	Titre	*Niveaux*	*Origine*	*Thème*
1	Puzzle de deux pièces	3 4	GPIL	Construction de polygones avec deux demi-rectangles
2	Oranges	3 4	SI	Répartition de 84 objets en trois parties de rapport 1, 2 et 4
3	Compter "tic, tac, toc"	3 4	BE	Numération dans une base additive de trois nombres 1, 5 et 25
4	Gâteaux aux châtaignes (I)	3 4	GTCP	Relation de proportionnalité élémentaire entre deux grandeurs, en nombres naturels
5	Tous en file (I)	3 4	LU	Recherche de permutations
6	Les œufs de Catherine	4 5 6	SI	Répartition de 138 objets en 28 récipients de 4 et 6 objets
7	Décoration de ballons	5 6	GTAL	Répartition d'objets respectant six relations : addition, double, et moitié
8	Gâteaux aux châtaignes (II)	5 6	GTCP	Relation de proportionnalité élémentaire entre trois grandeurs, en nombres naturels
9	Défi mathématique	5 6 7	SI	Recherche de triplets de nombres naturels de somme 20 et de produit 180
10	Ananas a gogo	5 6 7	CB	Comparaison d'offres d'achats avec rabais
11	Tous en file (II)	5 6 7	LU	Recherche de permutations
12	Amis sportifs	5 6 7	SI	Inventaire de groupes de cinq nombres naturels supérieurs à 7, de somme 55
13	Quatre amis et une belle mosaique	7 8 9 10	SS	Approximations de rapports entre la partie grise et l'aire totale d'une mosaïque
14	De figure en figure	7 8 9 10	SI	Relations numériques dans une suite régulière de figures géométriques
15	La poule et l'œuf	7 8 9 10	BB	Recherche d'un nombre dont la somme de quatre de ses fractions est donnée
16	Test de mathématiques	8 9 10	SI	Recherche d'une répétition de 24 termes 0, +7 et -3 dont la somme est 107
17	Du simple au double	8 9 10	GTGP	Modifications de dimensions d'un rectangle permettant de doubler son aire
18	Le partage du rectangle	8 9 10	GTGP	Comparaison des périmètres de quatre triangles équivalents dans un rectangle
19	Le chat sur le toit	8 9 10	PR	Mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans une similitude

1. PUZZLE DE DEUX PIÈCES (Cat. 3, 4)

Anne est une passionnée de puzzles. Elle dessine un beau rectangle sur du papier quadrillé dont les côtés mesurent 6 et 8 carreaux.

Elle le découpe précisément en deux triangles égaux.

Avec les deux triangles elle forme des figures différentes selon ces règles :

- les deux triangles peuvent être déplacés ou retournés ;
- ils ne se recouvrent pas ;
- ils ont toujours un côté entier placé contre un autre ; un petit contre un petit, un moyen contre un moyen ou un grand contre un grand.

Montrez toutes les figures différentes que Anne peut former.

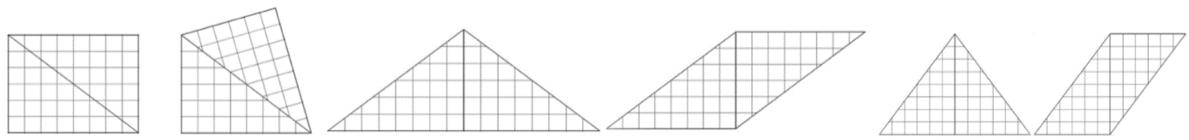
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Découper un rectangle en deux triangles égaux et trouver tous les polygones différents que l'on peut former en juxtaposant ces deux pièces, par des côtés communs de même longueur.

Analyse de la tâche

- Découper les pièces et les juxtaposer selon les règles.
- Constater qu'il y a deux manières de juxtaposer les pièces, par les petits côtés, par les moyens ou par les grands côtés
- Dessiner les figures ou les coller. (faire le dessin des six figures ; deux triangles isocèles, deux parallélogrammes, le rectangle et le « cerf-volant »)



Attribution des points

4 les 6 figures dessinées ou collées correctement ou les 5 figures sans le rectangle de départ

Niveau : 3, 4

Origine : GPIL inspiré de 10.II.10 Miss Troispointe

2. **ORANGES** (Cat. 3, 4)

Aujourd'hui, André est allé cueillir des oranges dans son verger, en emportant avec lui trois caisses :

- une petite,
- une moyenne qui contient le double d'oranges de la petite caisse,
- une grande qui contient le double d'oranges de la caisse moyenne.

Il récolte 84 oranges et remplit ainsi complètement les trois caisses à sa disposition.

Combien d'oranges chaque caisse contient-elle ?

Montrez comment vous êtes arrivés à votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Répartir 84 objets en trois parties dont la deuxième vaut le double de la première et la troisième le double de la deuxième.

Analyse de la tâche

- Se représenter les 84 oranges réparties dans les trois caisses dont on ne connaît pas le nombre d'oranges, mais dont on connaît les relations entre les quantités d'oranges : dans la moyenne il y a le double d'orange que dans la petite, dans la grande il y a le double d'oranges que dans la moyenne.
- Pour trouver les nombres de chaque caisse, deux types de procédures sont à envisager :
  - par essais plus ou moins organisés : choix d'une valeur, pour l'une des caisses, puis calcul des valeurs de chacune des autres et de la somme, suivie d'une comparaison avec 84 et de la décision d'accepter le choix de la valeur ou de le modifier en cas d'inégalité.

    Les choix ordonnés conduisant à des valeurs de plus en plus proches de 84 témoignent d'une meilleure maîtrise de la procédure
  - par recherche d'une unité de mesure : percevoir le contenu de la petite caisse comme unité permettant d'exprimer la moyenne comme 2 unités, la grande comme 4 unités et le total comme 7 unités (7 = 1 + 2 + 4) conduisant à la division par 7 des 84 oranges pour trouver que la petite caisse en contient 24 (= 12 × 2 ; la grande 48 (= 12 × 4).

    (Procédure rhétorique, qui peut déjà apparaître en cat. 4 car on la trouve en cat. 5 dans *Les prunes*, plus complexe) Des schémas ou dessins sont une aide souvent efficace pour faire émerger ce type de procédure.
- La division 84 ÷ 3 = 28 peut paraître « naturelle » (il y a trois caisses) pour la valeur de la caisse moyenne, mais le « 28 » doit être vérifié et modifié par d'autres essais voisins sinon cela conduit à des erreurs (14 - 28 - 56, sans vérification de la somme ; 14 - 28 - 42 avec somme 84)

Attribution des points

4 Réponse correcte (12, 24, 48) avec procédure explicitée (calculs complets avec vérification ou dessins ou verbalisation)

Niveau : 3, 4

Origine : Siena

3. **COMPTER "TIC, TAC, TOC"** (Cat. 3, 4)

Dans un village isolé de Transalpie, on ne dispose que de trois mots pour désigner les nombres : « TIC » est le mot pour désigner « vingt-cinq » ou 25, « TAC » est le mot pour désigner « cinq » ou 5 et « TOC » est le mot pour désigner « un » ou 1.

Tous les autres nombres sont désignés en utilisant un maximum de « TIC », puis, si nécessaire, un maximum de « TAC » et enfin des « TOC » si c'est encore nécessaire.

Ainsi, pour désigner le nombre 9, les gens du village disent « TAC, TOC, TOC, TOC, TOC » et pour désigner 47, ils disent « TIC, TAC, TAC, TAC, TAC, TOC, TOC ».

Un visiteur âgé passe dans ce village dont il connaît la langue.

Les habitants surpris de voir ce vieillard leur rendre visite, lui demandent quel est son âge.

