interroger sur les possibilités de construire des pièces de puzzle différentes à partir de deux carrés, de trois carrés, de quatre carrés. Il s'agit là d'un problème de combinatoire fort intéressant également pour l'organisation d'une démarche de recherche. Vous avez certainement déjà demandé à vos élèves de rechercher tous les classements possibles de 4 enfants qui organisent une course entre eux : Albert, Bernadette, Cécile, Didier. Et si vous les avez observés au travail... :

1. Albert, Bernadette, Cécile, Didier
2. Bernadette, Didier, Albert, Cécile
3. Cécile, Albert, Didier, Bernadette
4. ...

Rares sont les élèves qui organisent leur recherche de solutions. Or, sans méthode, très vite cette recherche devient difficile : a-t-on déjà écrit cette solution : Bernadette, Didier, Cécile, Albert ? Laquelle n'a-t-on pas encore écrite ?... La recherche des dominos, triominos et quadriminos participe aussi de cette idée d'organisation d'une recherche de cas possibles.

Recherchons donc les pièces possibles en assemblant deux carrés. Un carré possédant 4 côtés, il devrait y avoir au moins 16 façons d'assembler deux carrés, soit 4 côtés possibles à juxtaposer à 4 autres. Cependant, on peut accepter que la recherche de solutions se borne à placer un des carrés autour du second, comme le montre la figure 2, puisqu'un carré possède 4 côtés égaux et 4 angles droits. *In fine*, reconnaissons qu'il n'existe qu'une seule solution, toutes les autres étant identiques à un déplacement ou une symétrie près (figure 3).

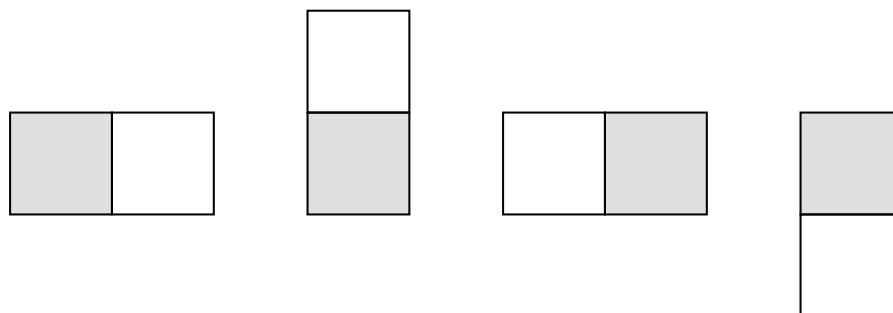


Fig. 2

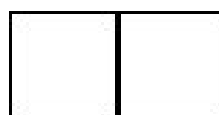


Fig. 3

Vous avez certainement compris qu'il s'agit des célèbres dominos, le préfixe « do » signifiant « deux ».

Mais, combien de pièces de puzzle peut-on construire avec trois carrés ? Deux méthodes de recherches au moins sont possibles :

- soit nous reprenons trois carrés et nous cherchons comment les assembler...
- soit, sachant qu'il n'y a qu'une seule façon d'assembler deux carrés, nous venons de le mettre en évidence, nous recherchons toutes les possibilités d'ajouter un troisième carré à cette paire unique, le domino.

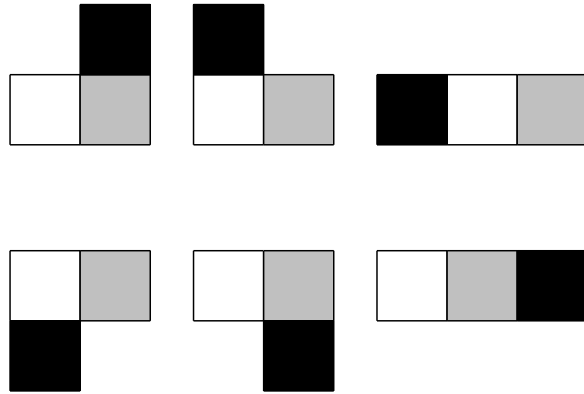


Fig. 4

Cette seconde manière de procéder a pour avantage de montrer aux enfants qu'en mathématiques, comme dans d'autres sciences, il ne faut pas redécouvrir l'ensemble de la science chaque jour. Il en va de même par ailleurs à l'école, fort heureusement. En organisant notre recherche, nous comprenons qu'il y a six possibilités de juxtaposition d'un carré à un domino (figure 4). *In fine*, nous découvrons qu'il existe deux types de triminos, à un déplacement ou un retournement près (figure 5).

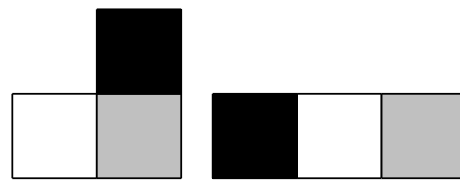


Fig. 5

Pour la recherche des quadrminos ou tetraminos, il y a lieu d'utiliser la même démarche : utiliser les deux triminos et leur adjoindre un carré. Si ceci est effectuée correctement, nous obtenons 5 types différents de quadrminos (figure 6)

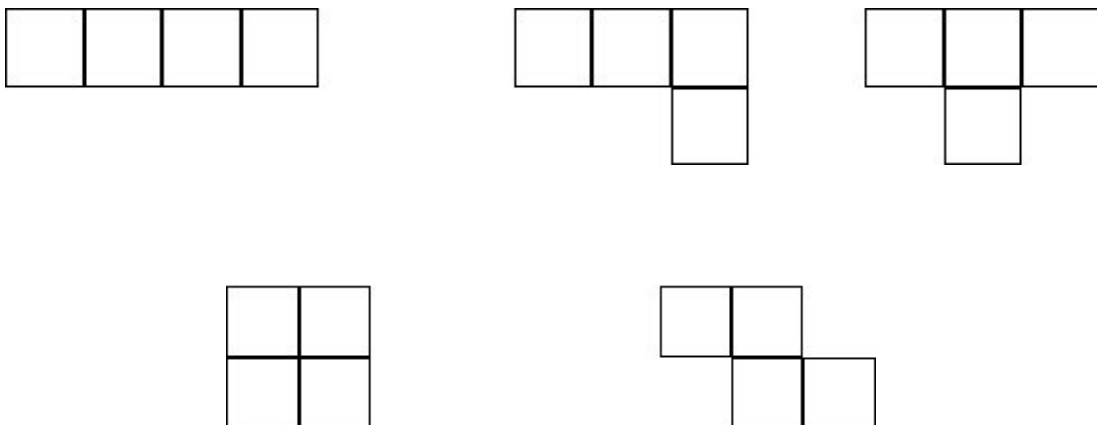
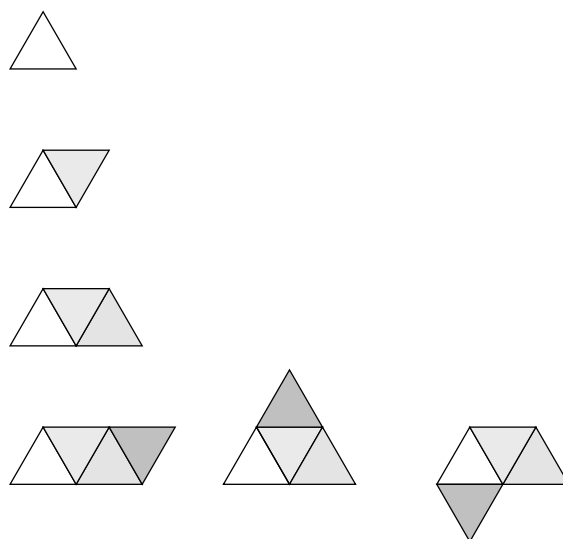


Fig. 6

La recherche de tous les pentaminos est évidemment un peu plus longue. Le nombre de possibilités est plus important et la recherche peut paraître fastidieuse pour les élèves. Rien n'empêche cependant d'exercer la procédure de recherche lors d'une prochaine activité à partir de triangles équilatéraux comme le montre la figure ci-contre.



*Fig. 7*

### 3. Des aires et des nombres

Après avoir construit ces pièces de puzzle, nous pouvons nous intéresser à leurs caractéristiques par exemple. Pour chaque série, trimino, quadrimino ou pentamino, toutes les pièces ont la même aire, soit trois, quatre ou cinq carrés. Mais ont-elle le même périmètre ? Ce qui est certain c'est qu'elles n'ont pas la même forme. Voici déjà une manière de rencontrer des concepts que les élèves acquièrent difficilement ou de manière incomplète : l'aire, le périmètre, la forme et les interactions entre ces concepts. Par exemple, dans le puzzle des pentaminos, les douze pièces ont la même aire, elles n'ont par contre pas toutes le même périmètre, elles sont toutes de forme différente.

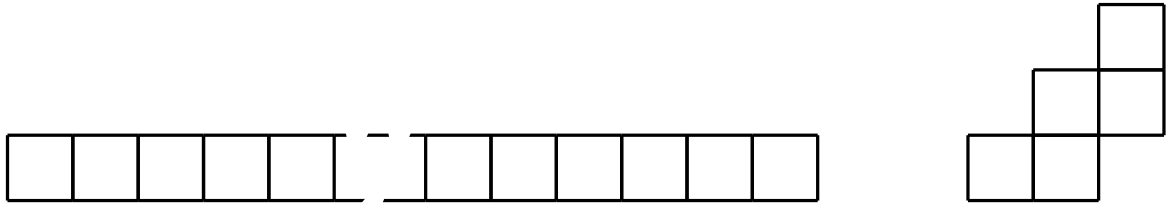
Ensuite, il est assez naturel de songer à les assembler pour effectuer un pavage. Dans le cas des pentaminos, les 12 pièces doivent toutes être utilisées et ne peuvent laisser de « trou ». Puisque chaque pièce est composée de 5 carrés et que la longueur de chaque côté d'un carré vaut 1 ou  $1u$ , alors l'aire de chaque pièce vaut  $5u^2$ . Nous pouvons aussi dire que l'aire d'une pièce de pentamino vaut 5 carrés.

L'aire de la forme à paver avec les douze pentaminos doit donc être de  $12 \times 5u^2$ , soit  $60u^2$ , ou 60 carrés.

Puisque les bords des pentaminos sont formés de segments deux à deux parallèles ou perpendiculaires, la première idée est de paver, si c'est possible, un rectangle. Paver un triangle serait beaucoup plus difficile... ! Mais quelles peuvent alors être les dimensions de ce rectangle ?

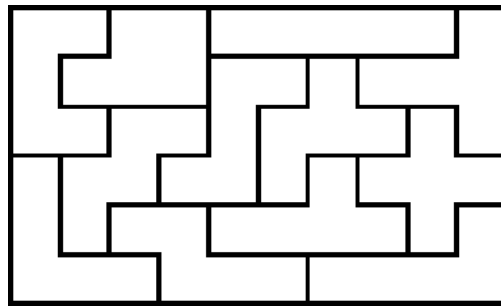
Vous voilà subitement plongés dans les notions de diviseurs et multiples naturels de 60. Les paires possibles de dimensions naturelles sont  $1u, 60u$ ;  $2u, 30u$ ;  $3u, 20u$ ;  $4u, 15u$ ;  $5u, 12u$  et  $6u, 10u$ , soit les paires de diviseurs naturels de 60. Numériquement donc, il devrait être possible de paver des rectangles ayant ces dimensions. Mais est-ce possible avec les douze

pièces de pentaminos ? Pourrions-nous paver un rectangle de  $1u \times 60u$  (figure 8) ? ... Une première analyse permet donc d'éliminer certains rectangles en fonction de leurs dimensions.



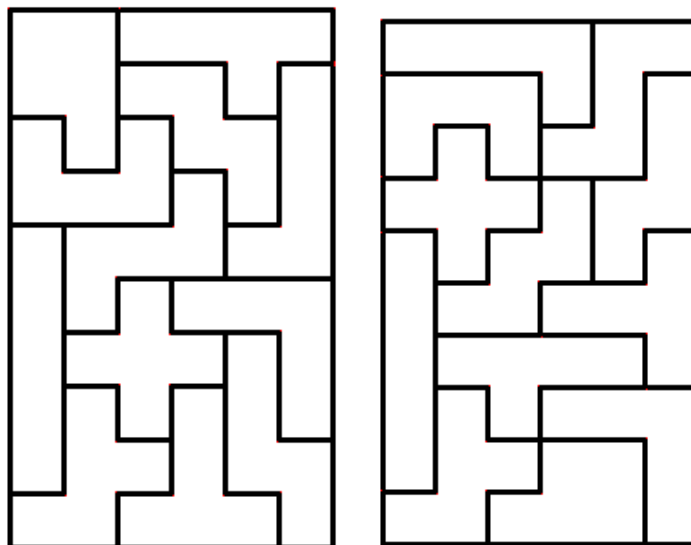
*Fig. 8*

Nous pouvons cependant raisonnablement penser qu'il est possible de paver le rectangle de dimensions  $6u \times 10u$  avec les pièces du puzzle. Ce n'est pas évident mais c'est faisable. Une solution est exposée à la figure 9

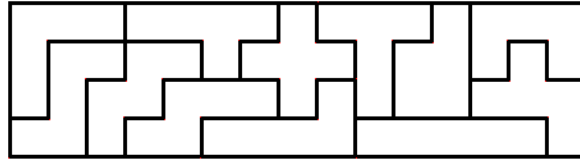


*Fig. 9*

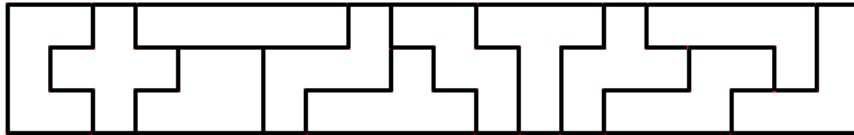
Il y a un très grand nombre (des milliers) de solutions pour les pavages du rectangle  $10 \times 6$  où tous les pentaminos sont utilisés. En voici encore deux.



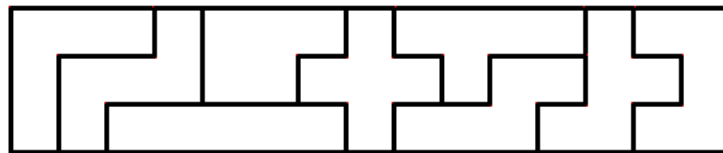
Vous pouvez aussi rechercher des pavages d'autres rectangles de même aire ou d'aire plus petite que celle du rectangle  $10 \times 6$ . Il faut seulement que cette aire soit multiple de 5. Ci-dessous vous pouvez voir une solution pour le rectangle  $15 \times 4$  (figure 10),  $20 \times 3$  (figure 11),  $15 \times 3$  (figure 12),  $10 \times 3$  (figure 13) et  $5 \times 3$  (figure 14) <sup>(1)</sup>.



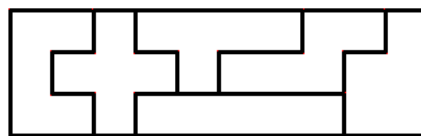
*Fig. 10*



*Fig. 11*



*Fig. 12*



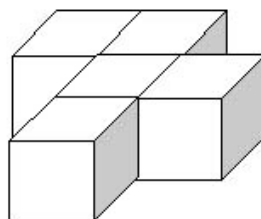
*Fig. 13*

---

<sup>(1)</sup> Ces dessins ne sont toutefois pas représentés en respectant l'échelle de grandeur.

## 4. Et si on sortait du plan !

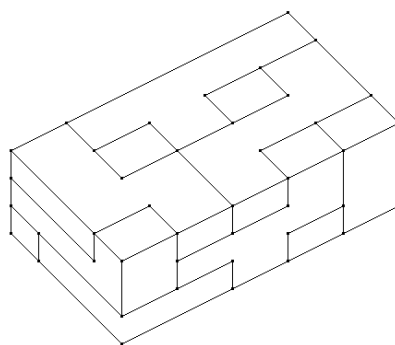
Il est possible de construire les polyminos en leur donnant une certaine « épaisseur ». Et ce qui est relativement immédiat, c'est de leur donner une épaisseur unitaire. Chaque carré composant le polymino devient alors face d'un cube. Les douze pentaminos auxquels nous accordons de l'intérêt deviennent alors des objets de l'espace. La figure 15 en présente un exemplaire. Les douze pentaminos, affectés d'une épaisseur 1, acquièrent ainsi un volume valant  $5u^3$  chacun, ou 5 cubes.



*Fig. 15*

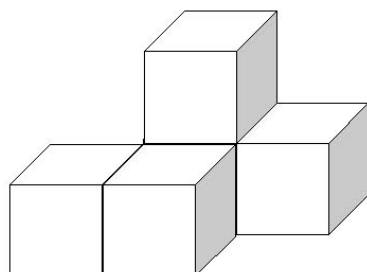
Il est possible de construire des parallélépipèdes rectangles de volume  $12 \times 5u^3$  soit de  $60u^3$  ou 60 cubes. Comme pour les rectangles, il s'agit de trouver différentes dimensions de parallélépipèdes ayant  $60u^3$ . Nous sommes amenés à factoriser 60 en produits de 3 facteurs et non plus de deux comme pour les rectangles. Soit, nous devons trouver des triplets de diviseurs de 60 : 1, 2, 30 ; 1, 3, 20 ; ...

Si vous avez l'occasion de vous procurer ou de faire construire ces 12 pentaminos d'épaisseur unitaire alors essayez de les assembler pour constituer un parallélépipède  $3 \times 4 \times 5$  (il paraît qu'il y a 3940 solutions), un parallélépipède  $2 \times 5 \times 6$  (264 solutions) et un parallélépipède  $2 \times 3 \times 10$  (12 solutions). La figure ci-dessous expose une solution pour le premier de ces cas.



*Fig. 16*

Cependant, toutes les configurations de cinq cubes connexes ne sont pas représentées. La figure 17 en expose une autre. Les assemblages de ce type de pièces sont cependant plus complexes !



*Fig. 17*

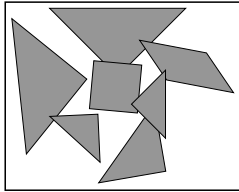
## 5. Conclusion

Les polyminos sont des objets assez facile à construire et avec lesquels il est possible de rencontrer des concepts mathématiques variés issus des grandeurs, de l'arithmétique et de la géométrie. Dans l'enseignement secondaire, ces situations pourront également être interprétées grâce à l'algèbre. Dans cet article, nous avons rencontré une situation qui permettait de clarifier une démarche de recherche de plusieurs solutions (comment connaître tous les quadriminos par exemple) et une situation géométrique qui permettait de lier l'arithmétique (recherche de diviseurs) et les grandeurs (périmètre et aire). Ce sont là des situations quelque peu différentes de celles que l'on rencontre généralement dans les manuels.

# Un problème de géométrie !

## PHILIPPE SKILBECQ, *Comité RMT*

### Introduction



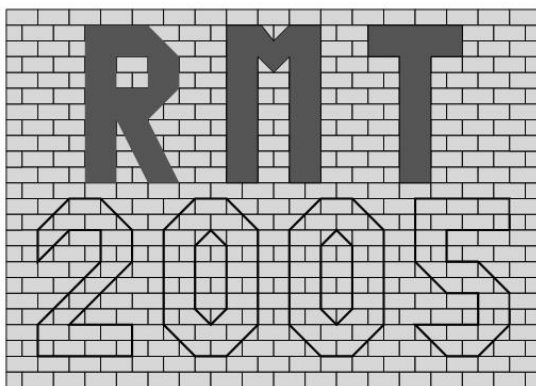
Les problèmes d'arithmétique sont les plus courants dans les épreuves du RMT, nous l'avons montré dans l'article *Le 1<sup>re</sup> RMT, première édition en Communauté française de Belgique* du tome 1 de ce livret. Dans les classes également, les activités d'arithmétique sont généralement plus nombreuses que les activités de géométrie.

Force est également de constater que les activités de géométrie font souvent appel aux nombres dans les exercices de mesure de périmètre, d'aire ou de volume à partir d'unités conventionnelles. Nous ne pouvons donc laisser sous le boisseau un problème de géométrie intéressant à plus d'un égard et dont l'analyse *a priori* annonce : *approche de la notion d'aire, détermination de l'aire de figures par recouvrement et comptage d'unités*.

Un premier intérêt est que plusieurs démarches peuvent être employées pour résoudre cette situation de comparaison des aires de deux ensembles de figures géométriques. Deuxième intérêt, plusieurs concepts mathématiques fondamentaux entrent en jeu dans sa résolution, notamment l'*unité de mesure commune*. L'exploitation *a posteriori* en classe devrait donc permettre de nombreux apprentissages ou structurations de démarches et de savoirs mathématiques.

## 1. Le problème

RMT 2005 (Cat. 3, 4)



Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005. Sophie va peindre, le " 2 " et le premier " 0 ". Marc peindra l'autre " 0 " et le " 5 ".

Qui utilisera le plus de peinture? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



## 1.1. Analyse de la tâche

Lors de la mise au point du problème, l'analyse *a priori* avait mis en évidence les comportements suivants :

- se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur des surfaces à recouvrir et qu'il faut trouver une (ou plusieurs) unités d'aire pour les comparer ;
- choisir, parmi les unités les plus évidentes : la " brique " (rectangle), la " demi-brique " (carré), le triangle ou demi-carré (qui permet d'avoir des nombres entiers d'unités) ;
- l'unité (ou les unités) choisie(s), organiser les comptages après avoir éventuellement dessiné le pavage complet en triangles ou en triangles et carrés.
- se rendre compte qu'il est inutile de calculer l'aire des " 0 " et qu'il suffit de comparer celles du « 2 » et du « 5 » ;
- trouver les aires par comptage et conclure que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture, en donnant par exemple, avec le carré comme unité : aire du « 2 » = 34 et aire du « 5 » = 36.

Cette analyse *a priori* détermine plusieurs comportements menant à la résolution correcte du problème. Cependant, dans une perspective d'exploitation en classe, cette première analyse doit être complétée à partir de l'analyse des épreuves renvoyées par les classes. En effet, d'autres démarches de résolution ont été utilisées par les élèves ; toutes ne conduisant pas à la bonne réponse. Nous détaillerons ces démarches à la section 2.

Ce relevé et cette analyse des démarches utilisées par les groupes d'élèves sont intéressants pour situer leurs erreurs et reconnaître les obstacles à la résolution de ce type de problèmes <sup>(1)</sup>. Nous reviendrons sur ces aspects de l'apprentissage par situation problème dans un prochain article.

## 1.2. Résultats

Le tableau ci-contre présente les résultats à ce problème. La première partie du tableau contient les résultats globaux, catégories 3 et 4 confondues. La deuxième partie du tableau détaille ces résultats par catégorie.

Pour rappel, le mode est le résultat le plus fréquemment rencontré. Pour ce problème, le résultat "zéro" a une occurrence de 22 sur un total de 41 feuilles réponses.

Moyenne générale	0,93
Écart type général	1,33
Mode	0
Moyenne cat. 3	0,84
Écart type cat. 3	1,12
Moyenne cat. 4	1,14
Écart type cat. 4	1,61

Le graphique ci-dessous montre le nombre d'occurrences pour chacun des points possibles, à savoir 0, 1, 2, 3 ou 4. Le mode d'attribution des points est détaillé ci-après.

---

<sup>(1)</sup> L'enseignant désireux d'approfondir la problématique des erreurs dans l'apprentissage lira notamment : ASTOLFI, J.-P., [1997], *L'erreur, un outil pour enseigner*, Issy-les-Moulineaux : ESF.

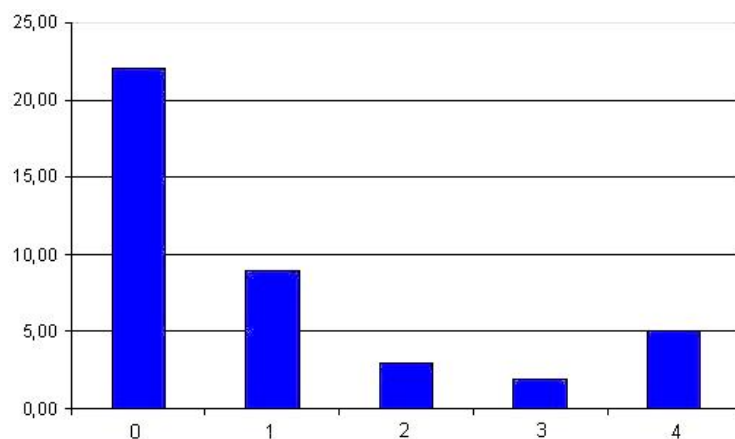


Fig. 1

### Attribution des points

- 4 points : la réponse juste (Marc) avec l'aire des lettres « 2 » et « 5 » et les explications sur la manière de les obtenir (si les aires des « 0 » sont aussi indiquées, 42 carrés, sans erreur, on les accepte).
- 3 points : la réponse juste, avec les aires, mais sans indication sur la manière dont elles ont été obtenues; ou la réponse juste et expliquée, avec une erreur dans le calcul de l'aire de « 0 ».
- 2 points : une seule erreur dans le comptage des unités d'aire du « 2 » ou du « 5 », avec explications et réponse cohérente.
- 1 point : la réponse juste (Marc), sans explications sur la détermination de l'aire (« on a vu que... »).
- 0 point : incompréhension du problème ou prise en compte des périmètres, estimations visuelles...

## 2. Des démarches de résolution

### 2.1. Relevé des démarches

Démarches // Chiffres points	20/05	2/5	Indéterminé		
Comptage des pièces	10	3	3	16	45,7%
Comptage des briques	6	3	1	10	28,6%
Comptage des briques entières	1	1	1	3	8,6%
Mesure	1	2	2	5	14,3%
Appariement	0	1	0	1	2,9%
À vue	0	0	0	0	0%
	18	10	7	35	100%
	51,4%	28,6%	20,0%	100%	

## 2.2. Première analyse

Une première lecture globale de ce tableau permet déjà de s'apercevoir des multiples démarches employées par les différents groupes d'élèves. Des démarches aussi surprenantes que le comptage des pièces quelle que soit leur forme et leur grandeur (figure 2), ou la mesure du périmètre de chaque forme (figure 3) sont ainsi observées avec une occurrence respective de 45,7% et 14,3%, soit 60% des feuilles réponses. Or, dans ce problème relatif aux aires de figures polygonales, point n'est question de formules d'aire qu'il aurait fallu mémoriser. Il s'agit de comparer des aires décomposées en plus petites unités. N'est-ce pas là le fondement même de la mesure de l'aire ? La difficulté du problème réside peut-être à ce niveau : pas d'unité de mesure conventionnelle, pas de nombres exprimant une longueur, pas de formule à appliquer.

En réalité, c'est le concept d'**unité de mesure commune** qui est ici en jeu, lui-même à la base du concept de la mesure des aires. Nous explicitons quelque peu ce concept dans l'encadré ci-dessous.

Dans le chiffre n° 2 il y a 27 briques et dans le chiffre n° 5 il y a 24 briques et dans les deux zéros il y a 32 briques j'ai fait  $27 \text{ briques} + 32 \text{ briques} = 59 \text{ briques}$  pour Sophie et Kao on fait  $24 \text{ briques} + 32 \text{ briques} = 56 \text{ briques}$  donc Sophie utilisera plus de peinture que Kao.

Fig. 2

Sophie : parce que on retrouve le 2 qui on retrouve le plus grand

$$2,3 + 0,9 + 1,1 + 1,6 + 0,9 + 0,8 + 1,1 + 0,8 + 1,1 + 1,6 + 1 = 3,2 + 2,2 + 1,9 + 1,3 + 2,4 + 1 =$$

total

↓

15,1

---


$$1,8 + 1,9 + 4,3 + 4,4 + 2,8 + 7,9 + 0,8 = 8 + 6,9 + 2,7 = 2,2 + 14,9 + 2,7 =$$

Fig. 3

Le concept d'*unité de mesure commune* peut s'exercer dans différents contextes mathématiques.

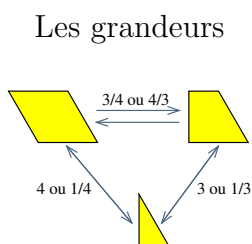


Fig. 4

Mesure de grandeurs

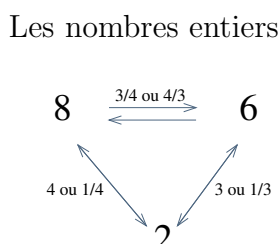


Fig. 5

Diviseurs communs

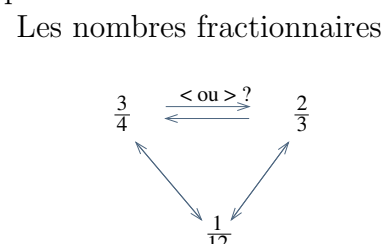


Fig. 6

Dénominateurs communs

Ainsi, les « unités de mesure commune » employées pour comparer des figures (figure 4) sont-elles à mettre en correspondance avec les « diviseurs communs » des nombres naturels (figure 5), et par la suite avec les « dénominateurs communs » des fractions (figure 6).

Plus tard dans le cursus scolaire, nous retrouvons l'*unité de mesure commune* en algèbre, lors de la factorisation des polynômes.

$$ab - b^2 = b(a - b)$$

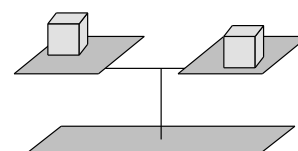
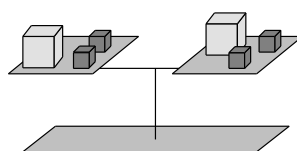
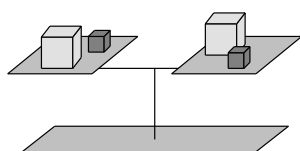
Dans cette factorisation,  $b$  est le facteur commun à  $ab$  et  $b^2$ .

Il est fort probable que les élèves, au cours de leur parcours scolaire, soient confrontés à ces différentes représentations de l'unité de mesure commune.

Cependant, rares seront les moments consacrés à l'observation de ces différentes représentations et à la mise en évidence

de liens entre elles, en l'occurrence le concept de commune mesure.

Il faut aussi constater que plus de la moitié des groupes d'élèves ayant résolu ce problème, soit 18 sur 35, n'ont pas « vu » qu'il n'était pas nécessaire de compter les deux « zéros ». Or, en mathématique, ôter — ou ajouter — quelque chose de commun dans une égalité ou une inégalité est une procédure fondamentale et récurrente. Par exemple, en maternelle déjà, mais dès le début de l'enseignement primaire, il est possible de « jouer » avec une balance pour approcher de manière intuitive cette procédure dans le domaine des grandeurs. Ajouter ou ôter une même masse de chaque plateau n'entraîne aucune modification de l'équilibre.



Les mêmes constats peuvent être réalisés lorsque les plateaux contiennent des masses différentes : si j'ajoute ou retire le même objet, la même masse dans chaque plateau, le fléau penchera toujours du même côté, l'inégalité ne changera pas.

La même procédure est employée dans le contexte numérique, succinctement.

$$5 + 4 + 6 = 5 + \clubsuit + 2$$

avant d'effectuer un calcul, je peux ôter le 5 de part et d'autre de l'égalité qui devient alors :

$$4 + 6 = \clubsuit + 2, \dots$$

De même,

$$\begin{aligned} \text{Si } \clubsuit + 2 &< 5 + 2 \\ \text{alors } \clubsuit &< 5 \end{aligned}$$

Plus tard, au début du secondaire en algèbre, succinctement.

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= x + 9 \\ 2x + 6 &= x + 6 + 3 \\ 2x &= x + 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Voici donc trois contextes mathématiques — grandeurs, arithmétique, algèbre — dans lesquels la même procédure de conservation de l'égalité est utilisée. Le problème qui nous concerne ici montre un quatrième contexte d'utilisation de cette procédure, la géométrie. Certes, généralement cette procédure se rencontre dans les domaines arithmétique et algébrique. Il est cependant intéressant de la rencontrer dans des contextes moins fréquents afin de la mettre en évidence et l'instituer comme démarche importante.

Constatons donc que cette procédure fondamentale est déjà rencontrée en maternelle et que son usage va perdurer tout au long du cursus scolaire et bien au-delà. G. VERGNAUD, [1990], traduit ceci en disant qu'« il n'y a pas d'algèbre vraiment opératoire sans la reconnaissance des théorèmes concernant la conservation de l'égalité »

Ceci est traduit dans le document *Socles de compétences* par : « Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence », Socles de compétences, Formation mathématique, 3.1.3 Calculer, page 37. Cette compétence est à construire dès l'école fondamentale pour être certifiée à la fin du premier degré de l'enseignement secondaire.



**Égalité « résultat »**

$$5 + 2 =$$

Dans ce cas, le signe = signifie qu'il faut réaliser l'opération d'addition, il est un déclencheur de calcul.

**Égalité « équivalence »**

$$5 + 3 = 2 + 6$$

Dans ce cas, le signe = signifie que les deux expressions additives sont équivalentes, que l'on peut utiliser l'une pour l'autre. Mais cela est vrai aussi pour...

$$5 + 3 = 2 \times 4$$

### 2.3. Exposé des démarches

Reprenons maintenant l'analyse des démarches utilisées par les groupes d'élèves. Dans un premier temps, nous en exposons neuf. Elles correspondent en réalité à cinq démarches de résolution différentes, appliquées soit aux figures « 20 » et « 05 », soit aux figures « 2 » et « 5 ». Nous expliquons par la suite seulement les cinq démarches, l'équivalence de résultat entre les situations « 20 » — « 05 » et « 2 » — « 5 » ayant été expliquée ci-dessus.

1. Comptage des pièces, sans distinction de forme et de grandeur, pour les deux paires de chiffres « 20 » et « 05 » et comparaison du nombre de pièces composant « 20 » (59 pièces) et du nombre des pièces composant « 05 » (56 pièces) ; (28.5% des copies). Cette démarche a déjà été exposée à la figure 2. La figure 7 montre la réponse d'un autre groupe d'élèves. Pour ces deux groupes (figures 2 et 7), toutes les « briques » se valent, quelle que soit leur forme mais surtout leur « grandeur ». Les élèves ont donc réalisé une comparaison de nombres d'objets, sans vérifier l'équivalence de chacun des objets avec les autres quant à leur aire, ou le rapport de ces objets entre eux.

59 briques pour Sophie = le premier 0 et le 2 (59 à l'intérieur du premier et du 2). En tout et Marc en a 56 dans le 5 et le 2<sup>ème</sup> 0. En tout.

On n'a compté les briques à l'intérieur des chiffres. Sophie obtient 59 briques en tout qui se trouve dans les chiffres 2 et le premier 0. Marc lui en obtient 56 dans les chiffres 5 et le 2<sup>ème</sup> 0.

Fig. 7

2. Comptage des pièces, sans distinction de forme et de grandeur, pour deux chiffres seulement, sans tenir compte des deux « 0 » équivalents et comparaison du nombre de pièces composant « 2 » (27 pièces) et du nombre des pièces composant « 5 » (24 pièces).

Mais avons compté le nombres de briques des deux nombres 2 et 5 le 2 avait 27 briques et le 5 avait 24. c'est donc Sophie qui a le plus.

Fig. 8

3. Comptage de briques rectangulaires par recombinaison, pour les deux paires de chiffres et comparaison du nombre de briques pour « 20 » (38 briques) et du nombre de briques pour « 05 » (39 briques) (figures 9 et 10).

D'abord, nous avons commencé par mettre les briques des chiffres non entiers ensuite des briques entières. Puis, nous avons fait le total des briques entières. Nous avons assemblé le tout. Le deux de Sophie et le zéro. Le cinq de Marc et son zéro.

$5 = 18$  briques,  $2 = 17$  briques, le  $0 = 21$  briques  
 Marc a un total de 39 briques, Sophie a un total de 38 briques

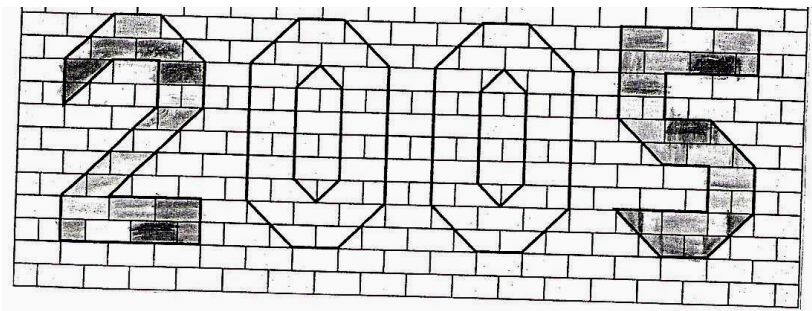
Fig. 9

Pour trouver le deux nous avons conté les quarts de carrés. Quand ont mis les quatre quarts ensemble ça formait un grand carré. Et en tout Sophie a peint 38 carrés. Et Marc a peint 39 carrés en tout. Marc qui a peint le plus de carrés parce qu'il a peint 39 carrés et Sophie 38. Et puis nous avons conté les grands carrés et ont trouvé la réponse.

Fig. 10

Les démarches de ces deux groupes s'appuient sur deux domaines mathématiques différents : la figure 9 montre un travail géométrique, les élèves assemblent des figures pour reconstituer des rectangles (briques entières); la figure 10 montre un travail numérique à partir des fractions, considérant, peut-être intuitivement et implicitement, qu'une brique entière est l'unité de référence, qu'une brique entière vaut 1.

4. Comptage de briques rectangulaires par recombinaison, composant deux chiffres uniquement et comparaison du nombre de briques pour « 2 » (17 briques) et du nombre de briques pour « 5 » (18 briques).



*Nous avons pué des couleurs différentes pour reconstituer les briques ainsi on n'a plus les confés: donc c'est Marc qui utilisera le plus de peinture.*

Fig. 11

Remarquons que pour ce groupe, le dessin sert de support à la résolution du problème et à l'explication de la démarche. Comme pour la figure 9, la démarche s'appuie sur la géométrie, les élèves reconstituent des rectangles entiers à partir de figures plus petites.

5. Comptage uniquement des briques entières et comparaison du nombre de briques pour « 20 » (19 briques) et du nombre de briques pour « 05 » (20 briques).

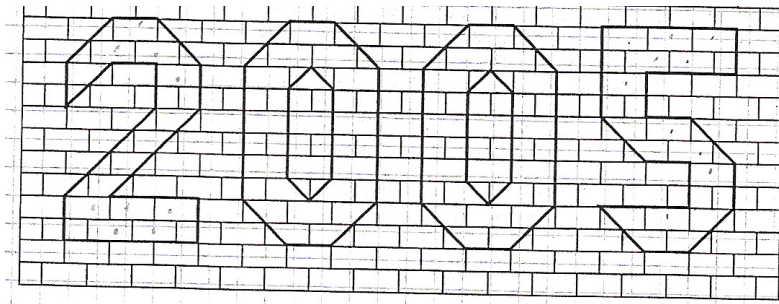
*Marc On a compter le nombre de brique  
sur chaque chiffres Sophie en a 19 et Marc en a 20.*

Fig. 12

La démarche de comptage uniquement des briques entières n'est pas explicitement notées par les élèves. Elle peut être inférée à partir des nombres notés : 19 et 20 sont les nombres de briques entières (rectangles) contenues dans « 20 » et « 05 ». Cette démarche, comme la suivante, est assez surprenante et difficilement explicable *a posteriori* sans entendre les justifications des élèves qui l'ont utilisée. Il serait opportun de leur demander : « Pourquoi ne pas prendre en compte les "morceaux" de briques ? ».

6. Comptage uniquement des briques entières et comparaison du nombre de briques pour « 2 » (9 briques) et du nombre de briques pour « 5 » (10 briques).





Marc parce qu'il a le plus de briques entières.

Fig. 13

À nouveau le dessin permet la compréhension de l'énoncé verbal. Remarquons que les briques entières ont été pointées sur le dessin dans le « 2 » et le « 5 ».

7. Mesure et comparaison des mesures pour « 20 » et « 05 ».

Un premier exemple de ce type de démarche est montré par la figure 3. Les élèves avaient dans ce cas noté les calculs qu'ils avaient effectués, ce qui a permis d'inférer un calcul du périmètre. Dans la copie suivante, les élèves expliquent qu'ils ont « mesuré les briques qu'il y avait dans les chiffres ». Mais nous ne savons ce qui a réellement été mesuré. Les élèves continuent en expliquant qu'ils ont « calculé les centimètres et les millimètres ».

Nous avons mesuré les briques qu'il y avait dans les chiffres et on a calculé les centimètres et millimètres. Et nous avons découvert que c'était, Sophie !!!

Fig. 14

8. Mesure et comparaison des mesures pour « 2 » et « 5 ».

Nous avons mesuré le 2 et le 5 et nous voyons que c'est le 5. Donc ça devrait être Marc qui peindra le plus.

Fig. 15

À nouveau, les élèves ne précisent pas ce qu'ils ont mesuré. Constatons à nouveau, comme pour toutes les démarches rencontrées jusqu'à présent, l'omnipotence du nombre. C'est ce concept qui guide la démarche : obtenir deux nombres à comparer est la première voie perçue par les élèves. Ci-dessous nous exposons une démarche s'inscrivant dans le domaine géométrique.

9. Appariement des pièces communes au « 2 » et au « 5 », puis constat.

L'objet de ce problème est de comparer deux ensembles de figures quant à leur aire respective. Comme nous l'avons indiqué à la section 2.2, un premier travail de simplification peut être effectué en ôtant les deux « 0 » présents dans chacune des deux paires de chiffres, « 20 » et « 05 ». C'est l'utilisation du concept de conservation de l'égalité. Ce même travail peut être effectué pour les figures restantes, le « 2 » et le « 5 », composées elles-mêmes de plusieurs figures. Ce travail s'effectue par appariement géométrique de figures comme le montre la copie ci-dessous.

Comme les 0 avait les mêmes <sup>nombre de</sup> briques ont  
les à supprimer et ont ses copies de 2 et  
de 5.  
nous avons colorie les briques une à deux  
puis à Sophie...  
Il reste une brique à peindre à deux.

Fig. 16

Cette démarche d'appariement est normalement déjà utilisée par les élèves dès l'école maternelle. En effet, pour connaître s'il y a plus de filles ou de garçons dans une classe de petits, quoi de plus facile quand on ne sait pas compter que d'associer une fille et un garçon et de vérifier s'il reste un ou plusieurs enfants seuls. Si tel n'est pas le cas, il y a autant de filles que de garçons, s'il reste une ou plusieurs filles, il y a plus de filles... Voici donc un nouvel exemple, rencontré très tôt, de conservation de l'égalité.

Cette démarche assez intuitive n'est pourtant utilisée que par un groupe d'élèves sur les 35 qui ont renvoyé leur copie. Tous les autres groupes ont eu recours, à bon ou mauvais escient, à une démarche numérique.

### 3. Trois démarches récurrentes dans ce type de problèmes

Les neuf démarches que nous venons d'exposer sont donc en réalité cinq démarches appliquées à deux ensembles de figures différents, selon que les élèves ont perçu ou pas l'équivalence de résultats entre « 20 » — « 05 » et « 2 » — « 5 ». Ces cinq démarches peuvent être synthétisées par le *comptage* — procédure numérique —, la *mesure* — procédure numérique — et l'*appariement* — procédure géométrique.

Plusieurs recherches ont déjà eu pour objet le concept d'unité de mesure commune dans le cadre de problèmes de comparaison. De manière récurrente, ces trois démarches —

comptage, mesure et appariement — apparaissent avec globalement les mêmes proportions. Ci-dessous nous détaillons quelque peu ces démarches à partir du problème du RMT. Dans la section suivante, nous les intégrerons dans d'autres problèmes proposés dans différents domaines mathématiques.

### 3.1. La mesure, une démarche inappropriée

Dans l'interprétation ci-dessous, nous nous intéresserons particulièrement aux démarches de comptage et d'appariement, la démarche de mesure de périmètre étant erronée pour cette situation. Cette erreur peut avoir différentes origines :

- les élèves ne différencient pas les concepts de *périmètre* et d'*aire* ;
- ils n'ont pas rencontré le concept d'aire, ou pas de cette manière ;
- ils avaient réalisé plusieurs exercices de mesure de périmètre quelques temps auparavant ;
- ils n'ont pas perçu le problème comme une situation relative à l'aire ;
- ...

L'exploitation de cet usage erroné du périmètre doit principalement se réaliser à partir d'une discussion avec les élèves pour connaître ce qui a amené à ce calcul du périmètre. Demander aux élèves de s'exprimer à propos de leur choix de démarche devrait permettre de comprendre celui-ci. L'enseignant peut aussi susciter des réflexions par les questions : *Que doit-on mettre en couleur ? Rien que le bord ou l'intérieur aussi ? ...*

Une activité, pour toute la classe ou seulement les quelques élèves encore en difficulté, pourrait préciser les concepts d'aire et de périmètre en les opposant. À la suite de quoi, le problème pourrait être à nouveau proposé à la classe afin d'investir les connaissances acquises lors de cette activité. Les problèmes proposés ci-dessous pourront aussi être présentés aux élèves.

### 3.2. La procédure numérique

Dans les analyses de démarches énoncées à la section 2.3, nous évoquons celle où les élèves avaient compté les pièces sans distinction de forme et de grandeur.

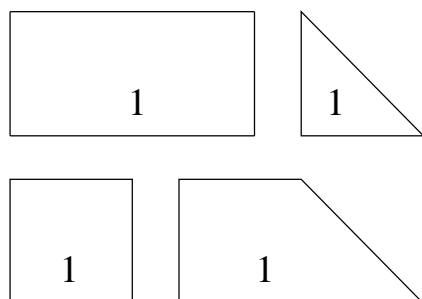


Fig. 17

Dans ce cas, toutes les pièces valent « 1 », quelle que soit leur grandeur relative. Ceci vaut dans le cas d'un dénombrement d'éléments dans un ensemble. Par exemple, combien y a-t-il d'enfants dans la classe ? L'activité de dénombrement ne s'intéressera qu'aux individus en tant qu'unité. Il ne faudra pas s'interroger sur la valeur relative de chacun des élèves, ou savoir s'ils sont grands ou petits, filles ou garçons...

Cette démarche est cependant erronée et inappropriée au problème *RMT 2005*. Sans doute cette démarche traduit-elle également une connaissance encore peu sûre du concept d'aire.

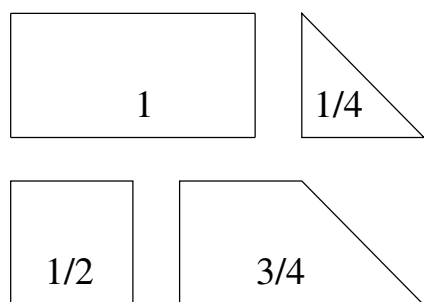


Fig. 18

Dans le problème *RMT 2005*, l'intérêt est porté sur une caractéristique des objets : l'aire. Chaque objet possède donc une grandeur relative dont il faut tenir compte. Cette grandeur peut notamment être exprimée par une fraction ou par un nombre entier. Par exemple, si l'on considère que le rectangle vaut 1, alors les autres pièces valent  $\frac{1}{2}$  pour le carré,  $\frac{1}{4}$  pour le triangle,  $\frac{3}{4}$  pour le trapèze.

Il est cependant possible de considérer le triangle comme unité et donc lui donner la valeur 1. Dans ce cas, les autres pièces valent 2 pour le carré, 3 pour le trapèze et 4 pour le rectangle. Ce choix de l'unité n'a aucune influence sur le résultat final, en l'occurrence, savoir qui a utilisé le plus de peinture. Ce choix influence les nombres avec lesquels la résolution du problème va être effectuée. Notons que, pour les feuilles réponses que nous avons reçues, aucun groupe n'a choisi d'utiliser des nombres entiers en donnant la valeur 1 au triangle. Un travail à partir de fractions est exposé par la figure 19. Cette copie permet de se rendre compte que les élèves ont compté le nombre d'occurrences pour chacune des figures contenues dans les chiffres « 0 », « 2 » et « 5 », et ont ensuite « divisé » chacun de ces nombres par la valeur relative de ces figures. Cependant, nous ne parvenons pas à associer les nombres obtenus et indiqués par les élèves à la réalité des chiffres « 0, 2 » et « 5 ».

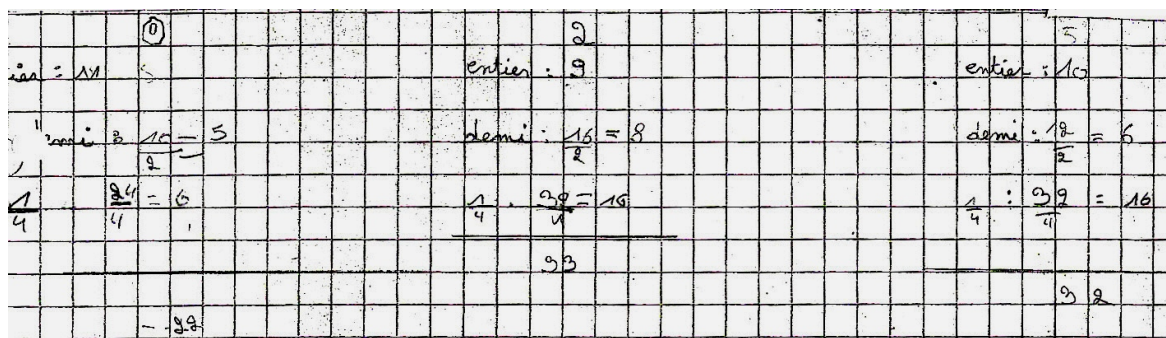


Fig. 19

Il est intéressant cependant de constater que ce problème peut mener à un travail sur les fractions à partir d'un support géométrique. Si l'on imite le travail effectué par le groupe d'élèves qui a renvoyé la copie ci-dessus, pour le chiffre « 2 », nous comptons :

- 9 briques entières ;
- 4 demi-briques carrées, soit  $4 \times \frac{1}{2}$  brique, soit 2 briques
- 9 quarts de briques, soit  $9 \times \frac{1}{4}$  de brique, soit 2 briques et  $\frac{1}{4}$  de brique
- le calcul avec les trapèzes est plus complexe pour des élèves des catégories 3 et 4, mais on peut s'en sortir en décomposant les trapèzes en triangles et en carrés : 5 briques

écornées ou 5 trapèzes soit 5 triangles et 5 carrés, soit  $5 \times \frac{1}{4}$  de brique et  $5 \times \frac{1}{2}$  brique, soit 1 brique et  $\frac{1}{4}$  de brique et 2 briques et  $\frac{1}{2}$  brique. En tout, 3 briques et  $\frac{3}{4}$  de brique (figures 20 et 21).

Tous ces calculs peuvent, ou doivent, être soutenus par les dessins comme le montrent les figures ci-dessous. Cette approche géométrique des fractions et des opérations sur les fractions peut aussi faire l'objet d'un travail *a posteriori* en classe. Notons que la plupart des groupes ont géré ces opérations sur les fractions de manière intuitive en rassemblant les « morceaux » de briques pour former des briques entières. Un travail de classe peut être de rendre explicite cette approche intuitive.

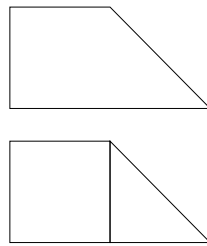


Fig. 20

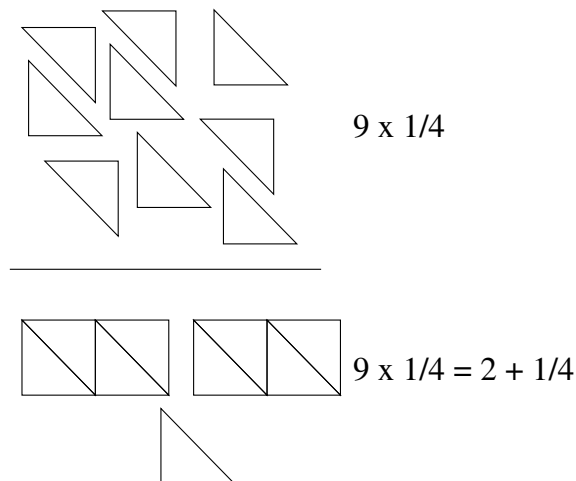
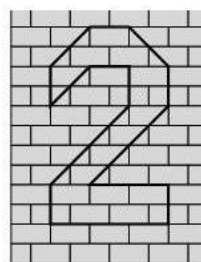


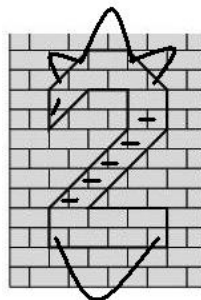
Fig. 21

Ce type de problème peut donc être résolu par une démarche numérique de comptage soit à partir de fractions et d'opérations sur les fractions, soit à partir de reconstruction géométrique d'unités entières. La figures 22 expose ces deux procédures pour le chiffre « 2 ».



Comptage à partir de fractions

$$\begin{aligned}
 9 \times 1 &= 9 \\
 9 \times 1/4 &= 2 + 1/4 \\
 4 \times 1/2 &= 2 \\
 5 \times 3/4 &= 5 \times 1/2 + 5 \times 1/4 = 2 + 1/2 + 1 + 1/4 \\
 \\ 
 \text{En tout : } &9 + 2 + 1/4 + 2 + 2 + 1/2 + 1 + 1/4 = 17
 \end{aligned}$$



Comptage par recombinaison géométrique

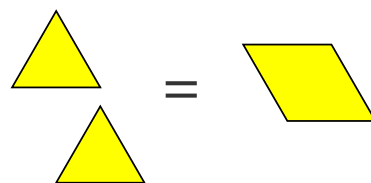
En associant des figures pour recomposer des rectangles entiers, on obtient 17 rectangles. Soit la même réponse qu'en utilisant les fractions.

Fig. 22

### 3.3. La procédure d'appariement géométrique

Cette démarche de résolution s'apparente à la démarche de correspondance terme à terme employée dès l'école maternelle : à un objet correspond un objet de même *valeur*. Pour le problème *RMT 2005*, il s'agit d'associer deux figures de même aire.

Notons qu'à un objet nous pouvons apparier deux ou plusieurs objets, pour autant que ces deux « ensembles » aient la même *valeur*.



Cette démarche est également à mettre en relation avec le concept de conservation de l'égalité : si je retire un objet de même *valeur* dans chaque groupe d'objets, rien ne change quant à leur rapport.

La résolution du problème *RMT 2005*, mais aussi d'autres du même type, peut donc s'effectuer sans nombre. Nous devons faire correspondre à chaque pièce du chiffre « 2 », une pièce du chiffre « 5 » ayant la même *valeur*, en l'occurrence la même aire. *In fine*, nous constatons s'il reste un ou plusieurs objets dans un groupe ou si nous avons pu apparier toutes les pièces. Ce constat permet de déterminer si un groupe d'objet est plus *important* que l'autre quant à la mesure choisie.

Cette démarche d'appariement peut aussi être utilisée dans le domaine des grandeurs autres que les figures géométriques. Le problème *Simon et Mélanie* est situé dans le contexte des masses. La résolution de ce problème peut aussi s'effectuer, dans un premier temps, à partir d'un appariement.

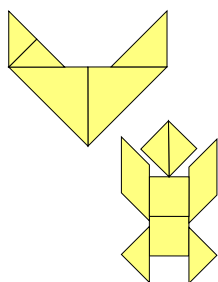
## 4. Vers une exploitation en classe

Nous proposons ci-dessous deux situations extraites d'une recherche du CREM [2005], *Apprenti Géomètre, un outil de différenciation des apprentissages en mathématique*. Ces activités peuvent être proposées aux élèves comme exercice des démarches et savoirs mis en évidence lors de l'analyse du problème *RMT 2005*.

Les compétences rencontrées sont : *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...] aires, [...]). Fractionner des objets en vue de les comparer. Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.*

La première situation est initiée dans le domaine géométrique, la seconde dans le domaine numérique.

### Julie et Tom



Julie et Tom ont tous les deux créé un modèle avec des pièces du Tangram. Julie a construit une tête de chat et Tom un bonhomme qui lève les bras.

Qui a utilisé le plus de papier ?

Note ta réponse et explique comment tu as trouvé.

### Simon et Mélanie

Simon et Mélanie ont tous les deux acheté le même cartable. Après l'avoir rempli de leurs fardes, livres et cahiers, ils comparent leur poids. Simon prétend que son cartable est plus lourd que celui de Mélanie. A-t-il raison ?

#### Le cartable de Simon



Dans son cartable, Simon a mis...

2 fardes  
3 cahiers  
5 livres

#### Le cartable de Mélanie



Dans son cartable, Mélanie a mis...

3 fardes  
7 cahiers  
1 livre

Le poids d'une farde = le poids de 3 cahiers  
Le poids d'un livre = le poids de 2 cahiers

## 5. Conclusion

*Leur espoir : voir désormais tous les hommes du monde entier utiliser le globe comme étalon de mesure commun. Leur but : définir la nouvelle unité de mesure, le mètre, comme la dix-millionième partie de la distance qui sépare le pôle Nord de l'équateur. [...] en remodelant des actions ordinaires dont certaines sont si habituelles que nous les remarquons à peine. Prendre des mesures est un acte des plus courants [...]. Cependant cette omniprésence, justement, finit par dissiper l'acte lui-même.*

K. ALDER

### Deux concepts fondamentaux

Ce problème de géométrie met en évidence deux concepts fondamentaux en mathématiques : l'égalité (résultat et équivalence) et l'unité de mesure commune. Nous avons quelque peu explicité ces concepts au travers de cet article mais nous y reviendrons prochainement.

Au travers de l'analyse des copies renvoyées par les groupes d'élèves, nous avons mis en évidence la prédominance de la démarche numérique. Ceci reflète probablement la centration sur ce type de démarche en classe. Constatons cependant que dans la poursuite de leur cursus scolaire, il sera demandé aux élèves de travailler sur des nombres qu'ils ne pourront plus aussi facilement représenter ou écrire. Il s'agira plutôt de généraliser à un ensemble plus vaste de nombres ce qu'ils ont pu constater sur les nombres entiers et fractionnaires. Il est donc important de mettre en évidence ces concepts généralisables que sont l'égalité et la commune mesure.

### Intérêt du problème *RMT 2005*

L'intérêt du problème réside dans la possibilité qu'il offre de rencontrer ces deux concepts — égalité et unité de mesure commune — et de les mettre en évidence assez facilement. Des calculs, du coloriage, des manipulations de pièces, . . . permettent de le résoudre au travers différents domaines mathématiques à partir de démarches numériques ou géométriques.

Dans le domaine de la géométrie, il permet également de mettre en évidence des erreurs relatives à la confusion entre les concepts de *périmètre* et d'*aire*.

Son exploitation *a posteriori* permet de rencontrer différents domaines mathématiques : l'arithmétique pour la conservation de l'égalité ou les fractions, la géométrie pour les concepts de périmètre et d'aire. De même, les démarches de résolution employées et mises en évidence peuvent être entraînées dans d'autres contextes que celui de la mise en peinture d'un mur, d'un sol. . .





# D'autres problèmes pour diversifier le travail en classe

## COMITÉ RMT, *ARMT*

Dans ce deuxième tome, nous avons analysé trois problèmes et proposé des exploitations possibles de ceux-ci. Ci-dessous, nous vous présentons d'autres problèmes, semblables à ceux analysés précédemment qui permettent également de prolonger la réflexion avec les élèves ou d'entraîner les démarches et savoirs rencontrés.

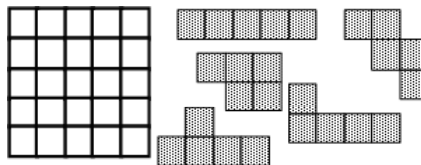
Les catégories auxquelles sont destinés ces problèmes sont données à titre indicatif. Chaque problème peut-être adapté à la classe à laquelle l'enseignant souhaite les proposer.

Ces problèmes sont extraits d'épreuves antérieures du RMT. Nous rappelons que les problèmes du RMT sont protégés par droit d'auteur. Leur utilisation dans le cadre d'une activité en classe est autorisée. Leur utilisation dans le cadre de publication est cependant régi par les lois du droit d'auteur. Pour tout renseignement, veuillez contacter les coordinateurs internationaux.

### 1. Avec des pentaminos

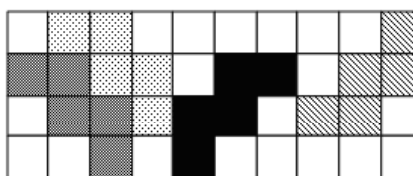
#### Pentaminos (Cat. 3)

Les pentaminos sont des assemblages de 5 carrés. Placez ces cinq pentaminos pour qu'ils recouvrent toute la grille.

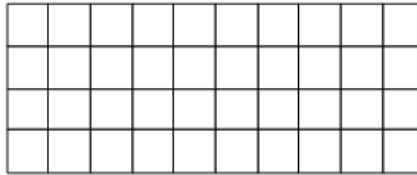


#### Pentaminos (Cat. 3, 4, 5)

Dans la grille ci-dessous, de 40 cases (10x4), on a dessiné 4 pentaminos de même forme, qui recouvrent tous exactement cinq cases de la grille.

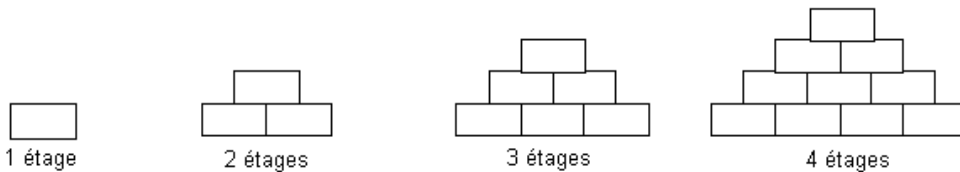


Mais on aurait pu en dessiner plus, en les disposant mieux.  
Combien arriveriez-vous à dessiner des pentaminos de cette même  
forme, au maximum, sur cette grille?



## 2. Un triangle qui grandit

Pyramides (Cat. 3, 4, 5)



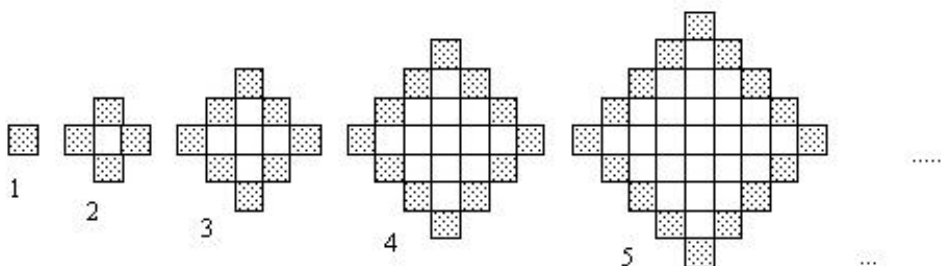
Il faut 10 briques pour construire une pyramide de 4 étages.

Combien en faudra-t-il pour construire une pyramide de 12 étages?

Est-ce vrai que pour construire une pyramide de 24 étages,  
il faudrait le double de briques que pour une pyramide de 12  
étages?

Expliquez votre réponse.

Figure en évolution (Cat. 5, 6)



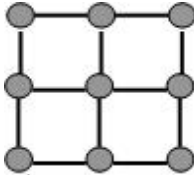
Cette suite de figures est construite selon les règles  
suivantes :

- la première figure est un carré gris,

- dans la deuxième, le carré précédent devient blanc et est entouré de nouveaux carrés gris,
- dans la troisième, les anciens carrés sont blancs et entourés entièrement de nouveaux carrés gris,
- et ainsi de suite, pour chaque figure suivante, de nouveaux carrés gris entourent les anciens qui deviennent blancs.

Combien y aura-t-il de carrés gris et combien y aura-t-il de carrés blancs dans la quinzième figure? Expliquez votre raisonnement.

### Grilles (Cat. 6)



Pour construire cette grille de  $2 \times 2$  carrés, Léo a utilisé 9 boulettes de pâte à modeler et 12 allumettes.

Pour faire une grille de  $3 \times 3$  carrés, il lui faudra 16 boulettes et 24 allumettes. Léo veut construire une grille carrée avec 289 boulettes de pâte à modeler.

De combien d'allumettes aura-t-il besoin? Expliquez votre raisonnement.

## 3. RMT 2005

### Quitte ou double (Cat. 5, 6)

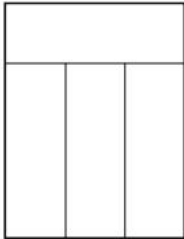
Camille participe à un jeu-concours, de six questions. Pour chaque question, la réponse juste rapporte un certain nombre de points :

- la réponse juste à la question n° 2 rapporte le double de points attribués à la question n° 1,
- la réponse juste à la question n° 3 rapporte le double de points attribués à la question n° 2,
- et ainsi de suite.

Si on ne répond pas correctement à une question, on est éliminé et on ne gagne rien. Mais chaque candidat a un joker qui lui donne le droit de ne pas répondre à une question (bien sûr, il ne gagne pas les points correspondants à cette question). Camille a utilisé son joker et a répondu correctement à cinq questions. Elle a obtenu 177 points.

Retrouvez les points attribués à chaque question du concours et indiquez pour quelle question Camille a utilisé son joker. Expliquez comment vous avez trouvé.

La boîte (Cat. 5, 6)



La boîte représentée sur la figure a quatre compartiments de mêmes dimensions. Si le périmètre de la figure est  $112\text{cm}$ , quelle est son aire, en  $\text{cm}^2$  ?

Expliquez comment vous l'avez trouvée.

Comme pour le problème RMT 2005, il s'agit de distinguer le périmètre et l'aire. Il s'agit aussi de repérer les grandeurs communes, l'une pour le périmètre, l'autre pour l'aire. Certes, il ne s'agit pas vraiment d'un problème de comparaison, cependant, la démarche de reconnaissance d'une unité de mesure est présente.



# MATÉRIEL : les pentaminos

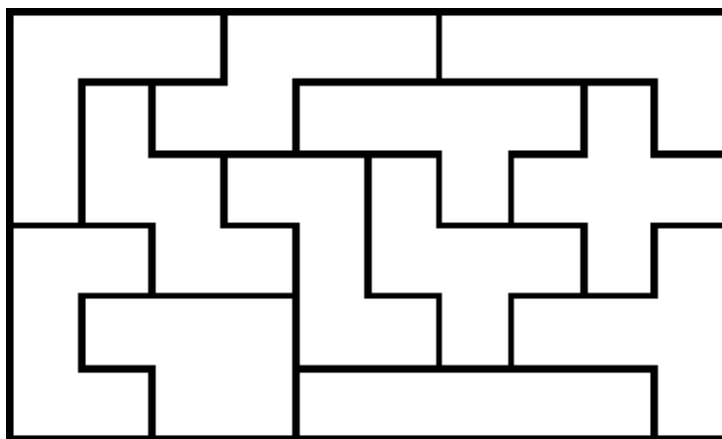
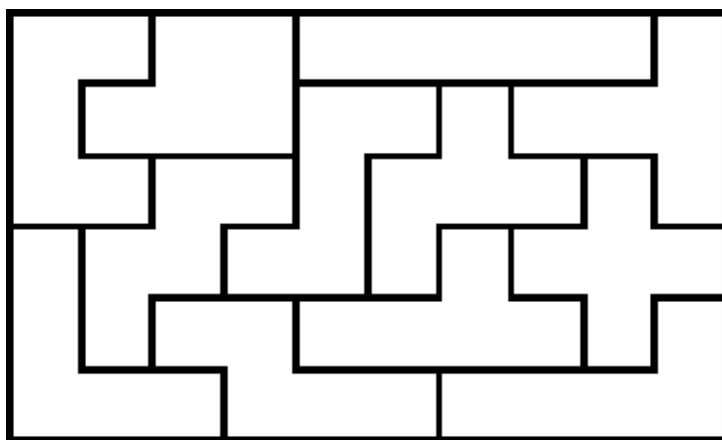
## COMITÉ RMT, *Comité Rmt*

Deux articles avait pour sujet les pentaminos. Voici la marche à suivre pour disposer facilement de ces 12 pièces.

Les deux rectangles ci-dessous sont pavés des douze pentaminos. Ils sont symétriques l'un de l'autre par une symétrie orthogonale d'axe horizontal. Il serait intéressant de les photocopier de telle manière qu'ils mesurent 10cm sur 6cm. Ils sont destinés à former les deux faces des pentaminos.

1. Photocopiez les deux rectangles ci-dessous si vous souhaitez garder ce *Livret RMT* entier.
2. Découpez avec soin les deux rectangles comportant les 12 pentaminos et collez-les sur les deux faces d'un morceau de carton ou de bristol. Cela donne de la rigidité à l'ensemble. Veillez surtout à ce que les pièces de même forme coïncident bien sur chacune des deux faces.
3. Découpez chacune des 12 pièces à l'aide d'un cutter ou de bons ciseaux.

Vous pouvez aussi reproduire directement ces deux rectangles sur du papier quadrillé cartonné (10cm × 6cm). Ou demander à vos élèves de les reproduire...



### Un peu de couleurs dans ce monde terne !

Pour enjoliver le Pentamino-Puzzle, il vous est bien entendu loisible de colorer ses différentes pièces. Puisqu'il y a 12 pentaminos à assembler, vous pouvez évidemment utiliser diverses couleurs avec des tons différents. Mais est-il bien nécessaire d'employer autant de tons ? Si vous observez chacun des rectangles proposés, vous pouvez admettre qu'ils sont comparables. . .

Si vous voulez colorier l'un ou l'autre de ces rectangles (ou les deux) de manière à ce que deux pièces contiguës (c'est à dire ayant au moins un segment frontière en commun) ne soient pas de la même couleur, vous n'avez plus besoin de douze tons différents.

Considérons, par exemple, la pièce en forme de *Z*. Observez-la ! Elle est ici contiguë à six autres pièces. Pour ces 7 pièces, il suffit de trois couleurs pour réaliser un coloriage qui les distingue toutes. (p. ex. rouge pour le *Z* puis jaune ou noir qui alternent pour les six pièces qui l'entourent).

Ce qui précède est valable pour les sept pièces considérées mais ne l'est plus nécessairement pour l'ensemble des douze pièces du Pentamino-Puzzle. Une théorie mathématique montre qu'il suffit de quatre couleurs pour colorier n'importe quelle carte plane (ici les rectangles pavés des douze pentaminos). C'est le « **théorème des quatre couleurs** » qui nous l'affirme. C'est un des plus célèbres résultats des mathématiques combinatoires. L'énoncé est simple mais le théorème est resté une simple conjecture pendant plus d'un siècle. Les plus grands mathématiciens s'y sont frottés mais ce n'est qu'en 1976 que sa véracité a été prouvée.

### Comment tout cela a-t-il commencé ?

C'est un cartographe anglais, Francis Guthrie, qui remarque en 1852 qu'il suffit de quatre couleurs pour colorer une carte géographique des cantons d'Angleterre. Comme il a un frère mathématicien, Frédérick, il lui propose d'étudier cette propriété dans le but de voir si elle est généralisable à toute carte plane. La conjecture est communiquée à De Morgan et à Cayley qui la publie en 1872. Après de multiples tentatives de démonstration, cette conjecture est finalement vaincue en 1976 par Appel et Haken qui utilisent un ordinateur (plusieurs dizaines de milliers de figures et plus de 1 200 heures de calcul par la machine).

### Pour poursuivre. . .

Pour des informations complémentaires, visitez des sites Internet en utilisant un moteur de recherche (*Google* par exemple) sur le thème « couleurs + théorèmes ».

Bonnes visites.



# CASIO

n° 1 du calcul

félicite et encourage

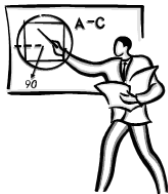
tous les participants de ce

1<sup>er</sup> Rallye Mathématique Transalpin

en Belgique.



## *Bloc-notes...*



### **Le congrès de la SBPMef**

Namur, du 22 au 24 août 2006. La journée du mercredi 23 août sera spécialement dédiée à l'enseignement fondamental avec, entre autres, les ateliers suivants :

- Le RMT, un outil pour la construction des apprentissages mathématiques à l'école primaire.
- La droite numérique, un outil à construire en équipe éducative.
- « Voir » en géométrie.
- Constuire les formules d'aire de quelques polygones.

Pour plus de renseignements consulter le site du RMT ou de la SBPMef.



### **Le site du RMT**

N'oubliez pas de consulter le site du RMT et de vous inscrire à la mailing liste.

<http://www.enseignement.be/rallyemathsbpm>



### **Le LIVRET RMT**

La prochaine parution du LIVRET RMT est prévue en août. Ce sera un numéro spécial, synthèse des deux premiers et reprenant les problèmes de la 14<sup>e</sup> édition. Il sera disponible au Congrès de la SBPMef



*Rallye  
Mathématique  
Transalpin*

