Titre	Catégorie	Origine	Domaine mathématique
1. Jeu de massacre	3 4	RV	Combinaisons de cinq nombres naturels donnés dont la somme est 32
2. Jeux d'araignées (I)	3 4	UD	Géométrie, intersections de segments Dénombrement systématique
3. Les jetons de Valérie	3 4 5	SI	Appariements des nombres de 1 à 6 sur trois jetons
4. Modèles réduits	3 4 5	RZ	Opérations dans N (système de relations)
5. Carrés sur des clous	3 4 5	LU	Trouver tous les carrés constructibles sur un réseau
6. Monsieur Charles	4 5	SI	Combinaisons
7. Jeux d'araignées (II)	5 6	UD	Géométrie, intersections de segments Dénombrement systématique
8. Les horloges	5 6	FC	Horloges qui retardent ou avancent
9. Un champ d'aire double	5 6 7	GTGP	Transformer un polygone concave en un rectangle d'aire double avec 5 points du pourtour fixes
10. Tout à moins de 3 euros	6 7 8	GTCP	Numération
11. Les bracelets décorés	6 7 8	GTAL	Opérations arithmétiques avec des entiers nature Système d'équations
12. Comparaison de figures	6 7 8	GTGP	Confronter les aires de figures sur quadrillage Mesure
13. Qui a cassé la vitre ?	6 7 8 9 10	PR	Logique Mensonges et vérités
14. Le grillon sauteur	7 8 9 10	GTNU	Déterminer le terme initial d'une suite de 7 termes rationnels. Progression, pré algèbre
15. Roues dentées	7 8 9 10	LU	Déterminer le ppcm de 6, 10 et 14 dans un contexte de roues dentées
16. Dodécaèdre	8 9 10	SR	Géométrie dans l'espace disposition des faces d'un dodécaèdre
17. Voiles triangulaires	9 10	PR	Construire les deux triangles équivalents mais non isométriques avec deux côtés de mesures 4 et 2
18. Nombres particuliers	9 10	SI	Numération, arithmétique Nombres décimaux
19. Les pots de chocolat	9 10	GTFO	Comparer le niveau de liquide dans deux vases cylindriques connaissant la vitesse de remplissage de chacun

1. JEU DE MASSACRE (Cat. 3, 4)

Dans ce jeu d'adresse, il s'agit de faire tomber l'une ou l'autre des quatre boîtes qui sont posées sur une planche en lançant une balle.

Quand une boîte tombe, on obtient le nombre de points qui est écrit sur la boîte et on remet la boîte sur la planche. Si aucune boîte ne tombe, on n'obtient pas de points.

On gagne un bel ours en peluche si on arrive à obtenir exactement 32 points, pas plus, pas moins, après avoir lancé 5 fois la balle.

Quelles sont les boîtes qu'il faut faire tomber pour gagner l'ours en lançant cinq fois la balle ?

Indiquez toutes les possibilités : quelles boîtes doivent tomber et combien de fois chacune.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les additions de cinq termes formées de nombres choisis parmi 0, 1, 5, 10, 20 et dont la somme est 32.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'à chaque lancer, on peut obtenir 5, 10, 1, 20 ou encore 0 point.
- Comprendre que la balle est lancée cinq fois et que le nombre de points obtenus est la somme de cinq termes pris parmi les nombres précédents, un même nombre pouvant être répété plusieurs fois.

Stratégies possibles :

- Simuler le jeu en choisissant la boîte abattue ou l'absence de boîte abattue à chaque lancer, calculer le nombre de points obtenus et le comparer à 32. Recommencer.
- Faire des essais en additionnant cinq nombres parmi 0, 1, 5, 10, 20 avec répétition possible et comparer la somme à 32. Recommencer.
- Comprendre que pour obtenir 32 points, il faut nécessairement faire tomber 2 fois la boîte portant le nombre 1 et que donc il faut faire 30 en 3 lancers avec les autres nombres. Procéder par essais ou engager une recherche systématique :
  avec présence du nombre 20 : obtenir les deux possibilités 20 + 10 + 0 et 20 + 5 + 5
  sans le nombre 20 : Obtenir la seule possibilité 10 + 10 + 10
- Conclure qu'il y a trois possibilités : 20 + 10 + 1 + 1 + 0 ; 20 + 5 + 5 + 1 + 1 et 10 + 10 + 10 + 1 + 1

Attribution des points

4 Réponse correcte : les trois solutions sous forme de sommes (20 + 10 + 1 + 1 + 0 ; 20 + 5 + 5 + 1 + 1 et 10 + 10 + 10 + 1 + 1), ou de liste (une fois la boîte 20, une fois la boîte 10 deux fois la boîte 1) sans autre proposition erronée

Niveaux : 3, 4

Origine : Riva del Garda

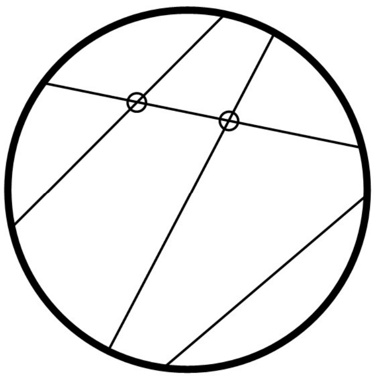
2. JEUX D'ARAIGNÉES (I) (Cat. 3, 4)

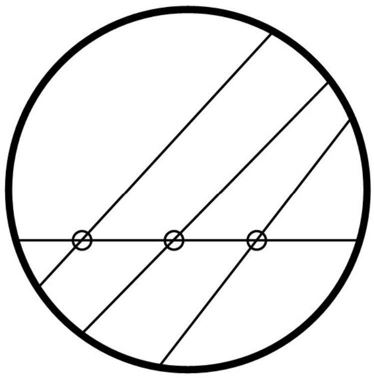
Trois sympathiques araignées Arach, Tipsy et Philomène ont trouvé des cerceaux dans un vieux grenier et font un concours de fils.

Chacune doit tirer quatre fils, bien tendus, entre les bords de son cerceau. La gagnante sera celle qui obtiendra le plus de croisements de ses quatre fils.

Voici les cerceaux d'Arach et de Tipsy avec les quatre fils et les croisements (notés par des petits cercles) :

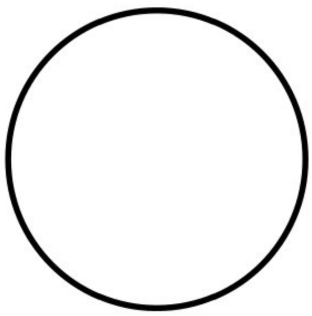
Arach a seulement 2 croisements : Tipsy en a 3 :





Philomène dit qu'elle pourra obtenir plus de croisements en disposant mieux ses quatre fils.

Cerceau de Philomène :



Quel est le plus grand nombre de croisements que pourra obtenir Philomène avec ses quatre fils ?

Dessinez dans le cerceau de Philomène les quatre fils qu'elle pourra tendre pour avoir le plus grand nombre possible de croisements.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

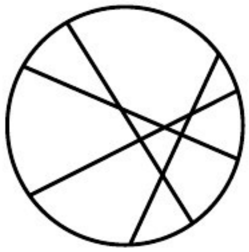
Trouver le nombre maximum d'intersections de quatre cordes d'un cercle

Analyse de la tâche

- Comprendre que les fils sont des segments de droite.
- Comprendre que le nombre des croisements dépend de la disposition des fils
- Procéder par essais inorganisés : tracer quatre fils et dénombrer les croisements. Il faut vérifier qu'il n'y a pas plus de deux fils sur un point d'intersection, ce qui ferait que ce croisement serait compté pour un seul au lieu de plusieurs.

Ou, procéder par essais plus ou moins organisés : tracer un fil puis un deuxième fil (qui peut déterminer 0 ou 1 croisement) puis un troisième fil qui peut croiser les deux premiers et déterminer 3 croisements, anticiper la position du quatrième de façon à obtenir le plus de croisements possibles avec les trois premiers.

- Compter les 6 croisements



Attribution des points

4 Réponse correcte (6 croisements) avec dessin des quatre fils (traits s'approchant plus ou moins de segments de droite) qui mettent clairement en évidence les six croisements (on admet évidemment les croisements qui se situent sur le cerceau)

Niveaux : 3, 4

Origine : Udine

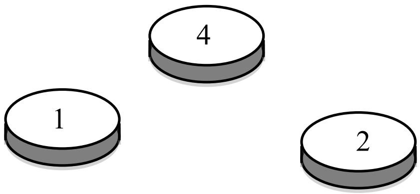
3. LES JETONS DE VALÉRIE (Cat. 3, 4, 5)

Valérie a trois jetons.

Sur chaque jeton, sont imprimés deux nombres, un sur une face, un sur l'autre.

Valérie observe que sur ses trois jetons figurent tous les nombres de 1 à 6.

Elle lance ses trois jetons une première fois et elle voit apparaître le 1, le 4 et le 2, comme sur cette figure :



Elle lance encore ses trois jetons une deuxième fois et elle voit apparaître le 6, le 2 et le 3.

Enfin elle lance ses trois jetons une troisième fois et elle voit apparaître le 1, le 6 et le 2.

Pour chaque jeton, dites quels sont les nombres imprimés sur les deux faces ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Les nombres de 1 à 6 sont écrits sur les faces de 3 jetons; déterminer les associations de ces nombres sur chaque jeton à partir de trois lancers (où apparaît chaque fois un nombre par jeton)

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a six faces de jetons ayant chacune un des nombres de 1 à 6.
- Comprendre que les lancers des jetons donnent la possibilité d'exclure de la face cachée des différents jetons, les nombres qui sont visibles lors de ce lancer.
- Se rendre compte, selon la figure du premier lancer, que le jeton avec le nombre 1 aura sur sa face cachée : ou 3, ou 5 ou 6 et que ces possibilités sont les mêmes pour le jeton avec le 4 et le jeton avec le 2.
- Comprendre, selon le deuxième lancer, que le jeton avec le nombre 2 doit obligatoirement avoir 5 sur sa face opposée et que le jeton avec le nombre 4 ne peut avoir que le 6 ou le 3 sur sa face opposée, de même pour le jeton avec le nombre 1.
- Déduire du troisième lancer que le jeton avec le nombre 1 ne peut pas avoir 6 sur sa face opposée et que c'est obligatoirement le 3.
- Conclure que le jeton avec le nombre 4 sur une face aura 6 sur sa face opposée.

Ou, pour chaque jeton, écrire toutes les associations possibles et écarter celles qui ne répondent pas aux conditions.

Ou, arriver aux associations correctes par essais successifs, sans pouvoir être certain que la solution est unique.

Ou, observer que le 2 apparaît lors de chacun des trois lancers et que le 5 est celui qui n'apparaît jamais et en déduire que le 2 et le 5 sont sur les faces opposées du même jeton. Déduire du deuxième et troisième lancer que le 6 ne peut pas être opposé, ni au 3, ni au 1 et donc qu'il est opposé au 4 et conclure que le 3 est opposé au 1.

Ou, construire des modèles des jetons en carton, écrire 1, 2 et 4 sur une face de chacun et procéder par essais pour les faces opposées.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1-3, 4-6, 2-5) avec présence des déductions effectuées clairement précisées ou avec les essais et vérifications effectués

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena, reprise du problème *Les jetons de Françoise* 15 II 09

4. MODÈLES RÉDUITS (Cat. 3, 4, 5)

Un magasin de jouets vend des modèles réduits de camions, de voitures et de bicyclettes.
Les camions coûtent tous le même prix.
Les voitures coûtent toutes le même prix.
Les bicyclettes coûtent toutes le même prix.

- Alex a payé 19 euros pour deux camions et une voiture.
- Bernard a payé 17 euros pour un camion et deux voitures.
- Carla a payé 13 euros pour deux bicyclettes et une voiture.
- Dora s'achète un camion, une bicyclette et une voiture.

Combien Dora paye-t-elle ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les prix unitaires de 3 objets et le prix d'achat d'un lot, connaissant les prix de trois combinaisons de ces objets ($2c + m = 19$; $c + 2m = 17$; $2b + m = 13$)

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème (données par les prix de 3 combinaisons d'objets) et le fait qu'il faut chercher les prix unitaires des objets.
- Procéder par essais au hasard ou par essais organisés en respectant les contraintes de l'énoncé (vérification que les prix unitaires trouvés vérifient les 3 contraintes).

  Les essais peuvent être orientés par le bon sens (prix de la bicyclette < prix de la voiture < prix du camion) et par quelques déductions simples, par exemple :

  comme 2 bicyclettes et 1 voiture coûtent 13 €, 1 bicyclette coûte moins de 6 € ;

  comme 2 camions et 1 voiture coûtent 6 € de plus que 2 bicyclettes et 1 voiture, 1 camion coûte 3 € de plus qu'une bicyclette.
- En déduire que Dora paiera 16 € : 7 € (camion) + 5 € (voiture) + 4 € (bicyclette)

Attribution des points

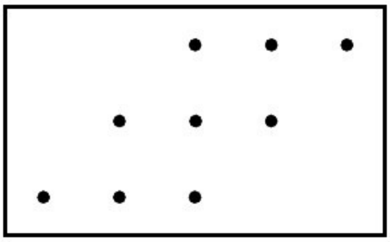
4 Réponse correcte (Dora va payer 16 €), avec une trace exhaustive des calculs réalisés (liste des essais par exemple)

Niveaux : 3, 4, 5

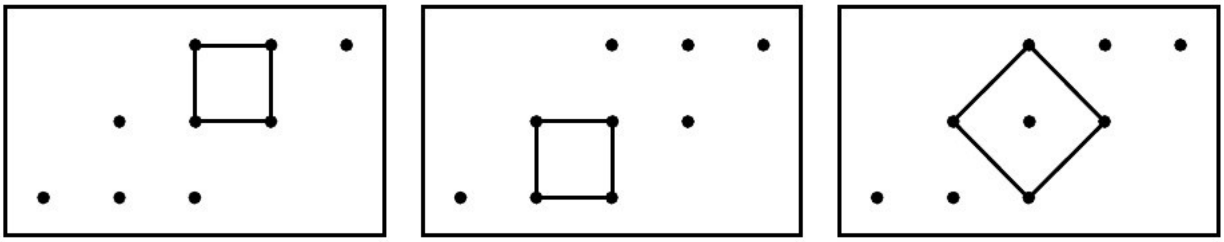
Origine : Rozzano

5. CARRÉS SUR DES CLOUS (Cat. 3, 4, 5)

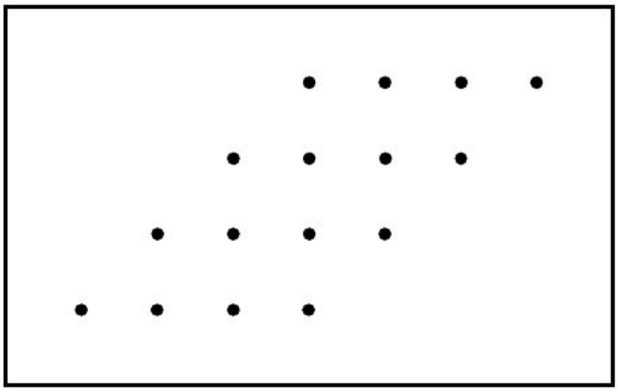
Sur une planche, Claude a planté 9 clous disposés ainsi :



Il tend des élastiques entre certains de ces clous pour former des carrés et il constate qu'il ne peut former que trois carrés.



Sur une autre planche, Claude a planté 16 clous disposés ainsi :



Combien de carrés Claude peut-il former au maximum sur sa nouvelle planche ?

Indiquez clairement tous les carrés que vous avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Identifier et dénombrer des carrés dont les sommets se situent sur une partie d'une planche à clous.

Analyse de la tâche

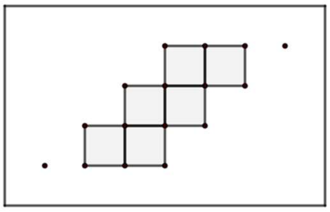
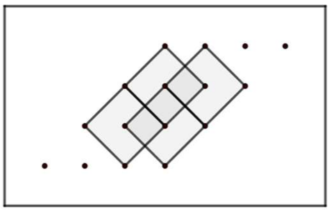
- Comprendre les contraintes du problème : les figures doivent être des carrés dont les sommets sont des clous du support. La difficulté qui consiste à envisager des carrés en position non standard est en partie aplanie par l'exemple donné.
- Procéder par construction effective de carrés de façon aléatoire. Le risque est alors de ne pas parvenir à l'exhaustivité ou de produire des doublons.

Ou, procéder par construction effective de carrés de façon organisée, par exemple selon la longueur des côtés (carrés de côté 1, de côté 2, de côté oblique) ou en partant d'un point donné, puis d'un autre …

Ou, dénombrement des carrés sans tous les construire effectivement, mais en les décrivant de façon claire. Cette démarche peut conduire à des oublis.

Une recherche organisée conduit à trouver :

6 carrés de côté 1 (2 par bandes de points de largeur 1)
4 carrés de côtés obliques (diagonales de carrés)

Attribution des points

4 Réponse correcte (10 carrés) avec inventaire clair : description de toutes les possibilités : dessin de tous les carrés ou liste exhaustive clairement décrite, sans autre figure

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Luxembourg

6. MONSIEUR CHARLES (Cat. 4, 5)

Dans l'armoire de Monsieur Charles, il y a :

• 4 chapeaux : un rouge, un vert, un jaune et un bleu ;

• 4 pantalons : un rouge, un vert, un jaune et un bleu ;

• 4 vestes : une rouge, une verte, une jaune et une bleue.

Chaque jour, Monsieur Charles porte un chapeau et un pantalon de la même couleur, mais une veste d'une couleur différente.

Aujourd'hui, 1er mars, Monsieur Charles sort de sa maison avec un chapeau et un pantalon rouges et une veste verte. Demain, il fera un choix différent, et ainsi de suite pour les jours suivants.

Quel est le premier jour après le 1er mars où Monsieur Charles devra s'habiller de la même manière que l'un des jours précédents ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de triplets formés avec 3 objets (chacun pouvant être de 4 couleurs différentes), de telle façon que deux objets soient de même couleur et le troisième d'une couleur différente.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes de la situation : les différentes manières de s'habiller dépendent du choix de deux couleurs sur quatre, et de l'attribution de ces 2 couleurs (une couleur pour le chapeau et le pantalon, l'autre pour la veste)
- Déterminer une stratégie qui permette de produire des triplets respectant les contraintes (sans organisation préalable), puis suivie ou non d'une organisation des triplets trouvés pour éliminer les doublons et trouver les manquants. Puis dénombrement des triplets obtenus. (Cette stratégie, sans organisation au départ risque de produire des doublons et, surtout, de faire oublier des possibilités.)

Ou, choisir par exemple, rouge pour le chapeau et le pantalon, et une des 3 autres couleurs pour la veste, ce qui conduit aux triplets RRV, RRG, RRB. De même, pour chacune des trois autres couleurs possibles pour le chapeau et le pantalon, il y a trois possibilités différentes pour la veste. En déduire qu'il y a un total de douze possibilités.

- Conclure que le 13 mars est la première journée où Monsieur Charles sera obligé de s'habiller de la même manière qu'un des jours précédents.

Attribution des points

4 Réponse correcte (13 mars), avec une explication claire (par exemple, une liste et/ou un calcul des 12 possibilités différentes)

Niveaux : 4, 5

Origine : Siena

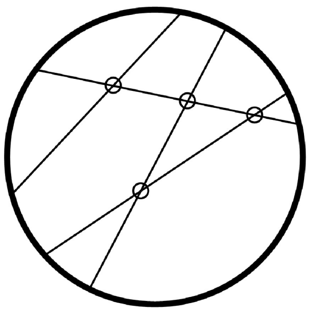
7. JEUX D'ARAIGNÉES (II) (Cat. 5, 6)

Deux sympathiques araignées Arach et Tipsy ont trouvé des cerceaux dans un vieux grenier et font un concours de fils.

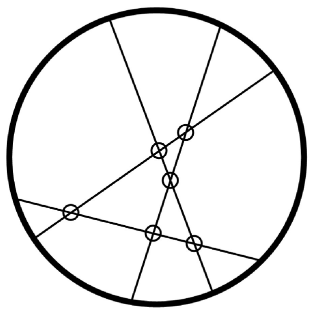
Chacune doit tirer quatre fils, en ligne droite, entre les bords de son cerceau. La gagnante sera celle qui obtiendra le plus de croisements de ses quatre fils.

Voici les cerceaux d'Arach et de Tipsy avec les quatre fils et les croisements (notés par des petits cercles) :

Arach n'a que 4 croisements :



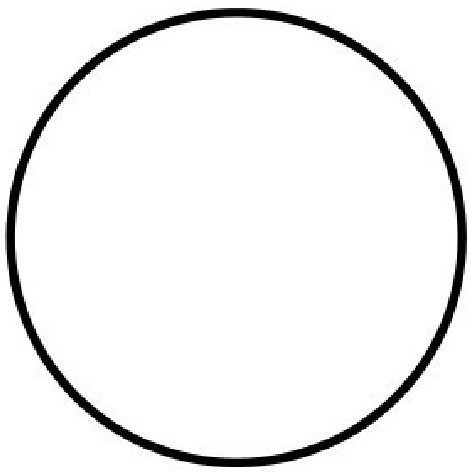
Tipsy, la gagnante, a obtenu 6 croisements :



Le lendemain, nos deux araignées, qui avaient trouvé le jeu si intéressant, recommencent sur des cerceaux plus grands, elles décident cette fois-ci de tendre chacune six fils.

Quel est le plus grand nombre de croisements qu'elles pourront obtenir avec six fils ?

Dessinez les six fils sur le cerceau ci-dessous pour avoir le plus grand nombre possible de croisements et dites comment vous les avez trouvés.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

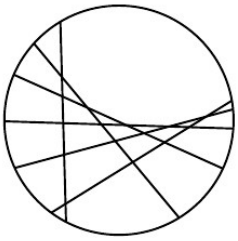
Trouver le nombre maximum d'intersections de six cordes d'un cercle

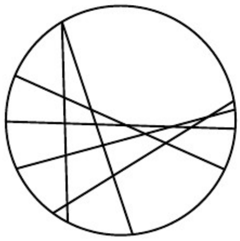
Analyse de la tâche

- Comprendre que les fils sont des segments de droite.

- Comprendre que le nombre des croisements dépend de la disposition des fils
- Vérifier tout d'abord que les quatre fils de Tipsy ont 6 intersections et se convaincre qu'il s'agit du maximum afin de poursuivre la recherche avec cinq et six fils.
- Pour trouver le nombre maximum de croisements de 6 fils, le dessin est plus délicat. Il faut faire en sorte que chaque fil ajouté « croise » tous les précédents. Il faut aussi vérifier que plus de deux fils n'aient un même point d'intersection, ce qui ferait que ce croisement serait compté pour un seul au lieu de plusieurs.
- Une procédure consiste à dessiner un premier fil, puis un deuxième, avec un croisement, puis un troisième « croisant les deux premiers avec 1 + 2 = 3 croisements, puis un quatrième croisant les trois précédents avec 1 + 2 + 3 = 6 croisements et ainsi de suite : pour le cinquième 1 + 2 + 3 + 4 = 10 croisements et finalement pour le sixième
  1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 croisements.

Ou, procéder de manière non systématique, sans pouvoir s'assurer que le nombre de croisements est maximum.





Attribution des points

4 Réponse correcte (15 croisements ou la somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15) avec dessin précis et description qui fait clairement apparaître que les six fils coupent chacun des cinq autres (ou explication sur la position de la règle qui détermine les croisements ou mentions des essais permettant de trouver une disposition optimale des six fils …)

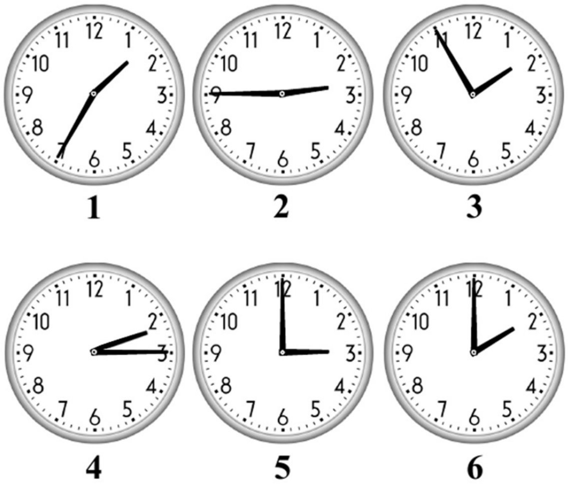
Niveaux : 5, 6

Origine : Udine

8. LES HORLOGES (Cat. 5, 6)

Dans l'atelier de l'horloger de Transalpie, il y a ces six horloges.

L'une de celles-ci indique l'heure exacte. Une autre avance de 20 minutes, une autre retarde de 20 minutes, les trois autres sont arrêtées.



Quelle horloge indique l'heure exacte ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver, parmi les images de 6 horloges, dont l'une est à l'heure, l'une avance de 20 minutes, l'une retarde de 20 minutes et les trois autres sont arrêtées, celle qui est à l'heure.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour répondre à la question il faut lire les heures des six horloges : 1:35, 1:55, 2:00, 2:15, 2:45, 3:00.
- Choisir une horloge, faire l'hypothèse que c'est elle qui est à l'heure et vérifier si les conditions données pour les autres sont respectées. Si ce choix n'est pas juste, recommencer avec une autre horloge.

Ou, procéder par essais en choisissant trois horloges et vérifier si les écarts entre les trois sont respectés.

Ou, comprendre que si une horloge retarde de 20 minutes et un autre avance de 20 minutes, l'écart entre les deux sera de 40 minutes et que celle qui indique l'heure exacte sera comprise entre les deux. Chercher donc les deux horloges dont les heures diffèrent de 40 minutes. On peut soit effectuer les calculs (1 h 35 min + 40 min = 1 h 75 correspondant à 2 h 15 min), soit en se déplaçant dans le temps, en avant ou en arrière sur chaque horloge. Trouver ainsi qu'il s'agit des horloges indiquant 1:35 et 2:15 et que celle de l'heure exacte est celle qui indique 1:55 (horloge n°3, 20 minutes en plus de 1:35 et 20 minutes en moins de 2:15)

Ou, chercher de manière systématique les couples de deux horloges qui diffèrent de 20 minutes en écartant toutes celles qui n'ont pas cette différence. On écarte ainsi les horloges indiquant 2:00, 2:45, 3,00. Les trois autres sont celles à prendre en considération, celle donnant l'heure exacte se situe entre les deux autres dans l'ordre croissant des temps.

Attribution des points

4 Réponse correcte (l'horloge n°3) avec la description de la procédure suivie (les calculs, les indications sur la figure des aiguilles déplacées, les explications par des mots …)

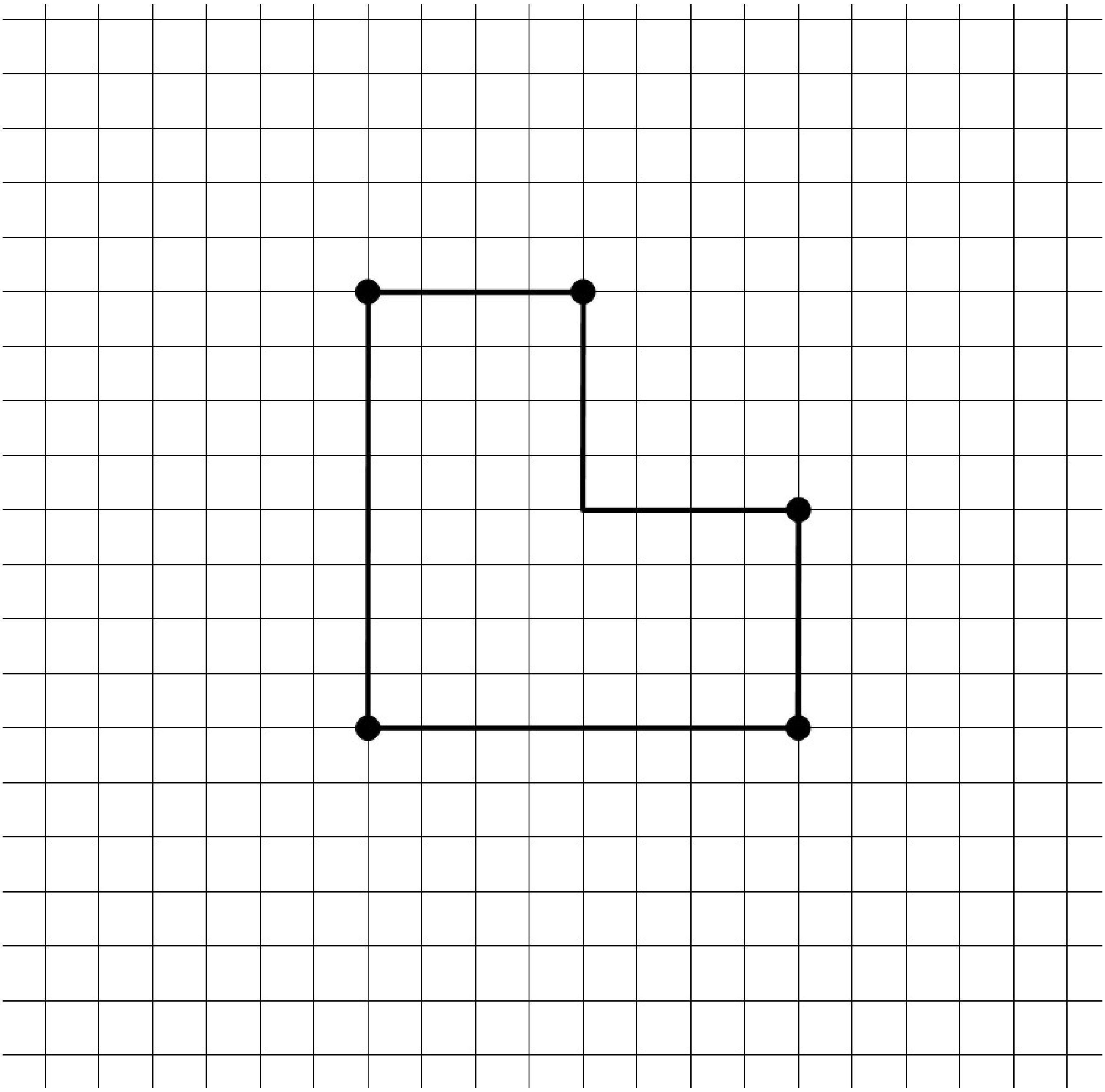
Niveaux : 5, 6

Origine : Franche-Comté (Variante de 04.F.04 3, 4, 5 Chez l'horloger)

9. UN CHAMP D'AIRE DOUBLE (Cat. 5, 6, 7)

Dans sa prairie, à l'intérieur de laquelle sont plantés cinq arbres, un agriculteur a réalisé un enclos provisoire pour que ses bêtes puissent paître.

(Le dessin représente le contour de l'enclos et les cinq arbres, qui sont indiqués par les points.)



L'herbe se faisant rare, l'éleveur décide de doubler l'aire de l'enclos.

Il veut que son nouvel enclos soit un rectangle et il veut que les cinq arbres soient aussi sur la clôture du nouvel enclos.

Dessinez tous les enclos en forme de rectangle que l'agriculteur pourrait construire.

Montrez, pour chaque enclos que vous avez dessiné, que l'aire a été doublée.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Transformer un polygone concave (composé d'un rectangle et d'un carré ou représentant les ¾ d'un carré) sur le contour duquel sont placés cinq points en un rectangle d'aire double de façon à ce que les cinq points soient encore sur le contour du rectangle dans leur position d'origine.

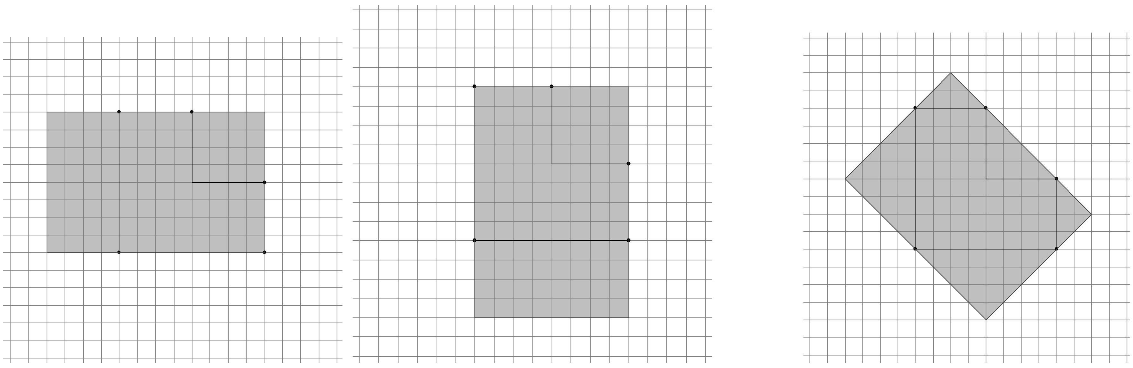
Analyse de la tâche

- Comprendre que l'aire du nouveau champ, doit être le double de celle de l'ancien champ.
- Faire le choix d'une unité de mesure, le plus simple étant de prendre pour unité un carreau du quadrillage et déterminer l'aire de l'ancien champ : 48 et celle du nouveau : 96 (en carreaux).

  On peut aussi observer que la figure d'origine est composée de trois carrés de 4 × 4 et que le nouvel enclos devra être composé de six carrés de 4 × 4, ce qui permet d'obtenir facilement les deux premières solutions (pour la troisième il faudra décomposer ce carré en triangles dont l'aire vaut ½ ou ¼ du carré.)
- Comprendre la contrainte de position des 5 arbres : ils restent là où ils sont et ils doivent être aussi sur la nouvelle clôture. Comme il y a 5 arbres, ils ne peuvent pas tous être sur les sommets du rectangle (comme ils étaient sur les sommets de la figure d'origine) mais donc sur des côtés du rectangle.
- Essayer de dessiner le nouveau champ en tenant compte des trois contraintes : il doit être rectangulaire et les points doivent être sur les côtés ou être des sommets du rectangle.

Deux cas se présentent :

- Les côtés du rectangle suivent les lignes du quadrillage. Utiliser alors la contrainte sur l'aire, 96, pour déterminer les dimensions du rectangle (8 et 12 s'imposent rapidement comme diviseurs de 96 et 8 comme une des dimensions de la figure d'origine)
- Les côtés du rectangle ne suivent pas les lignes du quadrillage. Procéder par essais pour tracer le seul rectangle qui satisfait la contrainte sur la position des points. Déterminer son aire et la comparer à l'aire de l'ancien champ. Ou la comparer à celle de la figure précédente par décomposition
- Conclure qu'il y a trois possibilités :



Attribution des points

4 Réponse correcte avec dessin précis des trois rectangles possibles et vérification du doublement de l'aire, sans aucune figure erronée

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : GTGP (Groupe Géométrie plane) et Udine

10. TOUT À MOINS DE 3 EUROS (Cat. 6, 7, 8)

Joséphine vend ses anciens jouets au marché de l'occasion. Pour écrire le prix de chaque jouet, elle utilise des cartes avec les chiffres de 0 à 9 et une carte avec une virgule.

Chaque prix est inférieur à 3 euros et s'écrit avec des chiffres tous différents.

Son amie Christine achète un jouet à 0,31 euros et Alexandra un jouet à 1,03 euros.

« Quelle coïncidence, dit Joséphine, vous avez acheté deux jouets pour lesquels j'ai utilisé les trois mêmes cartes, mais en les disposant dans un ordre différent, la différence de prix est de 72 centimes ! ».

Indiquez toutes les paires de prix possibles, de moins de 3 euros, dont la différence est de 72 centimes et qui utilisent trois chiffres différents.

Montrez comment vous avez les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans un contexte de prix inférieurs à 3 euros, trouver toutes les paires de nombres décimaux (avec unités, dixièmes et centièmes) formés de trois mêmes chiffres, tous différents les uns des autres, et telles que la différence entre les deux nombres est 72 centièmes

Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les prix sont écrits avec des nombres décimaux formés de trois chiffres tous différents les uns des autres, ayant pour chiffre des unités un chiffre allant de 0 à 2, tandis que pour les dixièmes et les centièmes tous les chiffres de 0 à 9 peuvent être utilisés.
- Comprendre qu'il faut chercher des paires de nombres décimaux écrits avec trois mêmes chiffres, différents les uns des autres mais disposés de manière différente et telles que la différence entre les deux nombres est 72 centièmes.
- Vérifier, sur l'exemple que la différence entre 1,03 et 0,31 est bien de 72 centimes et que les trois chiffres sont distincts.
- Trouver d'autres paires en procédant par essais, qui peuvent s'organiser au cours de la recherche.

  Dans le cas où le chiffre des unités est le même dans les deux prix, la recherche se limite à la partie décimale, composée de deux chiffres choisis dont la différence est 8 (7 + 1 de « retenue ») et que, par conséquent, ces deux chiffres peuvent être 1 et 9 ou 0 et 8, ce qui conduit aux quatre paires de prix : 1,08 et 1,80 ; 2,18 et 2,80 ; 0,19 et 0,91 ; 2,19 et 2,91, 0,18 et 0,80 comme 1,19 et 1,91 sont à écarter car elles n'utilisent pas trois chiffres différents

  Dans le cas où le chiffre des unités est modifié par l'addition de 0,72 ou 1 – 0,28, il augmente de 1 d'un prix à l'autre il n'y a alors que deux possibilités à examiner pour les unités des deux prix : 0 et 1 puis 1 et 2. L'exemple donné 0,31 et 1,03 donne une première solution qui correspond au triplet de chiffres (0 ; 1 ; 3), avec le triplet de chiffres (1 ; 2 ; 4) on obtient encore les deux prix 1,42 et 2,14.
- Conclure qu'il y a six paires de prix répondant aux trois conditions, inférieurs à 3, différence de 0,72, chiffres distincts.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les six paires 0,19 et 0,91; 2,19 et 2,91; 1,08 et 1,80; 2,08 et 2,80; 0,31 et 1,03 1,42 et 2,14) avec description des essais et mentionnant qu'il n'y a pas d'autres paires de prix (on admet que la paire 0,31 et 1,03 de l'exemple ne soit pas répétée.)

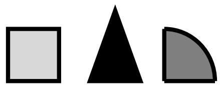
Niveaux : 6, 7, 8

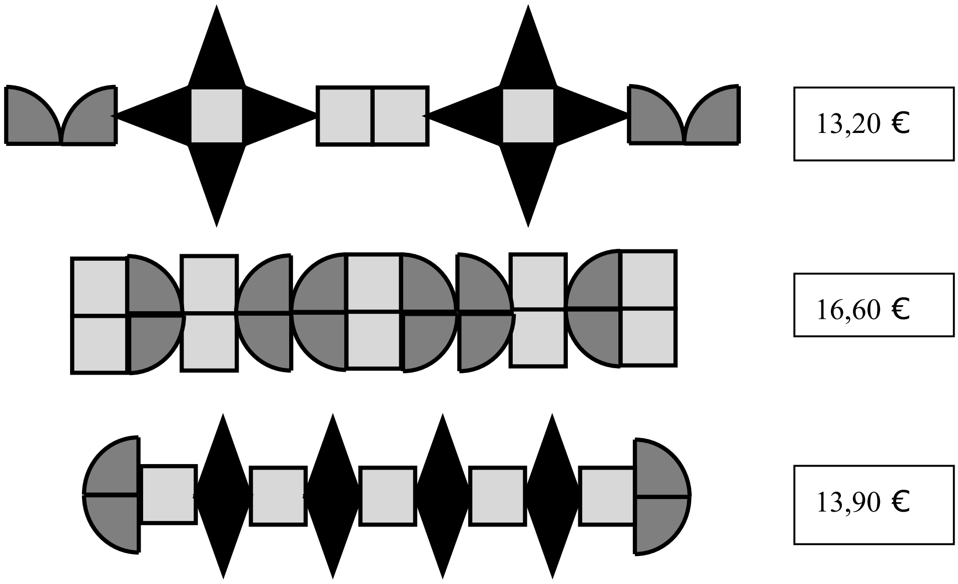
Origine : GTNU (d'après *Anniversaires et bougies*16.F.14)

11. LES BRACELETS DÉCORÉS (Cat. 6, 7, 8)

Madame Clélia crée des bracelets dans des bandes de cuir qu'elle décore avec des pièces colorées particulières.

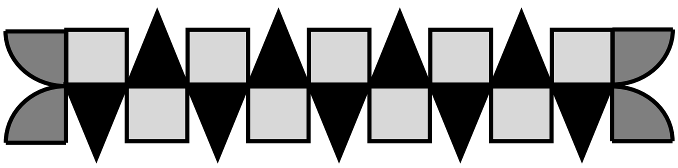
La figure ci-dessous montre le dessin des décorations des trois bracelets qu'elle a créés hier, et pour lesquels elle a utilisé seulement des pièces comme celles-ci :





Les pièces ont des prix différents selon qu'elles ont la forme d'un carré, d'un triangle ou d'un quart de disque. Le prix de chaque décoration est indiqué à côté du dessin.

Aujourd'hui, Clélia a fabriqué un autre bracelet en utilisant les trois types de pièces. Voici le dessin du bracelet qu'elle a réalisé :



Quel est le prix de la décoration du bracelet que Clélia a réalisé aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Connaissant le prix de trois compositions différentes réalisées à l'aide de trois types d'objets ayant des prix différents l'un de l'autre, déterminer le prix d'une quatrième composition contenant les trois mêmes types d'objets.

Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les bracelets sont réalisés avec trois types de pièces : carré, triangle et quart de disque, et donc que les losanges qu'on voit sur le troisième bracelet sont composés chacun de deux triangles isocèles accolés par leur base.
- Comprendre que chaque type de pièce a un prix différent en fonction de la forme et que le prix indiqué à côté de chaque bracelet correspond au prix total des pièces utilisées.
- Observer que le premier et le troisième bracelet comportent les trois types de pièces alors que le deuxième ne comporte pas de pièce triangulaire.
- Comprendre que pour déterminer le prix du quatrième bracelet il faut connaitre celui de chaque type de pièce.
- Déterminer pour chaque bracelet le nombre de pièces de chaque type qui a été utilisé :

- premier bracelet : 4 quarts de cercle, 4 carrés, 8 triangles ;
- deuxième bracelet : 12 quarts de cercle, 10 carrés ;
- troisième bracelet : 4 quarts de cercle, 5 carrés, 8 triangles

- Constater que le troisième bracelet se distingue du premier uniquement par la présence d'une pièce carrée supplémentaire.
- En déduire que la différence de prix entre les deux bracelets correspond au prix d'une pièce carré : 0,70 euro (13,90 − 13,20).
- Déterminer ensuite le prix d'un quart de disque à partir du prix du deuxième bracelet qui n'est composé que de carrés et quarts de disque : 0 ,80 euro ([16,60 – 0,70 x 10] : 12).
- Déterminer enfin le prix d'une pièce triangulaire à partir du prix du premier ou du troisième bracelet. Par exemple à partir des informations maintenant connues sur le premier bracelet, on trouve 0,90 euro ([13,20 – 0,80 x 4 – 0,70 x 4] : 8).
- Calculer enfin le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro (0,80 x 4 – 0,70 x 9 + 0,90 x 9).

Ou Procéder par essais pour déterminer le prix de chaque type de pièce, par exemple à partir du deuxième bracelet qui n'est fait que de carrés et de quarts de disque, en nombres voisins (10 carrés et 12 quarts de disque). En faisant l'hypothèse que les deux types de pièces ont le même prix, on obtient 0,75 euro (16,60 : 22). A partir de là, ajuster les valeurs. Pour les valeurs qui conviennent pour le deuxième bracelet, vérifier qu'elles conviennent pour les premier et troisième bracelets. Finir par trouver que pour 0,70 euro pour la pièce carrée et 0,80 euro pour le quart de disque, on obtient le même prix pour la pièce triangulaire (0,90 euro) pour les premier et troisième bracelets.

- Calculer le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro.

Attribution des points

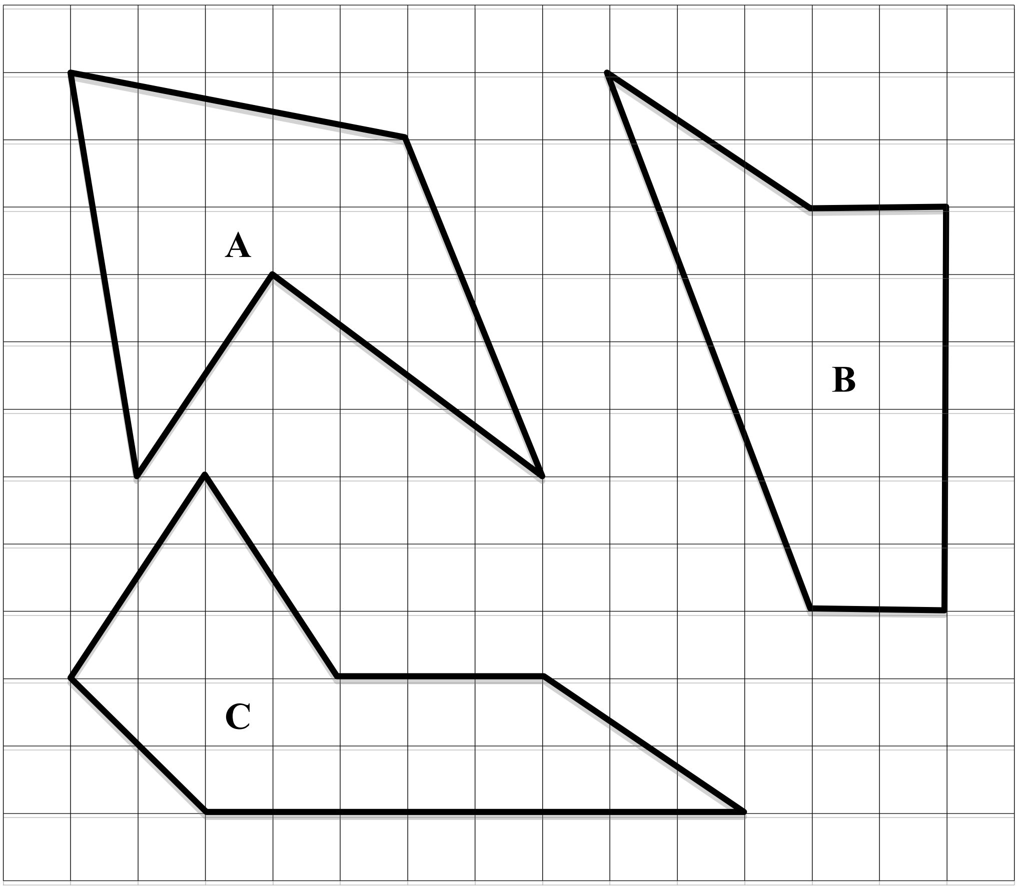
4 Réponse correcte (17,60 euro) avec des explications claires et complètes (inventaire des pièces de chaque bracelet ou comparaison directe entre le premier et le troisième bracelet, description des étapes avec le détail des calculs des valeurs des différentes pièces, essais organisés avec présence des vérifications effectuées)

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : GTAL (Groupe Algèbre, d'après *Pièces magnétiques*, 24.I.13)

12. COMPARAISON DE FIGURES (Cat. 6, 7, 8)

Patricia et Brigitte observent ces trois polygones et se demandent s'ils ont tous la même aire.



Dites si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou sont différentes.

Montrez comment vous êtes arrivés à vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de trois polygones (de 5 à 6 côtés) dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules, que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune et qu'il faudra décomposer les figures en carreaux entiers ou parties de carreaux ou en figures de base : rectangles, triangles ou demi-rectangles.
- Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre et d'un groupe d'élèves à un autre, en particulier :
  - comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
  - décomposition de la figure en rectangles et triangles qui peuvent reconstituer un rectangle par déplacements,
  - perception du triangle rectangle comme demi-rectangle,
  - les triangles non rectangles sans angle obtus sont décomposés en deux triangles rectangles,
  - calcul de l'aire du rectangle circonscrit à la figure totale suivi de la soustraction des aires des rectangles et/ou triangles complémentaires,
  - appel à la formule de l'aire du triangle.

- Trouver l'aire des trois figures, en carreaux, par exemple :

  Pour A : un rectangle de 6 × 7 dont on retire quatre triangles de 5 × 1, de 6 × 1, de 6 × 3 de 5 × 2 et un rectangle de 2 × 1: 42 – 2,5 –3 – 9 – 5 – 2 = 20,5.

  Pour B : un rectangle de 6 × 2 et un triangle de 6 × 3 : 12 + 9 = 21 ou compensations de carreaux pour le triangle

  Pour C : décomposition en un rectangle et trois triangles. 6 + 2 + 10 + 3 = 21

- Conclure que les trois aires ne sont pas égales : 20,5 ; 21 et 21 (en carrés du quadrillage).

Ou, calcul des aires à partir de mesures prises, en cm ou mm, sur les polygones qui composent les figures. (Cette procédure exige des mesures prises au mm près, les calculs précis de chaque aire et la prise en compte rigoureuse des erreurs dues aux approximations pour être certain que l'aire de A est inférieure aux aires de B et C)

Attribution des points

4 Réponse correcte : les trois aires ne sont pas égales, avec leurs valeurs : A : 20,5 ; B : 21 et C : 21 (l'unité « carreaux du quadrillage » peut être implicite). On accepte que l'inégalité ne soit pas mentionnée explicitement.

ou, en cas de mesures en cm ou mm, réponse correcte : (les trois aires ne sont pas égales) avec les valeurs des aires accompagnées dans ce cas de calculs précis au mm près et tenant compte explicitement des erreurs d'approximation

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : GTGP (Groupe de travail Géométrie plane)

13. QUI A CASSÉ LA VITRE ? (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

André et son frère David ont invité leurs amis Claude et Bruno, qui ne sont pas frères, à faire une partie de foot dans la cour. L'un d'eux, en tirant un peu trop fort, casse une vitre de la fenêtre de la voisine Gertrude.

Celle-ci, très fâchée, veut savoir qui est le coupable et interroge chacun d'eux.

André dit : « Ce n'est pas Bruno. »

Bruno dit : « Le coupable est un des deux frères ».

Claude affirme : « Ce n'est pas David qui a lancé le ballon qui a cassé la vitre. »

David dit : « Ce n'est pas moi. »

Un seul d'entre eux a menti.

Qui a cassé la vitre de Madame Gertrude ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le vrai et le faux dans quatre affirmations dont l'une seule est fausse, dans un contexte de « mensonges » et vérités

Analyse de la tâche

- Observer que Claude et David disent la même chose et que, par conséquent, ni l'un ni l'autre ne peut avoir menti parce qu'on aurait deux affirmations fausses. En déduire que celui qui a menti est soit André, soit Bruno :
- Supposer qu'André ment. Son affirmation conduirait à la conclusion que le coupable est Bruno, mais puisque Bruno devrait dire la vérité, il ne pourrait plus affirmer que le coupable est André ou David. Donc Bruno dirait un mensonge, ce qui contredit la donnée qu'un seul des quatre enfants ment.
- Conclure que c'est Bruno qui ment et que, par conséquent, la vitre a été cassée par Claude ou Bruno lui-même. De l'affirmation d'André, vraie, il s'ensuit que c'est Claude le coupable. (L'obstacle à surmonter est d'accepter l'idée que celui qui ment n'est pas forcément le coupable.)

  L'observation que Claude et David ne peuvent pas avoir menti réduit les hypothèses sur deux personnes, la recherche du coupable exige des hypothèses sur chaque personnage : soit en le considérant comme celui qui ment, soit en le considérant comme le coupable. Par exemple, dans ce dernier cas : si André était le coupable toutes les affirmations seraient vraies, si c'était Bruno, il y aurait deux affirmations fausses (celles d'André et Bruno), si c'était Claude, il n'y aurait qu'une affirmation fausse (celle de Bruno) si c'était David, il y aurait deux affirmations fausses (celles de Claude et de David).

Attribution des points

4 Réponse correcte (Claude) avec des explications claires et complètes (l'affirmation fausse est découverte et toutes les déductions et essais nécessaires sont présents)

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Parma, d'après *Le tableau volé* (12.I.12)

14. LE GRILLON SAUTEUR (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le grillon Verdino a obtenu la médaille d'or cette année aux Olympiades dans l'épreuve du saut en hauteur.

Au début de l'épreuve, la barre a été placée à une certaine hauteur puis elle a été montée progressivement.

La première fois la barre a été montée de la moitié de la hauteur initiale; la deuxième fois d'un tiers de la hauteur du saut précédent; la troisième fois d'un quart de la hauteur du saut précédent, et ainsi de suite.

Verdino a sauté 7 fois.

Verdino a passé chaque fois la barre au premier essai et il a été le seul à la passer, lors de son 7e saut, alors qu'elle était placée à 60 cm de hauteur.

C'est ainsi qu'il a gagné sa médaille d'or.

À quelle hauteur la barre a-t-elle été placée au début de l'épreuve ?

Montrez comment vous avez trouvé votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer le premier terme d'une succession de 7 termes dont on connaît le dernier, dans laquelle, à partir du deuxième, un terme vaut respectivement 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; … de plus que le terme précédent.

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de l'élévation de la barre : après chaque saut elle est montée respectivement d'un demi, d'un tiers, d'un quart, … de la hauteur de la barre précédente.
- Se rendre compte, après 7 sauts, le grillon a passé la barre à 60 cm de hauteur et qu'on est en présence d'une suite de sept hauteurs dont on ne connaît que la dernière (60) et les règles de passage de l'une à l'autre.
- Trois procédures sont à envisager : par essais successifs à partir de valeurs hypothétiques de la barre initiale ; analyse de la situation au moyen d'un dessin qui met en évidence les différentes hauteurs de la barre ; partir de 60 et remonter dans le temps, étape par étape.
- Procéder par essais en faisant une hypothèse sur la hauteur du premier saut. Par exemple 10 et procéder selon les indications : ajouter à 10 la moitié de 10 (5), ce qui donne 15 ; ajouter à 15 le tiers de 15 (5), ce qui donne 20 ; etc. pour arriver à 40 après le septième saut. On arrive ainsi à une hauteur inférieure à 60, mais on peut se rendre compte que l'augmentation d'un saut à l'autre ne change pas (5). Puisque 40 est inférieur à 60, continuer les essais en choisissant un nombre de départ supérieur à 10 (avec 20 on arrive à 80, avec 14 et 16 on arrive è 56 et 64 …) l'essai avec 15 aboutit à 60.

Ou, avec une représentation graphique, de préférence sur papier quadrillé, on met en évidence l'égalité des augmentations de 1/2, 1/3 …1/7, qui valent aussi la moitié de la hauteur de la barre d'origine et montrent que la hauteur finale correspond à 8 fois la moitié de la hauteur du saut initial. Donc en divisant la hauteur finale par 8 on trouve la moitié de la hauteur du saut initial : 7,5. Conclure que la barre a été placée à 15 cm (=7,5×2) au début de la compétition.

Ou, partir de 60, qui est 1/7 de plus que les 7/7 de la hauteur précédente, c'est-à-dire 8/7, calculer la valeur de 1/7 (60 : 8 = 7,5) et de 7/7 (7 × 7,5 = 52,5) qui est la hauteur de la sixième barre, et ainsi de suite pour arriver successivement à 45 ; 37,5 ; 30 ; 22,5 et aboutir à 15.

Ou, par voie algébrique, en désignant par x la hauteur du premier saut, les hauteurs des sept sauts sont :

$\boldsymbol{x}$; $x + 1/2\,x = \mathbf{3/2}\,\boldsymbol{x}$; $3/2\,x + 1/3 \cdot 3/2\,x = \mathbf{2}\boldsymbol{x}$; $2x + 1/4 \cdot 2\,x = \mathbf{5/2}\,\boldsymbol{x}$; $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$; $\mathbf{7/2}\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{4}\boldsymbol{x} = 60 \Rightarrow x = 15$

Attribution des points

4 Réponse correcte (15 cm) avec explications claires et complètes (essais explicites avec le détail des calculs, dessin ou progression arithmétique dont la raison est la demi hauteur primitive, ou pose d'une équation et sa résolution)

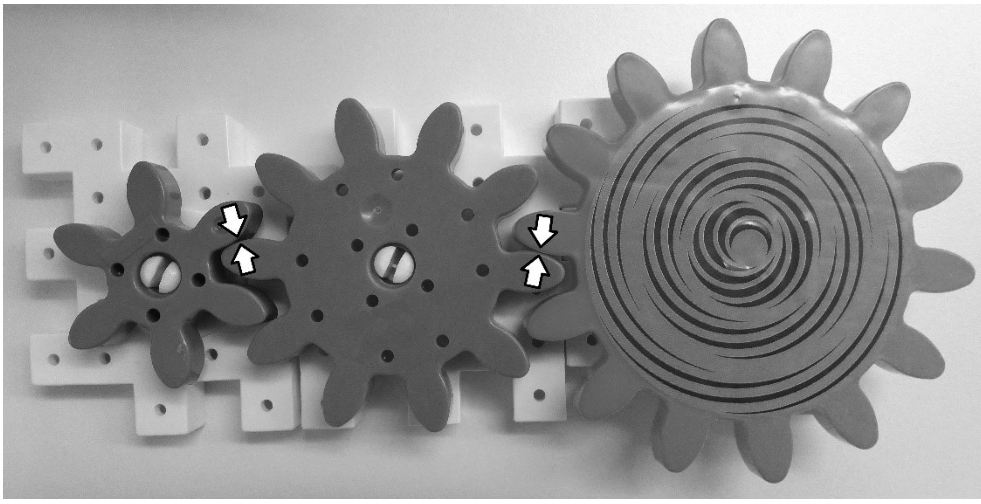
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Groupe Numération

15. ROUES DENTÉES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marcel a un jeu de construction avec des roues dentées. Il expérimente le montage de trois roues : une petite, une moyenne et une grande.

Au début de son expérience, il marque quatre dents de ces roues avec une flèche (voir figure).



Ensuite, il commence à tourner la roue dentée moyenne.

De combien de tours au minimum Marcel doit-il tourner la roue dentée moyenne pour que les paires de flèches soient à nouveau réunies comme sur la figure ci-dessus ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir d'une photo d'engrenages, déterminer les données numériques à mettre en relation et les utiliser pour trouver le nombre de tours de l'une pour que les trois roues se retrouvent dans la position de départ.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le dessin présenté fournit les informations nécessaires pour résoudre le problème.
- Comprendre que si les roues ont des nombres de dents différents, le nombre de tours est différent de l'une à l'autre.
- Observer les trois roues et compter les nombres de dents de chacune
- Considérer le nombre de tours de chaque roue sans le confondre avec le nombre de dents.
- Imaginer un tour de la roue du milieu (10 dents), la petite (6 dents) fera un tour et 4 dents, la grande (14 dents) n'aura pas fait un tour mais il manquera encore 4 dents pour se trouver dans la position de départ.

  Poursuivre en imaginant deux tours de la roue du milieu (20 dents) et contrôler la position des deux autres : la petite aura fait trois tours et deux dents, la grande un tour et six dents au-delà de la position de départ. Quand la roue du milieu aura fait trois tours (30 dents), la petite aura fait 5 tours et sera dans la position du départ mais pas la grande qui aura fait deux tours et deux dents.

  On peut procéder de manière analogue soit par un dessin soit en utilisant les divisions successives (le reste représentant les dents qui vont au-delà des tours complets).

Ou, après avoir fait différentes « expérimentations » imaginaires des rotations des roues, se rendre compte qu'on peut passer au cadre numérique et faire appel aux multiples communs des nombres 6, 10 et 14, pour trouver que le plus petit d'entre eux est 210, correspondant aux nombres de tours respectifs de la plus grande à la plus petite roue : 15, 21, et 35.

Ou, pour surmonter la difficulté de tenir sous contrôle le mouvement des trois roues simultanément, on peut décomposer le problème : travailler sur la roue du milieu et la petite (3 tours de la roue du milieu ramènent à la position de départ) et puis sur la roue du milieu et la grande (7 tours de la roue du milieu ramènent les flèches en face l'une de l'autre, et 7 tours = 70 dents, 10 tours de la roue du milieu correspondent à 5 tours de la grande).

Il reste à ce moment la nécessité de considérer le plus petit multiple commun de 3 et 7 pour trouver que la situation de départ se retrouve après 21 tours de la roue du milieu.

Attribution des points

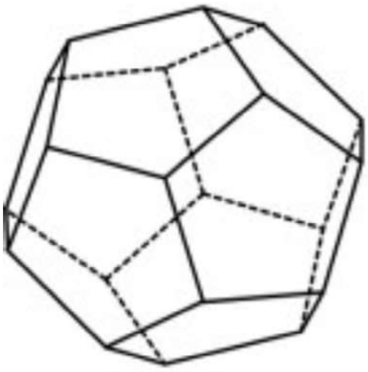
4 Réponse correcte (21 tours) avec des explications claires et complètes (toutes les étapes permettant d'arriver à la solution sont présentes et cohérentes, si le procédé par ppmc est utilisé, il est expliqué)

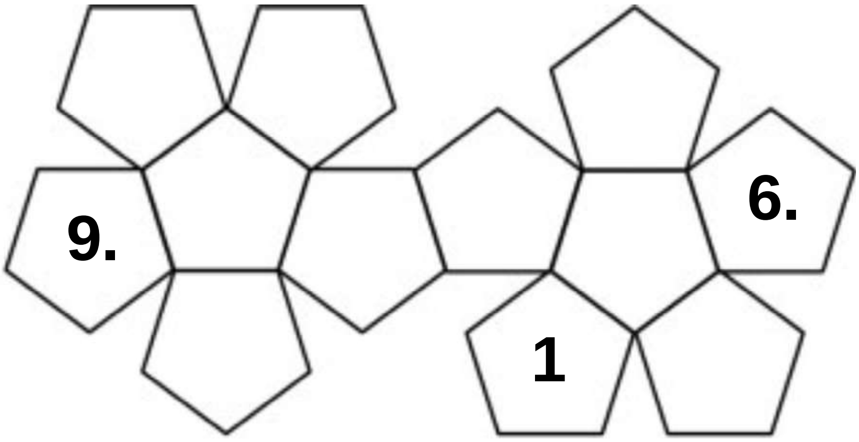
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Luxembourg

16. DODÉCAÈDRE (Cat 8, 9, 10)

Voici un dodécaèdre en perspective et son développement (patron) :





On a écrit les nombres 1, 6 et 9 sur trois des faces du développement.

Sur les neuf autres faces du développement, placez les nombres 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11 et 12 de manière que, lorsque l'on construit le dodécaèdre :

- la somme des nombres placés sur deux faces opposées soit toujours la même ;
- deux nombres qui se suivent ne se trouvent jamais sur deux faces qui se touchent.

Écrivez les nombres sur chaque face.

Combien de solutions différentes y a-t-il ?

Décrivez-les et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Placer les nombres de 1 à 12 sur les pentagones du développement d'un dodécaèdre de sorte que lorsque le dodécaèdre est construit, la somme des nombres placés sur des faces opposées soit toujours la même et que deux nombres consécutifs ne soient jamais placés sur deux faces adjacentes.

Analyse de la tâche

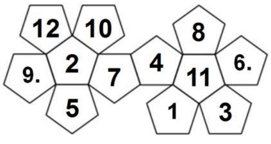
- Déterminer, sur le développement, les faces du dodécaèdre qui sont opposées à 1, 6 et 9, puis les autres paires de faces opposées et aussi les faces qui se touchent.
- Déterminer, que la somme de deux faces opposées est 13, et que : 1 et 12 ; 2 et 11 ; 3 et 10 ; 4 et 9, 5 et 8 ; 6 et 7 sont opposées et marquer les faces 12, 4 et 7 déjà désignées, comme opposées aux faces 1, 9 et 6.
- S'apercevoir que pour les trois paires de faces restantes, il y a plusieurs possibilités qui respectant la deuxième contrainte sur les faces adjacentes.
- Éliminer les nombres à exclure pour les faces déjà notées et procéder par essais et vérifications.

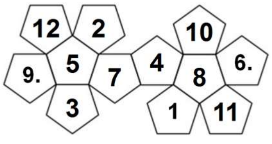
  Par exemple à droite du 9 et du 12, ne peuvent être essayés que les nombres 2, 3, 5 (8, 10 et 11 étant éliminés comme voisins) qui correspondraient aux placements respectifs de 11, 10, et 8 sur la face à droite du 4.

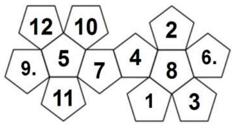
  En essayant 2 (et 11), il n'y a plus qu'une place pour 3, au-dessous de 11 et 6 et une seule pour 5 (sous le 2).

  En essayant 3, on arrive à une impasse.

  En essayant 5, on trouve deux dispositions.







- Vérifier que les solutions trouvées respectent tous les critères et sont bien différentes.

Attribution des points

4 Les 3 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée ni doublons avec des explications claires de la procédure suivie (somme 13, placement de 12, 7 et 4, mention des essais, reconnaissance de l'exhaustivité, …)

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Suisse romande