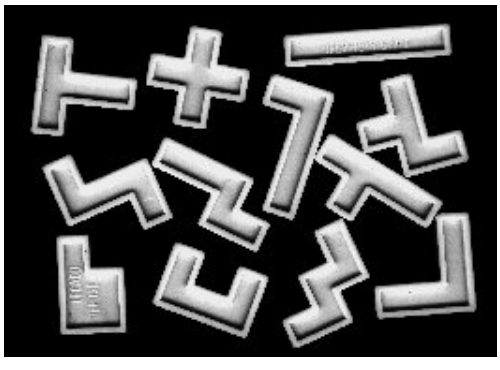
Avec des do, tri, quadri, penta . . . minos

Philippe Skilbecq

Mots clés : RMT, Polyminos, Assemblages, Aire, Périmètre, Volumes, Pavages.

Cet article est le résultat de la contraction de deux articles parus en 2005, dans le tome 2 du Livret RMT : « Avec des pentaminos » de Claude Villers *et « Plus loin avec des polyminos » du Comité RMT (Collectif). Ces articles sont disponibles dans leur intégralité sur le site du Rallye mathématique transalpin :* `www.rmt.sbpm.be/publications.php`

Introduction



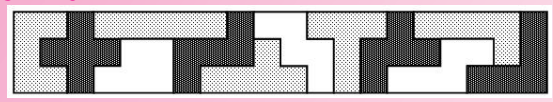
Les pentaminos. . . Voici des objets mathématiques « mal connus » des enseignants du fondamental paraît-il. Et pourtant. . .
Cet article a pour objet d'analyser le problème ***Avec des pentaminos***, issu de la première épreuve du 13e RMT. Cette analyse est assez courte, les réponses et justifications des élèves ne permettent pas de longs discours.

Cependant, nous avons choisi de traiter ce problème car il assure de multiples exploitations en classe. Ces exploitations, ainsi qu'une analyse des pentaminos, sont décrites dans une deuxième partie de l'article. Vous y trouverez également la procédure pour constuire aisément ce matériel([1]). Bonne lecture. . . et bonne découverte des pentaminos et autres monominos, dominos, *etc*. . .

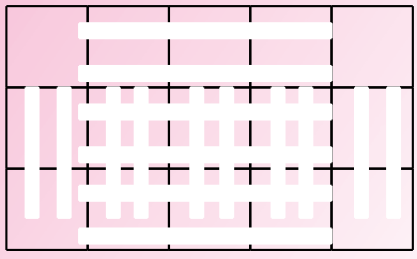
1. Le problème

Voici donc le problème qui nous sert de point de départ. Il a été proposé lors de la première épreuve du 13e RMT, en janvier 2005, aux classes de 5e et 6e primaire.

RMT 2005 (Cat. 5, 6)
Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux. Il y a 12 pentaminos différents avec lesquels on peut former un rectangle de « 3×20 » :



Éric joue avec ses 12 pentaminos et cherche à faire un rectangle de « 3×5 ». Il prend une des 12 pièces, et s'aperçoit qu'il n'arrivera pas à finir son rectangle.
Quelles pièces Éric n'arrivera-t-il jamais à utiliser pour son rectangle ?
Expliquez pourquoi.



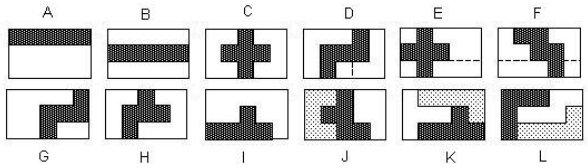
[Copyright ARMT]

([1]) Notons que ces figures géométriques sont aussi disponibles dans le logiciel *Apprenti Géomètre*, téléchargeable librement sur le site du CREM : `www.crem.be`

1.1. Analyse de la tâche

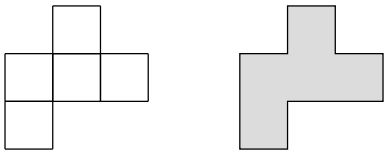
Lors de l'analyse *a priori* de ce problème par les sections suisses, italiennes, françaises, luxembourgeoise et belge, les comportements suivants avaient été mis en évidence :

- observer que certaines pièces occupent 3 couches de carrés dans la grille, d'autres seulement 2 couches ou seulement 1 couche (A, B).
- constater que la « barre » A, ne laisse que deux couches qui ne pourraient être complétées que par deux pièces égales ;
- constater qu'une position centrale pour certaines pièces symétriques impliquerait qu'on devrait utiliser deux fois le même pentamino pour compléter le rectangle 3×5, B, C, D ;
- observer que certains pentaminos, selon leur disposition, partagent la grille en fragments qui ne comptent pas exactement 5 carrés et rendent donc toute solution impossible E, F, G, H ;
- à la suite de ces constatations, vérifier pièce par pièce s'il est possible de compléter la grille 3×5 avec deux autres pentaminos différents. Par exemple en modifiant la disposition du pentamino de H en J, on trouve une solution, de même pour le changement de I en K ;
- constater que seuls, la « barre » A, B, la « croix » C, E, le « Z » D, G et le « W » F ne peuvent être utilisés. On trouve des configurations de trois pentaminos différents pour les huit autres, par exemple J, K, L.



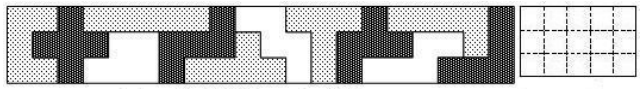
1.2. Premiers constats

En ce qui concerne le registre « graphique » une première remarque s'impose : il aurait peut-être été souhaitable de dessiner au moins un pentamino où les cinq carrés de base apparaissent.



Ceci aurait permis de mieux situer le concept de pentamino en associant un dessin à l'énoncé « Un pentamino est une figure formée de cinq carrés égaux ».

Une deuxième remarque est que les carrés unitaires composant le rectangle « 3×5 » proposé au pavage ne sont pas de la même taille que ceux composant le rectangle « 3×20 » illustré. Un certain nombre de réponses données à ce problème s'appuient sur cette différence dans les mesures des longueurs de ces carrés unitaires pour conclure que le pavage « 3×5 » n'est pas possible . Ce qui, d'une certaine manière, est exact, particulièrement dans le cas des jeunes élèves habitués à établir des comparaisons par mesurage.



En ce qui concerne le registre « verbal », il semble que la rédaction de la question présente des ambiguïtés. Il aurait été plus clair, surtout pour les jeunes élèves, de poser la question comme suit : *Quels sont les pentaminos qui empêchent toujours le pavage complet du rectangle « 3×5 » ?*

1.3. Les résultats des classes de 5e et 6e primaire

Le tableau ci-dessous présente l'attribution des points telle que définie par les sections.

Attribution des points

- 4 points pour les 4 pièces impossibles (la « barre », la « croix », le « Z » et le « W ») avec justifications
- 3 points pour les 4 pièces « impossibles » avec justifications incomplètes ou 1 erreur avec justifications correspondantes
- 2 points pour 3 pièces « impossibles » trouvées, avec justifications incomplètes ou 2 erreurs, avec justifications correspondantes
- 1 point pour 2 pièces « impossibles » trouvées, avec justifications incomplètes ou 3 erreurs, avec justifications correspondantes
- 0 point si 1 seule pièce trouvée ou plus de 3 erreurs ou incompréhension du problème

Le tableau suivant montre les résultats obtenus par les classes de 5e primaire et de 6e.

Remarquons que la moyenne est assez basse tant en 5e qu'en 6e et que la note la plus couramment obtenue est zéro.

	5e année	6e année
Points	Occurrences	Occurrences
0	13 (54%)	21 (39%)
1	6 (25%)	10 (19%)
2	1 (4%)	11 (20%)
3	3 (13%)	12 (22%)
4	1 (4%)	0 (0%)
Moyenne	0,875	1,26
Mode	0	0

1.4. Des démarches de résolution

Au niveau des classes de 5e année, les démarches correspondent bien à celles de l'analyse *a priori*. Cependant, les explications écrites sont manquantes ou maladroites ce qui n'est pas étonnant vu la nature du problème proposé. Elles ne font que se baser sur des affirmations de constats sans beaucoup de développement. Comme dit précédemment, des classes ont été perturbées par la différence entre les longueurs des côtés des carrés unitaires telles que représentées sur les deux figures qui accompagnaient la question.

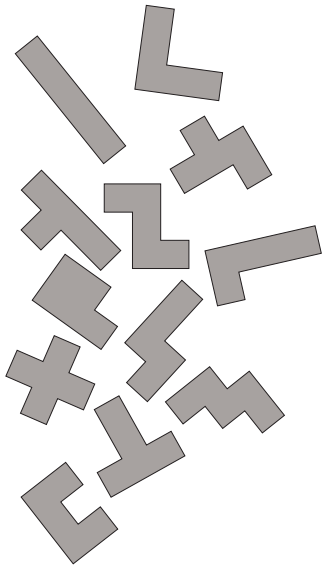
Au niveau des classes de 6e année, les mêmes constats apparaissent. Les classes ayant obtenu une note 3 ou une note 2 ont également simplement cité ce qui était attendu sans vraiment donner de justification autre que celle d'exemples dessinés ou collés après découpages.

1.5. L'intérêt du problème

Malgré les résultats relativement faibles qu'il a induits, ce problème ouvre des perspectives non négligeables pour un apprentissage ultérieur de notions mathématiques, pour le développement de compétences disciplinaires ainsi que de compétences transversales. Il peut être à l'origine de recherches de toutes les éventualités de structure de pentaminos, par exemple en les construisant (par dessin éventuellement) progressivement par adjonction d'un carré élémentaire : *monomino, domino, triminos, quadriminos* et enfin *pentaminos*. Il est possible de mener une recherche sur les périmètres et les aires. Les pavages de rectangles conduisent à traiter des multiples et des diviseurs, *etc*... Cela ne se réalise pas, bien entendu, dans le cas d'un problème du RMT mais des portes sont ouvertes pour une exploitation en classe allant au-delà de la simple réponse à la question posée. C'est ce que nous allons exposer dans les lignes qui suivent.

2. Des activités avec des polyminos

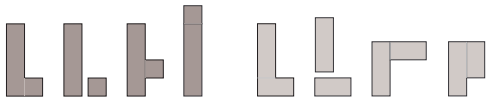
« Nous voilà bien désolés ! Toutes les pièces du puzzle se sont répandues sur le sol. Bien que muettes par nature, elles semblent nous inviter à les remettre en ordre. Mais avant cela, nous pouvons peut-être les observer attentivement et émettre quelques constatations et conjectures. »



– Première constatation, assez immédiate : ce puzzle se compose de 12 pièces. Par ailleurs, elles sont relativement « plates » car elles ont une épaisseur juste suffisante que pour en assurer une certaine rigidité. Nous pouvons admettre qu'elles représentent chacune une partie du plan.
– Deuxième constatation tout aussi évidente : toutes ces pièces sont différentes par la forme. Aucune d'entre elles ne peut se superposer à une autre même après **déplacement ou retournement.**

Et pourtant, elles possèdent une caractéristique commune qui les fait donc « se ressembler » un peu : elles ont toutes la même aire.

De plus, il est possible de décomposer une pièce du puzzle et de recomposer ses parties pour obtenir une autre pièce du puzzle comme le montre la figure ci-dessous.



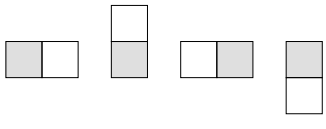
2.1. Construire d'autres polyminos

Une autre activité intéressante peut être de s'interroger sur les possibilités de construire des pièces de puzzle différentes, d'abord à partir de deux carrés, puis de trois carrés, enfin de quatre carrés. Il s'agit là d'un problème de combinatoire fort intéressant également pour l'organisation d'une démarche de recherche. Vous avez peut-être déjà demandé à vos élèves de rechercher tous les classements possibles de 4 enfants qui organisent une course entre eux : Albert, Bernadette, Cécile, Didier. Et si vous les avez observés au travail... rares sont ceux qui organisent leur recherche de solutions :

1. Albert, Bernadette, Cécile, Didier
2. Bernadette, Didier, Albert, Cécile
3. Cécile, Albert, Didier, Bernadette
4. ...

Or, sans méthode, très vite cette recherche devient difficile : a-t-on déjà écrit cette solution : Bernadette, Didier, Cécile, Albert ? Laquelle n'a-t-on pas encore écrite ?... La recherche des dominos, triminos et quadriminos participe aussi de cette idée d'organisation d'une recherche de cas possibles.

Recherchons donc les pièces possibles en assemblant deux carrés. Un carré possédant 4 côtés, il devrait y avoir au moins 16 façons d'assembler deux carrés, soit 4 côtés différents à juxtaposer à 4 autres. Cependant, on peut accepter que la recherche de solutions se borne à placer un des carrés autour du second, comme le montre la figure ci-dessous. Au terme de ce travail, intuitivement, nous admettons qu'il n'existe qu'une seule solution. Toutes les autres lui sont identiques à une symétrie près. Vous avez certainement compris qu'il s'agit des célèbres dominos, le préfixe « do » signifiant « deux ».

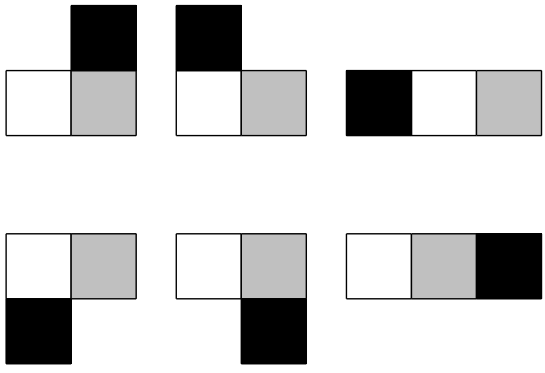


Mais, combien de pièces de puzzle peut-on constuire avec trois carrés ?

Deux méthodes de recherche au moins sont possibles :

– soit nous reprenons trois carrés et nous cherchons comment les assembler...

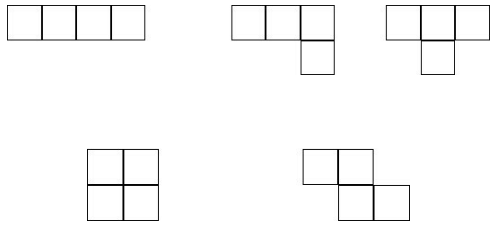
– soit, sachant qu'il n'y qu'une seule façon d'assembler deux carrés, nous recherchons toutes les possibilités d'ajouter un troisième carré à cette paire unique.



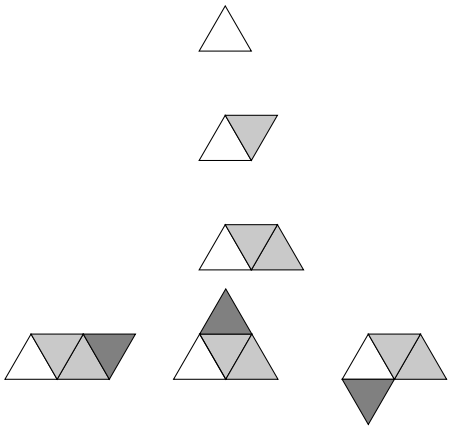
Cette seconde manière de procéder a pour avantage de montrer aux enfants qu'en mathématiques, comme dans d'autres sciences, il ne faut pas redécouvrir l'ensemble de la science chaque jour. Il en va de même par ailleurs à l'école, fort heureusement.

En organisant la recherche, nous comprenons qu'il y a six possibilités de juxtaposition d'un carré à un domino comme le montre la figure ci-dessous. Mais, intuitivement à nouveau, nous admettons qu'il n'existe que deux types de triminos, à une symétrie près.

Pour la recherche des quadriminos, il y a lieu d'utiliser la même démarche : utiliser les deux triminos et leur adjoindre un carré. Nous obtenons 5 types différents de quadriminos.



La recherche de tous les pentaminos est évidemment un peu plus longue. Le nombre de possibilités est plus important et la recherche peut paraître fastidieuse pour les élèves. Rien n'empêche cependant d'exercer la procédure de recherche lors d'une prochaine activité à partir de triangles équilatéraux comme le montre la figure ci-dessous.



2.2. Des aires et des nombres

Après avoir construit ces pièces de puzzle, nous pouvons nous intéresser aux différentes caractéristiques qu'elles possèdent telles leur forme, leur périmètre et leur aire.

Pour chaque série, trimino, quadrimino ou pentamino, toutes les pièces ont la même aire, soit trois, quatre ou cinq carrés. Mais ont-elle pour autant le même périmètre ? Il est sans doute nécessaire de procéder à des vérifications pour s'en assurer. . . soit en mesurant les pièces, soit en les plaçant *toutes* sur un quadrillage et en comptant. . . !

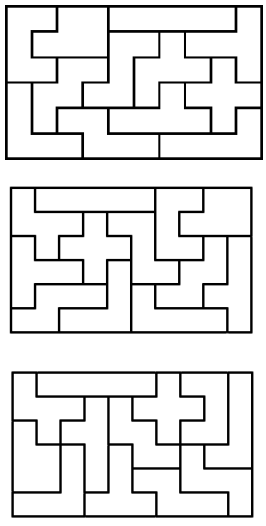
Ensuite, il est assez naturel de songer à les assembler pour effectuer un pavage. Dans le cas des pentaminos, les 12 pièces doivent toutes être utilisées et ne peuvent laisser de « trou ». Puisque chaque pièce est composée de 5 carrés et que la longueur de chaque côté d'un carré vaut 1 ou $1u$, alors l'aire de chaque pièce vaut 5 ou $5u^2$. Nous pouvons aussi dire que l'aire d'une pièce de pentamino vaut 5 carrés.

L'aire de la forme à paver avec les douze pentaminos doit donc être de $12 \times 5u^2$, soit $60u^2$, ou 60 carrés.

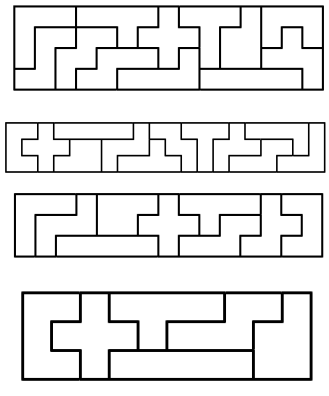
Puisque les bords des pentaminos sont formés de segments deux à deux parallèles ou perpendiculaires, la première idée est de paver un rectangle, si c'est possible. Mais quelles peuvent alors être les dimensions de ce rectangle ?

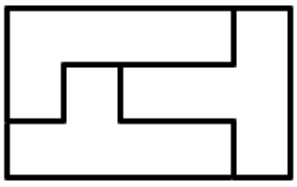
Nous voilà subitement plongés dans les notions de diviseurs et multiples naturels de 60. Les paires possibles de dimensions naturelles d'un rectangle dont l'aire vaut 60 carrés ou $60u^2$ sont $1u, 60u$; $2u, 30u$; $3u, 20u$; $4u, 15u$; $5u, 12u$ et $6u, 10u$, soit les paires de diviseurs naturels de 60. Numériquement donc, il devrait être possible de paver des rectangles ayant ces dimensions. Mais est-ce possible avec les douze pièces de pentaminos ? Pourrions-nous paver un rectangle de $1u \times 60u$ ou $2u \times 30u$? . . . Une première analyse permet rapidement d'éliminer certains rectangles en fonction des dimensions de certains pentaminos.

Nous pouvons cependant raisonnablement penser qu'il est possible de paver le rectangle de dimensions $6u \times 10u$ avec les pièces du puzzle. Ce n'est pas évident mais c'est faisable. Il y a d'ailleurs un très grand nombre de solutions pour les pavages du rectangle 10×6 où tous les pentaminos sont utilisés. En voici trois :



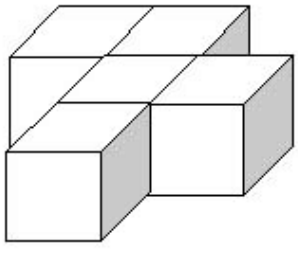
Nous pouvons aussi rechercher des pavages d'autres rectangles de même aire ou d'aire plus petite que celle du rectangle 10×6. Il faut seulement que cette aire soit multiple de 5. Ci-dessous une solution pour les rectangles 15×4, 20×3, 15×3, 10×3 et 5×3.





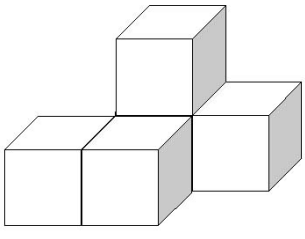
3. Et si on sortait du plan !

Il est possible de construire des polyminos en leur donnant une certaine « épaisseur ». Et ce qui est relativement immédiat, c'est de leur donner une épaisseur unitaire. Chaque carré composant le polymino devient alors face d'un cube.



Nos douze pentaminos deviennent alors des objets de l'espace et acquièrent un volume valant $5u^3$ chacun, ou 5 cubes.

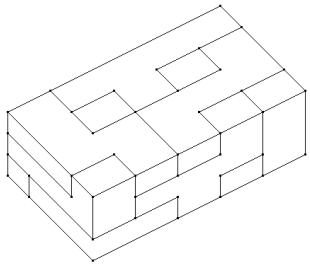
Cependant, toutes les configurations de cinq cubes ne sont pas représentées si l'on donne une épaisseur aux douze pentaminos. En effet, il est possible de construire d'autres formes en trois dimensions avec 5 cubes. Les assemblages de ce type de pièces sont cependant plus complexes ! La figure ci-dessous en expose un exemplaire.



Il est possible de construire des parallélipipèdes rectangles de volume $12 \times 5u^3$ soit de $60u^3$ ou 60 cubes.

Comme pour les rectangles, il s'agit de trouver différentes dimensions de parallélipipèdes ayant $60u^3$. Nous sommes amenés à factoriser 60 en produits de 3 facteurs et non plus de deux comme pour les rectangles. Soit, nous devons trouver des triplets de diviseurs de 60 : 1, 2, 30 ; 1, 3, 20 ;. . . Nous retrouvons ici la démarche utilisée avec les formes ci-dessous pour ne pas oublier de solutions !

Si vous avez l'occasion de vous procurer ou de faire construire les 12 pentaminos d'épaisseur unitaire alors essayez de les assembler pour constituer un parallélipipède $3 \times 4 \times 5$ (il paraît qu'il y a 3940 solutions !), un parallélipipè de $2 \times 5 \times 6$ (264 solutions !) et un parallèlipipède $2 \times 3 \times 10$ (12 solutions). La figure ci-dessous expose une solution pour le premier de ces cas.



4. Conclusion

Les polyminos sont des objets assez faciles à construire et avec lesquels il est possible de rencontrer des concepts mathématiques variés issus des grandeurs, de l'arithmétique et de la géométrie. Dans l'enseignement secondaire, ces situations pourront également être interprétées grâce à l'algèbre. Dans cet article, nous avons rencontré une situation qui permettait de clarifier une démarche de recherche de plusieurs solutions (comment connaître tous les quadriminos par exemple) et une situation géométrique qui permettait de lier l'arithmétique (recherche de diviseurs) et les grandeurs (périmètre et aire). Ce sont là des situations quelque peu différentes de celles que l'on rencontre généralement dans les manuels.

Philippe Skilbecq est chercheur au CREM. ✉ philippe.skilbecq@sbpm.be.