	Titre	*Catégorie*	*Origine*	*Notion*
1	Tours de cubes (I)	3 4	GTNU	Addition de nombres naturels consécutifs
2	Collection de cailloux (I)	3 4	SI	Nombres naturels liés par des relations d'ordre et de type "double" ou "triple"
3	L'horloge des pirates	3 4	UD	Mesure de temps
4	Rectangles de papier quadrillé (I)	3 4	GTGP	Comparaison d'aires de deux rectangles
5	Les nombres secrets	3 4 5	RZ	Nombres liés par des relations additives ou soustractives
6	Les deux papillons	4 5 6	PR	Comparaison d'aires
7	Tours de cubes (II)	5 6	GTNU	Différence entre des nombres pairs et impairs
8	Rectangles de papier quadrillé (II)	5 6	GTGP	Comparaison d'aires de deux rectangles
9	Quel personnage choisissez-vous ?	5 6 7	BL	Additions et soustractions (négations)
10	Collection de cailloux (II)	5 6 7	SI	Nombres naturels liés par des relations d'ordre et de type "double" ou "triple"
11	Cerises	5 6 7	PU	Recherche de trois nombres naturels de somme donnée liés par des relations (additives et double)
12	Gabrielle la petite sorcière	6 7 8	GTCP	Proportionnalité dans un mélange de deux composants
13	Les sept polygones	7 8	GTGP	Comparaison d'aires de polygones sur quadrillage
14	La tirelire	7 8 9 10	GTNU	Recherche de décompositions additives
15	À la papeterie	7 8 9 10	GTAL	Système de deux équatons linéaires à deux inconnues
16	Les rubans d'Ariane	8 9 10	GAOA	Approximation de 3 par une somme des premières fractions 1/1 + 1/2 + 1/3 +
17	Voyage en bus	8 9 10	GTFN	Recherche du minimum d'une fonction de deuxième degré avec nombres entiers
18	Les deux carrés	8 9 10	PR	Variation de l'aire de l'intersection de deux carrés dans une rotation de l'un sur l'autre

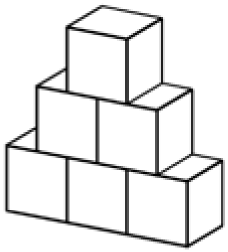
1. **TOURS DE CUBES** (I) (Cat. 3, 4)

Trois amis jouent à construire des "tours" avec des cubes.

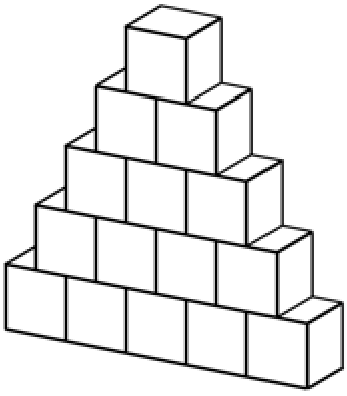
Chaque enfant possède un nombre différent de cubes.

Richard a utilisé tous ses cubes pour construire une tour de trois étages.

Claire, avec tous ses cubes, a réussi à construire une tour de cinq étages.



Tour de Richard



Tour de Claire

Léa, qui a beaucoup de cubes, pense pouvoir construire une tour de dix étages sur le même modèle que Richard et Claire. Quand elle a presque terminé sa tour, elle se rend compte qu'il lui manque deux cubes.

Combien de cubes possède Léa ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Connaissant la régularité d'une suite de nombres naturels, calculer la somme de ses 10 premiers termes et trouver le nombre égal à la somme calculée diminuée de 2.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation :
  - observer les deux figures et percevoir les règles de construction des "tours" (construction d'étages avec des cubes adjacents, diminution de 1 du nombre de cubes à chaque étage suivant, symétrie de la construction, un seul cube au dernier étage car on ne peut pas placer d'autres cubes dessus sans casser la régularité) ;
  - comprendre que pour trouver le nombre total de cubes dans une tour, il faut additionner le nombre de cubes de chaque étage ;
  - comprendre que Léa n'a pas assez de cubes pour construire une tour de dix étages, il lui en manque deux.
- Construire quelques tours avec du matériel ou en dessinant et compter les cubes présents dans celle de 10 étages (55) et en déduire que Léa a 53 cubes car il en manque 2.

Ou

- Dans le champ numérique, notez la progression des cubes à chaque étage : entiers naturels qui se succèdent par ordre croissant à partir du haut 1 + 2 + 3 + 4 + ... ou par ordre décroissant à partir de la base ... + 4 + 3 + 2 + 1. Sachant que ces deux manières d'additionner des nombres sont équivalentes (commutativité) et comprendre qu'il y autant de cubes à la base de la tour que d'étages dans la tour (10 étages = 10 cubes au premier étage). Puis calculer la somme des dix nombres de 1 à 10, trouver 55 et soustraire 2 car il manque 2 cubes et arriver à la réponse 53.

  Il est également possible de procéder par calcul de sommes partielles successives qui donnent le nombre total de cubes en fonction du nombre d'étages (une approche qui peut être intéressante dans l'enseignement)

nombre d'étages	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre total de cubes dans la tour	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Il existe bien entendu d'autres procédures, combinant celles décrites ci-dessus.

Parmi les erreurs possibles, il faut noter l'oubli des deux cubes à supprimer (réponse : 55), la confusion entre addition et soustraction pour cette dernière opération (réponse : 57), erreurs de calcul de la somme des nombres de 1 à 10, et la tentation de s'arrêter à un certain nombre de cubes, par exemple pour une tour de 5 étages (15 cubes) et de le multiplier par 2 pour la tour de 10 étages (réponse : (2 × 15) – 2 = 28, en utilisant la procédure de proportionnalité irrégulière consistant à prendre le double).

Attribution des points

4 Réponse correcte (53 cubes) avec une description claire et complète (description de la construction de la tour ou représentation graphique complète ou présentation de tous les calculs pour trouver la somme des nombres de 1 à 10, ...)

Niveaux : 3, 4

Origine : Groupe Numération (GTNU)

2. COLLECTION DE CAILLOUX (I) (Cat. 3, 4)

Jacques a ramassé 45 cailloux colorés et il veut les répartir en quatre boîtes.

Il a mis des cailloux dans la première boîte.

Dans la deuxième boîte, il a mis plus de cailloux que dans la première, mais moins que dans la troisième.

Dans la troisième boîte, il a mis le double du nombre de cailloux contenus dans la première.

Dans la quatrième boîte, il a mis le triple du nombre de cailloux contenus dans la première boîte.

Combien de cailloux y a-t-il dans chaque boîte ?

Montrez comment vous avez trouvé le nombre de cailloux dans chaque boîte.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres dont la somme (45) est connue sachant que le troisième et le quatrième sont respectivement le double et le triple du premier et que le second est supérieur au premier et inférieur au troisième.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et comprendre qu'on cherche quatre nombres dont la somme est 45 ;
  - le premier nombre n'est pas connu, mais on sait que, s'il est connu, on trouvera le troisième et le quatrième qui sont respectivement le double et le triple du premier ;
  - le deuxième nombre est supérieur au premier et inférieur au troisième.
- Procéder par essais et erreurs sur le premier nombre, en utilisant éventuellement du matériel ou des schémas.

  Par exemple, avec 5 comme premier nombre, trouver 10 et 15 comme troisième et quatrième. Calculer la somme de ces trois nombres (30) et remarquer qu'il manque 15 pour arriver à 45. Le deuxième nombre doit être supérieur à 5 et inférieur à 10 et ne peut donc pas être 15. Comprendre que 5 ne convient pas et faire un autre essai pour le premier nombre.

  Par exemple, avec 6 comme premier nombre, trouver 12 et 18, puis une somme de 36, donc il manque 9 pour atteindre 45. Le nombre 9 est supérieur à 6 et inférieur à 12 et donc approprié pour être le deuxième nombre.
- Vérifier qu'avec 7 comme premier nombre, on obtiendrait 14 et 21 et une somme de 42, donc il manquerait 3 pour atteindre 45, mais 3 n'est pas supérieur à 7.

Parmi les erreurs possibles, on peut s'attendre à ce que l'une des conditions ne soit pas remplie :

- les troisième et quatrième nombres ne sont pas le double et le triple du premier ;
- le deuxième nombre n'est pas supérieur au premier et inférieur au troisième ;
- la somme des quatre nombres n'est pas 45.

Attribution des points

4 Bonne réponse "6 cailloux dans la première boite, 9 dans la seconde, 12 dans la troisième et 18 dans la quatrième" avec une description des essais et des calculs effectués ou avec un dessin ou une description du matériel utilisé

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena

3. L’HORLOGE DES PIRATES (Cat. 3, 4)

Dans le bateau pirate du capitaine Crochet, l’horloge marque les tours de garde. Chaque pirate doit faire exactement 4 heures de garde à partir de minuit (00h00).

L’horloge sonne toutes les 30 minutes ainsi : à minuit et demi (00h30), elle sonne 1 coup ; à une heure (01h00), elle sonne 2 coups ; à 01h30, elle sonne 3 coups et ainsi de suite jusqu'à 04h00 où elle sonne 8 coups.

Puis elle recommence : 04h30 - 1 coup, 05h00 – 2 coups …

Le maitre d’équipage M. Mouche est le troisième à monter la garde et, affamé comme toujours, il a hâte de finir pour se précipiter vers son repas. À un moment donné de son tour de garde, il entend l’horloge sonner cinq coups.

À quelle heure M. Mouche entend-il les cinq coups de l’horloge ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans une série de cycles de quatre heures, mettre en relation les nombres de 1 à 8 avec des intervalles de 30 minutes chacun pour trouver l’heure correspondant au nombre 5 du troisième cycle.

Analyse de la tâche

- S’approprier la situation : chaque tour de garde dure 4 heures ; l'horloge sonne toutes les demi-heures et, à partir de minuit, à la fin de chaque demi-heure, elle sonne chaque fois un coup en plus jusqu'à 8 coups, puis le cycle recommence ; le maître d’équipage fait le troisième tour et entend 5 coups.
- Comprendre qu'il s'agit d'un cycle formé de 8 intervalles de temps (demi-heures) et que, comme le maître d’équipage fait le troisième tour de garde, il faut considérer que les trois cycles sont tous pareils.
- Par de simples schématisations, faire correspondre les heures de la journée à partir de 00h00 avec le nombre de coups ; comprendre qu'un cycle complet, de 0 à 8 coups, se déroule en 4 heures, vérifier les horaires et la fin du premier tour

Heures	00h30	01h00	01h30	02h00	02h30	03h00	03h30	04h00
Coups	1	2	3	4	5	6	7	8

  À ce point, continuer avec cette représentation et déterminer l'horaire du deuxième tour de garde, qui se terminera à 8h00 lorsque le troisième tour commencera ; procéder de la même manière pour le troisième tour de garde et découvrir que l’horaire correspondant au chiffre 5 (coups) est 10h30.

Ou

- Comprendre que si chaque tour de garde est de 4 heures, alors le premier tour se termine à 4h00, lorsque le deuxième tour commence, que le deuxième tour se terminera à 08h00, heure à laquelle le maître d’équipage commence son tour de garde.
- Travailler sur le troisième tour et observer que, lorsque l'horloge sonne 5 coups, deux heures et demie ont passé, calculer qu'il sera alors 10h30.

Attribution des points

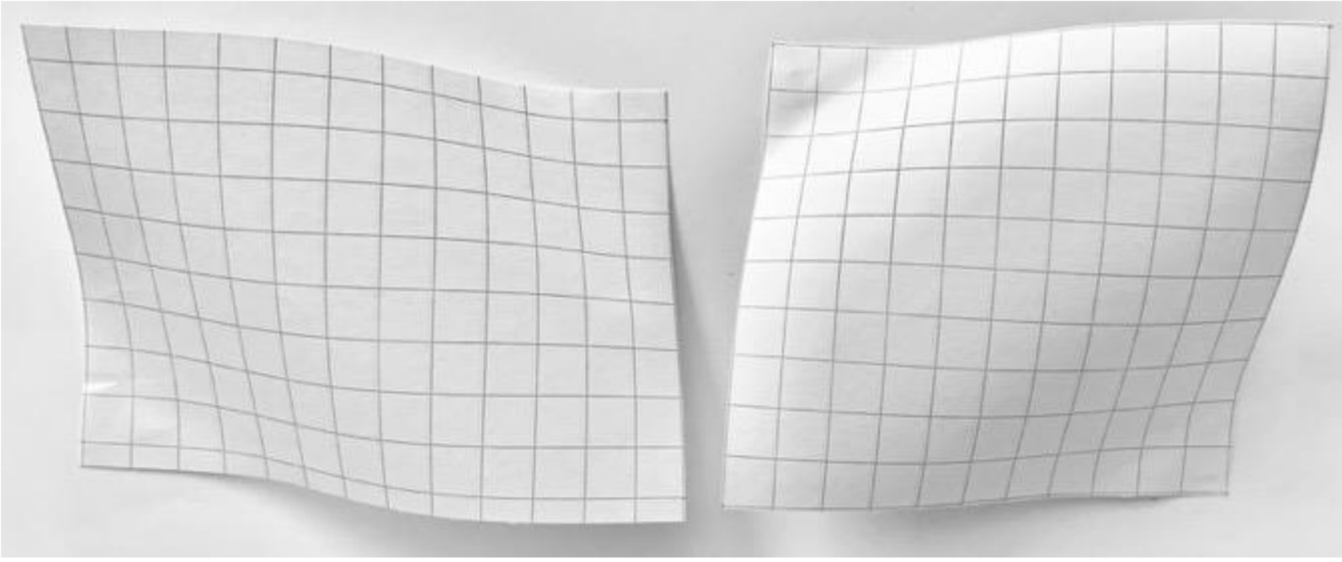
4 Réponse correcte (M. Mouche entend les cinq coups à 10h30), avec une description claire et complète de la procédure suivie (par exemple, tous les calculs ou une représentation graphique avec toutes les étapes nécessaires pour arriver à la réponse)

Niveaux : 3, 4

Origine : Udine

4. RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ (Cat. 3, 4)

Enrico et Giulia ont dessiné puis découpé deux rectangles dans le même rouleau de papier quadrillé. Voici leurs rectangles.



rectangle de Enrico *rectangle de Giulia*

Giulia a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant qu'Enrico ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de deux rectangles de papier quadrillé en faisant les approximations nécessaires pour l'un d'eux.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : les deux rectangles ont été découpés dans le même rouleau donc ils ont le même quadrillage, il faut établir lequel des deux rectangles a la plus grande surface, à savoir celui qui contient le plus grand nombre de carrés.
- Observer les deux rectangles et se rendre compte que :
  - dans le rectangle d'Enrico, il y a à la fois des carrés entiers et des « parties » de carrés (sur deux de ses bords);
  - dans le rectangle de Giulia, il n'y a que des carrés entiers.
- Compter les carrés entiers en utilisant la stratégie la plus pratique, par exemple compter tous les carrés un par un (une procédure longue et pénible avec un risque élevé d'erreurs de comptage)

ou bien

- comprendre que toutes les lignes (et toutes les colonnes) ont le même nombre de carrés entiers. Ensuite, compter les carrés entiers qui sont sur une ligne (13 pour le rectangle d'Enrico et 11 pour celui de Giulia) et sur une colonne (8 pour le rectangle d'Enrico et 10 pour celui de Giulia) et puis trouver le nombre de tous les carrés entiers en multipliant les deux nombres obtenus pour chacun des deux rectangles : $13 \times 8 = 104$ (Enrico) et $10 \times 11 = 110$ (Giulia) (ou déterminer le nombre de carrés par des additions répétés du nombre de carrés sur les lignes ou sur les colonnes).
- Constater alors que le rectangle de Giulia a 6 carrés entiers de plus que celui d'Enrico et se rappeler cependant que Enrico a aussi des parties de carrés à ajouter aux 104 carrés entiers.
- Observer qu'il y a 13 « parties » de carrés sur la ligne supérieure et 13 sur la ligne inférieure et chercher à les regrouper pour former des carrés entiers. Par exemple, supposer qu'un carré est formé de deux « parties » ; dans ce cas, toutes les parties ensemble forment environ 13 carrés ; le rectangle d'Enrico a une superficie d'environ 117 (104 + 13) carrés, donc Enrico a utilisé plus de papier que Giulia.

Ou bien

- Supposer qu'un carré est formé de trois « parties » ; dans ce cas toutes les parties forment ensemble plus de 8 carrés. Donc le rectangle d'Enrico a plus de 112 (104 + 8) carrés. Ce qui confirme qu'Enrico a utilisé plus de papier que Giulia.

Ou bien

- Supposer qu'un carré est formé de quatre « parties » ; dans ce cas toutes les parties forment ensemble plus de 6 carrés. Donc le rectangle d'Enrico a plus de 110 (104 + 6) carrés. Et dans ce cas encore, Enrico a utilisé plus de papier que Giulia.

Ou bien

- Découper ou dessiner les deux rectangles sur papier quadrillé, correspondant visuellement, aux deux photos de l'énoncé, mesure leurs dimensions et calculer leur aire.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Giulia a utilisé moins de papier" (ou une autre formulation ayant le même sens), avec une explication claire et complète de la stratégie adoptée ou tous les calculs nécessaires

Niveau : 3, 4

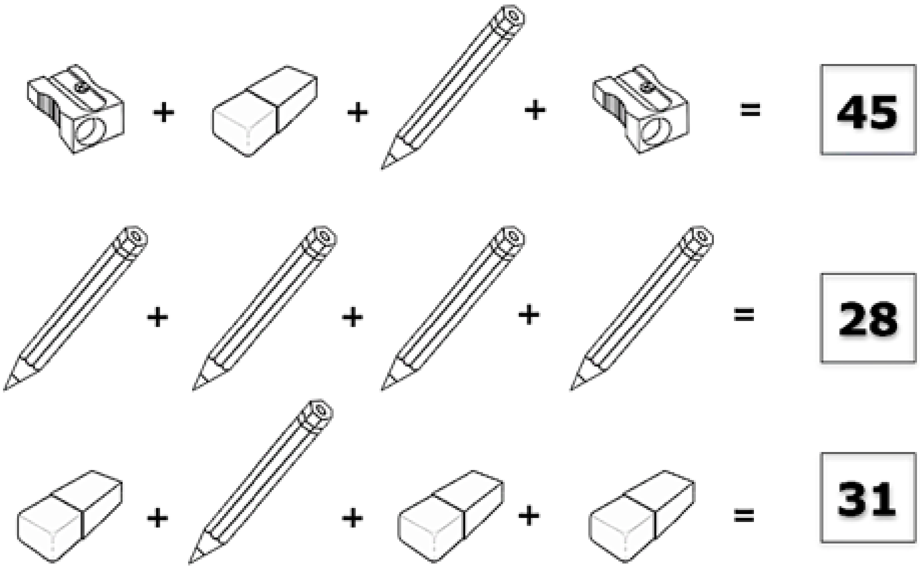
Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

5. **LES NOMBRES SECRETS** (Cat. 3, 4, 5)

Alex propose à ses camarades de classe un jeu pour s'entraîner à calculer.

Il a remplacé les nombres par des objets de sa trousse : taille-crayons, gommes et crayons.

Un même objet remplace toujours le même nombre.



À quel nombre correspond le taille-crayon ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres (a, b, c) connaissant les sommes $a + b + c + a$ (45), $c + c + c + c$ (28) et $b + c + b + b$ (31).

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : chaque objet correspond à un nombre qui est toujours le même quel que soit la place occupée au sein de l'addition ; le nombre à la fin de chaque ligne est égal à la somme des nombres qui correspondent aux objets
- Procéder par déductions :
  - comprendre qu'il faut partir de la deuxième somme car elle comporte toujours le même objet (quatre crayons) et elle est donc composée de termes égaux, ce qui permet de trouver la valeur d'un crayon : 28 ÷ 4 = 7 ou 4 × 7 = 28 ;
  - continuer avec la troisième somme dans laquelle le seul objet différent des autres est le crayon (dont la valeur est connue), soustraire la valeur du crayon du total (31 – 7 = 24) et en déduire que trois gommes valent 24 et puisque la valeur de chacune est la même, procéder comme pour les crayons : 24 ÷ 3 = 8 ou 8 × 3 = 24.
  - conclure en utilisant la première somme, en soustrayant du total la valeur totale du crayon et de la gomme pour obtenir la valeur de deux taille-crayons : 45 – 7 – 8 = 30 ou 7 + 8 = 15 et 45 – 15 = 30), puis en déduire la valeur d'un taille-crayon : 30 ÷ 2 = 15.

Ou

- Procéder par essais non organisés, en attribuant un nombre à chaque objet, puis vérifier si les nombres choisis rendent les trois égalités vraies.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Le taille-crayon correspond au nombre 15" (ou formulation équivalente) avec une description claire de la valeur de chaque objet et de la procédure suivie (explication de l'ordre des étapes de raisonnement et des calculs ou essais)

Niveaux : 3, 4, 5

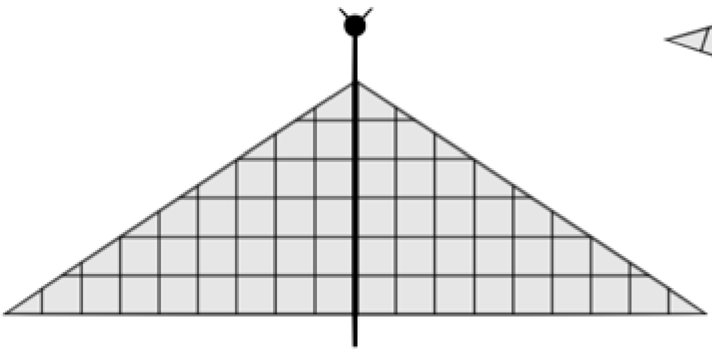
Origine : Rozzano

6. **LES DEUX PAPILLONS** (Cat. 4, 5, 6)

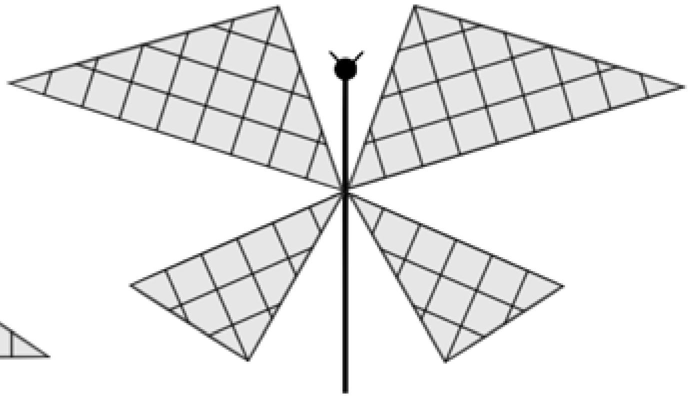
Laura et Paula décident de représenter deux papillons dans leurs cahiers.

Elles dessinent d'abord le corps et les antennes, puis collent les ailes qu'elles ont découpées dans un carton quadrillé.

Voici les papillons de Laura et Paula.



Papillon de Laura



Papillon de Paula

Laura et Paula ont-elles utilisé la même quantité de carton quadrillé pour leurs papillons ou est-ce que l'une en a utilisé plus et l'autre moins ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer l'aire d'un triangle rectangle, qui est la moitié d'un rectangle quadrillé (9 × 6), avec celle de deux autres triangles rectangles à joindre et qui permettent de reconstruire l'autre moitié du rectangle.

Analyse de la tâche

- Observer les figures et s'apercevoir que :
  - dans les deux papillons le corps est un axe de symétrie, la confirmation peut avoir lieu par le pliage des figures le long du "corps" de chaque papillon, en créant la superposition des ailes ;
  - les deux triangles du papillon de gauche (Laura) sont égaux ainsi que les deux couples de triangles du papillon de droite (Paola).
- Comprendre que pour résoudre le problème, il faut comparer les aires des ailes des deux papillons.

  De nombreuses procédures peuvent être suivies, par exemple :
  - découpage (manuel ou figuré) et superposition de toutes les ailes du papillon de droite sur les ailes du papillon de gauche ; découpage et juxtaposition d'une couple d'ailes différentes du papillon de droite (fig.1) et d'une aile du papillon de gauche, ou de la couple d'ailes du papillon de gauche avec les deux couples du papillon de droit (fig.2-3) et reconnaître la congruence par superposition ;

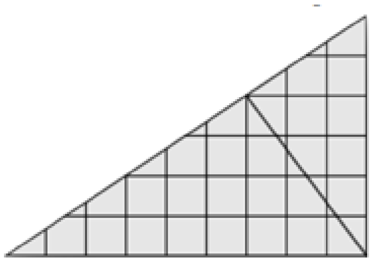


fig. 1

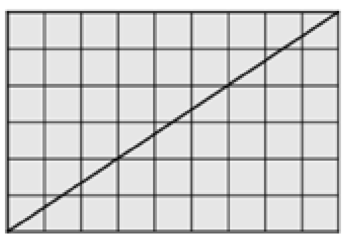


fig. 2

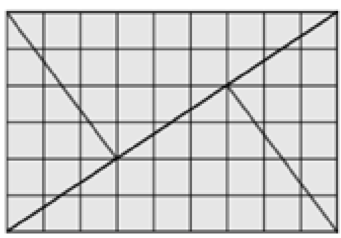


fig. 3

  - comptage des carreaux entiers puis les parties de carreaux du quadrillage (27 carreaux pour chacun des deux triangles du papillon de gauche ; 18 pour chacun des plus grands triangles et 9 pour chacun des plus petits triangles du papillon de droite).

  Le comptage un à un des carreaux avec compensation des carreaux non entiers est délicat et peut entraîner des erreurs.

- utilisation de la formule de l'aire du triangle, en choisissant, par facilité, la « base » et la « hauteur » qui suivent les lignes du quadrillage, compter le nombre de côtés de carreaux entiers présents sur les bases des triangles correspondant aux ailes, celui relatif aux hauteurs respectives pour la grande aile (9 × 6) / 2 = 27 ; pour la « grande des petites » "(9 × 4) / 2 = 18 et pour la « petite des petites » (6 × 3) / 2 = 9 ou prendre des mesures avec la règle graduée et calculer les aires en appliquant la formule.
- Établir finalement que les ailes du papillon de gauche ont la même aire que celles du papillon de droite.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Laura et Paula utilisent la même quantité de carton) avec découpage des ailes et comparaison par superposition/ juxtaposition précise des pièces ou avec comptage des carreaux ou calculs détaillés des aires

Niveau : 4, 5, 6

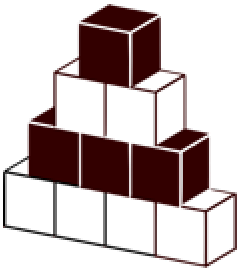
Origine : Parma

7. TOURS DE CUBES (II) (Cat. 5, 6)

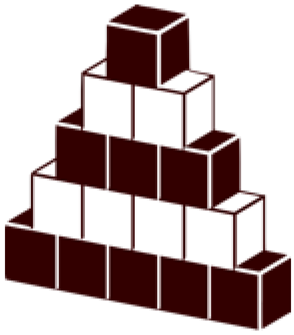
Trois amis construisent des tours avec des cubes blancs et des cubes noirs.

Chacun d'eux dispose d'un nombre différent de cubes.

Voici deux des tours construites par les trois amis.



Tour di Richard



Tour de Claire

Léa observe les deux tours et remarque qu'un étage noir alterne avec un étage blanc et que le sommet est constitué d'un seul cube noir.

Elle décide alors de construire une tour de vingt-cinq étages avec les mêmes caractéristiques : un étage blanc alterne avec un étage noir et le sommet est formé par un seul cube noir.

Quelle est la différence entre le nombre de cubes blancs et le nombre de cubes noirs utilisés par Léa pour construire sa tour ?

Montrez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans la suite des nombres naturels de 1 à 25, calculer la différence entre la somme des nombres pairs et celle des nombres impairs.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation en observant les figures :
  - il faut construire des "tours" avec les cubes pour que chaque étage ait un nombre de cubes inférieur à 1 par rapport au précédent ;
  - les étages de chaque tour doivent être alternés, l'un formé uniquement de cubes noirs et l'autre formé uniquement de cubes blancs ;
  - le sommet des tours est constitué d'un cube noir.
- Construire ou dessiner la tour de 25 étages ou son début pour réaliser que le nombre de cubes noirs sera donné par la somme des nombres impairs de 1 à 25, sur la base des modèles fourni :
  dans la tour de Richard, il y a 1 + 3 = 4 cubes noirs et 2 + 4 = 6 cubes blancs, avec une différence de 2 ;
  dans la tour de Claire, il y a 1 + 3 +5 =9 cubes noirs et 2 + 4 = 6 cubes blancs, avec une différence de 3.
- Effectuer les calculs
  cubes noirs : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + ... + 25 = 169
  cubes blancs : 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + ... 24 = 156
  différence : 169 – 156 = 13.

Ou

- Sans calculer les sommes décrites ci-dessus, calculer les différences une à une (25 – 24) + (23 – 22) + (21 – 20) + ... (il y a un cube supplémentaire dans les deux premiers étages, puis à nouveau un autre cube pour les deux suivants, ... donc il y a 12 cubes noirs supplémentaires pour les 12 premières paires d'étages auxquels il faut ajouter celui du haut de la tour : 12 + 1 = 13.

Ou

- Après avoir construit les tours de Richard (B – N = 2) et de Claire (N – B = 3), considérer la tour suivante et vérifier que la différence est toujours de 3. Considérer ensuite les deux suivantes et vérifiez que la différence entre le nombre des cubes noirs et celle des cubes blancs donne 4. Imaginer alors que les différences sont les mêmes pour les paires suivantes. Ensuite, procéder au décompte ou trouver une stratégie pour calculer sans écrire toutes les tentatives, par exemple 24/2 + 1, jusqu'à déterminer que la différence pour la tour à 25 étages est de 13 cubes.

Attribution des points

4 Bonne réponse (13) avec une explication claire et complète (construction des tours, représentation graphique et / ou tableau, détail de tous les calculs effectués, remarques claires ...) qui fait comprendre la procédure adoptée

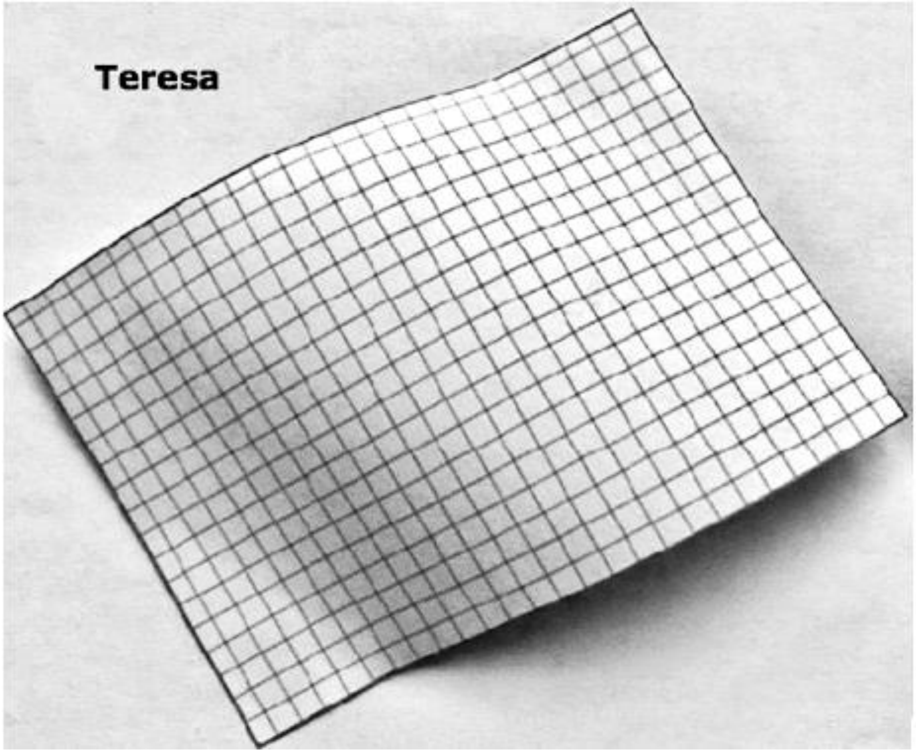
Niveaux : 5, 6

Origine : Groupe Numération (GTNU)

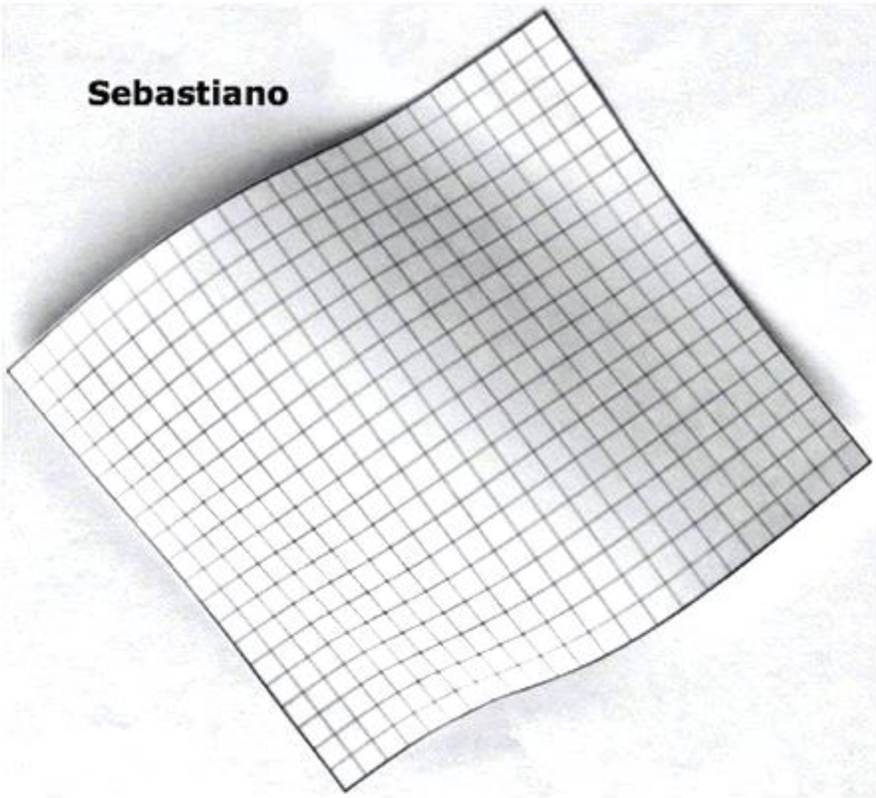
8. RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ (II) (Cat. 5, 6)

Teresa et Sebastiano ont dessiné puis découpé deux rectangles dans le même rouleau de papier quadrillé.

Celui-ci est le rectangle de Teresa.



Et ceci est le rectangle de Sebastiano.



Teresa a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant que Sebastiano ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de deux rectangles de papier quadrillé en faisant les approximations nécessaires pour l'un d'eux.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : les deux rectangles ont été découpés dans le même rouleau donc ils ont le même quadrillage, il faut établir lequel des deux rectangles a la plus grande surface, à savoir celui qui contient le plus grand nombre de carrés.
- Observer les deux rectangles et se rendre compte que :
  - dans le rectangle de Thérèse, il y a à la fois des carrés entiers et des « parties » de carrés (sur deux de ses bords) ;
  - dans le rectangle de Sébastien, il n'y a que des carrés entiers.
- Compter les carrés entiers en utilisant la stratégie la plus pratique, par exemple
  - compter tous les carrés un par un (une procédure longue et pénible avec un risque élevé d'erreurs de comptage)

  ou bien
  - comprendre que toutes les lignes (et toutes les colonnes) ont le même nombre de carrés entiers. Ensuite, compter les carrés entiers qui sont sur une ligne (26 pour le rectangle de Thérèse et 24 pour celui de Sébastien) et sur une colonne (18 pour le rectangle de Thérèse et 20 pour celui de Sébastien) et puis trouver le nombre de tous les carrés entiers en multipliant les deux nombres obtenus pour chacun des deux rectangles : $26 \times 18 = 468$ (Thérèse) et $24 \times 20 = 480$ (Sébastien) (ou déterminer le nombre de carrés par des additions répétés du nombre de carrés sur les lignes ou sur les colonnes).
- Constater alors que le rectangle de Sébastien a 12 carrés entiers de plus que celui de Thérèse et se rappeler cependant que Thérèse a aussi des parties de carrés à ajouter aux 468 carrés entiers.
- Observer qu'il y a 26 « parties » de carrés sur la ligne supérieure, 18 sur la colonne de gauche et un dans l'angle en haut à gauche et chercher à les regrouper pour former des carrés entiers. Par exemple, supposer que chaque partie du carré est environ la moitié d'un carré, donc on peut ajouter plus de 22 carrés entiers aux 468 entiers, ce qui fait 490 carrés. Conclure que Thérèse a utilisé plus de papier que Sébastien.

Ou bien

- Découper ou dessiner les deux rectangles sur papier quadrillé, correspondant visuellement, aux deux photos de l'énoncé, mesure leurs dimensions et calculer leur aire.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Thérèse a utilisé plus de papier" (ou une autre formulation ayant le même sens), avec une explication claire et complète de la stratégie adoptée ou tous les calculs nécessaires

Niveau : 5, 6

Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

9. QUEL PERSONNAGE CHOISISSEZ-VOUS ? (Cat. 5, 6, 7)

Audrey a fait une enquête dans sa classe.

Les 26 élèves de la classe ont dû dire quel est leur personnage préféré, en en choisissant un seul parmi Mickey, Donald, Dingo et Oncle Picsou.

21 enfants n'ont pas choisi Dingo

22 enfants n'ont pas choisi Oncle Picsou

Les enfants qui ont choisi Donald sont 3 de plus que ceux qui ont choisi Mickey.

Combien d'enfants ont choisi Mickey, combien ont choisi Donald, combien ont choisi Dingo et combien ont choisi Oncle Picsou ?

Montrez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Réaliser la partition d'un ensemble dont le nombre d'éléments (26) est connu en quatre sous-ensembles, dont deux sont définis par une négation et les deux autres par une comparaison (dans l'un il y a 3 éléments de plus que l'autre)

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation pour comprendre que les 26 élèves doivent être répartis en quatre ensembles (disjoints) selon leur choix : Mickey, Donald, Dingo et Oncle Picsou
- La tâche consiste alors à déterminer les nombre de ces ensembles :
  - 21 n'ont pas choisi Dingo signifie que 21 sur 26 "n'appartiennent" pas à l'ensemble de Dingo mais aussi que 5 y appartiennent ; de même, 22 n'ont pas choisi Oncle Picsou, signifie que 22 sur 26 "n'appartiennent" pas à l'ensemble d'Oncle Picsou et que 4 y appartiennent.
  - Il reste 17 élèves (26 – 5 – 4) qui « appartiennent aux deux autres ensemble : ceux qui ont choisi Donald sont 3 de plus que ceux qui ont choisi Mickey Mouse.
  - Pour trouver les deux nombres dont la somme est 17 et la différence est 3 , on peut procéder par essais … 5 + (5 + 3) ; 6 + (6 + 3) ; jusqu'à 7 + (7 + 3) = 17 (ou …12 + (12 – 3) … jusqu'à 10 + (10 – 3) = 17) ; c'est-à-dire 7 et 10 ou 10 et 7.

    Ou chercher toutes les paires de nombres dont la somme est 17 : (1 ; 16), (2 ; 15, (3 ; 14, ...) et identifier celle dont les éléments diffèrent de 3 : (7 ; 10)

    Ou raisonner sur les nombres (en s'aidant éventuellement d'une représentation graphique : si de 17 on retire le 3 de différence on obtient 14 qui est le double du petit, c'est-à-dire 7, le grand étant 10.
- La réponse est donc Mickey 7, Donald 10, Dingo 5, Oncle Picsou 4.

Attribution des points

4 Bonne réponse « Mickey 7, Donald 10, Dingo 5, Oncle Picsou 4 » avec une description claire et complète de la procédure (avec toutes les schématisations graphiques ou les calculs nécessaires)

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Belluno

10. COLLECTION DE CAILLOUX (II) (Cat. 5, 6, 7)

Jacques a ramassé 57 cailloux colorés et les a répartis dans 5 boîtes.

Dans la troisième boîte, le nombre de cailloux est le double de celui de la première boîte.

Dans la deuxième boîte, il y a plus de cailloux que dans la première et moins que dans la troisième.

Dans la cinquième boîte, le nombre de cailloux est le triple de celui des cailloux de la première boîte.

Dans la quatrième boîte, il y a plus de cailloux que dans la troisième et moins que dans la cinquième.

Combien de cailloux peut-il y avoir dans chaque boîte ?

Indiquez toutes les manières de répartir les cailloux dans les boîtes et montrez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver cinq nombres dont la somme est connue (57) sachant que le troisième et le cinquième sont respectivement le double et le triple du premier, que le second est supérieur au premier et inférieur au troisième et que le quatrième est supérieur au troisième et inférieur à du cinquième.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et comprendre qu'il faut chercher cinq nombres selon les indications données : leur somme est 57 ; le premier nombre n'est pas connu ; les troisième et cinquième nombres sont respectivement le double et le triple du premier ; le deuxième nombre est supérieur au premier et inférieur au troisième ; le quatrième nombre est supérieur au troisième et inférieur au cinquième.
- Procéder par essais et erreurs sur le premier nombre. Par exemple, avec 5, il y a 10 et 15 comme troisième et cinquième. Calculer la somme de ces trois premiers nombres (30) et trouvez qu'il manque 27 pour arriver à 57. Le deuxième nombre, supérieur à 5 et inférieur à 10 pourrait être 6, 7, 8 ou 9 et le quatrième nombre pourrait être 12, 12, 13 ou 14. Note ensuite que ces nombres ne sont pas bons car les deux plus grands (9 et 14) n'atteignent pas 27.

  Faire un autre essai pour le premier nombre. Par exemple, avec 6, on trouve 12 et 18 avec une somme de 36 et 21 est manquant pour arriver à 57. Le deuxième nombre pourrait être 7, 8, 9, 10 ou 11, le quatrième nombre pourrait être 13, 14, 15, 16 ou 17. Il existe deux solutions en choisissant 7 et 14 comme deuxième et quatrième nombre ou 8 et 13, dans les deux cas la somme sera de 21.
- Vérifier si nécessaire qu'en prenant 7 comme premier nombre, on obtiendrait 14 et 21 et une somme de 42, il manquerait 15 pour arriver à 57, mais la somme des deuxième et quatrième serait supérieure à 15 (8 + 15) et donc l'essai ne serait pas correct.
- Les deux solutions sont donc (6, 7, 12, 14, 18) et (6, 8, 12, 13, 18)

Parmi les erreurs possibles, on peut s'attendre à ce que l'une des trois conditions ne soit pas remplie :
- les troisième et cinquième nombres ne sont pas le double et le triple du premier ;
- le deuxième nombre n'est pas supérieur au premier et inférieur au troisième et le quatrième n'est pas supérieur au troisième et inférieur au cinquième ;
- la somme des cinq nombres n'est pas 57.

Attribution des points

4 Bonne réponse "6 cailloux dans la première boîte, 7 ou 8 dans la seconde, 12 dans la troisième, 14 ou 13 dans la quatrième et 18 dans la cinquième" avec description des essais et calculs effectués (indiquant au moins un essai inacceptable avec l'explication de la raison pour laquelle le nombre ne convient pas). Dans le cas du choix 6 comme premier essai pour le premier nombre et la découverte des deux autres, une vérification avec un autre choix est requise

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Siena

11. CERISES (Cat. 5, 6, 7)

Fabien, Livia et Albert comptent les cerises que chacun a récoltées et découvrent que :

- Livia a 20 cerises de plus que Fabien ;
- il manque 5 cerises à Albert pour atteindre le double de celles récoltées par Fabien ;
- il y a en tout 103 cerises.

Combien de cerises chacun a-t-il récoltées ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres entiers, sachant que le deuxième nombre vaut 20 de plus que le premier, qu'il manque 5 au troisième pour arriver au double du premier et que la somme de ces trois nombres est 103. B = A + 20 ; C = 2A – 5 ; A + B + C = 103

Analyse de la tâche

- Quitter le contexte des cerises et percevoir les trois nombres encore inconnus (F, L et A) et leurs trois relations : L : 20 de plus que F ; A : 5 de moins que le double de F ; la somme des trois nombres est 103.
- La procédure par essais organisés progressivement convient parfaitement pour des élèves qui n'ont pas encore de connaissances algébriques, par exemple, en partant d'une valeur pour F on calcule les deux autres au moyen des deux premières relations ci-dessus :

  si F = 10, L = 30 (10 + 20), A = 15 (2x10 – 5) et au total 10 + 30 + 15 = 55, ce qui est insuffisant,

  si F = 20, L = 40, A = 35, au total 95, on s'approche,

  pour arriver à : F = 22, L = 42, A = 39 ; 22 + 42 + 39 = 103.

  Cette procédure peut être plus ou moins développée, de trois essais comme dans l'exemple à tous les essais envisageables (liste ou tableau), avec l'idée naissante de variable et de fonction qui pourra faire partie des exploitations didactiques futures.
- Une procédure plus générale peut être favorisée par la manière dont l'énoncé exprime les relations, où les nombres de L et de A sont donnée en référence à celui de F. En langage de l'élève (forme rhétorique) on peut considérer que le nombre de F, additionné au nombre de F plus 20 (nombre de L) puis au double du nombre de F moins 5 (nombre de A) représente quatre fois le nombre de F plus 15 (20 – 5) et que cette somme est égale à 103. A ce moment on peut déduire de la différence entre 15 et 103 : 88, que quatre fois le nombre de F est 88 et que le nombre de F est 22.

  Ce type de procédure peut être accompagné de symboles représentant le nombre de F (un carré, un segment, un « F » …) pour « visualiser » la grandeur inconnue, répétée quatre fois, et les deux nombres 15 et 103. Le modèle des deux plateaux d'une balance peut aussi être utile.
- La procédure algébrique ne fait que traduire la formulation précédente, en une équation du genre : F + F + 20 + (2F − 5) = 103.

Parmi les obstacles, on peut relever la difficulté à choisir un des trois nombres pour commencer les essais.

Il peut y avoir des réponses erronées dues à la prise en compte de deux seulement des trois relations. Par exemple avec la première et la troisième, si le choix du nombre de F est 10, le nombre de L est 30, la somme des deux est 40 et, sans tenir compte de la deuxième relation A serait 103 – 40 = 65.

Une autre erreur possible est de considérer que : « Comme il manque 5 au troisième pour arriver au double du premier alors C – 5 = 2 A ».

Attribution de points

4 Réponse correcte (Fabien 22 ; Livia 42, Albert 39) avec une explication claire et complète (les essais à rejeter et l'essai retenu correct comme vérification clairement identifié ou procédure plus générale comme dans l'analyse précédente ou encore autre explication convaincante)

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Puglia

12. GABRIELLE LA PETITE SORCIÈRE (Cat. 6, 7, 8)

Gabrielle, la petite sorcière, prépare une potion magique pour remettre en forme ses elfes. Selon son livre de magie, il faut mélanger exactement 800 g de poudre de champignons bleus à 1 000 g de lait de licorne.

Distraite par son bâton magique, Gabrielle réalise qu'elle a inversé les deux quantités : elle a dissous 1 000 g de poudre de champignons bleus dans 800 g de lait de licorne. Comme la poudre de champignons bleus est difficile à trouver au pays des elfes, Gabrielle décide de ne pas jeter sa préparation.

Quel ingrédient Gabriella devra-t-elle ajouter et en quelle quantité pour obtenir une potion qui respecte la recette du livre de magie ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Travailler sur une situation de proportionnalité : modifier une recette à deux ingrédients en calculant la masse de ce qu'il faut ajouter pour rétablir la proportion correcte

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour respecter la recette, la proportion de poudre et de lait dans la potion doit être la même que celle de la recette originale.
- Comprendre qu'après avoir inversé les quantités, on doit conserver la quantité de poudre de champignon bleu et ajouter du lait de licorne.
- Pour trouver la quantité de lait à ajouter il faut partir de la recette « 800 g de poudre du champignon bleu pour 1 000 g de lait de licorne » et chercher le mélange final contenant « une quantité encore inconnue de lait et 1 000 g de poudre » c'est-à-dire passer du couple : (800 ; 1 000) au couple (1 000 ; *x*). Les quatre quantités se correspondant deux à deux, on peut les disposer en ligne, en colonne, en tableau, …
- Il faut alors tenir compte du fait que, dans une situation de « recette », c'est le rapport 1 000/800 = 5/4 = 1,25 qui est conservé et non la différence (1 000 – 800 = 200) qui conduirait à l'erreur 1 000 + 200 = 1 200. La quantité totale de lait doit donc être 1,25 fois celle de la poudre : 1,25 × 1 000 g= 1 250 g.
- Déduire alors les 800 g de lait déjà contenus dans le mélange et trouver le lait à ajouter : 1 250 − 800 = 450 (en g)

Remarque : 1,25 est le coefficient de proportionnalité du tableau qui suit.

Ou

- Décomposer le passage en plusieurs étapes, avec éventuellement le passage à l'unité, selon les propriétés de la proportionnalité qui conservent le rapport :

Masse de poudre en g	Masse de lait en g
800	1 000
400	500
100	125
1	**1,25 = 5/4**
…	…
1 000	1 250

Ou

Raisonner sur la quantité totale d'ingrédients (1 000 + 800 = 1 800 g) et travailler sur le rapport 800/1 800 = 4/9 pour trouver la quantité totale (1 000/x = 4/9 c'est-à-dire x = 2 250) en utilisant un tableau ou un coefficient de proportionnalité. Après avoir calculé le total, soustraire la quantité de poudre de champignons, c'est-à-dire 2 250 – 1 000 = 1 250, et finalement soustraire la quantité de lait déjà utilisée 1 250 − 800 = 450 g.

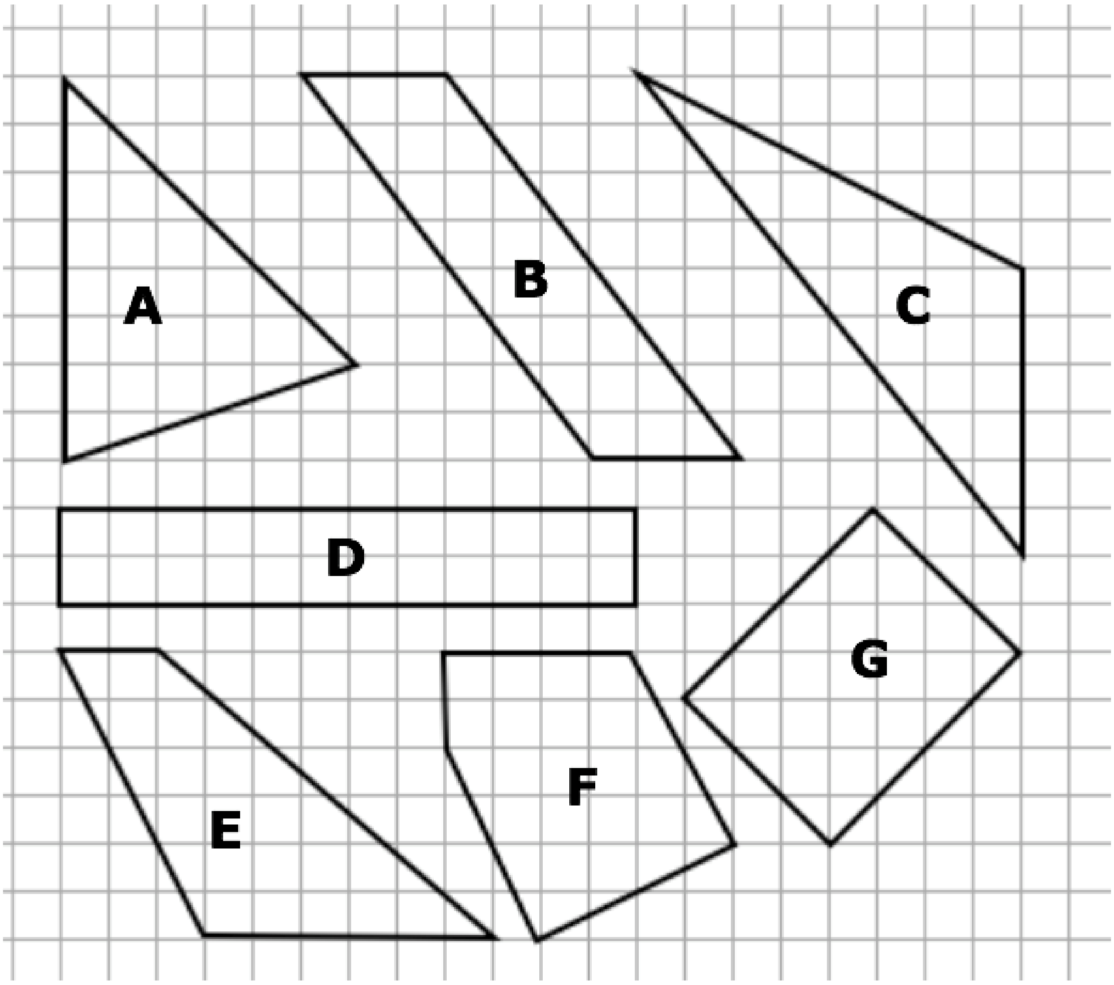
Attribution des points

4 Réponse correcte (ajouter 450 g de lait à la potion) avec explications claires et complètes (tous les calculs explicités de manière qu'il soit bien clair que le rapport entre les grandeurs est constant)

Niveau : 6, 7, 8 **Origine :** GTCP (Groupe Calcul et Proportionnalité), variante du *Confiseur Confus* 27.I.12

13. LES SEPT POLYGONES (Cat 7, 8)

Voici sept polygones dont les sommets sont sur les intersections du quadrillage.



Identifiez les polygones qui ont la même aire.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de 7 figures dessinées sur un quadrillage à maille carré dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer la mesure de chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constater qu'on ne peut pas appliquer de formules connues à tous les 7 polygones ; que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune ; qu'il sera nécessaire de décomposer les figures en carrés entiers ou en parties de carrés ou en figures de base dont l'aire se détermine facilement.
- Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre, en particulier :
- comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
- décomposition de la figure en rectangles, triangles et parallélogrammes qui peuvent reconstituer un rectangle par déplacement
- perception du triangle rectangle comme la moitié d'un rectangle
- les triangles non rectangles sans angles obtus peuvent être décomposés en deux triangles rectangles,
- calcul de l'aire du rectangle circonscrit à la figure complète suivie de la soustraction des aires des rectangles et/ou des triangles complémentaires,
- application de la formule pour l'aire d'un triangle

- faire appel aux formules de l'aire lorsque les décompositions précédentes donnent des triangles dont une "base" et la "hauteur" correspondante suivent le quadrillage et ont des mesures entières de leurs longueurs/ou des rectangles dont les côtés suivent les lignes du quadrillage.-
- La stratégie par comptage est facilitée lorsque les côtés passent tous par des nœuds du quadrillage. C'est le cas par exemple pour l'aire des figures D et G (24 u) qui peut être déterminée par comptage de carreaux entiers ou de demi-carreaux. Dans les autres configurations la démarche nécessite des approximations qui peuvent conduire à des résultats erronés
- L'application des formules lorsqu'elles sont connues est efficace pour les figures usuelles dont on peut facilement déterminer les mesures. C'est le cas pour les figures A B C D E dont l'aire est aussi 24 u.
- L'analyse de la décomposition de la figure en figures simples est nécessaire lorsque les formules ne sont pas connues ou que les figures sont non « usuelles ». Les figures peuvent par exemple chacune être vues comme étant inscrites dans un rectangle aux côtés suivant les lignes du quadrillage. Leurs aires peuvent être alors calculées en enlevant à l'aire de ce rectangle, l'aire des triangles rectangles qui entourent chaque figure. L'aire en carreaux de le figure F est, par exemple, alors donnée par le calcul : $6 \times 6 – 3 \times (2 \times 4 / 2) = 24$; il est aussi possible de tracer des traits suivant les lignes du quadrillage pour obtenir une décomposition en sous-figures dont l'aire est facile à calculer. Par un segment « horizontal » on peut, par exemple, décomposer la figure F en un trapèze, un parallélogramme et un triangle rectangle et calculer son aire en carreaux en effectuant $(4 + 5) \times 2/2 + 2 \times 5 + 2 \times 5 / 2 = 24$

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (tous les polygones ont la même aire) avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués avec la réponse explicitée

Niveau : 7, 8

Origine : GTGP (Groupe Géométrie Plane)

14. LA TIRELIRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Dans la tirelire de Luc il y a 5,40 euros.

Luc sait qu'il n'y a pas mis de billets mais seulement des pièces de monnaie. Il ouvre sa tirelire et il constate que parmi les huit valeurs de pièces possibles (de 1, 2, 5, 10, 20 ou 50 centimes et de 1 ou 2 euros) il n'a mis dans sa tirelire que des pièces de quatre valeurs différentes.

Luc note qu'il y a le même nombre de pièces pour chacune de ces quatre valeurs.

Combien peut-il y avoir de pièces dans la tirelire de Luc ?

Pour chaque possibilité trouvée, indiquez les quatre valeurs différentes des pièces et écrivez le nombre exact de pièces de chaque valeur.

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quels sont les diviseurs de 540 , qui peuvent être la somme de quatre termes différents choisis parmi 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 et 200 dans un conteste die pièces de monnaie

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il y a beaucoup de manières de choisir quatre valeurs différentes parmi les huit à disposition pour obtenir 5,40.
- Comprendre que, lorsque l'on a choisi les quatre valeurs différentes ; par exemple 1 ; 0,5 ; 0,2 ; 0,05 on peut calculer la somme 1 + 0,5 + 0,2 + 0,05 = 1,75 € ou 175 centimes et que si on prend le même nombre de fois chacune de ces valeurs, par exemple 3, la somme des valeurs de l'exemple précédent serait 3 × 175 = 525. Comme 540 n'est pas un multiple de 175 , ce choix des quatre valeurs est à rejeter.
- Le problème revient à trouver des couples de nombres **N** et **(a + b + c + d)** dont le produit est 540, couples constitués des diviseurs de 540. Il y en a 12 : (1 et 540 ; 2 et 270 ; 3 et 180, 4 et 135 ; 5 et 108 ; 6 et 90 ; 9 et 60 ; 10 et 54 ; 12 et 45 ; 15 et 36 ; 18 et 30 ; 20 et 27).
- Pour N = 1, la somme 540 ne peut pas être obtenu avec quatre des valeurs à disposition
- Pour N = 2, il faut que la somme soit 5,40 ÷ 2 = 2,70 qui ne peut pas être obtenue en quatre pièces différentes

  Pour N = 3, il faut que la somme soit 180 qui peut être obtenue comme 1 + 0,5 + 0,2 + 0,1. Il peut donc y avoir 3 pièces de chacune de ces quatre valeurs, soit 12 pièces en tout.

  Il y a en tout 5 essais qui aboutissent :

  N = 3 540 = 3 × 180 = 3 × (100 + 50 + 20 + 10) en 12 pièces

  N = 4 540 = 4 × 135 = 4 × (100 + 20 + 10 + 5) en 16 pièces

  N = 5 540 = 5 × 108 = 5 × (100 + 5 + 2 + 1) en 20 pièces

  N = 15 540 = 15 × 36 = 15 × (20+ 10 + 5 + 1) en 60 pièces

  N = 30 540 = 30 × 18 = 30 × (10 + 5 + 2 + 1) en 120 pièces

Ou

- Procéder par tentatives non organisées, sans reconnaître la distributivité du produit mais avec le risque d'oublier des solutions.

Erreurs possibles : ne pas respecter la condition de quatre valeurs différentes ou celle du même nombre de pièces.

Obstacle : sans reconnaître la distributivité, (produit) il devient très difficile de trouver toutes les solutions.

Le problème offre l'occasion d'aborder les propriétés des opérations de manière non mécanique et, avec la demande d'effectuer un contrôle rigoureux sur les 12 paires de diviseurs, permet de poursuivre un objectif important de l'enseignement des mathématiques.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (les cinq possibilités mentionnées ci-dessus avec détails), avec une procédure claire qui montre les tentatives ou mentionnant au moins la recherche des "diviseurs"

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : GTNU (Gruppo Numerazione)

15. À LA PAPETERIE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Au début de l'année scolaire, Marta et Ariane vont à la papeterie pour effectuer des courses de rentrée.

Marta achète 5 paquets de crayons de papier et 6 paquets de stylos, tandis qu'Ariane achète 9 paquets de crayons de papier et 3 paquets de stylos, chacun de la même marque et du même type que ceux achetés par Marta.

À la fin, elles se rendent compte qu'elles ont acheté, stylos et crayons de papier confondus, 78 articles chacune.

Combien y a-t-il de stylos et de crayons de papier dans chaque paquet ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux entiers naturels m et n tels que 5m + 6n = 9m + 3n = 78.

Analyse de la tâche

- Comprendre que Marta et Ariane achètent un nombre différent de paquets du même type de stylos et de crayons de papier, mais qu'à la fin elles ont finalement le même nombre d'objets (78).
- Comparer les achats faits par Marta et Ariane et observer que Marta a acheté 4 paquets de crayons en moins qu'Ariane et 3 paquets de stylos en plus qu'Ariane. Puisque le total d'objets achetés par chacune sont égaux, les 4 paquets de crayons doivent avoir le même nombre d'objets que les 3 paquets de crayons.
- Chercher alors un multiple commun de 3 et de 4. Trouver ainsi 12 =4×3 = 3×4. Spéculer donc qu'il y en a 3 dans un paquet de crayons et 4 dans un paquet de stylos. Vérifier tout de même que 5×3+6×4=39 < 78, donc 12 ne convient pas. Procéder avec les multiples de 12 et essayer avec 24 = 4 × 6 + 3 × 8, correspondant à l'hypothèse de 6 crayons par paquet et de 8 stylos par paquet. Vérifier alors qu'avec 5 × 6 + 6 × 8 = 78 = 9 × 6 + 3 × 8, cela convient. Constater que 36 ne convient pas, car on obtiendrait 4 × 5 + 6 ×12 >78. A fortiori exclure tous les multiples plus grands. Conclure que dans chaque paquet de crayons de papier, il y en a 6 et dans chaque paquet de stylos, il y en a 8.

Ou bien

- procéder par essais successifs par exemple en faisant l'hypothèse d'un nombre *m* de crayons dans chaque paquet, trouver le nombre *p* de stylos par paquet : *p* = (78 – 5*m*) : 6 et, dans le cas où on obtient un nombre entier, vérifier que si 9 *m* + 3 *p* = 78.

Ou bien

- Par voie algébrique : soit x le nombre de crayons dans chaque paquet et soit y celui de stylos dans chaque paquet puis poser le système :

$\begin{cases} 5x + 6y = 78 \\ 9x + 3y = 78 \end{cases}$ et trouver $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$ ou bien poser l'équation $5x + 6(26 - 3x) = 78$

Ou bien

- Observer que $4x = 3y$, donc $y = \frac{4}{3}x$. Puisque *y* doit être un nombre entier, *x* pourra être chercher parmi les seuls multiples de 3. Réussir à substituer à *x* les valeurs 3, 6, 9,...., en déterminant les valeurs correspondantes de *y* à travers une des équations, en vérifiant ensuite la justesse en substituant les valeurs de *x* et de *y* dans la seconde équation et en contrôlant si on obtient bien une égalité.

Attribution des points

4 Réponse correcte (6 crayons de papier et 8 stylos) avec des explications claires de la procédure suivie (description claire et complète du raisonnement avec explications des calculs ou résolution algébrique bien effectuée)

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : Groupe Algèbre (GTAL)

16. LES RUBANS COLORÉS D'ARIANE (cat. 8, 9, 10)

Ariane a une collection de rubans de papier rouge : un de 1 m de longueur, un de la moitié d'un mètre, un d'un tiers d'un mètre, un d'un quart d'un mètre et ainsi de suite.

Elle désire les coller, l'un à la suite de l'autre, dans l'ordre de leur longueur, pour former une bande horizontale sur la paroi de sa chambre, de 3 mètres de long.

Elle se demande de combien de rubans elle aura besoin pour que sa bande occupe exactement toute la longueur de sa paroi.

Sa sœur, Béatrice, la regarde travailler et, à un certain moment lui dit : *Tu seras obligée de couper l'un de tes rubans*.

Mais non, qu'est-ce que tu racontes, je n'utiliserai que des rubans entiers, lui répond Ariane.

Dites laquelle des sœurs a raison.

Expliquez pourquoi et donnez les détails de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer si 3 peut être la somme des *n* premiers termes de la série 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + … 1/n.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'Ariane devra coller ses rubans sur la longueur de la paroi à partir du plus long, puis des autres pris en ordre décroissant.
- Comprendre le sens de la phrase de Béatrice : *Tu seras obligée de couper l'un de tes rubans*.
- Comprendre que pour déterminer qui a raison, il est nécessaire de passer à une écriture symbolique de la situation : 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + … pour atteindre 3.
- Comprendre qu'il est nécessaire de calculer la somme des premiers termes, à partir da 1 + 1/2 = 3/2 ; 3/2 + 1/3 = 11/6 … puis contrôler si l'on atteint 3.
- Se rendre compte que les dénominateurs communs deviennent de plus en plus grands (ppmc de 6 et 4) = 12, ppmc de 12 et 5 = 60, ppmc de 60 et 7 = 420 …) et décider éventuellement de passer aux nombres décimaux.
- Se rendre compte que les sommes augmentent lentement et que la recherche pourrait être longue et que la calculatrice sera la bienvenue.
- Poursuivre par le calcul des sommes successives : 11/6 + 1/4 = 1,83… + 0,25 = 2,083… et tenir compte de la présence de nombres périodiques (on pourrait peut-être se rendre compte que si Ariane voulait s'arrêter à 2 exactement, elle devrait couper un bout du 4e ruban parce que la somme dépasse 2 et se demander ce qu'il arrivera pour 3 ?)
- Poursuivre le calcul des sommes successives, contrôlé au fur et à mesure delle somme successive et arriver à la dixième, voisine de 2,93 (selon le type de calculatrice ou tableur) puis 2,93 + 1/11 = 3,019… qui montre que Beatrice a raison parce que la somme est supérieure à 3 (et la longueur dépasse 3 m) ce qui signifie qu'Ariane doit couper un bout de son dernier ruban (le onzième) si elle veut atteindre exactement 3 m. (Éventuellement, la suite des sommes partielles est 1 ; 1/2 ; 11/6 ; 25/12 ; 137/ 60 ; 49/20 ; 363/40 ; 761/280 ;7129/2520 ; 7381/2520 < 3 ; 83711/27720 > 3 et montre que le 3 se situe entre la dixième et la onzième, c'est-à-dire qu'il faudra couper le 11 ruban)

Ou

Dessiner une bande à l'échelle (par exemple où 1 dm correspond à 1 m) et y reporter les rubans (en cm) de 10,0 ; 5,0 ; 3,3 ; 2,5 ; 2,0 ; 1,7 ; 1,4 ; 1,3 ; 1,1 ; 1,0 pour constater, avec une précision au mm près, qu'on n'atteint pas les 30 cm mais à peu près 29,3 (entre 29,2 et 29,5) cm et qu'il faudrait y ajouter une partie de la 11e bande

Attribution des points

4 Réponse correcte (Béatrice a raison) avec explications (du genre : nous avons calculé les sommes et n'en avons trouvé aucune égale à 3 ou montrant la somme directement inférieure à 3 et celle directement supérieure à 3, ou indiquant qu'il faut couper une partie de la 11^{e} bande) avec le détail des calculs (par exemple le relevé des derniers nombres obtenus sur la calculatrice)

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : GAOA (Groupe Zeroallazero)

17. VOYAGE EN BUS (Cat. 8, 9, 10)

Pour un voyage en bus, il y a 50 inscriptions. Chaque passager doit payer 60 euros.

Au dernier moment, certaines personnes abandonnent et ne veulent pas payer le voyage. Les organisateurs obtiennent que ceux qui renoncent, paient au moins une pénalité : autant d'euros que le nombre de personnes qui ont renoncé à voyager.

Quel est le montant minimum que les organisateurs du voyage peuvent récolter ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer la valeur minimum d'un montant égal à $3000 - 60\,x + x^2$, où x est un nombre entier compris entre 0 et 50 euros.

Analyse de la tâche

- Comprendre le contrat - une fiction étrange mais intrigante - entre les inscrits et les organisateurs et la « pénalité » en particulier la phrase « autant d'euros que le nombre de personnes qui ont renoncé à voyager ». Comprendre aussi que le « montant minimum » de la question dépend du nombre de « personnes ayant renoncé » et fait entrevoir « quelque chose qui varie »dans la situation : il y a 50 inscrits - dont certains renoncent ou participent- qui conduiront à 50 montants possibles qui semblent a priori tous différents.
  Finalement, il faut se convaincre qu'il sera nécessaire de calculer les montants, de les comparer pour percevoir si l'on peut détecter une variation et sa nature : régulière ou non, avec augmentations ou diminutions ; en espérant qu'il ne sera pas nécessaire de les calculer tous.
- Envisager éventuellement, au moment de l'appropriation de la situation les montants pour les limites de l'intervalle (en €) : 3000 pour 0 renoncement ou 50 participants : (50 x 60) et 2500 pour 50 renoncements ou 0 participant (50 x 50 ou 50^2)
- Déterminer et appliquer une méthode de calcul des montants dus, dans un premier cas, puis d'autres et éventuellement dans le cas général : cette méthode consiste, par exemple à soustraire aux 3000 euros d'origine autant de fois le prix de 60 qu'il n'y a de renoncements, puis ajouter la pénalité (nombre de renoncements x nombre égal d'euros). (On peut aussi partir des participants, multiplier leur nombre par 60, calculer le nombre de renoncements, l'élever au carré et l'additionner au produit précédent.)
- Puis comparer les montants calculés pour savoir si l'un est plus petit que tous les autres, comme le laisse entendre la question « quel est le montant minimum ». Cette partie essentielle de la tâche nécessite une comparaison organisée (regroupements spatiaux des résultats, sous forme de liste ou tableaux permettant de déceler des variations, car on doit se rendre compte que les essais « au hasard » ne pourront pas conduire à la solution.
  On sait déjà que le montent de 3000 va diminuer puisqu'il y a des renoncements et que la compensation due aux pénalités ne pourra atteindre que 2500.
  En essayant par exemple de 5 en 5 renoncements, on obtient les couples (0 ; 3500), (5 ; 2725), (10 ; 2500), (15 ; 2325), (20 ; 2200), (25 ; 2125), (30 ; 2100) ; qui font état d'une décroissance progressive puis (35 ; 2125), (40 ; 2200), (45 ; 2325) et (50 ; 2500) avec croissance. Il faut encore, à ce moment, calculer les valeurs proches de 2100, pour des renoncements proches de 30 comme : (28 ; 2104), (29 ; 2101), (31 ; 2101), (32 ; 2104) pour s'assurer que le minimum est 2100 pour 30 renoncements.

  Cette procédure peut s'accompagner d'une liste ou tableau de valeurs plus complète, pouvant aller jusqu'à l'ensemble des nombres de 1 à 50, préfigurant la notion de fonction d'une variable entière définie sur l'ensemble des nombres naturels de 1 à 50.

  Il y a d'autres procédures encore, par représentation graphique (parabole) ou algébriquement par la recherche du minimum de la fonction continue correspondante du genre $y = x^2 - 60\,x + 3000$.

Attribution des points

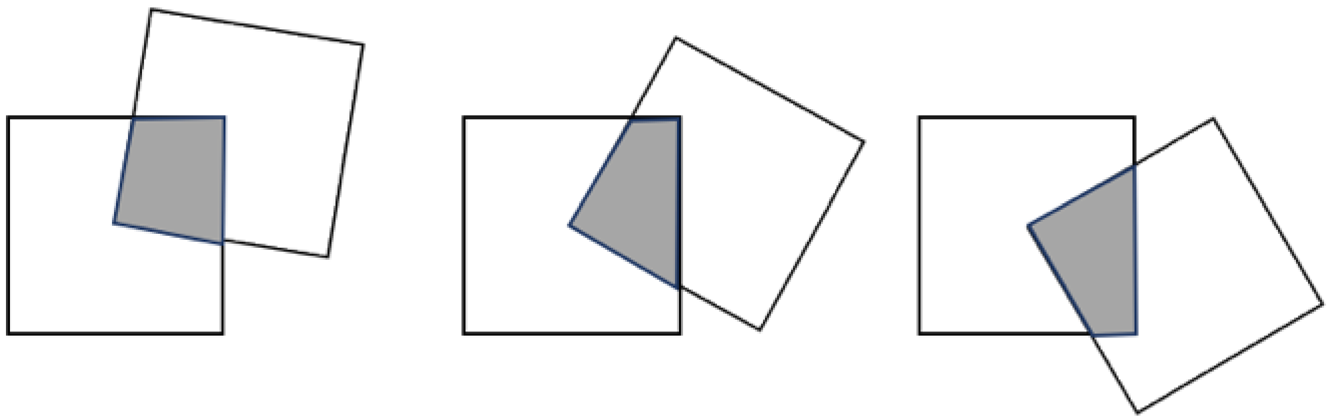
4 Résultat exact (2100 euros) avec des calculs de montants qui montrent explicitement qu'il y a eu décroissance et croissance (augmentations et diminutions du montant total), mention des 30 personnes et détails pour 29 et 31 participants ou par procédure algébrique avec calcul explicite du minimum.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : GTFN (Groupe Fonctions)

18. **LES DEUX CARRÉS** (Cat. 8, 9, 10)

Marc, sur son ordinateur, dessine un carré, puis un deuxième, de même grandeur, avec un sommet au centre du premier carré. Il fait tourner le second carré autour de ce centre et obtient ainsi plusieurs figures. En voici quelques-unes :



Marc et son frère Paul discutent de l'aire de la figure qui est l'intersection des deux carrés, marquée en gris.

Marc soutient que cette aire est toujours la même, quelle que soit la position du second carré.

Paul, en revanche pense que l'aire change lorsqu'on fait tourner le second carré.

Dites si l'aire de l'intersection est toujours la même ou si elle change lorsque le second carré tourne.

Justifiez votre réponse.

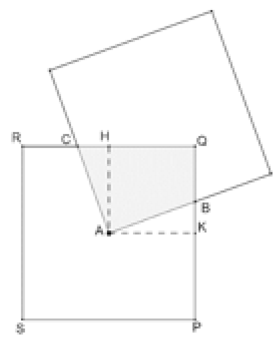
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Justifier que, en faisant tourner un carré autour de l'un de ses sommets, situé au centre d'un autre carré égal, l'aire de l'intersection des deux carrés est constante.

Analyse de la tâche

- Imaginer la rotation du second carré (ou la réaliser à l'aide d'un des carrés découpés) et constater que l'intersection change de forme, puis trouver que cette intersection est un quadrilatère mais qu'elle peut aussi être elle-même un carré ou encore un triangle.
- Comparer les aires des deux cas particuliers où l'intersection est un carré et celle où l'intersection est un triangle et constater que, dans chacun des deux cas, l'aire est un quart de carré entier.
- Dans le cas général (où l'on a fait tourner le carré d'un angle quelconque), observer l'intersection et constater que c'est toujours un quadrilatère dont deux angles sont droits et deux côtés sont égaux (obtenus par une rotation de 90 degrés autour du centre de rotation, AB et AC sur la figure ci-contre). En déduire que les deux triangles rectangles (AKB et AHC sur la figure) sont égaux, leurs aires aussi et que le triangle « découpé » sur un côté de l'intersection est compensé par le triangle « ajouté » de l'autre côté.



Ou : Mesurer les dimensions des trois intersections (ou choisir des mesures hypothétiques) et calculer leur aire (par exemple comme somme de l'aire des deux triangles de la figure ci-jointe AQC et AQB). Comparer ce trois aires et déterminer qu'elles sont égales, en se rendant compte qu'il s'agit d'approximations)

Il y a encore d'autres partage des quadrilatères d'intersection ou d'autres moyens de se convaincre que l'aire de l'intersection reste constante.

L'approche d'une « démonstration » en géométrie pourra faire l'objet des exploitations didactiques de ce problème où l'aire de l'intersection est constante, quel que soit la valeur de l'angle de rotation.

Attribution des points

4 Réponse correcte (l'aire de l'intersection est toujours la même) en mentionnant que l'aire est celle d'un quart de carré (un des cas particulier ou d'un triangle équivalent pour l'autre cas particulier) et une justification mentionnant la compensation des triangles pour le cas général

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma