Validation d'un problème du RMT via des manipulations

Pauline Lambrecht

Mots clés : Manipulations, représentations, RMT.

Introduction

Le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est un concours organisé avec le soutien de la SBPMef pour le primaire (les classes de 3^{e} à 6^{e} correspondant aux catégories 3 à 6 du concours) et pour le premier degré différencié de l'enseignement secondaire (les classes de 1^{e} et 2^{e} correspondant aux catégories 7 et 8). Le RMT, son fonctionnement ainsi que quelques problèmes ont été présentés à travers divers articles rédigés par Philippe Skilbecq dans les numéros 1, 3 et 5 de Losanges.

Pour faire une proposition de problèmes pour le RMT, les coordinateurs internationaux ont écrit, lors du 15^{e} RMT, des consignes parmi lesquelles figurent notamment les indications suivantes :

– les questions qui conduisent à des conflits cognitifs, à des restructurations ou à l'introduction de concepts nouveaux sont les bienvenues, dans l'optique d'une possible utilisation en classe ;
– choisir des problèmes que les élèves peuvent résoudre selon une gamme variée de procédures allant des essais successifs non organisés aux procédures « adultes ».

Une recherche menée actuellement au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) de Nivelles poursuit des buts similaires en proposant notamment des activités intégrant des manipulations qui confrontent des situations de proportionnalité à d'autres de non-proportionnalité. Cette recherche, appelée *Math & Manips*, a été présentée dans le 7^{e} numéro de Losanges. Nous en redonnons une brève description dans la section 1.

Dans cet article, nous commencerons par présenter la recherche en question en illustrant notre propos par un premier problème du RMT. Ensuite, nous proposerons un second problème du RMT qui n'a pas obtenu de bons résultats dans la section belge. Nous relèverons quelques erreurs commises par les élèves et suggérerons, pour terminer, une transformation de ce problème du 16^{e} RMT. Le but est de laisser la possibilité aux élèves de manipuler des objets concrets, de les aider de cette manière à se rendre compte de leurs erreurs et, mieux encore, d'y remédier.

1. Recherche *Math & Manips*

Cette recherche vise à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves. Les activités proposées, appelées *Math & Manips*, intègrent des manipulations tout en travaillant sur divers registres. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer une nouvelle formule ou un nouveau concept dans la réalité. Elle débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui doivent être traitées de diverses manières selon l'âge des élèves. Les résultats sont analysés dans le langage courant, ou sont intégrés dans des tableaux de nombres, ou encore interprétés sous forme de graphiques.

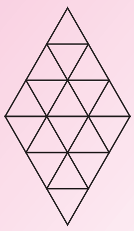
Nous espérons provoquer chez certains élèves de la curiosité par des manipulations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Les *Math & Manips* doivent amener les élèves à se poser des questions et leur faire découvrir un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation. En particulier, on constate souvent que les élèves appliquent régulièrement les propriétés de la proportionnalité dans des situations inappropriées. C'est pour cette raison que nous tenons notamment à confronter les élèves à des situations où la proportionnalité n'est pas d'application.

Pour illustrer ce phénomène, prenons un exemple parmi les problèmes du RMT. Celui-ci est tiré du troisième tome du livret RMT (p.25).

Monsieur Triangle (Cat. 4, 5)

Voici la cour de Monsieur Triangle. Il l'a pavée entièrement avec des dalles triangulaires dont chaque côté mesure 1 mètre. Son voisin a une cour qui a aussi la forme d'un losange, mais qui mesure 6 mètres de côté. Il veut également la recouvrir de dalles triangulaires de 1 mètre de côté.

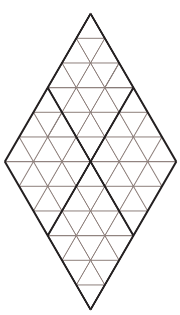
De combien de dalles le voisin de Monsieur Triangle a-t-il besoin pour recouvrir sa cour ?
Expliquez comment vous avez trouvé.



Pour répondre à la question posée, les élèves doivent doubler la longueur des côtés de la cour. La plupart d'entre eux pense alors souvent à simplement doubler le nombre de triangles nécessaires pour paver la cour de Monsieur Triangle. Ils agissent dans ce cas comme si la longueur du côté d'un losange et son aire étaient deux grandeurs proportionnelles.

Pratiquement, les élèves peuvent pourtant se rendre compte que les règles de proportionnalité ne peuvent être appliquées dans cette situation.

En effet, les élèves pourraient tracer par exemple la cour du voisin de Monsieur Triangle et, soit compter le nombre de triangles nécessaires pour le paver, soit réaliser que le nouveau losange peut être découpé en 4 losanges isométriques à celui de départ.



Après avoir présenté un premier problème pour lequel les propriétés de la proportionnalité ne peuvent être appliquées pour trouver la solution, voici un second problème pour lequel nous espérons que l'utilisation d'un matériel adapté permettra aux élèves d'être confrontés à leurs erreurs et de peut-être y remédier.

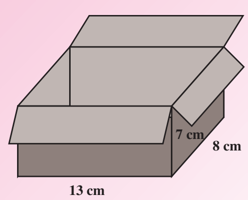
2. Un problème RMT et le relevé des erreurs

« La boîte de cubes » est un problème tiré de la deuxième épreuve du 16^{e} RMT. Ce type de problème – dans lequel sont entremêlés notamment longueurs et volumes – engendre souvent des erreurs chez les élèves. En effet, sur 14 classes de catégorie 6 de la section belge qui ont tenté de résoudre ce problème, seules 5 y sont parvenues.

Après la présentation de quelques raisonnements erronés d'élèves, nous proposerons donc dans la section 3 une adaptation de ce problème qui permet l'utilisation de matériel et laisse ainsi la possibilité aux élèves de se rendre compte de la réalité cachée derrière le problème. Les élèves développeront peut-être alors de nouvelles stratégies afin de résoudre de tels problèmes suite aux observations faites au cours de leurs manipulations.

2.1. La boîte de cubes (Cat. 6, 7)

François a une boîte en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 13 cm, 8 cm et 7 cm.
Il dispose de nombreux cubes en bois, les uns de 2 cm d'arête, les autres de 1 cm d'arête. François veut remplir complètement la boîte avec le moins de cubes possible.
Combien doit-il en mettre de chaque sorte ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

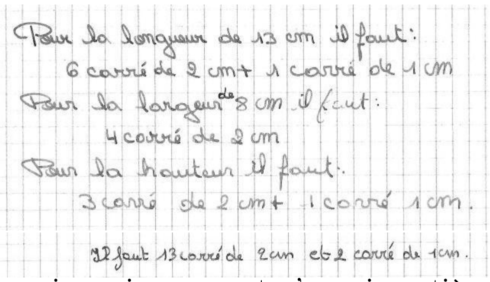


Afin de mieux comprendre les types d'erreurs que font les élèves, regardons plusieurs de leurs démarches.

Notons que toutes les copies présentées ci-dessous proviennent uniquement d'élèves de catégorie 6, la section belge n'organisant pas en 2007-2008 le RMT pour les élèves de catégorie 7.

2.2. Raisonnements d'élèves

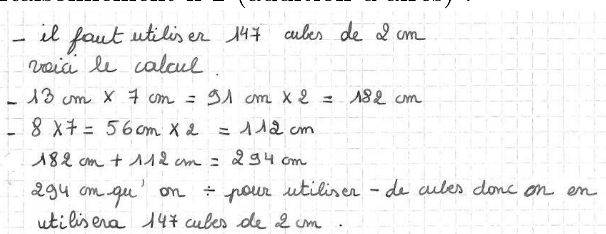
- Raisonnement n°1 (longueurs) :


Pour la longueur de 13 cm il faut :
6 carré de 2 cm + 1 carré de 1 cm
Pour la largeur de 8 cm il faut :
4 carré de 2 cm
Pour la hauteur il faut.
3 carré de 2 cm + 1 carré 1 cm.
Il faut 13 carré de 2cm et 2 carré de 1cm.

Ce premier raisonnement s'appuie entièrement sur les longueurs. Les élèves se focalisent sur les données qu'ils ont à leur disposition et ont même l'air d'oublier que le but de l'opération est de remplir la boîte. En additionnant les nombres obtenus pour chacune des longueurs, ils ne travaillent qu'en une seule dimension et la démarche suivie laisse à penser que ces élèves n'imaginent pas concrètement les trois dimensions de ce problème.

L'utilisation du mot « carré » à la place du mot « cube » peut être relevée. Cependant, nous ne pouvons dire s'il s'agit là d'une simple confusion entre ces deux mots ou si cela appuie le fait que ces élèves ne percevraient pas la troisième dimension.

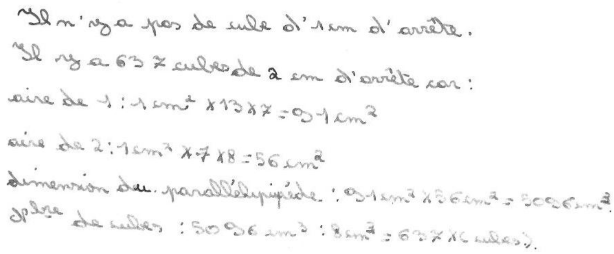
- Raisonnement n°2 (addition d'aires) :

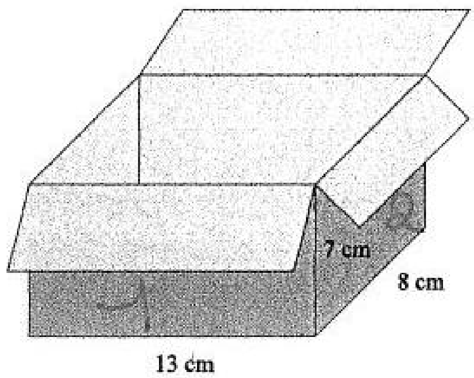

– il faut utiliser 147 cubes de 2 cm
voici le calcul.
– 13 cm x 7 cm = 91 cm x 2 = 182 cm
– 8 x 7 = 56 cm x 2 = 112 cm
182 cm + 112 cm = 294 cm
294 cm qu'on ÷ pour utiliser – de cubes donc on en utilisera 147 cubes de 2 cm.

Nous pouvons supposer que les élèves suivant ce raisonnement exploitent les données telles qu'ils les voient. La suite de calculs réalisée ci-dessus laisse effectivement à penser que les élèves se focalisent sur les faces visibles. Pour obtenir le volume, les élèves additionnent donc les quatre aires des faces latérales. Étant donné que le résultat de cette addition est un nombre pair, ils pensent naïvement à diviser par deux ce nombre dans le but d'utiliser les plus gros cubes et, de ce fait, en utiliser le moins possible pour remplir la boîte.

Les élèves commettent cependant deux erreurs outre le fait que la démarche pour calculer le volume soit incorrecte. Premièrement, ils utilisent les longueurs des arêtes des cubes sans chercher à calculer le volume de ces derniers. Deuxièmement, ces élèves ne pensent pas à la disposition des cubes dans la boîte pour le remplissage et ne tiennent donc pas compte des longueurs impaires des côtés de la boîte à remplir.

- Raisonnement n°3 (multiplication d'aires) :


Il n'y a pas de cube d'1cm d'arrête.
Il y a 637 cubes de 2 cm d'arrête car :
aire de 1 : 1cm² x 13 x 7 = 91 cm²
aire de 2 : 1cm² x 7 x 8 = 56 cm²
dimension du parallélépipède : 91cm² x 56cm² = 5096cm².
nbre de cubes : 5096 cm³ : 8cm³ = 637 (cubes).



À travers cette troisième démarche, nous pouvons imaginer que les élèves utilisent à nouveau ce qu'ils voient : dans ce cas, les deux faces mises en évidence par la couleur gris foncé. Ce qui différencie ce raisonnement du précédent tient essentiellement en deux points. Pour commencer, les élèves n'additionnent pas les aires mais multiplient les deux surfaces de couleur gris foncé entre elles. Cette méthode n'est évidemment pas plus valide que la précédente mais montre peut-être un vague souvenir du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle (multiplication de grandeurs). Le second point qui différencie ce raisonnement du deuxième est le calcul du volume du cube de 2 cm d'arête correspondant à 8 cm^3. Nous pouvons d'ailleurs souligner l'utilisation des unités adéquates quasiment tout au long de leur démarche. Cependant, ces élèves ne tiennent pas compte non plus des côtés de la boîte qui ont une longueur impaire, ce qui implique que la boîte ne pourrait pas contenir que des cubes de 2 cm d'arête pour être complètement remplie.

- Raisonnement n°4 (confusion longueurs / aires / volumes) :

  Aire ① = 1cm² × 13 × 7 = 91 cm²
  Aire ② = 1cm² × 7 × 8 = 56 cm²
  Aire ③ = 1cm² × 13 × 8 = 104 cm²

  Nombre de carrés de 2 cm d'arête = { 104 : 2 = 52 carrés ; 56 : 2 = 28 carrés }
  → = 52c + 28c = 80 carrés

  Nombre de carrés de 1 cm d'arête = 91 : 1 = 91 carrés

  Cette quatrième démarche montre la confusion que font peut-être ces élèves entre les grandeurs que sont les longueurs, aires et volumes. En effet, les élèves sont une fois de plus attirés par le calcul des aires des faces du parallélépipède rectangle et non de son volume. De plus, lorsqu'ils obtiennent les résultats des trois aires, ils en reviennent aux longueurs des arêtes des cubes. Les élèves se perdent donc ici entre les différentes dimensions.

La plupart des élèves qui adoptent de telles démarches ne donne pas l'impression de comprendre ce qu'ils calculent. Ils utilisent les données qu'ils ont à portée de main, placent des opérations entre elles et obtiennent un résultat qu'ils croient solution de leur problème.

La proposition que nous faisons dans la section suivante permettrait peut-être de faire prendre conscience aux élèves de la démarche qu'ils suivent.

3. Adaptation pour manipuler : changement de la valeur des variables

Une proposition pour aider les élèves à voir ou plutôt vivre le problème autrement – qui peut éventuellement permettre de comprendre les erreurs qu'ils ont commises – consiste à changer la valeur des variables du problème. En effet, si les dimensions de la boîte sont un peu plus petites, cela permet aux élèves de réaliser la boîte sur une feuille de format A4 en papier ou en carton et de peut-être mieux comprendre ce qui se passe réellement en remplissant la boîte qu'ils auront construite.

Pour cela, l'enseignant peut proposer du matériel aux élèves. Il existe des cubes de 2 cm d'arête disponibles dans les magasins vendant du matériel scolaire et les réglettes Cuisenaire correspondant à une unité sont en réalité des cubes de 1 cm d'arête.

C'est d'ailleurs également un très bon exercice pour les élèves que de construire le patron du parallélépipède rectangle en question.

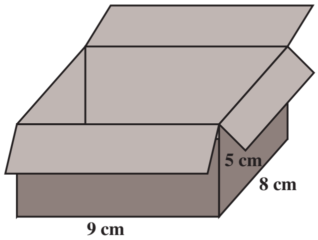
Le changement de valeurs doit être pensé de sorte à laisser possible les différentes démarches des élèves et garder le même niveau de complexité du problème. Par exemple, les dimensions de la boîte peuvent passer de $13\,cm \times 8\,cm \times 7\,cm$ à $9\,cm \times 8\,cm \times 5\,cm$.

Il ne faut pas nécessairement donner aux élèves le nombre suffisant de cubes pour remplir la boîte entièrement. S'ils en ont au moins assez pour remplir la base et un peu plus, c'est l'idéal. Par exemple, pour une boîte dont les côtés mesurent 9, 8 et 5 cm, les élèves pourraient recevoir 20 cubes de 2 cm d'arête et 20 de 1 cm d'arête. Ils pourraient alors remplir la base de la boîte avec 16 cubes de 2 cm d'arête et 8 cubes de 1 cm d'arête (ou 16 s'ils veulent remplir une « couche » complète), les autres cubes pouvant leur servir à comprendre comment se remplit le reste de la boîte sans toutefois en avoir suffisamment pour la compléter entièrement. Dans ce dernier cas, il ne leur resterait plus qu'à dénombrer les cubes, ce qui n'est pas l'objectif du problème proposé.

Avec ce matériel, les élèves peuvent procéder de diverses manières :

- ⋆ ils observent la manière dont ils complètent la base de la boîte et déduisent la quantité de cubes nécessaires pour la remplir entièrement ;
- ⋆ ils tiennent compte des résultats de leur démarche suivie au préalable et procèdent à la vérification via la boîte qu'ils ont fabriquée. La manipulation permet ainsi aux élèves de se rendre compte de leurs erreurs ou de valider leur réponse si elle est correcte.

Revenons sur les raisonnements erronés relevés dans la section 2.2 et adaptons-les aux nouvelles dimensions : $9\,cm \times 8\,cm \times 5\,cm$.



- Raisonnement n° 1 (longueurs) :

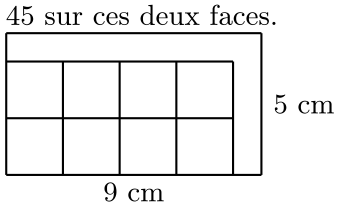
  Pour la longueur de 9 cm, il faut quatre « carrés » de 2 cm et un de 1 cm ;
  pour la largeur de 8 cm, il faut quatre « carrés » de 2 cm ;
  pour la hauteur de 5 cm, il faut deux « carrés » de 2 cm et un de 1 cm.
  Il faut donc dix « carrés » de 2 cm et deux de 1 cm.

  Si les élèves placent dix cubes de 2 cm d'arête et deux cubes de 1 cm d'arête dans la boîte qu'ils ont fabriquée, ils s'apercevront d'eux-mêmes que la boîte n'est pas remplie et qu'il y a donc un problème dans leur raisonnement.

- Raisonnement n° 2 (addition d'aires) :

  $9\,cm \times 5\,cm = 45\,cm \quad \times\ 2 = 90\,cm$;
  $8\,cm \times 5\,cm = 40\,cm \quad \times\ 2 = 80\,cm$;
  $90\,cm + 80\,cm = 170\,cm$ qu'on divise par deux pour utiliser moins de cubes,
  donc on utilisera 85 cubes de 2 cm.

  La démarche suivie par les élèves ci-dessus laisse penser que, pour remplir la boîte, ils veulent couvrir les aires latérales. Si c'est effectivement le cas, ils essayeront par exemple de compléter les faces avant et arrière de la boîte. Suivant leurs calculs, 45 cubes de 2 cm d'arête seraient nécessaires pour remplir ces deux faces.
  En posant les cubes de 2 cm d'arête dans la boîte le long des faces concernées, les élèves devraient déjà remarquer qu'ils ne peuvent en mettre plus de 8 sur chaque face pour ne pas déborder de la boîte. Ils devraient alors réaliser qu'il est impossible d'en placer 45 sur ces deux faces.



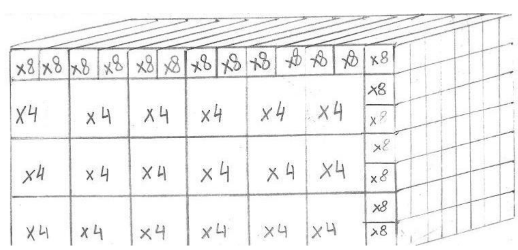
  Cette manipulation est riche car elle permettra en outre aux élèves de peut-être se rendre compte qu'ils ne peuvent pas placer uniquement des cubes de 2 cm d'arête pour remplir entièrement la boîte. De plus, si les élèves suivent la même démarche pour les faces gauche et droite, ils pourraient également observer que des cubes sont communs à plusieurs faces et devraient alors repenser leur stratégie de résolution.

Les raisonnements 3 et 4 peuvent également être développés par des procédés similaires. Par ailleurs, il existe bien d'autres démarches que celles présentées ci-dessus que les élèves pourraient réaliser. Nous ne pouvons cependant nous permettre dans cet article de répertorier l'ensemble des méthodes auxquelles les élèves penseraient.

La manipulation des cubes permet de vivre le remplissage de la boîte plutôt que de l'imaginer et permet en plus de se rendre compte de l'organisation des cubes à adopter pour remplir cette boîte concrètement.

Les raisonnements présentés dans la section 2.2 font abstraction de l'aspect matériel des cubes. La manipulation de la boîte et des cubes peut aider à dépasser cette difficulté. Par exemple, les élèves qui ont utilisé uniquement des cubes de 2 cm d'arête lorsque leur résultat total était pair sont face à un problème s'ils essayent de remplir leur boîte avec les cubes. Il y a effectivement des espaces vides qu'ils ne peuvent combler qu'avec des cubes de 1 cm d'arête.

Les quelques groupes d'élèves qui ont réussi à résoudre ce problème lors de la deuxième épreuve du 16^{e} RMT en ce qui concerne la section belge se sont appuyés sur une représentation de la boîte qu'ils ont dessinée comme ci-dessous.



Ce type de représentation a permis à ces élèves de « matérialiser » les données et ainsi, de mieux se représenter le problème. Les élèves qui ne possèdent pas une bonne représentation dans l'espace ont quant à eux besoin de matériel concret pour les aider dans leur démarche de réflexion.

Conclusion

L'essai présenté dans cet article est un exemple de ce qui peut être réalisé à partir des problèmes du Rallye Mathématique Transalpin. Il a pour but de montrer à quel point un petit changement de données et du matériel rudimentaire peuvent aider les élèves dans leurs démarches de résolution de problèmes mathématiques.

Si le matériel n'a pas été utilisé lors de la réalisation du problème, nous avons montré qu'il est encore plus intéressant à utiliser dans l'optique de travailler avec les élèves leurs erreurs et de leur permettre ainsi de peut-être y remédier par eux-mêmes grâce à la manipulation de matériel.

Pour en savoir plus

`www.crem.be` (concernant la recherche *Math & Manips*)

`rmt.sbpm.be` (à propos du Rallye Mathématique Transalpin)

Pauline Lambrecht est chercheur au CREM, doctorante FUNDP et membre du comité RMT, 🖂`paulinel@crem.be`.

La conjecture de Poincaré : suite et fin

Luc Lemaire

L'article : « De la conjecture de Poincaré (1904) au théorème de Hamilton-Perelman (2006) », Losanges n°7, pages 4 à 11, présentait les longs efforts de recherche ayant mené à la démonstration de la Conjecture de Poincaré par un brillant travail de Grigori Perelman.

Pour ce travail, Perelman se voyait attribuer la Médaille Fields en 2006, mais refusait cette médaille, estimant que le but des mathématiques est de résoudre des problèmes, pas d'obtenir des récompenses (il avait déjà refusé un Prix de la Société Mathématique Européenne, attribué pour d'autres travaux).

Rappelons aussi qu'en 2000, la fondation Landon Clay présentait sept problèmes mathématiques jugés de première importance, et offrait un prix d'un million de dollars pour la résolution de chacun d'entre eux. La conjecture de Poincaré en faisait (évidemment) partie.

Le règlement précise que le prix sera attribué au mathématicien qui aura résolu la question, après que le résultat ait été publié dans un journal contrôlant sérieusement les articles, et après un délai de deux ans sans que personne n'ait observé d'erreur.

Perelman posait un problème imprévu puisqu'il n'a pas soumis et ne va pas soumettre ses résultats à un journal. On peut toutefois considérer que sa démonstration a été publiée - par d'autres.

Le 21 mars 2010, la Fondation Clay annonçait que toutes les conditions étaient satisfaites et qu'elle attribuait le prix d'un million de dollars à Grigori Perelman. Il ne reste plus que six problèmes dans la liste de la Fondation Clay.

Mais Perelman faisait savoir rapidement que, fidèle à ses principes, il refusait le Prix.

Il faut noter toutefois que Perelman apparaît dans la liste des Médaillés Fields et comme premier lauréat d'un prix de la Fondation Clay, même s'il a refusé les récompenses.

La Fondation annoncera d'ici quelques mois l'usage qu'elle compte faire du million de dollars, en faveur du développement des mathématiques.

Luc Lemaire est professeur à l'Université Libre de Bruxelles, 🖂llemaire@ulb.ac.be.