Que va répondre le visiteur pour dire qu'il a 93 ans, dans le langage du village ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Convertir un nombre donné en base dix (93) en un nombre exprimé au moyen de trois mots seulement : « un », « cinq » et « vingt-cinq » répétés pour former une somme comprenant un minimum de termes.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation en réalisant qu'il n'y a que trois mots pour indiquer les nombres : tic = 25 ; tac = 5 ; toc = 1 et qu'on peut former n'importe quel nombre avec ceux-ci, excepté zéro.
- Comprendre et vérifier, par des exemples, les règles d'écriture : on peut utiliser les trois symboles (mots) ou en omettre un ou plusieurs ; on commence par utiliser le symbole (mot) qui indique la valeur la plus élevée et on procède dans l'ordre (de la plus élevée à la plus baisse) ; chaque symbole peut être répété plusieurs fois.
- Passer ensuite à la recherche de stratégies pour « traduire » le nombre « 93 ».
- Les procédures possibles sont, par exemple :
- Additionner « 25 » jusqu'à s'approcher le plus de 93 (25 × 3 = 75), continuer en ajoutant 5 autant de fois que nécessaire pour s'approcher de 93 sans le dépasser (75 + 5 × 3 = 90) et égaler 93 en ajoutant encore 2 × 1 ; à partir de 93 il est également possible de procéder par soustractions successives (ou divisions mais peu probable pour les cat. 3, 4) et progressivement transformer ou décomposer le nombre 93 en 3 « tic-tac » (25 + 5 × 3 = 90) et ajouter 3 « TOC » pour arriver à la réponse correcte : TIC, TIC, TIC, TAC, TAC, TAC, TOC, TOC, TOC

Attribution des points

4 Réponse correcte « TIC, TIC, TIC, TAC, TAC, TAC, TOC, TOC, TOC » (sans tenir compte de l'ordre) avec explicitation claire et complète de la procédure (par exemple 25 + 25 + 25 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 +1 ; …)

Niveau : 3, 4

Origine : Belgique + GPIL

4. GÂTEAUX AUX CHÂTAIGNES (I) (Cat. 3, 4)

Sara prépare une pâte avec de la farine de châtaigne et de l'eau.

Avec sa pâte elle remplit une grande plaque qui lui permettra de faire 18 gâteaux tous de même taille.

Simon veut faire des gâteaux de même taille avec trois petites plaques.

Chaque petite plaque lui permettra de faire la moitié des gâteaux de la grande plaque.

Combien Simon pourra-t-il faire de gâteaux avec ses trois petites plaques ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre (de gâteaux) correspondant à 3 petits récipients, sachant que 18 (gâteaux) correspond à 1 grand récipient et que 1 petit récipient contient la moitié (des gâteaux) du grand récipient.

Analyse de la tâche

- Pour s'approprier le problème, il faut mettre en relation les données : les nombre de gâteaux et les rapports entre les dimensions des moules : 18 gâteaux dans le grand moule. La moitié des gâteaux du grand moule dans le petit moule, en tenant compte que les gâteaux sont de même dimension.
- Une fois les relations et les correspondances établies, on peut passer au calcul : 9 gâteaux dans le petit moule par la division ($18 \div 2 = 9$), puis 27 gâteaux dans 3 petits moules ($27 = 3 \times 9$),

  ou par une représentation graphique et comptage.

Attribution des points

4 Réponse correcte « 27 gâteaux » avec description claire et complètes (calculs, représentation graphiques, verbalisation, …)

Niveau : 3, 4

Origine : Groupe Calcul et Proportionnalité (GTCP)

5. **TOUS EN FILE (I)** (Cat. 3, 4)

Madame Gaby se rend dans la salle de sport avec ses 12 élèves. Elle observe que les enfants portent des maillots de couleurs différentes : deux jaunes, quatre bleus, six rouges.

Gaby demande aux enfants de se mettre en file, selon les instructions suivantes :

- Le premier et le dernier de la file doivent avoir un maillot jaune.
- Les deux qui suivent le premier et les deux qui précèdent le dernier doivent avoir un maillot rouge.
- Dans la file, il ne peut jamais y avoir plus de deux enfants qui se suivent avec un maillot de la même couleur.

Combien de files différentes peuvent former les élèves de Gaby ?

Notez, du premier au dernier les couleurs des maillots de chacune des files différentes.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les différentes permutations de 12 objets (j, j, b, b, b, b, r, r, r, r, r, r) ordonnées, avec conditions imposées sur leur disposition.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation à la lecture de l'énoncé (les 12 objets, leurs couleurs, les trois règles de disposition (« j» au début et à la fin, précèdent ou suivent deux "r", sans jamais avoir plus de deux objets identiques qui se suivent) et l'ordre (un « premier » et un « dernier »).
- Construire les files à partir des données imposées par les deux premières règles : j-r-r…...…r-r-j ; appliquer ensuite la troisième règle qui oblige de placer un « b » après ou avant les deux « r » : j-r-r-b ……b-r-r-j.
- Il reste alors à placer les quatre objets qui restent deux « r » et deux « b » par une organisation progressive et rigoureuse pour être certain de ne pas oublier de disposition et de ne répéter la même.
- Voici les 4 dispositions différentes dans lesquelles ne varient que les positions des objets du centre.

  *j-r-r-b-**r-b-r-b**-b-r-r-j*   *j-r-r-b-**b-r-b-r**-b-r-r-j*   *j-r-r-b-**r-b-b-r**-b-r-r-j*   *j-r-r-b-**b-r-r-b**-b-r-r-j*

Attribution des points

4 Réponse correcte : les 4 possibilités correctes, dessinées, indiquées par une suite de lettres ou verbalisées

Niveau : 3, 4

Origine : Luxembourg

6. LES ŒUFS DE CATHERINE (Cat. 4, 5, 6)

Catherine a récolté aujourd'hui 138 œufs dans son élevage de poules.

Pour vendre tous ces œufs sur le marché, elle a réussi à remplir complètement 28 boites, certaines avec quatre œufs et d'autres avec six œufs.

Combien de boites de quatre œufs et combien de boites de six œufs Catherine a-t-elle utilisées ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres naturels dont la somme est 28 et la somme du premier multiplié par 4 et du second multiplié par 6 est 138

Analyse de la tâche

- Pour s'approprier la situation, il faut comprendre que des boîtes de quatre et six œufs doivent être utilisés et que le nombre total de contenants (28) et le nombre total d'œufs (138) ont connus.
- Il y a plusieurs manières de procéder.
- Par des tentatives plus ou moins organisées en tenant compte de toutes les contraintes.

  Choisir, un certain nombre de boites de quatre (ou six) œufs et en tenant compte du nombre total de boîtes, trouver combien il resterait de boites de six (ou quatre) œufs, calculer le nombre total d'œufs et vérifier si le nombre d'œufs est égal ou pas à 138. Par exemple 10 boites de 4 œufs et 18 boites de 6 œufs : $10 \times 4 + 18 \times 6 = 152 \neq 138$. Continuer avec d'autres essais jusqu'à trouver 15 boites de quatre œufs et 13 boites de six œufs.

(Les deux procédures suivantes sont peu probables, mais pas impossible, après quelques essais, surtout en cat 6)

Ou : remarquer qu'en remplaçant 1 boite de 6 œufs par 1 boite de 4 œufs (ou l'inverse), on diminue (ou on augmente) de 2 le nombre d'œufs, par exemple : avec 10 boites de 6 œufs et 18 boites de quatre œufs, on a 132 œufs, il manque six œufs, il faut donc ajouter 3 boites de six œufs et enlever 3 boites de 4 œufs ($6 \div 2 = 3$), on arrive à 13 boites de six œufs et 15 boites de quatre œufs.

Ou : partir d'un certain nombre de boites d'une sorte (de six ou de quatre œufs), remarquer que 2 boites de six œufs contiennent autant d'œufs par 3 boites de quatre œufs et qu'ainsi le nombre total de boites utilisées augmente de 1 (ou diminue de 1). Effectuer des échanges successifs de 2 boites de six œufs contre 3 boites de quatre œufs jusqu'à un total de 28 boites.

Conclure qu'il y a donc 15 boites de quatre œufs 13 boites de six œufs.

Attribution des points

4 Réponse correcte « 15 boites de quatre œufs, 13 boites de six œufs » avec explication du raisonnement suivi ou description des essais effectués

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

7. **DÉCORATION DE BALLONS** (Cat. 5, 6)

Pour décorer la pièce où elles fêteront leur anniversaire, Anna et Michèle ont préparé deux fils auxquels elles ont attaché des ballons colorés.

Il y a le même nombre de ballons sur le fil d'Anna que sur celui de Michèle.

Sur le fil d'Anna, il y a des ballons rouges, jaunes et bleus :

- le nombre de ballons jaunes est le double du nombre de ballons rouges ;
- le nombre de ballons bleus est le double du nombre de ballons jaunes.

Mais sur le fil de Michèle, il y a des ballons rouges, jaunes et bleus et huit ballons argentés :

- le nombre de ballons rouges est égal à la moitié du nombre de ballons jaunes ;
- le nombre de ballons jaunes est égal au nombre de ballons bleus ;
- le nombre de ballons bleus est égal au nombre de ballons jaunes du fil d'Anna.

Combien y a-t-il de ballons sur chaque fil en tout ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres de ballons de différentes couleurs accrochés sur deux fils à partir d'un système de six relations numériques élémentaires entre les ballons de différentes couleurs sur un fil et sur l'autre ou d'un fil à l'autre. ($R + J + B = r + j + b + 8$; $J = 2R$; $B = 2J$; $r = j/2$; $j = b$; $b = J$)

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a deux fils sur chacun desquels sont accrochés des ballons rouges, jaunes et bleus, plus 8 ballons argentés sur le second.
- Procéder par tâtonnements (vu le grand nombre de relations on ne peut envisager que cette procédure) : choisir une grandeur à essayer (par exemple, le nombre de ballons rouges du fil d'Anna, et calculer progressivement les nombres de fils des autres couleurs en suivant les informations de l'énoncé.

  On essaie, par exemple, avec 2 ballons rouges sur le fil d'Anna. On en déduit que, sur ce fil, il y a 4 ballons jaunes et 8 ballons bleus selon les deux informations pour Anna. On en déduit ensuite que sur le fil de Michèle il y a 4 ballons bleus (troisième information) et 4 ballons jaunes (deuxième information) et 2 ballons rouges (première information). En totalisant les nombres de ballons pour chaque fil, on trouve : pour celui d'Anna, 14 ballons (2 + 4 + 8) et pour celui de Michèle, 18 ballons (2 + 4 + 4 + 8 = 18).

  Il faut donc choisir un autre nombre de ballons rouges sur fil d'Anna. Après quelques essais, on trouve que pour 4 ballons rouges sur le fil d'Anna, on a un total de 28 ballons sur chaque fil (4 + 8 + 16 pour Anna) et (4 + 8 + 8 + 8 pour Michele). Puisque les deux fils ont alors le même nombre de ballons, on conclut que 28 est le nombre cherché.

Attribution des points

4 Réponse correcte « 28 ballons sur chaque fil » avec description claire et complète de la démarche suivie (explication des essais et des calculs effectués ou dessin et coloriage des ballons)

Niveaux : 5, 6

Origine : Groupe Algèbre (GTAL)

8. GÂTEAUX AUX CHÂTAIGNES (II) (Cat. 5, 6)

Sara prépare une pâte avec 1 kg de farine de châtaigne et de l'eau.

Avec sa pâte elle remplit un grand moule qui lui permettra de faire 18 gâteaux de même taille.

Simone veut faire des gâteaux de même taille mais souhaite remplir trois petits moules.

Chaque petit moule lui permettra de réaliser la moitié des gâteaux du grand moule.

Quelle quantité de farine Simone doit-elle utiliser pour remplir ses trois petits moules ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la masse nécessaire de pâte pour remplir 3 petits récipients, sachant qu'il faut 1 kg pour remplir 1 grand récipient permettant de cuire 18 gâteaux, et que le petit récipient contient la moitié de pâte que le grand récipient.

Analyse de la tâche

- Pour s'approprier le problème, il faut mettre en relation la quantité de farine (1 kg) avec le nombre de gâteaux (18), le grand moule avec le petit ; le nombre de gâteaux contenus dans le grand moule (18) avec celui de gâteaux (la moitié) contenus dans chaque petit moule (9 = 18 ÷ 2).
- Cette dernière relation permet de déduire que la quantité de farine à utiliser dans la préparation des gâteaux contenus dans le petit moule est la moitié de la quantité utilisée dans la préparation des gâteaux dans le grand moule.
- Une fois les relations et les correspondances établies, on peut passer au calcul de la masse de farine qui permet de préparer 9 gâteaux dans le petit moule par, éventuellement une équivalence et une division ou de manière pratique (la moitié d'un kilo c'est un demi-kilo) ; puis procéder à la multiplication ou addition, trois fois, de la quantité de farine nécessaire pour un petit moule et arriver à la réponse correcte exprimée en g (1500), ou en kg/1,5) ou en toutes lettres (un kilo et demi).

Attribution des points

4 Réponse correcte « un kilo et demi ; 1,5 kg ou 1500 g », avec descriptions claires et complètes (calculs, représentation graphiques, verbalisation, …)

Niveau : 5, 6

Origine : Groupe Calcul et Proportionnalité (GTCP)

9. DÉFI MATHÉMATIQUE (Cat. 5, 6, 7)

Luc lance un défi à ses amis : « Trouvez trois nombres naturels dont la somme est inférieure à 20 et dont le produit est 180. »

Mais attention, il existe de nombreux triplets qui ne sont pas corrects, par exemple :

- si on choisit les nombres 4, 4 et 6 la somme est 14 qui est inférieure à 20, mais le produit est 96 et donc ne convient pas ;
- si on choisit les nombres 3, 4 et 15, le produit est 180, mais la somme est 22 qui n'est pas inférieure à 20 et ne convient donc pas.

Quels peuvent être les trois nombres permettant de relever le défi ?

Écrivez-les tous et montrez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les groupes de trois nombres naturels dont la somme est inférieure à 20 et dont le produit est 180.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut chercher des groupes de nombres naturels qui doivent respecter deux conditions, somme inférieure à 20 et produit égal à 180.
- Essayer trois nombres dont la somme est inférieure à 20 et vérifier le produit, ce qui nécessite de nombreux essais et n'assure pas de trouver toutes les solutions. Cependant, cette procédure facilite l'appropriation du problème et, petit à petit, permet de comprendre qu'il est plus commode de partir du produit des trois nombres.

Ou, avec une procédure plus systématique :

- partir du produit (180) et, par exemple, le considérer comme un multiple de 10, fixer 10 comme l'un des trois nombres du triplet, puis décomposer 18 en produit de deux facteurs (3×6 ou 2×9) ; les groupes de 3 nombres possibles sont alors 3, 6, 10 qui est valide ($3 + 6 + 10 = 19 < 20$) et 2, 9, 10 qui n'est pas valide ($2 + 9 + 10 = 21 > 20$). A ce stade il est possible de procéder à des essais organisés par exemple en décomposant 10 en deux produits de deux facteurs (2×5), fixer 5, diviser 180 par 5 et obtenir 36 à décomposer en 6×6 ce qui donne le groupe 5, 6, 6, valide avec somme 17 ou (5, 4, 9) valide avec somme 18 ou 5, 2, 18 non valide (somme : 25) et 12,5, 3 non valide (somme : 20).

Ou (Cette dernière procédure est peu probable, pour ces catégories)

- Décomposer 180 en produit de facteurs premiers ($2^2 \times 3^2 \times 5$) et rechercher les nombres des triplets en recomposant les facteurs. La recherche peut être menée de manière plus ou moins organisée.

Attribution des points

4 Réponse correcte « trois solutions : (3, 6, 10) ; (5, 6, 6) ; (5, 4, 9), ordonnés ou non » avec une description claire et complète de la procédure (au moins quelques groupes de 3 nombres inacceptables sont indiqués, avec la justification

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

10. ANANAS A GOGO (Cat. 5, 6, 7)

Pour son anniversaire, Aurora veut préparer des brochettes de fruits et elle a besoin de 6 ananas.

Elle va au marché et compare les prix des trois marchands qui les vendent.

Le premier vend chaque ananas à 3 euros, mais si on en achète 3, on n'en paye que 2. Le deuxième vend chaque ananas à 2,40 euros, mais si on en achète 4, on n'en paye que 3.

Le troisième vend chaque ananas à 2 euros.

Comment Aurora pourra-t-elle organiser l'achat de ses ananas de manière à dépenser le moins possible ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer 3 offres pour acheter 6 ananas au meilleur prix : 3 € pour 3 ananas au prix de 2) ; 2,40 € pour 4 ananas au prix de 3) ; 2 € la pièce

Analyse de la tâche

- Savoir interpréter les expressions publicitaires comme «si tu en achètes 3 tu n'en paies que 2 » et « si tu en achètes 4 tu n'en paies que 3 ».
- Après avoir calculé la dépense en achetant les 6 ananas chez le même vendeur, se rendre compte qu'il n'est pas possible d'économiser puisque on dépense 12 euros à chaque stand.
- Envisager des achats séparés chez différents vendeur ; les calculs montrent que si Aurora prend 4 ananas, pour 7,20 euros chez le deuxième vendeur et 2 ananas pour 4 euros chez le troisième vendeur, elle ne payera que 11,20 euro, ce qui représente un économie de 0,80 euro par rapport aux 12 euros.
- Conclure :
  Aurora économisera si elle achète 4 ananas chez le deuxième vendeur et 2 ananas chez le troisième vendeur,

(Le passage de la comparaison des dépenses, pour l'ensemble des 6 ananas, *chez le même vendeur* à l'hypothèse d'achats partiels chez différents vendeurs, est « inhabituel » dans les pratiques d'achats. On attribuera donc « 3 points » à la réponse *« Aurore dépensera 12 euros à chaque stand »*)

Attribution des points

4 Réponse correcte "*Aurora devra acheter 4 ananas chez le deuxième vendeur et 2 ananas chez le troisième vendeur* " avec des explications et des calculs exhaustifs (11,20 euros, et une économie de 80 centimes par rapport à 12 euros)

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Campobasso

11. TOUS EN FILE (II) (Cat. 5, 6, 7)

Madame Gaby se rend dans la salle de sport avec ses 14 élèves. Elle observe que les enfants portent des maillots de couleurs différentes : deux gris, cinq bleus, sept rouges.

Elle demande aux élèves de se mettre en file, selon les instructions suivantes :

- Le premier et le dernier de la file doivent avoir un maillot gris.
- Les deux qui suivent le premier et les deux qui précèdent le dernier doivent avoir un maillot rouge.
- Dans la file, il ne peut jamais y avoir plus de deux enfants qui se suivent avec un maillot de la même couleur.

Combien de files différentes peuvent former les élèves de Gaby ?

Notez, du premier au dernier les couleurs des maillots de chacune des files différentes.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les différentes permutations dans une suite ordonnée de 14 objets de trois couleurs avec des conditions données.

Analyse de la tâche

- À la lecture des conditions données, placer les maillots gris à chaque extrémité, puis deux maillots rouges qui suivent et un maillot bleu (puisqu'il ne peut pas avoir plus de deux maillots d'une même couleur qui se suivent). Il reste à déterminer les couleurs de six maillots au centre de la file : trois bleus et trois rouges.
- La tâche est de trouver les permutations différentes de ces six objets par une méthode permettant d'être certain de ne pas en oublier ni de reprendre plusieurs fois la même. Il y a évidemment de nombreuses manières d'organiser l'inventaire, dont celle qui consiste à procéder par essais au hasard et contrôles.
- L'inventaire suivant des dix solutions est un issu d'une procédure dans laquelle on donne la priorité à B sur R dans le sens de la lecture :
  1. G R R B **B R B B R R** B R R G
  2. G R R B **B R B R B R** B R R G
  3. G R R B **B R B R R B** B R R G
  4. G R R B **B R R B B R** B R R G
  5. G R R B **B R R B R B** B R R G
  6. G R R B **R B B R B R** B R R G
  7. G R R B **R B B R R B** B R R G
  8. G R R B **R B R B B R** B R R G
  9. G R R B **R B R B R B** B R R G
  10. G R R B **R R B B R B** B R R G

Attribution des points

4 Réponse correcte (dessin des 10 possibilités correctes)

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Luxembourg

12. AMIS SPORTIFS (Cat. 5, 6, 7)

Cinq amis font partie de la même équipe de football.

Dans le championnat qui vient de se terminer, les cinq amis ont marqué 55 buts en tout.

Chacun d'eux a marqué un nombre différent de buts et celui qui en a marqué le moins en a marqué 8.

Combien chacun des quatre autres amis peut-il avoir marqué de buts lors du championnat qui vient de se terminer ?

Écrivez toutes les possibilités et montrez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer toutes les possibilités d'obtenir le nombre 55 comme la somme de cinq nombres naturels différents dont le plus petit est 8.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les quatre nombres cherchés sont différents et plus grands que 8 et que leur somme est 47 (55 – 8), puis se rendre compte qu'il faudra trouver les possibilités une à une.
- L'organisation de l'inventaire est la tâche essentielle du problème. Pour trouver toutes les sommes possibles et s'assurer qu'il n'y a pas de doublons il est absolument nécessaire d'imaginer une stratégie permettant de trouver des « repères » lors de l''écriture des solutions.
- Se rendre compte qu'il faut procéder par essais et qu'il s'agit d'organiser l'inventaire de toutes les additions possible identifiant celles qui ne varie que par l'ordre des termes.

  Par exemple en commençant par la plus petite somme des trois premiers termes puis en modifiant successivement les suivants. Voici les 6 solution,

9 - 10 - 11 - 17	9 – 11 - 13 - 14	10 – 11 – 12 - 14
9 - 10 - 12 - 16	9 - 11 - 12 - 15	
9 - 10 - 13 - 15		

Attribution des points

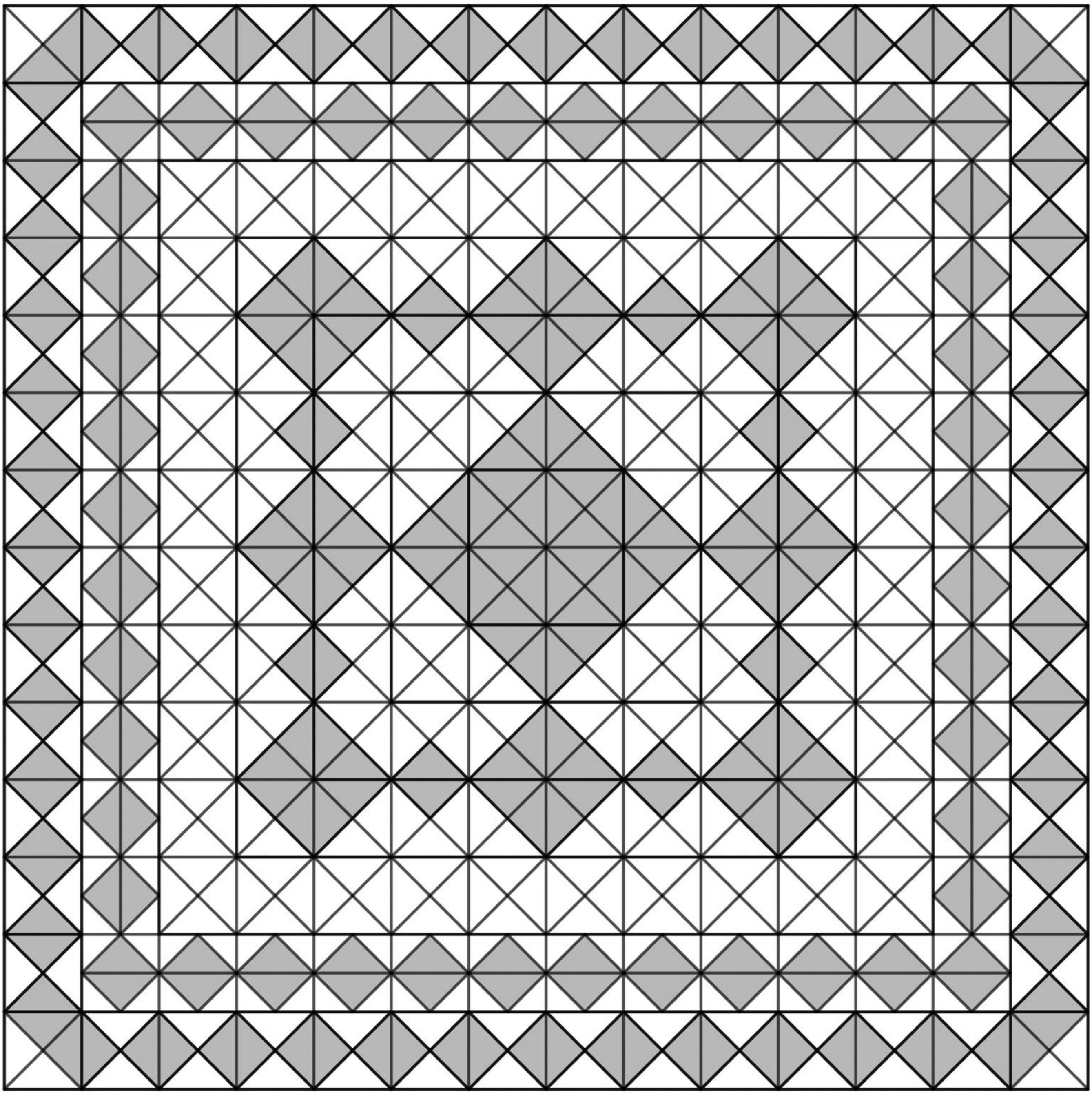
4 Réponse correcte (les 6 possibilités)

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

13. QUATRE AMIS ET UNE BELLE MOSAIQUE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Quatre amis observent cette mosaïque, constituée de triangles gris et blancs, et comparent l'aire des triangles gris à l'aire totale de la mosaïque.



Alain dit : « La partie grise est la moitié de la mosaïque ».

Blanche dit : « Mais non, c'est beaucoup moins, c'est seulement un tiers ».

Charles dit : « Moi j'estime que ce sont les deux cinquièmes ».

Doris dit : « Selon moi la partie grise est les trois huitièmes de la mosaïque ».

Quelle est la plus précise des quatre estimations ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse, avec le détail des quatre estimations et avec la valeur exacte du rapport entre l'aire des triangles gris et l'aire totale de la mosaïque.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la plus précise de quatre estimations du rapport de l'aire grise à l'aire totale d'une mosaïque donnée, composées de triangles gris et blancs sur une trame quadrillée.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la comparaison de « l'aire des triangles gris et de l'aire de la mosaïque » peut s'exprimer par la fraction « aire grise / aire totale » ou par le « nombre de triangles gris par rapport au nombre total de triangles » ou « nombre de carrés gris par rapport au nombre total de carrés » et que par conséquent il est nécessaire de calculer chacune de ces deux aires en choisissant une unité adéquate, les triangles grisou les carrés gris ou encore les carrés du quadrillage.
- La première partie de la tâche consiste donc à compter les unités ; ce qui demande une observation précise de la mosaïque et une grande rigueur dans le comptage.
- Il y a de très nombreuses procédures : du comptage un à un à des regroupements, par bordures, lignes, quarts du quadrillage, … Par exemple en carrés du quadrillage : l'aire totale est 196 (14 × 14), l'aire grise 152 carrés gris = 76 carrés du quadrillage. Qui conduit au rapport 76/196 = 19/49 (en triangles on aurait 304/784, en carrés gris 152/392)
- Le deuxième partie de la tâche consiste à
  - transformer les expressions « moitié », « un tiers », « deux cinquièmes » et « trois huitièmes » en écritures numériques,
  - trouver des écritures permettant de comparer 1/2, 1/3, 2/5, 3/8 et **19/49**
  - soit en fractions de dénominateur commun 5880 (dont les numérateurs sont 2940, 1960, 2352, 2205 et **2280**). Le plus proche de 2280 est 2352 (2352 – 2280 = 72) mais 2205 n'est pas loin (75), c'est donc Charles (2/5) qui a meilleure approximation, à 72/5880 du rapport exact qui est 2280/5880
  - soit avec des nombres décimaux ou approximations décimales :
    au centième près 0,5 ; 0,33 ; 0,4 ; 0,38 et **0,39** on ne peut pas décider si c'est 0,4 ou 0,38 le plus proche de 0,39
    au millième près il faut comparer 0,4 et 0,375 à **0,388** et constater 0,4 est le plus proche ((0,4 – 0,388 = 0,012 alors que 0,388 – 0,375 = 0,013.

Ou à exprimer le nombre de carreaux gris parmi les 196 de la mosaïque : 1/2 × 196 = 98 ; 1/3 × 196 = 65,33 ; 2/5 × 196 = **78,4** ; 3/8 × 196 = 73,5 et en les comparant à 76 pour constater aussi que c'est le rapport **2/5** (Charles) qui donne la meilleure approximation.

(En triangles : 392 – 261,33 – **313,6** – 294 comparés à 304) (En carrés : 196 – 130,67 – **156,8** – 147 par rapport à 152)

Attribution des points

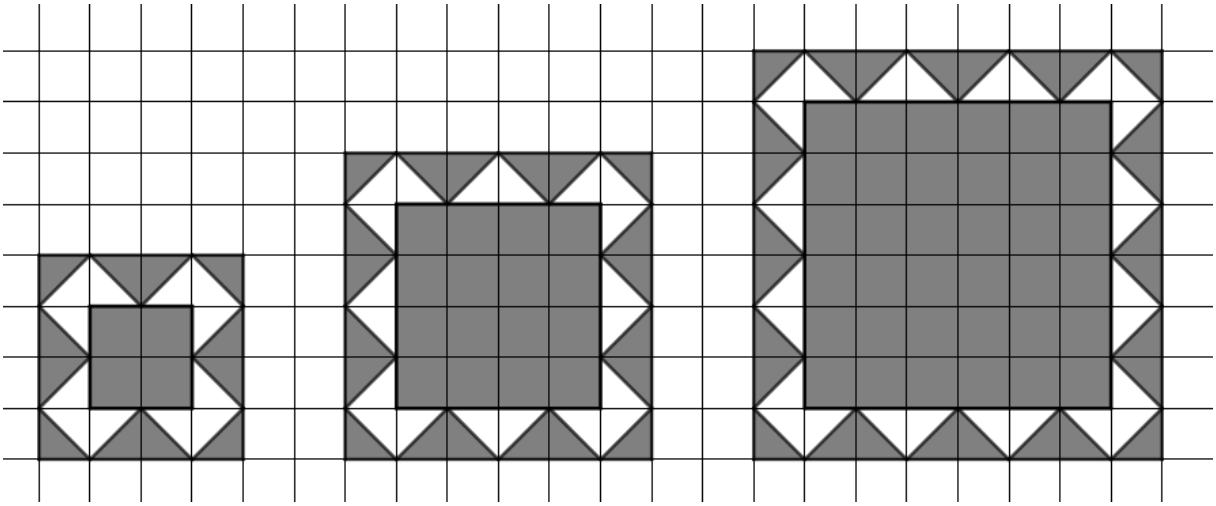
4 Réponse correcte et complète : (le rapport exact 19/49 ou une fraction équivalente ; …et l'approximation de Charles, 2/5) avec le détail exhaustif des nombre comparés et de leur différence au rapport correct

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Sassari

14. DE FIGURE EN FIGURE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Les trois figures ci-dessous sont les trois premières, de rang 1, 2 et 3, d'une longue suite régulière de figures dessinées sur papier quadrillé.



1 2 3

Chacune des figures de cette suite est constituée d'un carré gris central, entouré d'une bordure grise et blanche.

En continuant la suite on trouve une figure dont l'aire du carré central est 9 fois l'aire du carré central de la figure de rang 7.

Quelle est le rang de cette figure ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Les trois premiers éléments d'une suite régulière de figures géométriques sur papier quadrillé, de couleurs grises et blanche étant données, déterminer le rang d'une de ces figures sachant que l'aire d'une de ses parties grises vaut 9 fois l'aire correspondante de la figure de rang 7.

Analyse de la tâche

- Observer les trois figures données et leurs caractéristiques qui varient de l'une à la suivante ou restent constantes. Par exemple la longueur du carré intérieur gris, celle du côté de la figure varient, comme le nombre de triangles du cadre. Ce qui reste constant est la largeur du cadre (d'un carreau) et le motif de sa décoration.
- Se rendre compte que le nombre de triangles gris, le nombre de triangle blancs, la longueur du côté de la figure, la longueur du côté du carré gris, son aire … dépendent de la variable *n*, rang de la figure et percevoir que parmi toutes les grandeurs en jeu, c'et la longueur du côté du carré intérieur gris qui sera la plus « utile » pour se repérer dans la suite.
- Aborder la phase de résolution à partir des constatations précédentes en identifiant les régularités de la suite par exemple en mettant en évidence le rang n et la longueur et l'aire du carré interne (exprimés en côté et aire d'un carreau du quadrillage)

la figure de rang 1 a un carré interne de longueur de côté 2 et une aire de 4,

la figure de rang 2 a un carré interne de longueur de côté 4 et une aire de 16,

la figure de rang 3 a un carré interne de longueur de côté 6 et une aire de 36,

…

puis : la **figure de rang 7** a un carré interne de longueur de côté 14 et une aire de $(14)^2 = 196$

la figure de rang n a un carré interne de longueur de côté $2n$ et une aire de $(2n)^2$.

la **figure cherchée** de rang inconnu que nous appelons provisoirement X

a un carré interne de longueur de côté $2X$ et une aire de $196 \times 9 = 1764 = (2X)^2$

pour aboutir finalement à $2X = \sqrt{1764} = 42$ et au rang de la figure cherchée : $X = 21$

Attribution des points

4 Réponse correcte (rang 21) avec description claire de la procédure (description des relations entre les éléments des figures et modalités des calculs)

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

15. LA POULE ET L'ŒUF (Cat. 7, 8, 9, 10)

Dans un poulailler, les œufs sont ramassés tous les jours à la même heure.

Les poules de ce poulailler ne pondent pas tous les jours et, quand elles le font, elles ne pondent qu'un œuf par jour.

Du lundi au jeudi, on a ramassé 604 œufs.

- La moitié des poules ont pondu le lundi.
- Deux tiers des poules ont pondu le mardi.
- Trois cinquièmes des poules ont pondu le mercredi.
- Trois quarts des poules ont pondu le jeudi.

Combien y a-t-il de poules dans ce poulailler ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre naturel tel que la somme de sa moitié, de des deux tiers, de ses trois cinquièmes et de ses trois quarts soit égale à 604

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et comprendre que les fractions données, « la moitié », « les deux tiers », correspondent chaque fois au nombre total des poules mais aussi et surtout aux nombres d'œufs pondus chaque jour, qui additionnés, donneront les 604 œufs pondus en quatre jours.
- Lorsqu'on a compris que le nombre total de poules est l'inconnue du problème, on peut **procéder par essais** en éliminant systématiquement les nombres qui ne conviennent pas car ils aboutissent à des nombres non naturels. Par exemple il faudra éliminer les nombres impairs car la moitié (lundi) donnerait des « demi-poules » ou des demi-œufs » puis éliminer les nombres qui ne sont pas des multiples de 3 car les deux-tiers (mardi) donneraient des « tiers de poules », …On arrive ainsi à se convaincre que les nombres à essayer sont les multiples de 60 (multiples communs de 2, 3, 5 et 5). Les essais peuvent commencer à ce moment (pour autant qu'on soit capable de calculer « la moitié, les deux tiers, les trois cinquièmes et les trois quarts » de 60) et aboutissent, à 151 œufs pour l'essais de 60 poules, … et 604 œufs pour 240 (le 4^{e} multiple de 60) et donc à la réponse 240 poules.
- Une **procédure arithmétique généralisé** consiste à passer dans le domaine des rationnels (où les fractions ne sont plus des opérateurs mais des « nombres » à part entière qu'on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser). La tâche mathématique exige alors la maîtrise des quatre opérations avec des fractions : transformation en fractions de dénominateur commun 30/30, 40/60, 36/60, 45/60) addition, (151/60) et division (604 ÷ 151/60 = 240).
- La **procédure algébrique**, est identique à la précédente, avec l'écriture de l'inconnue par une lettre et la connaissance des règles de résolution de l'équation $x/2 + 2/3\,x + 3/5\,x + 3/4\,x = 604$

Attribution des points

4 Réponse correcte (240 poules) avec une explication claire et complète de la procédure utilisée (détails des essais, ou des calculs effectués dans une procédure arithmétique, ou pose et résolution de l'équation)

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Bourg en Bresse

16. TEST DE MATHÉMATIQUES (Cat. 8, 9, 10)

Thomas a chargé un programme de tests de mathématiques sur son ordinateur, qui lui permet de s'entraîner.

Chaque test demande de répondre à 24 questions dans un temps déterminé. Chaque réponse correcte rapporte 7 points, chaque réponse erronée fait perdre 3 points et chaque question sans réponse ne rapporte ni ne fait perdre aucun point.

Aujourd'hui, Thomas s'est entraîné sur un de ces tests et a obtenu 107 points.

Combien Thomas a-t-il donné de réponses correctes, combien de réponses erronées et à combien de questions n'a-t-il pas répondu ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres naturels dont la somme est 24 et tels que si l'on multiplie le premier par 7 et qu'on soustrait le triple du second on obtient 107.

Analyse de la tâche

- La lecture de l'énoncé conduit à la relation numérique « 7 fois le nombre de réponses correctes moins 3 fois le nombre de réponses erronées égale 107 ». Le calcul du troisième nombre sera la différence entre les 24 questions et la somme des réponses correctes et des réponses fausses.
- Les connaissances nécessaires pour la recherche de la solution se limitent à la recherche de multiples de 7 et de 3 puis à une soustraction.
- Une procédure consiste à envisager les multiples de 7 supérieurs à 107 (nombre de points obtenus avec les réponses correctes) desquels il faudra soustraire un multiple de 3 (nombre de points à retrancher pour les réponses erronées) pour revenir à 107. Il suffit alors de calculer les différences entre ces différents multiples de 7 et 107, de vérifier si ces différences sont des multiples de 3 et, dans l'affirmative, vérifier encore que le nombre de questions - justes et fausses - soit inférieur à 24.

  Les multiples de 7 à envisager sont 112, 119, 126, 133, 140, 147 … les différences correspondantes à 107 sont respectivement 5 ; 12 ; 19 ; 26 ; 33 ; … dont on retient 12, 33, 54, … qui sont des multiples de 3.

  Seul le couple 119 (17×7) ; 12 (4×3) convient puisque $17 + 4 = 21$ qui est inférieur à 24. Il y a donc 17 réponses correctes, 4 réponses erronées et 3 non-réponses.
- Une procédure algébrique, consisterait à résoudre un système d'équations dans **N** du genre :

  $7x – 3y = 107$

  $x + y + z = 24$

  et de rechercher les solutions entières positives de $x = (107 + 3y)/7$

Attribution des points

4 Réponse correcte (17 réponse correctes, 4 erronées et 3 non-réponses) avec le détail des calculs (les multiples d 7 et d 3, les différences, les choix ou une résolution algébrique

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena

17. DU SIMPLE AU DOUBLE (Cat. 8, 9, 10)

Le professeur demande aux élèves : « *Dessinez chacun un premier rectangle, puis dessinez un second rectangle dont l'aire est le double de celle du premier. Expliquez enfin comment vous avez modifié les dimensions du premier pour arriver au second.* »

Les élèves répondent :

Anne : *J'ai doublé les deux dimensions.*

Berthe : *J'ai doublé une dimension sans modifier l'autre.*

Charles : *J'ai augmenté une dimension de sa moitié et j'ai augmenté l'autre de sa moitié.*

Daniel : *J'ai augmenté une dimension de sa moitié et j'ai augmenté l'autre de son tiers.*

Elise : *J'ai augmenté une dimension de 20 % et l'autre de 80 %.*

Fabio : *J'ai diminué une dimension de 20 % et j'ai augmenté l'autre de 150 %.*

Quels sont les élèves dont le second rectangle a une aire double du premier ?

Pour les autres, indiquez le rapport entre l'aire du second et l'aire du premier.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Parmi plusieurs propositions de modifier les dimensions d'un rectangle pour obtenir un rectangle d'aire double, juger celles qui sont correctes / ou incorrectes, en donner les raisons et, pour les incorrectes, trouver le rapport entre les aires.

Analyse de la tâche

- Prendre conscience que chaque élève a choisi un rectangle différent et que son affirmation doit par conséquent être vérifiée pour n'importe quel rectangle. La tâche d'appropriation ne consiste pas seulement à lire les différentes propositions des élèves, mais surtout à se rendre compte que les dimensions des rectangles ne sont pas données. C'est-à-dire que lorsque l'enseignant dit « dessinez un premier rectangle », cela signifie que non seulement les élèves doivent choisir les dimensions, mais aussi que la construction du second devra être valide pour *n'importe quel* rectangle choisi.
- Se rendre compte que toutes les modifications proposées par les élèves agissent sur la largeur et sur la longueur du premier rectangle, avec des variations d'une proposition à l'autre selon la manière de formuler les transformations (doubler, augmenter de …), qui déterminent un deuxième rectangle.
- Comprendre que, pour chaque élève, il faut vérifier par le calcul si l'aire du second rectangle est le double de celle du premier rectangle.
- Partir d'un cas particulier de dimensions du premier rectangle, calculer son aire, déterminer les dimensions du second (la détermination des dimensions du second exige la maîtrise des expressions « doubler », « augmenter de la moitié », « augmenter de 20% » … et la capacité de les transformer en multiplication), puis calculer son aire et vérifier si elle est bien le double de celle du premier. En cas d'affirmative, vérifier avec quelques autres exemples et conjecturer que « ça marche toujours ». Dans le cas contraire, le cas particulier ou contre-exemple suffit.

Ou

- Envisager le cas général et donner des « justifications » de type rhétorique (ou par un dessin pour A, B éventuellement C et D) du genre (pour A) « si on double les deux dimensions, l'aire va être multipliée par 4 » ou du genre (pour D) « j'ai fait un dessin du premier rectangle divisé en six : 2 parts dans la longueur et 3 parts dans la largeur. En augmentant la longueur de sa moitié j'aurai 3 parts et en augmentant la largeur de son tiers j'aurai quatre parts et mon nouveau rectangle aura donc 12 parts, le double de six).

Ou

- En langage et opérations du mathématicien, valable « pour tout rectangle » - de dimensions a et b et d'aire ab - les réponses sont :

  pour A : non car $2a \times 2b = 4ab \neq 2ab$ pour B : oui car $2a \times b = 2ab$

  pour C : non car $1{,}5a \times 1{,}5b = 2{,}25ab \neq 2ab$ pour D : oui car $3/2a \times 4/3b = 2ab$

  pour E : non car $1{,}2a \times 1{,}8b = 2{,}16ab \neq 2ab$ pour F : oui car $0.8 \times 2{,}5b = 2ab$

  (mais ce type de justification du mathématicien est loin d'être à portée des élèves)

Attribution des points

4 Les six réponses correctes et complètes (A, non et rapport 4 ; C non et 2,25 ou 9/4 ; E non et 2,16 ou 54/25; B, D, F oui) avec explication complète (par deux exemples au moins, verbalement ou par dessin)

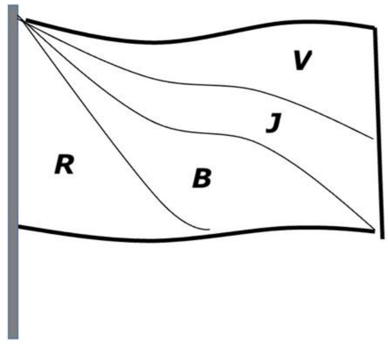
Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

18. LE PARTAGE DU RECTANGLE (Cat. 8, 9, 10)

Le drapeau de la République de Transalpie flotte fièrement sur la tour du château du gouvernement.

Anna et Marco observent le drapeau représenté ci-dessous, qui est un rectangle de 3 m sur 5 m, composé de quatre triangles de même aire, aux couleurs de la République : rouge (R), blanc (B), jaune (J) et vert (V).



Anna dit : « D'après moi, les quatre triangles ont le même périmètre ».

Marco dit : « Non, tous les périmètres sont différents. Sans dessins ni instruments de mesure, je peux les calculer et te dire quel est le plus grand ».

Indiquez quel triangle a le plus grand périmètre et calculez-le.

Justifiez votre démarche (selon la méthode de Marco) et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

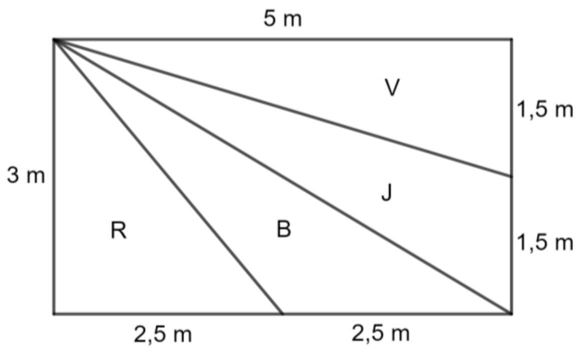
Tâche mathématique

Un rectangle de 5 m sur 3 m est partagé en quatre triangles équivalents par trois segments issus d'un de ses sommets, on demande de trouver le périmètre le plus long et de le calculer.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et se rendre compte que le problème traite d'un dessin qui représente une bannière au vent ; la première tâche consiste donc à modéliser la situation en imaginant ou en dessinant un rectangle de mesures données ou à l'échelle.
- Comprendre que l'information « triangles ayant la même aire » est essentielle pour positionner correctement les extrémités des segments qui divisent le rectangle : un de ces segments doit être une diagonale, puisqu'il doit diviser le rectangle en deux parties égales (constituée chacune de deux triangles) ; les deux autres segments doivent avoir une extrémité au milieu des deux côtés du rectangle (voir figure). En effet, ainsi, la diagonale identifie deux paires de triangles semblables R-B, V-G parce qu'ils ont des bases et des hauteurs égales (ou bien toutes les aires sont égales à 3,75 m², c'est-à-dire l'aire du rectangle divisé par 4).

  Ce point est le cœur du problème et doit être précisément justifié.



- Calculer les mesures non encore connues des côtés des triangles grâce au théorème de Pythagore et calculer les mesures des périmètres des triangles comme somme des mesures des côtés :

triangle R : $3 + 2{,}5 + \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 9{,}405$ triangle B : $\frac{\sqrt{61}}{2} + 2{,}5 + \sqrt{34} \approx 12{,}236$

triangle J : $\sqrt{34} + 1{,}5 + \frac{\sqrt{109}}{2} \approx 12{,}551$ triangle V : $\frac{\sqrt{109}}{2} + 1{,}5 + 5 \approx 11{,}720$

- Il est possible de limiter le calcul aux périmètres des triangles B et J en observant que B a un périmètre plus que R et que J a un périmètre plus grand que V (en remarquant que les deux triangles R-B et J-V ont deux côtés de longueurs égales et un côté différent)
- Conclure que le triangle J a le plus grand périmètre, qui mesure environ 12,551 m.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (triangle J, périmètre 12,551 m ou 12,55 m ou $\left(\sqrt{34} + 1{,}5 + \frac{\sqrt{109}}{2}\right) m$) avec calculs et avec justification des dimensions 2,5 m et 1,5 m

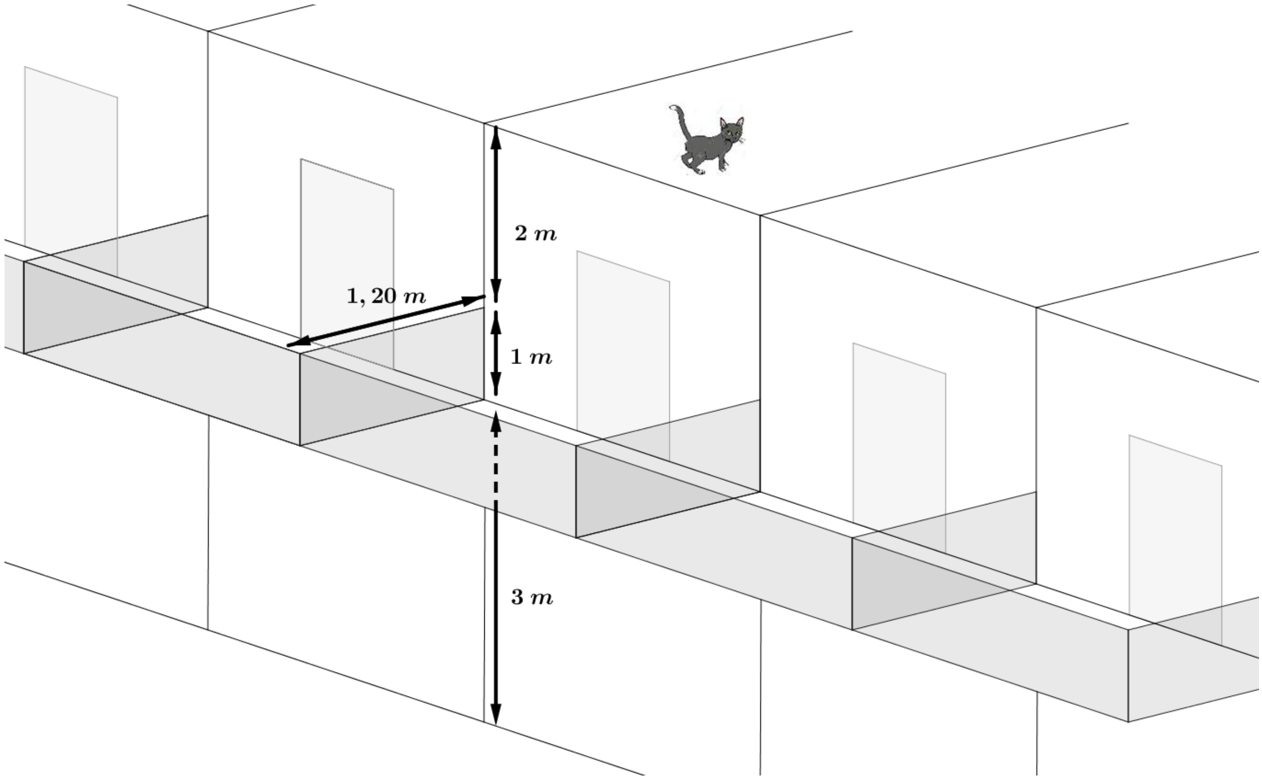
Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

19. LE CHAT SUR LE TOIT (Cat. 8, 9, 10)

Le chat de Pierre est sorti sur le toit et ne réussit plus à descendre ! Pour le récupérer, Pierre décide d'utiliser une échelle assez longue pour rejoindre le bord du toit.

La hauteur à atteindre est de 6 m, mais Pierre comprend que l'échelle devra être plus longue car il devra l'incliner à cause de la présence d'un balcon, dont les mesures sont données sur la figure ci-dessous :



Dans le magasin dans lequel se rend Pierre pour acheter l'échelle, plusieurs longueurs sont disponibles : 6 m ; 6,5 m ; 7 m ou 7,5 m.

Quelle est la longueur minimale de l'échelle que Pierre devra acheter pour monter sur le toit et récupérer son chat ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

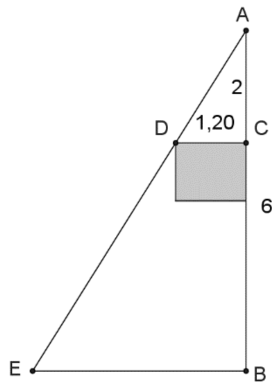
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer la mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, en connaissant un côté du triangle et les côtés d'un rectangle. Utiliser la proportionnalité dans deux triangles semblables.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation en pendant à la position de l'échelle avec le pied sur le terrain devant le mur et l'extrémité sur le bord du toit.



- Comprendre qu'il y a plusieurs positions pour l'échelle et que la plus avantageuse (de longueur minimale) est celle qui, pour éviter le balcon, va le plus près possible, jusqu'à en toucher le bord supérieur.
- Modéliser la situation d'un point de vue mathématique (voir figure) : il s'agit de déterminer l'hypoténuse AE d'un triangle rectangle, en connaissant AB et les mesures des côtés d'un rectangle, en gris sur la figure. (1,2 m et 1 m)
- Comprendre que quelques-unes des données sont superflues et que pour déterminer AE, il suffit de reconnaitre que les triangles ADC et AEB sont semblables.
- Observer que le rapport de proportionnalité est de 3 (les longueurs des côtés du triangle AEB sont le triple de celles du triangle ADC).
- Déterminer la mesure de AE en utilisant les triangles semblables (Thalès ou proportionnalité) et le théorème de Pythagore, en obtenant la valeur de $AE \approx 6{,}997\ m$.

Ou

- Faire un dessin à l'échelle du triangle et du rectangle inscrit (par exemple AB = 6cm, CD = 1,20 cm) et mesurer la longueur de l'hypoténuse AE. Rapporter la valeur obtenue aux dimensions originales en obtenant une valeur à peine inférieure à 7 m.
- Conclure que l'échelle doit avoir une longueur d'au moins 7 m.

Attribution des points

4 Réponse correcte (longueur minimale de l'échelle est de 7 m) avec explications claires et complètes qui met en évidence la proportionnalité entre les différentes mesures ou avec un dessin à l'échelle et des mesures suffisamment précises sur celui-ci.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma