La finale de la 16e édition du RMT

Philippe Skilbecq

Mots clés : Jeux - Géométrie - Arithmétique - Logique - Mesure - Rallye - Concours - Analyse *a priori*

Au cours de l'année scolaire 2007/2008, l'Association du Rallye Mathématique Transalpin et le comité belge du Rallye Mathématique Transalpin(1), avec le soutien de la SBPMef, ont organisé la 16e édition du RMT (2). Entre janvier et avril 2008, cinquante-six classes, de la 3e à la 6e primaire, ont participé aux deux épreuves quali- ficatives. Au terme de celles-ci, 16 classes (quatre dans chaque catégorie) ont été sélectionnées pour l'épreuve finale. Cette épreuve s'est déroulée à la Haute École P.-H. Spaak à Nivelles, l'après-midi du samedi 17 mai.

En complément de notre article, vous trouverez des photos de cette après-midi *mathématique* sur le site de la section belge francophone : `www.rmt-sbpm.be`.

1. L'organisation de la finale

L'épreuve finale s'organise comme les épreuves qualificatives :

– les problèmes sont résolus en groupe classe,
– les élèves disposent d'une heure pour résoudre 5, 6 ou 7 problèmes selon leur catégorie,
– les enseignants ne peuvent être présents dans la classe,
– le matériel est fourni aux élèves,
– et une seule feuille réponse par problème doit être rentrée.

Dans les classes, les élèves sont pris en charge par des étudiants, futurs instituteurs, de la haute école P.-H. Spaak. Sans eux d'ailleurs, la finale ne pourrait être organisée.

Au nom du comité du RMT, je remercie encore très sincèrement Jennifer, Shirley, Nancy, Julien, Alizée, Naïma, Sarah, Magali, Stéphanie, Julie, Delphine, Antoine, Maria, Caroline, Stéphanie, Romy, Aurélie, Julie, Carine, Sandrine, Valérie.

Je remercie également tout particulièrement Madame F. Bols, professeur de mathématique à la haute école, qui organise cette collaboration entre le comité RMT et les étudiants.

Après cette heure de « tusage » pour résoudre les problèmes d'aritmétique, de géométrie, de mesure, de logique. . . , les épreuves sont acheminées vers le jury qui débute alors la correction. Celle-ci s'organise à partir des analyses *a priori* et des critères d'attribution de points définis au niveau international. Au terme de ces corrections, la proclamation des résultats peut débuter. . .

1.1. Les classes finalistes et les gagnants

C'est donc quatre classes dans chaque catégorie qui avaient été sélectionnées pour participer à cette finale.

– Pour la catégorie 3 (3e année primaire) : l'école communale d'Awan (Aywaille), l'ENDBE de Braine-le-Comte, l'école libre de Meux, l'école de Villers-dt-Orval.
C'est l'école de Villers-devant-Orval qui a remporté la finale du 16e RMT pour la catégorie 3.

(1) Nous utiliserons très souvent l'abréviation RMT dans la suite de cet article.
(2) Pour un aperçu de l'organisation de ce concours, de ses objectifs et de son histoire, nous invitons le lecteur à visiter le site de l'*Association du Rallye Mathématique Transalpin* : `www.math-armt.org`

Losanges • N°1 • 2008 • 42-47

– Pour la catégorie 4 (4e primaire) : l'école du Grand Chemin à Montigny-le-Tilleul, l'école Saint Jean Berchmans de Montigny-le-Tilleul, l'école Don Bosco à Liège, l'école libre de Meux.
  L'école Saint Jean Berchmans de Montigny-le-Tilleul remporte la catégorie 4.
– Pour la catégorie 5 : l'école communale de Villers-Perwin, l'école communale d'Henry-Chapelle, l'institut Sainte Marie de Rèves, l'école libre de Robermont.
  L'institut Sainte Marie de Rèves remporte la catégorie 5.
– Pour la catégorie 6 : l'école libre Saint Rémy d'Écaussinnes, l'école Saint Jean Berchmans de Montigny-le-Tilleul, l'école communale à Villers-Perwin.
  L'école communale de Villers-Perwin remporte la catégorie 6, après avoir gagné en catégorie 5 l'an dernier.

Sincères félicitations à tous ces élèves et à leurs enseignants.

1.2. Les membres du jury

Pour corriger ces épreuves en toute impartialité, un jury a été composé comme chaque année. Les membres de ce jury sont des enseignants représentant tous les niveaux d'enseignement et les réseaux principaux, des membres de l'Inspection du fondamental et du secondaire, et des chercheurs du CREM([3]).

Cette année, les personnes suivantes composaient le jury :
– Françoise Bols, professeur de mathématiques à la haure école P.-H. Spaak à Nivelles,
– Françoise Capacchi, Inspectrice pour l'enseignement fondamental,
– Laetitia Desmet, chercheuse CREM,
– Julie Fanuel, chercheuse CREM,
– Christine Géron, professeur de mathématique à la haute école de Liège,
– Marie-France Guissard, professeur de mathématiques dans l'enseignement secondaire,
– Pauline Lambrechts, chercheuse CREM,
– Jocelyne Maréchal, Inspectrice de l'enseignement fondamental,
– Nicole Miéwis, professeur de mathématique dans l'enseignement secondaire,
– Jules Miéwis, conseiller pédagogique à la FESeC,
– Francis Regnier, Inspecteur pour l'enseignement fondamental,
– Pierre Stegen, professeur de pédagogie, haute école de Liège.

Au nom du comité, je remercie également sincèrement ces personnes pour leur présence et le sérieux avec lequel elles ont corrigé les épreuves.

2. Les épreuves

Comme pour les deux épreuves qualificatives, les problèmes de la finale sont mis au point par les sections au niveau international.

À chaque catégorie ne sont pas attribués les mêmes nombres de problèmes à résoudre : les élèves de catégorie 3 doivent résoudre 5 problèmes ; ceux de catégorie 4, 6 problèmes ; ceux de catégories 5 et 6, 6 problèmes. Ci-dessous, nous citons les 13 problèmes prévus pour cette finale, ainsi que leur répartition dans les catégories et le ou les domaines mathématiques auxquels chaque problème fait appel pour être résolu. Comme vous le constaterez, certains problèmes sont communs à plusieurs catégories.

Vous remarquerez également que les derniers problèmes sont aussi associés aux catégories 7, 8, 9 et 10. Ceci correspond aux quatre premières années de l'enseignement secondaire. Ainsi, le problème 13 est proposé aux classes de 6e primaire mais aussi aux classes du secondaire.

([3]) Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Titre	Catégorie	Domaine	Sections
1. Perles rouges	3	Arithm.	Parma
2. Les puzzles	3 4	Arithm. & géom.	Bourg-en-Bresse
3. Classes internationales	3 4	Arithm.	Luxembourg et Parma
4. Carré ou rectangle ?	3 4 5	Géom. & mesure	Puglia
5. La maison	3 4 5	Géom.	Franche-Comté
6. Le prix des salades	4 5	Arithm.	Suisse romande
7. Les nombres de Bernard	4 5 6	Arithm. & logique	Génova
8. Le marché aux livres	5 6	Arithm. & logique	Ticino
9. Nombres à trouver	5 6 7	Arithm.	Franche-Comté
10. Points de vue	5 6 7	Géom.	Franche-Comté
11. Le serpent de bois	6 7 8	Arithm. & géom.	Siena
12. L'horloge digitale*	6 7 8	Arithm. & mesure	Génova
13. Composition de roses	6 7 8 9 10	Arithm. & algèbre	Siena

(*) Dans ce problème, il est nécessaire d'adapter l'énoncé : les termes « nombres naturels » utilisés en Suisse romande et en Belgique francophone, doivent être remplacés par « nombres entiers positifs » pour la France.

2.1. Quelques problèmes

Nous proposons ci-après quelques problèmes issus de l'épreuve finale. Nous leur associons l'analyse *a priori* construite par l'ensemble des sections.

3. Classes internationales

3 4

Pour former les classes de 5e primaire, le directeur d'une école internationale consulte la liste des élèves inscrits et constate qu'il y a :

13 Italiens	11 Français
10 Américains	1 Chinois
8 Suisses	7 Allemands
9 Marocains	4 Hollandais

Le directeur veut former trois classes ayant le même nombre d'élèves, tout en laissant les enfants d'une même nationalité dans la même classe.

Décrivez toutes les manières possibles de former les trois classes. Expliquez votre raisonnement.

Domaine de connaissances

- Arithmétique : décomposition additive de nombres, addition, division
- Combinatoire

Analyse de la tâche

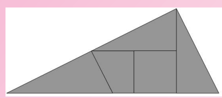
- Calculer la somme de tous les élèves, 63 et en déduire que chaque classe aura un effectif de 21 (63 : 3).
- Trouver toutes les décompositions de 21 en sommes de deux termes ou plus qui tiennent compte des nombres d'élèves des différentes nationalités :
  en deux termes : $21 = 13 + 8$ ou $21 = 11 + 10$
  en trois termes : $21 = 13 + 7 + 1 = 11 + 9 + 1 = 10 + 7 + 4 = 9 + 8 + 4$
  en quatre termes : $21 = 9 + 7 + 4 + 1$.
- Combiner entre elles les décompositions précédentes de manière à ne pas répéter les mêmes nombres dans une même combinaison, obtenir les trois répartitions possibles des élèves dans les classes.

Solutions	Classe A	Classe B	Classe C
1	11,10	13, 7, 1	9, 8, 4
2	11,10	13, 8	9, 7, 4, 1
3	13, 8	10, 7, 4	11, 9, 1

Ou : penser que dans la classe des 13 Italiens les 8 autres élèves ne peuvent être que les 7 Allemands et le Chinois ou les 8 Suisses. Dans le premier cas, dans la classe des 11 Français, on ne peut ajouter que les 10 Américains pour arriver à 21, ce qui conduit à la première solution (la troisième classe ne peut être formée que de 8 + 9 + 4). Dans le second cas (21 = 13 + 8), la classe des 11 Français peut être complétée par les 9 Marocains et le Chinois (solution 3) ou avec les 10 Américains (solution 2). Puisqu'il n'y a pas d'autres cas possibles, on peut conclure qu'il n'y a que ces trois solutions.

4. Carré ou rectangle ?

Voici un puzzle en forme de triangle, composé de cinq pièces :



Françoise dit qu'on peut former un puzzle carré avec ces cinq pièces, sans qu'elles se recouvrent et sans qu'il y ait de trou. Julie dit qu'on peut aussi former un puzzle rectangle, non carré, avec ces cinq pièces.

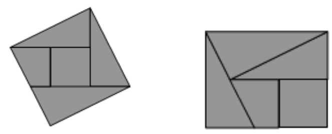
Essayez de construire un carré avec ces cinq pièces et montrez comment vous avez fait. Puis essayez de construire un rectangle, non carré, et montrez comment vous avez fait.

Domaine de connaissances

- Géométrie : manipulation et observation de figures : carrés, rectangles et triangles, angles.
- Mesures : comparaison de côtés et d'angles.

Analyse de la tâche

- Observer les cinq pièces et se rendre compte que si l'on veut reconstituer des puzzles, il faut les découper ou les reproduire très précisément pour pouvoir comparer leurs côtés et leurs angles.
- Se convaincre (explicitement ou implicitement, par des superpositions, juxtapositions ou mesures) qu'une des pièces qui a quatre côtés est un carré, que l'autre a deux angles et deux côtés égaux à ceux du carré, que les trois autres pièces sont des triangles possédant un angle « comme ceux du carré » (triangles rectangles) et que deux de ces triangles sont superposables ...
- Procéder par essais en découpant les pièces, les translatant, les tournant ou les retournant, (en identifiant en particulier les pièces qui permettent d'obtenir des angles droits ou des côtés parallèles) ...jusqu'à obtenir le rectangle et le carré. Par exemple, une rotation d'un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet droit permet d'obtenir le carré ; une rotation d'un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet supérieur et une translation du triangle de droite permettent d'obtenir le rectangle non carré.



8. Le marché aux livres

Susy et Lilly ont reçu chacune 16,20 € de leurs grands parents et les mettent en commun. Elles décident d'aller au marché aux livres et DVD. Ce jour-là les offres spéciales sont :

- Un DVD au prix de 3,60 €. En achetant 3 DVD, on peut en avoir un quatrième à moitié prix.
- Un livre au prix de 2,50 €, 2 livres pour 4 €.

Avant de rentrer à la maison, Susy et Lilly doivent en outre passer payer le jeu qu'elles ont pris la semaine précédente. Ce jeu coûte 6,10 €.

Susy et Lilly ont dépensé tout l'argent reçu de leurs grands parents.

Qu'ont-elles acheté au marché ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction et multiplication
- Logique : organisation d'un raisonnement qui tient compte de plus de deux conditions

Analyse de la tâche

- Comprendre que Susy et Lilly dépensent entièrement leur argent : 32,40 (en euros).
- Établir la somme dont elles peuvent disposer pour l'achat de livres et DVD : $32,40 - 6,10 = 26,30$ (en euros).
- Faire une hypothèse sur le nombre de DVD achetés et examiner si la totalité de la somme restante peut être dépensée en n'achetant que des livres ou le contraire.

Ou déterminer, de manière organisée, les achats possibles selon les offres spéciales (qu'il faut savoir interpréter correctement !).

Nombres	DVD	Livres
1	3,60	2,50
2	7,20	4
3	10,80	6,50
4	12,60	8
5	16,20	10,50
6	19,80	12
7	23,40	14,50
8	24,20	16
9	27,80	18,50
10	-	20
11	-	22,50
12	-	24
13	-	26,50

Et se rendre compte que pour obtenir 26,30 € (partie décimale : 30) on peut, par exemple, constater que les parties décimales des prix des DVD et des livres ne peuvent être respectivement que 80 et 50 et trouver la seule possibilité : 19,80 et 6,50, ce qui correspond à 6 DVD et 3 livres.

Ou : procéder par essais non organisés et vérifier ensuite la réponse.

13. Composition de roses[3]

Madame Flora, propriétaire d'un célèbre magasin de fleurs, a préparé pour un client deux très belles compositions de roses. Dans la première composition, faite de roses blanches, rouges et jaunes, elle a utilisé 235 roses. Dans la seconde composition, faite seulement de roses rouges et blanches, elle a utilisé 263 roses. Madame Flora observe que :

- le nombre des roses blanches est le même dans les deux compositions ;
- dans la première composition le nombre des roses jaunes est le tiers du nombre des roses rouges ;
- dans la seconde composition le nombre des roses rouges est le double du nombre des roses rouges de la première composition.

D'après vous, combien y a-t-il de roses de chaque couleur dans chacune des compositions ? Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

[3] Nous rappelons que ce problème est également proposé aux élèves des quatre premières années du secondaire.

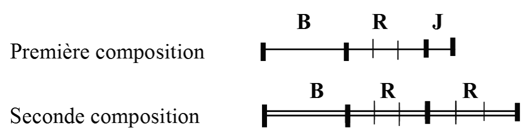
Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : introduction à l'algèbre ; équations et systèmes d'équations

Analyse de la tâche

- Considérer les deux compositions de roses (3 couleurs pour la première et 2 couleurs pour la deuxième) et les relations existantes entre les nombres des roses de chaque couleur dans les deux compositions.
- Se rendre compte que la différence des nombres de roses des deux compositions ne dépend pas des roses blanches.
- Remarquer que le nombre des roses non-blanches dans les deux compositions peut s'exprimer en fonction seulement du nombre des roses jaunes : dans la première composition, le nombre des roses non-blanches est le quadruple de celui des jaunes (puisque le nombre de rouges est le triple des jaunes), alors que dans la seconde composition, les rouges sont six fois plus nombreuses que les jaunes (puisqu'il y en a le double que dans la première composition).
- En déduire que la différence des nombres de roses des deux compositions, c'est-à-dire 28 $(263-235)$, est le double $(6-4)$ du nombre des roses jaunes.

Il y a donc 14 roses jaunes. Ce raisonnement peut être illustré avec un schéma du type :



dont on déduit que la différence des nombres de roses dans les deux compositions est le double de celui des roses jaunes de la première composition et les deux tiers des roses rouges de la première composition.

- Conclure que dans la première composition il y a 14 roses jaunes, 42 roses rouges et 179 roses blanches, alors que dans la deuxième il y a 84 roses rouges et 179 roses blanches.

Ou : après avoir noté, par exemple, B, R et J respectivement le nombre de roses blanches, rouges et jaunes de la première composition, traduire dans un langage algébrique les relations données dans l'énoncé :

$B+R+J=235$, pour la première composition,
$B+2R=263$, pour la seconde composition.

- Faire la différence des nombres de roses des deux compositions pour obtenir la relation $R-J=28$

– Puisque $R = 3J$ (seconde condition donnée dans l'énoncé), en déduire que $2J = 28$ d'où $J = 14$

En déduire que $R = 42$, ce qui donne $B = 235 - 14 - 42 = 179$ d'où la première composition : 179 blanches, 14 jaunes et 42 rouges. - En déduire qu'il y a $2 \times 42 = 84$ roses rouges dans la deuxième composition et $263 - 84 = 179$ roses blanches. - Les élèves des catégories 9 et 10 pourraient résoudre le problème avec un système d'équations linéaires, par exemple en désignant par b le nombre des roses blanches dans chaque composition et par r le nombre des roses rouges dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} b + r + \frac{2}{3}r = 235 \\ b + 2r = 263 \end{cases}$$

3. La suite...

Dans de prochains articles, nous analyserons plus en détails certains problèmes en y insérant des copies d'épreuves.
L'analyse de ces copies est particulièrement intéressante pour mieux comprendre comment des élèves peuvent résoudre certains problèmes.

De plus, lors de chaque finale, les étudiants utilisent une grille d'observation pour noter les comportements des élèves lors de la résolution des problèmes. Analyser ces données permet également de mieux comprendre comment les élèves s'organisent.

Ainsi le RMT est bien sûr un concours qui permet aux élèves d'être confrontés à la résolution de problèmes en mathématique. Mais il est aussi un environnement propice à l'analyse des démarches des élèves et à leur compréhension.