	Titre	*Niveau*	*Origine*	*Domaine*
1	Album d'images	3 4	SI	Trouver un nombre entier vérifiant certaines conditions, en utilisant les quatre opérations
2	Michèle et ses sœurs	3 4	RZ	Trouver quatre nombres entiers connaissant leur somme et certaines relations entre eux
3	Sortie scolaire (I)	3 4	BL	Décomposer un nombre en sommes composées uniquement des nombres 3 ou 4
4	Les bracelets de Lara	3 4	SI	Déterminer la règle de l'alternance de deux types d'objets dans une suite, et trouver combien il y en a d'un type donné
5	Quarante Triangles	3 4 5	LY	Reconnaître une progression arithmétique et identifier son nième terme et sa raison
6	Collage géométrique	4 5 6	GTGP	Comparer les aires de deux groupes de figures
7	Jeux de chiffres	5 6	LU	Former deux nombres avec cinq chiffres donnés dont le produit est maximum
8	Les billes	5 6 7	SI	Trouver deux nombres dont la somme et la différence sont connues
9	Sortie scolaire (II)	5 6 7	BL	Décomposer deux nombres en sommes composées seulement de 3 ou de 4
10	Décoration de Noël	5 6 7	PU	Déterminer le nombre d'objets d'un certain type connaissant les dépenses dans une situation d'offre spéciale
11	Le dessin de Pietro	5 6 7	PR+MI	Calculer et comparer les aires de deux modules dans un pavage
12	Sur la planète Alfa	6 7 8	UD	Trouver les noms de trois personnages à partir de leurs affirmations, sachant qu'un seul des trois dit la vérité
13	Cueillette de fruits	7 8	SI	Trouver un nombre somme de quatre autres dont on connait des relations entre eux
14	Le puzzle (I)	7 8	MI+FC	Étant donné un rectangle divisé en 4 triangles rectangles égaux deux à deux, dessiner un nouveau rectangle à l'aide des 4 triangles et déterminer son périmètre
15	Échanges de billes	8 9 10	BB	Déterminer les lois d'échange qui font passer n objets de type A à m objets de type B et s objets de type C
16	Images à donner	8 9 10	SI	Trouver les solutions entières positives d'une équation linéaire à deux inconnues
17	Gagner avec un dé	8 9 10	FC	Trouver les solutions entières positives d'une équation linéaire à deux inconnues
18	Tapis roulant	8 9 10	FC	Trouver la différence entre deux distances parcourues, connaissant quelques informations sur la vitesse et le temps
19	La forêt de Transalpie	9 10	FC	Calculer le temps de multiplication par 2 et par 8 d'une certaine quantité en sachant qu'elle augmente de 8% régulièrement
20	Carré magique	9 10	FC	Compléter un carré magique 4×4 avec les nombres de 1 à 16 connaissant 3 nombres de la première ligne et trois de la deuxième
21	Le puzzle (II)	9 10	MI	En utilisant 4 triangles rectangles égaux deux à deux, construire deux rectangles différents et calculer leurs périmètres

1. ALBUM D'IMAGES (Cat. 3, 4)

Andrea avait 74 images de footballeurs et il y a quelques semaines, il a acheté un album pour les coller.

Depuis, chaque semaine, son frère Luigi lui donne une image et sa sœur Anna lui en donne deux.

Parmi ces images, 6 étaient en double, il ne les a donc pas collées. Aujourd'hui Andrea a 95 images dans son album.

Combien de semaines se sont-elles écoulées depuis qu'Andrea a acheté son album ?

Montrez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver combien de fois il faut ajouter 3 à 74 pour arriver au résultat de 95 + 6.

Analyse de la tâche

- Comprendre l'énoncé du problème, les données et la chronologie des événements : il y a quelques semaines, Andrea avait 74 images quand il a acheté l'album. Aujourd'hui, Andrea a collé 95 images sur son album après en avoir écarté 6 parce qu'elles sont en double. On ne sait pas combien de semaines se sont écoulées depuis qu'Andréa a acheté cet album, mais on sait que chaque semaine il a reçu des images (1 et 2), donc que sa collection a augmenté chaque semaine de 3 images.
- Déterminer combien d'images Andrea possédait avant d'écarter les 6 qu'il n'a pas pu coller : ajouter ces 6 images aux autres images de l'album. 95 + 6 = 101. Trouver alors la différence entre le nombre d'images qu'il possède aujourd'hui et le nombre des images qu'il avait quand il a acheté l'album : 101 – 74 = 27.

  Ou bien trouver d'abord la différence entre le nombre des images collées aujourd'hui et le nombre de celles qu'il avait quand il a acheté l'album : 95 – 74 = 21 ; et l'augmenter de 6 : 21 + 6 = 27.
- Considérant que le nombre total d'images a augmenté de 27 unités et qu'à chaque semaine il augmentait de 3 images, 9 semaines se sont écoulées (27 : 3 = 9). Le même résultat peut être obtenu par une multiplication à compléter : 3 x ? = 27 ou par additions répétées.

Ou bien

- Après avoir calculé le nombre d'images qu'Andrea possédait en tout avant d'avoir écarté les 6, (95 + 6 = 101), partir de 74, y ajouter 2, puis 1 et voir combien de fois ces opérations doivent être répétées pour obtenir 101 : 74 + 2 + 1 = 77 ; 77 + 2 + 1 = 80 ; … ; 98 + 2 + 1 = 101. Conclure que ces opérations ont été répétées 9 fois, donc que 9 semaines se sont écoulées depuis qu'Andrea a acheté son album.

Ou bien

- Partir de 101, enlever 3, au résultat enlever 3, … jusqu'à obtenir 74 et constater que cette opération est répétée 9 fois.

Attribution des points

4 Réponse correcte (9 semaines) avec une procédure claire (phrases, dessin, ou détail des calculs).

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena

2. MICHÈLE ET SES SŒURS (Cat. 3, 4)

Michèle a trois sœurs : Sylvie, Anne et Claire.

- Sylvie a trois ans de moins que Michèle.
- Anne a cinq ans de plus que Michèle.
- Claire a deux ans de plus qu'Anne.

Aujourd'hui, la somme des âges des quatre sœurs est égale à 29 ans.

Quel âge Michèle a-t-elle aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre entier n tel que $n + (n - 3) + (n + 5) + [(n + 5) + 2] = 29$.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que Claire a deux ans de plus qu'Anne (elle a donc 7 ans de plus que Michèle) et qu'elle est la plus âgée, tandis que Sylvie est la plus jeune car elle a 3 ans de moins que Michèle.
- Classer les quatre sœurs par âges, par exemple de la plus jeune à la plus âgée : Sylvie - Michèle - Anne – Claire.

La recherche peut se faire de différentes manières :

- Par des essais non organisés et des ajustements successifs.
- Avec des hypothèses et des essais systématiques, éventuellement aussi avec l'aide d'un tableau. Par exemple, Michèle pourrait avoir 3 ans, Sylvie pourrait être née (0 ans), Anne aurait 8 ans et Claire 10. Écrire que la somme est 29. Dans ce cas, 0 + 3 + 8 + 10 = 21 ans. Augmenter l'âge de Michèle d'un an, remarquer comment les âges des sœurs varient et calculer la somme : 1 + 4 + 9 + 11 = 25 ; poursuivre la recherche et trouver la seule solution : 2 + 5 + 10 + 12 = 29.
- À partir de la somme 29 à partager en 4, donner 7 ans à Michèle, vérifier que ça ne va pas et continuer avec les ajustements appropriés pour finalement obtenir la solution.
- Conclure dans chacun des cas que Michèle a 5 ans aujourd'hui.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Michèle a 5 ans aujourd'hui), montrant clairement comment la solution a été obtenue (tableau, calcul…).

Niveaux : 3, 4

Origine : Rozzano

3. SORTIE SCOLAIRE I (Cat. 3, 4)

Les enfants d'une classe de l'école de Transalpie vont faire une sortie dans un parc. Au retour ils s'arrêteront pour manger une pizza.

La pizzeria a des tables de trois ou de quatre places.

Les enfants doivent occuper les tables sans laisser de places vides.

Combien de tables de trois places et de quatre places seront-elles occupées par les 23 enfants de la classe ?

Écrivez toutes les possibilités et montrez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer le nombre 23 en sommes ne comportant que des 3 et des 4.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les élèves devront occuper entièrement des tables de 3 et de 4 places.

On peut procéder de différentes manières :

- Dessiner un certain nombre de tables de 3 places et de 4 places et essayer de répartir les 23 élèves sans laisser de places vides.
- Effectuer des additions avec des termes tous égaux à 3 et 4, en découvrant que pour obtenir 23, il peut y avoir un maximum de cinq 3 ou cinq 4, selon que l'on commence par considérer les tables de trois ou quatre places : $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4$ ou bien $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3$.
- Commencer par éliminer, si ce n'est pas déjà fait, un ou plusieurs termes 3 (ou 4) jusqu'à la conclusion qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Ou bien

- Travailler dans le cadre multiplicatif (ou mixte) : se rendre compte que les enfants ne peuvent pas occuper seulement des tables de 4 places. Au maximum, ils peuvent occuper 5 tables de 4 et il restera 3 élèves qui pourront remplir une table de 3. C'est la première possibilité.
- On peut alors procéder par des essais organisés : par exemple envisager 2 tables de 3 et vérifier qu'il n'est pas possible de répartir les élèves restants sur des tables de 4 sans qu'il reste des places vides ($23 – 2 \times 3 = 17$ et $17 = 4 \times 4$ reste 1) ou bien 17 n'est pas dans la table du 4. Continuer en augmentant progressivement le nombre de tables de 3 places et trouver qu'il n'y a qu'une seule autre possibilité en respectant les conditions : 5 tables de 3 et 2 tables de 4 ($23 - 5 \times 3 = 8$ et $8 \div 4 = 2$).
- On peut aussi faire le même raisonnement en partant d'une seule table de 4 places.

Ou

- Procéder par des essais non ordonnés et des ajustements successifs. Il est possible que de cette manière, on ne trouve pas toutes les solutions.

Attribution des points

4 Réponse correcte (présentant les deux possibilités : 1 table de 3 et 5 tables de 4 ou bien 5 tables de 3 et 2 tables de 4) avec une description claire et complète de la procédure (par exemple des calculs explicites, des dessins).

Niveaux : 3, 4

Origine : Belluno

4. LES BRACELETS DE LARA (Cat. 3, 4)

Lara possède un sac de 100 perles jaunes et un sac de 100 perles rouges.

Elle prépare quatre bracelets de perles de couleur pour ses amies.

Pour chaque bracelet, elle enfile d'abord une perle rouge et deux perles jaunes, puis elle répète l'opération plusieurs fois, et termine avec une perle rouge.

Lorsque le bracelet est terminé, Lara compte les perles rouges qu'elle a utilisées et constate qu'il y en a 12.

Après avoir terminé quatre bracelets pour ses amies, elle aimerait en faire un pour elle, le même que celui qu'elle a fabriqué pour ses amies.

Reste-t-il assez de perles jaunes dans le sac ?

Montrez comment vous avez trouvé la réponse et donnez le nombre de perles jaunes manquantes ou restantes.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer combien d'éléments d'un type donné apparaissent dans une séquence dont la régularité alternée de deux types d'objets est connue. Utiliser ce nombre pour calculer si 100 éléments pour chacun des deux types sont suffisants pour composer cinq séquences identiques à celle qui est donnée.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il est nécessaire de s'approprier la règle de la construction d'un bracelet (RJJRJJ ... ... R).
- Comprendre, qu'il est nécessaire de ne compter que le nombre de perles jaunes utilisées pour chaque bracelet.
- Dessiner la séquence complète qui compose un bracelet, comptez les perles jaunes et multipliez ce nombre par 4 ou 5.

Ou bien

- Observer que les intervalles entre les 12 billes rouges sont de 11 et que dans chacun d'eux il y a 2 billes jaunes. Conclure que dans chaque bracelet il y a 22 (= 11 × 2) perles jaunes.
- Calculer le nombre de perles jaunes utilisées pour les quatre bracelets (22 × 4 = 88).
- Comparer le résultat de l'opération précédente avec la quantité de billes disponibles (100) et déterminer le nombre de billes restantes (100 – 88 = 12).
- Recommencer la comparaison, cette fois entre les perles restantes (12) et celles nécessaires pour un nouveau bracelet (22) et répondre qu'elles ne sont pas suffisantes et qu'il en manque 10 (22 – 12 = 10).

Ou bien

- Considérer que pour cinq bracelets, il faudrait 110 perles jaunes (= 22 × 5), puis en déduire qu'il en manque 10 pour le dernier bracelet.

Attribution des points

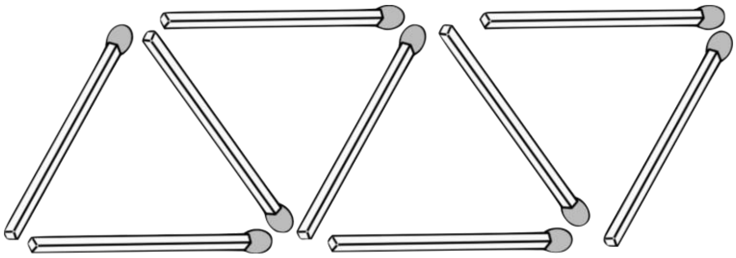
4 Réponse correcte (« Non, il manque 10 perles jaunes pour (cinq bracelets) le cinquième bracelet » ou « Il en reste 12 après quatre bracelets ») avec une procédure claire (dessin ou texte) et des calculs détaillés.

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena

5. QUARANTE TRIANGLES (Cat. 3, 4, 5)

Léa utilise des allumettes pour réaliser cette décoration.



Elle commence par former un triangle avec trois allumettes (à gauche sur la figure), puis ajoute d'autres allumettes pour former un deuxième triangle, puis avec d'autres allumettes elle en forme un troisième et ainsi de suite.

La figure montre les neuf allumettes qui forment les quatre premiers triangles.

De combien d'allumettes Léa a-t-elle besoin pour former 40 triangles ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le 41e (ou le 40e) terme d'une progression arithmétique de raison 2, de premier terme égal à 1 (ou 3), ou calculer le 10e terme d'une progression arithmétique de raison 8, de premier terme 9.

Analyse de la tâche

- Comprendre (éventuellement en poursuivant la construction de la figure) comment est faite la suite des triangles (le premier triangle est obtenu en plaçant trois allumettes, tandis que pour chacun des suivants, on en utilise seulement deux, car il a un côté commun avec le triangle qui le précède).
- Dessiner ou réaliser concrètement l'ensemble de la décoration et compter les côtés des triangles.

Ou (par l'arithmétique), on peut procéder de différentes manières :

- Observer que dans la construction de la décoration, après le premier triangle qui a 3 allumettes, 2 allumettes supplémentaires sont ajoutées pour chacun des triangles suivants ; puis écrire la suite 3, 5, 7, ... pour trouver que le 40e terme est le nombre 81. Ou bien faire une addition dans laquelle le premier terme est 3 et les suivants sont tous égaux à 2 : 3 + 2 + 2 + 2 + 2 +… jusqu'à 40 termes au total, avec 39 termes égaux à 2. Calculer la somme (81) qui représente le nombre d'allumettes requises pour faire 40 triangles.

Ou bien

- Observer qu'à partir de la première allumette, il faut seulement en ajouter deux pour obtenir à la fois le premier triangle puis chacun des triangles suivants : 1 + 2 × 40, ou considérer qu'il y a 39 triangles à partir du premier pour un total de 39 × 2 + 3 = 81 allumettes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (81 allumettes) avec une description claire et complète de la procédure suivie (dessin correct de la décoration et comptage des allumettes, ou raisonnement de type arithmétique et détails des calculs).

Niveaux : 3, 4, 5

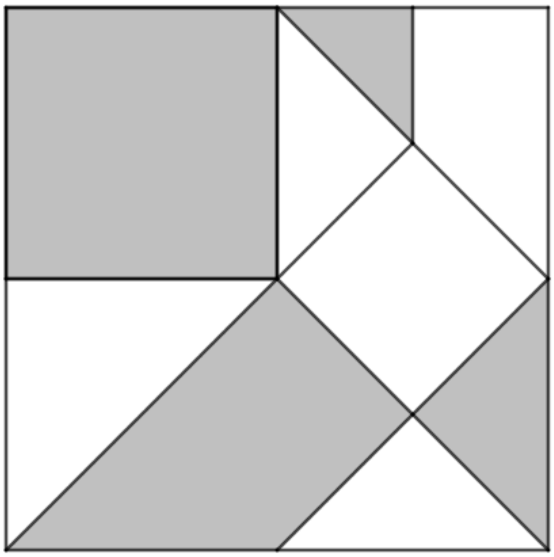
Origine : Lyon

6. COLLAGE GEOMETRIQUE (Cat. 4, 5, 6)

Séraphine a réalisé sur un petit carton de forme carrée le collage reproduit ci-dessous.

Elle a découpé les figures dans une feuille de papier blanc et dans une feuille de papier gris, puis elle les a collées avec précision sur le petit carton sans les superposer.

À l'intérieur du collage il y a neuf figures : deux carrés, cinq triangles (qui sont des moitiés de carrés) et deux autres figures.



Est-ce que Séraphine a utilisé plus de papier blanc, plus de papier gris ou la même quantité de papier blanc et gris ?

Montrez comment vous avec trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de deux groupes de figures de couleurs différentes tracées à l'intérieur d'un carré. Le carré est subdivisé en deux carrés, cinq triangles rectangles isocèles et deux trapèzes rectangles.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le collage est un carré subdivisé en neuf figures dont certaines sont blanches et les autres grises.
- Comprendre qu'il faut comparer l'aire de l'ensemble des figures blanches à l'aire de l'ensemble des figures grises.
- Partager le collage carré en petits triangles rectangles identiques par exemple en traçant de nouveaux segments ou en prolongeant des segments existants ou en reliant des points remarquables de la figure et dénombrer les 15 petits triangles blancs et les et les 17 petits triangles (*voir figure 1*).
- Conclure que Séraphine a utilisé plus de papier gris.

Ou

- Partager le grand trapèze en deux triangles (un grand et un moyen) et le grand triangle blanc à gauche en deux triangles moyens qui peuvent être échangés contre les deux triangles gris à droite (voir figure 2).
- Se rendre compte alors que la moitié gauche du collage est grise et que la moitié droite n'est pas toute blanche. Il y a un petit triangle gris dans la partie supérieure. Déduire que les figures grises occupent une surface plus grande que les figures blanches.

Ou

- Faire apparaitre des figures qui permettent une comparaison perceptive des aires, par exemple partager le collage en 4 carrés identiques (*voir figure 3*) et se rendre compte que
  - Le carré inférieur gauche est partagé en deux triangles identiques, un blanc et un gris.
  - Le carré inférieur droit est partagé en quatre triangles identiques, deux blancs et deux gris.
  - Il reste à comparer les deux carrés supérieurs, un est tout gris et l'autre est blanc mais avec un petit triangle gris.
  - En déduire qu'une quantité supérieure de papier gris a été utilisée.

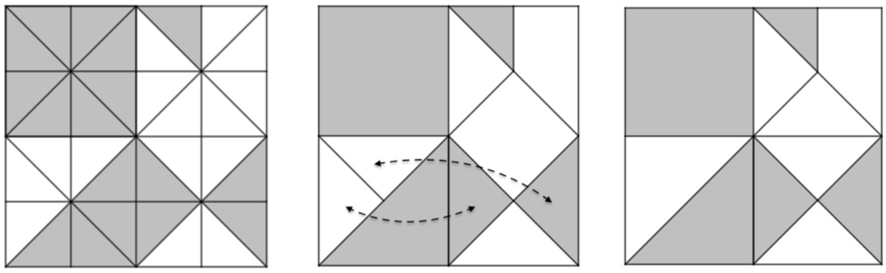


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Ou

- Se rendre compte de la relation existant entre les triangles et les carrés (les triangles sont des demi-carrés) et s'apercevoir que les parties grises et les parties blanches peuvent être pavées avec une unité de mesure commune : les petits triangles rectangles isocèles (la longueur de leurs côtés perpendiculaires est égale au 1/4 de celle du côté du carré qui constitue le collage). Il y en a deux dans les triangles moyens, trois dans le petit trapèze, quatre dans le grand triangle ainsi que dans le petit carré, huit dans le carré moyen, pour un total de 32.

Attribution des points

4 Réponse correcte (« Séraphine a utilisé une plus grande quantité de papier gris » ou une formulation équivalente) avec une explication claire de la procédure suivie (pavage du petit carton avec dénombrement des petits triangles de chaque teinte ou découpages montrant le recouvrement des figures ou permettant une comparaison perceptive des aires ; ou explication claire, même discursive, de la façon dont on est arrivé à la réponse)

Niveau : 4, 5, 6

Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

7. JEUX DE CHIFFRES (Cat. 5, 6)

Audrey et Max s'amusent à former deux nombres avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, en utilisant chacun de ces chiffres une seule fois (pour chaque couple de nombres). Puis ils multiplient ces deux nombres entre eux.

Max forme les nombres 123 et 45 et calcule 123 x 45 = 5535. Audrey forme les nombres 3241 et 5 et calcule 3241 x 5 et trouve un résultat plus grand que celui de Max.

En continuant leur jeu avec les mêmes règles, quel est le plus grand résultat que Max ou Audrey pourrait obtenir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Former deux nombres naturels avec les cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5 utilisés chacun une seule fois, tels que leur produit soit le plus grand possible.

Analyse de la tâche

- S'approprier les contraintes de l'énoncé : les deux facteurs doivent s'écrire avec uniquement les chiffres donnés sans les répéter, en déduire qu'il possible de former soit des produits d'un nombre à 1 chiffre par un nombre à 4 chiffres, soit de produits d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à 3 chiffres.
- Se rendre compte, par exemple à partir de quelques essais, que, pour chercher à maximiser le produit, on peut jouer simultanément sur la taille des deux facteurs en faisant en sorte que chacun d'eux soit le plus grand possible.
- Remarquer qu'il faut pour cela que l'un des facteurs commence par un 4 et l'autre par un 5
- Procéder ensuite par essais plus ou moins systématiques pour tester d'une part les produits d'un nombre à 1 chiffre par un nombre à 4 chiffres en ordonnant les chiffres des deux facteurs par ordre décroissant (4321 × 5 = 21 605 et 5321 × 4 = 21 284 et d'autre part les produits d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à 3 chiffres (421 × 53 = 22 313 ; 431 × 52 = 22 412 ; 432 × 51 = 22 032 ; 521 × 43 = 22 403 ; 531 × 42 = 22 302 ; 532 × 41 = 21 812, et retenir le plus grand produit 431 × 52 = 22 412.

Attribution des points

4 Réponse correcte (431 × 52 = 22 412) avec des explications claires et complètes montrant toutes les tentatives nécessaires.

Niveaux : 5, 6

Origine : Luxembourg

8. LES BILLES (Cat. 5, 6, 7)

Andréa et Louis aiment jouer aux billes.

Aujourd'hui, ils en ont 86 en tout et Louis en a 14 de plus qu'Andréa.

Depuis la dernière fois qu'ils se sont rencontrés pour jouer, 12 semaines se sont écoulées et, chaque semaine passée, Louis a acheté une nouvelle bille tandis qu'Andréa en a acheté deux.

Combien de billes Louis et Andréa avaient-ils chacun la dernière fois qu'ils ont joué ensemble ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres sachant qu'en augmentant l'un de 12 et l'autre de 24, on obtient deux nombres dont la somme est 86 et la différence 14.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation et le facteur temps : aujourd'hui Louis et Andréa ont 86 billes et Louis en a 14 de plus qu'Andréa mais cette différence n'est pas la même que la dernière fois qu'ils se sont rencontrés car en 12 semaines les deux amis ont acheté un nombre différent de billes. Louis a acheté 12 billes (une par semaine) tandis qu'Andrea en a acheté 24 (2 par semaine).
- Trouver le nombre de billes que chacun des deux amis a aujourd'hui, c'est-à-dire rechercher deux nombres dont la somme est 86 et dont la différence est 14. On peut procéder de différentes manières :
  - en faisant des essais, par exemple en tenant compte du fait que Louis doit avoir plus de billes qu'Andréa et donc plus de 43 (86 ÷ 2), attribuer à Louis 44, 45, ... billes et trouver le nombre de celles d'Andréa (42, 41, ...), puis calculer la différence entre les deux jusqu'à trouver 14. Cela se produit lorsque Louis a 50 billes car de cette façon, Andréa en a 36 (86 − 50) et la différence est de 14 (50 − 36).
  - arithmétiquement, si nécessaire à l'aide d'une représentation graphique, comprendre qu'en supprimant ou en ajoutant les 14 billes supplémentaires au total (86 – 14 = 72) ou (86 + 14 = 100), on obtient deux fois le nombre de billes d'Andréa ou de Louis, puis en divisant le nombre obtenu par deux, on retrouve le nombre de billes d'Andréa (72 ÷ 2 = 36), ou de Louis (100 ÷ 2 = 50).
  - comprendre que si les deux amis avaient le même nombre de billes, chacun en aurait 43 (86 : 2), mais la différence entre le nombre de billes de l'un et celles de l'autre étant 14, il faut ajouter à cette moitié 7 pour obtenir le nombre de billes que Louis a aujourd'hui (43 + 7 = 50) et retirer 7 pour obtenir le nombre de billes qu'Andréa possède aujourd'hui (43 – 7 = 36).
- Trouver le nombre de billes qu'ils avaient 12 semaines avant en soustrayant au nombre de billes qu'ils ont aujourd'hui le nombre de billes achetées par chacun des deux : Andréa 36 – 24 = 12 et Louis 50 – 12 = 38

Ou bien

- Comprendre que la dernière fois qu'ils se sont rencontrés, ils avaient 36 (= 12 + 24) billes en moins et donc 50 billes au total (= 86 − 36).
- En déduire qu'Andréa et Louis avaient un nombre différent de billes, parce que s'ils avaient 25 (= 50 ÷ 2) billes chacun, ils auraient aujourd'hui 25 + 12 = 37 billes pour Louis et 25 + 24 = 49 billes pour Andréa, la somme serait donc toujours de 86 alors que la différence serait de 12 au lieu de 14.
- Procéder par essais organisés à la recherche de deux nombres dont la somme est 50 qui satisfont les données du problème et découvrir que cela ne se produit que lorsque 38 billes sont attribuées à Louis et 12 billes à Andréa car 38 + 12 = 50 (les billes de Louis aujourd'hui), 12 + 24 = 36 (les billes d'Andréa aujourd'hui) ; 50 + 36 = 86 (les billes des deux aujourd'hui) et 50 – 36 = 14 (différence entre les billes de l'un et de l'autre aujourd'hui). Dans tous les autres cas, cela ne se produit pas.

Ou bien

- Après avoir calculé le nombre initial de billes comme ci-dessus (50), réaliser que, puisque finalement Louis a 14 billes de plus qu'Andréa, cela signifie qu'au départ Louis en avait 26 de plus qu'Andréa. Puis conclure qu'Andréa avait 12 (= (50 − 26) ÷ 2) billes et Louis en avait 38 (= 12 + 26).

Attribution des points

4 Réponse correcte (Louis 38, Andréa 12) avec une procédure claire et complète (tous les calculs mis en évidence).

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

9. SORTIE SCOLAIRE (II) (Cat. 5, 6, 7)

L'école de Transalpie organise une sortie scolaire pour deux classes, la cinquième A et la cinquième B. En cinquième A, il y a 6 garçons et 17 filles, en cinquième B, il y a 5 garçons et 21 filles.

L'auberge où ils logeront a des chambres de trois ou quatre lits.

Les garçons et les filles dormiront dans des chambres séparées, et, pour minimiser les dépenses, aucune des chambres occupées ne devra avoir de lits vides.

Combien de chambres de trois lits et combien de chambres de quatre lits l'aubergiste pourrait réserver aux élèves ?

Montrez comment vous avez trouvé toutes les solutions possibles.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer les nombres 11 et 38 en sommes composées uniquement de 3 et de 4.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les élèves n'ont que des chambres à trois lits ou des chambres à quatre lits, qu'ils doivent occuper sans laisser de places libres, et que les garçons et les filles ont des chambres séparées.
- Comprendre que, pour déterminer le nombre de chambres à réserver, il faut faire des calculs séparés pour les filles et les garçons.
- Supposer que l'on commence par placer les six garçons de cinquième A dans les chambres. Ceux-ci peuvent être divisés en 4 + 2 ou 3 + 3 (3 + 3 est à rejeter car il laisse des lits libres dans les chambres des garçons de cinquième B car 5 se décompose en 3 + 2 ou 4 + 1). Ensuite, quatre garçons de cinquième A occupent une chambre, aux 2 qui restent s'ajoutent 2 des cinq garçons de cinquième B formant un autre groupe de 4 plus une chambre de trois. Il est à noter que, même si d'autres choix sont faits, la seule solution pour les garçons est 2 chambres à quatre lits et 1 chambre à trois lits.

  En faisant un raisonnement similaire pour les 17 filles de cinquième A et les 21 de cinquième B, on obtient ces possibilités : 2 chambres à trois lits et 8 chambres à quatre lits ; 6 chambres à trois lits et 5 chambres à quatre lits ; 10 chambres à trois lits et 2 chambres à quatre lits.

Ou considérant tous les garçons (11) et les filles (38)

- Noter que les deux nombres ne sont divisibles ni par 3 ni par 4, il n'est donc pas possible de ne donner aux garçons ou aux filles que des chambres de 3 ou seulement des chambres de 4.
- Pour le nombre de chambres de garçons, on observe que 11 peut être obtenu comme la somme des termes 4 et 3 : $11 = 4 + 4 + 3$ ou en utilisant une division par 4 : $11 = 4 \times 2 + 3$, le reste 3 correspondant aux garçons qui occuperont une chambre de trois, alors que la division par 3 : $11 = 3 \times 3 + 2$ avec le reste 2 ne mène à aucune solution. Par conséquent, conclure que 2 chambres de quatre et 1 chambre de trois seront réservées aux garçons.
- Observer qu'il n'est pas utile pour les 38 filles de recourir à la division puisque ni la division par 3 ($38 = 12 \times 3 + 2$) ni celle par 4 ($38 = 9 \times 4 + 2$) ne conduisent à une solution. Procéder ensuite d'une autre manière, par exemple, puisqu'il n'est pas possible d'occuper 9 chambres de 4, essayer avec 8 : $4 \times 8 = 32$, les filles qui restent, $38 – 32 = 6$, seront placées dans 2 chambres de trois. Continuer ainsi en diminuant une par une le nombre de chambres de quatre. Conclure que 8 chambres de quatre et 2 chambres de trois ou 5 chambres de quatre et 6 de trois ou 2 chambres de quatre et 10 de trois peuvent être réservées aux filles.

Ou

- Comprendre que les chambres de trois doivent accueillir un nombre d'élèves multiple de 3. Ensuite, après avoir identifié tous les multiples de 3, choisir ceux qui, soustraits à 11 et à 38 donnent comme reste un multiple de quatre. Pour 11 il y a seulement 3 ($11 - 3 = 8$). Pour 38, il y a 6 ($38 - 6 = 32$), 18 ($38 - 18 = 20$) et 30 ($38 - 30 = 8$).

  Procédure similaire à partir de multiples de 4.

Ou

- Procéder avec une liste organisée de soustractions pour déterminer combien de chambres de trois et combien de chambres de quatre on peut faire.
- Quel que soit le choix de la procédure, les trois solutions sont :

  3 chambres de trois (une pour les garçons et 2 pour les filles) et 10 de quatre (2 pour les garçons et 8 pour les filles).

  7 chambres de trois (une pour les garçons et 6 pour les filles) et 7 de quatre (2 pour les garçons et 5 pour les filles)

  11 chambres de trois (une pour les garçons et 10 pour les filles) et 4 de quatre (2 pour les garçons et 2 pour les filles).

Attribution des points

4 Réponse correcte « 3 chambres de trois et 10 de quatre, 7 chambres de trois et 7 de quatre, 11 de trois et 4 de quatre » avec explications claires et correctes de la procédure

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Belluno

10.DÉCORATIONS DE NOËL (Cat. 5, 6, 7)

Un magasin d’articles de Noël fait une offre spéciale : pour l’achat de trois boules colorées et d’une étoile dorée, une quatrième boule est offerte.

Les boules colorées coûtent 0,6 euros chacune.

Léa doit décorer son sapin de Noël. Elle achète des boules colorées. Elle achète aussi des étoiles dorées en nombre juste suffisant pour bénéficier de l’offre du magasin.

Elle réalise qu'elle a dépensé la même somme pour les boules colorées que pour les étoiles dorées. En tout, elle a payé 18 euros.

Combien de boules colorées Léa a-t-elle emportées et quel est le prix d’une étoile dorée ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un certain nombre d'objets et le coût d'autres objets lorsque l’on connaît les relations qui les lient.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, grâce à l’offre spéciale, Léa gagne un certain nombre de boules gratuites (le tiers de celles achetées).
- Comprendre que la somme de 18 euros est divisée exactement en deux (9 euros pour les boules et 9 euros pour les étoiles).
- Comprendre que pour bénéficier de l’offre, Léa a acheté les boules par groupes de trois valant 0,60 × 3= 1,80 euro chacun.
- En déduire que Léa a acheté 5 groupes de 3 boules (9 ÷ 1,80 = 5) et par conséquent 5 étoiles dorées.
- Comprendre que Léa a acheté 15 boules (5 × 3) et en a obtenu 5 gratuitement. Elle a donc emporté 20 boules.
- Calculer le prix d’une étoile dorée : 9 ÷ 5 = 1,80 euro.

Ou bien, sachant que Léa a bénéficié de l'offre du magasin, comprendre que dans ce cas 4 boules reviennent au prix de 3, donc que pour 1,80 € on a 4 boules. 9/1,8 = 5. Léa a donc emporté 5 lots de 4 boules et donc 5 étoiles dorées. Elle repart donc avec 20 boules colorées et 5 étoiles dorées au prix de 1,8 (= 9/5) euro.

Ou bien

- Comprendre que Léa a acheté autant d’étoiles dorées que de groupes de trois boules.
- Remarquer qu’elle a dépensé autant pour les boules que pour les étoiles et en déduire qu’une étoile vaut le prix de trois boules, soit 1,80 euro.
- En déduire qu’elle a acheté 5 étoiles (9 ÷ 1,80 = 5).
- Remarquer qu’elle a donc acheté 5 groupes de trois boules, soit 15 boules, et gagné 5 boules supplémentaires. En déduire qu’elle a emporté 20 boules.

Ou bien

- Comprendre que Léa a dépensé 9 euros pour les boules et que par conséquent elle a acheté 9/0,6 = 15 boules, soit 5 groupes de 3 boules.
- En déduire le prix d’une étoile, à savoir 9/5 = 1,80 euro. Vu que Léa a acheté 5 packs de 3 boules et 5 étoiles, le magasin lui offre 5 boules. À la fin de ses courses, Léa a emporté 20 boules.

Attribution des points

4 Réponse correcte (20 boules, 1,80 euro pour chaque étoile) avec explications claires et complètes.

Niveaux 5, 6, 7

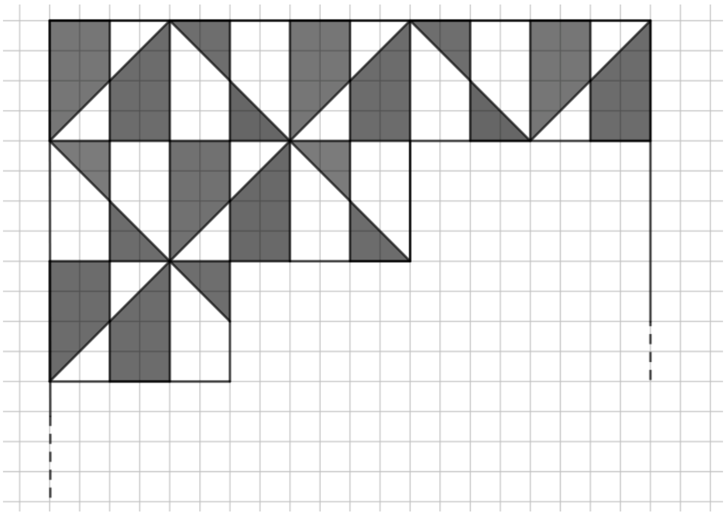
Origine : Puglia

11.LE DESSIN DE PIERRE (I) (Cat. 5, 6, 7)

Pierre a dessiné un grand carré sur une feuille quadrillée.

Il commence par le diviser en dessinant des lignes qui suivent le quadrillage ou qui coupent les carrés en diagonale. Il colore en gris certaines parties pour créer un beau dessin blanc et gris.

Sur le dessin ci-dessous vous pouvez voir le début de son travail avec la partie supérieure du carré déjà complètement dessinée et colorée.



Pierre continue le dessin de la même manière jusqu'à ce qu'il remplisse tout le carré.

À la fin du travail, la partie grise et la partie blanche n'ont pas la même aire.

Quelle est la différence entre l'aire de la partie grise et celle de la partie blanche ?

Montrez comment vous avez obtenu votre réponse.

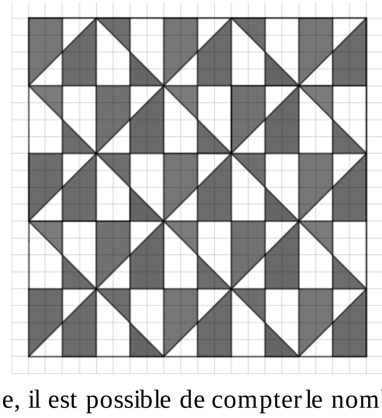
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir du dessin proposé, se représenter un pavage composé de figures blanches et grises tracé dans un quadrillage de carrés 20 x 20. Comparer les aires des zones blanches et grises du pavage complet et déterminer leur différence.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et le texte et déduire qu'il s'agit d'une grille de 20 x 20 petits carrés.
- Observer, par exemple, qu'un motif géométrique est répété dans chaque module de 4 x 4 petits carrés, et que dans deux modules adjacents les couleurs des mêmes polygones sont inversées.

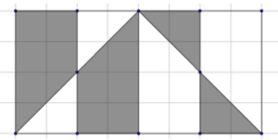


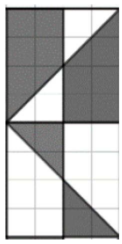
- Comprendre que pour résoudre le problème, il est possible de compter le nombre total de polygones de chaque type et de calculer la mesure de l'aire totale de chaque zone, en choisissant une unité de mesure appropriée.
- En observant le fragment du pavage et en le complétant éventuellement, comprendre que :
  - le dessin est constitué de bandes (de 4 petits carrés de large) dans lesquelles alternent deux trapèzes gris, deux triangles blancs, deux trapèzes blancs et deux triangles gris ;

  - il y a cinq bandes horizontales et cinq bandes verticales : on peut travailler indifféremment horizontalement ou verticalement ;
  - dans les bandes de rang impair, il y a six trapèzes gris et quatre blancs, et inversement dans les bandes de rang pair ;
  - dans les bandes de rang impair, il y a quatre triangles gris et six blancs, et inversement, dans les lignes de rang pair.
  - On a donc en tout 26 trapèzes gris et 24 trapèzes blancs, 24 triangles gris et 26 triangles blancs.
- En utilisant l'aire du petit carré comme unité d'aire, la zone grise mesure 6 x 26 + 24 x 2 = 204 unités et la zone blanche 24 x 6 + 26 x 2 = 196 unités. La différence des aires grises et blanches mesure donc 204 – 196 = 8 unités.

Ou bien

- Repérer des sous-figures pour lesquelles les aires grise et blanche sont égales
- Par exemple les paires de motifs adjacents comme ci-dessous : ils sont constitués de 2 mêmes trapèzes gris et 2 mêmes trapèzes blancs, de deux mêmes triangles blancs et deux mêmes triangles gris : donc la surface blanche a la même aire que la grise.
- Pour calculer la différence entre blanc et gris, on peut donc éliminer les paires de motifs adjacents, soit 12 en tout





- Il ne reste qu'un avec deux trapèzes gris et deux triangles blancs.
- On peut visualiser sur ce motif que la surface blanche est la même que celle d'un carré 2 × 2. La différence entre les surfaces blanche et grise est donc celle d'un rectangle 2 × 4.
- On peut calculer : si on prend comme unité, l'aire d'un petit carré de la grille, l'aire grise des deux trapèzes mesure 6 × 2 = 12 unités et l'aire blanche des deux triangles mesure 2 × 2 = 4 unités. La différence des aires grises et blanches mesure donc 12 – 4 = 8 unités.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Aire grise – aire blanche = 8 carrés unités ou autres nombres trouvés en utilisant d'autres unités de mesure, calculés correctement), avec une description claire et complète de la procédure suivie et des calculs effectués

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Parma + Milano (reprise du problème *La table du grand père*)

12.SUR LA PLANÈTE ALFA (Cat. 6, 7, 8)

Le capitaine Zouc vient d'atterrir à bord de son vaisseau spatial sur la planète Alfa, qui est habitée par trois extraterrestres : l'un est vêtu de bleu, un autre de rouge et le troisième de jaune.

Le capitaine sait que les trois extraterrestres s'appellent *Alc, Blanc, Clap*, que seul l'un dit toujours la vérité et que les deux autres mentent toujours.

Il demande à chacun d'eux : "Quel est ton nom ?".

L'extraterrestre habillé en bleu répond : "Je m'appelle *Clap*". Puis il ajoute "Mon ami habillé en jaune ne s'appelle pas *Alc*".

L'extraterrestre habillé en rouge répond : "Mon ami habillé en bleu ne s'appelle pas *Alc*".

L'extraterrestre habillé en jaune répond : "Je m'appelle *Blanc*". Et il ajoute : "Mon ami habillé en rouge ne s'appelle pas *Clap*".

Reliez chaque extraterrestre à son nom correct et expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Associer trois personnages à leur nom, à partir de leurs affirmations, sachant que seul l'un d'eux dit la vérité et que les deux autres mentent.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : trois extraterrestres sont vêtus de couleurs différentes (un en bleu, un en rouge, un en jaune) ; deux mentent toujours et l'un dit la vérité.
- Comprendre que les noms des extraterrestres sont : Alc, Blanc et Clap, mais qu'on ne sait pas à qui chaque nom correspond.
- Analyser les phrases des trois extraterrestres pour comprendre qui ment et qui dit la vérité. Faire l'hypothèse sur l'un d'eux qui dirait la vérité, et confronter ses affirmations avec celles des deux autres, pour vérifier qu'il n'y a pas de contradictions, déduire quels sont les menteurs et assigner son nom à chaque personnage.
- Par exemple, supposer que l'extraterrestre bleu dit la vérité, alors les phrases (Je m'appelle Clap, Jaune ne s'appelle pas Alc) sont toutes deux vraies.
- Ce qui donne : bleu = Clap, jaune ≠ Alc et donc rouge = Alc.
- La phrase de l'extraterrestre rouge (*Bleu ne s'appelle pas Alc*) qui devrait être fausse, en fait est vraie, puisque bleu = Clap, alors bleu ≠ Alc.
- Déduire que l'extraterrestre bleu ne peut être celui qui dit la vérité et sera donc un des deux qui ment.
- Considérer comme vraie la phrase de l'extraterrestre rouge (*Bleu ne s'appelle pas Alc*)
- Ce qui donne : bleu ≠ Alc et donc on peut avoir bleu = Blanc ou bleu = Clap.
- Les phrases de l'extraterrestre bleu (*je m'appelle Clap ; Jaune ne s'appelle pas Alc*) doivent être toutes les deux fausses, donc bleu ≠ Clap et jaune = Alc.
- Les phrases de l'extraterrestre jaune (*je m'appelle Blanc ; Rouge ne s'appelle pas Clap*) doivent être toutes les deux fausses, donc jaune ≠ Blanc et rouge = Clap.
- Déduire que si jaune = Alc et rouge = Clap, alors bleu = Blanc : les appariements respectent aussi bien la phase de l'extraterrestre rouge qui est vraie, que les deux autres phrases qui sont fausses.
- Si en revanche on considère vraies les phrases de l'extraterrestre jaune (*Je m'appelle Blanc ; Rouge ne s'appelle pas Clap),*
- on aura : jaune = Blanc et rouge ≠ Clap, alors vu que jaune est défini, bleu = Clap, ce qui rendrait vraies aussi les phrases de l'extraterrestre bleu que celles de l'extraterrestre rouge.
- En déduire que l'extraterrestre jaune ne peut être celui qui dit la vérité et sera donc un des deux qui mentent.
- Assigner aux trois extraterrestres leurs noms corrects **: bleu = Blanc, rouge = Clap, jaune = Alc**.

Attribution des points

4 Réponse correcte « bleu = Blanc, rouge = Clap, jaune = Alc » avec une formulation qui montre toutes les étapes qui ont permis d'arriver à l'appariement (hypothèses de départ, déductions, vérifications)

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Udine

13.CUEILLETTE DE FRUITS (Cat. 7, 8)

Les enfants de Transalpie ont organisé une cueillette de fruits. Ils se sont répartis en quatre groupes : les cueilleurs de myrtilles, les cueilleurs de mûres, les cueilleurs de fraises et les cueilleurs de framboises. La situation des groupes est la suivante :

- le nombre des cueilleurs de mûres est la moitié de celui des cueilleurs de myrtilles ;
- il y a six cueilleurs de fraises de plus que de cueilleurs de myrtilles ;
- il y a 11 cueilleurs de framboises ;
- il y a 8 cueilleurs de fruits violets (myrtilles et mûres) de moins que de cueilleurs de fruits rouges (fraises et framboises).

Combien d'enfants participent à la cueillette ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre entier somme de quatre nombres a, b, c, d tels que a = b/2, c = b + 6, a + b = c + d – 8, d = 11.

Analyse de la tâche

- Comprendre à la lecture du texte que le nombre de cueilleurs de framboises est connu, alors que pour les cueilleurs de mûres et de fraises, seules les relations entre leurs nombres respectifs et le nombre de cueilleurs de myrtilles sont connues : dans le premier cas « moitié », dans le deuxième cas « 6 de plus ».
- Comprendre que la quatrième condition établit une relation entre le nombre de cueilleurs de fruits violets et le nombre de cueilleurs de fruits rouges, ce qui peut également s'exprimer sous forme d'égalité (par exemple, le nombre total de cueilleurs de fruits violets augmenté de 8 est égal au nombre total de cueilleurs de fruits rouges, ou la différence entre le nombre total de cueilleurs de fruits rouges et celui de cueilleurs de fruits violets est de 8, …)
- Comprendre que le nombre de cueilleurs de myrtilles doit être trouvé et que ce nombre est égal à deux fois le nombre de cueilleurs de mûres.
- Procéder par des tentatives organisées, éventuellement à l'aide d'un schéma ou d'un tableau, en supposant un certain nombre (pair) de cueilleurs de myrtilles. Par exemple, essayer 10, l'augmenter de moitié et ajouter 8 : on obtient 23. Puisque 23 ≠ (10 + 6) + 11 = 27, le nombre 10 n'est pas bon. Continuer avec d'autres nombres (pairs), jusqu'à ce que l'on constate qu'avec 18 la relation d'égalité est vérifiée : (18 + 9) + 8 = (18 + 6) + 11 = 35 (en procédant systématiquement, on peut observer qu'en passant d'un nombre (pair) au suivant, le premier membre augmente de 3, tandis que le second augmente de 2, donc la différence diminue à chaque fois de 1).
- Calculer que, 18 étant le nombre de cueilleurs de myrtilles, les cueilleurs de mûres sont 9 et les cueilleurs de fraises sont 24, donc le nombre total de cueilleurs de baies est de 62 (= 18 + 9 + 11 + 24).
- La procédure d'essai peut également être effectuée en supposant connu le nombre de cueilleurs de mûres.

Ou

- Procéder comme ci-dessus avec des tentatives non organisées.

Ou (procédure algébrique, même si elle n'est pas formalisée)

- Comprendre, éventuellement à l'aide d'un diagramme ou d'un dessin, qu'une fois et demie le nombre de cueilleurs de myrtilles augmenté de 8 est égal au nombre de cueilleurs de myrtilles augmenté de 17 (= 6 + 11) et donc déduire que cette moitié du nombre des cueilleurs de myrtilles est de 9 (= 17 − 8) ; par conséquent le nombre de cueilleurs de myrtilles est de 18. En conclure que le nombre total de récolteurs est 62

Ou

en utilisant des égalités de ce type : Mû = 1/2 My ; Frai = My + 6 ; Fram = 11 ; My + Mû = (Frai + Fram) − 8, d'où 3Mû = (2Mû + 6) +3 puis Mû = 9 ou (éventuellement s'aider d'une représentation graphique) pour écrire

My + Mû + 8 = My + 6 + 11 et déduire (en tenant compte de l'équilibrage) que Mû + 8 = 17 dont Mû = 9,puis trouver My = 18 et le nombre total (18 + 9 + 11 + 24).

Ou

- Assigner, dans l'égalité, la valeur x au nombre de mûres (ou écrire avec des lettres comme dans la procédure précédente), afin d'éviter des fractions de x.

  Mû = x ; My = $2x$; Frai = $2x + 6$; Fram = 11 ; on obtient $x + 2x = 2x + 6 + 11 - 8$, donc $x + 2x = 2x + 9$, et donc $x=9$; à partir de cette valeur de x, en utilisant les relations précédentes, on retrouve les autres valeurs pour en déduire le nombre total de récolteurs 9 + 18 + 24 + 11 = 62

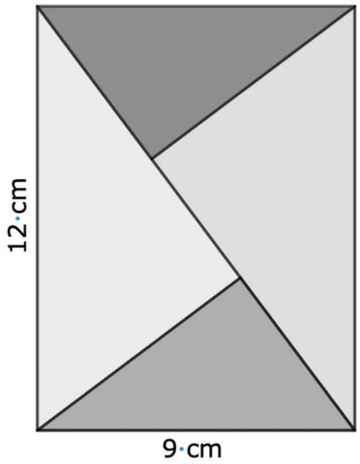
Attribution des points

4 Bonne réponse (62 enfants) avec une description claire et complète de la procédure (résolution par tentatives explicitées avec présence de calculs ou procédure de type algébrique).

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

14.LE PUZZLE (I) (Cat. 7, 8)



Un magasin de jouets propose ce puzzle formé de quatre triangles rectangles découpés dans un rectangle en bois de 12 cm sur 9 cm.

Le jeu consiste à utiliser ces quatre pièces pour former d'autres configurations en les déplaçant et en les retournant.

Par exemple, on peut former un nouveau rectangle, différent de celui-ci.

Sur une feuille de papier, dessinez ce nouveau rectangle avec ses dimensions réelles et donnez la valeur exacte de son périmètre.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

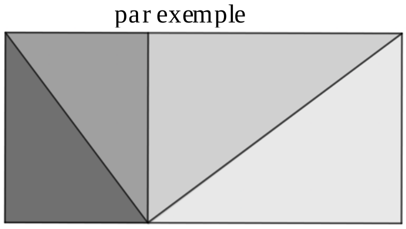
Tâche mathématique

Étant donné un rectangle dont les dimensions sont connues, divisé en quatre rectangles semblables et égaux deux à deux, dessiner un autre rectangle avec des dimensions différentes de celui qui est donné, mais formé par les quatre mêmes triangles et déterminer la valeur de son périmètre.

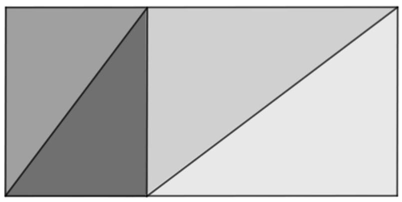
Analyse de la tâche

- Remarquer que le rectangle donné est divisé par sa diagonale en deux triangles rectangles égaux, et que ceux-ci sont à leur tour divisés par leurs hauteurs relatives en quatre triangles rectangles formant ainsi deux paires de triangles rectangles égaux.
- En déplaçant et retournant les triangles du puzzle, former un nouveau rectangle :

par exemple



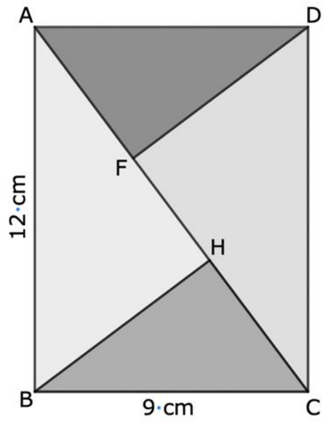
ou



ou d'autres obtenus par symétries axiales par rapport aux côtés de ce rectangle

- Pour trouver son périmètre, il y a deux stratégies bien différentes : des mesures approximatives sur un dessin précis ou des calculs géométriques exacts.
  - Remarquer que la longueur du nouveau rectangle est égale à celle de la diagonale du rectangle donné et que sa largeur est égale à la longueur commune des côtés des petits triangles.

    Avec un dessin : reproduire soigneusement sur une feuille de papier le dessin du puzzle donné à l'aide d'un double décimètre et d'une équerre et mesurer les longueurs des côtés des angles droits des triangles rectangles.
  - Trouver au mieux 5,4 cm et 7,2 cm pour le petit et 7,2 cm et 9,6 cm pour le grand.
  - En déduire le périmètre de ce nouveau rectangle : 2 × (7,2 + 15) = 44,4 cm.
  - Remarquer que les deux rectangles tout en ayant la même aire ont des périmètres différents (42 cm et 44,4 cm).



- Ou bien par un calcul : comprendre qu'il faut connaître les longueurs des côtés des angles droits des triangles.
  - Remarquer que la diagonale (AC) partage le rectangle en deux triangles rectangles égaux et que les hauteurs (DF) et (BH) forment quatre triangles rectangles égaux deux à deux.
  - Comprendre qu'il faut d'abord calculer la longueur AC de la diagonale.
  - Utiliser le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$. D'où AC = 15 cm.
  - Pour trouver la longueur DF, on peut remarquer que le rectangles ABCD a une aire double de celle du triangle ADC et la calculer de deux manières différentes : c'est la moitié de celle du rectangle ABCD, c'est aussi le produit de sa base AC par sa hauteur DF.

- Ainsi, 2 × Aire (ADC) = AD × DC = AC × DF.
- En déduire cette propriété remarquable de la hauteur issue de l'angle droit dans un triangle rectangle : sa longueur est égale au produit des longueurs des côtés de l'angle droit divisé par celle de l'hypoténuse : DF = (AD x DC) / AC.
- Calculer la longueur DF : DF = (12 × 9) / 15 = 7,2 cm.

Attribution des points

4 Réponse exacte (44,4 cm) avec des explications claires : un dessin précis ou utilisation du théorème de Pythagore pour AC et calcul de l'aire de ADC pour trouver la hauteur DF.
ou passage par plusieurs étapes avec dessin précis (en section BE, ils ne pourraient utiliser Pythagore en cat 7 et 8)

Niveaux : 7, 8

Origine : Milano + Franche-Comté

15.ÉCHANGES DE BILLES (Cat. 8, 9, 10)

Manu arrive à l'école avec 76 petites billes.

Il en échange le plus possible contre des billes moyennes. Pour chaque bille moyenne, il doit toujours donner le même nombre de petites billes en échange.

Puis il échange le plus possible des billes moyennes qu'il a obtenues contre des grosses billes. Pour chaque grosse bille, il doit toujours donner le même nombre de billes moyennes en échange.

À la fin des échanges, Manu a 3 grosses billes, 4 billes moyennes et 1 petite bille.

Trouvez combien de petites billes Manu a données pour avoir une bille moyenne et combien de billes moyennes il a données pour avoir une grosse bille.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Répartir 76 objets en « groupements équivalents » puis en « groupements de groupements équivalents » pour aboutir à un objet isolé, 4 groupements et 3 groupements de groupements.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a 2 échanges successifs et qu'à chaque niveau d'échange, le même nombre de petites billes (ou de billes moyennes) est échangé contre une bille moyenne (ou une grosse bille), et comprendre qu'à chaque niveau, on échange le plus possible d'objets.
- Déduire que comme il reste 1 petite bille à la fin, 75 billes seront échangées contre 3 grosses billes et 4 billes moyennes.
- Procéder par essais organisés comme, par exemple, dans le tableau suivant pour y présenter tous les cas possibles correspondant à 3 grosses billes + 4 billes moyennes = 75 :

nombre de petites billes pour une bille moyenne	nombre de petites billes pour 4 billes moyennes	nombre de petites billes restant pour 3 grosses billes	nombre de petites billes pour une grosse bille	nombre de billes moyennes pour une grosse bille
2	8	67	67 non divisible par 3	aucun
3	12	63	63/3 = 21	21/3 = 7
4	16	59	59 non divisible par 3	aucun
5	20	55	55 non divisible par 3	aucun
6	24	51	51/3 = 17	17/6 aucun
7	28	47	47 non divisible par 3	aucun
8	32	43	43 non divisible par 3	aucun
9	36	39	39/3 = 13	13/9 aucun
10	40	35	35 non divisible par 3	aucun
11	44	31	31 non divisible par 3	aucun
12	48	27	27/3 = 9	aucun car il en faut 12 pour une bille moyenne

Ou

- Procéder par déductions, par exemple :
  - considérer que 75 peut être décomposé en 3×25 et 5×15 ; en déduire les seuls échanges possibles :

    3 petites billes contre une bille moyenne : résultat 25 billes moyennes (possibilité 1)

    25 petites billes contre une bille moyenne : résultat 3 billes moyennes (incompatible avec le nombre final de billes moyennes)

    5 petites billes contre une bille moyenne : résultat 15 billes moyennes (possibilité 2)

    15 petites billes contre une bille moyenne : résultat 5 billes moyennes (possibilité 3)
- Reprendre le même raisonnement pour l'échange « billes moyennes contre grosse bille » en cherchant les décompositions sous forme de produits de 2 facteurs du nombre de billes moyennes diminué de 4 :

- cas (1) : 25 – 4 = 21. Comme 21 / 3 = 7 : la solution « 7 billes moyennes contre une grosse bille » est possible et donne bien 3 grosses billes ;
- cas (2) : 15 – 4 = 11. Comme 11 n'est pas divisible par 3, ce cas est à éliminer ;
- cas (3) : 5 – 4 = 1. Comme 1 n'est pas divisible par 3, ce cas est à éliminer.

Ou

- Observer qu'une grosse bille doit valoir plus de 4 billes moyennes puisque tous les échanges possibles ont été effectués. Procéder par essais à partir de 5 billes moyennes pour une grosse bille, on aurait alors 75 petites billes qui correspondent à 19 billes moyennes, et ce n'est pas possible car 75 n'est pas un multiple de 19. De même vérifier qu'il n'est pas possible d'avoir 6 billes moyennes pour une grosse bille, alors que 7 billes moyennes convient bien. Puisque 75 petites billes valent 25 (= 21 + 4) billes moyennes, en déduire qu'une bille moyenne vaut 3 petites billes. Constater qu'avec des valeurs supérieures à 7 billes moyennes pour une grosse bille, on ne peut pas avoir de solution.
- Procédure mixte : par déduction, puis par essais.

Ou par la voie algébrique :

- Appeler p ($p > 1$) le nombre de petites billes nécessaires pour obtenir une bille moyenne et m ($m > 4$) le nombre de billes moyennes pour obtenir une grosse bille, en déduire que pour obtenir une grosse bille il faut mp petites billes et donc que $3\,mp + 4\,m = 75$. Trouver la solution par essais sur p et en déduire m ou vice versa faire des essais sur m et en déduire p.

Attribution des points

4 Réponse correcte (« 3 petites billes contre une bille moyenne » et « 7 billes moyennes contre une grosse bille») avec des explications claires et complètes.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Bourg-en-Bresse

16.IMAGES À DONNER (Cat. 8, 9, 10)

Antoine a décidé de donner ses images en double à ses amis.

Au départ Antoine pense en donner 5 à chacun de ses amis, mais le nombre d'images qu'il possède n'est pas suffisant parce qu'il lui en manque 4.

Il décide alors qu'il peut garder pour lui 8 images et distribuer les autres en parts égales à ses amis.

Quel est le nombre d'images en double qu'Antoine peut avoir ?

Indiquez toutes les solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres entiers tels que le premier augmenté de 4, donne 5 fois le deuxième et diminué de 8 donne un multiple du deuxième.

Analyse de la tâche

- Comprendre que dans ce problème il y a deux inconnues à gérer : le nombre des figurines et le nombre des amis d'Antoine.
- Comprendre que ces deux inconnues sont liées entre elles : le nombre de figurines augmenté de 4 est un multiple de 5 et que si l'on soustrait 8 au nombre de figurines, on obtient un multiple du nombre des amis d'Antoine. En déduire aussi qu'il y a plus de 8 figurines à distribuer.
- Déduire, du fait qu'il manque 4 figurines pour pouvoir en donner 5 à chaque ami, que chacun aura un nombre *n* de figurines inférieur à 5.
- Constater que le premier nombre de figurines supérieur à 8 et qui, augmenté de 4, donne un multiple de 5 est 11. Faire des essais avec les entiers successifs qui ont la même propriété et déterminer les valeurs possibles pour le nombre *a* des amis. Pour cela on peut faire un tableau comme celui-ci :

figurines f	$f + 4$	5 x a	a	$f - 8$	$n\ a$	n
11	15	5 × 3	3	3	1 × 3	1
16	20	5 × 4	4	8	2 × 4	2
21	25	5 × 5	5	13	non	
26	30	5 × 6	6	18	3 × 6	3
31	35	5 × 7	7	23	23	
36	40	5 × 8	8	28	non	
41	45	5 × 9	9	33	non	
46	50	5 × 10	10	38	non	
51	55	5 × 11	11	43	non	
56	60	5 × 12	12	48	4 × 12	4

- Comprendre que si le nombre d'amis continue à augmenter, le nombre de figurines à distribuer à chacun augmente également, mais ne doit pas dépasser 4 par personne. Par conséquent, les possibilités, pour le nombre de doubles d'Antoine, sont les suivantes : 11, 16, 26, 56.

ou (stratégie experte) :

- Soient a le nombre d'amis d'Antoine et f le nombre de figurines à donner à chacun, obtenir l'équation $5a - 4 = f = n\ a + 8$, en gardant à l'esprit que n peut être égal à 1, 2, 3 ou 4, trouver les 4 solutions.
- Le nombre de figurines à donner est de 11 si les amis sont 3 (n = 1), 16 si les amis sont 4 (n = 2), 26 si les amis sont 6 (n = 3), 56 si les amis sont 12 (n = 4).

Attribution des points

4 Réponse correcte « 11, 16, 26 ou 56 doublons » avec une procédure claire et bien expliquée.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena

17. GAGNER AVEC UN DÉ (Cat. 8, 9, 10)

Dans un stand de Luna Park, en payant un euro, vous pouvez jouer à un jeu de dés et choisir de jouer en suivant l'une des deux règles suivantes :

1re règle de jeu :

« Le joueur lance un dé deux fois de suite, si la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 9, le joueur gagne une peluche sinon il a perdu ».

2e règle de jeu :

« Le joueur lance un dé : s'il obtient un 6, il gagne une peluche, sinon il a le droit de relancer le dé et il gagne la peluche s'il obtient un 6 ; sinon il a perdu ».

Est-il plus intéressant de choisir la 1re règle ou la 2e règle ?

Expliquer comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Avec un dé normal lancé deux fois, comparer les chances d'obtenir une somme des points supérieure ou égale à 9 ou obtenir au moins un 6.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'en jetant deux fois un dé on peut obtenir 6 x 6 = 36 couples possibles de faces du dé et que tous ces couples ont la même chance d'arriver : 1/36.
- Comprendre que pour répondre à la question il est nécessaire de dénombrer les cas qui font gagner la peluche lorsqu'on suit la règle n°1 ou lorsqu'on suit la règle n°2.
- Repérer les 10 couples dont la somme est égale à 9 : (3, 6) ; (4, 5) ; (5, 4) ; (6, 3) ; dont la somme est égale à 10 : (4, 6) ; (5, 5) ; (6, 4) ; dont la somme est égale à 11 : (6, 5) ; (5, 6) ; dont la somme est égale à 12 : (6, 6). En déduire qu'il y a 10 chances sur 36 de gagner la peluche avec cette règle.
- Lorsqu'on suit la 2e règle, dénombrer les couples de faces qui font perdre : ceux qui ne présentent pas la face 6. En trouver 25 (5 x 5). Conclure qu'il y a 25 chances de perdre sur 36. En déduire qu'il y a 36 – 25 = 11 chances de gagner sur 36.
- Conclure que 10/36 est inférieure à 11/36 et qu'il est préférable de choisir la 2e règle.

Attribution des points

4 Réponse exacte : la 2e règle avec un décompte clair des différents cas possibles et de la manière de faire les calculs. Obtenir pour la 1re règle, 10 chances sur 36 de gagner, ou probabilité 10/36 et obtenir pour la 2e règle, 11 chances sur 36 de gagner, ou probabilité 11/36.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

18.TAPIS ROULANT (Cat. 8, 9, 10)

Dans une station de métro à Paris, Marc et Samira marchent ensemble à la même vitesse de 4 km/h quand devant eux se présentent 2 possibilités : soit emprunter un tapis roulant qui fait 250 m de long et avance à 5 km/h, soit continuer à pied dans le couloir à côté de ce tapis roulant. Marc décide d'emprunter ce tapis roulant et d'y rester immobile pendant le déplacement, alors que Samira continue à marcher dans le couloir.

À quelle distance de Samira se trouve Marc quand il arrive au bout du tapis roulant ?

Montrez les calculs que vous avez faits pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer la différence des distances parcourues par deux personnes en une même durée, en connaissant leurs vitesses 5 km/h et 4 km/h et la distance parcourue par la plus rapide : 250 m.

Analyse de la tâche

- À partir de la formule v = d/t, calculer le temps mis par Marc connaissant la distance 250 m et la vitesse du tapis roulant 5 km/h cela donne 5 = 0.250/h d'où h = 1/20 d'heure soit 3 minutes.
- À partir de la formule v = d/t, calculer la distance parcourue par Samira pendant ces 3 minutes ou 1/20 d'heure : 4 = d/1/20 d'où d=4/20 de km soit 200 m.

  Marc ayant avancé de 250m et Samira de 200 m, Marc se trouve à 50 m de Samira.

Ou (les données simples se prêtent à des calculs de proportionnalité)

- Le tapis avance à 5 km/h donc 5000 m en 60 minutes et pour faire 1000 m il lui faut 12min et pour 250 m 12/4 soit 3 min. Samira qui marche à 4 km/h soit 4000 m en 60 min, pendant 3 min c'est-à-dire 20 fois moins de temps elle fera 4000/20 = 200m.
- Conclure par la soustraction 250 – 200 = 50 m

Ou

- Le rapport des vitesses est 4/5, donc la distance parcourue par Samira est 4/5 de celle de Marc : tandis que Marc parcourt 250 m, Samira parcourt seulement 200 m, restant à l'arrière de 50 m.

Attribution des points

4 Réponse correcte « 50m » avec une explication claire de la procédure suivie et les calculs présentés

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté