Titre	Catégorie	Origine	Domaine mathématique
1. Les belles pages !	3 4	BB	Numération. Nombres à deux chiffres vérifiant deux conditions
2. La cible	3 4	SI	Additions de quatre termes choisi parmi deux nombres
3 Étranges animaux	3 4 5	GTCP	Pré-algèbre
4. L'arbre d'Adèle	3 4 5	SI	Géométrie plane. Pavements d'une figure par trois types de figures
5. Pokémon	3 4 5	SI	Pré-algèbre
6. Le coffre de Matt et Matic	4 5 6 7	LY	Pré-algèbre
7. Les tours	5 6 7	RZ	Arithmétique : divisions avec restes
8. Boîtes de craies I	5 6 7 8	SI	Numération. Nombre de dizaines d'un nombre
9. Citronnade fraîche	5 6 7 8	RZ	Proportionnalité
10. Les cubes de Nicolas	6 7 8	PR	Combinaisons
11. La bande de Lili	6 7 8	BE	Géométrie plane : pliages et côté d'un carré
12. Le potager I	6 7 8	PR	Géométrie plane : partage d'un triangle en deux triangles dont l'aire de l'un est double de celle de l'autre
13. Le pont des amoureux	8 9 10	SR	Géométrie plane : plus court chemin
14. Les dés	8 9 10	SR	Géométrie 3D et logique

1. LES BELLES PAGES ! (Cat. 3, 4)

Sébastien a emprunté un livre de 108 pages à la bibliothèque.

Lorsqu'il arrive à la page 12, il constate que ce numéro de page est particulier :

- il s'écrit avec les deux chiffres 1 et 2 qui sont l'un à côté de l'autre, de gauche à droite dans la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sébastien cherche alors toutes les pages de son livre avec des numéros qui, comme 12, s'écrivent avec deux chiffres qui sont l'un à côté de l'autre dans la suite et se lisent de gauche à droite.

Combien d'autres numéros de pages de ce type Sébastien va-t-il trouver ?

Écrivez tous ces numéros.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer tous les nombres inférieurs à 108 qui s'écrivent avec deux chiffres consécutifs de la suite 1, 2, ... , 9.

Analyse de la tâche

- A partir de la liste des nombres inférieurs à 108, comprendre que la recherche porte sur les nombres constitués de écrits avec deux chiffres qui sont l'un à côté de l'autre et se lisent de gauche à droite dans la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Comprendre que l'ordre des chiffres a une importance, par exemple on ne retient pas 54.
- Comprendre qu'il faut tous les trouver pour répondre à la question.
- Établir une stratégie qui permette de trouver ces nombres, par exemple :
- Faire la liste des nombres inférieurs à 108 et repérer ceux qui correspondent aux critères. (10-11-$\boxed{12}$-13-…-…-22-$\boxed{23}$-…

Ou

- Partir de l'écriture des chiffres de 1 à 9 et apparier deux chiffres consécutifs (12 – 23 – 34 – 45 - 56 – 67 – 78 – 89)

Ou

- Se rendre compte qu'il n'y a qu'un nombre entre 10 et 20, qu'un nombre entre 20 et 30, en déduire qu'il y en a au plus un par dizaine et chercher lequel dans chaque dizaine.
- Quelle que soit la stratégie utilisée, répondre à la question après avoir compté combien il existe de tels nombres non compris le 12. Trouver qu'il y en a 7.

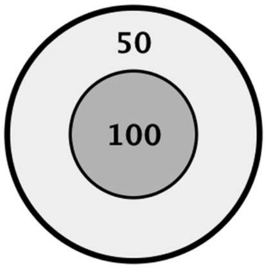
Attribution des points

4 Réponse correcte : 7 numéros, (ou 8 numéros si on a repris le 12) avec la liste correcte et complète de ces numéros 23 – 34 – 45 - 56 – 67 – 78 – 89.

Niveaux : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse

2. LA CIBLE (Cat. 3, 4)



Alexandre et ses quatre amis jouent à lancer des fléchettes sur une cible divisée en deux zones, une qui vaut 100 points et l'autre 50 points.

Chaque enfant lance 4 fléchettes et toutes atteignent la cible.

Ensuite chaque enfant calcule son propre score en calculant la somme des points qu'il a obtenus avec ses propres fléchettes, puis il compare son score avec celui de ses amis.

Ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu des scores tous différents.

Quels sont ces scores ?

Écrivez-les tous et montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les différentes sommes de quatre termes égaux à 50 ou 100.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a cinq enfants, que chacun a lancé quatre fléchettes qui ont atteint la cible sans la manquer.
- Tenir compte du fait que les points obtenus par les enfants sont tous différents.
- Calculer les cinq scores possibles en utilisant toutes les manières d'atteindre la cible : 400 (quatre fois 100), 350 (trois fois 100 et une fois 50), 300 (deux fois 100 et deux fois 50), 250 (une fois 100 et trois fois 50), 200 (quatre fois 50).

Attribution des points

4 Réponse correcte (400, 350, 300, 250, 200 points) avec une liste, un dessin, un schéma ou n'importe quel moyen qui montre clairement comment les scores ont été obtenus.

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena, à partir du problème *Une coupe de glaces avec des amis* 25.II.1

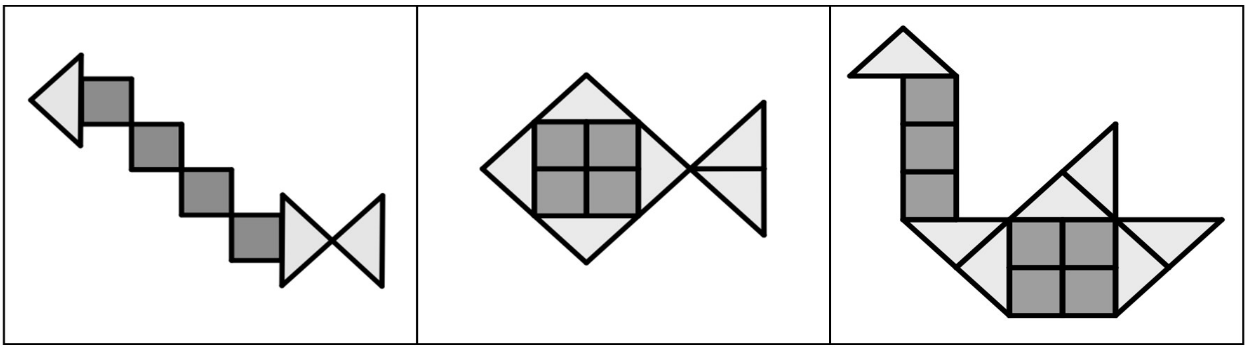
3. ÉTRANGES ANIMAUX (Cat. 3, 4, 5)

Pierre assemble des carrés et des triangles en bois comme ceux représentés ci-dessous.

Tous les carrés ont le même poids. Tous les triangles ont le même poids, mais il est différent du poids des carrés.

Pierre a réalisé trois animaux:

une chenille un poisson et un cygne



Pierre pèse ses animaux : il trouve que la chenille pèse 27 g et le poisson 42 g.

Quand il va peser le cygne, son petit frère fait tomber la balance qui se casse.

Pierre dit qu'il sait quand même comment trouver le poids du cygne sans utiliser la balance.

Trouvez, vous aussi, le poids du cygne.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Connaissant le poids de deux compositions obtenues avec un nombre différent de pièces de deux formes élémentaires, déterminer le poids d'une troisième composition obtenue avec des pièces similaires.

Analyse de la tâche

- Observer que pour toutes les compositions, il n'y a que deux types de pièces.
- Décrire chaque composition en fonction du nombre et du type de pièces utilisées :
  - Chenille : 4 carrés et 3 triangles
  - Poisson : 4 carrés et 6 triangles
  - Cygne : 7 carrés et 7 triangles
- Procéder par déduction en regardant les différences.
- Comparer le nombre de carrés et de triangles dans la chenille et dans le poisson.
- En déduire que le nombre de carrés est le même et que le poisson est composé de 3 triangles de plus. Comprendre que la différence de poids est due à la présence de trois triangles en plus.
- Déduire que trois triangles pèsent 15 g (42 – 27) ; par conséquent un triangle pèse 5 g (15 : 3).
- Connaissant le poids d'un triangle, trouver celui d'un carré. Par exemple en utilisant la « chenille ». Quatre carrés pèsent 12 g (27 – 15) ; par conséquent un carré pèse 3 g (12 : 4) .
- Calculer le poids du cygne constitué de sept carrés et sept triangles : 56 g (7 × 3 + 7 × 5).

Ou

- Donner des valeurs aléatoires au poids de chaque pièce, en adaptant les valeurs suivantes.
- Calculer les poids de la chenille et du poisson et s'arrêter lorsque les deux valeurs conviennent.
- Appliquer ces valeurs au calcul du poids du cygne.

Attribution des points

4 Réponse correcte (56 g) avec le détail des calculs et de la procédure suivie.

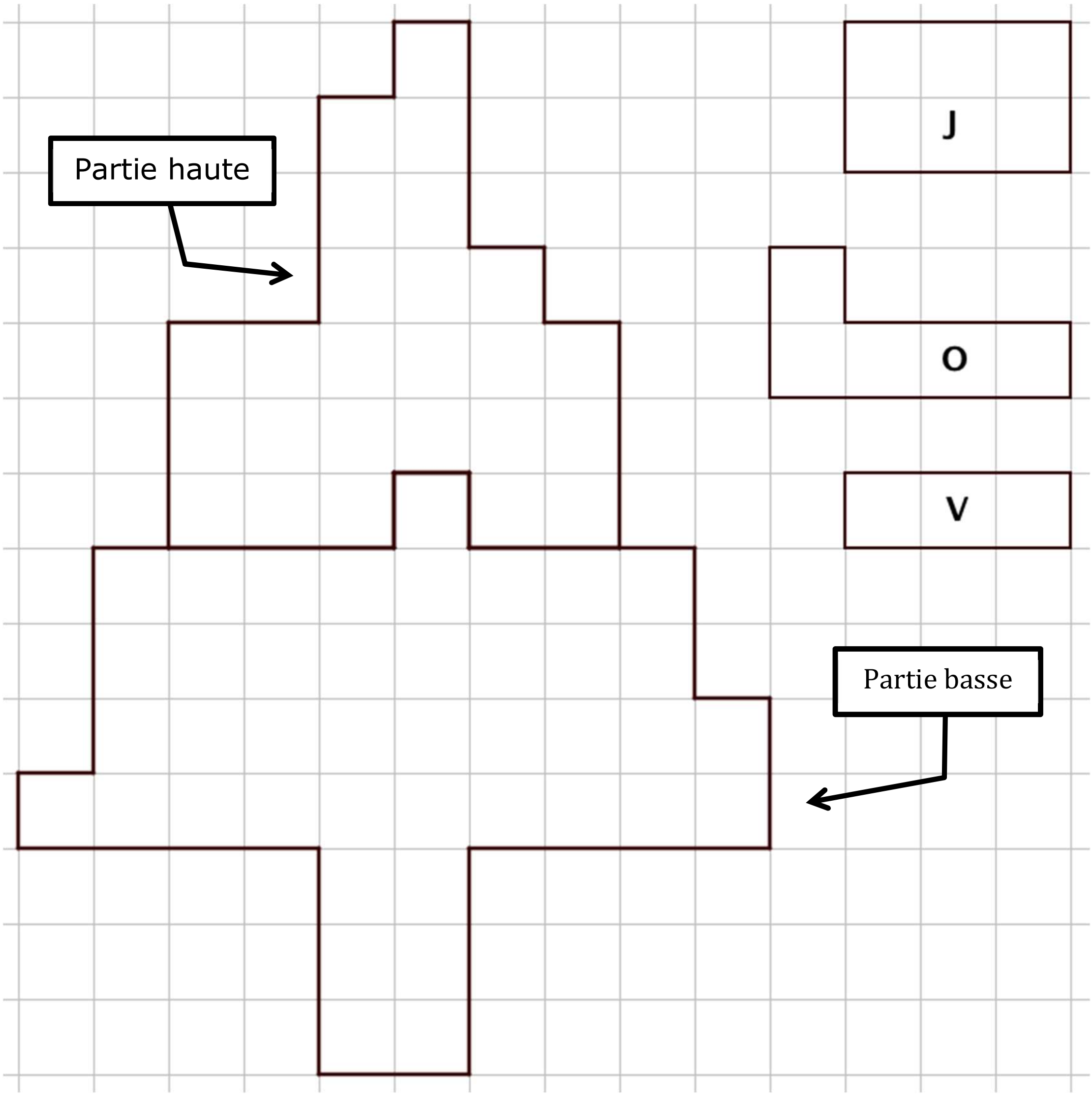
Niveaux : 3, 4**,** 5

Origine : Groupe Calcul et Proportionnalité (d'après carreaux magnétiques 24-I-13)

4. L'ARBRE D'ADÈLE (Cat. 3, 4, 5)

Voici un quadrillage avec un dessin d'arbre partagé en deux parties. Adèle possède des cartes en carton de trois formes différentes, colorées de la même couleur sur les deux faces.

Des modèles de ces cartes sont dessinés à droite de l'arbre, avec l'indication de leurs couleurs respectives : J (Jaune), O (Orange), V (Vert).



Adèle a réalisé une mosaïque en recouvrant la partie haute de l'arbre avec le plus petit nombre possible de cartes, en les assemblant avec précision, sans les superposer et sans laisser d'espaces vides. Puis, toujours en utilisant le plus petit nombre possible de cartes, elle a fait la même chose avec la partie basse de l'arbre.

Combien de cartes jaunes, combien de cartes orange et combien de cartes vertes Adèle a-t-elle utilisées en tout pour recouvrir les deux parties de l'arbre ?

Dessinez les cartes sur les deux parties de l'arbre et indiquez leurs couleurs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Pavage de chacune des deux parties d'une figure dessinée sur du papier quadrillé par trois formes données, de manière à minimiser le nombre de formes utilisées dans chaque partie.

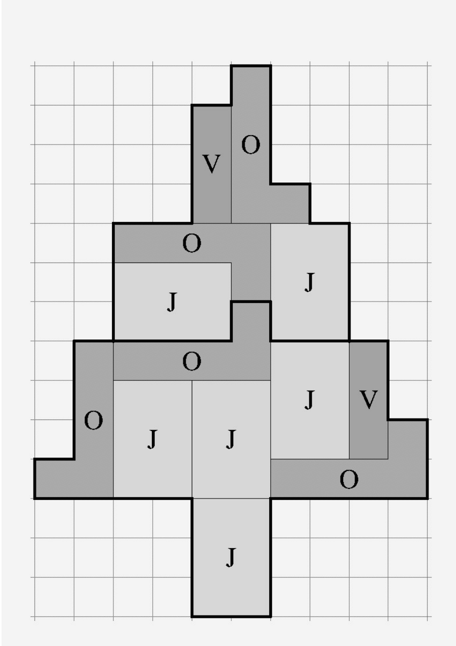
Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il est nécessaire de couvrir séparément les deux zones de l'arbre, en utilisant dans chacune d'elles le plus petit nombre possible de formes parmi celles des types indiqués ;

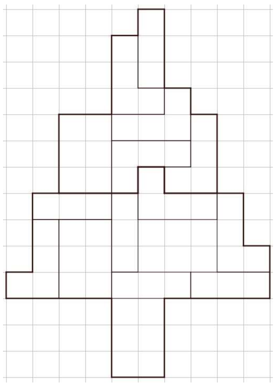
- Garder à l'esprit que les formes ne doivent pas dépasser les limites de la région à couvrir, qu’elles ne doivent pas se chevaucher ni laisser des espaces vides ;
- Choisir une région et essayer de la recouvrir, en dessinant ou en positionnant les formes découpées, en essayant d'utiliser le moins de cartes possible.

  Procéder par tâtonnement suivant l'idée intuitive (mais à vérifier) de positionner d’abord le plus grand nombre de cartes qui occupent le plus de carrés, à savoir le jaune J, qui est un rectangle de 6 carrés, puis la forme orange O qui est en forme de "L", recto ou verso, et occupe 5 carrés. Il sera nécessaire de vérifier à chaque fois que l'espace laissé après l'arrangement des cartes qui occupent le plus d'espace est couvert par des cartes de type V (rectangles de 3 cases), sinon essayer de réduire le nombre de cartes de type V ou O ;

  Une autre façon de procéder peut consister à essayer de positionner les cartes orange d'abord le long de la ligne de démarcation des deux zones qui, dans certaines parties, « suggère » la forme en L de ces carreaux ;
- Trouver que le nombre minimum de cartes nécessaires pour couvrir la région supérieure de l'arbre est 5 : deux cartes J, deux O et une V (on peut vérifier expérimentalement qu'en positionnant le nombre maximum de cartes J, soit 3, on ne peut pas couvrir la partie restante avec les formes des deux autres types) ;
- Procéder de façon analogue pour la région inférieure de l'arbre et constater que la couverture minimale est obtenue avec 4 cartes J, 3 cartes O et une carte V (il est possible de vérifier expérimentalement que, en positionnant le nombre maximum de cartes O, soit 5, il n'est pas possible de compléter le recouvrement en utilisant des cartes des deux autres types) ;
- Conclure qu’Adèle a utilisé pour réaliser cette mosaïque de l’arbre six cartes jaunes, cinq cartes orange et deux cartes vertes ;
- Sur la figure, l'arbre est représenté avec les zones supérieure et inférieure pavées avec l'une des dispositions minimales possibles, respectivement de 5 cartes (2 J, 2 O, 1 V) et de 8 cartes (4 J, 3 O, 1 V).



Une erreur possible est de considérer la forme O comme un L de 4 cases au lieu de 5, obtenant ainsi un nombre de cartes supérieur à celui demandé et un pavage comme celui de l'image suivante :



Attribution des points

4 Réponse correcte (6 cartes jaunes, 5 cartes orange, 2 cartes vertes) avec le dessin précis des formes ou un collage, avec indication de la couleur des cartes.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

5. POKÉMON (Cat. 3, 4, 5)

André et Jacques ont commencé depuis peu une collection des images de Pokémon.

Hier André avait 5 images de moins que Jacques.

Aujourd'hui, Jacques a encore le même nombre d'images qu'hier. Par contre André en a reçu 21 et maintenant il en a le double du nombre d'images de Jacques.

Combien d'images André a-t-il aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer deux nombres dont on connaît la différence (5), sachant qu'en ajoutant un nombre (21), au plus petit on obtient le double du plus grand, puis déterminer ce double.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'hier, André avait moins d'images que Jacques, qu'aujourd'hui Jacques en a toujours le même nombre, pendant qu'André qui en a 21 de plus, en a le double du nombre d'images de Jacques.
- Faire un premier essai avec un nombre au hasard. Faire les calculs et vérifier si ce nombre est conforme aux données. Faire d'autres essais en s'appuyant sur les précédents jusqu'à trouver le nombre qui convient.

Ou

Procéder par étude systématique des nombres à partir de 1.

La procédure peut être améliorée en remarquant que les nombres pairs ne conviennent pas, parce qu'additionnés à un nombre impair (21), cela donnerait un nombre impair qui n'est pas divisible par 2.

Ou (procédure experte, peu probable au niveau considéré).

- Comprendre que parmi les 21 images reçues par André aujourd'hui, 5 servent à avoir le même nombre d'images que Jacques, et les 16 autres pour doubler ce nombre.
- Conclure qu'aujourd'hui Jacques a 16 images et André en a 32.

Attribution des points

4 Réponse correcte (André a 32 images) avec une description claire de la procédure suivie (par essais avec vérification des conditions, ou par une autre procédure avec détails des calculs).

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. LE COFFRE DE MATT ET MATIC (Cat. 4, 5, 6, 7)

Dans un coin de leur grenier, Matt et Matic trouvent un message à côté d'un coffre fermé par un cadenas identique à celui-ci :

Voici ce qu'ils lisent :

Ce coffre est protégé par un cadenas à code qui bloque le système d'ouverture.

Pour l'ouvrir, vous devez remplacer les lettres A, B, C, D, E par des nombres d'un seul chiffre, tous différents, vérifiant les égalités suivantes :

$A = C - 4$
$B = A + 2$
$D = C \div 4$
$E = A + C - 3$

À vous d'ouvrir le coffre !

Maître Géo.

Quel est le code secret pour ouvrir le cadenas ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Résoudre en nombres entiers de 0 à 9 le système d'équations $A = C – 4$; $B = A + 2$; $D = C/4$ et $E = A + C – 3$, dont la solution est constituée de 5 nombres différents.

Analyse de la tâche

- Repérer que C est un multiple de 4 ($D = C \div 4$), C vaut 0, 4 ou 8.
- Écarter la valeur 0 pour C à cause de la première égalité ($A = C – 4$) qui impose $C > 3$.
- Tester les contraintes pour :
  - $C = 4$ alors A vaut 0 ($C – 4$), $B = 2$, $D = 1$ et $E = 1$, ce qui donne le code 02411 inacceptable car il ne respecte pas la contrainte « nombres tous différents ».
  - $C = 8$ alors D vaut 2, A vaut 4, B vaut 6, E vaut 9 ($8 = E – 4 + 3$) ce qui donne le code 46829 qui respecte toutes les conditions.

Ou

- Déduire de la première égalité ($A = C – 4$) que C ne peut pas prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et que A ne peut pas être supérieur ou égal à 6 ;
- Faire varier les valeurs de C (4, 5, 6, 7, 8, 9) ou les valeurs de A (0, 1, 2, 3, 4, 5) dans toutes les équations et éliminer au fur et à mesure les valeurs ne respectant pas toutes les contraintes.

Ou

- Construire une solution systématique en partant de A ou de D (et poursuivre tant que les valeurs obtenues sont des nombres de 0 à 9 différents, sans oublier de calculer E à la fin).

Attribution des points

4 Réponse correcte écrite (46829), avec des explications claires qui montrent que l'on a tenu compte de toutes les contraintes

Niveaux : 4, 5, 6, 7

Origine : Lyon

7. LES TOURS (Cat. 5, 6, 7)

Stéphanie a une boîte de cubes de mêmes dimensions. La boîte contient moins de 50 cubes.

Elle décide de construire des tours en empilant ses cubes les uns sur les autres à partir d'un seul cube de base.

Quand elle construit 3 tours de hauteurs égales, il reste 2 cubes.

Quand elle construit 4 tours de hauteurs égales, il reste 1 cube.

Quand elle construit 5 tours de hauteurs égales, il reste 4 cubes.

Combien de cubes y a-t-il dans la boîte de Stéphanie ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre inférieur à 50 qui dépasse de 2 un multiple de 3, de 1 un multiple de 4, et de 4 un multiple de 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre recherché ne peut pas être un multiple de 3, de 4 ou de 5.
- Comprendre qu'à chaque fois la hauteur des tours qu'elle a construites est la même, que le nombre des cubes de la boîte divisé par 3 donne le reste 2 dans le premier cas, divisé par 4 donne le reste 1 dans le second cas, et divisé par 5 donne le reste 4 dans le troisième cas. Un tel nombre devra donc figurer dans chacune des listes suivantes :
  - multiples de 3 "plus 2": 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 ....
  - multiples de 4 "plus 1": 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, …
  - multiples de 5 "plus 4": 9, 14, 19, 24, 29, 34, …

  et constater que le seul nombre qui figure dans les trois listes est 29.

Ou

- Tenir compte du nombre de cubes qui doivent rester dans les trois cas.
- Commencer, par exemple, par considérer la construction de cinq tours : pour obtenir un reste 4, il est nécessaire d'avoir un nombre de cubes dont le chiffre des unités est 4 ou 9 (0 + 4 ou 5 + 4).
- Observer que pour la construction de quatre tours, il n'y a aucune possibilité que le nombre de cubes utilisés ait le chiffre 4 aux unités et qu'il ne peut donc y avoir que le chiffre 9 (9, 19, 29, 39, 49). Découvrir alors que seul 9 et 29 répondent à la condition.
- Observer finalement que pour la construction de trois tours, pour les nombres en-dessous de 50, le seul qui réponde à la condition est 29.

Attribution des points

4 Réponse correcte (29 cubes) avec le détail de la procédure suivie (calculs ou description verbale ou les trois listes de nombres possibles).

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Rozzano

8. BOÎTES DE CRAIES I (Cat. 5, 6, 7, 8)

Dans l'école de Transalpie, il y a moins de 20 classes.

Le directeur de l'école a acheté des boîtes de craies.

Il donne à chaque classe 10 boîtes entières de craies, mais il en reste encore.

Le directeur s'aperçoit qu'il pourrait donner encore la moitié d'une boîte à chaque classe, et qu'ainsi il ne resterait aucune craie.

Combien de boîtes de craies le directeur a-t-il pu acheter pour l'école de Transalpie ?

Donnez toutes les réponses possibles et expliquez pourquoi vous êtes sûrs de les avoir toutes.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Chercher tous les nombres inférieurs à 200 dont le nombre des dizaines est le double de celui qui est donné par le chiffre des unités.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : le directeur a d'abord attribué 10 boîtes à chaque classe. Comprendre que le nombre de boîtes restantes est égal à la moitié du nombre de classes.
- En déduire que le nombre de classes est un nombre pair. Puisqu'il est inférieur à 20, le nombre de boîtes restantes est un entier inférieur à 10.
- Procéder par essais organisés en faisant l'hypothèse d'un certain nombre de classes. Noter que chaque classe aura dans la première distribution 10 boîtes de craies. Le nombre de boîtes achetées est donc égal à 10 fois le nombre de classes plus la moitié de ce nombre. En donnant successivement au nombre de classes les valeurs : 2, 4, ... , 16, 18, obtenir tous les nombres possibles de boîtes que le directeur a achetées. On obtient ainsi les nombres possibles : 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189.

Ou bien,

- Se rendre compte que le nombre de boîtes achetées est égal à 10 fois le nombre de classes plus la moitié de ce nombre. Il est de la forme $n = 10{,}5\ x$. On obtient donc les valeurs possibles pour n : 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189.

Attribution des points

4 Réponse correcte (21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189) qui montre clairement le procédé suivi et met en évidence l'exhaustivité (ou l'impossibilité d'autres solutions).

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Siena

9. CITRONNADE FRAÎCHE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Pour son anniversaire, Lucia veut servir une citronnade avec des fruits pressés. Sa tante Jeanne en prépare une avec 1200 ml de jus de citron et 10 cuillerées de sucre, sa maman en prépare une autre avec 700 ml de jus de citron et 12 cuillerées de sucre.

Lucia verse les deux citronnades dans un seul récipient, elle goûte la boisson, mais elle n'est pas satisfaite.

Elle retrouve une vieille recette dans laquelle il est noté qu'il faut utiliser 4 cuillerées de sucre pour 200 ml de jus de citron.

Lucia doit-elle ajouter du sucre ou du jus de citron au mélange (un seul des deux) pour respecter la vieille recette ? En quelle quantité ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans le contexte d'une recette à deux ingrédients, étant données deux quantités déjà préparées à mélanger, trouver de combien il faut augmenter la quantité d'un des ingrédients pour respecter la proportionnalité des ingrédients donnés dans la recette d'origine.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'une fois mélangées les deux préparations dans le même récipient, il faut comparer ce mélange à la vieille recette pour déterminer le motif de l'insatisfaction de Lucia.
- Le mélange est obtenu en additionnant les quantités de chaque ingrédient des deux préparations : 1900 ml (1200 + 700) de jus de citron, pour 22 (10 + 12), cuillerées de sucre. Il s'agit ensuite d'identifier ces deux grandeurs, nombre de cuillerées de sucre et volume de jus de citron, et de faire correspondre les quatre mesures, par exemple sur deux lignes, (ou sur deux colonnes) :

nombre de cuillerées de sucre	4	22
volume de jus de citron en ml	200	1900

- Pour répondre à la question sur le type d'opération à faire entre ces quatre termes, il faut faire appel aux connaissances acquises sur les problèmes de recettes, ou à l'intuition de la proportionnalité, ou encore au "bon sens" pour se rendre compte que ces opérations ne sont pas des additions ou des soustractions, mais sont des multiplications ou des divisions et que la recette n'est pas limitée au couple (4 , 200), mais s'étend à toutes les autres quantités, comme par exemple (2 ; 100), (1 ; 50).
- Il y a alors une grande variété de manières de compléter le tableau pour se rapprocher du couple (22 , 1900) : par le passage à l'unité, par les propriétés du produit ou de la somme, par approximations successives, etc. Voici quelques exemples, entre autres, de couples de recettes qui peuvent approcher le couple (22 , 1900) du mélange :

nb. de cuillérées de sucre	4	2	1	10	20	**38**	**22**	22
ml de jus de citron	200	100	50	500	1000	**1900**	**1100**	1900

- La comparaison entre le couple (22 , 1100) de la vieille recette et le couple (22 ; 1900) du mélange, montre qu'il faudrait enlever 800 ml de jus de citron du mélange, chose qu'il n'est pas possible de faire, évidemment. La comparaison entre le couple (38 ; 1900) selon la recette et le couple (22 ; 1900) du mélange montre par contre qu'il faudra ajouter 16 cuillérées de sucre pour respecter la recette.

Attribution des points

4 Réponse correcte (sucre, 16 cuillerées) avec une description claire de la procédure, avec le détail des calculs ou un tableau.

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Rozzano

10. LES CUBES DE NICOLAS (Cat. 6, 7, 8)

Nicolas a beaucoup de cubes de bois qu'il veut colorer de manière que :

- les faces opposées soient de la même couleur,
- les faces voisines, c'est-à-dire celles qui ont une arête commune, n'aient pas la même couleur.

Il dispose de cinq couleurs : orange, bleu, jaune, rouge et vert.

Combien de cubes différents Nicolas peut-il réaliser ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer toutes les manières possibles de colorer des cubes avec cinq couleurs différentes, de manière que les faces opposées aient la même couleur et que les faces voisines aient des couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre que trois couleurs sont nécessaires et suffisantes pour colorer un cube, étant donné qu'un cube a seulement trois paires de faces opposées et que des faces voisines doivent avoir des couleurs différentes. Comprendre que deux cubes colorés correctement sont différents s'ils diffèrent par au moins une couleur.
- Comprendre que c'est seulement le choix des trois couleurs qui distingue les cubes entre eux, l'ordre du choix n'intervient pas. Déterminer ensuite toutes les manières possibles avec lesquelles on peut choisir un groupe de trois couleurs différentes parmi cinq couleurs.
- Commencer par choisir les couleurs trois à trois entre les cinq données : O, B, J, R, V, et déterminer toutes les combinaisons possibles en procédant de manière plus ou moins systématique :

O, B, J	O, J, R	B, J, R	J, R, V
O, B, R	O, J, V	B, J, V	
O, B, V	O, R, V	B, R, V	

- Conclure qu'il y a 10 combinaisons possibles donc 10 cubes différents possibles.

Ou bien,

- construire des cubes en carton, ou dessiner des patrons, les colorer en respectant les conditions imposées et déterminer ainsi 10 cubes différents. Cependant, ces procédures ne conduisent pas à la détermination de toutes les possibilités si on ne procède pas de manière organisée.

Ou bien (procédure experte),

- utiliser un raisonnement de type combinatoire : la première couleur peut être choisie de cinq manières différentes, la seconde de quatre, la troisième de trois, on obtient donc $60 = 5 \times 4 \times 3$ triplets ordonnés de couleurs différentes. Comme l'ordre du choix n'intervient pas, remarquer que, six par six, les triplets donnent le même cube, donc diviser 60 par 6, pour obtenir 10 cubes différents**.**

Attribution des points

4 Réponse correcte, 10 cubes, avec une description claire et complète de la procédure (condition nécessaire et suffisante des trois couleurs, liste organisée de solutions ou raisonnement qui montre qu'il n'y en a pas d'autres ou représentation codée des couleurs des faces des cubes).

Niveaux : 6, 7, 8

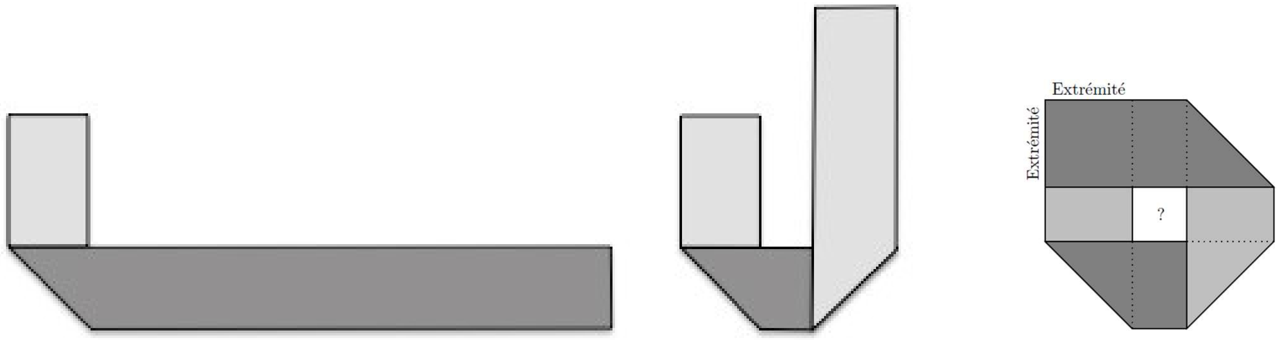
Origine : Parma

11. LA BANDE DE LILI (Cat. 6, 7, 8)

Lili découpe une bande de papier rectangulaire de 30 cm de long et de 4 cm de large, dont une face est gris clair et l'autre gris foncé.

Elle cherche à la plier trois fois de suite pour que les deux extrémités se superposent précisément et que la bande pliée laisse un carré vide en son centre.

Après avoir bien réfléchi et calculé, Lili obtient la construction qu'elle désire en trois pliages, comme le montrent les figures ci-dessous :



après le premier pli après le 2e pli après le 3e pli

Combien mesure le côté du petit carré central entouré par la bande de Lili ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

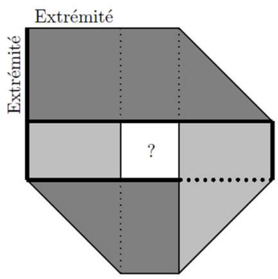
ANALYSE A PRIORI

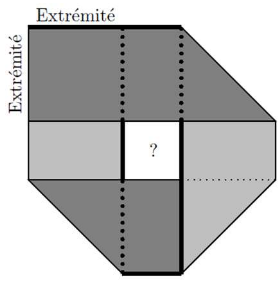
Tâche mathématique

Calculer la mesure d'un carré formé après pliages, connaissant les dimensions de la figure initiale.

Analyse de la tâche

- Reconstruire visuellement les trois étapes de la construction pour identifier les propriétés des pliages : angles des plis pour obtenir la perpendicularité des parties de la bande, face gris foncé et face gris clair...
- Essayer éventuellement de découper une bande et de la plier pour se rendre compte que pour obtenir un carré au centre avec des extrémités exactement superposées, on ne peut pas aboutir sans savoir en quel point effectuer le premier pli, et à plus forte raison les suivants.
- Reconnaître dans la troisième illustration un carré de 4 cm de côté, quatre rectangles de 4 cm de longueur et avec largeur le côté du petit carré, trois triangles rectangles isocèles, moitié du carré 4 × 4 situé en haut à gauche.
- Se rendre compte qu'il est possible de décomposer la longueur de la bande de 30 cm en 5 morceaux de 4 cm et en 4 morceaux de la longueur recherchée.





- Trouver ainsi que 4 fois la longueur cherchée correspond à 10 cm (30 – (5x4)) et en déduire que le côté du carré mesure 2,5 cm (10 : 4).

Ou

- Construire la bande en vraie grandeur (ou à l'échelle), réaliser le pliage (ce qui n'est pas simple lorsqu'on ne connaît pas la longueur qui détermine le premier pli) par essais successifs et mesurer ensuite les longueurs des côtés de la figure centrale qui est approximativement un carré, et obtenir une valeur imprécise.

Ou

- Mesurer sur la figure la longueur du côté du carré central et celle de l'extrémité de la bande. Calculer le rapport entre ces deux longueurs et en déduire la mesure de la longueur du côté du carré central (démarche peu probable).

Erreurs possibles :
Réponse 3,5 cm due à l'oubli de comptabiliser la longueur correspondant aux morceaux superposés (erreur de dénombrement).
Ou prendre le périmètre de la figure comme longueur de la bande

Attribution des points

4 Réponse correcte (2,5 cm) avec des explications claires et complètes (détails de la démarche par écrit, calcul ou dessins)

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Belgique

12. LE POTAGER I (Cat. 6, 7, 8)

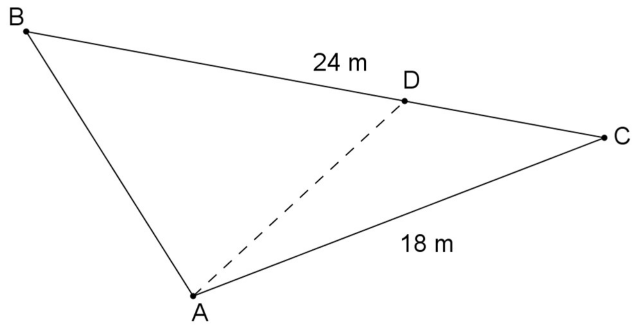
Marc a hérité d'une petite parcelle de terrain de forme triangulaire, avec un côté de 24 mètres et un autre de 18 mètres. Il veut réaliser un potager.

Marc veut planter des pommes de terre et des haricots verts en divisant son terrain en deux parties. L'aire de la partie réservée aux pommes de terre doit être le double de l'aire de la partie réservée aux haricots verts.

Pour séparer ses deux cultures, Marc plante un pieu en A (voir la figure) et un autre pieu en un point D sur le côté [BC]. Il les joint par une ficelle.

Voici sa première tentative, mais il n'est pas satisfait : l'aire de l'un des deux triangles n'est pas le double de celle de l'autre.

potager de Marc



À quelle distance de C Marc pourrait-il planter le pieu D ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Diviser un triangle en deux triangles dont l'un est d'aire double de celle de l'autre.

Analyse de la tâche

– Se rendre compte qu'il n'est pas possible de calculer l'aire du potager, car l'énoncé ne donne que les mesures de deux côtés du triangle ABC.
– Observer le triangle ABC du potager de Marc. L'aire du triangle BAD doit être le double (solution 1) ou la moitié (solution 2) de celle du triangle DAC.
– Constater que les triangles ADB et ADC, ont la même hauteur issue de A. Donc, pour qu'une aire soit le double de l'autre, ils doivent avoir leurs bases dans le même rapport 2, donc BD = 2 DC ou DC= 1/2 BD.
– En déduire que le pieu D doit être planté à 8 m ou à 16 m de C.

Ou :

- Tirer du dessin la mesure de la hauteur nécessaire pour calculer les aires et les bases des triangles ADB et ADC en obtenant ainsi des valeurs approchées.

Attribution des points

4 Réponse complète (D à 8 m ou à 16 m de C), avec des explications claires et complètes (constater que les deux triangles ont la même hauteur, avec une représentation graphique qui montre la hauteur commune).

Niveaux : 6, 7, 8

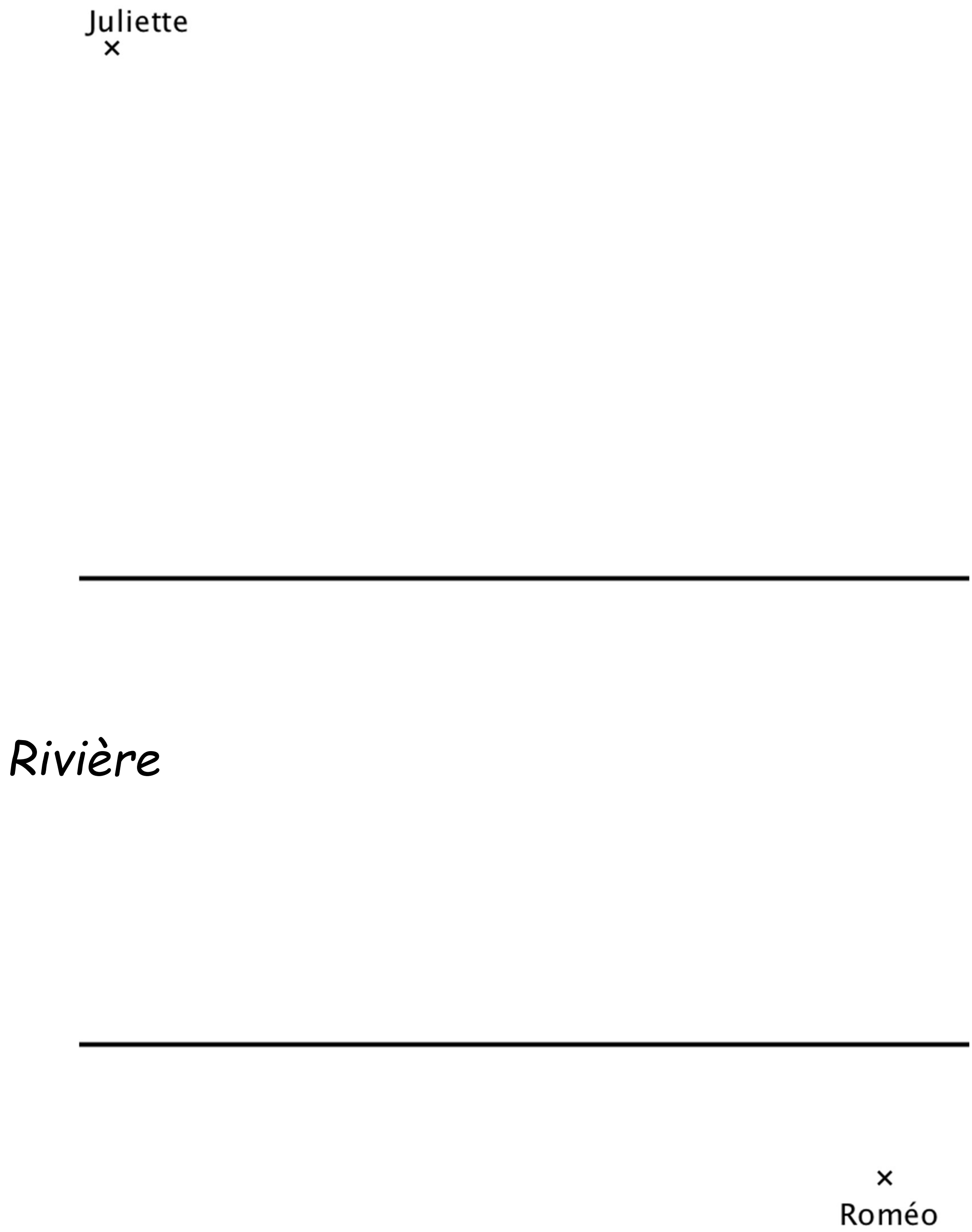
Origine : Parma

13. LE PONT DES AMOUREUX (Cat. 8, 9, 10)

Les maisons de Roméo et de Juliette sont situées de part et d'autre d'une rivière dont les berges sont, à cet endroit, droites et parallèles. La commune de Vérone aimerait construire un pont et une route pour relier les maisons de Roméo et de Juliette. Le pont doit être le plus court possible.

Dessinez sur le plan ci-dessous le pont et la route pour que le trajet permettant de relier les deux maisons soit lui aussi le plus court possible.

Indiquez les étapes de votre construction et montrez que le trajet dessiné est le plus court possible.



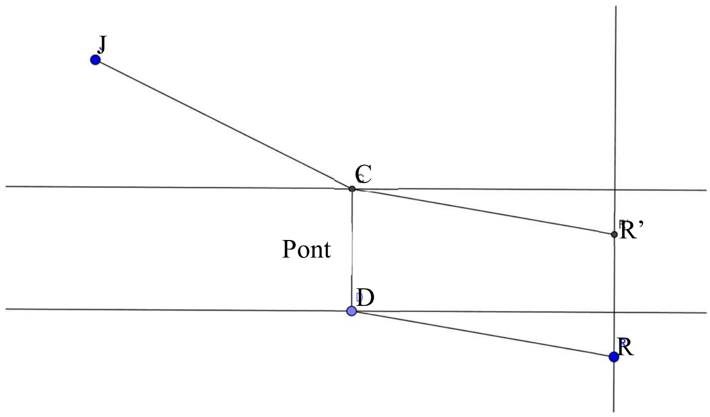
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

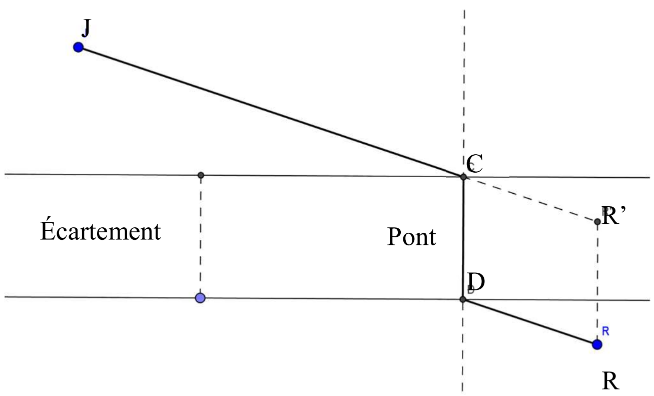
Déterminer une ligne polygonale dont la longueur est la plus courte possible, incluant un segment le plus court possible entre deux parallèles, dans le contexte d'une rivière à traverser.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le pont, pour être le plus court possible, doit être perpendiculaire aux berges de la rivière (distance entre deux droites parallèles).
- Essayer d'abord différentes positions du pont, en reliant les extrémités du pont aux maisons, et en comparant les longueurs des trajets obtenus.
- Se rendre compte que les écarts entre les longueurs obtenues lors des différents essais sont petits et que des mesures ne seront pas suffisantes pour répondre avec précision à la question posée.
- Réaliser que la longueur du pont est constante puisque les berges sont parallèles et qu'elle n'a pas d'influence sur la longueur d'un trajet.
- Donc chercher le chemin le plus court revient à chercher la position du pont [CD] tel que la distance JC+DR soit minimale. Le plus important est de bien placer le point C pour tracer le plus court chemin allant d'une maison à l'autre.
- Pour cela, procéder par exemple de la manière suivante : placer un point R' tel que CDRR' soit un parallélogramme :
    - Prendre la distance entre les berges : tracer une perpendiculaire aux berges et prendre la distance entre les points d'intersection de cette droite avec les droites représentant les berges
    - À partir du point R, tracer un segment RR' perpendiculaire aux berges de longueur égale à l'écartement entre les berges
- Comprendre que rechercher la distance JC+DR minimale revient à rechercher la distance JC+CR' minimale, car CR' est égal DR puisque CDRR' est un parallélogramme.
- Prendre conscience que cette distance est minimale si le point C est aligné avec J et R' puisque J et R' sont fixés par l'énoncé ou les constructions qui en découlent.
- Tracer la droite (JR') et placer le point C, point d'intersection de (JR') avec la berge la plus proche de J



- Tracer le chemin suivant :

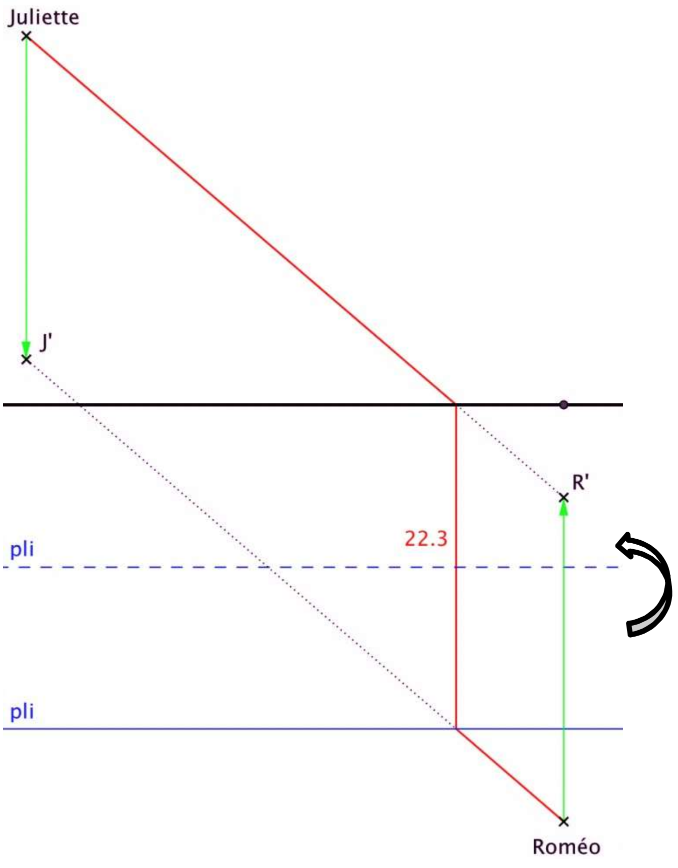


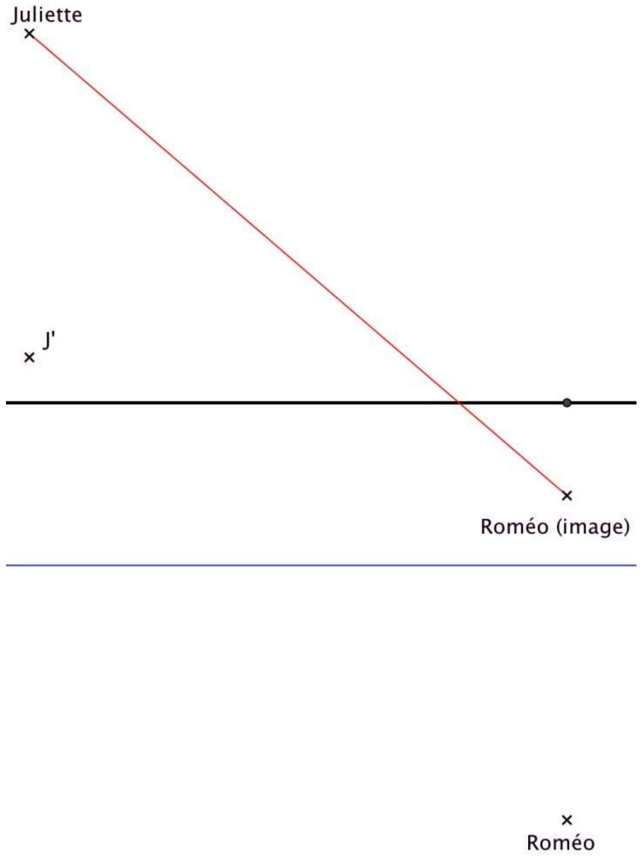
Ou bien,

- Effectuer le même raisonnement en construisant le point J' tel que JCDJ' soit un parallélogramme ; puis, en traçant J'R, on obtient le point D, intersection de (J'R) avec la berge la plus proche de R.

Ou

- Effectuer une translation du point J (ou du point R) correspondant à la distance entre les berges, par construction ou par double pliage (voir schéma ci-dessous), afin de faire abstraction de la rivière et de ne prendre en compte que la partie « route » du trajet.
- Tracer le segment RJ' (ou JR') de manière à trouver à l'intersection l'une des deux extrémités du pont. Tracer enfin le pont demandé.





Attribution des points

4 Solution correcte avec construction d'un parallélogramme ou présence d'une translation (par construction ou par pliage) permettant de faire abstraction de la rivière, avec démarche détaillée, faisant apparaître la notion de distance minimale entre deux points et entre deux droites et montrant que le chemin construit est le plus court.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Suisse romande

14. LES DÉS (Cat 8, 9, 10)

Charles a quatre dés identiques et particuliers. Contrairement aux dés habituels, la face à 1 point n'est pas opposée à celle à 6 points et la face à 2 points n'est pas opposée à celle à 5 points. Par contre la face à 3 points est bien opposée à la face à 4 points.

Charles dispose les dés comme sur la photo ci-contre, posés sur une étagère et contre un mur.

Combien y a-t-il en tout de points noirs que Charles ne peut pas voir, quel que soit le point de vue qu'il choisisse pour observer les dés ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver ce nombre.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir d'une photo qui montre quatre dés particuliers empilés contre un mur, trouver le nombre de points noirs qui ne peuvent pas être vus par un observateur qui peut se déplacer.

Analyse de la tâche

- Comprendre que ces dés particuliers ont aussi 6 faces, avec de 1 à 6 points, mais que ces points ne sont pas disposés comme les dés habituels. Il faut donc imaginer ou dessiner ces dés pour comprendre la disposition des points par l'observation de la photo et par déduction trouver les faces avec les points cachés.
- Comprendre qu'il y a 3 faces non visibles pour le premier dé en bas à gauche, 5 pour le second dé en bas au centre, 3 pour le troisième dé en bas à droite et 2 pour le quatrième dé en haut.
- Pour compter les points noirs cachés on peut procéder de plusieurs manières.

a) Par exemple en trois temps :

- 1) Remarquer d'abord que **le dé du centre** cache tous ses points sauf le 2, il porte donc 1 + 3 + 4 + 5 + 6 = **19** points noirs invisibles.
- Puis on peut situer toutes les faces à 3 points et à 4 points sur les trois autres dés : face à 3 points sur le sol pour le dé de gauche, face à 4 points contre le mur pour le dé du dessus et face à 4 points contre le dé du centre pour le dé de droite, toutes invisibles ce qui fait 3 + 4 + 4 = **11** points noirs invisibles.
- Puis comprendre que **le dé de droite** cache les faces à 2 et 5 points contre le sol et le mur, soit **7** points noirs invisibles.
- 2) Situer ensuite la face à 1 point du dé de gauche. Remarquer pour cela que les dés de gauche et de droite présentent frontalement leurs faces à 6 points. Pour le dé de gauche, la face à 1 point ne peut être contre le mur, car la somme des points de ces faces opposées ne doit pas faire 7. Sa face à 1 point est donc visible à gauche ou invisible contre le dé du centre. Pour la situer, imaginer que l'on a planté deux vis au travers des dés de gauche et de droite, leurs têtes placées sur les faces à 6 points. En donnant un tour de vis au dé de droite, on voit la face à 1 point passer avant la face à 4 points. Le dé de gauche étant identique, pour obtenir la même chose, il faut que la face à 1 point soit collée contre le dé du centre et ne peut donc être la face visible que l'on ne voit pas sur la photo.
- 3) Il reste à trouver quelle est la face opposée à celle à 6 points. Imaginer à nouveau que l'on a planté deux vis au travers des dés du dessus et de droite, leurs têtes placées sur les faces à 3 points. En donnant un tour de vis au dé de droite, on voit la face à 1 point passer avant la face à 6 points. Pour obtenir la même chose avec le dé du dessus, il faut que la face à 1 point soit visible à gauche et la face à 6 points collée sur le dé du centre. En déduire que les faces opposées sont 6-2 et 1-5.
- **Le dé de gauche** cache donc les faces à 1 point et 2 points : **3** points noirs invisibles.
- **Le dé du dessus** ne cache pas sa face à 1 point, invisible sur la photo. Il cache donc sa face à **6** points collée contre le dé du centre.
- Conclure que le nombre des points qu'on ne peut pas voir est 46 (19 + 11 + 7 + 3 + 6) dans la réalité.

b) Ou bien par différence :

- Comprendre qu'il suffit de déduire le nombre de points visibles du nombre de points contenus par l'ensemble des dés
- Calculer le nombre de points contenus par les 4 dés : 4 x (1+2+3+4+5+6) = 84
- Orienter implicitement ou explicitement l'espace en définissant par exemple que les faces avant sont les faces visibles parallèles au mur.
- Comprendre que seulement deux faces visibles en réalité ne sont pas visibles sur la photo : les faces de droite des dés de gauche et de dessus.
- Comprendre que les dés habituels ne seront pas d'une grande utilité et que la situation nécessite une grande part de manipulation mentale.

- Pour le dé du dessus :
    - Manipuler mentalement le dé de droite pour placer la face à 3 points dans le même plan et dans la même direction que la face 3 du dé du dessus ; sa face 1 est soit la face de gauche soit la face de droite.
    - Déduire avec le dé du dessus que la face 5 est opposée à la face 1.
- Pour le dé de gauche :
    - Manipuler mentalement le dé de droite pour placer la face 6 dans le même plan et la même direction que celle du dé de gauche et tel que la face 4 soit sur le dessus comme le dé de gauche : comme la face 3 est opposée à la face 4 la face 3 doit passer dessous et la face 1 doit passer en face de droite.
    - Déduire que la face gauche du dé de gauche est la face 5
- Calculer la somme **(38)** des points visibles en réalité : (5 + 4 + 6) à gauche, 2 en bas au centre (6 + 1 + 3), à droite, (1 + 2 + 3 +5) en haut.
- Calculer la somme des points non visibles en réalité : 84 – 38 = 46.

c) Ou bien, pour positionner le 2 et le 5 correctement, construire un développement du cube et observer l'orientation des points qui forment la face 6 (vertical/horizontal) et des points qui forment la face 3 (diagonale de gauche à droite ou de droite à gauche). En manipulant le dé obtenu observer que la face opposée au 1 est la face 5 et la face opposée au 6 est la face 2.

- Les faces non visibles du dé de gauche sont par conséquent, la face 3 opposée au 4, la face 1 et la face 2, pour un total de 6 points non visibles.
- Pour le dé du haut, on sait que la face 4 est opposée à la face 3, et la face 6 n'est pas visible, 10 points ne sont donc pas visibles en tout.
- Pour les deux autres dés, on raisonne par soustraction : le total des points d'un dé est 21. Pour le dé central en bas, on a 21–2 = 19. Pour le dé de droite, 21–10 = 11.
- Le total des points noirs non visibles est donc : 6 + 10 + 19 + 11 = 46.

Attribution des points

4 Réponse correcte (46) avec des explications claires et complètes.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Suisse Romande d'après 23.II.09