	Titre	*Niveaux*								*Origine*	*Thème*
1	Petites voitures	3	4							SI	Calcul d'une somme et d'une différence
2	A la piscine	3	4							GTNU	Compléter une suite périodique
3	Marguerite compte	3	4							GTNU	Écrire avec des chiffres des nombres entiers exprimés avec des mots
4	Division d'un carré	3	4	5						GPIL	Polygones de mêmes formes composées de quatre carrés contigus dans une grille 4 x 4.
5	Le monument	3	4	5						GTGE	Parmi six figures, reconnaître lesquelles, ne représentent pas correctement une rotation
6	Oncle et neveux		4	5	6					AO	Déterminer trois nombres dont le produit est donné et la somme est un nombre impair
7	Chez le marchand de glaces			5	6	7				RZ	Nombre de combinaisons de trois objets ayant deux caractères à deux valeurs chacun
8	Les chemins des singes (I)			5	6	7				LY	Dans un quadrillage, comparer les longueurs de plusieurs parcours
9	Le compteur de Mathias			5	6	7				SR	Trouver des nombres qui présentent une symétrie centrale en écriture digitale
10	Les melons			5	6	7				CA	Recherche d'un entier naturel multiple de 9 respectant certaines contraintes
11	À pas de poules				6	7	8			SR	Déterminer le point de rencontre entre deux mobiles dont les déplacements sont différents.
12	Les feutres fluorescents				6	7	8			GTCP	Résoudre par l'arithmétique un système simple de deux équations linéaires à deux inconnues
13	Lapin de Pâques en Transalpie					7	8	9	10	LU	Trouver un itinéraire sur un plan donné sans passer deux fois par le même chemin
14	Les chemins des singes (II)						8	9	10	LY	Dans un quadrillage, comparer les longueurs de plusieurs parcours
15	Les asperges						8	9	10	PU	Trouver l'intervalle solution de 3 inégalités simples du 1° degré à deux inconnues
16	La boîte de bonbons						8	9	10	MI	Trouver les dimensions d'un rectangle, de périmètre fixé pour que son aire soit maximale
17	Une visite au musée						8	9	10	FC	Aire du parallélogramme inscrit dans un quadrilatère quelconque

1. **PETITES VOITURES** (Cat. 3, 4)

Thomas possède 18 petites voitures. Son grand-père lui en donne 12 de plus.

Thomas joue avec ses petites voitures et en casse quelques-unes.

Son grand-père lui donne 4 petites voitures supplémentaires le jour de son anniversaire, ce qui fait que Thomas a maintenant 27 petites voitures.

Combien de petites voitures Thomas a-t-il cassées ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans un contexte de jeu, à partir d'une certaine quantité de voitures fournies et connaissant deux paramètres (voitures données par le grand-père), déterminer quelle a été la diminution (voitures cassées)

Analyse de la tâche

- Comprendre les données : le nombre de voitures à l'origine est 18 ; le nombre de voitures données par le grand-père est 12 + 4 ; le nombre de voitures possédées après son anniversaire est 27 ; le nombre de petites voitures cassées est à préciser.
- Comprendre que si Thomas n'avait cassé aucune voiture, il aurait dû avoir 18 + 12 + 4 = 34, au lieu d'avoir 27 et en déduire qu'il a cassé 7 (= 34 – 27) voitures.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Thomas a cassé 7 petites voitures), avec une description claire des calculs effectués

Niveaux : 3, 4

Origine : Sienne

2. **À LA PISCINE** (Cat. 3, 4)

Fanny va à la piscine pour s'entraîner. Aujourd'hui, elle doit faire 45 longueurs de bassin en changeant de style de nage. Elle commence par 3 longueurs en brasse, elle continue avec 3 longueurs en crawl puis 3 longueurs en nage papillon. Elle répète ensuite 3 longueurs en brasse, suivies de 3 longueurs en crawl et 3 longueurs en nage papillon, et ainsi de suite.

Fanny a déjà effectué 28 longueurs.

Combien de longueurs de chaque style doit-elle encore faire pour terminer l'entraînement ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans une suite régulière périodique, dont la période est égale à neuf (3 en brasse, 3 en crawl, 3 en nage papillon), qui se répète cinq fois, déterminez combien d'éléments de chaque type manquent pour la compléter à partir d'un nombre donné.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les longueurs se répètent par groupes de neuf, toujours les mêmes (3 en brasse B, 3 en crawl C, 3 en nage papillon).
- Représenter la séquence complète soit symboliquement soit par des chiffres et identifier la position du vingt-huitième parcours. Par exemple :

B C P	B C P	B C P	B C P	B C P
3+3+3 = 9	3+3+3 = 9	3+3+3 = 9	3+3+3 = 9	3+3+3 = 9
9	18	27	36	45

- Comprendre que Fanny a effectué trois groupes de longueurs (9 en brasse, 9 en crawl, 9 en nage papillon) et, après la vingt-septième longueur, elle a commencé le quatrième groupe en nageant une longueur en brasse (vingt-huitième longueur) et donc, le nombre de longueurs en brasse effectué est 10 (9+1). Pour compléter le quatrième groupe, elle doit donc effectuer 2 longueurs en brasse, 3 en crawl, 3 en nage papillon, atteignant ainsi 36 longueurs.
- Comprendre que pour compléter l'entraînement, elle devra ensuite faire un autre groupe entier de longueurs (le cinquième) avec 3 en brasse, 3 en crawl, 3 en nage papillon, atteignant ainsi 45 longueurs.
- Pour conclure que pour terminer l'entraînement, Fanny doit donc encore effectuer en tout 5 longueurs en brasse, 6 longueurs en crawl et 6 longueurs en nage papillon.

Soit procéder arithmétiquement :

- Observez que pour faire un groupe complet des trois styles, vous devez faire 9 longueurs (9 = 3x3), et comprendre qu'avec 45 longueurs, Fanny répétera cinq fois le groupe complet des trois styles (5 = 45 : 9).
- Observez qu'avec 28 longueurs Fanny a répété trois fois le groupe complet des trois nages et qu'elle a commencé le quatrième groupe en nageant la brasse (28 : 9 donne le quotient 3 et le reste 1).
- Calculez le nombre de longueurs restant à faire 17 = 45–28. Enlevez de 17 un groupe complet des trois nages, c'est-à-dire 9 longueurs, 3 en brasse, 3 en crawl, 3 en nage papillon et constatez qu'il reste 8 longueurs (17–9 = 8) qui doivent être réparties entre les trois nages. Puisqu'une longueur en brasse a déjà été effectuée, la répartition sera de 2 en brasse, 3 en crawl, 3 en nage papillon. Additionner le nombre de longueurs pour chaque style : style brasse 2+3, style crawl 3+3, style nage papillon 3+3.
- Pour conclure que Fanny doit encore effectuer 5 longueurs en brasse, 6 longueurs en crawl et 6 longueurs en nage papillon pour terminer l'entraînement.

Attribution des points

4 Bonne réponse (5 en brasse, 6 en crawl et 6 en nage papillon) avec une description ou une représentation correcte et complète

Niveaux : 3, 4

Origine : GTNU

3. MARGUERITE COMPTE (Cat. 3, 4)

Marguerite a cinq ans et a appris à compter jusqu'à trente-neuf. Quand elle arrive à trente-neuf elle continue, d'une manière inhabituelle, avec trente-dix, trente-onze, trente-douze…

Aujourd'hui, Marguerite a réussi à compter jusqu'à trente-trente-dix.

À quel nombre trente-trente-dix correspond-il dans votre façon de compter ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique
Traduire en chiffres des entiers naturels supérieurs à 39 et inférieurs à 100 exprimés sous forme additive et avec des mots.

Analyse de la tâche
- Comprendre que Marguerite arrive à compter correctement jusqu'à trente-neuf et que, lorsqu'elle ajoute un, elle recommence à compter à partir de dix et non de la dizaine suivante : trente-neuf/trente-dix au lieu de trente-neuf/quarante.
- Comprendre que le nombre trente-dix correspond à (30+10), c'est-à-dire au nombre 40, et procéder ainsi jusqu'à trente-trente-dix, qui correspond au nombre 70.

Ou bien,
- Énumérer la numérotation de Marguerite dans l'ordre séquentiel, en la faisant correspondre à notre base chiffrée, jusqu'à trouver le nombre correspondant à trente-trente-dix.
- Reconnaitre la structure additive sous-jacente au mot " trente-trente-dix " (30+30+10) et calculer la somme (70).

Attribution des points :

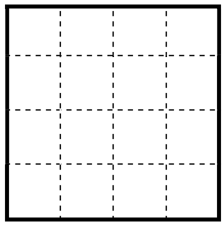
4 Réponse correcte (70) avec une description claire de la procédure suivie

Niveaux : 3, 4

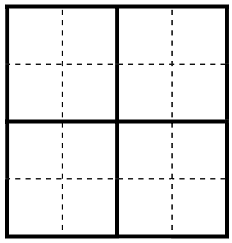
Origine : GTNU

4. **DIVISION D'UN CARRÉ** (Cat. 3, 4, 5)

Les enfants de la classe de l'enseignante Laura doivent découper une grille carrée (4 x 4) en suivant les lignes de la grille, en quatre parties de même forme (c'est-à-dire qui peuvent se superposer après les avoir déplacées et/ou retournées).



Barbara a découpé quatre carrés égaux.
Sur cette figure vous voyez la découpe de la grille faite par Barbara avec les quatre carrés.



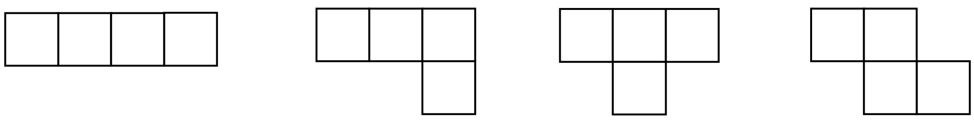
Trouvez d'autres façons de découper cette grille en quatre parties de même forme, qui ne sont pas des carrés, en suivant les lignes de la grille.

Pour chaque forme trouvée, montrez comment découper la grille en utilisant cette forme.

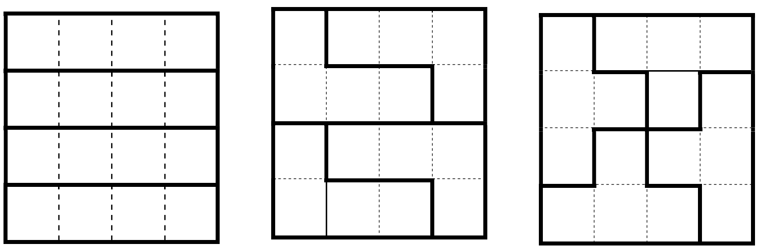
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique
Trouver les polygones composés de quatre carrés contigus (« tétrominos »), différents du carré 2 x 2, qui permettent de diviser une grille 4 x 4.

Analyse de la tâche
- Comprendre que la grille doit être découpée en quatre parties et que celles-ci doivent être superposables avec ou sans renversement.
- Se rendre compte que les parties doivent être composées chacune de quatre carrés contigus (tétrominos) et les étudier. En plus du carré de Barbara, il existe encore les quatre formes suivantes :



- Trouver que seules les trois premières formes constituent une subdivision de la grille :



Attribution des points

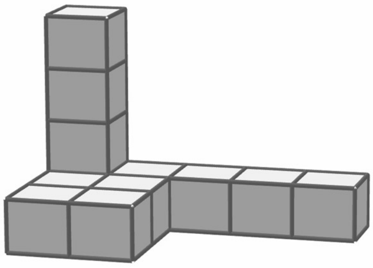
4 Les trois subdivisions possibles avec dessin ou collage précis

Niveaux : 3, 4, 5

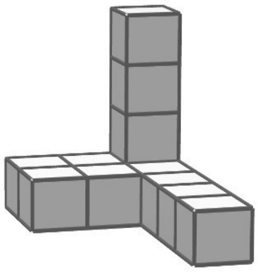
Origine : GPIL, selon l'activité traditionnelle sur les tétrominos.

5. **LE MONUMENT** (Cat. 3, 4, 5)

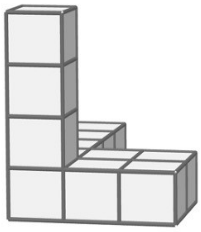
La figure ci-dessous représente le nouveau monument, composé à partir de cubes, situé au centre de la place de Transalpie.



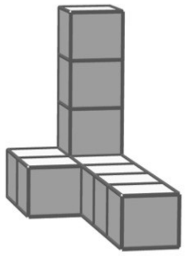
Les dessins ci-dessous (a, b, c, d, e, f) veulent représenter le même monument vu de différents points de la place, mais tous ne sont pas corrects.



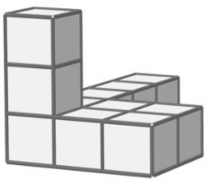
a



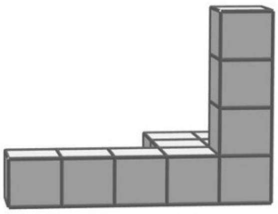
b



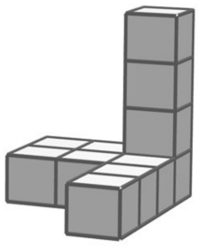
c



d



e



f

Certains des dessins a, b, c, d, e, f sont faux.

Identifiez-les, et expliquez pourquoi ils sont faux.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Étant donné l'image d'un solide formé de plusieurs cubes, dans un ensemble de six figures, reconnaître lesquelles, ne représentent pas correctement une rotation (sur un plan).

Analyse de la tâche

- Faire tourner mentalement la construction par rapport à l'observateur, pour l'observer d'un autre point de vue.
- Décomposer la construction en éléments plus simples à représenter mentalement, notamment dans les pièces horizontales et verticales (par exemple, observer que le monument peut être vu comme formé par une « tour » de quatre cubes, par un parallélépipède à base carrée formé par 2 × 2 cubes et un parallélépipède à base rectangulaire formé de 4 x 1 cubes).

- Comparer l'image mentale de la construction tournée avec chacun des dessins et conclure : a, b et e sont corrects.
- Identifier les trois dessins qui ne correspondent pas à l'original : c, d, f. En fait, en référence à l'exemple, un parallélépipède de cubes 2 × 1 apparaît en c au lieu de 2 × 2 ; en d, la « tour » fait 3 cubes de haut au lieu de 4 ; en f, un parallélépipède de cubes 3 × 1 apparaît, au lieu de 4 × 1.

Ou bien,

- Construire le monument fait de 12 cubes à partir de la représentation qui en est donnée. Faire pivoter cet assemblage de façon à le voir comme chacune des autres représentations. Conclure de la même façon que pour la première procédure.

Attribution des points

4 Solution complète : les trois dessins faux c, d, f, avec des explications claires (nombre de cubes manquants (p. ex. fig. c : il manque 2 cubes) et/ou différence entre le nombre de cube de l'original et celui de la figure (p. ex. monument 12 cubes ; fig. c : 10 cubes) et/ou indication de la position des cubes manquants (p. ex. fig. c : deux cubes en bas à gauche)

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : GTGE

6. **ONCLE ET NEVEUX** (Cat. 4, 5, 6)

Bruno a trois neveux, des garçons, dont deux jumeaux. Adèle lui demande l'âge de chaque enfant.

Bruno répond : « Lorsque je multiplie leurs âges, j'obtiens 36, lorsque j'additionne leurs âges, j'obtiens un nombre impair, l'aîné a les cheveux roux. »

Dites quel est l'âge des trois enfants.

Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer trois nombres dont les deux plus petits sont égaux et le plus grand différent, dont le produit est égal à 36 et la somme est un nombre impair.

Analyse de la tâche

- Comprendre que deux des trois nombres sont égaux (puisqu'il y a deux jumeaux) et inférieurs au troisième nombre.
- Se rendre compte que puisque la somme des âges est impaire et que deux âges sont égaux, le troisième âge doit être impair.
- Décomposer 36 en un produit de trois facteurs et découvrir que le seul triplet possible est 2 – 2 – 9.

Ou bien

- Décomposer le nombre 36 en produit de facteurs, en pensant que deux des trois nombres doivent être égaux et donc les triplets de nombres possibles sont : 1-1-36 ; 2-2-9 ; 3-3-4 ; 1-6-6
- Comprendre que parmi les quatre triplets précédents, il en reste seulement deux, puisque la somme des âges doit être impaire : 2-2-9 et 1-6-6
- Comprendre d'après la phrase « l'aîné a les cheveux roux » que le petit-fils non jumeau est le plus grand et donc que le triplet correct est 2-2-9.

Ou bien

- Procéder par essais et erreurs en recherchant trois nombres, dont deux identiques, qui vérifient les conditions.

Attribution des points

4 Réponse correcte (2-2-9) avec explications claires et complètes (deux nombres doivent être égaux et ce sont les plus petits) et détails des calculs bien expliqués.

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Val D'Aoste (11.II.07 *La question de Merlin le magicien*)

7. CHEZ LE MARCHAND DE GLACES (Cat. 5, 6, 7)

Pour la fête d'anniversaire de Luca, sa mère a décidé d'offrir une coupe de glace à tous les invités.

Sa mère a acheté :

- deux parfums de glace : vanille et chocolat
- de la chantilly et des noisettes concassées pour la garniture.

Elle décide que chaque coupe contiendra trois boules de glace.

Chaque invité pourra choisir une coupe avec un seul goût ou bien avec les deux. S'il le souhaite, il pourra aussi ajouter seulement de la chantilly ou seulement des noisettes concassées ou bien les deux.

Combien de coupes de glaces différentes pourra-t-on préparer ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Organiser l'inventaire des glaces possibles avec trois boules de deux parfums différents, avec ou sans garnitures qui peuvent être de deux types.

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque coupe peut être composée d'un ou deux parfums de glace : seulement vanille, seulement chocolat ou la combinaison des deux (V-V-V C-C-C C-C-V C-V-V), et donc comprendre qu'il y a quatre possibilités de coupes simples.
- Sur chaque coupe, on peut ajouter de la chantilly (on peut donc préparer quatre coupes différentes), ou bien on peut ajouter des noisettes concassées (on obtient alors quatre autres coupes), ou bien on peut ajouter ensemble de la chantilly et des noisettes concassées (on obtient quatre autres coupes).
- En conclure qu'il y a donc 16 coupes différentes (4 simples, 4 avec chantilly, 4 avec noisettes et 4 avec chantilly et noisettes).
- Pour déterminer tous les types différents de coupe de glace, les élèves peuvent construire des tableaux, des arbres de possibilités, ou bien dessiner les combinaisons possibles.

Attribution des points

4 Réponse correcte (16 coupes de glaces différentes) avec liste complète, schéma, dessin ou tableau

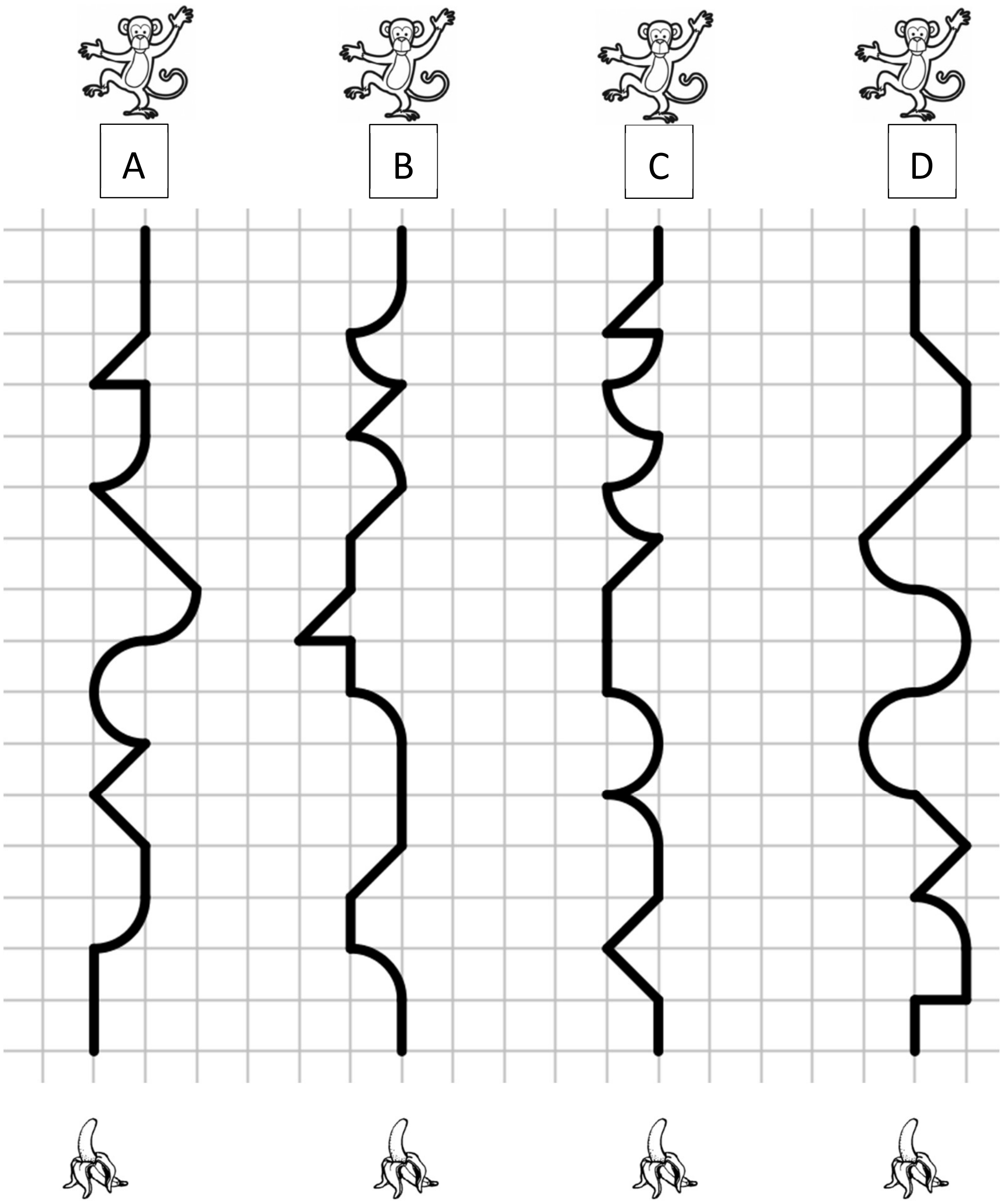
Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Rozzano

8. **LES CHEMINS DES SINGES (I)** (Cat. 5, 6, 7)

Tous ces singes ont faim.

Pour arriver à sa banane, chaque singe suit son parcours dessiné sur ce quadrillage.



Rangez les parcours dans l'ordre du plus court au plus long.

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans un quadrillage, comparer les longueurs des quatre parcours qui suivent des lignes horizontales, verticales, diagonales ou quart de cercle et les ranger dans l'ordre croissant de longueur.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les parcours sont formés de segments horizontaux et verticaux, côtés d'un carré de la grille (l), obliques, chacun étant une diagonale d'un carré (d) ou de quarts de cercle inscrits dans un carré (q) ; que dans chaque parcours les différences entre l, d et q doivent être prises en compte, donc qu'il ne suffit pas d'additionner leurs nombres pour déterminer la longueur du parcours entier.
- Exprimer la longueur de chaque chemin en fonction de la longueur l, de la longueur d et de la longueur q :
  Parcours A : $7\,l + 5\,d + 5\,q$; Parcours B : $8\,l + 4\,d \quad 5\,q$;
  Parcours C : $6\,l + 4\,d + 7\,q$; Parcours D : $6\,l + 5\,d + 6\,q$;
- Comparer les nombres de segments de longueur l, puis de longueur d puis les nombres de quarts de cercle et conclure que le classement demandé est : $B < A < D < C$ (pour classer les parcours, remarquer que $l < d < q < 2l$).

ou

- Mesurer avec une règle les différents segments de chaque parcours, additionner ces mesures et comparer les résultats quand le nombre d'arcs de cercle est identique ce qui est le cas pour comparer les parcours A et B.

Attribution des points

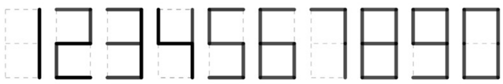
4 Réponse correcte ($B < A < D < C$) avec une explication claire de la procédure utilisée pour comparer les différentes longueurs (mesure des parcours ou de parties de parcours, comptages des côtés, des diagonales des carreaux du quadrillage et des quarts de cercles)

Niveaux : 5, 6, 7

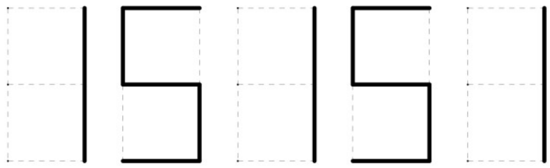
Origine : Lyon (8.II.08. *La traversée du quadrillage*)

9. LE COMPTEUR DE MATHIAS (Cat. 5, 6, 7)

Mathias a un vélo équipé d'un compteur kilométrique à cinq chiffres sur lequel les chiffres apparaissent comme ceci



Mathias est sur son vélo et lit sur son compteur le nombre



Laure arrive en face de Mathias et s'étonne de lire le même nombre de son côté.

Ils se demandent si le compteur affichera d'autres nombres supérieurs à 15 151 qui peuvent se lire des deux côtés de la même façon. On ne tient pas compte de l'espace entre les chiffres.

Combien de ces nombres le compteur affichera-t-il par la suite avant d'atteindre 20 000 km ?

Indiquez tous ces nombres en expliquant comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver des nombres entre 15 151 et 20 000 qui présentent une symétrie centrale en écriture digitale.

Analyse de la tâche

- Lister tous les chiffres qui présentent une symétrie centrale : 0, 1, 2, 5 et 8 et constater que 6 est le symétrique de 9.
- Constater que le premier et le cinquième chiffre doivent être des « 1 » : il ne reste plus que 3 chiffres à trouver.
- Le deuxième chiffre et le quatrième, peuvent être 5 et 5, 6 et 9, 8 et 8 ou 9 et 6, car ils doivent présenter une symétrie centrale entre eux.
- Le troisième chiffre ne peut être que 0, 1, 2, 5 et 8, ce qui offre 5 nouveaux nombres à chaque fois qu'on fixe le couple composé du deuxième et quatrième chiffre, mais si les deux premiers chiffres sont 1 et 5, alors le troisième ne peut être ni 0 ni 1 ce qui permet de déduire qu'il n'y a que 3 nombres commençant par 1 et 5 et 5 nombres commençant par 1 et 6 puis 5 nombres commençant par 1 et 8 puis 5 nombres commençant par 1 et 9.
- Finalement il y a 18 possibilités (3 x 5 + 3) : 15251, 15551, 15851, 16091, 16191, 16291, 16591, 16891, 18081, 18181, 18281, 18581, 18881, 19061, 19161, 19261, 19561, 19861.

Attribution des points

4 Réponse correcte (18 avec la liste de tous les nombres trouvés) avec une explication claire de la démarche ou présentation exhaustive des 18 nombres montrant une organisation facilitant l'atteinte de l'exhaustivité (par exemple liste de tous les nombres commençant par 15 puis 16 puis 18 puis 19)

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Suisse Romande

10. LES MELONS (Cat. 5, 6, 7)

Le grand-père fait la récolte de ses melons et se fait aider par ses neuf petits-enfants, ayant promis un pourboire.

Il fournit à chaque petit-enfant une cagette pouvant contenir au maximum 10 melons.

Une fois la récolte terminée, les enfants rapportent les cagettes à leur grand-père : dans chaque cagette, il y a au moins 4 melons. Trois cagettes contiennent le même nombre de melons alors que dans les autres, les nombres de melons sont toujours différents.

Pour chaque melon récolté, le grand-père met une pièce de 1 euro sur une table et ces pièces devront être réparties en parts égales entre ses petits-enfants.

À la fin, il ne reste plus aucune pièce sur la table.

Combien d'euros chaque petit-enfant a-t-il reçus ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Additions et multiplications de nombres entiers ; recherche d'un entier naturel multiple de 9 respectant certaines contraintes

Analyse de la tâche

- Comprendre que dans chaque cagette il peut y avoir au moins 4 melons et un maximum de 10, de sorte qu'un minimum de 36 melons et un maximum de 90 melons ont été récoltés ; dans trois cagettes, il y a le même nombre de melons ; dans les six autres, le nombre de melons est toujours différent ; le nombre de melons récoltés est égal au nombre de pièces de monnaie.
- Comprendre que les 9 petits-enfants devront se partager équitablement le nombre de pièces ; comme chaque petit-enfant reçoit le même nombre de pièces, le nombre cherché doit être un multiple de 9, compris entre 36 et 90, les extrêmes étant exclus.
- Procéder par tâtonnements non organisés, avec des opérations additives et multiplicatives, en tenant compte du nombre minimum et maximum de melons dans chaque cagette, ce qui peut conduire à la solution exacte mais ne donne pas la certitude d'une solution unique.

Ou bien,

- effectuer une recherche organisée en tenant compte des contraintes indiquées par le problème : opérations additives avec neuf additions, trois nombres égaux, nombres entiers de 4 à 10 ; somme totale multiple de 9.

$$4 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 57$$
$$4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 59$$
$$4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 61$$
$$\mathbf{4 + 5 + 6 + 7 + 7 + 7 + 8 + 9 + 10 = 63}$$
$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 8 + 8 + 9 + 10 = 65$$
$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 9 + 9 + 10 = 67$$
$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 10 + 10 = 69$$

- Éliminer les sommes qui ne sont pas des multiples de 9.
  Une seule suite vérifie toutes les conditions requises. Il y a en tout 63 melons récoltés.
- Ou bien, faire une recherche organisée qui utilise la multiplication (par exemple en insérant les différents cas dans un tableau comme celui-ci)

Trois cagettes égales	Six cagettes inégales	**total**
4*3 = 12	5+6+7+8+9+10 = 45	57
5*3 = 15	4+6+7+8+9+10 = 44	59
6*3 = 18	4+5+7+8+9+10 = 43	61
7*3 = 21	**4+5+6+8+9+10 = 42**	**63**
8*3 = 24	4+5+6+7+9+10 = 41	65
9*3 = 27	4+5+6+7+8+10 = 40	67
10*3 = 30	4+5+6+7+8+9 = 39	69

- Éliminer les suites qui ne donnent pas un nombre de melons multiple de 9.

  Une seule suite vérifie toutes les conditions requises. Au total, 63 melons ont été collectés Le nombre total de melons est égal au nombre de pièces placées dans l'enveloppe ; 63 pièces réparties équitablement entre les 9 petits-enfants, permet de donner à tous le même pourboire : 63 : 9 = 7euros. Chaque petit-enfant recevra 7 euros.

Attribution des points

4 Bonne réponse (7 euros à chaque petit-enfant) avec une description claire et exhaustive de la recherche effectuée (calculs, vérification, …).

Niveaux : 5 ,6, 7

Origine : Cagliari

11. À PAS DE POULES (Cat. 6, 7, 8)

Deux poules sont à 30 « pas de poule » l'une de l'autre. Elles partent en même temps et s'approchent l'une vers l'autre en ligne droite. Elles font des pas de même longueur (des « pas de poule ») et au même rythme. Chaque poule fait un pas (en avant ou en arrière) exactement en même temps que l'autre.

La poule A se déplace en faisant 3 pas en avant puis 1 pas en arrière et ainsi de suite. La poule B se déplace en faisant 5 pas en avant puis 2 pas en arrière et ainsi de suite.

À quelle distance, en « pas de poule », de son point de départ la poule A se trouve-t-elle lorsque qu'elle rencontre la poule B ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le point de rencontre entre deux mobiles dont les déplacements sont différents.

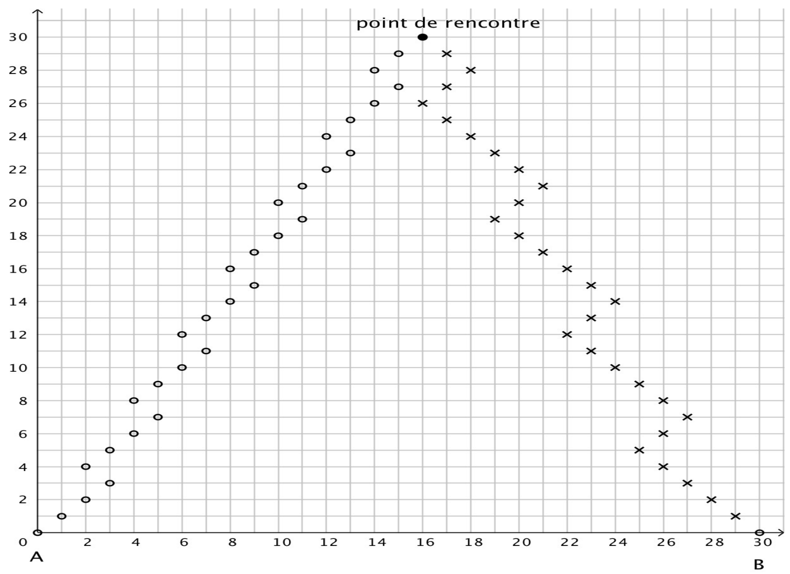
Analyse de la tâche

- Comprendre que le « pas de poule » est l'unité de mesure de longueur et l'unité de temps.
- Prendre en compte la distance initiale entre les deux poules (30 pas)
- Prendre en compte le fait que les poules effectuent leurs pas au même rythme.
- Prendre en compte pour chaque poule les pas en avant puis en arrière.
- Déterminer la distance entre le point de départ de la poule A et le point de rencontre
- Autres raisonnements possibles :
  - Jouer le jeu à deux, avec deux pions A et B, sur une piste de 31 cases (de 0 à 30) un troisième joueur contrôle et/ou donne le rythme et constater qu'après 30 pas chacun les deux pions arrivent sur la case 16
  - Représenter le parcours par un axe de longueur 30, gradué (de 0 à 30) et y représenter les déplacements (de couleurs différentes éventuellement) par des segments ou des suites de points (en zigzag pour éviter les recouvrements)
  - Une procédure plus simple peut être envisagée : constater que la poule A se déplace périodiquement en avançant de 2 sur une période de 4 et que la poule B avance de 3 sur une période de 7, et qu'après 28 pas, A parvient à la case 14 = 7 x 2 et B à la case 30 – 4 x 3 = 18. Il reste 4 cases à franchir : deux par poule pour se retrouver sur la case 16.

Ou bien,

- représenter les distances effectuées à l'aide d'un tableau ou d'une représentation graphique permettant de repérer le point où les deux poules se rencontrent.

nombre de pas parcourus
par chaque poule



distance entre les poules et le point de départ de la poule A

Nombre de pas parcourus par poule	Distance entre le départ de la poule A et la poule A	Distance entre le départ de la poule B et la poule B	Distance entre les deux poules
1	1	1	28
2	2	2	26
3	3	3	24
4	2	4	24
5	3	5	22
6	4	4	22
7	5	3	22
8	4	4	22
9	5	5	20
10	6	6	18
11	7	7	16
12	6	8	16
13	7	7	16
14	8	6	16
15	9	7	14
16	8	8	14
17	9	9	12
18	10	10	10
19	11	11	8
20	10	10	10
21	11	9	10
22	12	10	8
23	13	11	6
24	12	12	6
25	13	13	4
26	14	14	2
27	15	13	2
28	14	12	4
29	15	13	2
30	16	14	0

Attribution des points

4 Réponse correcte (16 pas de poules) avec explications claires et complètes de la procédure

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Suisse Romande

12. LES FEUTRES FLUORESCENTS (Cat. 6, 7, 8)

Lorenzo veut acheter des feutres fluorescents à pointe large et à pointe fine.

Ceux à pointe large coûtent le double du prix de ceux à pointe fine. Lorenzo décide d'acheter 4 feutres à pointe fine et 2 à pointe large. Son ami Alex, au contraire, en achète 4 à pointe large et 2 à pointe fine et il dépense 2,50 euros de plus que Lorenzo.

Quel est le prix d'un feutre à pointe large ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Résoudre un système simple de deux équations linéaires à deux inconnues dont l'une est double de l'autre. Il se ramène à une simple relation arithmétique qui peut être résolue sans l'algèbre.

Analyse de la tâche

- Comprendre la relation entre les prix des deux types de feutres.
- Procéder par essais-erreurs (tentatives et ajustement). Par exemple partant du coût d'un feutre à pointe fine de 1 €, on obtient une différence d'achat de 2 € (trop petite). Changer le coût du feutre à pointe fine jusqu'à trouver la somme de 1,25 € pour le feutre à pointe fine et 2,5 € pour le feutre à pointe large. Exemple de calculs :

F	L	4F + 2L	2F + 4L	Différence
1	2	8	10	2
2	4	16	20	4
1,5	3	12	15	3
1,25	2,5	10	12,5	2,5

- Utiliser une représentation graphique pour exprimer la relation entre les coûts des feutres et pour trouver le coût d'un type de feutre. Cette stratégie permet de comprendre que la différence de dépense correspond au coût d'un feutre à pointe large ou de deux feutres à pointe fine, soit 2,50 €.
- Algébriquement poser et résoudre une équation. Par exemple, en notant x le coût d'un feutre à pointe fine : $4x + 2\times2x + 2,5 = 4\times2x + 2x$, c'est-à-dire $8x + 2,5 = 10x$, donc $x = 1,25$ et conclure que le coût d'un feutre à pointe large est 2,5 €.

Ou bien,

$2x + 4\times1/2x + 2,5 = 4x + 2\times1/2x$, c'est-à-dire $4x + 2,5 = 5x$ donc $x = 2,5$ qui est le coût d'un feutre à pointe large.

Attribution des points

4 Réponse correcte (2,50 €) avec une description claire et complète

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : GTCP

13. LAPIN DE PÂQUES EN TRANSALPIE (Cat. 7, 8, 9, 10)

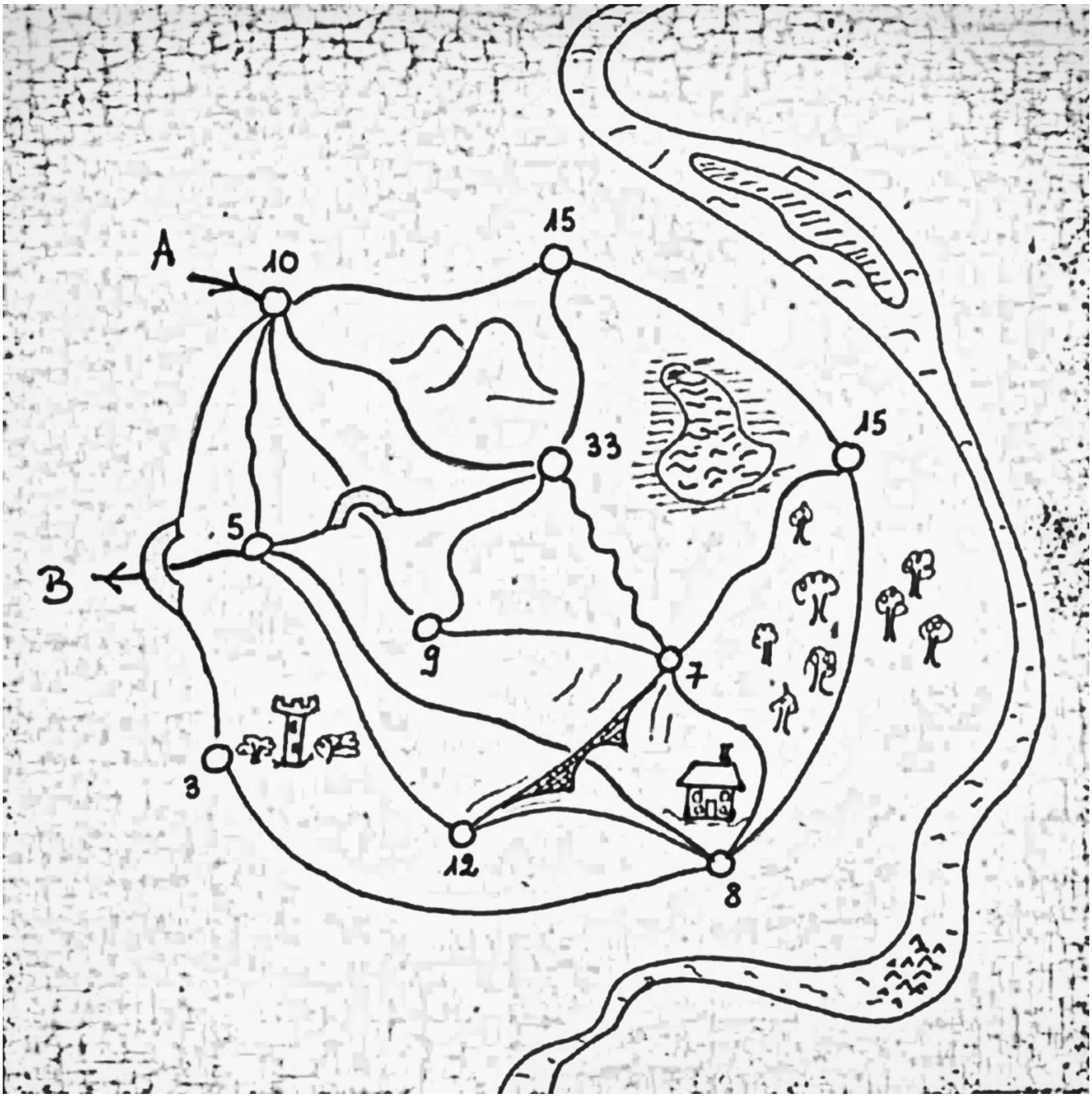
Dans un village de Transalpie, le lapin de Pâques veut distribuer un maximum d'œufs dans des nids placés à différents endroits du village.

Le lapin répartit les œufs selon les règles suivantes :

- Il entre en A dans le village et sort en B en suivant les chemins dessinés.
- Dans chaque nid, il doit déposer le nombre d'œufs indiqué sur le plan ci-dessous.
- Il redépose le nombre d'œufs indiqué dans un nid à chaque fois qu'il repasse par ce nid.
- Il ne reprend jamais un chemin déjà parcouru.

Quel est le plus grand nombre d'œufs que le lapin peut distribuer dans les nids en respectant les règles données ?

Expliquez votre raisonnement en indiquant le parcours suivi.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver un itinéraire sur un plan donné pour distribuer un maximum d'œufs sans passer deux fois par le même chemin. Décompte des passages possibles dans les nœuds d'un réseau.

Analyse de la tâche

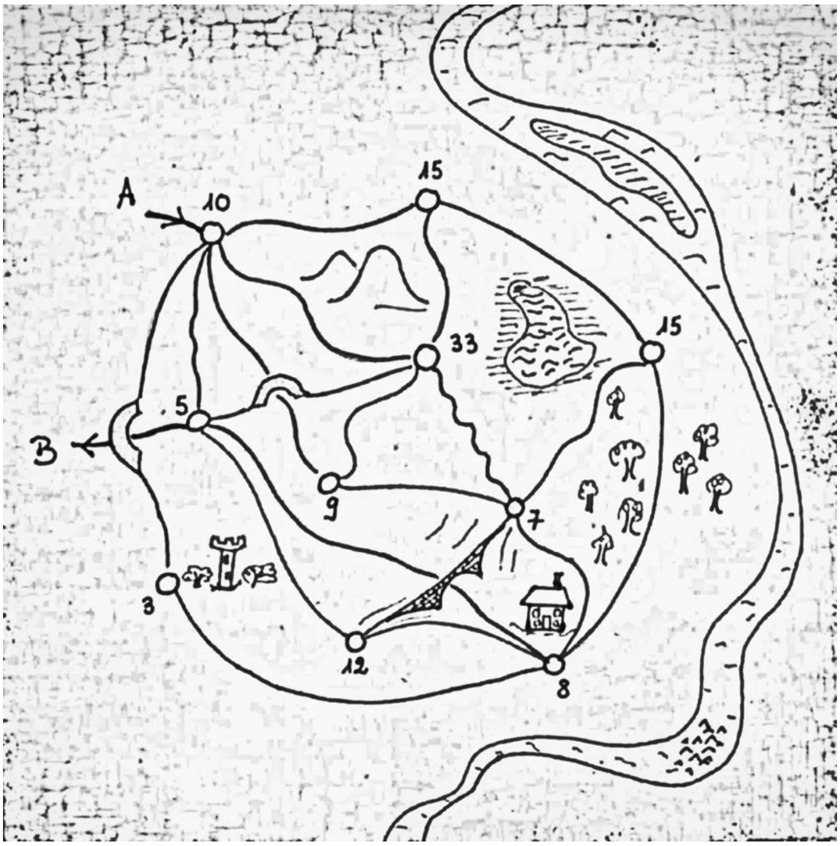
- Comprendre les règles données et faire quelques essais en passant le plus souvent possible près des nids admettant un grand nombre d'œufs (par exemple 33 ; 15 ; 12).
- Établir combien de fois on peut passer au maximum près de chaque nid ? Pour chaque nid, il faut compter le nombre de chemins qui y arrivent. Puisque le lapin doit arriver au nid et en repartir, il doit emprunter deux chemins à chaque passage. S'il y a un nombre pair de chemins, il suffit de diviser par 2 (par exemple : 6 chemins : 2 = 3 passages au maximum). S'il y a un nombre impair de chemins, il faut retrancher un chemin et diviser par 2 (par exemple : (5 chemins – 1) : 2 = 2 passages au maximum). Ce qui mène au tableau suivant :

Nombre d'œufs par nid	10	15	15	8	3	7	33	9	12	5
Nombre de chemins	6	3	3	5	2	5	5	3	3	5
Nombre maximal de passages	3	1	1	2	1	2	2	1	1	2

- Le maximum théorique d'œufs que le lapin peut distribuer est donc :

$$10\times3 + 15\times1 + 15\times1 + 8\times2 + 3\times1 + 7\times2 + 33\times2 + 9\times1 + 12\times1 + 5\times2 = 190$$

- Il reste à trouver un itinéraire qui permette de distribuer ce nombre maximal d'œufs. Voici un exemple d'un tel parcours : A→10→15→15→7→33→10→9→33→5→8→7→12→8→3→10→5→B



Total des œufs déposés par le lapin :

$$10 + 15 + 15 + 7 + 33 + 10 + 9 + 33 + 5 + 8 + 7 + 12 + 8 + 3 + 10 + 5 = 190$$

C'est donc le maximum théorique d'œufs que le lapin peut distribuer.

Attribution des points

4 Réponse correcte (190 œufs) avec indication claire du chemin emprunté et description du raisonnement effectué

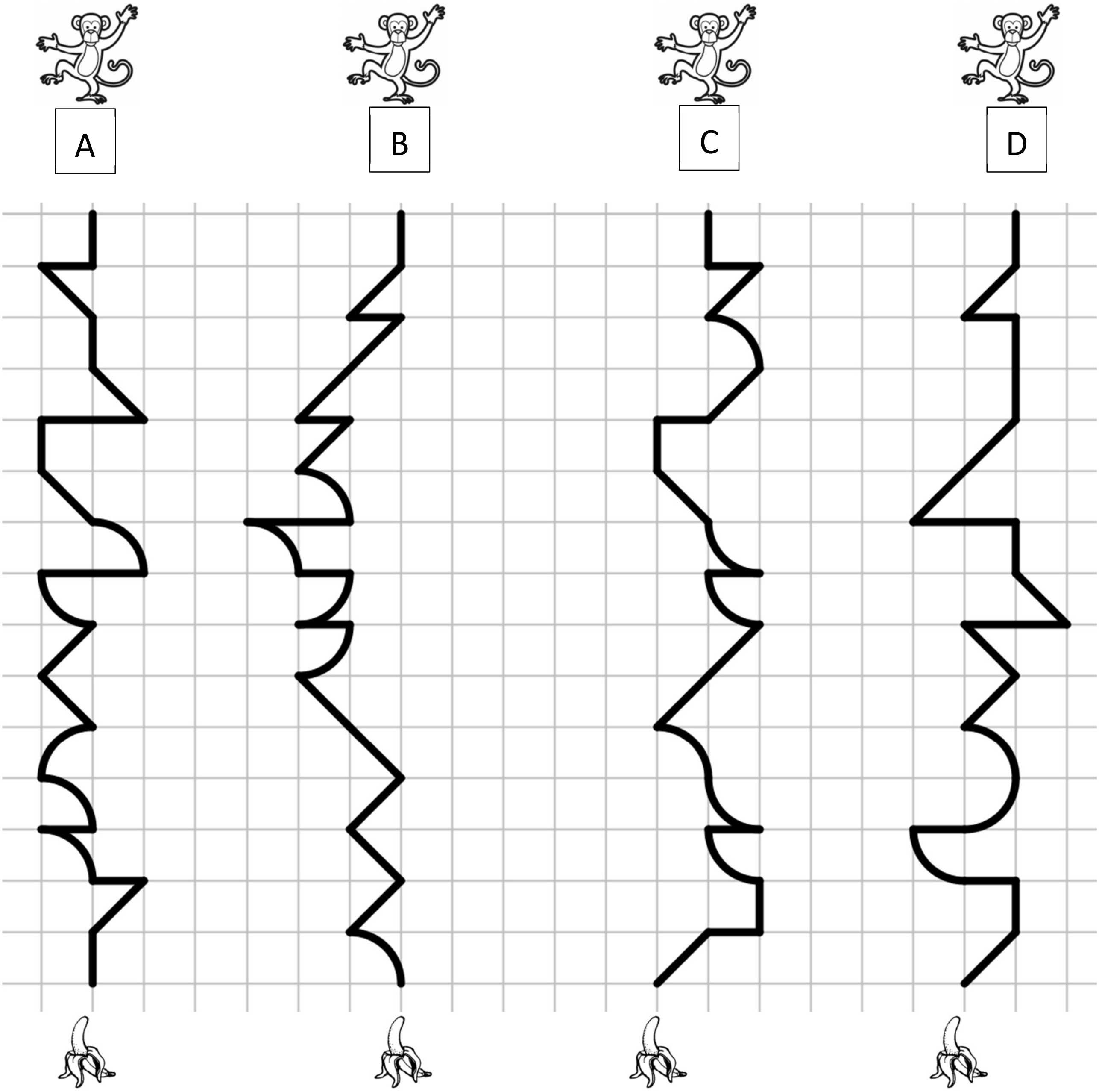
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Luxembourg

14. LES CHEMINS DES SINGES (II) (Cat. 8, 9, 10)

Tous ces singes ont faim.

Pour arriver à sa banane, chaque singe suit le parcours dessiné sur ce quadrillage.



Rangez les parcours du plus court au plus long.

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans un quadrillage, comparer les longueurs de plusieurs parcours qui suivent des lignes horizontales, verticales, diagonales ou des quarts de cercle et les ranger dans l'ordre croissant de leurs longueurs.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les chemins sont formés par des segments horizontaux et verticaux, les côtés d'un carré du quadrillage (*l*), par des segments obliques, chaque diagonale d'un carré du quadrillage (*d*) ou par des quarts de cercle inscrits dans un carré (*q*) ; que dans chaque trajectoire, les différences entre *l*, *d* et *q* doivent être prises en compte et qu'il ne suffit donc pas d'additionner leurs nombres pour déterminer la longueur du parcours entier.
- Exprimer la longueur de chaque chemin en fonction de la longueur *l*, de la longueur *d* et de la longueur *q* :
  Parcours A : $11\,l + 6\,d + 5\,q$; Parcours B : $7\,l + 9\,d + 5\,q$;
  Parcours C : $8\,l + 6\,d + 6\,q$; Parcours D : $12\,l + 7\,d + 3\,q$;
- Comparer les nombres de segments de longueur *l*, puis de longueur *d* puis les nombres de quarts de cercle et conclure que le classement demandé est C < D < A < B (pour classer les parcours, on pourra remarquer que $l < d < q < 2l$).
- Repérer des parcours qui ont le même nombre de *l*, de *d*, ou de *q*. Par exemple A et B ont le même nombre de quarts de cercle (*q*) ; A et C ont le même nombre de diagonales (*d*).
- Comparer ensuite ces parcours :
  - Remarquer que A a 4 *l* de plus que B, que B a 3 *d* de plus que A. Il faut donc comparer $4l$ et $3d$ pour savoir quel parcours est le plus grand parcours. Or $3d$ vaut $3l\sqrt{2}$ et $3\sqrt{2} > 4$ donc A est plus petit que B.
  - Remarquer que A a 3 *l* de plus que C et que C a *q* de plus que A. Il faut donc comparer $3l$ et *q* pour savoir quel est le plus grand parcours. Or *q* vaut $l \times \pi/2$ et $\pi/2 < 3$ donc C est plus petit que A.
- Comparer les parcours C et B. B a 3 *d* de plus que C et C a $1l$ et $1q$ de plus que B. Il faut donc comparer $3d$ et $(1l + q)$. Or $3d = 3l\sqrt{2}$ et $(1l + q) = (\pi/2 + 1)\,l$ et $(\pi/2 + 1) < 3\sqrt{2}$ donc B est plus grand que C.
- Comparer les parcours D et A. A a 2 *q* de plus que D et D a $1l$ et $1d$ de plus que A. Il faut donc comparer $2q$ et $(1l + 1d)$. Or $q > d > l$ donc $2q > (1l + 1d)$ donc A est plus grand que D ;
- Comparer les parcours C et D. D a $4l + d$ de plus que C, et D a $3q$ de moins que C.
  $4l + d = (4 + \sqrt{2})l > 3l\,\pi/2$ donc D > C
- Finalement on obtient le rangement suivant : C < D < A < B.

Ou bien :

- Mesurer avec une règle les différents segments de chaque parcours, additionner ces mesures et comparer les résultats quand le nombre d'arcs de cercle est identique ce qui est le cas pour comparer les parcours A et B.
- Exprimer toutes les distances en fonction de *l* et comparer les coefficients à partir des valeurs approchées :
  - Parcours A : $(11 + 6\sqrt{2} + \frac{5}{2}\pi)\,l \approx 27{,}34l$; Parcours B : $(7 + 9\sqrt{2} + \frac{5}{2}\pi)\,l \approx 27{,}58l$;
  - Parcours C : $(8 + 6\sqrt{2} + \frac{6}{2}\pi)\,l \approx 25{,}91l$; Parcours D : $(12 + 7\sqrt{2}\ \ \frac{3}{2}\pi)\,l \approx 26{,}61l$

Attribution des points

4 Réponse correcte (C < D < A < B) avec une explication claire de la procédure utilisée pour comparer les différentes longueurs (mesure des parcours ou de parties de parcours, comptages des côtés, des diagonales des carreaux du quadrillage et des quarts de cercles)

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Lyon (8.II.08. *La traversée du quadrillage*)

15. LES ASPERGES (Cat. 8, 9, 10)

Deux frères Fabio et Alberto ont récolté chacun des asperges sauvages et les pèsent :

- Il manque 50 grammes à la récolte d'Alberto pour atteindre le double du poids de celle de Fabio.
- La récolte d'Alberto pèse moins que celle de son frère.
- Une asperge pèse au moins 5 grammes.

Combien de grammes d'asperges Fabio a-t-il pu récolter ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver l'intervalle solution de 3 relations simples du 1° degré à deux inconnues comprenant 2 inégalités et une égalité.

Analyse de la tâche

- Comprendre, d'après la dernière affirmation, qu'en connaissant le poids des asperges de Fabio ou d'Alberto, il est possible de déterminer le poids de la récolte de l'autre frère en respectant les conditions : une asperge pèse au moins 5 grammes et Alberto fait une récolte plus petite que celle de Fabio.
- Comprendre, à partir de ces conditions que les possibilités sont nombreuses.
- Procéder par essais plus ou moins organisés : supposer par exemple que Fabio ait récolté 20 grammes d'asperges, le double étant 40 grammes. Notez qu'en soustrayant 50 grammes, la récolte d'Alberto ne serait pas possible ! Même avec 25 grammes de récolte de Fabio, il n'y aurait pas de récolte pour Alberto. Ensuite, procédez par essais pour qu'il y ait au moins une récolte minimale pour Alberto. (Notez que pour 26 et 27 grammes, la condition « une asperge pèse au moins 5 grammes » ne serait pas remplie). À partir de 27,5 grammes pour Fabio les solutions sont acceptables. Essayer, par exemple, avec 30 grammes pour Fabio, le double est 60 grammes et donc Alberto aurait ramassé 10 grammes et cette solution est acceptable car elle respecte les conditions et parce qu'Alberto a récolté au moins une asperge. Continuer et noter que si Fabio avait récolté 50 grammes, Alberto aurait à son tour récolté (A = 2 × 50 – 50 = 100 – 50 = 50 grammes, solution inacceptable car la condition « Alberto a récolté moins que Fabio » n'est pas remplie. Si l'on continuait au-delà de 50 g, cette condition ne serait toujours pas remplie.
- La procédure par essais peut être présentée avec ou sans tableau :

A	5	10	20	...	45	49	50	60	...
A+50=2F	55	60	70		95	99	100	110	
F	27,5	30	37,5		47,5	49,5	50	55	
solution	oui	oui	oui		oui	oui	non	non	

Ou bien

- Exprimer algébriquement les trois conditions comme par exemple : $A = 2F - 50$, $A < F$, $A \geq 5$.
  De la seconde on a : $2F - 50 < F$ soit $F < 50$ et de la troisième $2F - 50 \geq 5$ soit $F \geq 27,5$.
  Pour conclure : $27,5 \leq F < 50$.

Ou bien

- Représenter graphiquement ce système en notant x la récolte en grammes de Fabio et éventuellement y la récolte en grammes d'Alberto puis résoudre le système en tenant compte de toutes les conditions et les contraintes de l'énoncé.

Attribution des points

4 Réponse correcte ($27,5 \leq F < 50$ en langage symbolique et/ou naturel) avec une explication claire et exhaustive de la procédure suivie (appropriation évidente du problème avec essais indiquant les opérations effectuées et la vérification, ou par un tableau mettant en évidence les relations entre les variables ou en cas de procédure algébrique ou graphique, une approche correcte des inégalités et des contraintes avec explication).

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Pouilles

16. LA BOÎTE DE BONBONS (Cat. 8, 9, 10)

Pierre est très gourmand. À l'occasion de sa fête d'anniversaire, ses 3 amis, Karl, Mathias et François décident de lui proposer un jeu dont la récompense est une grande boîte pleine de bonbons.

Pour obtenir la récompense, Pierre doit trouver les dimensions de cette boîte.

Chacun de ses amis lui donne un indice.

- Karl lui dit que la boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle de 10 cm de haut
- Mathias indique que le périmètre de la base de la boîte est 2 m.
- François précise que les dimensions de la boîte ont été choisies pour que la boîte contienne la plus grande quantité de bonbons possible.

Quelles sont les dimensions de la base de la boîte ?

Expliquez comment Pierre peut être sûr de ne pas se tromper.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

Trouver les dimensions de la base d'un parallélépipède rectangle, avec le périmètre de la base et la hauteur fixes, pour que son volume soit maximum.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il est nécessaire de déterminer les deux dimensions de base, en gardant le périmètre fixe, de manière à avoir le volume maximum, (et donc la surface de base maximum) ;
- garder la somme des deux dimensions de base, *a* et *b*, fixe, exprimer l'une en fonction de l'autre et les faire varier de manière à avoir une plus grande aire. Cela sera possible en construisant un tableau dans lequel les dimensions doivent nécessairement être exprimées en nombres décimaux. Par exemple dans le tableau suivant on a attribué des valeurs à *a*.

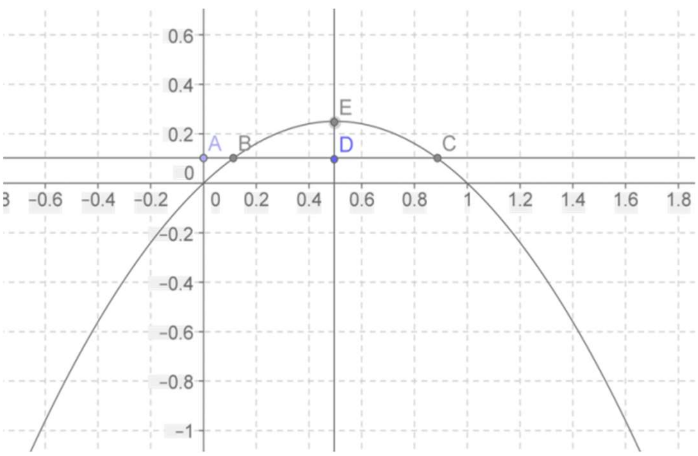
a	*b = 1-a*	*Aire (a×b)*
0,1	0,9	0,09
0,2	0,8	0,16
0,5	0,5	0,25
0,99	0,01	0,0099

- Se rendre compte que la surface maximale est obtenue lorsque les deux dimensions sont égales et donc avec un carré de 0,5m de côté.
- observer qu'il existe une symétrie entre les valeurs des deux dimensions, il sera donc possible d'affirmer, à partir du tableau, que 0,5, la valeur médiane, est la plus grande possible pour obtenir la plus grande surface. En fait, si on augmente encore une dimension, l'autre diminue.
  Fixer ensuite les dimensions de la base que Pierre choisira : 0,5 m ; 0,5 m.

Ou bien :

- Exprimer le volume de la boîte (y) en fonction d'une des dimensions de base (*x*) : $y = x\,(1 - x) \times 0{,}1$

On obtient une parabole dont le graphique est le suivant :



L'abscisse du sommet E de la parabole est la valeur de la dimension x pour laquelle l'aire de base et donc le volume sont maximaux compte tenu des contraintes du problème.

Attribution des points

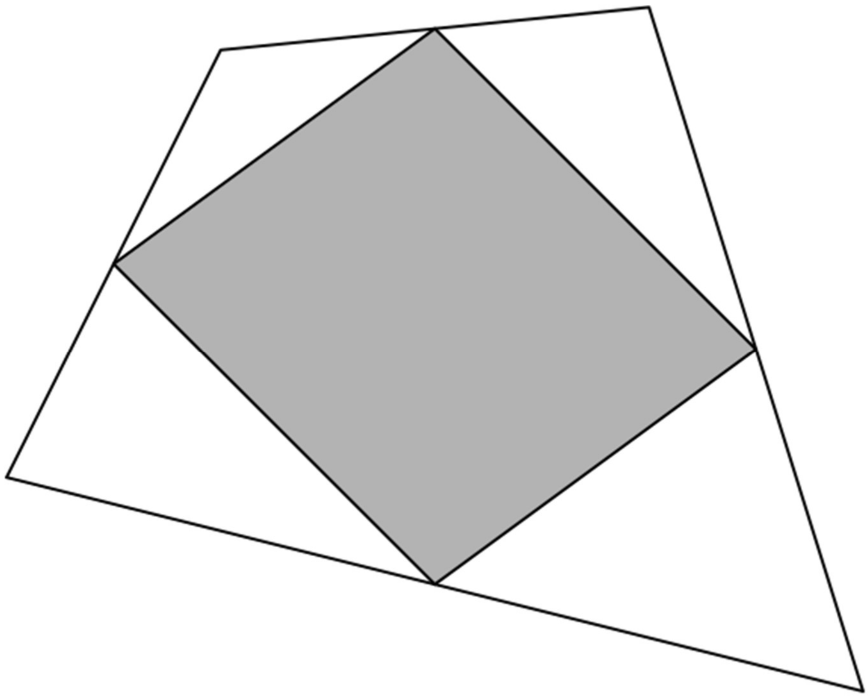
4 Bonne réponse qui démontre que le carré est la base qui a l'aire maximale, ou qui contient un argument convaincant partant de l'observation sur le tableau de la symétrie entre les deux dimensions de base

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Milan (22.II.16. *Le paquet de Claire*)

17. UNE VISITE AU MUSÉE (Cat. 8, 9, 10)

Alicia et Berio visitent le musée d'art moderne de Transalpie. Ils admirent une œuvre (représentée ci-dessous) de l'artiste Randomin intitulée *Parallélogramme gris sur fond blanc.*



Alicia : - Tu as remarqué, Berio, les sommets du parallélogramme gris sont les milieux des côtés du quadrilatère blanc.

Berio : - Oui, tu as raison, Alicia. Et le peintre a utilisé plus de peinture grise que de peinture blanche !

Alicia : - Ah, là, je ne suis pas d'accord ! Je pense que la surface grise a la même aire que la surface blanche.

Qui, d'Alicia ou de Berio, a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

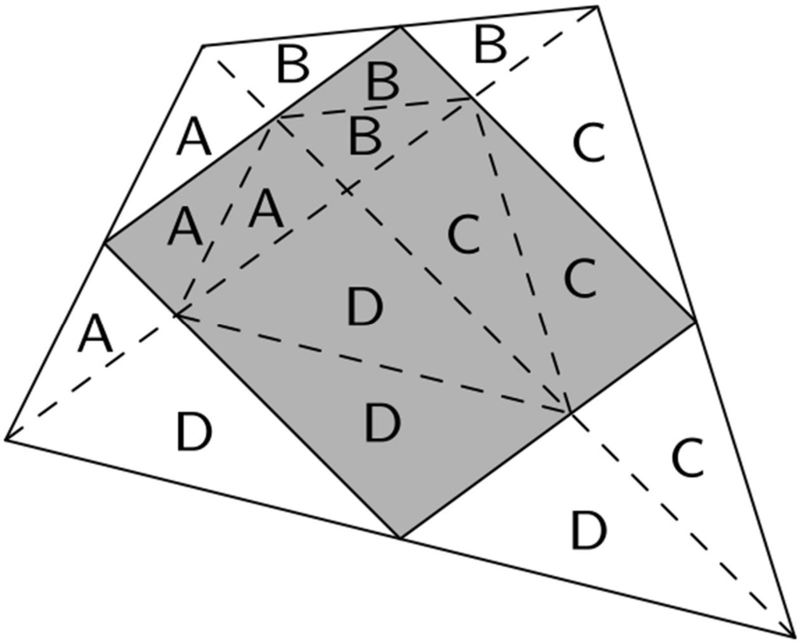
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Les droites passant par les milieux des côtés adjacents d'un quadrilatère convexe forment un parallélogramme et quatre triangles ayant des côtés égaux deux à deux. Par des déplacements successifs, regroupant les angles du quadrilatère en un même point, montrer qu'on obtient un parallélogramme identique au précédent.

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'on a découpé le quadrilatère suivant les droites passant par les milieux des côtés adjacents.
- Comprendre qu'il faut comparer les surfaces du parallélogramme gris et des quatre triangles blancs, en évaluant si elles sont égales ou différentes.
- Diviser la figure en parties égales (par exemple, les triangles indiqués dans le dessin suivant avec la même lettre sont égaux car ayant des côtés égaux, obtenus en divisant des segments par leurs milieux) et conclure que les surfaces blanches et grises ont la même aire.

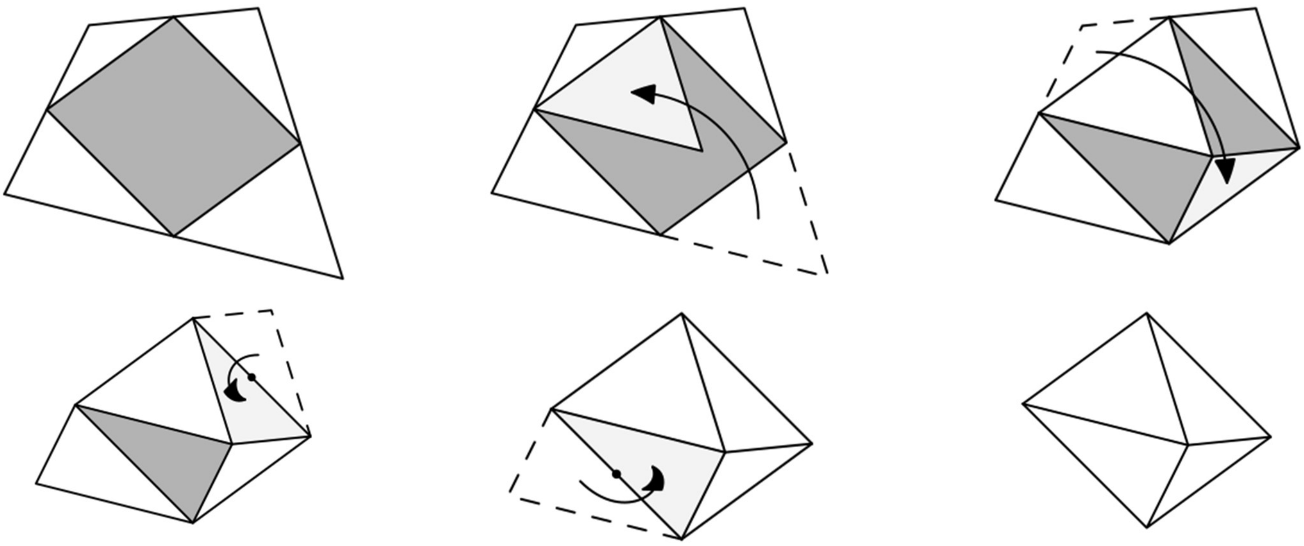


Ou bien,

- Reconnaître des paires de triangles semblables de rapport de similitude 2 (la droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et détermine donc les triangles d'angles égaux deux à deux). Considérons le rapport entre leurs aires : la somme des aires de deux triangles blancs "opposés" (par exemple ceux formés par les triangles A et B et les triangles C et D) est égale à ¼ de l'ensemble du quadrilatère, donc tous les quatre ensemble ont une aire égale à la moitié du quadrilatère.

Ou (avec une technique élémentaire qui, cependant, se verra attribuer un score inférieur)

- Essayer, par recadrage, de comprendre si les surfaces blanches peuvent se superposer au parallélogramme, par exemple en effectuant deux translations et deux rotations comme le montrent les dessins suivants. Nous obtenons la superposition des quatre triangles avec le parallélogramme et concluons qu'ils ont la même aire.



Pour justifier la superposition, on peut observer que la somme des angles du quadrilatère est égale à 360°, comme l'angle formé par les quatre sommets des triangles groupés.

Attribution des points

4 Réponse correcte (c’est Alice qui a raison, la surface blanche et la surface grise ont la même aire) avec une justification claire (basée sur l’égalité ou sur la similitude)

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté