

CREM

Nivelles, le 15 mai 2004

POUR UNE CULTURE MATHÉMATIQUE ACCESSIBLE À TOUS

Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes

Recherche n° 100/03 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin de recherche

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

rue Émile Vandervelde 5 **B1400 Nivelles (Belgium)**

Tél : +32 (0)67 212527 **crem@sec.cfwb.be** **Fax/Rép : +32 (0)67 212202**

Compte 068-2179326-54

Rapport au terme de dix-huit mois de recherche

Le présent document est le rapport final d'une recherche qui s'est étalée sur dix-huit mois.

Auteurs de la recherche

Ce rapport est le fruit d'une recherche collective, jalonnée par de nombreuses et longues discussions. Les membres du groupe de recherche sont Michel Ballieu, Jean-Michel Delire, Marie-France Guissard, Amélie Jonkers, Philippe Mairesse, Bénédicte Mestag, Jules Miéwis, Laure Mourlon Beernaert, Jacques Vandekerckhove, Françoise Van Dieren.

Chaque chapitre a été particulièrement pris en charge par une ou plusieurs personnes :
Philippe Mairesse pour les chapitres 1, 2, 3 et 15,
Laure Mourlon Beernaert pour le chapitre 4,
Bénédicte Mestag, avec la collaboration de Françoise Van Dieren, pour le chapitre 5,
Françoise Van Dieren pour les chapitres 6 et 9,
Jean-Michel Delire pour le chapitre 7,
Marie-France Guissard et Jacques Vandekerckhove pour le chapitre 8,
Amélie Jonkers pour le chapitre 10,
Marie-France Guissard pour le chapitre 11,
Michel Ballieu pour les chapitres 12, 16, 17 et 19,
Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour les chapitres 13 et 18,
Jules Miéwis pour les chapitres 14 et 20.
Après le départ de J.-M. Delire et de J. Vandekerckhove, leurs textes ont été remaniés, pour prendre en compte les remarques des membres de l'équipe de recherche et du Comité d'Accompagnement interne au CREM.

L'expérience pédagogique de Françoise Van Dieren s'est révélée très précieuse lors des discussions relatives à la tranche d'âge de 10 à 15 ans.

La mise au point informatique de l'ensemble du texte a été réalisée par Marie-France Guissard, en collaboration avec Michel Ballieu.

Remerciements

Nous remercions vivement les personnes qui ont lu et commenté divers brouillons de ce rapport. Il s'agit tout d'abord des membres du Comité d'Accompagnement de notre recherche au Ministère de l'Éducation, et aussi des membres du Comité d'Accompagnement interne au CREM, en particulier Thérèse Gilbert et Nicolas Rouche. Christine Docq, Bernard Honclaire, Christine Lemaître et Marie-Françoise Van Troeye ont également assuré des relectures. Il va de soi cependant que la responsabilité finale de ce rapport incombe à ses seuls auteurs. Nous remercions aussi tous les enseignants qui nous ont aimablement accueillis dans leurs classes, pour nous permettre d'expérimenter des activités.

Financement de cette recherche

Cette étude a été réalisée dans le cadre des conventions de recherche n° 100/02 et 100/03 financées par le Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux.

Pendant une année, ont été affectés à cette recherche, un poste de chargé de mission à temps partiel par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère non confessionnel, et deux postes de chargé de mission à temps partiel par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère confessionnel.

Avant-propos

1 Culture mathématique, mathématiques du citoyen

Cette recherche tente de porter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base. Compter, situer, mesurer, dessiner, jouer, expliquer sont des activités propres à tous les peuples. Elles permettent de développer, dès le plus jeune âge, des compétences mathématiques. Celles-ci devraient se compléter progressivement et s'enrichir tout au long de la scolarité. Or on constate que la culture mathématique échappe, de nos jours, à de nombreux adultes, même très cultivés dans d'autres domaines et/ou ayant un niveau d'études supérieures ou universitaires.

Combien de fois n'entend-on pas des réflexions du type « Oh, moi les maths, je n'y ai jamais rien compris... », parfois émises avec une certaine fierté ? La répugnance à aborder un texte illustré de graphiques, les erreurs d'interprétation dans les problèmes de pourcentages voire l'ignorance du principe fondamental de la numération de position sont autant d'exemples du rejet et de la méconnaissance des mathématiques de base. L'incompréhension augmente encore s'il est question d'analyser des représentations géométriques ou d'utiliser quelques rudiments de symbolisme algébrique. Parmi les causes probables de cet échec dans l'éducation mathématique, on peut sans doute relever d'une part, le choix inapproprié de certaines matières enseignées, mais surtout la manière de présenter celles-ci aux élèves.

Les mathématiques ont pour vocation de résoudre des problèmes. Elles nécessitent la mise en œuvre de processus d'abstraction et de raisonnements analytiques qui dicteront les opérations à effectuer ; c'est en général l'interprétation des résultats qui fournit alors la solution.

Très souvent, dans l'enseignement, l'accent est mis sur les processus opératoires, alors que ceux-ci constituent la phase la moins « humaine » de la résolution des problèmes. En effet, dans notre société moderne, c'est la partie dévolue aux machines. Presque toujours, on impose l'apprentissage d'algorithmes de calcul, sans dire à quelles occasions ces méthodes ont été mises au point, sans justifier leur pertinence ni exhiber des classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre. De plus, sous prétexte d'exercer les élèves à utiliser ces algorithmes, on leur soumet des listes de calculs à effectuer hors de tout contexte. Ces pratiques conduisent inévitablement à faire percevoir les mathématiques comme un ensemble de procédures vides de sens, fournissant des réponses vides de sens à des questions vides de sens.

Pour notre part, nous tentons de donner du sens aux activités mathématiques proposées et de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés. Nous avons identifié quatre registres susceptibles de rencontrer ces aspirations : la vie quotidienne, l'histoire, les arts et les récréations (mathématiques). L'enseignement traditionnel exhibe rarement ces aspects culturels des mathématiques.

1.1 Les mathématiques au quotidien

Tout être humain devrait pouvoir maîtriser quelques pratiques mathématiques qui lui permettent de se sentir relativement à l'aise dans sa vie de tous les jours, dans sa vie de citoyen critique face aux *media* de plus en plus envahissants.

En tant que consommateur, chacun est sans cesse sollicité par nombre de publicités, parfois mensongères. Il s'agit non seulement des achats quotidiens, mais encore et surtout du choix d'une formule de compte en banque, d'une police d'assurance, d'un prêt pour l'acquisition d'un immeuble ou d'une automobile, ... Une bonne maîtrise des fractions et des pourcentages peut également aider tout citoyen à devenir un contribuable averti et un électeur responsable.

Un autre objectif que nous poursuivons est aussi de former le futur adulte à la compréhension et à la critique des données fournies par les *media* et de l'initier à l'utilisation de divers supports de l'information chiffrée (cf. [3]).

C'est dans cette optique de ≪ mathématiques citoyennes ≫ que nous avons traité l'ensemble des chapitres qui concernent la numération et les pourcentages.

1.2 L'apport de l'histoire

Nombreux sont ceux qui pensent que le rôle de l'histoire dans le cours de mathématiques est multiple. Citons par exemple, le courant représenté par le regretté John Fauvel [69].

En premier lieu, une approche historique contribue à faire connaître les apports des différentes cultures à l'évolution des mathématiques. Soulignons au passage que l'histoire des sciences est trop souvent négligée dans le cours d'histoire. Or, l'influence des connaissances scientifiques égyptienne, mésopotamienne, indienne, arabe, ... et du rationalisme mathématique grec a été prépondérante dans la construction de notre mode de pensée occidental. Loin de nous l'idée d'introduire dans le cursus scolaire un cours d'histoire des mathématiques ou de ≪ tartiner une couche de culture ≫ sur des mathématiques déjà formalisées. Nous ne voulons pas nous en tenir à la simple anecdote historique, mais plutôt confronter les professeurs et leurs élèves à de véritables sources historiques qui renseignent sur le fond de la matière et l'évolution des concepts.

Par ailleurs, les obstacles épistémologiques que doit franchir l'élève sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé. Contrairement à une idée que défendait la ≪ mathématique moderne ≫, on a compris aujourd'hui qu'on n'enseigne pas directement des notions abstraites dans leur forme définitive, telles qu'elles sont publiées[1]. Elles doivent mûrir, muter, et cela, l'histoire encore le montre fort bien.

Lorsque l'élève assiste à la naissance d'un concept au travers des circonstances dans lesquelles celui-ci apparaît et se développe, il perçoit mieux le côté profondément humain des mathématiques ainsi que leur utilité. L'histoire permet ainsi d'observer les mécanismes qui mettent en marche la pensée mathématique.

Ajoutons encore qu'il y a un certain réconfort pour l'élève à resituer ses propres difficultés dans une continuité historique : d'autres avant lui ont dû faire face à des problèmes, affronter des défis ; ils ont obtenu des résultats...

Dans ce document, la composante historique est présente à travers les chapitres qui s'étendent

[1] Comme le dit H. Freudenthal [72], ≪ Aucune idée mathématique n'a jamais été publiée telle qu'elle fut découverte ≫.

des débuts de la numération jusqu'aux nombres irrationnels, qui traitent de la résolution des équations et de l'introduction à la trigonométrie.

1.3 Les réalisations artistiques

Les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie. On peut exploiter les peintures murales dans l'art africain, les zelliges de l'art hispano-musulman, mais aussi les pavages qui décorent les cuisines et les salles de bain, les frises qui ornent la vaisselle et le linge de maison...

Par des activités alliant le côté créatif à l'analyse des structures mathématiques, nous croyons qu'il est possible de stimuler le besoin de comprendre par le désir de créer. Un tel apprentissage développe l'intuition et aiguise le sens de l'observation, tout en procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. La géométrie, qui a souvent été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, retrouve ainsi son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.

Pour certains élèves de l'enseignement technique ou professionnel, la motivation à la pratique d'activités géométriques peut être directement liée au travail en atelier. L'apprentissage peut encore être enrichi par l'utilisation de logiciels de dessin. C'est l'occasion d'un premier contact avec le DAO[2], un des nombreux domaines où mathématiques, techniques et arts se rencontrent.

Les décors géométriques, tels que peintures murales, pavages, frises, ... et les assemblages de polygones constituent le matériel de base des activités géométriques proposées dans cet ouvrage, de l'école primaire à la fin du secondaire.

1.4 Les activités ludiques et récréations mathématiques

Les récréations mathématiques sont également présentes dans les écrits de nombreuses civilisations. Le *papyrus Rhind*, certaines tablettes d'argile cuite sumériennes contiennent des énoncés dont on ne peut nier le rôle ludique. Ces problèmes se sont transmis de génération en génération et cette tradition n'a jamais été abandonnée. On trouve des défis mathématiques chez Archimède, Diophante, Ibn al-Bannā, Alcuin, Fibonacci, Pacioli, Bachet de Méziriac, Fermat, Euler, Hamilton, ... jusqu'à nos *Olympiades mathématiques* actuelles.

Décoder un message ou découvrir quelque chose de caché est un puissant ressort psychologique, particulièrement chez les enfants. Il en est de même de récréations mathématiques présentées sous forme de tours de magie dont il faut rechercher l'explication. Le jeu est source de motivation dans la construction des savoirs. Comme le dit François Boule[3], « On n'apprend qu'exceptionnellement malgré soi et sans effort. Peut-être l'effort est-il plus facile à consentir à travers le jeu, mais celui-ci ne dispense pas de l'effort d'apprendre ».

Cette approche ludique a été exploitée tout au long des chapitres sur la numération et l'introduction du formalisme algébrique, de l'école maternelle jusqu'aux premières années du secondaire.

[2] Dessin assisté par ordinateur.

[3] *L'apport des jeux à la construction des connaissances mathématiques*, Actes de la journée d'étude du 30 novembre 2001, Neuchâtel, IRDP.

2 Spécificités de la recherche

Nous nous inscrivons dans un courant existant représenté notamment par le groupe Inter IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques (France), par A. Bishop [23] à l'Université de Cambridge ou encore par E. Wittmann [140] à l'Université de Dortmund. Notre recherche vise à améliorer les documents d'enseignement puisant leurs sources dans la vie quotidienne, dans l'histoire, l'esthétique et le jeu, afin de promouvoir ces pratiques pédagogiques encore peu répandues actuellement.

2.1 De la maternelle à 18 ans

Cette étude envisage, comme les précédents travaux du CREM ou comme ceux d'auteurs tels que P. Hilton et J. Pedersen (cf., par exemple, [85]), la scolarité dans son ensemble, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit d'un travail de synthèse, qui dégage, comme nous allons le voir, des fils conducteurs soulignant les étapes successives de l'apprentissage des mathématiques, tant sur le plan de la numération (calcul, formalisation) que sur celui de la manipulation de figures, d'objets géométriques (symétries, structures, ...).

L'originalité de la méthodologie sur laquelle s'appuie notre recherche réside dans le débat permanent entre enseignants de tous les niveaux : instituteurs, régents, licenciés, docteurs. Chacun des membres du groupe de recherche présente sa production, ciblée sur la tranche d'âge pour laquelle il est le plus compétent, et l'ensemble du groupe participe à la discussion. Il s'agit ainsi d'un travail qui a une portée longitudinale.

2.2 Le contenu

Cet ouvrage contient des contributions de deux types. D'abord, les trois premières parties présentent des situations-problèmes adaptées à trois tranches d'âges de l'école, dans un esprit de continuité, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Ces tranches correspondent plus ou moins à l'enseignement fondamental, à celui du début, puis de la fin du secondaire. Certaines activités peuvent cependant convenir à différents moments de la scolarité, comme apprentissage ou comme remédiation. D'autres sont prévues pour s'étaler sur des périodes plus ou moins longues. C'est le cas notamment dans les chapitres qui traitent des pourcentages et des frises ; ils comprennent des séquences d'apprentissage adaptées à différents stades de la maturité et s'adressent aussi bien aux élèves de l'enseignement général qu'à ceux du technique ou du professionnel. Les documents proposés dans l'ensemble de ces trois parties sont directement utilisables dans les classes. Ils comportent en effet une description méthodologique qui cible les compétences exercées et sont accompagnés de fiches de travail à l'usage des élèves.

Quant à la quatrième partie, on y trouve des chapitres de nature épistémologique et historique. Il va de soi qu'il nous était impossible de remonter à toutes les sources et d'en décoder les manuscrits. Notre démarche ne s'est cependant pas bornée à la seule consultation d'ouvrages généraux d'histoire des mathématiques, fussent-ils excellents... Un aspect de notre recherche a consisté à sélectionner des textes qui permettent réellement de construire les savoirs mathématiques de base. Nous avons eu recours, pour chacune de ces sources, à des textes établis[4] et traduits par des historiens et philologues qui font autorité. Nous savons que l'accès à ces ressources n'est pas

[4]Les manuscrits sont souvent abîmés, entachés d'erreurs de copie et comportent parfois des abréviations. Établir un texte consiste à en donner une version aussi claire que possible, à partir d'un ou plusieurs manuscrits.

aisé pour un enseignant de terrain, pas plus que la possibilité d'assister à des séminaires d'histoire des mathématiques. Nous avons essayé de faire le lien entre les spécialistes et les praticiens et de présenter à ces derniers un discours accessible.

3 Les thèmes abordés

L'ouvrage entier suit, pour l'essentiel, la chronologie des âges. Ci-après, nous décrivons brièvement les contenus des chapitres, en les regroupant par thèmes.

3.1 Des nombres naturels aux irrationnels

Dès leur plus jeune âge, les enfants sont confrontés à l'univers des nombres dans la vie quotidienne. Ils arrivent tous en maternelle avec des acquis différents qu'il va falloir enrichir et structurer. Une bonne connaissance des mécanismes de la numération décimale de position est primordiale pour la maîtrise des nombres. À cet égard, la multiplication des approches constitue un atout supplémentaire.

Le chapitre 1 propose des activités ludiques destinées au maternel et au début du primaire pour compter, comparer et ordonner des nombres. Le concept d'égalité est travaillé en utilisant les réglettes de Brissiaud.

Le chapitre 2 s'adresse à des enfants de huit à dix ans. Il vise à installer une compréhension en profondeur du passage d'un rang à un autre dans la numération décimale de position, par la manipulation de compteurs et de bouliers. Ces derniers permettent de visualiser et d'analyser les états successifs d'une opération.

Les situations-problèmes du chapitre 3 sont destinées à des jeunes de dix à douze ans à qui l'enseignant propose une activité de décodage de nombres écrits dans différents systèmes de numération. Par oppositions et comparaisons (nombre de symboles utilisés, base, présence du zéro, relation entre longueur de l'écriture et valeur du nombre, importance de la position des symboles, limitation dans la représentation des nombres), les élèves découvrent les différentes propriétés de notre système décimal positionnel, afin de mieux le comprendre et l'utiliser.

Dire, lire et écrire des nombres ne constitue pas une fin en soi. Encore faut-il pouvoir utiliser ces nombres dans sa vie de citoyen. Le calcul avec des pourcentages constitue réellement une pierre d'achoppement pour pas mal d'adultes, quel que soit leur niveau d'études, comme nous l'a confirmé une petite enquête préalable. Le chapitre 8, destiné à des élèves du début du secondaire, travaille la notion de pourcentage comme outil de comparaison et met en évidence des procédures de calcul performantes adaptées à toutes les calculatrices.

Le chapitre 9 poursuit l'étude des pourcentages, avec des élèves plus âgés, sur des exemples concrets puisés sur l'Internet ou dans le magazine *Test Achats*. Il s'agit ici de saisir la portée des données que l'on peut ainsi trouver, de comprendre comment on passe d'un relevé de données brutes à des taux ou à des pourcentages et de pouvoir utiliser ces calculs pour comparer des situations ou analyser une évolution.

Le chapitre 7 aborde la notion d'irrationalité ; il propose différentes façons de découvrir la relation de Pythagore au niveau de la troisième année de l'enseignement secondaire. On en rencontre un cas particulier dans le *Ménon* de Platon. Il est possible d'arriver au cas général par des découpages d'origines chinoise ou indienne. Les élèves sont également confrontés avec le

texte de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'Euclide.

Dans le chapitre 14, une activité préalable de pliage débouche sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et amène à l'intuition que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous forme d'une fraction. Une deuxième activité propose d'utiliser l'outil mis au point dans la première pour montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. C'est l'occasion de rencontrer un exemple de la méthode de descente infinie. On poursuit par la découverte et l'expérimentation de l'algorithme de Théon, puis par le calcul d'une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif par l'algorithme de Héron. L'ensemble du chapitre s'adresse aux élèves du degré supérieur de l'enseignement général.

Dans la quatrième partie, le chapitre 15 propose un bref historique des origines de la numération. Enfin, le chapitre 20, présente quelques aspects de la lente progression qui a mené les grandeurs irrationnelles vers l'acquisition du statut de nombres.

3.2 La symétrie et les structures

Les rythmes visuels portés par des motifs répétés ou *patterns*, des broderies, des pavements, des éléments architecturaux, ... sont une source inépuisable de situations d'apprentissage. Dégager des structures communes à des objets apparemment très différents, élaborer des techniques de production de frises et de pavages sont des activités que l'on peut déployer à tous âges et qui développent des compétences multiples.

Le chapitre 4 propose, pour l'école primaire, des manipulations (papier calque, miroirs) qui visent à mettre en place la notion de symétrie. Par le biais de réalisations de puzzles, de pliages et découpages, de peintures, les enfants analysent les symétries dans l'art africain et produisent des créations personnelles.

L'étude des pavages au début du secondaire est abordée dans le chapitre 10. Elle mène d'une analyse approfondie des pavages réguliers et semi-réguliers à la construction des polyèdres platoniciens, en passant par des considérations sur les mesures des angles intérieurs des polygones.

Le chapitre 11 traite des frises, à différents niveaux de la scolarité. Des activités intuitives débouchent sur la découverte des isométries qui laissent une frise invariante. L'immense diversité de ces bandes décorées que l'on rencontre un peu partout, à toutes les époques, incite à les répertorier, les classer ; mais cela nécessite évidemment la mise au point de critères de classement. La structure de groupe qui émerge tout naturellement dans ce cadre géométrique, à partir des groupes de symétries, peut être dégagée dans les classes plus avancées de l'enseignement général. C'est l'occasion, pour les élèves de ces classes, de rencontrer une idée fondamentale de la géométrie moderne : on n'étudie plus les figures dans l'espace, mais les figures considérées comme des espaces, c'est-à-dire des ensembles organisés, structurés. L'évolution de la pensée géométrique est évoquée dans la quatrième partie, au chapitre 18.

3.3 Le symbolisme algébrique

Les activités du chapitre 5 s'adressent à des élèves du début de l'enseignement secondaire. Selon le bon principe de l'enseignement en spirale, on renforce la compréhension en profondeur de la notion de numération de position. La démarche est ludique : les élèves tentent d'expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie. Ensuite, l'explication du « tour de magie » est rendue plus aisée par le recours au symbolisme et à un début de formalisme algébrique.

Les produits remarquables, envisagés comme relations entre aires de figures planes, s'avèrent très utiles dans l'établissement de démonstrations géométriques dans les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre. FIBONACCI faisait déjà remarquer, dans le prologue de son *Liber abaci* (1228), que ces sciences « se venaient mutuellement en aide ». Or on sait que l'apprentissage des produits remarquables constitue un seuil à franchir par les élèves. Le chapitre 6 propose une découverte des produits remarquables sous leurs aspects numériques, géométriques et algébriques.

Le chapitre 13 a pour but de faire découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait du texte d'AL-ḪWĀRIZMĪ sur le *calcul par le ğabr et la muqābala*, généralement considéré comme le texte fondateur de l'algèbre. L'idée est de montrer le sens des développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique. L'examen de problèmes extraits d'une tablette babylonienne met en évidence les sources probables de l'ouvrage d'AL-ḪWĀRIZMĪ. L'algèbre que nous connaissons est le résultat d'un lent processus de maturation qui trouve ses origines, notamment en Mésopotamie, dans la résolution de problèmes de la vie de tous les jours : arpentage, pratiques commerciales, testaments, creusement de canaux, ... L'apport essentiel d'AL-ḪWĀRIZMĪ est l'organisation de toutes ces méthodes de praticiens en une discipline « savante ». Ce chapitre est également l'occasion d'amener les élèves à porter un regard algébrique sur une proposition extraite des *Éléments* d'EUCLIDE.

L'enseignant intéressé par le développement de la science dans le monde arabe peut trouver des renseignements complémentaires dans le chapitre 16. Le chapitre 17 décrit l'évolution de la pensée algébrique ; il contient, outre des informations d'ordre historique, une réflexion sur la nature même de l'art de l'algèbre. Qu'est-ce que l'algèbre ? D'où vient-elle ? Depuis quand existe-t-elle ? Que faisait-on en algèbre ? Comment a-t-elle évolué ? Que fait-on de nos jours en algèbre ? ...

3.4 La trigonométrie

La trigonométrie n'a pas souvent les faveurs des élèves. Le chapitre 12 propose de l'introduire par la construction d'une table de cordes, comme l'a fait PTOLÉMÉE dans son *Almageste*. Cela permet, non seulement de bien installer la notion de sinus, mais donne également l'occasion d'exploiter les outils géométriques mis en place durant la troisième année du secondaire, au cours d'une activité de justification et de démonstration.

Le chapitre 19 montre comment la trigonométrie, au départ intimement liée à l'astronomie, a petit à petit évolué, pour être finalement absorbée par l'analyse.

4 Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes rassemblées dans les trois premières parties de cet ouvrage ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

Ces situations sont présentées selon un plan uniforme[5] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description, en quelques lignes, de l'activité proposée aux élèves.

[5]Ce plan est inspiré par E. C. WITTMANN et G. MÜLLER [140]. Nous l'avons mis au point à l'occasion d'une recherche précédente [47].

Enjeux – Matières couvertes et compétences visées. Les compétences indiquées en italique sont celles que l'on retrouve telles que dans les documents appelés « Référentiels » [2][3][4].

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de la théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Échos d'une ou plusieurs classes – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

Prolongements possibles – Nouvelles situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour les élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place la situation occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

5 *Apprenti Géomètre*

À divers endroits du présent ouvrage, on propose de recourir dans les classes à un nouveau logiciel appelé *Apprenti Géomètre*. Il s'agit d'un logiciel créé par le CREM à la demande de Monsieur Jean-Marc Nollet, ministre de l'Enfance de la Communauté française de Belgique. Contrairement à ce que son nom pourrait laisser croire, *Apprenti Géomètre* a été conçu comme aide à l'apprentissage des mathématiques en général, et pas seulement de la géométrie. Il est approprié à l'enseignement primaire ainsi qu'aux premières années du secondaire. Il peut être téléchargé librement à partir du site internet `www.enseignement.be/geometre`. On trouvera également sur ce site, outre le mode d'emploi – très simple – du logiciel, des études sur ce qui le distingue des autres logiciels analogues, ainsi que des propositions d'utilisation dans les classes. *Apprenti Géomètre* a été distribué en 2003 sous forme de cédérom à toutes les écoles fondamentales de la Communauté française de Belgique.

L'utilisation de l'ordinateur ne dispense certes pas des manipulations classiques avec papier, crayon, ciseaux. Il s'agit d'une approche supplémentaire qui offre plusieurs avantages. L'un d'eux est qu'*Apprenti Géomètre* permet de disposer rapidement d'un grand nombre de formes géométriques de dimensions prédéfinies et qui s'agencent bien entre elles. Un autre avantage est que le travail sur ordinateur laisse moins de place au hasard que la manipulation de formes classiques en carton. L'élève est obligé de nommer non seulement les objets, mais aussi les mouvements ou les transformations qu'il désire appliquer à ces objets. En outre, la machine permet d'explorer rapidement un grand nombre de configurations géométriques.

Première partie

Culture mathématique à partir de 5 ans

Chapitre 1

La construction des nombres

Préambule

La notion de nombre se construit petit à petit. Dès leur plus jeune âge, les enfants sont confrontés à l'univers des nombres dans leur vie quotidienne. Ainsi, ils arrivent tous en maternelle avec des acquis différents qu'il va falloir enrichir et structurer tout au long de l'apprentissage.

Dans les activités qui suivent et qui s'inspirent de Ermel [64], le début de l'apprentissage des nombres est présenté sous différents aspects. La découverte des nombres et le comptage, leur agencement et leur mémorisation, la comparaison de quantités et les opérations sur les nombres seront abordés. Ces approches sont proposées séparément, mais il convient de réaliser d'incessants va-et-vient entre les différentes sections lors des activités quotidiennes en classe. L'ordre de présentation des sections ne correspond donc pas à une logique de progression particulière.

Il est également important d'effectuer les activités à plusieurs reprises en faisant varier les paramètres pour permettre à chaque enfant de progresser à son rythme.

1 Dénombrer et compter

De quoi s'agit-il ?

Prendre le nombre d'objets nécessaires pour combler les espaces vides d'un plateau de jeu.

Constituer une collection ayant le même nombre d'éléments qu'une autre.

Enjeux

Faire correspondre un nombre à une quantité d'objets.

Associer une quantité d'objets à un nombre.

Compétences

Agir et interagir sur des matériels divers.

Utiliser directement et dans un même contexte une règle apprise, une méthode, un énoncé.

Dénombrer.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Un support en carton (boîte découpée ou autre) qui représente un parking avec une zone d'attente, des petites voitures (ou les cartes fournies en annexe pour les représenter), éventuellement une plastifieuse et de la pâte adhésive, une corbeille par enfant ainsi que des gommettes, des jetons, des pièces ou d'autres matériels suivant le choix de l'enseignant.

Les fiches 1 à 11 figurant des parkings et des dessins de voitures, fournies en annexe aux pages 93 à 103.

La fiche 12 à la page 104, représentant un clown.

1.1 Appropriation

Comment s'y prendre ?

On forme des groupes d'élèves de niveaux sensiblement identiques. Des supports en carton tels que celui de la figure 1 sont placés sur chaque table.

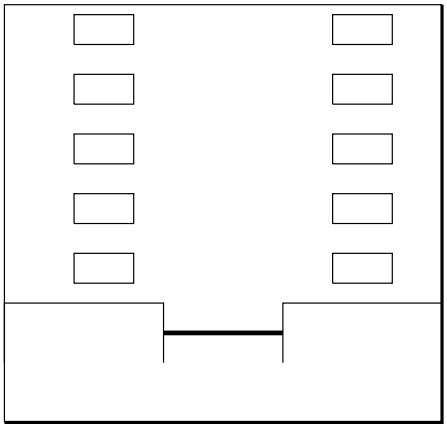


Fig. 1

Ce support est composé de deux parties : le parking proprement dit et une zone d'attente située en avant de celui-ci. Pour le cas où le support est un fond de boîte, l'enseignant adapte les dimensions des fiches à celles de son support. Des petites voitures ou les représentations de ces dernières sur des cartes (voir les figures 2, 3, 4, 5) se trouvent dans une « réserve » située à l'écart des différentes tables.

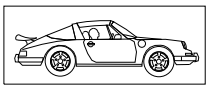


Fig. 2

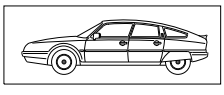


Fig. 3

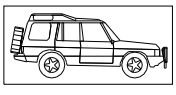


Fig. 4

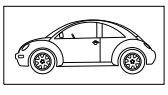
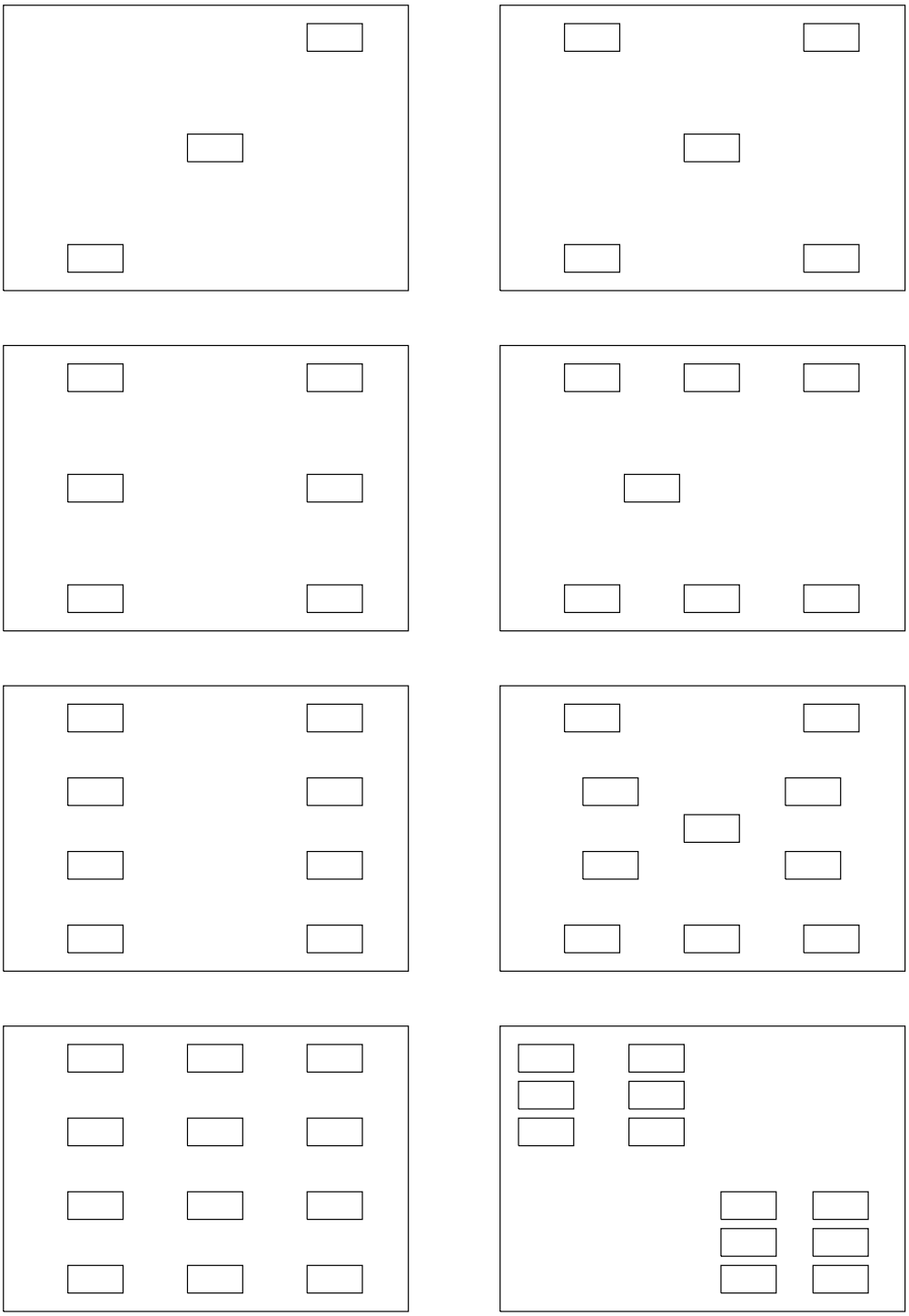


Fig. 5

Préalablement à l'activité, l'enseignant aura disposé sur le support une fiche dont le nombre de places de parking correspond au niveau de connaissance des enfants. En annexe, nous proposons

une série de fiches comportant de trois à douze places. La disposition spatiale des places de parking sur les fiches permet de faciliter ou de compliquer le dénombrement suivant les possibilités de chaque enfant. L'enseignant peut lui-même créer de nouvelles fiches avec des dispositions spatiales supplémentaires. Voici quelques exemples.



Va chercher le nombre exact de voitures nécessaires pour remplir le parking.

Chaque enfant dispose d'une corbeille pour y déposer les voitures. Il compte le nombre d'emplacements vides et va chercher les véhicules dans la « réserve ». Il dépose les voitures sur la zone d'attente tandis qu'un autre élève du groupe vérifie si le compte est bon en déposant une voiture sur chaque emplacement de parking. Les autres enfants du groupe sont invités à être attentifs et à formuler leurs éventuelles remarques. Si le nombre de voitures rapportées ne correspond pas à celui des places disponibles, le premier élève peut retourner chercher le nombre de véhicules nécessaires pour compléter le parking. S'il en a pris trop, il les reporte dans la « réserve ».

Pendant toute la durée de l'activité, l'enseignant circule dans les différents groupes pour observer le comportement des élèves. Il peut, par exemple, être amené à reformuler la consigne en utilisant des termes plus proches du langage des enfants, comme « juste assez » plutôt que exactement. Il peut ajuster la fiche s'il s'avère qu'il a mal apprécié le niveau de connaissance des élèves.

Il est très important que l'enseignant amène les enfants à expliquer leurs démarches pour mieux comprendre leurs réactions.

Quand l'action est réussie, c'est au tour de chacun des autres enfants de réaliser le défi.

Il est prévu que cette activité soit répétée plusieurs fois au cours de l'année en faisant évoluer le nombre et la disposition des emplacements de parking.

1.2 Transfert dans une situation semblable

Comment s'y prendre ?

Cette activité est un prolongement de la précédente. L'enseignant a préalablement disposé des représentations de voitures (fiche 11 à la page 103) sur certains emplacements de parking. Pour fixer les voitures sur les emplacements, nous conseillons de plastifier aussi bien les fiches que les images de voitures et d'apposer un bout de pâte adhésive au dos de ces dernières.

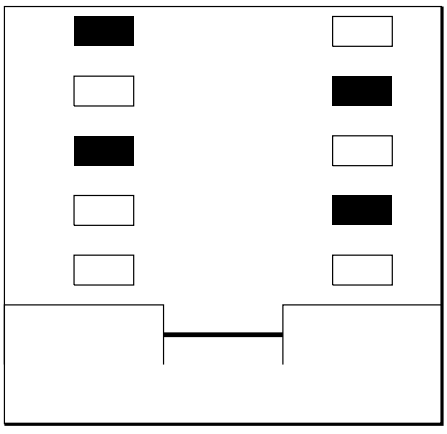


Fig. 6

Demande le nombre exact de voitures pour que le parking soit complet.

Les élèves vont chercher dans la « réserve » le nombre exact de dessins de voitures nécessaires

pour remplir le parking. Ils obtiennent les voitures contre remise d'un jeton. Ils disposent de trois jetons (ou plus) qui leur permettent d'effectuer trois essais (ou plus). Le gardien de la réserve de voitures est l'enseignant ou, éventuellement, un enfant. S'ils se trompent lors d'un essai, les élèves peuvent, tant qu'ils possèdent des jetons, venir passer une nouvelle commande après avoir rendu toutes les voitures de leur précédente demande. Comme précédemment, chaque enfant du groupe réalise l'activité et l'enseignant observe leurs comportements.

La présence des jetons a pour but de ne pas exiger des enfants d'avoir immédiatement un comportement idéal. Il leur est, à ce moment, permis de se tromper. Au fur et à mesure que l'activité sera reproduite au cours de l'année, la difficulté des fiches sera croissante et le nombre de jetons donnés aux élèves diminuera, le but étant de tendre vers la bonne commande dès le premier essai.

1.3 Individualisation

Comment s'y prendre ?

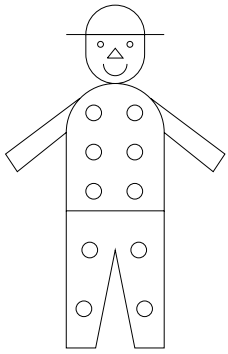


Fig. 7

Les élèves reçoivent chacun une feuille sur laquelle un clown est dessiné. L'enseignant a garni le costume de ce clown d'un certain nombre d'emplacements destinés à recevoir des gommettes de couleur. Un clown « sans emplacement » se trouve sur la fiche 12 à la page 104. Il permet à l'enseignant de choisir lui-même le nombre de cases avec lequel il veut travailler, par exemple dix, comme à la figure 7.

> Prends deux bandelettes comportant le même nombre de gommettes. Ce nombre doit être égal au nombre de ronds sur le clown. Colle la première sous le dessin. Place les gommettes de la deuxième bandelette sur le costume du clown pour vérifier si ton choix est correct.

Une réserve de bandelettes (figure 8) comportant des gommettes se trouve dans un endroit de la classe à l'écart des bancs des élèves. Pour aider ceux-ci à mieux discerner les bandelettes de tailles différentes, il est conseillé de les ranger par nombre de gommettes. Pour cela, on peut utiliser des enveloppes, des boîtes, des corbeilles, ...



Fig. 8

Chaque enfant va chercher deux bandelettes de gommettes identiques. Le nombre de gommettes des bandelettes doit correspondre au nombre d'emplacements à compléter. Les élèves collent une de ces deux bandelettes sous le clown représenté sur la feuille (figure 9). Ensuite, pour vérifier leurs réponses, ils collent les gommettes de la deuxième bandelette sur les emplacements adéquats (figure 10).

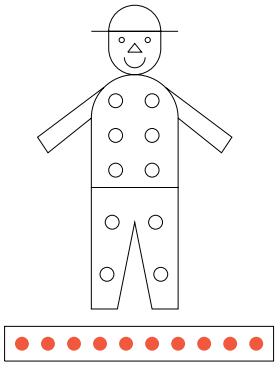


Fig. 9

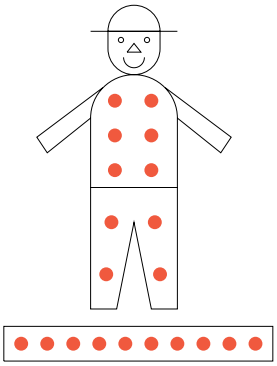


Fig. 10

Cette activité peut également se dérouler à plusieurs reprises tout au long de l'année en faisant varier les paramètres de la fiche (nombre d'emplacements, gommettes déjà collées, ...). Un enfant pourra ainsi commencer avec de petits nombres, puis poursuivre en augmentant le champ numérique. S'il le souhaite, l'enseignant peut indiquer les nombres sur les enveloppes ou les boîtes pour créer une relation avec les activités de lecture et d'écriture. Il peut aussi réinvestir les apprentissages lors d'autres activités plus rituelles comme par exemple la distribution du matériel. Ceci permet également à l'enseignant d'évaluer l'acquisition des notions et de garder une trace tangible du travail des élèves.

2 Comparer des nombres

De quoi s'agit-il ?

Comparer des collections.

Choisir la quantité correspondant le mieux à une consigne.

Enjeux

Associer un nombre à une quantité d'objets.

Mettre en œuvre des procédures de comparaison, puis les affiner.

Structurer le début de la file numérique.

Introduire les notions de « plus que », « moins que » et « autant que ».

Compétences

Agir et interagir sur des matériels divers.

S'exprimer dans un langage clair et précis.

Dénombrer.

Classer.

Utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des sachets transparents, des billes ou autres objets au choix de l'enseignant, des dés, des pions.

2.1 Première approche

Comment s'y prendre ?

Cette activité se déroule sous forme de jeu. L'enseignant prépare des sachets transparents qui contiennent un nombre de billes variant de 1 à 6. Il pose un des sacs sur la table de chacun des groupes. Le premier enfant lance le dé. Il prend le sachet si celui-ci contient plus de billes que le score de son dé. L'élève suivant joue à son tour et ainsi de suite. Si le sac a été remporté par son prédécesseur, on en place un nouveau sur la table. Dans le cas contraire, il joue avec le même sac.

> Lance le dé. Prends le sac s'il contient plus (ou moins) de billes que le nombre marqué par le dé.

L'enseignant détermine d'abord le nombre de joueurs par groupe. Il fixe aussi le nombre total de sachets avec lequel les enfants vont jouer. Chacun joue à tour de rôle. Un sac est posé sur la table. Voici un exemple.

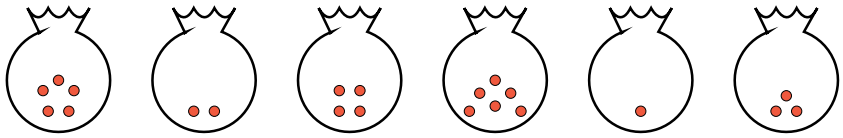


Après une période de jeu, l'enseignant passe de groupe en groupe et demande aux enfants quels sont les scores des dés qui leur permettent de gagner le sac. Ces questions ont pour but de structurer les apprentissages des élèves. Quand tous les sachets ont été distribués, les joueurs comparent leurs collections. Pour ce faire, on peut par exemple utiliser la correspondance terme à terme si le comptage pose des difficultés aux élèves. Chaque joueur place alors chacune de ses billes en face d'une bille de son adversaire. Le vainqueur est celui qui possède le plus de billes à la fin de la partie.

2.2 Évolution de la situation

Comment s'y prendre ?

> Lance le dé. Choisis un sac qui contient moins (ou plus) de billes que le score sur le dé.



Les sacs sont maintenant tous alignés sur la table. Les règles du jeu sont les mêmes que dans l'activité précédente. La seule différence réside dans le fait que, cette fois, les élèves peuvent choisir le sachet qu'ils vont prendre. Le but est bien entendu qu'ils choisissent le sac qui leur rapportera le plus de billes.

Ici aussi le rôle de l'enseignant est fort important. Il peut demander aux élèves de citer les scores des dés qui leur permettent de prendre tel sachet ou tel autre. Si les enfants ne prennent pas le sac qui contient le plus de billes, il tente de les y amener par des questions quant au choix le plus judicieux. Par exemple, si l'élève obtient 4 sur son dé et qu'il reste les sachets contenant 2, 3 et 5 billes, il demande d'abord quels sont les sacs que l'enfant peut prendre, en l'occurrence ici 2

et 3. Puis, il lui demande dans lequel il y a le plus de billes, ce qui permet à l'enfant d'effectuer un meilleur choix.

3 Ordonner des nombres

De quoi s'agit-il ?

Reconnaître les nombres sur la bande numérique et pouvoir les ordonner.

Réciter la comptine numérique.

Observer des livres à compter.

Fabriquer un livre à compter.

Enjeux

Organiser le début de la suite des nombres.

Surcompter, décompter.

Mettre en relation les nombres les uns avec les autres.

Compétences

Agir et interagir sur des matériels divers.

Dénombrer.

Classer.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une grande bande numérique à afficher au mur, de petites bandes en carton souple pour les élèves, éventuellement des cartes plastifiées reprenant les différents nombres de la bande et des pinces à linge ou d'autres objets du même type.

Les fiches 13 à 16 situées en annexe aux pages 105 à 108.

3.1 La bande numérique

Comment s'y prendre ?

Dans la classe, chaque enfant dispose de sa propre bande numérique. Elle est fabriquée dans du carton assez souple de manière à pouvoir être pliée. Un exemple de bande numérique (figure 11) a été reproduit en réduction en annexe sur la fiche 13 à la page 105. Elle comporte deux parties ; la rangée du haut contient la suite des nombres de 0 à 20 et celle du bas est vide pour permettre aux enfants de poser le doigt sous les nombres comptés pour mieux les visualiser lors du comptage.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fig. 11

On peut plier la bande en accordéon par dizaines. Les bandes sont prolongées au fur et à mesure des progrès des élèves. Au départ, elles vont au-delà des connaissances de la plupart d'entre eux ce qui leur montre que la suite des nombres ne s'arrête pas là où ils sont « bloqués ». Nous avons choisi 20 dans le cas de la bandelette présentée. Plus tard, nous avons décidé de ne pas dépasser 40 ou 50 même si certains enfants sont capables de réciter une comptine plus longue. En effet, à cet âge, les nombres supérieurs à 31 ne sont pratiquement pas rencontrés en classe. De plus, il peut être dangereux d'aller trop loin et de décourager les enfants qui ne connaissent leur comptine que pour de très petits nombres. L'enseignant choisit l'endroit où est conservée la bandelette, mais celle-ci doit être constamment accessible aux élèves. La bande numérique proposée ici comporte un zéro bien que dans les activités en rapport avec le calendrier, le zéro n'intervient pas. Par contre, il peut être employé pour indiquer le nombre d'absents lors de l'appel. C'est pourquoi, nous conseillons de placer le zéro sur la bande numérique, mais en pliant la bandelette juste après lui de sorte qu'on puisse le masquer ou le montrer selon l'exercice.

Une bande « grand format » est affichée sur un mur de la classe, idéalement à hauteur des yeux des enfants. Sa grandeur leur permet de bien la voir de quelque endroit où ils se trouvent. Des cartes plastifiées reprenant les différents nombres peuvent être accrochées sous le nombre correspondant de la bande numérique. Elles sont à la disposition des élèves lorsqu'ils en ont besoin au cours d'une activité. Ils prennent alors la carte-nombre qu'ils viendront ensuite replacer au bon endroit après utilisation. Il est donc intéressant de disposer de plusieurs cartes avec chacun des nombres présents.

De nombreuses situations de la vie de classe permettent d'utiliser cette bande numérique. L'écriture de la date et le rite de l'appel en sont des exemples quotidiens. Voici une description de ce qui peut se faire dans le cadre de ces deux situations traditionnelles et de ce que cela apporte sur le plan numérique.

Le calendrier

Suivant les classes, il existe de nombreuses sortes de calendriers. Il est ainsi possible d'utiliser des systèmes d'étiquettes, de roues que l'on tourne, des calendriers ressemblant à ceux vendus dans le commerce ou d'autres encore. L'utilisation de la bande numérique peut se faire avec chacun d'entre eux et ne prend que très peu de temps. En effet, dès qu'un élève est venu citer la date ou compléter un calendrier, il place un repère, par exemple une pince à linge de couleur prédéfinie, sur la bande numérique suspendue au mur de la classe. À partir de là, l'enseignant demande d'indiquer la date du jour suivant ou précédent. Par la suite, il pourra compliquer l'activité en y insérant les week-ends. Par exemple, si la date est le vendredi 16, il demande la date du lundi. Ces activités débutent sur la bande numérique affichée au mur. Progressivement, on les répétera sur les bandes individuelles. Petit à petit la bande numérique permettra aussi d'observer quelques régularités telles que la présence d'un 9 avant les plis ou encore le fait qu'après un nombre se terminant par 9, le premier chiffre change.

Le rite de l'appel

Cette activité se déroule tous les matins en classe. On compte tous les élèves. Au début, l'enseignant continue le comptage quand les enfants sont bloqués. Puis, petit à petit, les élèves parviennent à progresser de plus en plus sans son aide car il y en a toujours qui parviennent à réciter plus loin. Enfin, dans un troisième temps, les enfants comptent seuls, chacun à leur tour, avec l'aide éventuelle de certains autres. Pour conserver les renseignements, on peut placer une pince à linge de couleur définie qui représente l'ensemble des élèves de la classe et une pince d'une autre couleur qui correspond au nombre de présents. Par des questions, l'enseignant

amène les enfants à travailler sur la bande numérique. Ainsi, si la classe comprend 18 élèves et qu'aujourd'hui il n'y a que quinze présents, il peut leur demander combien il y a d'absents. Plusieurs procédés peuvent être mis en œuvre. Ainsi, on peut compter un, deux et trois à partir de 16 pour arriver à 18. On peut aussi utiliser le surcomptage en disant « 16, 17, 18, ça fait trois ». On peut encore partir de 18 et décompter « 17, 16, 15 », bien que cette méthode soit moins courante et un peu plus compliquée. Ces différentes techniques peuvent bien entendu être toutes appliquées au cours de l'année.

Par la suite, l'enseignant peut demander aux enfants de compter les garçons et les filles présents, les enfants qui retournent manger à la maison et ceux qui restent, ...

Pour une bonne utilisation de la bande numérique, il ne suffit pas de l'introduire dans la classe. C'est par un emploi fréquent que la connaissance de l'ordre des nombres va se développer et que les enfants vont y recourir spontanément. Elle peut non seulement servir d'aide-mémoire et de dictionnaire de nombres, mais aussi être utilisée dans les diverses activités de comptage et de calcul mises en place dans la classe. La bande peut bien entendu accompagner l'élève lorsqu'il change de classe. Il suffit en effet de la compléter pour qu'elle trouve encore son utilité en début d'école primaire.

3.2 Les comptines numériques

Comment s'y prendre ?

Les comptines font partie de l'univers habituel des enfants de maternelle. La plupart du temps, elles sont envisagées comme des activités rituelles et se déroulent collectivement à un moment déterminé de la journée. Chaque comptine est récitée pendant un certain temps, puis on passe à une autre en essayant d'aller de plus en plus loin dans la connaissance de la suite des nombres.

> Récite la comptine en même temps que moi.

Ici, les comptines numériques ont été regroupées en quatre grandes catégories suivant qu'elles utilisent l'aspect cardinal ou ordinal des nombres, qu'elles comportent des additions ou qu'elles emploient de grands nombres. Les comptines évoquées ci-dessous sont reprises en entier sur les fiches 14 à 16 situées en annexe aux pages 106 à 108.

Les comptines les plus couramment récitées sont celles qui comprennent des nombres cardinaux. Elles peuvent se présenter de diverses manières. Ainsi, les nombres peuvent être présentés en ordre croissant comme dans « La poule » ou décroissant comme dans « Kourou » ou parfois même les deux comme dans « Les cubes ». La suite peut s'énoncer d'un seul trait comme dans « Violette, violette ». Chaque nombre peut aussi être séparé du suivant par un mot ou un groupe de mots comme dans « Dix miniqui » ou « En rêvant, j'ai vu ... ». Les nombres peuvent être groupés par 2, 3, ou plus et entrecoupés par des mots comme dans « 1, 2 v'là les oeufs ».

Bien que les comptines qui comportent des nombres ordinaux soient beaucoup plus rarement utilisées dans les classes, nous avons tenu à en répertorier l'une ou l'autre pour ne pas délaisser cet aspect des nombres. On trouve ainsi « Sept petits enfants » ou encore « Les douze mois ».

Certaines autres comptines permettent de travailler l'addition des nombres. Ainsi en est-il de « Voici ma main » ou de « Les mains ».

D'autres enfin font apparaître de nouveaux nombres, plus grands. C'est par exemple le cas de

celles intitulées « Le singe » ou « 1, 2, 3, 4, 5, la lune est éteinte ».

Les activités faisant intervenir les comptines numériques se déroulent essentiellement au niveau oral, en n'oubliant pas l'aspect ludique de la récitation. Elles doivent s'opérer en interaction avec les autres activités d'apprentissage. Jouer avec les comptines numériques permet de structurer la suite des nombres. Au cours de l'année, on pourra, par exemple, demander aux élèves de continuer la comptine à partir d'un certain endroit.

Ceux qui désirent posséder un répertoire de comptines plus important peuvent consulter le site du centre départemental de documentation pédagogique du Haut-Rhin[1]. Ils y trouveront plus de deux cents comptines numériques à télécharger.

3.3 Les livres à compter

De nombreux éditeurs de littérature enfantine publient des livres à connotation mathématique ayant pour but d'aider les enfants dans leurs premiers apprentissages. Ainsi en est-il de ce qu'on appelle communément « les livres à compter ». Ces derniers présentent la plupart du temps les premiers nombres en les associant à des quantités et en exhibant leur écriture et leur nom. Ils sont généralement destinés à être lus à la maison bien qu'ils soient présents dans de nombreuses classes. Ces ouvrages sont de qualité fort inégale et certains d'entre eux comportent même des erreurs importantes sur le plan mathématique comme, par exemple la confusion entre chiffre et nombre. Tout comme les comptines numériques, les livres à compter ne permettent pas à eux seuls d'apprendre à compter. Mais on peut, entre autres, les considérer comme un bon auxiliaire pour arriver à la connaissance de la suite des nombres.

Une activité possible en classe est de créer un de ces livres. La première étape consiste à observer comment ces livres sont fabriqués. Il est donc nécessaire d'en présenter un nombre suffisant pour dégager leurs caractéristiques. Dans ce contexte, une série d'ouvrages a retenu notre attention.

« Un, deux, trois, c'est à moi » [39] propose une collection de nombres qui va de 1 à 5 avec des corps d'animaux comportant des orifices qui permettent de passer les doigts. Les nombres sont écrits en chiffres. « Les chiffres de Balthazar » [116] présente sur la page de gauche une petite histoire dans laquelle on montre les nombres sur les doigts. Sur la page de droite, l'écriture en chiffres permet aux enfants de passer leur doigt sur le tracé des nombres. À noter que le zéro est présent à la fin de cette histoire. « Dix petits amis déménagent » [7] montre un ensemble de dix enfants, cinq filles et cinq garçons, qui déménagent. Le nombre des enfants qui déménagent augmente de un à dix tandis que celui de ceux qui restent diminue en même temps. Il n'y a ni texte, ni nombre. « Dix dans un lit » [121] présente une suite décroissante avec les nombres écrits en lettres et la possibilité de visualiser les compléments à dix. « J'apprends à compter » [13] permet de rencontrer des nombres allant jusqu'à cent, en les présentant tous de un à dix, puis de dix en dix jusqu'à cent. Ces grandes quantités sont groupées par paquets de dix. « Vingt-deux ours » [91] raconte quant à lui la longue histoire d'une famille d'ours. Les nombres ne sont pas écrits. Enfin, « Chiffres en friche » [123] présente quatre types d'écriture des nombres (traditionnelle, arabe, romaine et chinoise) sur la gauche et des collections diverses d'objets sur la droite. Le livre va de un en un jusque douze, puis il présente quelques nombres entre treize et cent, puis entre cent et mille, puis mille et enfin un million.

Lors de la lecture, l'enseignant amène les élèves à émettre des remarques au sujet du contenu des différents livres : quels nombres sont écrits, sont-ils grands ou petits, ... À la fin de ces

[1] `http://www.crdp-strasbourg.fr/cddp68/maternelle/comptn00.htm`

échanges, il met en évidence les ressemblances et les différences entre les ouvrages. Il propose alors aux enfants de créer un « livre à compter ».

La première étape consiste à prendre des décisions au sujet de la présentation de ce livre. Des questions sont ainsi posées.

> Quel sera le format ? Jusqu'à quel nombre va aller le livre ? Va-t-on représenter les nombres ? De quelle manière ? En quelle matière ? Va-t-on dessiner ou coller des collections ? Que dessiner ou coller ?

Un débat est mené par l'enseignant dans la classe pour prendre les décisions. Lorsque l'on s'est mis d'accord, les enfants sont répartis en groupes pour réaliser une ou deux pages du livre sous la direction attentive de l'enseignant. Pour tirer le meilleur parti de cette activité de fabrication, ce dernier veillera à y intégrer des apprentissages au niveau du langage et de la création artistique. Les pages sont alors assemblées pour obtenir un livre. Ce dernier est d'abord lu ensemble. Il peut ensuite être présenté à d'autres classes avant d'aboutir dans la bibliothèque, où il pourra être fréquemment consulté.

4 Les réglettes de type Brissiaud

Nous avons axé le travail à l'aide des réglettes de type Brissiaud sur l'apprentissage de l'égalité. Toutefois, dans un premier temps, il est nécessaire de s'approprier le matériel. C'est pourquoi nous proposons d'abord quelques activités qui se trouvent dans la brochure qui accompagne les réglettes.

De quoi s'agit-il ?

Représenter des nombres à l'aide de réglettes.

Calculer des sommes et des différences.

Enjeux

Additionner et soustraire de petits nombres.

Étudier l'égalité sous ses différents aspects.

Compétences

S'exprimer dans un langage clair et précis.

Dénombrer, classer.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Vérifier le résultat d'une opération.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des réglettes de type Brissiaud, des dés classiques et d'autres comportant deux fois les nombres 0, 1 et 2 situés face à face ainsi que des pions.

Les fiches 17 à 22 aux pages 109 à 114.

Prérequis

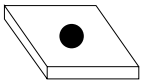
L'ordre de succession des dix premiers nombres.

4.1 Présentation du matériel

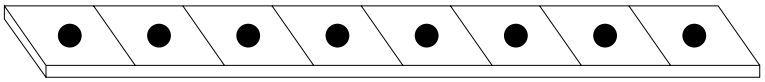
Les réglettes qui sont utilisées dans le cadre de cette activité ont été créées par Rémi Brissiaud [30]. Elles sont disponibles aux éditions Retz à Paris. Il est possible de les commander via internet[2].

Un jeu complet de ce matériel comprend :

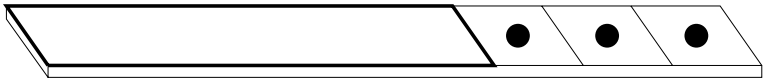
110 carrés unités,



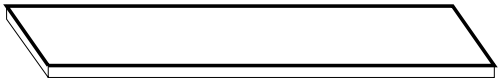
4 jeux de réglettes sans cache contenant chacun dix réglettes qui correspondent respectivement aux nombres de un à dix,



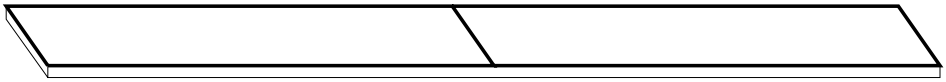
6 jeux de réglettes sur lesquelles une suite de cinq unités est remplacée par un cache,



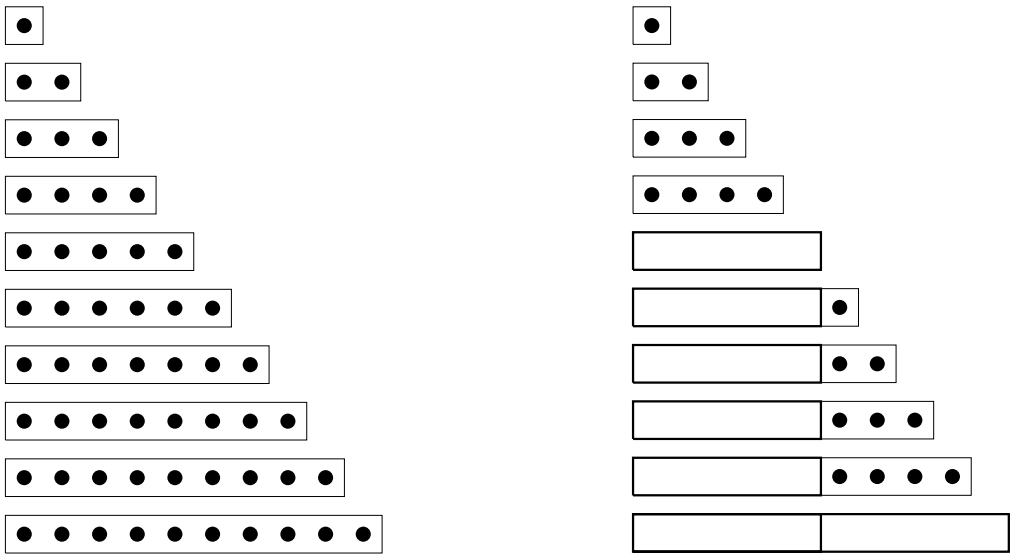
28 caches de cinq,



8 réglettes de dix constituées par la juxtaposition de deux caches de cinq.



Ce matériel est fabriqué en carton. Voici les deux séries de dix réglettes, avec et sans caches.



[2] `http://www.editions-retz.com`

La présence d'un cache de cinq permet aux enfants de reconnaître rapidement la quantité représentée sur une réglette. Les trois premières activités qui suivent donnent l'occasion de manipuler les réglettes et les caches et de réaliser des additions et soustractions de petits nombres. La quatrième aborde le problème de l'égalité.

4.2 Introduction du cache

Comment s'y prendre ?

L'activité se déroule sous forme de jeu. Les élèves sont répartis en groupes de 2 à 4 joueurs. Ils disposent, par groupe, d'un dé comportant deux fois les nombres 0, 1 et 2 situés face à face. Au centre de la table se trouve une réserve, appelée ci-dessous « pioche » qui contient 10 carrés unités et deux caches de cinq par joueur.

> Lance le dé. Prends le nombre de carrés correspondant à ton score et aligne-les devant toi. Lorsque tu as cinq points, recouvre-les à l'aide d'un cache. Continue jusqu'à obtenir dix points.

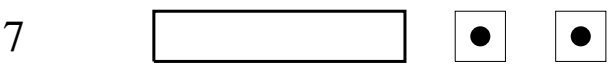
Après chaque lancer de dé, l'élève concerné prend dans la pioche le nombre de carrés correspondant à son score. Les enfants jouent chacun à leur tour. Dès qu'un joueur possède cinq carrés, il doit les recouvrir d'un cache de cinq. S'il ne le fait pas, l'arbitre, qui peut être l'enseignant, remet les groupes de cinq unités non masquées dans la pioche. Lorsqu'un enfant atteint le score de dix carrés en ayant bien recouvert les deux groupes de cinq, il remporte la partie.

Dans un premier temps, les élèves ont tendance à compter les points masqués à travers le cache. Certains éprouvent parfois des difficultés lors de ce comptage et dénombrent quatre ou six points sous le cache. Cet obstacle est généralement surmonté quand on leur fait prendre conscience que le cinquième point est situé juste au bord du cache avant le premier point visible.

Pendant l'activité, l'enseignant intervient en demandant le plus souvent possible aux élèves de dire le nombre de points qu'ils possèdent. Tout au long de la partie, on vérifie quel joueur a le plus de points. Lorsqu'un enfant a atteint les dix points, cela permet de classer les autres joueurs selon le score qu'ils ont à cet instant. Cette verbalisation ainsi que la remise des groupes de cinq points non masqués dans la pioche amène les élèves à être plus attentifs et à recompter régulièrement leurs points. Il est nécessaire de reprendre fréquemment cette activité, car c'est celle qui établit la correspondance entre le cache et les cinq unités. Comme prolongement, on peut proposer aux enfants des exercices écrits tels que ceux de la fiche 17 à la page 109. Les élèves doivent, dans un premier temps, inscrire en chiffres les points représentés.



Ensuite, ils doivent dessiner les réglettes correspondant au nombre indiqué.



4.3 À la découverte des réglettes

Comment s'y prendre ?

Venons-en maintenant à l'activité d'introduction des réglettes. Elle est prévue pour se dérouler par groupes de deux élèves. Il est nécessaire de se munir de deux dessins d'escaliers par groupe. Ces escaliers correspondent à une série complète de réglettes disposées verticalement de la plus petite à la plus grande (figure 12).

La fiche 18 à la page 110 reprend la configuration de cet escalier. Il faudra l'agrandir au format A3 pour pouvoir y placer les réglettes. Pour améliorer la présentation et la solidité du matériel, l'enseignant peut coller les escaliers sur un carton, puis coller sur ce support un autre carton où la forme de l'escalier a été évidée de manière à laisser un creux destiné à recevoir les réglettes.

En plus des deux escaliers, chaque groupe reçoit une série de réglettes sans cache, une autre avec cache et, au minimum, sept caches de cinq.

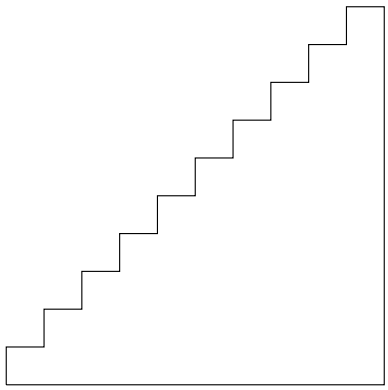


Fig. 12

> Remplis un des escaliers à l'aide des réglettes sans cache disposées verticalement et l'autre à l'aide des réglettes avec cache. Vérifie que les deux escaliers sont identiques en plaçant des caches aux bons endroits sur le premier escalier.

Cette activité permet aux élèves de prendre contact avec les différentes réglettes et de montrer la correspondance entre les deux séries de réglettes. Les nombres représentés ici sont assez aisément reconnus puisque les réglettes sont placées en ordre croissant. Quand les élèves ont complété leur escalier, l'enseignant peut enlever une des réglettes et demander aux enfants quel est le nombre qui y est représenté. Cette dernière question permet de vérifier si les élèves maîtrisent la correspondance entre le cache et la quantité cinq.

4.4 Ajout et retrait de petits nombres

Comment s'y prendre ?

Au cours de cette activité, les élèves sont répartis par groupes de trois. Deux d'entre eux disposent des mêmes escaliers que précédemment et d'un dé comportant deux fois 0, 1 et 2 face à face. Le troisième enfant tient le rôle du banquier et gère deux séries de réglettes avec cache.

> Lance le dé. Avance ton pion sur l'escalier du nombre de points inscrits sur le dé. Demande la réglette correspondante au banquier. Place-la sous ton pion.

Au départ, les pions des deux élèves sont situés au bas de l'escalier. Le premier joueur lance le dé et avance son pion du nombre de marches égal à son score sur le dé. À ce moment, il

demande au banquier la réglette à placer sous la marche de l'escalier en citant son nom. Par exemple : « Je voudrais la réglette un ». Le banquier la lui fournit et le joueur la dispose sous son pion. Les deux enfants jouent alternativement. Le placement de la réglette adéquate sous le pion du joueur permet à l'élève de vérifier si sa demande au banquier était correcte et, donc, de se corriger lui-même. Si, suite à cette vérification, il constate qu'il s'est trompé dans le choix de la réglette, il la rend au banquier et replace son pion sur la marche de l'escalier qu'il occupait auparavant. Le rôle du banquier est important. Par sa présence, il amène les joueurs à employer les nombres et non à simplement comparer par tâtonnement la hauteur des marches de l'escalier et la longueur des réglettes. De plus, le banquier participe également activement au jeu puisqu'il doit répondre correctement aux demandes des joueurs et, donc, reconnaître les réglettes.

Plusieurs procédés peuvent être utilisés par les élèves pour trouver le nombre correspondant à la réglette souhaitée.

Ainsi, si le joueur s'est successivement arrêté sur les marches deux, quatre, cinq et sept, il obtient l'escalier de la figure 13. Si au lancer de dé suivant il obtient deux, il peut :
- soit recompter toutes les marches une à une jusqu'à celle sur laquelle se trouve son pion,
- soit surcompter à partir de la marche sept en énonçant successivement « huit, neuf »,
- soit calculer directement « sept et deux égalent neuf ».

L'un des buts est d'amener les élèves à employer les deux derniers procédés.

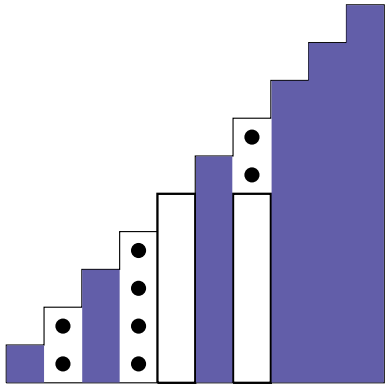


Fig. 13

Par la suite, la même activité est réalisée en démarrant cette fois du haut de l'escalier pour introduire les soustractions. La réglette dix est directement placée avant le premier lancer de dé. Il ne faut pas obligatoirement attendre que les élèves maîtrisent parfaitement les additions pour entamer cette activité. En effet, comme dit précédemment, le rapport entre le cache et les cinq unités qu'il représente est un cap essentiel à franchir. Lors des soustractions, les enfants doivent parfois remplacer mentalement un cache de cinq par les unités qui lui correspondent. C'est par exemple le cas lorsqu'ils retirent deux à dix. Et comme le dit Brissiaud, cela conduit très souvent à des progrès importants dans la représentation des nombres par des réglettes.

Prolongements possibles

L'enseignant peut demander aux élèves de remplir l'escalier entièrement et, donc, à chaque lancer de dé, de choisir le mouvement le plus adéquat entre la montée et la descente. Plus tard, l'activité peut également être prolongée en utilisant un escalier allant jusqu'à quinze ou vingt. Dans ce cas, le joueur peut, par exemple, demander treize et le banquier lui fournit une réglette dix et une réglette trois. C'est l'occasion d'introduire les relations numériques telles que « treize, c'est dix et trois ». La configuration des dés peut aussi être modifiée afin d'augmenter la taille de l'ajout ou du retrait.

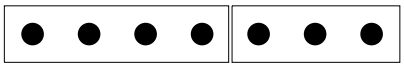
4.5 La notion d'égalité

De nombreuses études menées au cours des dernières années concernent l'apprentissage de l'égalité à l'école primaire. Dans la plupart des cas, elles conduisent au même constat : les élèves éprouvent de grosses difficultés lorsque le symbole d'égalité n'est pas placé en fin d'opération. Ainsi, une majorité d'enfants parvient à compléter correctement des égalités de type $3+5=\ldots$ ou $3+\cdots=8$, tandis que des opérations de type $8=3+\ldots$ ou $8=\cdots+3$ leur posent de gros problèmes. Les réglettes constituent un matériel approprié pour surmonter cet obstacle. C'est pourquoi nous envisageons de l'utiliser dans le cadre d'un travail allant de problèmes simples jusqu'à d'autres plus complexes.

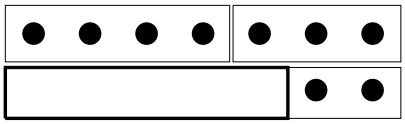
Dans un premier temps, l'activité se déroule avec les réglettes Brissiaud. Chaque élève dispose d'une série de réglettes. L'enseignant peut soit dessiner les opérations, soit reproduire les réglettes en grand pour les fixer au tableau. Les premières opérations proposées sont des additions classiques.

> Mets devant toi les mêmes réglettes que celles du tableau. Prends la réglette qui correspond à la somme de ces deux réglettes et place-la en dessous. Énonce le calcul effectué.

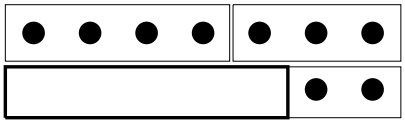
Voici un exemple d'opération possible.



Les élèves prennent la réglette qui correspond à la somme des deux autres et ils la placent juste sous celles-ci.



Il est important qu'ils énoncent le calcul effectué qui est noté au tableau sous les réglettes.

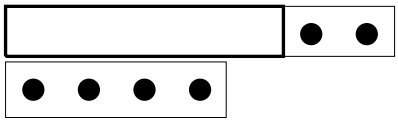


4+3=7

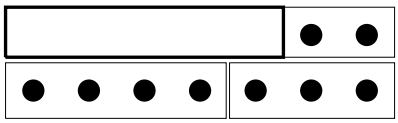
Plusieurs exercices de ce type sont proposés. Nous passons ensuite à un autre genre d'exercice.

> Place devant toi les mêmes réglettes que celles du tableau. Complète ensuite pour obtenir la même quantité au-dessus et en dessous.

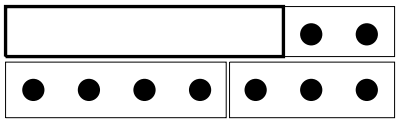
La disposition des réglettes est différente de celle des exercices précédents. La réglette la plus grande est placée au-dessus et une réglette plus petite en dessous comme dans l'exemple qui suit.



Les élèves complètent la rangée du dessous en ajoutant la réglette qui permet d'obtenir exactement celle du dessus.



Ici aussi, il est important qu'ils énoncent le calcul effectué. Ce dernier est noté au tableau sous les réglettes.



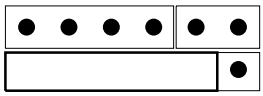
7=4+3

On propose encore de nombreux exercices. On peut ensuite poursuivre avec des exercices qui mélangent les deux types de manipulations décrites ci-dessus. Ce travail est alors suivi d'activités reprises sur des fiches.

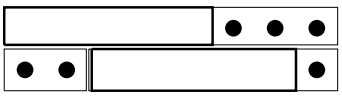
La fiche 19 à la page 111 présente des situations avec les réglettes dessinées. Les élèves indiquent sous chaque dessin l'opération qui est représentée.

Écris le calcul correct en dessous de chaque dessin.

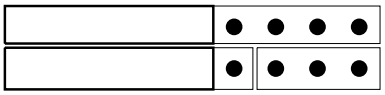
Voici les exemples proposés sur cette fiche 19.



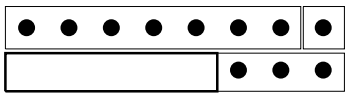
4+2=6



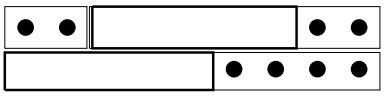
8=2+6



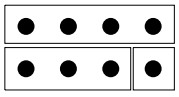
9=6+3



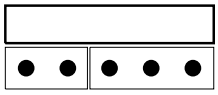
7+1=8



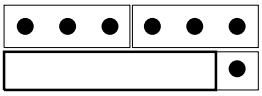
2+7=9



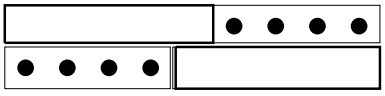
4=3+1



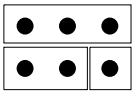
5=2+3



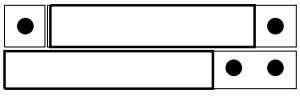
3+3=6



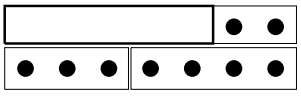
9=4+5



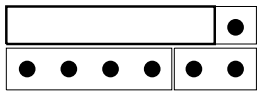
3=2+1



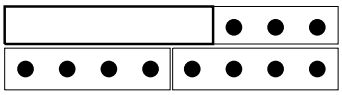
1+6=7



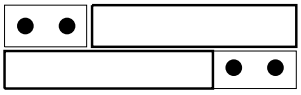
7=3+4



6=4+2



8=4+4



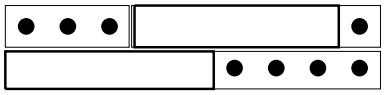
2+5=7

Dans un deuxième temps, les élèves reçoivent la fiche 20 à la page 112. Cette fois, l'opération est indiquée et les enfants doivent dessiner la représentation correspondante.

Dessine les réglettes pour représenter chaque opération.

Voici les exemples proposés sur cette fiche 20. Ils sont ici présentés sous forme d'exercices résolus.

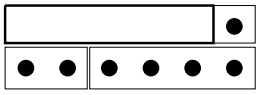
3+6=9



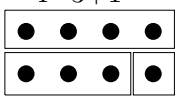
8=3+5



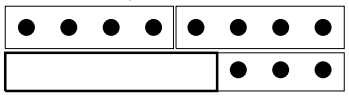
6=2+4



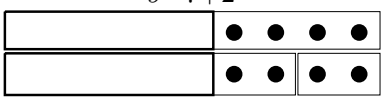
4=3+1



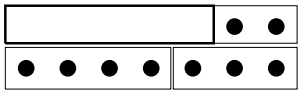
4+4=8



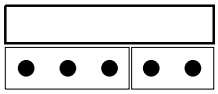
9=7+2



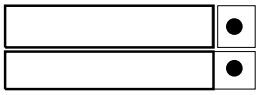
7=4+3



5=3+2



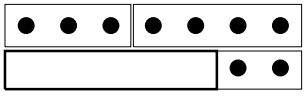
5+1=6



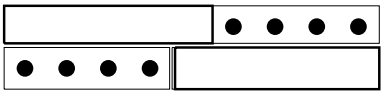
8=6+2



3+4=7



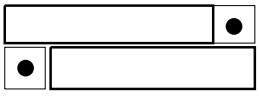
9=4+5



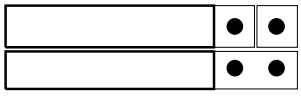
1+1=2



6=1+5



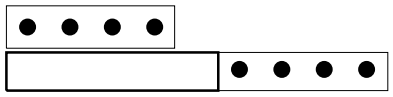
6+1=7



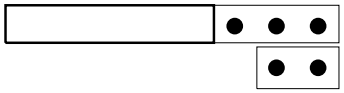
Ensuite, d'autres opérations sont proposées sur la fiche 21 à la page 113. Les élèves doivent compléter à la fois les dessins et les calculs.

Ajoute la réglette manquante. Complète le calcul pour qu'il soit correct.

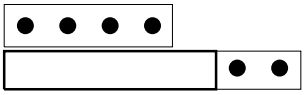
Voici les exemples proposés sur cette fiche 21.



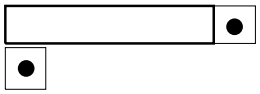
4+. . .=9



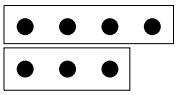
8=. . .+2



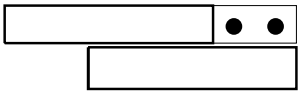
4+. . .=7



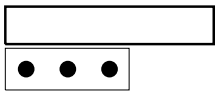
6=1+. . .



4=3+. . .



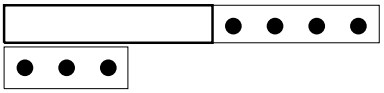
7=. . .+5



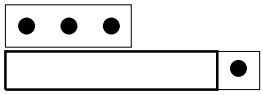
5=3+. . .



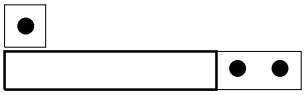
6+3=. . .



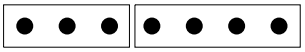
9=3+. . .



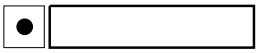
3+. . .=6



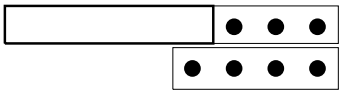
1+. . .=7



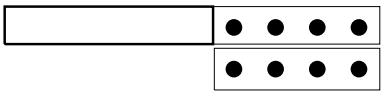
3+4=. . .



1+5=. . .



8=. . .+4



9=. . .+4

Enfin, les élèves reçoivent la fiche 22 à la page 114, qui comporte uniquement des opérations à compléter.

Complète pour obtenir une égalité.

Voici les exemples proposés sur la fiche 22.

$7 = 4 + \ldots$	$5 = 2 + \ldots$	$3 + 1 = \ldots$
$\cdots + 4 = 6$	$\cdots = 4 + 2$	$5 + \cdots = 8$
$9 = \cdots + 2$	$6 + 3 = \ldots$	$\cdots + 2 = 4$
$\cdots = 5 + 4$	$6 + \cdots = 7$	$8 = \cdots + 3$
$5 = 4 + \ldots$	$7 + 1 = \ldots$	$\cdots + 1 = 2$

$\cdots = 3 + 5$	$1 + \cdots = 3$	$7 = \cdots + 5$
$8 = 4 + \ldots$	$5 + 2 = \ldots$	$\cdots + 3 = 4$
$\cdots = 5 + 2$	$4 + \cdots = 5$	$9 = \cdots + 4$
$8 = 1 + \ldots$	$2 + 6 = \ldots$	$\cdots + 6 = 9$
$\cdots = 2 + 2$	$4 + \cdots = 8$	$7 = \cdots + 1$

Cette dernière fiche peut être considérée comme une évaluation des activités. L'enseignant peut bien entendu adapter les exercices proposés au niveau de sa classe tout en présentant sur chacune des fiches des exemples qui reprennent les différentes sortes d'égalités. Le même type de travail peut ensuite être effectué avec les soustractions.

Prolongements possibles

Des activités comportant plusieurs termes de chaque côté du signe = peuvent être proposées aux élèves, par exemple, $2 + 5 = 4 + 3$. Dans un premier temps, il est possible de placer la réglette qui correspond à la somme au milieu comme sur la figure 14, puis, enlever celle-ci pour ne conserver que les termes de l'égalité comme sur la figure 15.

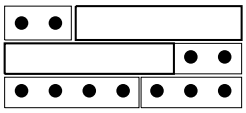


Fig. 14

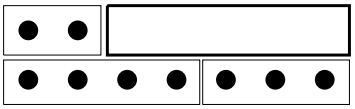


Fig. 15

Il est également possible de travailler les inégalités puisqu'en plaçant les réglettes, on voit immédiatement que, par exemple, $4 + 3$ est plus grand que $5 + 1$.

Chapitre 2

Le passage de rang.

Préambule

Pour bien maîtriser l'univers des nombres, il est nécessaire d'acquérir une bonne connaissance des mécanismes de la numération décimale de position. À cet égard, la multiplication des approches en permet une meilleure compréhension.

C'est dans cette optique que nous proposons, pour les enfants de huit à dix ans, des activités avec des compteurs numériques et des bouliers.

1 Les machines à compter

Les compteurs numériques font partie de notre quotidien. Nous les rencontrons aussi bien à la maison (compteurs d'eau, d'électricité, ...), que sur la route (compteurs kilométriques de voiture ou de vélo) ou encore dans le cadre du travail (photocopieuses, ...).

De quoi s'agit-il ?

Observer le fonctionnement de compteurs numériques.

Fabriquer une machine à compter.

Utiliser les compteurs dans des situations de comptage.

Enjeux

Approfondir la compréhension du passage d'un rang à un autre dans la numération décimale de position.

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

Agir et interagir sur des matériels divers.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Classer (situer, ordonner, comparer).

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 23 à 26 situées en annexe aux pages 115 à 118.

Des bandelettes de papier portant les chiffres de 0 à 9 (fiche 24), d'autres bandelettes « inappropriées » (comme par exemple celles de la fiche 25), du carton fort, du papier adhésif, une plastifieuse, de la colle.

Des compteurs numériques (compteurs de photocopieuse, de vélo, de curvimètre, ...)

Prérequis

Pouvoir compter oralement, lire et écrire des nombres jusqu'à 100.

Pouvoir additionner et soustraire un nombre inférieur à 10 à un autre nombre de deux chiffres.

1.1 Observation

Pour cette partie de l'activité, il est nécessaire de se munir de compteurs numériques, comme celui d'un curvimètre, de la photocopieuse ou encore d'un vélo. D'autres conviennent également, pour autant que leur utilisation soit possible à l'école. Dans ce qui va suivre, nous avons choisi d'avoir recours au curvimètre – parfois appelé odomètre ou podomètre. Il en existe différents modèles à usage scolaire, dont le compteur peut être réinitialisé quand on le désire. Ici, le compteur avance de 1 par tour de roue, ce qui correspond à un mètre.

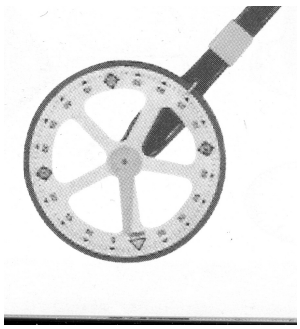


Fig. 16

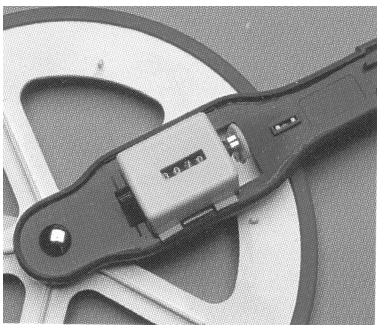


Fig. 17

L'essentiel de cette partie de l'activité se déroule oralement. Il est en effet primordial d'amener les enfants à verbaliser leurs observations. Pour cela, l'enseignant relancera autant de fois que nécessaire la discussion par des questions opportunes.

Comment s'y prendre ?

On décide de mesurer, à l'aide de l'appareil, une distance déterminée par l'enseignant comme par exemple, la longueur de la cour de récréation. Idéalement, on choisit une distance supérieure à 10 mètres – 10 tours de roue – pour donner aux élèves l'occasion d'observer le changement de rang au compteur.

Que se passe-t-il quand on fait rouler l'appareil ?

Les enfants remarquent qu'à chaque tour de roue, le compteur augmente de 1. Par de petites questions orales, on les amène à effectuer des opérations qu'ils vérifient à l'aide de l'instrument.

Voici deux exemples de questions possibles.

« Nous avons parcouru treize mètres. Quelle distance indiquera le compteur si la roue tourne encore cinq fois ? »

« Nous avons parcouru huit mètres. Qu'indiquera le compteur si la roue tourne encore six fois ? »

Les situations de ce type sont multipliées pour permettre aux enfants d'appréhender le fonctionnement du compteur.

On peut également les amener à effectuer quelques soustractions, par des questions simples comme celle qui suit.

« Sur le compteur, nous lisons 25 mètres. Et si la roue avait fait sept tours de moins, qu'aurait indiqué le compteur ? »

Dans cette première phase, on se limite à la lecture du cadran et à quelques questions pour familiariser les enfants avec l'appareil. L'analyse des mécanismes du compteur vient après.

1.2 Et si nous fabriquions notre propre machine à compter ?

L'activité est prévue pour se dérouler en groupes. Toutefois, on peut aussi la proposer individuellement. On peut favoriser l'autonomie des enfants en les laissant se débrouiller seuls pour créer leur compteur, mais on peut gagner du temps en préparant le matériel nécessaire à sa fabrication. C'est l'option que nous décrivons ci-après.

Le matériel (fiches 23 à 25) est disposé sur la table de travail. Nous y avons inséré quelques éléments inutiles ou inappropriés, tels que des bandelettes numérotées de 1 à 10 ou d'autres sur lesquelles il manque des chiffres, afin que les élèves développent un certain esprit critique. On leur signale, dans les consignes, qu'ils ne sont pas obligés de tout utiliser.

Comment s'y prendre ?

> À l'aide du matériel mis à votre disposition, essayez de fabriquer une machine à compter.

L'enseignant aura préalablement découpé les entailles dans le morceau de carton fort afin d'éviter la manipulation du cutter. Il pourrait aussi avoir plastifié les bandelettes pour les rendre plus solides.

Les élèves discutent entre eux et effectuent diverses tentatives. On les laisse procéder par essais et erreurs.

D'abord, ils prennent le carton avec les ouvertures en haut et en bas.

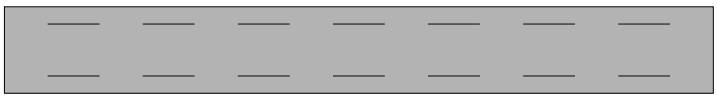


Fig. 18

Ensuite, ils choisissent les bonnes bandelettes (figure 19) – attention à ne pas, par exemple, refuser la bandelette commençant par 2 et se terminant par 1 (figure 20). Si les élèves n'utilisent pas cette dernière bandelette, il nous semble intéressant de leur faire remarquer qu'elle convient également lorsqu'on colle ses deux bouts.

Ils font alors passer les bandelettes par les ouvertures (figure 21), puis collent les bouts de chaque bandelette pour qu'elles puissent tourner (figure 22).



Fig. 19



Fig. 20

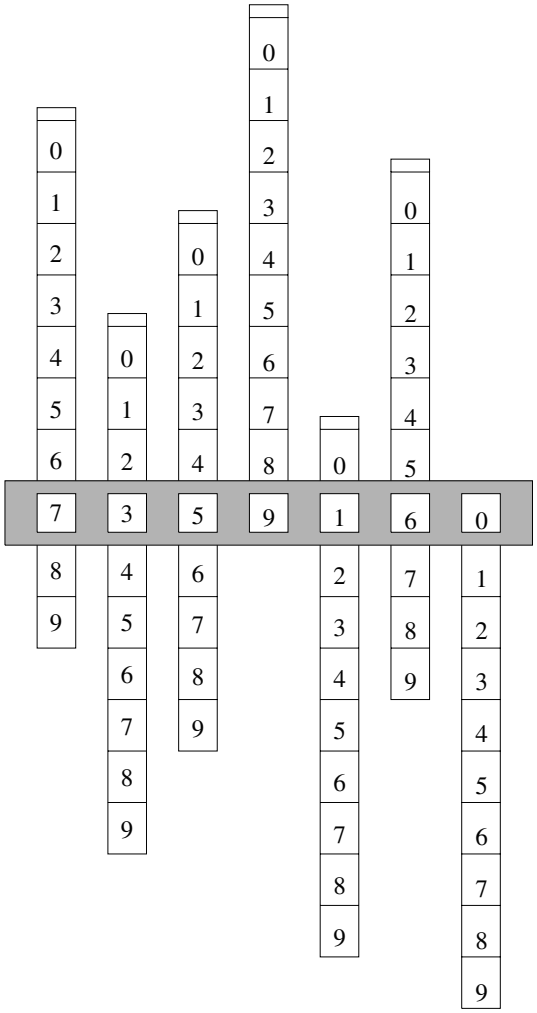


Fig. 21

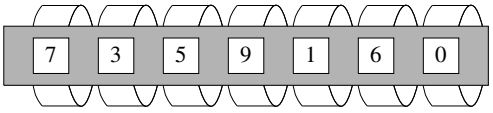


Fig. 22

Pour des enfants de cet âge, on aurait pu se contenter d'un compteur à quatre rangs. On a cependant décidé d'en construire un à sept rangs afin de pouvoir encore l'utiliser lorsque l'on travaillera avec de plus grands nombres.

Chaque groupe présente le compteur qu'il a fabriqué. On vérifie ensemble que les différentes machines sont correctement assemblées. Dans le cas où des élèves ne trouvent pas un montage adéquat, les remarques des autres devraient suffire à les mettre sur la voie. En dernier recours,

l'enseignant les amène à une solution correcte. Les groupes fabriquent plusieurs machines afin que chacun dispose de son propre compteur. Cette activité peut se réaliser au cours de bricolage.

1.3 Jouons avec nos compteurs !

Comment s'y prendre ?

Pour commencer, on peut laisser les élèves jouer librement avec leur compteur (individuellement ou par deux). Ensuite, ils les utilisent dans des jeux oraux de difficulté croissante. Le nombre d'exemples à proposer, ainsi que la gradation des exercices sont laissés à la discrétion de l'enseignant qui adapte ces modalités à sa classe.

> Place les nombres que je cite sur ta machine.

Dans un premier temps, on propose des situations relativement simples avec des nombres connus. Suivant le niveau de la classe, ces nombres peuvent comporter deux, trois ou quatre chiffres comme par exemple 28, 354 ou encore 2 678. On peut ensuite fournir d'autres nombres qui comportent plus de chiffres (par exemple 25 417).

Le but est de familiariser les élèves avec leur machine et de les amener à passer de l'expression orale d'un nombre à sa représentation écrite. On vérifie ainsi si le passage de l'oral à l'écrit se déroule correctement.

Un problème qui pourrait surgir est que certains enfants placent les nombres n'importe où et non pas à la droite du compteur, comme attendu par l'enseignant. Dans ce cas, ce dernier veillera à ajuster les représentations des élèves en leur signalant que les unités sont toujours placées dans la colonne la plus à droite et il insistera sur la signification des zéros (inutiles) situés à la gauche des nombres placés.

> Place sur ta machine le nombre que je cite, puis affiche le nombre qui suit – ou qui précède.

Au départ, on évite les nombres qui se terminent par 0 ou 9 afin de ne pas aborder d'emblée le problème du passage de rang. Les élèves sont vite convaincus que tourner la roue d'une case dans un sens ajoute un, et que la tourner d'une case dans l'autre sens enlève un.

On complique alors la situation en proposant des nombres qui entraînent un passage de dizaine (par exemple 9, 39, 489, 5 120), de centaine (par exemple 99, 899, 3 499, 78 100), ou d'autres rangs.

À ce moment, l'enseignant demande aux enfants d'exprimer ce qu'ils font réellement sur leur machine. Pour cela, il pose des questions telles que

≪ Qu'as-tu fait sur ta machine pour passer de 39 à 40 (par exemple) ? ≫

≪ Pourquoi tournes-tu aussi la deuxième roue ? ≫

≪ À quoi correspond le 4 du nombre 40 ? ≫

≪ . . . ≫

Ce travail a pour but d'expliquer les changements de rang et se déroule évidemment pas à pas. L'enseignant cherche d'abord à faire comprendre le changement de dizaine et ce n'est que lorsque ce dernier est bien assimilé qu'il passe au changement de centaine.

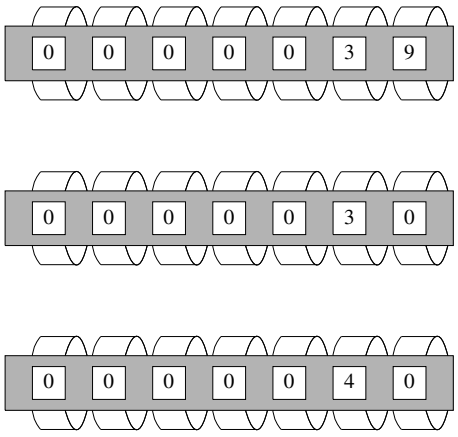


Fig. 23

Pour passer de 39 à 40, l'élève veut augmenter 39 de 1. Il avance la roue des unités d'une case. Cela amène 30. Il a bien avancé d'une case, mais la machine affiche 9 de moins que le 39 initial. Il doit alors faire avancer la roue des dizaines d'une case et ajoute donc 10. La machine affiche 40. Nous constatons donc que lorsqu'il y a un changement de rang, le compteur enlève 9 et ajoute 10 ; cela équivaut bien à augmenter de 1.

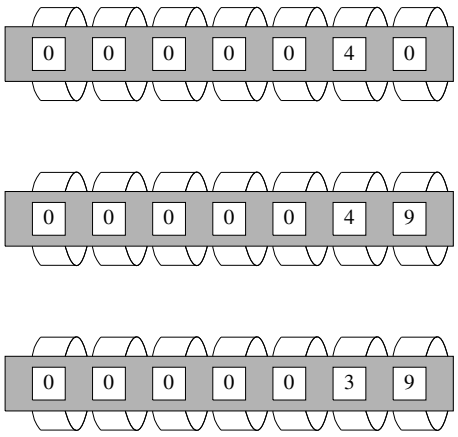


Fig. 24

Un raisonnement similaire peut être tenu pour passer de 40 à 39. L'élève veut diminuer 40 de 1. Il recule la roue des unités d'une case. Cela amène 49. Il a bien reculé d'une case, mais la machine affiche 9 de plus que le 40 initial. Il doit alors faire reculer la roue des dizaines d'une case. Il retire donc 10. La machine affiche 39. Nous constatons donc ici que le compteur ajoute 9 et retire 10 ; ce qui équivaut bien à diminuer de 1.

Échos des classes

Les expérimentations relatives à l'activité sur les compteurs numériques se sont déroulées dans des classes de troisième et quatrième primaire à raison de deux séances d'une heure. La première séance a été consacrée à l'observation du fonctionnement du curvimètre et à la fabrication des compteurs, la seconde à l'utilisation de ces derniers par les élèves.

Lors du travail avec le curvimètre, les enfants étaient très attentifs. Ils ont rapidement constaté que le compteur augmentait de un à chaque tour de roue. Ils ont eu des difficultés à répondre aux questions qui nécessitaient des changements de rang. Ainsi, quelques enfants ont employé leurs doigts pour ajouter six à huit.

La fabrication des compteurs a été l'occasion de nombreux échanges entre élèves. Ces discussions ont permis de résoudre les légers problèmes engendrés par la présence des bandelettes inappropriées. Pour se convaincre de la validité de la bandelette commençant par deux et se terminant par un, il a été nécessaire de la coller et de la faire tourner.

Le simple placement des nombres sur les compteurs a été parfaitement effectué par les enfants. Ils ont tous placé les unités dans la colonne la plus à droite. Un élève a même fait remarquer que « les zéros situés devant le nombre ne servent à rien et on peut les retirer si on veut ».

L'ajout d'une unité à un nombre n'a pas posé de problème lors de la manipulation sur les compteurs. Les élèves ont cependant éprouvé des difficultés à exprimer les actions qu'ils avaient effectuées lorsqu'il y avait un passage de rang. Pour surmonter cet obstacle, les questions posées par l'enseignant se sont avérées essentielles. Grâce à ce travail de questions-réponses, les enfants sont parvenus, après cinq ou six nombres, à exprimer correctement leurs actions. Le retrait d'une unité a immédiatement été mieux expliqué par les élèves suite au travail préalable sur les additions.

Certains enseignants d'autres niveaux ont également essayé d'adapter l'activité avec les compteurs dans leurs classes. C'est ainsi qu'ils les ont employés avec succès au degré supérieur pour travailler les nombres décimaux non entiers.

Prolongements possibles

D'autres exercices peuvent également être proposés. Nous ne les détaillons pas, mais nous en fournissons une liste non exhaustive.

Proposer les exercices précédents en incluant des nombres qui contiennent des zéros.

À partir d'un nombre donné, afficher les dix – ou plus – nombres suivants.

Trouver tous les affichages entre deux nombres donnés.

Compter de dix en dix, de cent en cent, à partir d'un nombre donné. Dans ce cas, une ou plusieurs roues restent immobiles.

Dire ce qui se passe lorsque l'enseignant bouge une seule languette – par exemple lorsque le compteur passe de 789 à 889.

Il peut également être intéressant de disposer d'un compteur à engrenages pour en montrer le fonctionnement aux élèves. Ce compteur pourrait ressembler à celui de la figure 25.

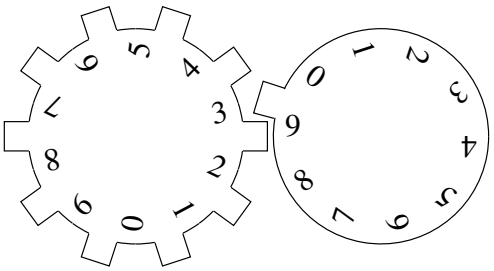


Fig. 25

Ce modèle de compteur figure sur la fiche 26 à la page 118.

Une activité de fabrication d'un odomètre est décrite dans la recherche 090SG réalisée par Dieudonné Leclercq et al. à l'Université de Liège et intitulée *Mise au point d'outils didactiques pour le cours d'éducation par la technologie*. Il est possible de télécharger cette activité sur le site officiel de la Communauté française[1].

[1] `http://www.enseignement.be/prof/dossiers/recheduc/recheduc-liste.asp`
Introduire le mot clé « leclercq » dans la fenêtre prévue à cet effet.

2 Les bouliers

De quoi s'agit-il ?

Fabriquer un boulier.

Représenter des nombres sur un boulier.

Effectuer des additions et des soustractions sur un boulier.

Enjeux

Appréhender les passages de rang dans l'addition et la soustraction à l'aide du boulier.

Effectuer les groupements par 10 et les échanges : 10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, 10 centaines = 1 millier, ...

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

Agir et interagir sur des matériels divers.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Présenter des stratégies qui conduisent à une solution.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des bouliers ou le matériel pour en fabriquer soi-même, c'est-à-dire des piques à brochettes en bois, des perles de trois couleurs différentes, une boîte à cigares (ou une autre boîte de même type) et de la colle.

Les fiches 27 à 31 aux pages 119 à 123.

Prérequis

Pouvoir compter oralement, lire et écrire des nombres jusqu'à 100.

Les notions d'unité, de dizaine, ...

Les tables d'addition et de soustraction de 1 à 9.

La décomposition d'une opération en plusieurs étapes (par exemple, $21-5 = 21-1-4$).

2.1 Quelques types de bouliers

Le boulier est un instrument qui sert à effectuer des opérations arithmétiques (additions, soustractions, multiplications, divisions, extractions de racines carrées ou cubiques) sur des nombres rationnels limités. Il existe plusieurs types de bouliers, notamment les bouliers chinois, japonais et russe qui sont toujours utilisés actuellement.

Le boulier chinois, appelé *suan-pan*, remonte aux environs du XIIIe siècle de notre ère. Déposons ce boulier à plat sur une table, comme illustré à la figure 26. Il possède des tiges – dont le nombre peut varier – sur lesquelles sont enfilées sept boules. Cinq de ces boules se trouvent en dessous d'une barre horizontale et valent chacune 1, ce sont les boules unaires. Les deux autres se situent au-dessus de cette barre et valent chacune 5, ce sont les boules quinaires.

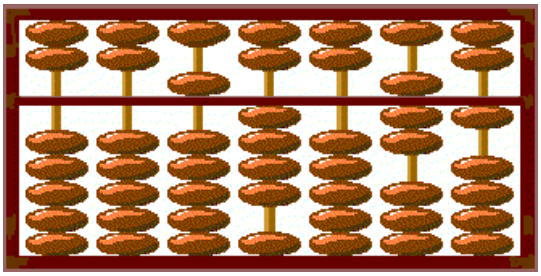


Fig. 26

Selon MARTZLOFF [108], le système aurait été conçu à l'origine pour faciliter la manipulation des unités de poids appelées *jin* (livres) et *liang* (onces). En fait, 1 *jin* vaut 16 *liang* ; ainsi, puisqu'on ne peut marquer que 15 unités par tige, c'est comme si l'inventeur du boulier avait voulu travailler en base 16. Bien entendu, l'appareil peut être utilisé pour effectuer d'autres calculs que ces conversions de *jin* en *liang*.

Pour le calcul en système décimal, l'unaire du bas et la quinaire du haut ne sont pas nécessairement activées.

L'instrument était employé par les commerçants, les comptables, les banquiers, les hôteliers, les mathématiciens, les astronomes. À l'heure actuelle, une partie de la population chinoise y a toujours recours ; il est également encore utilisé en Inde.

Le boulier japonais, appelé *soroban* est d'origine chinoise (figure 27). Il fut introduit au Japon au cours du XVIe siècle. Sa forme actuelle a été adoptée vers 1930. Il ressemble très fort au boulier chinois, mais on lui a enlevé les deux boules devenues inutiles.

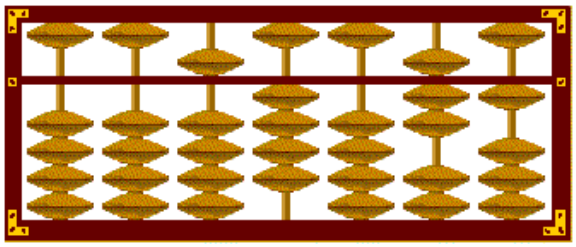


Fig. 27

Les Japonais considèrent le boulier comme le principal instrument de calcul courant. C'est un outil indispensable pour les écoliers, les commerçants, les fonctionnaires. Au Japon, près de 30 000 écoles spécialisées enseignent le calcul avec le soroban. Comme au judo, on se présente à des examens de qualification. Il y a six degrés et dix *dans*. Chaque année, en Asie, s'organisent des olympiades de calcul avec le soroban auxquelles participent plus de trois cents personnes venant de douze pays différents. L'art du soroban consiste à effectuer des calculs très rapidement en déplaçant le moins possible de boules. Même si les calculatrices commencent à gagner du terrain, de nombreux fabricants y associent un petit boulier pour effectuer une ultime vérification.

Le boulier russe, appelé *stchioty*, se compose de colonnes de dix boules chacune (figure 28). Ce boulier présente deux ou trois boules noires par colonne. Ces boules noires ne sont que des repères. Elles permettent d'estimer très vite combien de boules sont rangées à l'une des extrémités d'une colonne.

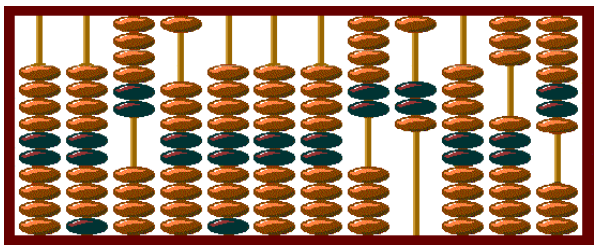


Fig. 28

Les boules noires situées en bas des colonnes indiquent les rangs des milliers et des millions. On remarque qu'une des colonnes ne comporte que quatre boules. Elle sépare la partie entière d'un nombre de sa partie décimale. Cette colonne est parfois aussi employée pour calculer avec des quarts ou des demis. Ce type de boulier est encore utilisé dans certains hôtels, quelques banques et des grandes surfaces russes.

En Europe, jusqu'au XIXe siècle, et parfois après, on avait souvent recours au boulier dans les écoles pour apprendre à calculer.

Aujourd'hui encore, le boulier est un outil pédagogique utile dans certaines classes du primaire pour maîtriser la numération et le calcul. En effet, représenter un nombre sur un boulier, c'est déjà l'écrire en numération décimale de position. Le boulier est aussi employé pour venir en aide à des élèves en difficulté. Il demande peu de connaissances préalables puisque pour effectuer des opérations sur les bouliers, il suffit de connaître les tables d'addition et de multiplication de 1 à 9.

2.2 Fabriquer un boulier

Comment s'y prendre ?

Il convient tout d'abord de choisir le type de boulier que l'on va employer. Nous pensons que le boulier russe – ou un boulier lui ressemblant – est le plus approprié, car il ne demande aucun échange intermédiaire de cinq boules contre une autre. Toutefois, les bouliers chinois ou japonais conviennent également. On trouve assez facilement des bouliers dans le commerce à des prix relativement peu élevés[2], mais, si le coût semble trop important, on peut fabriquer un boulier à partir d'une boîte à cigares.

On retire d'abord le couvercle de la boîte à cigares ainsi que ses charnières, puis la paroi du haut (figure 29).

[2]Chez Nathan, Viroux, Maxi Toys,...

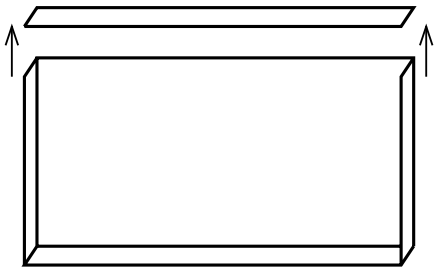


Fig. 29

On pratique ensuite des trous à intervalles réguliers dans la paroi du bas et dans celle du haut. Ces orifices doivent bien entendu se trouver les uns en face des autres (figure 30).

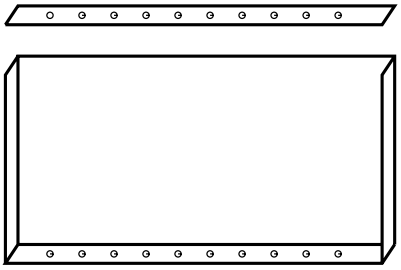


Fig. 30

On colle les piques à brochettes dans les ouvertures de la partie inférieure. On place dix perles sur chacune des piques en respectant les différences de couleurs indiquées à la figure 31, puis on replace la partie supérieure en veillant à coller l'autre bout des piques dans les ouvertures. Le boulier est ainsi terminé et on peut commencer à l'utiliser.

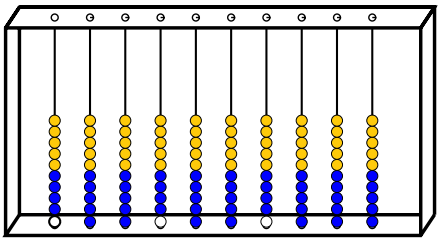


Fig. 31

Dans l'activité présentée ci-après, on utilise des bouliers de ce type : ils comportent par colonne, cinq boules d'une couleur et cinq d'une autre afin de marquer un repère pour 5, ce qui devrait faciliter la lecture des nombres par les élèves. La perception immédiate d'un groupe de cinq boules évite de les compter une à une lorsqu'il y en a plus que cinq. En partant de la droite, la bille du bas des 4e, 7e et 10e colonne est également de couleur différente afin de fournir un repère pour les milliers, les millions et les milliards.

Les élèves se familiarisent avec leur boulier pendant une durée assez réduite (4 à 5 minutes). À la fin de cette prise de contact, ils énoncent leurs observations. L'enseignant n'intervient pas immédiatement si des erreurs apparaissent. Les explications viendront au moment de l'apprentissage proprement dit.

Chez les Orientaux, il existe une technique permettant une manipulation rapide des boules. Il ne nous semble cependant pas opportun de l'enseigner aux enfants puisque notre but n'est pas de leur faire acquérir une dextérité hors pair sur le boulier, mais bien d'en comprendre le fonctionnement.

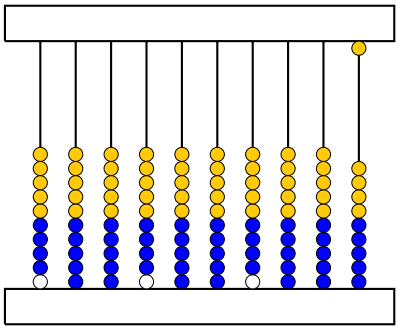
2.3 Reconnaître et représenter des nombres

Comment s'y prendre ?

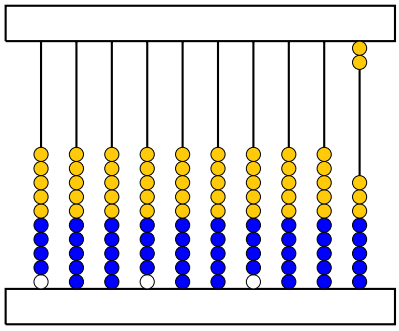
Dans un premier temps, il importe de repérer les valeurs des différentes boules, selon la colonne qu'elles occupent. Pour cela, nous proposons une activité sur papier qui fait correspondre un nombre à sa représentation sur le boulier.

> Quelle est la valeur des boules de la première tige (à droite), de la deuxième tige, ... ?

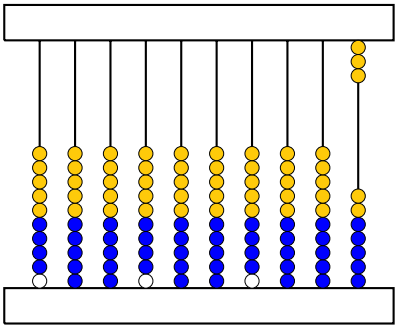
Voici les exemples proposés sur les fiches 27 et 28 aux pages 119 et 120.



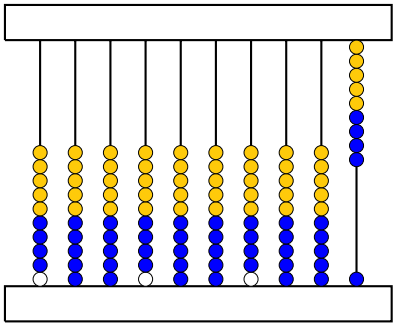
1



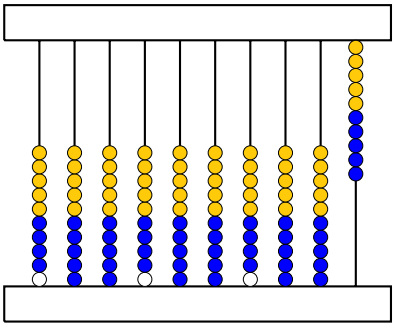
2



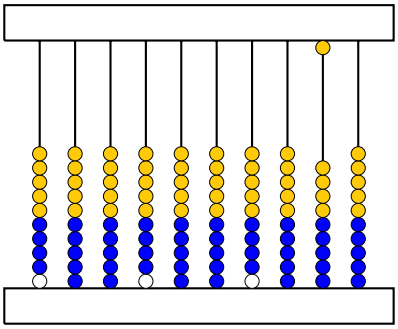
3



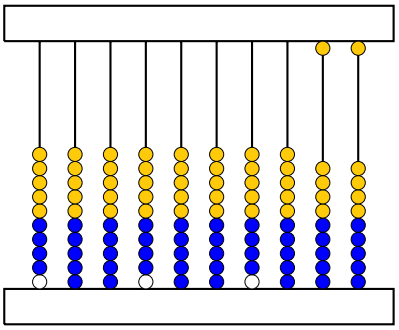
9



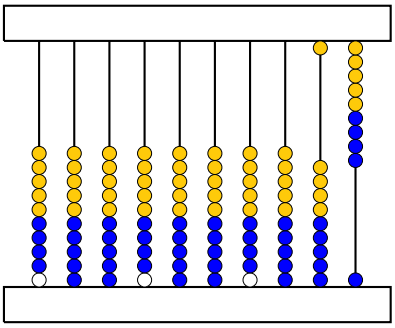
10



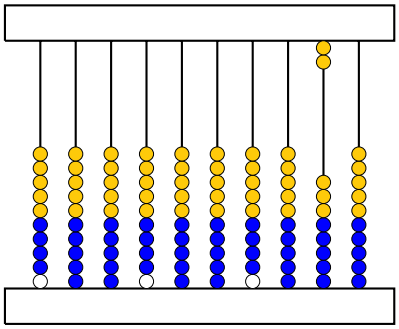
10



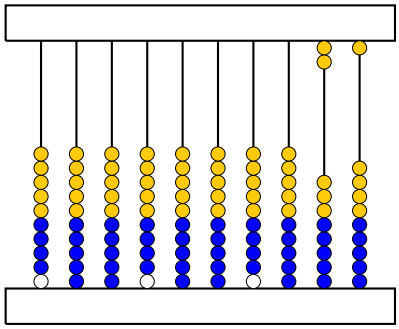
11



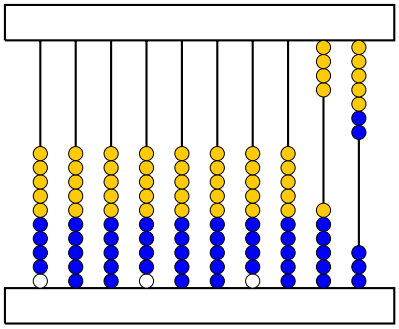
19



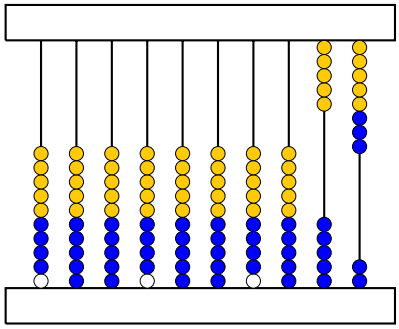
20



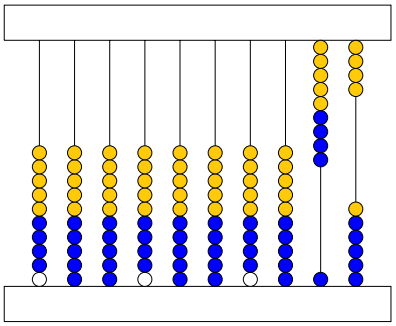
21



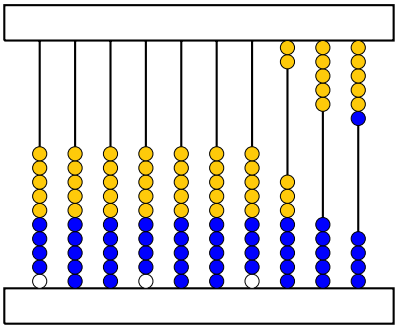
47



58

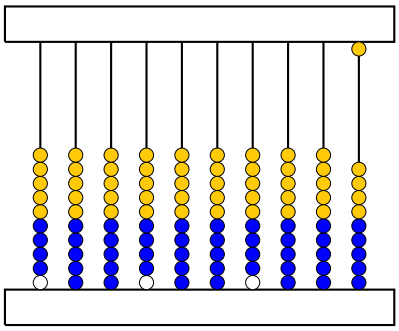


94

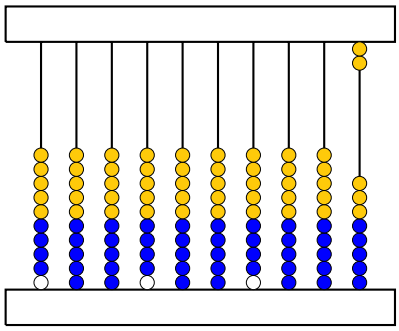


256

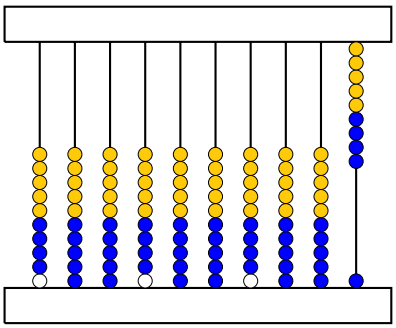
Suivant le niveau de la classe, l'enseignant peut également utiliser les fiches 29 et 30 aux pages 121 et 122 qui comportent aussi des nombres de quatre chiffres.



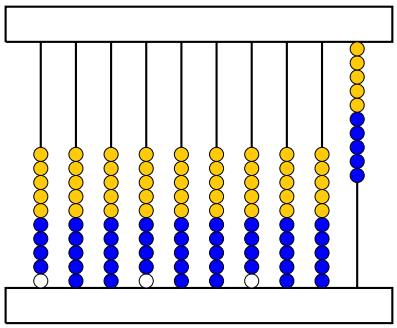
1



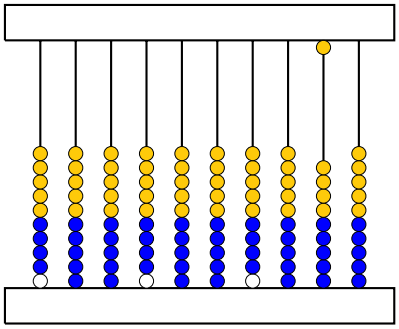
2



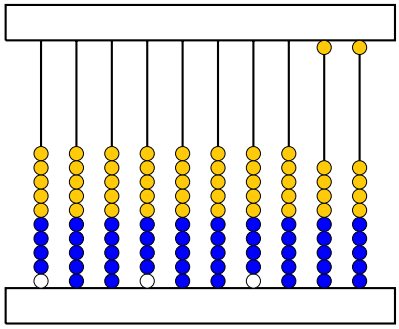
9



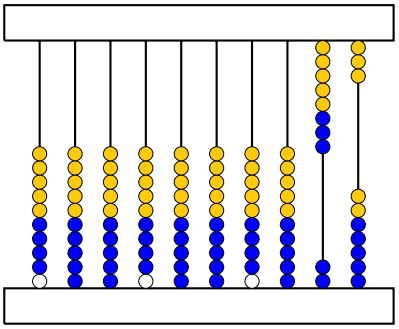
10



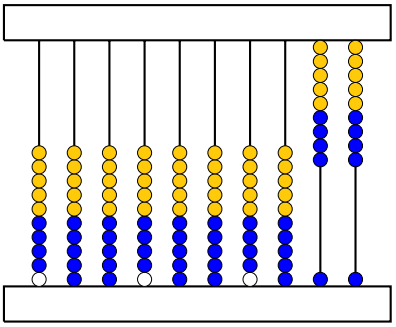
10



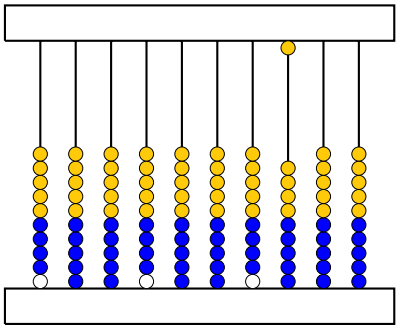
11



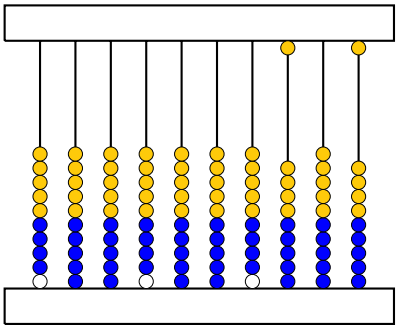
83



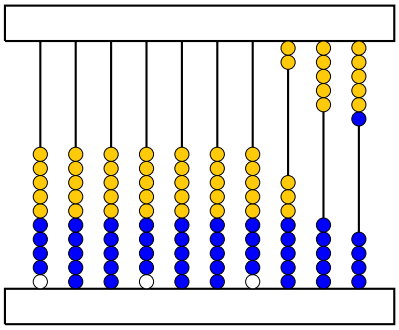
99



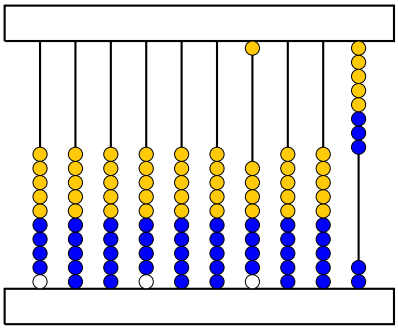
100



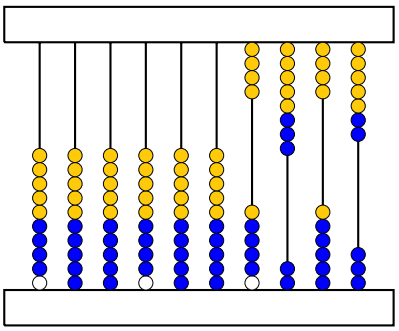
101



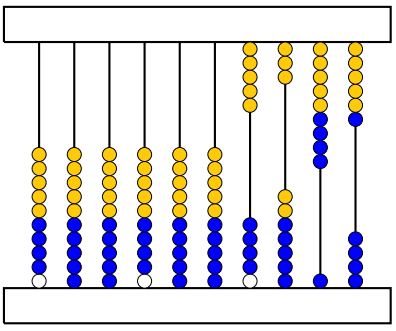
256



1 008



4 847



5 396

Suite à ces observations, les élèves arrivent à la conclusion que chaque boule située sur la tige la plus à droite vaut une unité, celles de la tige suivante correspondent chacune à une dizaine et ainsi de suite.

Le nombre 10 est représenté des deux manières possibles. On en profite alors pour bien expliquer aux élèves le passage d'une configuration à l'autre.

L'enseignant propose ensuite des nombres adaptés au niveau de sa classe. Les élèves doivent placer ces nombres sur leur boulier. Les exemples sont suffisamment nombreux pour qu'ils s'habituent à la manipulation de l'instrument.

Ensuite, ils reçoivent une fiche sur laquelle divers nombres sont représentés sur des bouliers. Ils inscrivent la valeur de ces nombres en dessous des bouliers. La fiche 31 à la page 123, qui comporte des bouliers sans boules, permettra à l'enseignant de réaliser lui-même des fiches de travail en fonction du niveau de sa classe.

2.4 Effectuer des opérations

Lorsqu'une maîtrise suffisante de la représentation des nombres sur un boulier est acquise, l'enseignant aborde les additions et, dans un second temps, les soustractions.

Comment s'y prendre ?

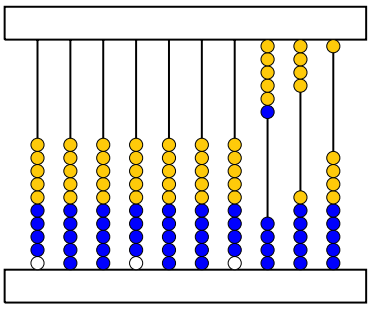
L'usage traditionnel du boulier veut qu'on commence à effectuer les opérations à partir de la gauche et non de la droite comme dans le calcul écrit. Ici, nous effectuons les opérations à partir de la droite, puisque le recours au boulier se fait dans un but pédagogique et qu'il n'y a donc pas lieu de perturber les habitudes des enfants. Les nombres proposés sont purement indicatifs, les enseignants choisiront des opérations qui correspondent au niveau de leur classe.

Effectue les opérations proposées.

Addition

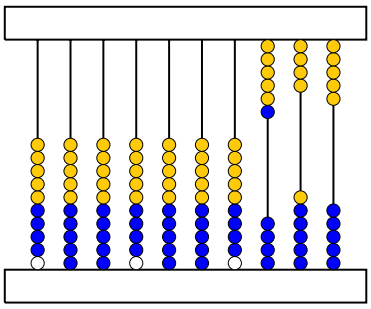
L'activité débute par des additions dont le deuxième terme comporte un seul chiffre. Les opérations ne nécessitent aucun passage de rang. Les élèves réalisent les calculs individuellement et expliquent les mouvements qu'ils ont effectués sur le boulier : d'abord, placer le premier nombre sur le boulier, puis, déplacer vers le haut le nombre de boules correspondant au deuxième nombre. Ainsi, pour additionner 6 à 82, on place d'abord le nombre 82, puis, on déplace 6 billes de la colonne des unités vers le haut, ce qui donne 88.

Lorsque le mécanisme est bien en place, on propose des additions dont les termes comportent tous plusieurs chiffres – toujours sans passage de rang. Ici aussi, les élèves réalisent les mouvements individuellement, puis, expliquent la méthode utilisée, qui ne diffère pas de celle des calculs précédents. Additionnons 234 à 641.



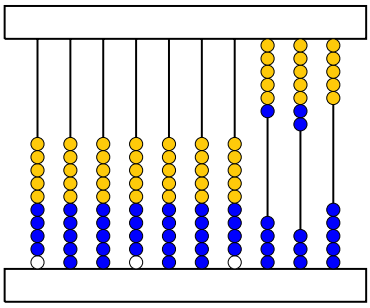
641

Les élèves placent d'abord 641 sur le boulier.



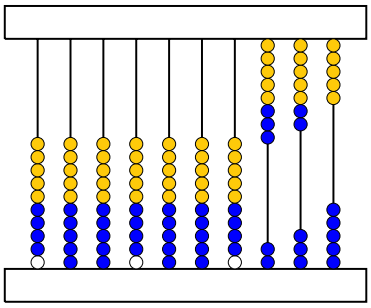
645

Ensuite, ils déplacent 4 boules de la colonne des unités vers le haut.



675

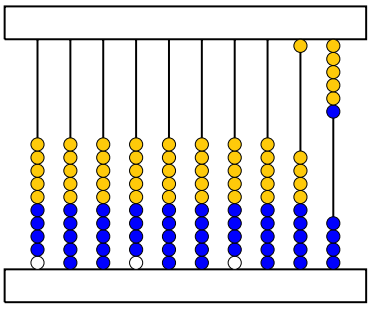
Puis, 3 boules de la colonne des dizaines.



875

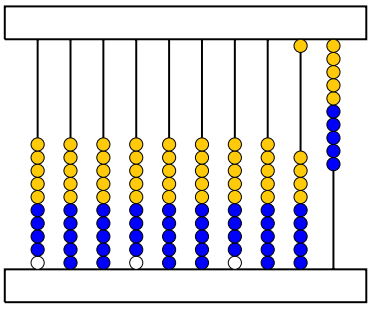
Enfin, 2 boules de la colonne des centaines.

Il reste à poursuivre l'apprentissage en proposant des additions comportant un passage de rang. Les élèves essaient de réaliser seuls une opération qui leur est proposée : d'abord, sur des nombres assez petits pour bien fixer le mécanisme du passage, par exemple $16 + 8$. On analyse alors les manipulations réalisées pour effectuer ce calcul.



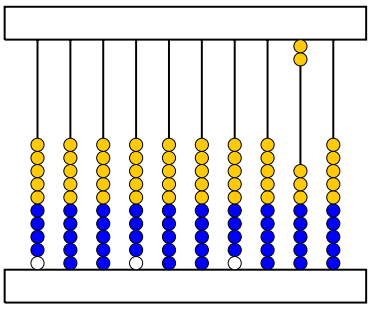
16

Comme précédemment, on place d'abord le premier nombre sur le boulier, en l'occurrence 16.



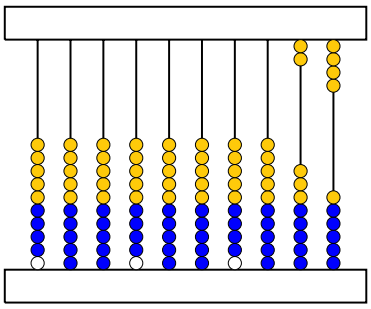
20

Ensuite, on commence par ajouter les 4 unités encore disponibles sur la tige des unités. Nous avons alors 1 dizaine et 10 unités.



20

Il reste encore 4 unités à ajouter. On transforme alors les dix unités en une dizaine. Nous avons donc 2 dizaines.



24

On dispose à nouveau de toutes les boules unités et on peut ajouter les 4 unités, ce qui donne 24.

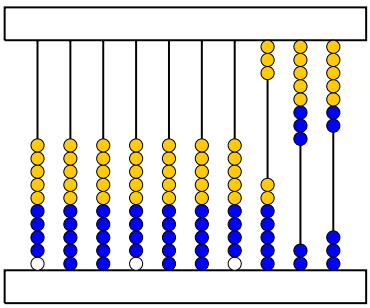
Nous avons décrit une manière de procéder sur le boulier. Toutefois, il convient de ne pas brider l'imagination des élèves qui choisiraient une autre méthode correcte en utilisant des techniques efficaces de calcul mental telles que celles indiquées ci-dessous.

Pour effectuer $28 + 5$, nous pouvons réaliser $28 + 2 + 3$,

$28 + 10 - 5$,

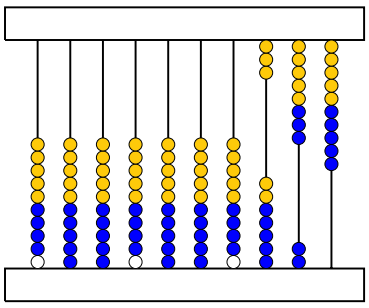
ou encore $20 + (8 + 5)$.

On poursuit ces manipulations jusqu'à l'acquisition de la « technique » du passage de rang, les termes de l'addition pouvant, bien entendu, devenir de plus en plus grands. On aborde ensuite des opérations qui nécessitent plusieurs passages de rang, en appliquant la même méthode de travail. Voici une façon d'effectuer l'opération $387 + 274$.



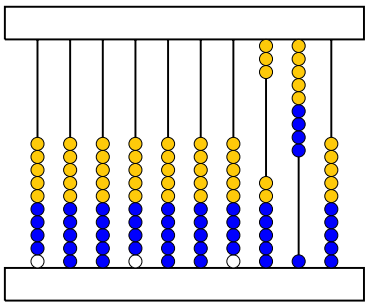
387

Les élèves placent d'abord 387 sur le boulier.



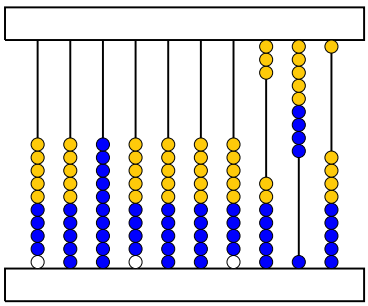
390

Ensuite, ils déplacent 3 boules de la colonne des unités vers le haut.



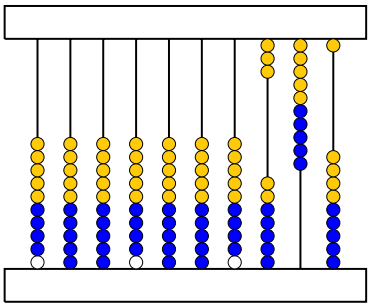
390

Ils transforment les 10 unités en une dizaine.



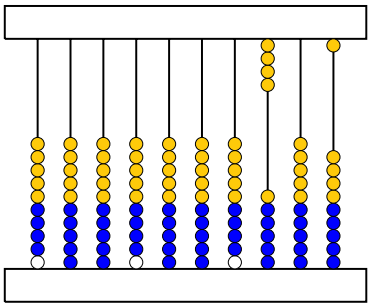
391

Ils ajoutent l'unité qu'il reste à ajouter.



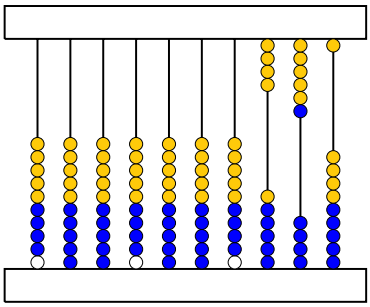
401

Ils ajoutent ensuite 1 boule dans la colonne des dizaines.



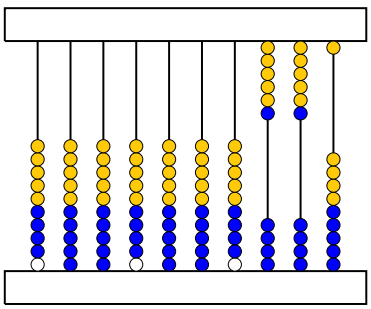
401

Ils transforment les 10 dizaines en une centaine.



461

Ils ajoutent les 6 dizaines qu'il reste à ajouter.



661

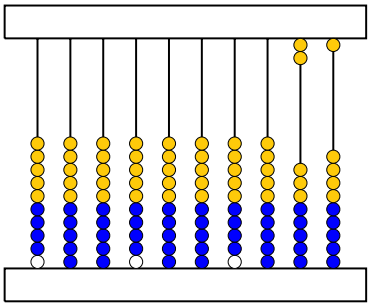
Enfin, ils ajoutent les 2 centaines qu'il reste à comptabiliser et obtiennent 661.

Les élèves réaliseront suffisamment d'exercices pour acquérir une certaine maîtrise du passage de rang et aborderont ensuite la soustraction.

Soustraction

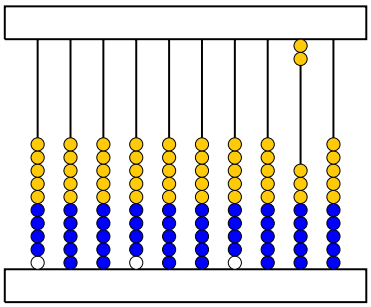
On va d'abord opérer une soustraction d'un nombre d'un seul chiffre qui n'occasionne pas de changement de rang. On procède d'une manière analogue à celle utilisée pour l'addition : résolution individuelle par les élèves, explication des mouvements effectués sur le boulier. Ainsi, pour soustraire 4 de 67, ils placent d'abord le nombre 67 sur le boulier ; puis, ils déplacent 4 billes de la colonne des unités vers le bas, ce qui donne 63. Par la suite, on propose des soustractions dont les termes comportent plusieurs chiffres, mais toujours sans changement de rang. Le mécanisme de déplacement des boules lors des soustractions devrait s'acquérir assez rapidement puisque la seule variante par rapport aux additions est le sens du déplacement.

Ensuite, les soustractions proposées comportent un passage de rang. Les élèves essaient d'effectuer seuls une première opération sur des nombres assez petits, par exemple $21 - 5$. Ensuite, on analyse les manipulations réalisées.



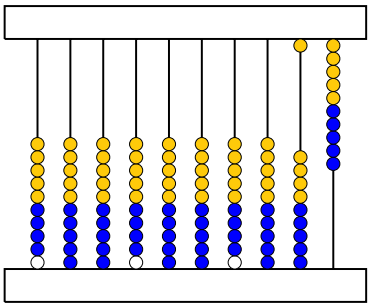
21

On place d'abord le premier nombre sur le boulier, en l'occurrence 21.



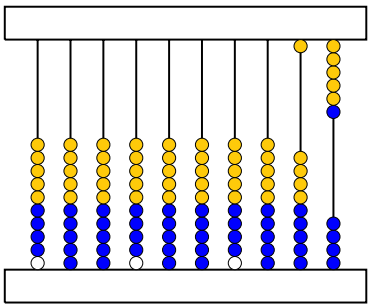
20

On commence par retirer 1. Il reste alors 2 dizaines. Mais il faut encore retirer 4 unités.



20

Pour y parvenir, on transforme une dizaine en 10 unités ; nous avons donc 1 dizaine et 10 unités.



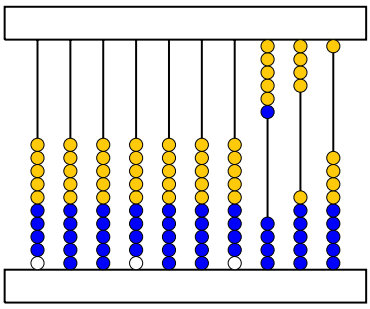
16

Cela permet alors de retirer les 4 unités qu'il reste à enlever, ce qui donne 16.

Comme ce fut le cas pour l'addition, plusieurs procédés peuvent être employés.

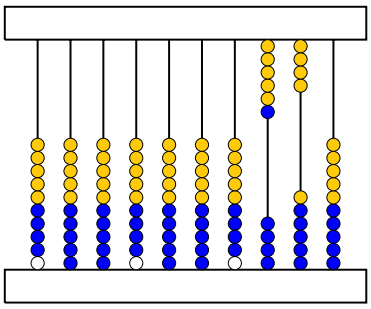
Ainsi pour effectuer $21 - 5$, nous pouvons effectuer	$21 - 1 - 4$,
mais aussi	$21 - 10 + 5$.

Des opérations de ce type sont réalisées jusqu'à l'acquisition du passage de rang, avec des termes qui peuvent bien entendu être choisis de plus en plus grands. Ensuite, les opérations qui demandent plusieurs passages de rang sont abordées en appliquant la même méthode de travail. Voici un moyen d'effectuer l'opération $641 - 256$.



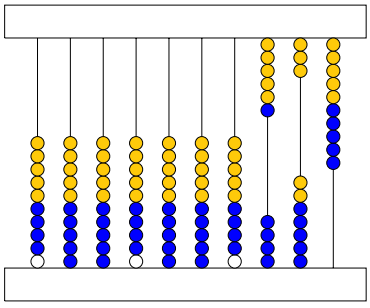
641

Les élèves placent d'abord 641 sur le boulier.



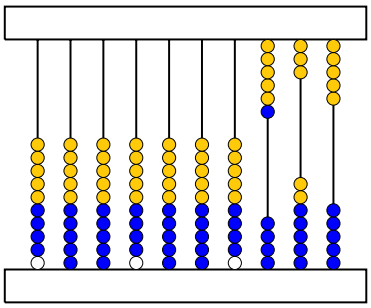
640

Ils enlèvent 1 boule de la colonne des unités. Il reste alors 5 unités à retirer.



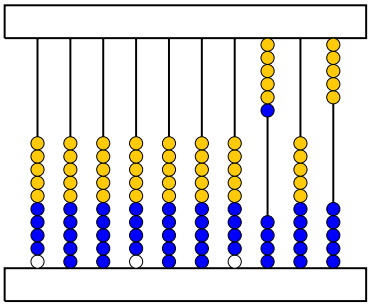
640

Pour y parvenir, les enfants transforment 1 dizaine en 10 unités. Il reste donc 6 centaines, 3 dizaines et 10 unités.



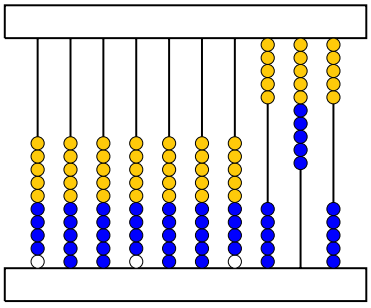
635

Ils enlèvent alors les 5 unités restant à retirer, ce qui donne 635.



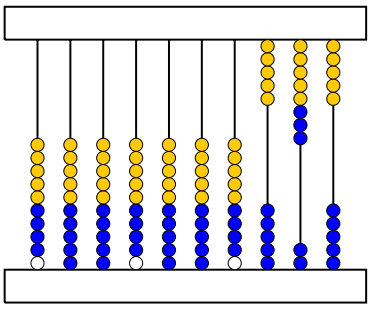
605

Ils retirent ensuite 3 boules dans la colonne des dizaines, ce qui donne 605. Il reste encore 2 dizaines à enlever.



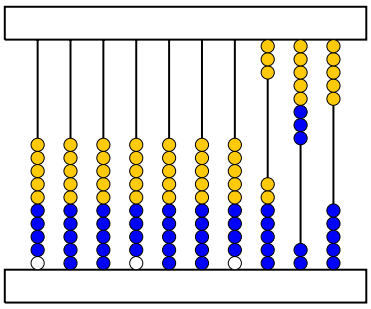
605

Pour cela, ils transforment une centaine en 10 dizaines ; il reste donc 5 centaines, 10 dizaines et 5 unités.



585

Ils retirent les 2 dizaines qu'il leur reste à enlever et obtiennent donc 585.



385

Enfin, ils retirent les 2 centaines, ce qui donne 385.

Ici aussi, les élèves effectueront suffisamment d'exercices jusqu'à la maîtrise du passage de rang dans les soustractions sur le boulier.

Les activités sur le boulier permettent de visualiser les différents états successifs au cours d'une opération, d'en suivre pas à pas le cheminement et d'en comprendre le mécanisme. Ces caractéristiques méthodologiques plaident pour un recours au boulier comme soutien lors des opérations dans l'abaque ou lors de remédiations avec des élèves en difficulté.

Échos des classes

Les activités sur les bouliers ont été expérimentées dans des classes de quatrième primaire à raison de deux séances de deux heures. La première séance a été consacrée à la reconnaissance et la représentation des nombres ainsi qu'aux additions et soustractions sans changement de rang, la seconde aux additions et soustractions avec passage de rang.

La fabrication des bouliers s'est faite au cours de bricolage, préalablement à l'activité. Nous avons constaté qu'il était nécessaire que l'enseignant perce lui-même les trous dans la boîte, car cela est trop difficile pour les enfants. De même, une intervention de l'adulte est nécessaire lors du collage des piques à brochettes et du dessus de la boîte.

La reconnaissance des premiers nombres présentés s'est faite aisément puisqu'une boule correspond à une unité. Il est ensuite très important d'insister fortement sur les deux représentations du nombre dix pour bien ancrer chez les élèves la correspondance entre dix unités et une dizaine. C'est un moment essentiel de l'activité qui en conditionne la suite.

Les différentes opérations sans changement de rang ont été maîtrisées par les enfants. Il est à noter que certains élèves ont débuté leurs opérations en commençant par la gauche, ce qui est tout à fait correct. Lors des additions avec passage de rang, il a été indispensable d'effectuer de nombreux exercices en faisant s'exprimer chacun. Cette verbalisation a permis d'expliquer les différentes étapes nécessaires pour effectuer les opérations. Pour additionner huit à seize, la majorité des élèves a employé la technique $(16+4)+4$, mais quatre enfants ont utilisé la méthode

$(16 + 10) - 2$. Au cours du travail sur les additions, ils sont amenés à transformer dix unités en une dizaine. Cette substitution s'est avérée plus facile que la transformation d'une dizaine en dix unités nécessaire lors des soustractions. Une verbalisation des différentes actions réalisées dans ce dernier cas a été essentielle et a permis aux élèves de réinvestir la méthode employée lors des additions. Avant de passer au travail avec des nombres plus grands, il est indispensable que la technique de passage de rang soit bien acquise.

Les enseignants qui ont participé aux expérimentations continuent à utiliser les bouliers dans leurs classes et trouvent que ce matériel permet de structurer le travail des élèves.

Vers où cela va-t-il ?

Ce travail sur les compteurs et les bouliers mène vers les activités traditionnelles dans l'abaque et vers la réalisation des opérations de calcul mental.

Chapitre 3

À la découverte de notre numération

≪ Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. ≫

Napoléon Bonaparte

≪ L'homme, dans sa maison, n'habite pas l'escalier, mais il s'en sert pour monter et pénétrer partout ; ainsi l'esprit humain ne séjourne pas dans les nombres, mais il arrive par eux à la science et à tous les arts. ≫

Rivarol[1]

Préambule

Dans l'activité qui suit, nous allons essentiellement comparer différentes numérations écrites.

Quel est l'intérêt d'une telle activité ?

L'objectif n'est pas de faire apprendre d'autres types de numérations écrites, ni de faire calculer les enfants dans ces systèmes de numérations – cela n'aurait aucun sens de systématiser des pratiques qui ne leur sont pas utiles –, mais bien de les amener à découvrir les caractéristiques de notre système et à comprendre les raisons pour lesquelles il a été adopté de manière quasi universelle. Cette découverte et cette compréhension se feront grâce à une comparaison de diverses méthodes utilisées au cours de l'histoire. Cela permettra également de se rendre compte que notre numération ne s'est pas faite en un jour, mais qu'elle a mis des siècles à se construire et, surtout, à être diffusée. Ne perdons pas de vue que l'utilisation des chiffres romains a persisté dans nos contrées jusqu'au milieu du XVIIIe siècle dans le domaine commercial et pour les comptes de l'état.

Et comme le dit Ermel [64] :

> ≪ Au moment où ils vont devoir prolonger les nombres entiers à l'aide des nombres décimaux[2], il est particulièrement important de donner les moyens à ceux qui n'ont pu encore le faire de bien comprendre les principes de cette numération. ≫

[1] Antoine Rivarol est un écrivain et journaliste français (1753-1801) auteur d'un *Discours sur l'universalité de la langue française* en 1784.

[2] Il faut comprendre ≪ nombres décimaux non entiers ≫.

1 Comparaison de systèmes de numération

De quoi s'agit-il ?

Traduire des nombres des écritures égyptienne, romaine et grecque dans notre système de numération.

Traduire des nombres écrits dans notre numération vers ces systèmes.

Découvrir des principes propres à chaque numération.

Compléter un tableau récapitulatif reprenant les principes des différents systèmes de numération rencontrés ainsi que du nôtre.

Enjeux

Mettre en évidence les caractéristiques de notre système de numération.

Approfondir la distinction entre nombre et chiffre.

Découvrir les avantages d'une numération positionnelle de base décimale.

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

De quoi a-t-on besoin ?

L'approche historique du chapitre 15 à la page 495.

Matériel

Les fiches 32 à 38, en annexe aux pages 124 à 130, reprenant les différentes numérations abordées et les tableaux récapitulatifs. Des grandes feuilles (A2 par exemple).

Prérequis

Connaître les nombres entiers naturels et leur ordre de succession jusqu'à 9 999 999.

Savoir que $100 = 10 \times 10$, $1\,000 = 10 \times 100$, ...

1.1 Décodage des systèmes de numération et premières observations

L'objectif de cette activité n'est surtout pas de systématiser le calcul dans les diverses numérations que nous aborderons, mais bien de faire comprendre aux enfants les rouages de notre système de numération actuel. Le côté ludique de l'activité nous semble intéressant. En effet, les enfants apprécient en général l'utilisation de symboles inhabituels ou méconnus. Ils considèrent alors l'activité comme un jeu plutôt que comme un apprentissage fastidieux.

Comment s'y prendre ?

Cette activité est prévue pour se dérouler en ateliers. Chaque groupe reçoit une fiche sur laquelle on peut voir la reproduction d'un document mathématique en écriture égyptienne, romaine ou grecque et sa traduction (parfois en partie) dans notre écriture.

> Après avoir lu les documents présentés, note dans le tableau la valeur dans notre numération des symboles rencontrés.

Par groupes, les enfants décodent les documents mis à leur disposition et les analysent pour en dégager certaines caractéristiques. Ils ne disposent pas d'une correspondance des symboles dans notre système de numération. Ils doivent donc déduire les valeurs des symboles à partir des exemples proposés. C'est pourquoi ces exemples doivent être suffisamment nombreux et variés pour que les élèves puissent identifier la signification des différents symboles et vérifier leurs conjectures. L'enseignant aide en circulant dans les différents groupes et en apportant parfois, si c'est nécessaire, des éclairages au sujet des données. Il serait intéressant de faire noter (au brouillon, par exemple) par les enfants les observations qu'ils auront effectuées au sujet des différentes numérations. Le tableau à compléter reprend les symboles dans le désordre afin d'éviter que les élèves le complètent en partant chaque fois de la valeur du symbole précédent.

Numération égyptienne

Les documents exploités pour introduire la numération égyptienne, datent du début du troisième millénaire avant Jésus-Christ.

Le premier provient de la tête de la massue symbolisant le pouvoir du roi Narmer. On y trouve des représentations numériques du butin et du nombre de prisonniers ramenés par le souverain lors de ses campagnes victorieuses. Il s'agit du plus ancien document numérique égyptien connu.

400 000 boeufs,
1 422 000 chèvres
et 120 000 hommes.

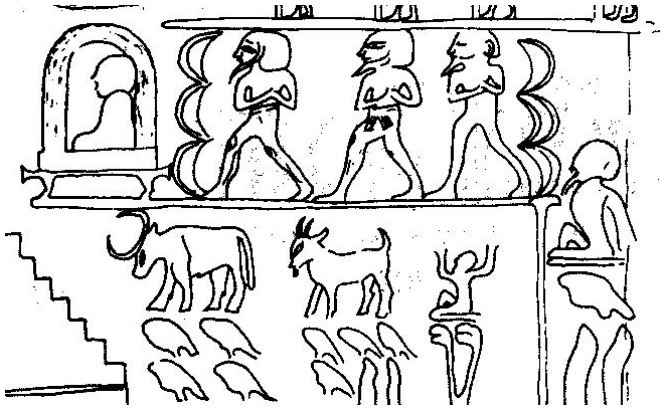


Fig. 1

Nous employons également une reproduction de la partie frontale du soubassement d'une statue de Khâsékhem qui représente un nombre d'ennemis massacrés au cours d'une bataille.

42 209 hommes

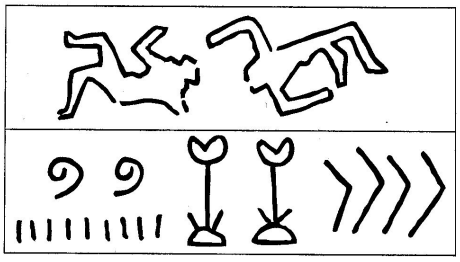


Fig. 2

Ces deux documents ont été découverts à Hiérakonpolis en Haute-Égypte.

Le troisième document présenté émane d'une gravure trouvée à Saqqara, près de Memphis en Basse-Égypte et qui provient de la tombe de Ptahhotep, précepteur à la cour de Pharaon. Ce document représente un nombre de pigeons, d'oies, de canards et de grues qui correspondent aux richesses de la basse-cour.

121 200 pigeons,
11 110 oies,
121 022 canards,
111 200 grues.

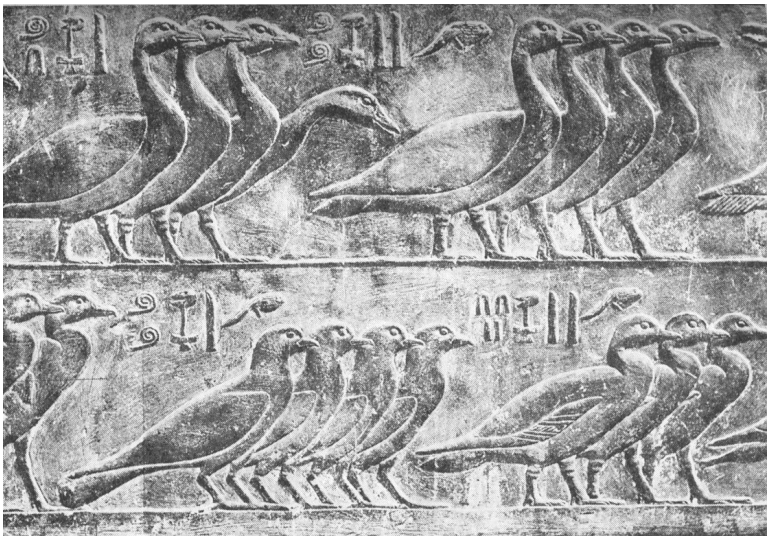


Fig. 3

Sur la fiche, les élèves disposeront de reproductions faites à la main pour une lecture plus aisée.

Dans ces exemples, tous les symboles égyptiens sont au moins présents une fois afin que les enfants puissent compléter le tableau de correspondance que voici :

						
1000000	100	10000	1	100000	10	1000

Nous avons aussi représenté des nombres comportant un ou des zéros dans notre numération afin de remarquer l'inutilité d'un symbole pour le zéro dans la numération égyptienne.

Numération romaine

Pour aborder la numération romaine, nous employons une inscription miliaire[3]trouvée à Forum Pompili en Lucanie (Italie méridionale) et conservée au Museo Della Civilta Romana à Rome. Elle fut établie par C. Popilius Laenas, consul en 172 et en 158 avant Jésus-Christ. Dans la transcription de l'original, nous avons transformé les symboles qui représentent 50 et 500 afin de leur donner leur forme actuelle (L et D).

[3]se disait des bornes placées au bord des voies romaines pour indiquer les milles



Fig. 4

ligne 4	LI	51
ligne 5	LXXIIII	74
ligne 5	CXXIII	123
ligne 6	CLXXX	180
ligne 7	CCXXXI	231
ligne 7	CCXXXVII	237
ligne 8	CCCXXI	321
ligne 12	DCCCCXVII	917

Tous les symboles romains sont présents dans ces deux exemples et permettent de compléter le tableau suivant :

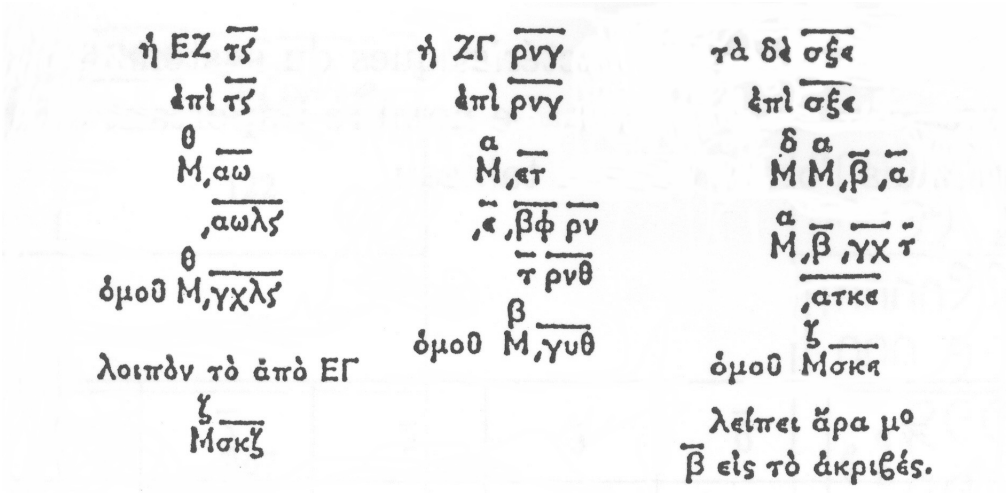
V	X	C	I	M	L	D
5	10	100	1	1 000	50	500

Le nombre 180 montre aussi que le zéro n'a pas de raison d'être chez les Romains.

Numération alphabétique grecque

En ce qui concerne la numération alphabétique grecque, nous n'avons trouvé que peu d'exemples de documents contenant des mentions numériques. Nous avons donc pris comme source le commentaire d'Eutocius au traité d'Archimède sur la *Mesure du cercle* dans lequel il effectue des opérations en calcul écrit pour trouver une valeur approchée de la longueur d'un segment. Un extrait de cet ouvrage figure ci-après.

Ce document ne doit pas être fourni aux enfants. Nous avons simplement extrait quelques nombres qui y figurent et nous en avons ajouté d'autres afin de proposer un éventail assez large des symboles que les Grecs employaient. Pour représenter des nombres supérieurs à la dizaine de mille, les Grecs utilisaient des myriades. Celles-ci ne sont pas proposées lors de cette activité afin de ne pas compliquer inutilement la tâche des enfants.



ΕΖ	306
×	306
	91800
	1836
somme	93636

Il reste le carré de ΕΓ=70227

ΖΓ	153
×	153
	15300
	5000
	2500
	150
	300
	159
somme	23409

	265
×	265
	40000
	12000
	1000
	12000
	3600
	300
	1325
somme	70225

cette somme est inférieure de deux unités au carré exact

$\overline{\zeta}$	7
$\overline{\kappa\delta}$	24
$\overline{\pi\gamma}$	83
$\overline{\rho\nu\gamma}$	153
$\overline{\upsilon\nu\varsigma}$	456
$\overline{\psi o\theta}$	779
$\overline{{}'\alpha\tau\kappa\epsilon}$	1 325
$\overline{\rho\nu}$	150
$\overline{\tau}$	300
$\overline{\tau\varsigma}$	306

$\overline{\sigma\xi\epsilon}$	265
$\overline{{}'\alpha\omega\lambda\varsigma}$	1 836
$\overline{{}'\beta\text{ϡ}\alpha}$	2 991
$\overline{{}'\eta\mu\beta}$	8 042
$\overline{{}'\gamma\tau\iota}$	3 310
$\overline{\theta\phi\eta}$	9 508
$\overline{{}'\gamma\chi}$	3 600
$\overline{{}'\alpha}$	1 000
$\overline{{}'\beta\nu}$	2 500
$\overline{{}'\epsilon}$	5 000

Ces exemples permettent de découvrir les caractéristiques du système alphabétique grec et de compléter le tableau de correspondance suivant. Le nombre important de symboles à identifier nous a incité à les présenter dans l'ordre dans le tableau.

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{\varphi}$
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\phi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\text{ϡ}}$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

À la fin du décodage, chaque groupe note les remarques qu'il a pu effectuer au sujet du système étudié. Les enfants sont invités à justifier leurs affirmations en se référant aux fiches utilisées. Cela permet d'effectuer un premier tri et d'éliminer les propositions farfelues. Chaque groupe va ensuite exposer brièvement ses découvertes aux autres. La validité des constatations des enfants sera vérifiée grâce à la deuxième partie de l'activité.

1.2 Compréhension et utilisation des systèmes

Chaque enfant reçoit la deuxième fiche de travail concernant le système de numération sur lequel il vient de travailler.

Comment s'y prendre ?

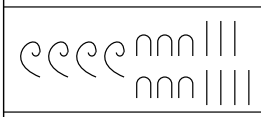
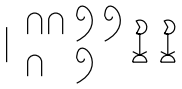
> Transcris dans notre numération les nombres écrits dans les numérations égyptienne, romaine ou grecque.
>
> Transcris ensuite dans ces différentes écritures les nombres qui te sont présentés.

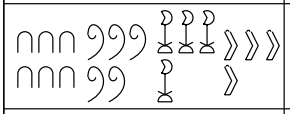
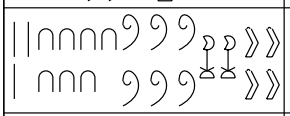
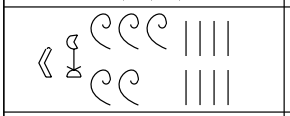
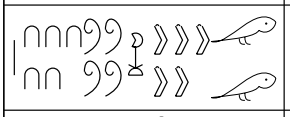
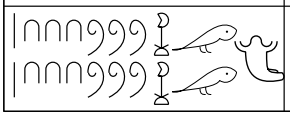
Les élèves sont maintenant amenés à transcrire des nombres du système qu'ils viennent de décoder dans le nôtre et inversement. Pour cela, ils disposent de leur tableau de correspondance réorganisé dans l'ordre croissant.

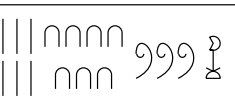
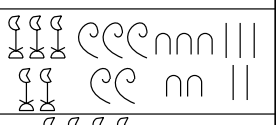
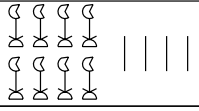
Par cette transcription, les enfants sont amenés à vérifier les hypothèses émises lors de la première partie. Cela leur permet de les modifier ou (et) de les compléter à partir des nouvelles constatations qu'ils pourraient faire. Après avoir effectué le travail complet sur un système de numération, les enfants reçoivent éventuellement les deux fiches d'un autre système. Cette dernière phase peut cependant être proposée en activité libre.

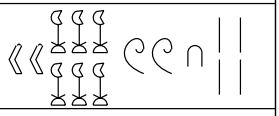
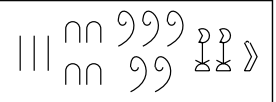
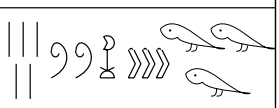
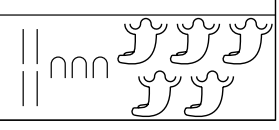
Voici les exemples proposés ainsi que les solutions.

Numération égyptienne

Nombre Égyptien	Réponse
	122
	34
	467
	2 331
	4 028

Nombre égyptien	Réponse
	44 560
	42 673
	11 508
	251 451
	1 202 662

Nombre actuel	Réponse
54	
387	
1 376	
5 555	
8 004	

Nombre actuel	Réponse
26 214	
12 543	
331 205	
3 100 000	
5 000 034	

Numération romaine

Nombre romain	Réponse
VII	7
XXVI	26
XXXVIII	38
LXVI	66
CLXXVI	176
CCXXII	222

Nombre romain	Réponse
CCCLII	352
CX	110
MDCLXVI	1 666
MMMDLVI	3 556
MDCCLXVII	1 767
MLI	1 051

Nombre actuel	Réponse
9	VIIII
17	XVII
67	LXVII
238	CCXXXVIII
361	CCCLXI
512	DXII

Nombre actuel	Réponse
1 340	MCCCXXXX
2 585	MMDLXXXV
4 003	MMMMIII
3 326	MMMCCCXXVI
2 781	MMDCCLXXXI
4 657	MMMMDCLVII

Numération grecque antique

Nombre grec	Réponse
$\overline{\lambda\gamma}$	33
$\overline{\varrho\theta}$	99
$\overline{\pi\varsigma}$	86
$\overline{\iota\zeta}$	17
$\overline{\rho\kappa\gamma}$	123
$\overline{\omega\mu\eta}$	848

Nombre grec	Réponse
$\overline{{}'\epsilon\psi\xi\varsigma}$	5 766
$\overline{{}'\theta\chi\iota\beta}$	9 612
$\overline{{}'\alpha\chi\varrho\epsilon}$	1 695
$\overline{{}'\varsigma\omega\nu\eta}$	6 858
$\overline{{}'\gamma\mu\gamma}$	3 403
$\overline{{}'\delta\Game\pi}$	4 980

Nombre actuel	Réponse
54	$\overline{\nu\delta}$
67	$\overline{\xi\zeta}$
98	$\overline{\varrho\eta}$
384	$\overline{\tau\pi\delta}$
832	$\overline{\omega\lambda\beta}$
105	$\overline{\rho\epsilon}$

Nombre actuel	Réponse
4 673	$\overline{{}'\delta\chi o\gamma}$
2 745	$\overline{{}'\beta\psi\mu\epsilon}$
3 482	$\overline{{}'\gamma\upsilon\pi\beta}$
8 551	$\overline{{}'\eta\phi\nu\alpha}$
1 209	$\overline{{}'\alpha\sigma\theta}$
9 090	$\overline{{}'\theta\varrho}$

1.3 Caractérisation des différents systèmes

En s'appuyant sur les nouvelles découvertes, on complète la liste des caractéristiques de chacun des systèmes, au tableau ou sur les grandes feuilles.

Comment s'y prendre ?

Combien de symboles différents y a-t-il ?
Quelle est la base utilisée ?
Y a-t-il un zéro ?
La longueur du nombre est-elle en rapport avec sa valeur ?
La position des symboles a-t-elle de l'importance ?
Jusqu'à quel nombre peut-on aller ?

Sur base des documents proposés, les enfants complètent le tableau de synthèse de la fiche 38. On vérifie, à partir des exemples, la validité des constatations. À ce moment, il pourrait être nécessaire de compléter la liste des critères de comparaison découverts, par un questionnement sur certains points particuliers.

Voici ce qui devrait être dégagé dans chacune des numérations.

Numération égyptienne

Les Égyptiens utilisent sept symboles qui correspondent chacun à une puissance de 10.

						
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

La direction vers laquelle sont tournés les symboles indique le sens de lecture.



sens de lecture



sens de lecture

Ils utilisent une numération décimale.

Ils n'ont pas besoin d'un zéro.

La position des symboles n'a pas d'utilité chez eux – bien qu'ils les disposent souvent dans l'ordre décroissant et de droite à gauche – puisqu'on peut même imaginer un nombre égyptien avec les symboles en désordre sans que cela affecte sa transcription, comme dans l'exemple suivant.

 $\longrightarrow$ 2 343

L'écriture des nombres est en général assez longue et ne reflète pas la valeur du nombre.

Ainsi, il faut deux symboles pour écrire 1 000 001 et huit symboles pour écrire 44.



1 000 001



44

Les nombres égyptiens ne dépassent pas 9 999 999. En effet, ils utilisent au maximum neuf fois chacun des sept symboles.

Numération romaine

Nous avons utilisé ici la numération romaine d'origine. C'est pourquoi nous avons écrit IIII et non IV, car cette dernière écriture ne date que du XVe siècle.

Dans les exemples envisagés, les Romains utilisent sept symboles représentés par des lettres majuscules.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Dans ce système, la position des symboles n'a aucune importance pour la compréhension des nombres. Elle ne le deviendra que lorsque sera introduite la règle indiquant qu'un symbole placé à gauche d'un autre de valeur supérieure s'en retranche.

Les Romains fonctionnent en base décimale avec la base cinq comme auxiliaire.

Il n'y a pas de zéro dans la numération romaine.

La limite de représentation des nombres romains est de 4 999, car ils utilisent chacun des sept symboles au maximum quatre fois.

L'écriture des nombres est souvent longue et ne correspond pas à la valeur du nombre. Ainsi, 1 001 s'écrit à l'aide de deux symboles, tandis qu'il en faut sept pour écrire 29.

MI	XXVIIII
1 001	29

Numération alphabétique grecque

Les Grecs de l'époque antique utilisaient deux systèmes de numération, l'attique et l'alphabétique. Nous n'avons envisagé ci-dessous que la numération alphabétique. Les Grecs ont utilisé leur alphabet classique qui comporte vingt-quatre lettres. Ils y ont ajouté trois signes qui sont les lettres *digamma* ($\overline{\varsigma}$), *san* ($\overline{\text{ϻ}}$) et *koppa* ($\overline{\text{ϙ}}$).

- les neuf premières lettres ($\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\epsilon}$, $\overline{\varsigma}$, $\overline{\zeta}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\theta}$) correspondent à nos chiffres de 1 à 9,
- les neuf lettres suivantes ($\overline{\iota}$, $\overline{\kappa}$, $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$, $\overline{\xi}$, $\overline{o}$, $\overline{\pi}$, $\overline{\text{ϙ}}$) correspondent à nos dizaines,
- les neuf dernières ($\overline{\rho}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$, $\overline{\upsilon}$, $\overline{\phi}$, $\overline{\chi}$, $\overline{\psi}$, $\overline{\omega}$, $\overline{\text{ϻ}}$) à nos centaines.

Pour représenter les milliers, les Grecs plaçaient un accent en haut à gauche des lettres correspondant aux unités.

Pour distinguer les lettres numérales des lettres ordinaires, ils les surmontaient d'un trait horizontal.

Ils employaient une base décimale.

Leur numération ne comportait pas de zéro.

Les symboles étaient toujours rangés de la même manière, mais leur position ne remplissait pas un rôle fondamental dans la compréhension de l'écriture du nombre. Nous pouvons en effet imaginer de placer les symboles dans un ordre quelconque et constater, comme dans l'exemple, que le nombre représenté peut malgré tout être lu.

$\overline{{}'\delta\psi\pi\epsilon}$	$\overline{\psi\epsilon'\delta\pi}$
4 785	4 785

La longueur des écritures est réduite et la notion de valeur du nombre est, en général, en rapport avec sa longueur.

Au départ, les Grecs ne peuvent représenter des nombres au-delà de 9 999. Ce n'est que lorsque Archimède systématisera la notation des myriades (une myriade correspond à 10 000) qu'ils pourront représenter des nombres beaucoup plus grands. Voici un exemple de nombre contenant une myriade :

$\overset{\theta}{\mathrm{M}}\,\overline{{}'\gamma\chi\lambda\varsigma}$	93 636

Échos des classes

Les expérimentations relatives à cette activité se sont déroulées en classe de sixième primaire. Elles se sont étalées sur deux fois deux périodes de cours de l'après-midi.

Lors de ces expérimentations, les élèves ont appréhendé les activités de manière ludique. Ils trouvaient amusant et motivant de manipuler des figures autres que celles représentant traditionnellement les nombres chez nous.

Ils ont rapidement découvert la signification des différents symboles égyptiens. Le tableau de correspondance a été complété assez facilement.

Les groupes qui décodaient la numération romaine ont donné l'impression d'avancer en terrain connu. Cette numération avait déjà été rencontrée en diverses occasions.

Un élève semblait d'ailleurs bien maîtriser l'écriture en chiffres romains puisqu'il a fait remarquer que « normalement, le quatre de septante-quatre s'écrit IV » ; ce qui a donné l'occasion d'expliquer l'origine tardive de cette écriture IV. Un autre enfant a signalé alors que « donc ça doit être pareil avec neuf, il faut écrire VIIII à la place de IX. »

Ici aussi le tableau de correspondance a été facilement complété.

En ce qui concerne la numération grecque, le tableau de correspondance a été complété sans trop de peine malgré la quantité importante de symboles qu'elle comprend. La présentation du tableau en trois rangées avec les symboles placés en ordre croissant peut expliquer en partie la rapidité avec laquelle le travail s'est effectué.

L'obstacle le plus important rencontré par les élèves a été la présence

de l'accent ′ devant le symbole des unités pour exprimer les milliers. Certains n'avaient pas remarqué son utilité. Ce problème a été résolu lors de la mise en commun des constatations des différents groupes.

Le premier tableau de synthèse s'est complété petit à petit avec une explication des termes employés dans les différentes colonnes. Ainsi, il a été utile de présenter des nombres avec les symboles en désordre pour montrer que leur position n'influence pas la lecture dans les trois numérations étudiées.

Il a été nécessaire de préciser la relation entre la direction vers laquelle sont tournés les symboles égyptiens et le sens de lecture. Plusieurs élèves n'avaient pas relevé cette particularité.

La valeur de la base en numération romaine a été trouvée plus difficilement que les autres du fait de la présence de la base 5 comme base auxiliaire.

Il a aussi été nécessaire de dire aux élèves que la barre surmontant les nombres grecs sert à différencier ceux-ci des lettres de l'alphabet.

2 Enrichissement de la comparaison

L'enseignant peut très bien s'arrêter à ce stade et poursuivre directement par un travail dans notre système actuel. Mais, les trois numérations abordées étant additives et de base 10, il nous semble intéressant d'envisager des numérations ayant d'autres caractéristiques : le rôle donné à la position des symboles, une base différente de 10, la présence du zéro et la limite de représentation des nombres. Cela va permettre d'enrichir les comparaisons et de voir que notre système actuel n'est pas unique en son genre.

Grâce à la première activité, les enfants ont découvert que certaines caractéristiques de notre système de numération sont déjà présentes dans les systèmes égyptien, romain et grec. Afin de compléter la comparaison, et sans du tout entrer dans le détail, l'enseignant présente aux enfants les numérations ci-après.

De quoi s'agit-il ?

Observer des nombres en écriture chinoise et maya.

Analyser des nombres clés de ces deux numérations.

Compléter un tableau récapitulatif reprenant les principes des différents systèmes de numération rencontrés, ainsi que du nôtre.

Enjeux

Dégager d'autres caractéristiques de notre système de numération, comme son caractère illimité, le rôle donné à la position des symboles et la présence d'un zéro.

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 39 à 41.

Prérequis

Les recherches effectuées lors de la première partie de l'activité.

L'addition et la multiplication.

2.1 Position des symboles

Les Chinois ont un système de numération dans lequel les nombres sont formés en multipliant les puissances de la base. Ainsi, ils construisent le nombre 6 352 de la manière suivante :

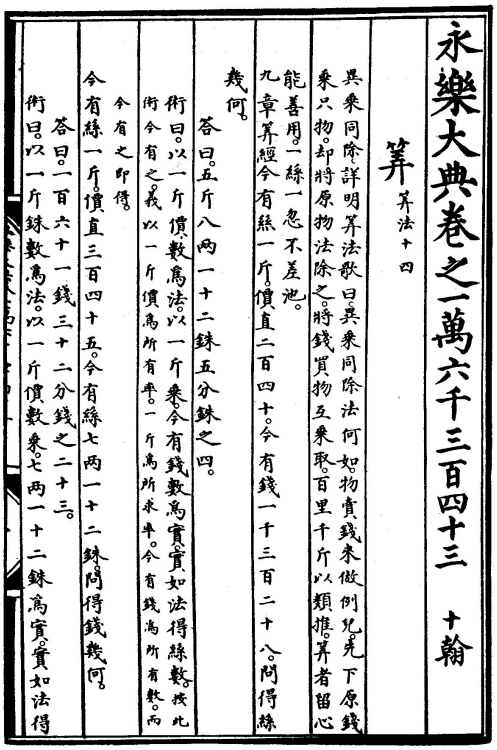
六千三百五十二

6(x)1000 (+) 3(x)100 (+) 5(x)10 (+) 2

La position des symboles a donc une grande importance dans la numération chinoise. Comme on peut le constater, ce système est très proche de notre système de numération orale. Ce sont ces aspects de la numération chinoise qu'il est intéressant de montrer aux enfants.

Comment s'y prendre ?

> Observe attentivement les exemples de nombres écrits dans la numération chinoise. Que remarques-tu ?


永樂大典卷之一萬六千三百四十三 十翰

算 算法十四

異乘同除詳明算法歌曰異乘同除法何如物貴錢來做例兒先下原錢乘只物却將原物法除之時錢買物互乘聚百里千斤以類推算者留心能善用一絲一忽不差池

九章算經今有絲一斤價直二百四十今有錢一千三百二十八問得絲幾何

答曰五斤八兩一十二銖五分銖之四

術曰以一斤價數爲法以一斤乘今有錢數爲實實如法得絲數按此術今有之義以一斤價爲所有率一斤爲所求率今有錢爲所有數而今有之即得

今有絲一斤價直三百四十五今有絲七兩一十二銖問得錢幾何

答曰一百六十一錢三十二分錢之二十三

術曰以一斤銖數爲法以一斤價數乘七兩一十二銖爲實實如法得

Fig. 5

Pour cela, nous leur montrons des exemples de nombres écrits dans la numération chinoise que nous décortiquons avec eux. Nous avons tiré ces exemples d'une page d'un document mathématique chinois du début du XVe siècle (figure 5), où les nombres sont écrits verticalement. Nous les avons transformés pour les présenter horizontalement comme le font actuellement les Chinois.

六	6
一十九	19
三十二	32
八十四	84
三百四十五	345
七百六十一	761

二百七	207
六千三百五十二	6 352
一千九百八	1 908
一萬六千三百四十三	16 343
八萬一千三百四十九	81 349
七萬五	70 005

Les élèves disposent, cette fois, de la correspondance des symboles dans notre système. La voici :

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10 000

Le fait de disposer de la correspondance des symboles permet de décortiquer plus rapidement les exemples présentés.

Les enfants observent d'abord individuellement les exemples proposés pendant un laps de temps assez réduit (trois à quatre minutes, par exemple). L'enseignant les invite ensuite à énoncer leurs constatations. Des nombres pertinents tirés du document sont alors analysés collectivement au tableau afin de dégager les caractéristiques qui nous intéressent, à savoir l'importance de la position des symboles et l'absence de zéro. Ces nombres pourraient par exemple être 19, 345, 207, 6 352, 81 349 et 70 005. À ce moment, il est intéressant de passer par la lecture des nombres choisis afin de les décortiquer, pour montrer aux enfants comment ces nombres sont construits. Nous constatons alors que la numération chinoise est très proche de notre système de numération orale. Les enfants reçoivent alors un nouveau tableau de correspondance (fiche 41) que nous complétons avec la numération chinoise.

Il est à noter que ce système est encore employé de nos jours en Chine. On l'a toutefois étoffé en acceptant les multiplications de puissances entre elles, pour permettre de noter des nombres jusqu'à la centaine de milliards (10^{11}).

2.2 Présence d'un zéro et base différente

La présence d'un zéro et une base différente de 10 vont être introduits par l'observation de la numération chez les Mayas.

Cette numération est positionnelle et de base vingt, avec cinq comme base auxiliaire. De plus, elle utilise un zéro. Le nombre 134 est par exemple formé de la manière suivante.

•	6 x 20
••••	14 x 1
134	

Il serait possible d'écrire une infinité de nombres mayas. Nous nous limiterons à la deuxième position, car il existe une irrégularité dans la formation des nombres de cette numération. Elle intervient au passage du deuxième au troisième rang. Elle n'a pas été développée dans les exemples afin de ne pas perturber les enfants. Nous l'expliquons toutefois afin que l'enseignant puisse la leur signaler le cas échéant. Chez les Mayas, le premier rang représente ce que nous appellerons les unités (de 0 à 20) ; le deuxième rang, les vingtaines et le troisième, au lieu de représenter des quatre centaines (20 fois 20) s'arrête au niveau des trois cent soixantaines (18 fois 20). Les rangs suivants reprennent alors leur cours normal (20 fois 360, 20 fois 7 200, ...).

Pourquoi cette irrégularité ?

Comme l'explique IFRAH, pour la comprendre, il faut s'intéresser au calendrier solaire des Mayas. Celui-ci comportait 365 jours répartis en dix-huit mois de vingt jours et une courte période de cinq jours à la fin du dix-huitième mois. Pour compter les durées, ils utilisaient le jour comme unité de base et, par commodité, une année de 360 jours. Le temps écoulé depuis le début de leur ère était évalué en *kin* (jour), en *uinal* (mois de 20 jours), en *tun* (année de 360 jours), puis en *katun* (cycle de 20 ans), en *baktun* (cycle de 400 ans) et ainsi de suite.

Comment s'y prendre ?

Observe attentivement les exemples de nombres mayas proposés. Que remarques-tu ?

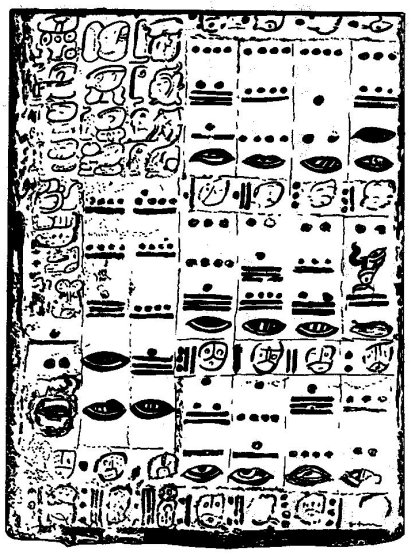


Fig. 6

La numération maya est introduite par la reproduction d'un fragment du codex dit de Dresde[4] datant du XIVe siècle et conservé à la Säschsische Landesbibliothek de Dresde. Des exemples supplémentaires ont été ajoutés afin de bien montrer l'emploi de la base vigésimale[5] (les nombres 19, 20 et 21) et la présence d'un zéro (les nombres 20 et 40).

[4]Manuscrit des Indiens de Méso-Amérique. Les plus connus sont le codex dit de Dresde et le codex Mendoza.
[5]C'est-à-dire la base 20.

	6
	13
	19
	20
	21
	28

	39
	40
	87
	124
	251
	348

Le choix de fournir la correspondance des symboles mayas avec nos chiffres ou de la faire découvrir aux enfants est laissé aux enseignants. C'est pourquoi, sur la fiche, le tableau de correspondance n'est pas complété. Il s'agit d'une correspondance de symboles ; la valeur qu'il faut attribuer à un point ou à un trait dépend de sa position dans l'écriture du nombre.

		
1	5	0

Ici aussi, les élèves observent les exemples proposés pendant une courte durée. Ensuite, ils font part de leurs constatations. Des nombres pertinents tirés du document sont alors analysés collectivement au tableau afin de dégager les caractéristiques intéressantes dans la numération maya, à savoir l'importance de la position des symboles, la présence d'un zéro et l'utilisation de la base vingt au lieu de la base 10. Ces nombres pourraient par exemple être 19, 20, 21, 40 et 124. À ce moment, nous complétons avec les enfants le tableau de correspondance de la fiche 40. En ce qui concerne le caractère illimité de la numération maya, nous pouvons simplement le signaler aux élèves sans entrer dans le détail de l'irrégularité.

Remarquons que des traces de la numération en base vingt sont également présentes chez nous. En effet, le nombre quatre-vingts, ainsi que les nombres soixante-dix ou quatre-vingt-dix en France, proviennent de la base vingt.

2.3 Pour en terminer

Nous disposons maintenant de tous les critères qui sont présents dans notre numération actuelle. Cela nous permet de compléter le tableau récapitulatif de synthèse (fiche 41).

Il est à noter que, contrairement à une idée fort répandue, notre système n'a pas été créé par les Arabes. En effet, si ces derniers nous ont transmis la numération écrite décimale positionnelle,

elle est bien l'apanage de la civilisation indienne. Seuls, bien entendu, les symboles sont différents. Il existe de nombreuses représentations des chiffres indiens qui varient suivant les époques et les régions. Voici à titre d'exemple les chiffres arabes orientaux actuels dits chiffres « hindi ».

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

C'est bien le système de référence qui nous est parvenu après avoir transité chez les Arabes.

Après cette analyse, on comprendra les raisons du choix de notre système par rapport aux autres et son adoption par (presque) toutes les régions du monde puisque comme le dit Ifrah [95] :

Tandis qu'il existe plus de quatre mille langues, dont plusieurs centaines sont largement répandues, et plusieurs dizaines d'alphabets et de systèmes d'écriture servant à les transcrire, il n'y a aujourd'hui qu'un seul et unique système de numération écrite. Système dont les signes de base constituent, pour ainsi dire, un espéranto pour les yeux : le fait que des gens, Européens, Asiatiques, Africains, Américains ou Océaniens, incapables de communiquer entre eux par la parole, se comprennent aisément dès lors qu'ils écrivent les nombres au moyen des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, ... est l'un des traits les plus remarquables de notre système de numération actuel. En un mot, les chiffres constituent aujourd'hui le seul et véritable langage universel. Ceux qui considèrent les chiffres comme quelque chose de tout à fait inhumain feraient donc bien d'y réfléchir.

Échos des classes

Dans les numérations chinoise et maya, les élèves possédaient la correspondance des symboles dans notre numération, ce qui a simplifié l'élaboration du tableau.

La lecture de certains nombres chinois présentés a également permis de constater les similitudes entre cette numération et notre numération parlée. En effet, comme l'a dit un élève : « Quand ils écrivent trois cent quatre dix cinq, c'est pareil que quand on dit trois cent quarante-cinq puisque quatre dix, c'est comme quarante. »

En ce qui concerne la numération maya, la présence d'un zéro a été décelée sans trop de peine. L'approche collective a, par contre, été nécessaire pour bien comprendre que les Mayas utilisaient la base 20. La disposition verticale des symboles a quelque peu perturbé le début de l'analyse.

Lors de la synthèse générale, les élèves ont fait régulièrement référence à la première synthèse pour les justifications.

Il est intéressant de remarquer que ceux qui n'avaient pas terminé les exercices dans les numérations égyptienne, grecque et romaine ont désiré finir leur travail. L'enseignant leur a proposé de les effectuer en activité

libre. À cette occasion, certains enfants ont été jusqu'à inventer des exercices de correspondance pour les numérations chinoise et maya.

Trois mois après l'activité en classe, nous avons à nouveau rencontré l'enseignant pour faire le point à propos du réinvestissement de l'activité dans le travail de classe quotidien. Il a été notamment constaté que certains élèves en difficulté, ont progressé dans la perception de la valeur réelle d'un symbole selon sa position dans l'écriture du nombre.

Commentaire

Les figures 1, 4, 5 et 6 proviennent de Ifrah [95] ; la figure 3 de Guitel [79] ; la figure 2 et les reproductions présentes dans les fiches sur la numération égyptienne de Ermel [64].

Chapitre 4

Rencontre avec les symétries dans l'art africain

Préambule

Les symétries sont très présentes dans l'art africain. Depuis des siècles, ce sont principalement les femmes qui ont montré leur potentiel de création et d'imagination dans la peinture, le tissage ou la sculpture.

La céramique, la peinture murale, le tissage de nattes, le tressage des cheveux, la décoration de calebasses, ... chacune de ces activités culturelles et traditionnelles possède un caractère artistique et mathématique. En effet, la structuration des surfaces et la régularité des motifs donnent, à ces véritables œuvres d'art, un aspect tout à fait géométrique.

Dans notre approche des symétries, nous travaillons à partir de peintures murales d'Afrique australe. Celles-ci sont assez simples et présentent une réelle source d'observation et d'exploitation.

Deux types de peintures murales vont nous intéresser plus particulièrement : les *litema* et les *ikghuptu*.

Les *litema* (singulier : *tema*) sont des décorations murales qui s'inspirent de modèles géométriques traditionnels. On les trouve sur les maisons Sotho[1]. Le mot *litema* vient du verbe *ho lema*, qui signifie cultiver. Le mot *tema* signifie, lui, un champ ou un terrain labouré. Beaucoup de dessins *litema* rappellent, en effet, les sillons creusés dans la terre au moment des semailles.

Les *litema* sont composés par juxtaposition d'un certain nombre de motifs identiques placés dans des orientations variées (figures 1 et 2). Ces décorations sont d'abord gravées sur les murs des *rondavels* (habitations) circulaires et sur les façades rectangulaires des huttes. Elles sont ensuite peintes à l'aide de chiffons trempés dans la peinture pour couvrir les larges surfaces, et de brosses pour exécuter les détails de finition.

[1] Les Sotho sont l'ensemble des peuples de langue bantoue répartis entre le Lesotho, l'est de l'Afrique du Sud, le sud du Zimbabwe et l'est du Botswana.

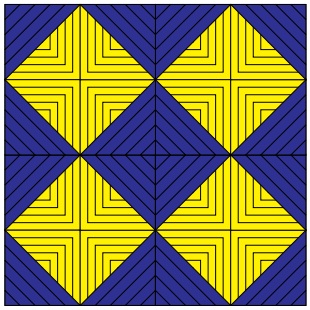


Fig. 1

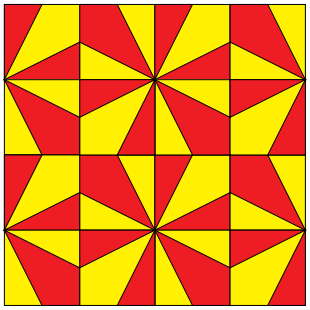


Fig. 2

« L'art féminin des *litema* est saisonnier. Il éclôt, se fane et fleurit à nouveau avec le passage des saisons. C'est un art éphémère. Réalisé sur des murs de boue, il meurt en même temps que la surface temporaire sur laquelle il est fixé. Le soleil le dessèche et le craquelle, la pluie le fait disparaître. » (citation de Changuion in [74].)

Les *litema* présentent de nombreuses symétries qui, selon le photographe Changuion, tentent de rappeler la structure bilatérale du corps humain. En outre, on y retrouve différentes isométries de figures : la translation, la rotation ou la symétrie axiale.

Les *ikghuptu* sont des dessins géométriques (figures 3 et 4) réalisés sur les murs intérieurs et extérieurs des fermes familiales Ndebele[2]. Ce style traditionnel diffère des *litema* Sotho par les caractéristiques des dessins géométriques et par l'ajout de lignes peintes.

En effet, après avoir gravé avec le doigt les dessins géométriques sur les surfaces de boue, les femmes tracent, avec de la chaux blanche, les grandes lignes des motifs de base. En utilisant des peintures composées à partir de produits naturels de la terre, elles peignent ensuite les dessins de manière très colorée.



Fig. 3

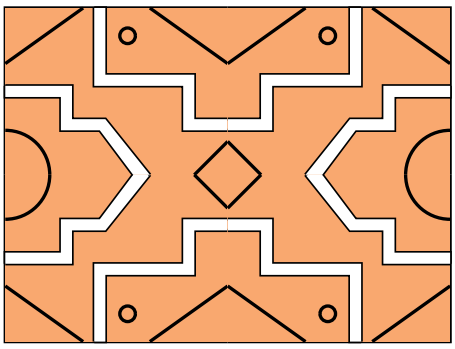


Fig. 4

La décoration d'une maison Ndebele accompagne le passage à l'âge adulte. À cette époque, les jeunes filles sont confinées chez elles où on leur enseigne, parmi d'autres secrets de femme, certaines formes d'art et de géométrie ainsi que les techniques de la décoration murale.

Les *ikghuptu* présentent généralement une ou deux symétries axiales. Pour ce dernier cas, les axes de symétrie sont orthogonaux et engendrent une symétrie centrale (ou rotation de 180°).

[2]Les Ndebele sont les habitants de la province du Transvaal au nord de Johannesbourg en Afrique du Sud.

1 Les enfants face à la « symétrie »

De quoi s'agit-il ?

Composer un *tema* en juxtaposant des pièces comme dans un puzzle.

Classer les puzzles réalisés en fonction de leurs ressemblances.

Utiliser le papier calque pour mettre en évidence les différents mouvements permettant de passer d'une pièce à une autre.

Enjeux

Se familiariser avec un matériel présentant des isométries.

Mettre des mots sur un classement.

Reconnaître la translation, la rotation et les symétries d'axe vertical et d'axe horizontal, à l'aide du papier calque.

Compétences

Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.
Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 42 et 43 aux pages 134 et 135 – la fiche 42 présentant des pièces comme celles de la figure 5.

De la colle, une pièce du puzzle imprimée sur papier calque, des pièces agrandies du puzzle et un calque correspondant.

1.1 Puzzle d'un *tema*

Comment les enfants réagissent-ils face à la symétrie ? Organisent-ils toujours leur production de manière à ce qu'elle soit bien symétrique ?

Sachant que les symétries sont fortement présentes dans l'univers quotidien des enfants, il peut être intéressant d'observer des réalisations d'enfants et ce qu'ils disent de celles-ci.

Pour mener à bien l'activité, nous avons créé des pièces de puzzle dont le motif géométrique est semblable à ceux des *litema* Sotho. Ce motif va nous permettre, en fonction de la position des pièces, d'observer les différentes transformations réalisées par les enfants.

La figure 5 représente les pièces du puzzle, symétriques l'une de l'autre.

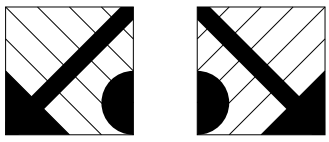


Fig. 5

Comment s'y prendre ? L'enseignant distribue aux enfants la fiche 43 et les trente-deux pièces de puzzle.

> Voici trente-deux pièces. Observez-les, puis assemblez-les de manière à obtenir quelque chose de joli. Le puzzle à réaliser ne doit contenir que seize pièces. Il ne faut donc pas les utiliser toutes !
>
> Lorsque vous êtes content(e)s du résultat, collez les pièces sur la fiche afin de remplir toutes les cases.

Les enfants remarquent qu'il y a deux sortes de pièces (figure 5) et que, selon leur position et leur place, on obtient des résultats différents. À cette étape, c'est la beauté du résultat qui compte : ils ne s'intéressent pas aux actions qu'ils effectuent.

Lorsque leurs puzzles sont terminés, ils les affichent au tableau. Avant d'établir le classement, il est intéressant de demander aux enfants d'expliquer comment il se fait qu'on a obtenu une telle variété de résultats, en partant de pièces pourtant identiques.

> Essayez de mettre ensemble les réalisations qui se ressemblent et expliquez le pourquoi de ce classement.

Cette activité se fait collectivement au tableau. Les enfants observent attentivement chaque puzzle puis, petit à petit, les regroupent selon différents critères de ressemblance. Ils expliquent oralement leurs choix. Il est intéressant de prêter attention aux mots qu'ils utilisent pour expliquer le classement.

Il est évident que ceux-ci peuvent être très variés, se rapportant tantôt à ce que le puzzle représente, tantôt à la position des pièces. Néanmoins, grâce à ce classement et aux explications, certains enfants vont pouvoir mettre, spontanément, des mots sur les différents mouvements accomplis.

Échos des classes L'activité « Puzzle d'un *tema* » a été expérimentée dans cinq classes de deux écoles du Brabant wallon.

Un premier élément a été observé au début de l'activité. Au départ, une grande majorité des élèves étalent, sur leur banc, l'ensemble des 32 pièces. Alors que la plupart remarquent que, parmi les pièces données, il y en a de deux types – pour les enfants, l'élément qui varie d'une pièce à l'autre est la place du demi-disque lorsque la flèche est orientée dans le même sens (figure 6) –, aucun élève ne prend cependant le temps de les classer en deux « paquets » distincts.

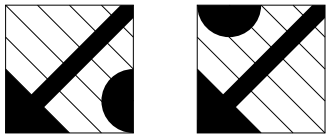


Fig. 6

Les élèves sont attentifs aux éléments prégnants[3] de la pièce de départ, à savoir la flèche et le demi-disque. Les mouvements qu'ils réalisent au cours de la constitution du puzzle sont donc influencés par l'existence de ces éléments prégnants qu'ils cherchent à associer de diverses façons pour constituer des objets plus grands et qui les satisfont sur le plan esthétique.

L'ensemble des élèves procèdent alors par essais et erreurs : lorsque la pièce ne convient pas, ils essaient avec une autre et ce jusqu'à ce qu'ils atteignent le résultat, la représentation voulue.

Une deuxième observation a été réalisée au niveau des classements et des interprétations des œuvres. Ceux-ci varient en fonction des classes et donc de l'âge des enfants.

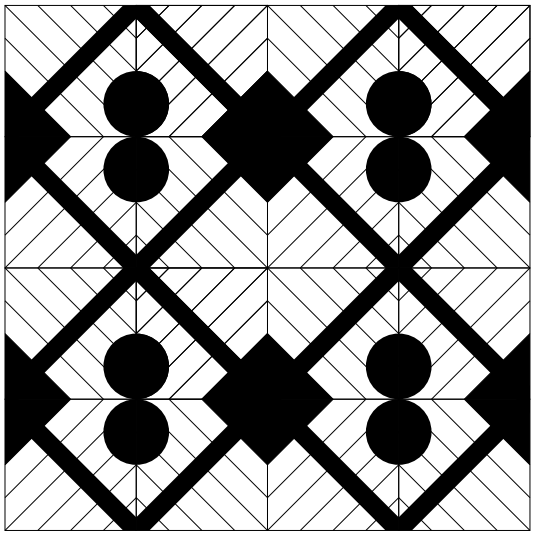
En troisième primaire, les élèves classent sur base d'un seul élément figuratif : ils parlent de « bidules » (les carrés), de pyramides, de « ronds attachés »...

Dans les deux classes de quatrième primaire, ce qui peut être un hasard, les élèves rassemblent d'abord les puzzles qui sont tout à fait identiques. Les classements suivants répondent, eux, à un ou plusieurs critères tels que la présence de carrés, de droites parallèles, de ronds, ... mais aussi le nombre, la couleur ou la position de ces éléments.

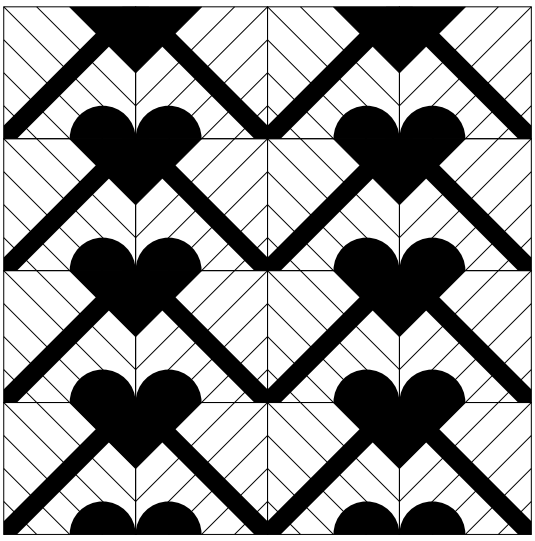
En cinquième primaire, le classement des puzzles a été directement réalisé en fonction des critères présentés ci-dessus.

En sixième primaire, la symétrie axiale et la symétrie centrale avaient déjà été abordées. Cependant, les élèves ont débuté leur classement en se basant sur des éléments particuliers du puzzle (les carrés, les cœurs, ...). Plus tard dans l'activité, quand ils ont commencé à observer l'ensemble des puzzles, ils ont modifié leur classement en fonction des isométries déjà connues.

Voici ci-dessous quelques puzzles réalisés par les enfants.

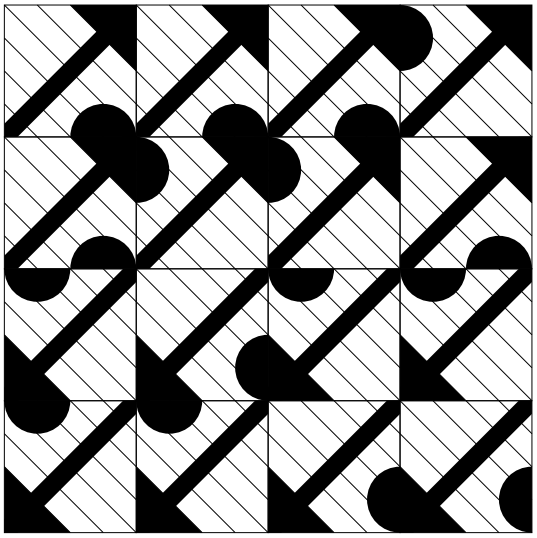


Réalisation parfaitement symétrique d'axe vertical et d'axe horizontal pour l'ensemble de l'œuvre.

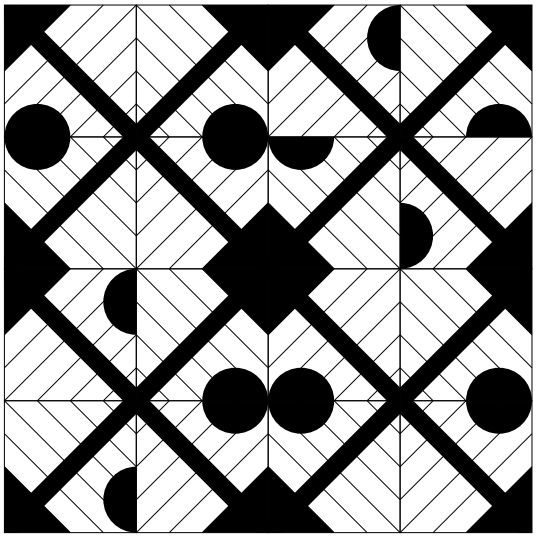


Réalisation parfaitement symétrique d'axe vertical pour l'ensemble de l'œuvre.

[3]Prégnant veut dire « qui attire particulièrement l'attention ». En l'occurence, la flèche et le demi-disque pour la pièce de puzzle.



Translation pour des parties de l'œuvre.



Symétrie et rotation pour des parties de l'œuvre.

Le tableau ci-dessous rend compte des mouvements de la pièce initiale qui ont permis de constituer le puzzle, mais pas des commentaires émis par les élèves sur les puzzles achevés. En effet, dans ceux-ci, de nombreux éléments prégnants sont apparus, qui se sont substitués, le plus souvent, à la flèche et au demi-disque, à savoir un carré, un disque, un cœur, ...

Dans la seconde classe de 4e année, nous avons choisi 12 élèves au hasard avant de réaliser l'activité de manière à effectuer, au total, une observation sur 100 enfants.

	réalisations qui présentent des...					réalisations avec des irrégularités dans...					désordre apparent	Total
	sv-sh	sv	sh	r	t	sv-sh	sv	sh	r	t		
3e année	4	2	1	1	0	2	1	2	0	0	8	21
4e année	6	6	1	1	1	1	3	0	0	2	3	24
4e année	3	2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	12
5e année	6	1	2	0	0	2	2	1	1	0	5	20
6e année	7	1	0	2	0	1	2	3	2	1	4	23
Total	26	12	4	4	1	7	9	7	4	4	22	100
	47					31					22	100

sv = symétrie d'axe vertical r = rotation
sh = symétrie d'axe horizontal t = translation

Grâce à ce tableau, nous pouvons notamment mettre en évidence que

– 47 % des élèves ont réalisé une œuvre totalement « symétrique » dont plus de la moitié avec une double symétrie, d'axe horizontal et d'axe vertical.

– la symétrie d'axe vertical est la transformation la plus fréquemment observée, tandis que la translation n'apparaît qu'une fois sur quarante-sept œuvres.
– 22 % des œuvres présentent un désordre apparent. Il semble qu'en troisième année, les élèves ignorent encore partiellement ce concept de « symétrie » : huit enfants sur vingt-et-un n'en ont aucune idée.

1.2 Le papier calque, outil de visualisation

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chaque élève le puzzle qu'il a réalisé ainsi qu'une pièce de celui-ci, imprimée sur papier calque.

> Utilisez la pièce de papier calque pour découvrir les différentes actions réalisées pour passer d'une pièce à l'autre.
> Écrivez, dans votre cahier de brouillon, des mots qui décrivent ces actions.

Individuellement, les enfants manipulent leur motif de papier calque sur leur *tema*. En passant d'un motif à l'autre – le papier calque doit parfaitement correspondre à la pièce de puzzle recouverte –, ils observent différentes actions et essaient de les décrire. L'enseignant circule dans la classe et invite les enfants à mettre des mots sur ce qu'ils font.

Après avoir mis en évidence différentes actions sur leur puzzle, les enfants échangent celui-ci avec celui de leur voisin afin de faire, peut-être, de nouvelles découvertes.

Suite à cette recherche, une mise en commun est nécessaire. L'enseignant inscrit au tableau toutes les actions découvertes par les élèves. Il affiche ensuite des parties de puzzle – avec des pièces agrandies – (figures 7 à 9).

> Dans la liste, quels sont les termes appropriés pour décrire l'action de passer d'une pièce à l'autre, dans les exemples proposés au tableau ?

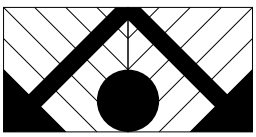
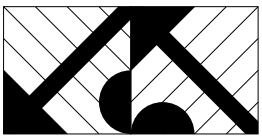


Fig. 7



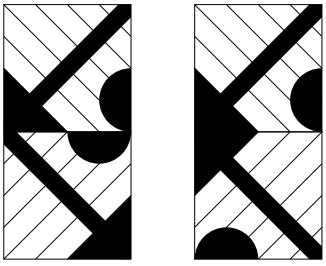


Fig. 8

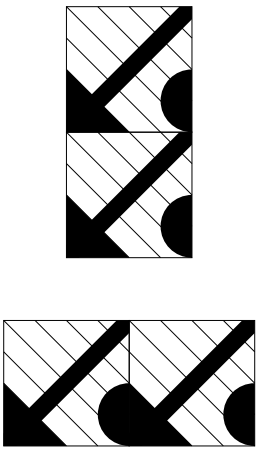


Fig. 9

Pour chacun des exemples proposés, les enfants viennent montrer, avec le papier calque, l'action réalisée. Les figures 7, 8 et 9 correspondent respectivement à des symétries axiales, des rotations et des translations. Il est important de leur faire visualiser la double transformation : un premier motif est symétrique d'un autre, lui-même symétrique du premier. Le vocabulaire utilisé par les enfants de la classe n'est pas le même pour tous, il est indispensable d'énoncer et d'écrire tous les mots qui se rapportent à une même action.

	Actions réalisées « vocabulaire des enfants »
la translation	glisser - déplacer - bouger - descendre - monter - avancer - reculer - aller en avant - aller en arrière - mettre à côté
la rotation	tourner - pivoter - rouler
la symétrie axiale	retourner - mettre de l'autre côté - inverser - mettre en miroir

L'enseignant installe alors un nouveau vocabulaire. Il donne aux enfants les termes exacts se rapportant aux actions découvertes : nous parlerons de translation, de rotation et de symétrie axiale.

L'activité peut se poursuivre par différents exercices collectifs pour lesquels les élèves doivent, dans de nouvelles situations et avec l'aide du papier calque, énoncer la (ou les) transformation(s) subie(s) et expliquer pourquoi.

2 Chercher des axes de symétrie...

De quoi s'agit-il ? Découvrir et tracer des axes de symétrie dans divers contextes.

Enjeux Consolider la notion de symétrie.

Mettre en évidence les axes de symétrie.

Compétences

Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.
Reproduire des tracés sur des supports différents.

2.1 Les images « en miroir »

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 44 à 52 aux pages 136 à 144, présentant un texte informatif et des *litema*.

Des miroirs, du matériel divers (des pailles, des élastiques, des gommettes, des attaches parisiennes, des piques à brochettes, du papier collant, ...).

Comment s'y prendre ? Cette activité est prévue pour se dérouler en trois étapes : une phase de recherche par groupe, une interaction entre élèves de groupes différents et une mise en commun.

Pour commencer, chaque élève reçoit

- des *litema* (les mêmes motifs pour tous les élèves du groupe) ;
- deux miroirs ;
- la fiche 44 ;
- du matériel divers décrit ci-dessus.

L'enseignant donne la consigne suivante.

> Représentez, avec le matériel reçu, les axes de symétrie des différents *litema*.

La consigne est brève et demande une certaine recherche pour être comprise totalement par les enfants. En effet, l'élément « axe de symétrie » n'est pas encore connu de ceux-ci.

Pour les aider à comprendre la consigne et à répondre correctement à celle-ci, les élèves ont reçu du matériel qu'ils doivent utiliser à bon escient :

- par la lecture du texte informatif (fiche 44), ils découvrent la signification du terme recherché (axe de symétrie) et comprennent comment mettre à profit l'utilisation des miroirs ;
- par la manipulation des miroirs, ils peuvent identifier les symétries présentes dans les *litema* et repérer leurs axes ;
- par le choix d'un matériel adapté (une partie du matériel est inutile ou inadaptée), ils doivent représenter, par collage, les axes de symétrie.

L'enseignant circule dans la classe et invite les enfants à chercher, à manipuler, à se poser des questions sur ce qu'ils font. Aux élèves qui, en travaillant avec le miroir, ont des difficultés à se concentrer sur un seul *tema* de la fiche, il conseille de découper les différents dessins de la feuille.

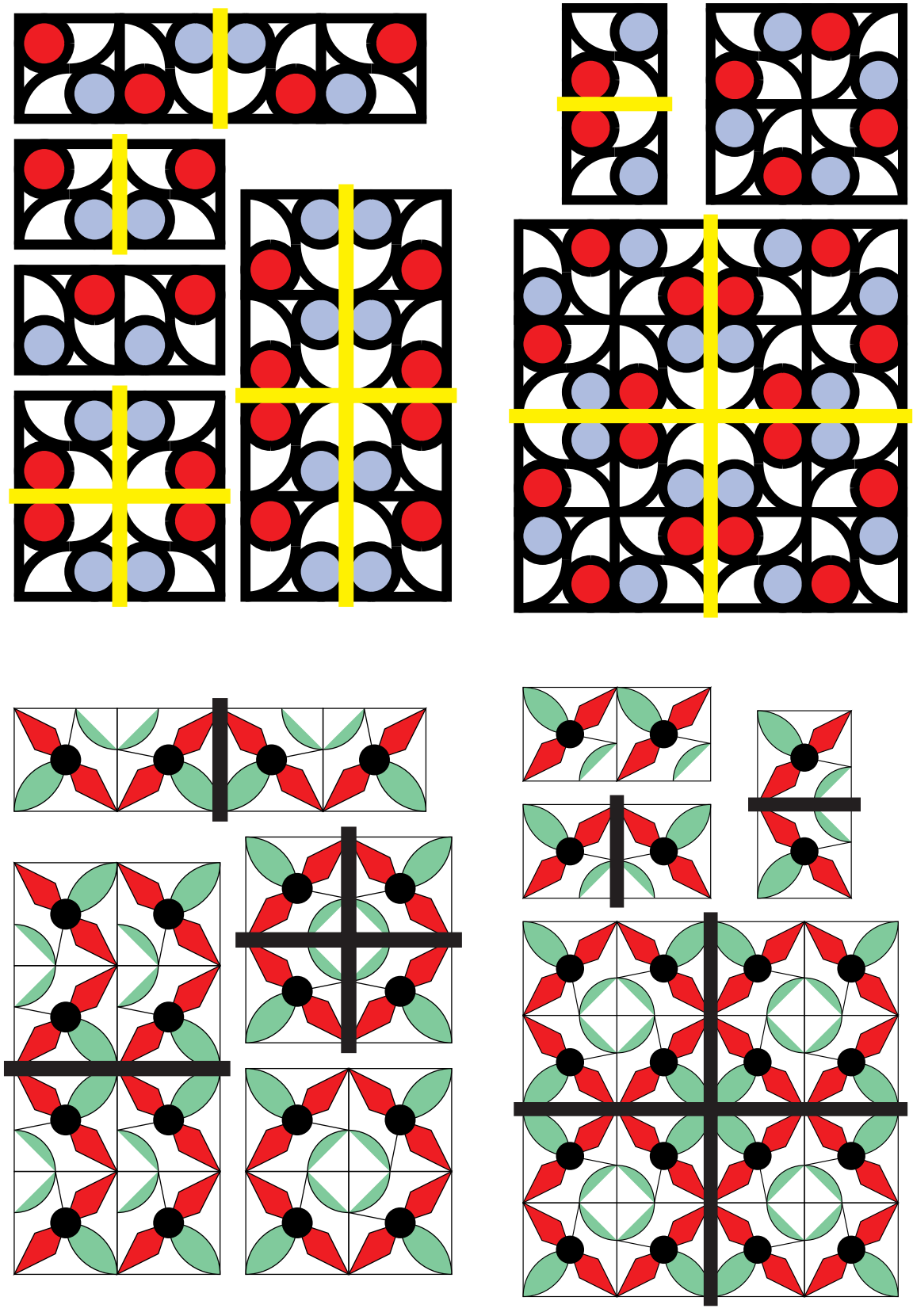
Lorsque tous les élèves ont terminé, de nouveaux groupes sont formés. Ils sont constitués d'un élève de chacun des groupes de l'activité précédente, de manière à ce que les quatre *litema* y soient analysés.

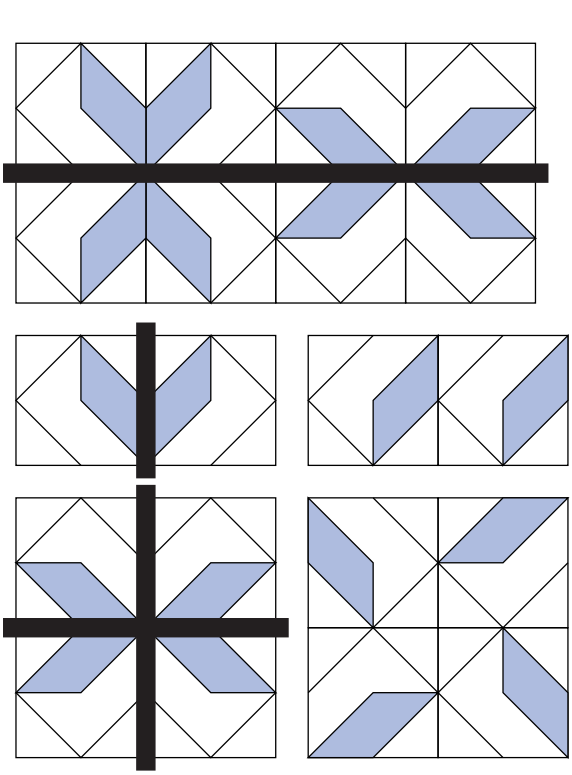
> Montrez et expliquez, à l'aide des miroirs, aux autres élèves de votre groupe ce que vous avez découvert. Discutez-en si vous n'êtes pas d'accord ou s'il manque des éléments.

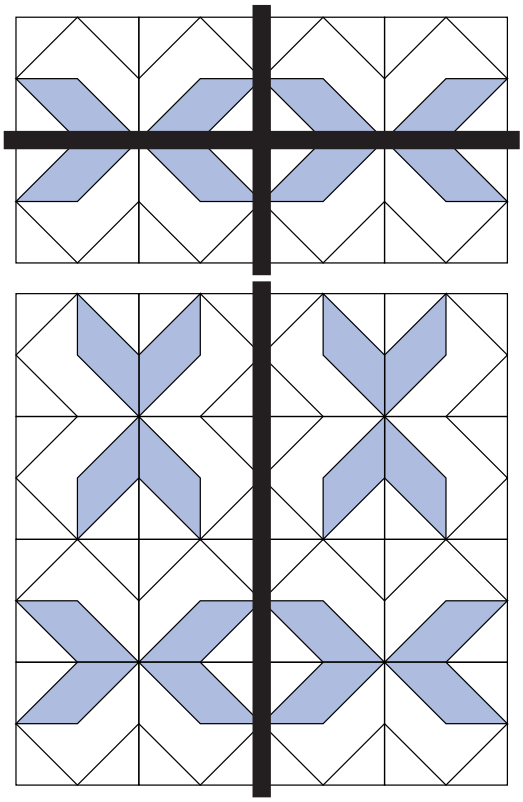
Entre eux, les élèves présentent leurs résultats – avec l'aide des miroirs – et échangent leurs points de vue lorsqu'il y a désaccord. Cette étape permet d'exprimer et de mettre des mots sur ce qu'ils ont fait, d'échanger en petits groupes et de compléter, si nécessaire, les représentations des axes.

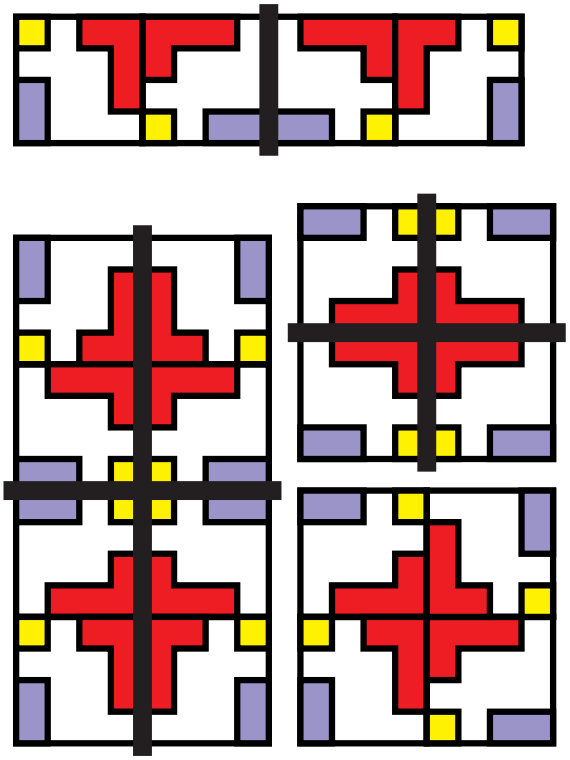
Pour terminer, il est nécessaire de reprendre, au tableau, chaque *tema* et d'y représenter les axes de symétrie. Les figures qui suivent donnent la solution.

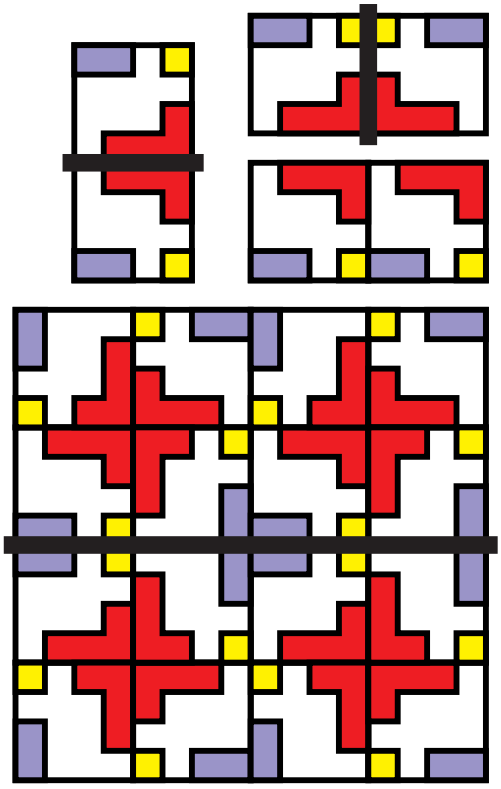
Tous les *litema* proposés ci-dessous ne contiennent pas forcément des axes de symétrie. En effet, certains ne présentent que des translations ou des rotations.











2.2 Pliage et découpage

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 53 à 56, aux pages 145 à 148.

Des feuilles blanches, des feuilles de différentes couleurs, des ciseaux.

Prérequis

La notion de trapèze et de sommet d'une figure.

Le parallélisme et la perpendicularité.

Comment s'y prendre ?

Cette activité est prévue pour se dérouler par groupes de deux. Chaque groupe reçoit trois fiches (fiches 53 à 55) sur lesquelles il va travailler. L'enseignant explique l'activité.

> Vous avez besoin de feuilles blanches et de ciseaux.
> Réalisez ce qui vous est demandé sur les différentes fiches. Respectez les consignes et aidez-vous des dessins.

Les élèves plient, découpent, manipulent sans savoir vraiment ce qu'ils vont obtenir. C'est finalement en dépliant la feuille qu'ils observent le résultat et découvrent que celui-ci présente une ou plusieurs symétries axiales.

Lorsqu'ils ont terminé, l'enseignant invite les différents groupes à mettre en commun leurs observations.

Ils mettent, par exemple, en évidence que

- le pli correspond à un axe de symétrie ;
- les axes de symétrie sont au nombre de un ou de deux ;
- les axes de symétrie peuvent être verticaux, horizontaux ou obliques ;
- les figures découpées, qui apparaissent de part et d'autre de l'axe, sont de mêmes dimensions et à égale distance de l'axe de symétrie.

L'enseignant propose aux élèves d'approfondir un peu plus leurs observations et leur donne la consigne suivante.

> Collez chaque résultat sur une nouvelle feuille. Tracez ensuite en rouge les axes de symétrie puis reliez, à la règle et dans une autre couleur, les sommets correspondants des figures découpées. Qu'observez-vous ?

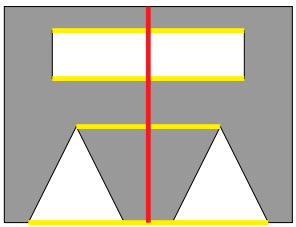


Fig. 10

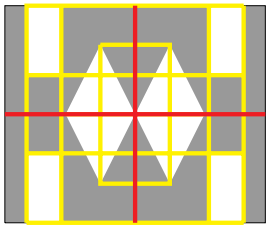


Fig. 11

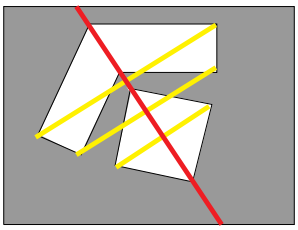
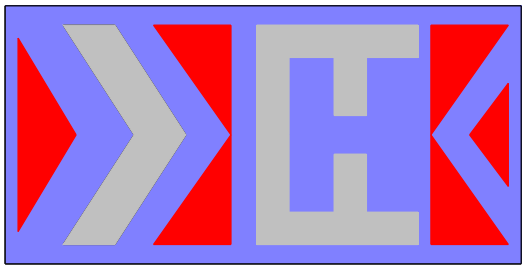
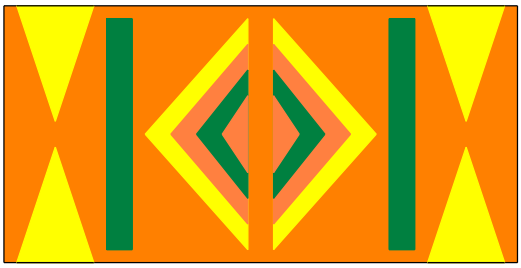


Fig. 12

Suite à cela, les élèves observent que
– les droites qui passent par des points correspondants (en clair sur les figures 10 à 12), dans une symétrie donnée, sont toutes parallèles entre elles ;
– les droites qui passent par des points correspondants, dans une symétrie donnée, sont toutes perpendiculaires à l'axe de symétrie (en foncé sur les figures 10 à 12) ;
– ...
Finalement, l'enseignant leur propose un petit défi à réaliser de manière individuelle.

> Par pliage et découpage, reproduisez ces deux *ikghuptu*.
>
> Pour vous aider, dessinez les axes de symétrie sur votre fiche et, lorsque votre feuille est pliée, tracez au crayon les motifs à découper.

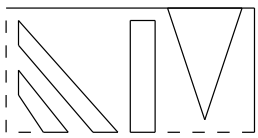




La première œuvre présente une symétrie d'axe horizontal. Les élèves plient d'abord leur feuille en deux, puis effectuent les découpes nécessaires.



La deuxième œuvre présente une symétrie d'axe vertical et une symétrie d'axe horizontal. Les découpes sont, cette fois, effectuées sur la feuille pliée en quatre.



Pour cette œuvre, certains enfants ne vont peut-être pas voir les deux axes de symétrie et vont donc plier la feuille uniquement en deux. Ceci n'est pas faux. Ils auront simplement plus de motifs à découper.

Lorsqu'ils ont terminé, ils peuvent coller, derrière les « trous », des morceaux de feuilles de couleurs différentes afin d'obtenir des représentations fidèles des œuvres.

3 Réalisation de *litema*

De quoi s'agit-il ?

Réaliser des *litema* en travaillant à la manière des femmes Sotho.

Enjeux

Réaliser des œuvres d'art présentant des symétries, avec du matériel varié.

Compétences

Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.
Tracer des figures simples.
Reproduire des tracés sur des supports différents.
Organiser un espace en composant des éléments et en respectant les règles d'équilibre.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La fiche 57 à la page 149.

De grandes affiches blanches, de la gouache, des éponges et des pinceaux (ou des gros marqueurs), deux crayons ordinaires par enfant.

Éventuellement, le logiciel *Apprenti Géomètre* et une imprimante.

Prérequis

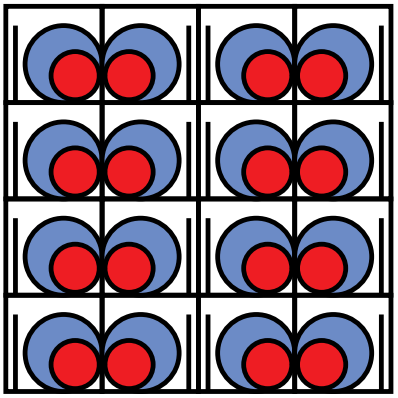
Une première approche des différentes isométries.

Éventuellement, une initiation au logiciel *Apprenti Géomètre*.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant affiche au tableau un *tema* et la silhouette d'un corps humain (fiche 57).

Comparez ces deux illustrations. Qu'y a-t-il en commun ?





Dans chacune de ces représentations, une symétrie axiale verticale est présente.

Il faut cependant interpeller les enfants sur la symétrie non parfaite du corps humain suite à la

position de certains organes uniques tel que le coeur, le foie, l'estomac, les intestins...

Les femmes Sotho « utilisent » cette caractéristique de la structure du corps humain pour réaliser leurs dessins. En effet, elles travaillent debout, plaçant l'axe de symétrie du *tema* dans le plan de symétrie de leur corps. De part et d'autre d'une ligne verticale imaginaire, elles commencent par tracer, dans la dernière couche de torchis encore humide, les grandes lignes du dessin, simultanément avec les deux mains : des formes, résultant de l'une et de l'autre main, sont ainsi réalisées présentant des images « miroirs ».

L'enseignant propose ensuite aux enfants de réaliser un *tema* à la manière des femmes Sotho et leur montre, au tableau, comment le réaliser :

- plier la feuille en deux de manière à obtenir un pli correspondant à l'axe vertical ;
- prendre deux crayons ordinaires, commencer le dessin sur un point de l'axe et tracer les lignes simultanément avec les deux mains ;
- le dessin terminé, mettre en couleur, avec les éponges, les pinceaux et la gouache (ou avec des gros marqueurs), les formes tracées de manière à observer également une symétrie des couleurs ;

Il ne faut pas forcément essayer de représenter quelque chose de figuratif.

Les enfants travaillent individuellement. Ils accrochent les grandes affiches blanches, sur les murs de la classe ou de la salle polyvalente, et réalisent leurs œuvres d'art.

En fin d'activité, on expose leurs créations afin de leur permettre d'être critiques face à ce qu'ils ont produit, d'exprimer ce qu'ils ressentent, ...

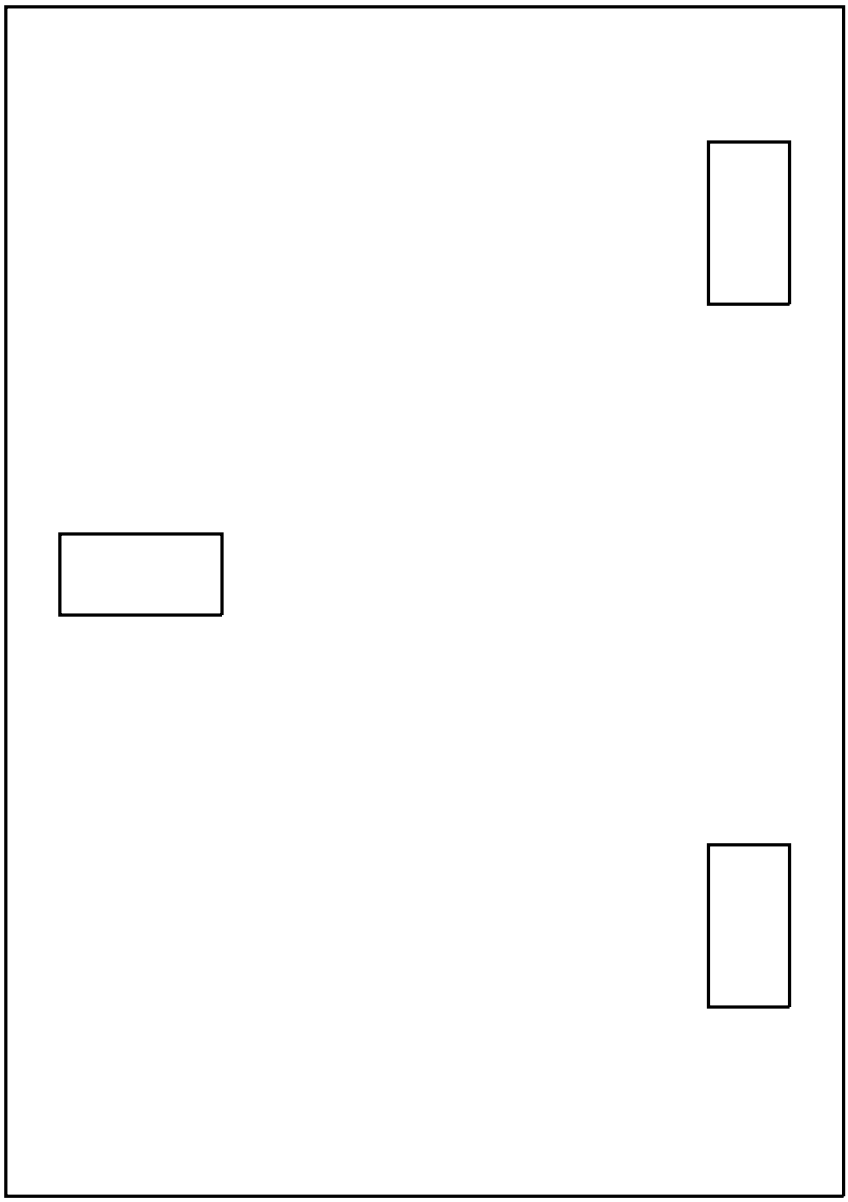


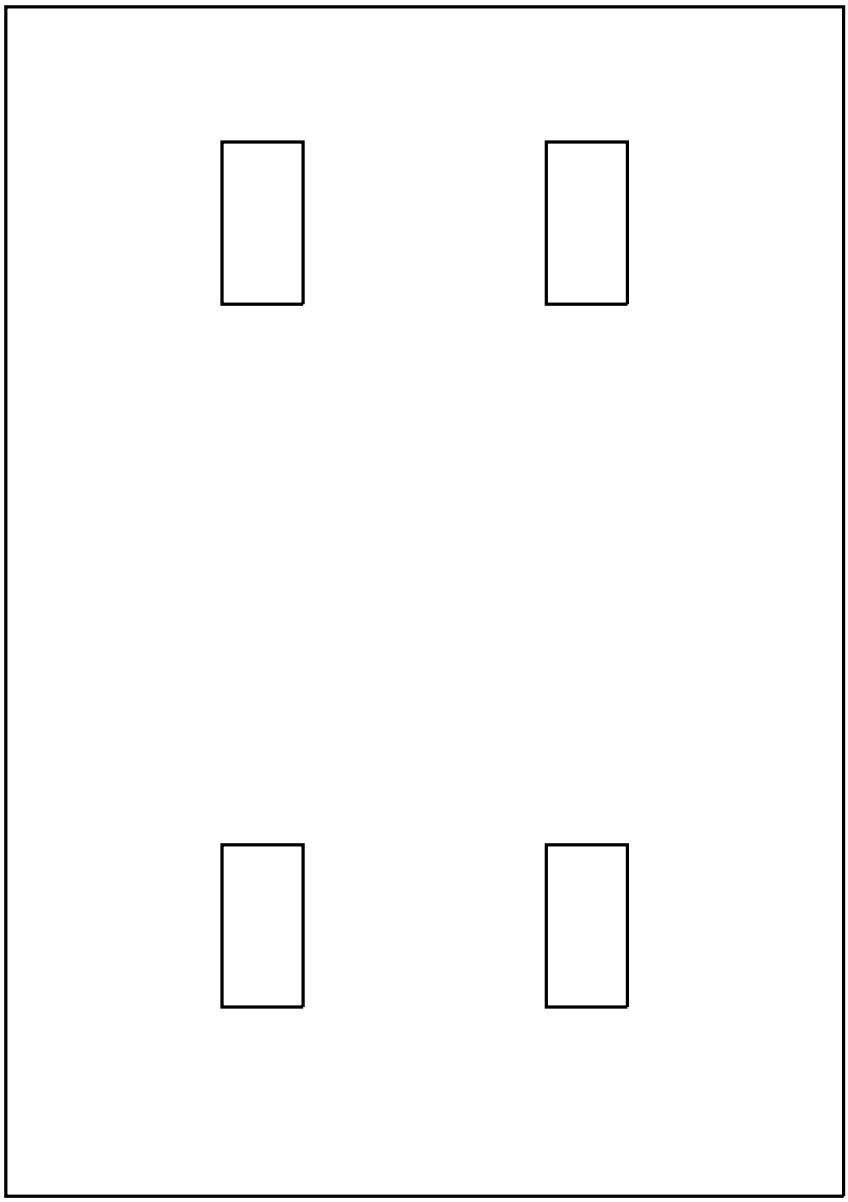


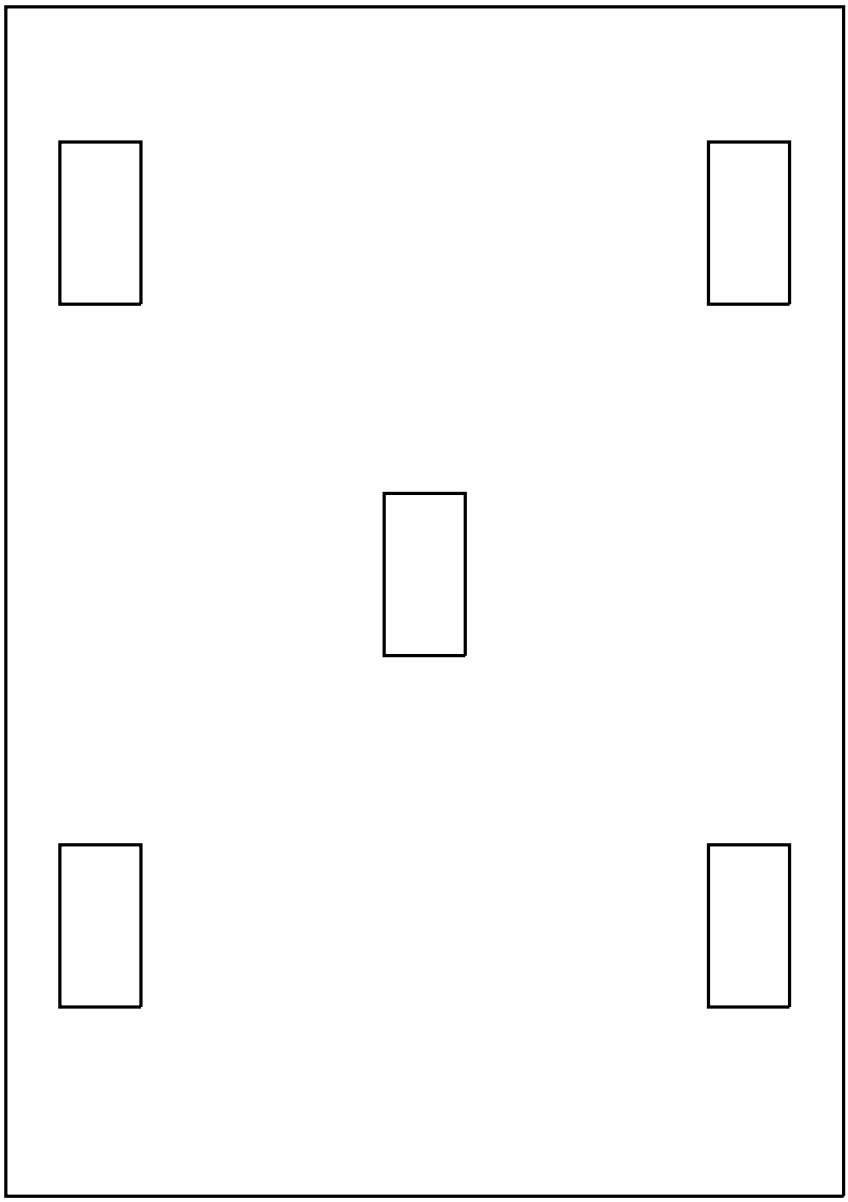
En plus de cette activité, il est également possible de réaliser un *tema* sur *Apprenti Géomètre*. Contrairement au dessin sur papier, l'enfant dispose dans ce cas d'une quantité et d'une variété importante de figures permettant de réaliser plus rapidement des dessins précis.

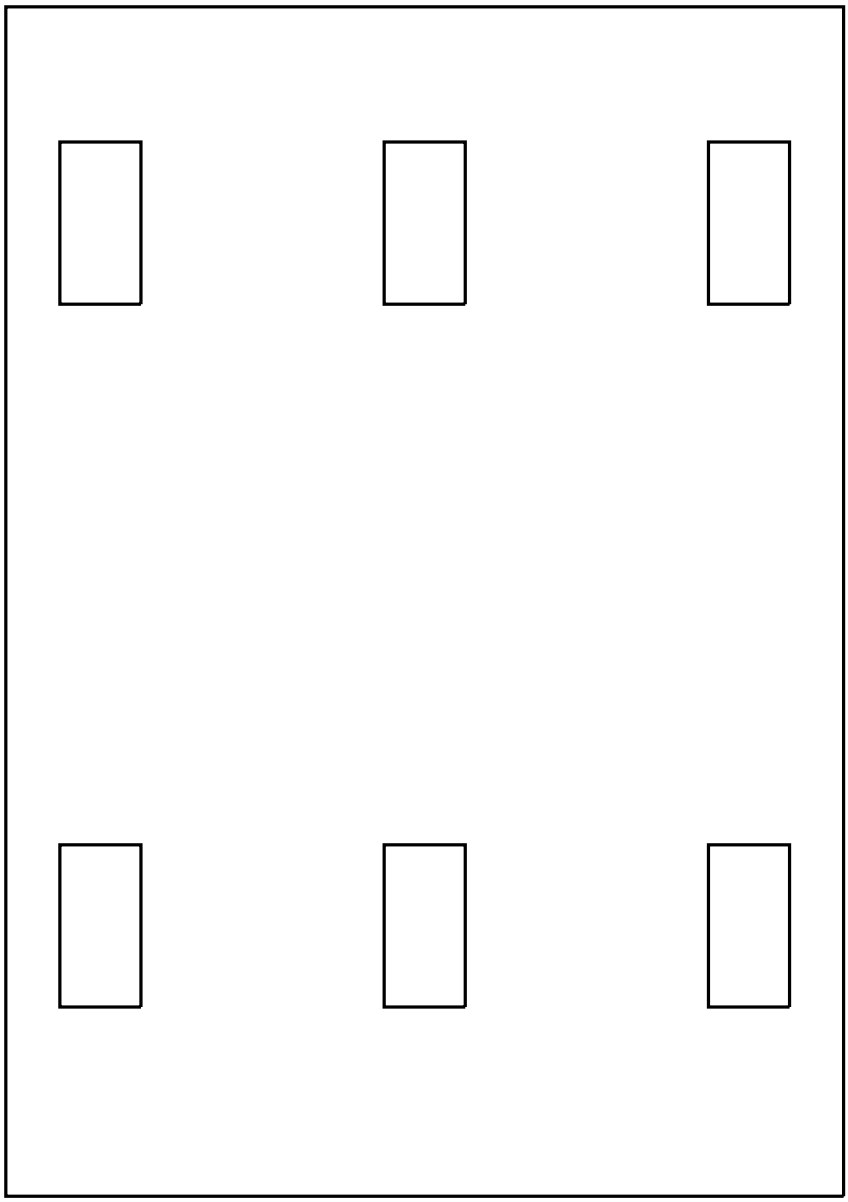
Annexe I

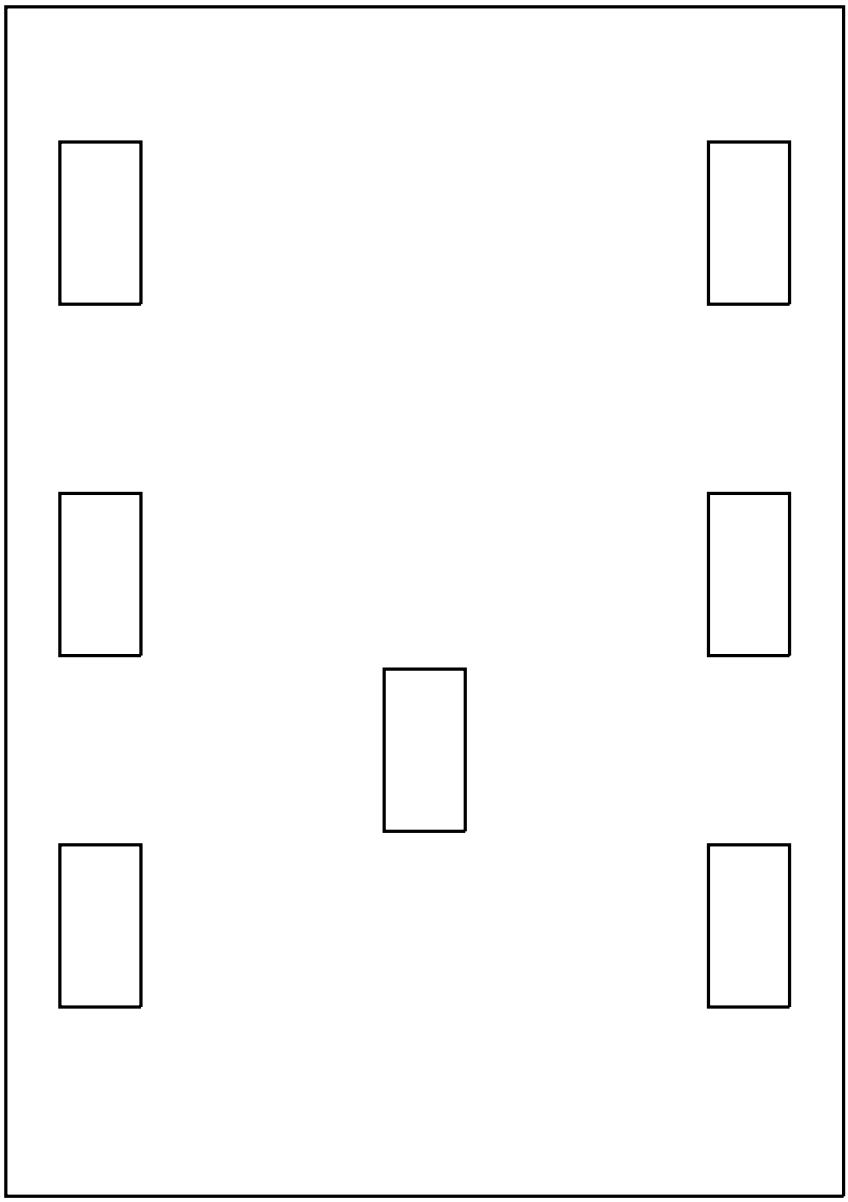
Fiches à photocopier

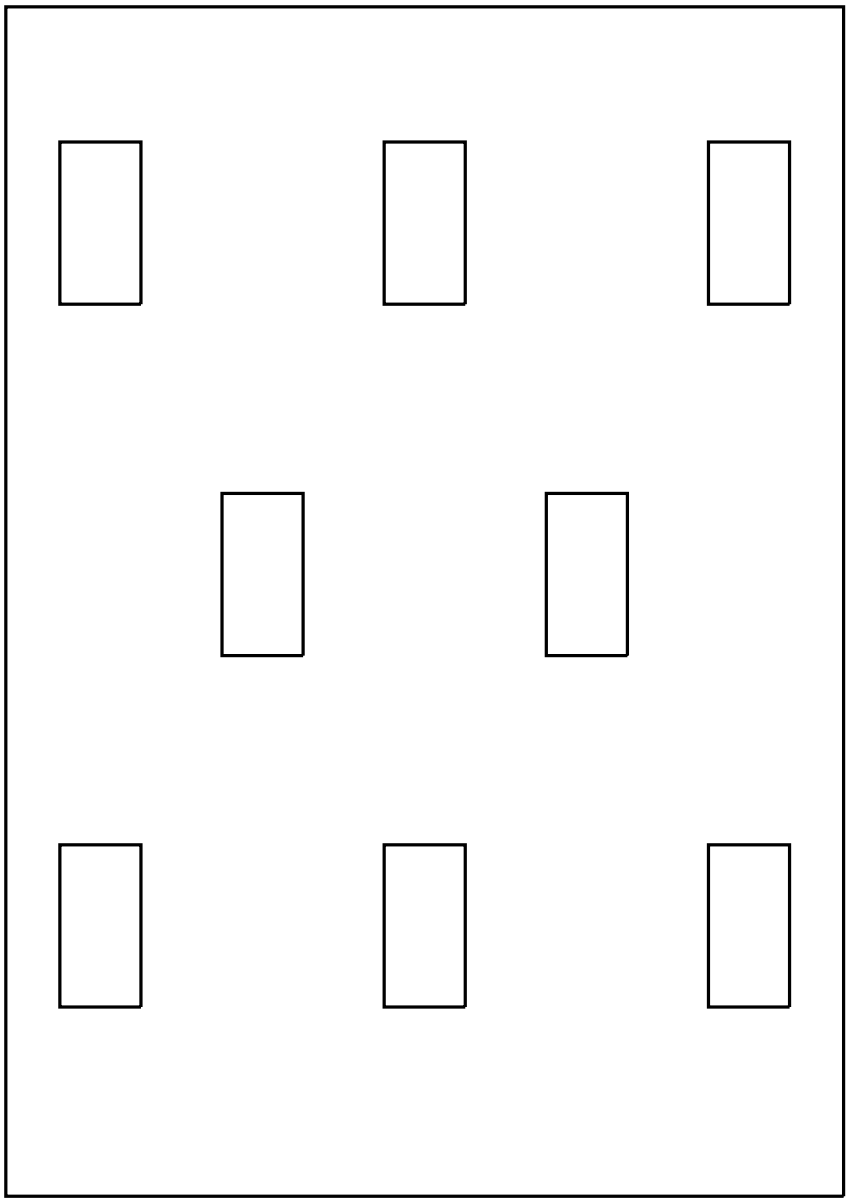


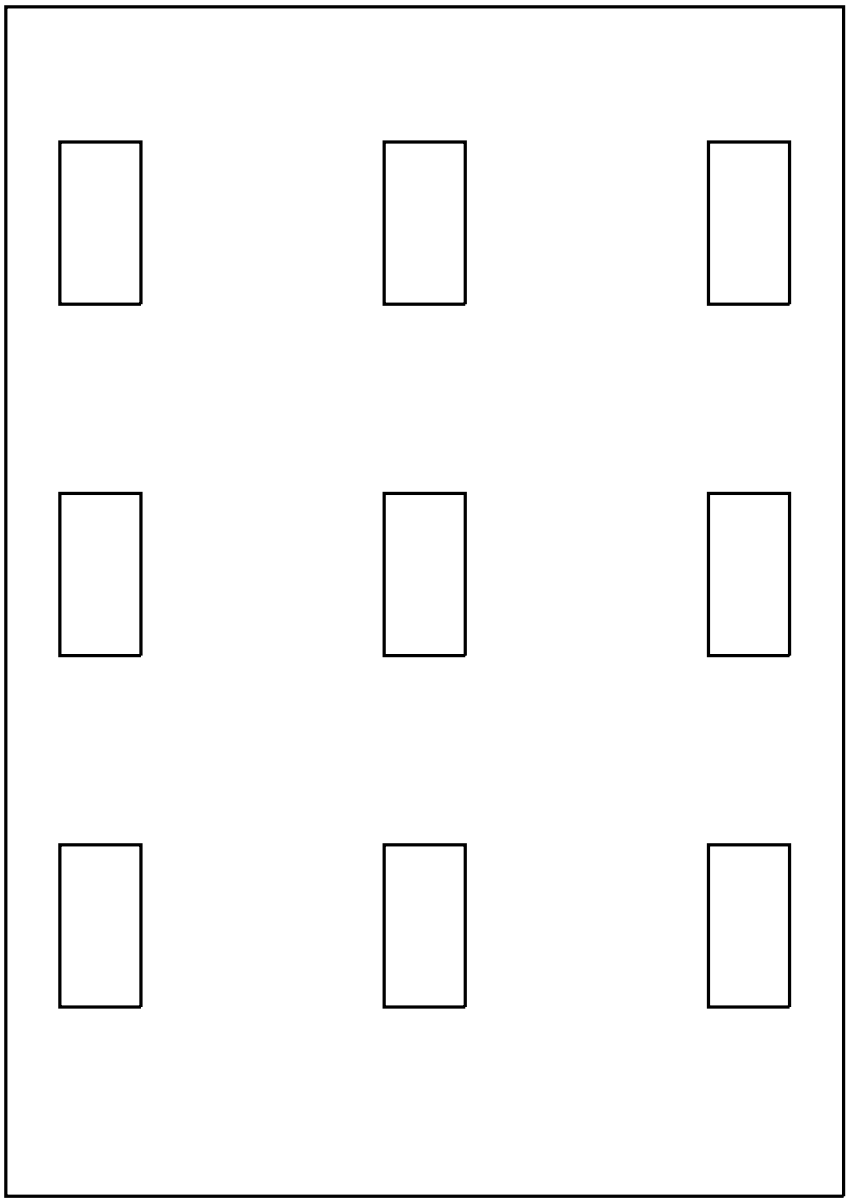


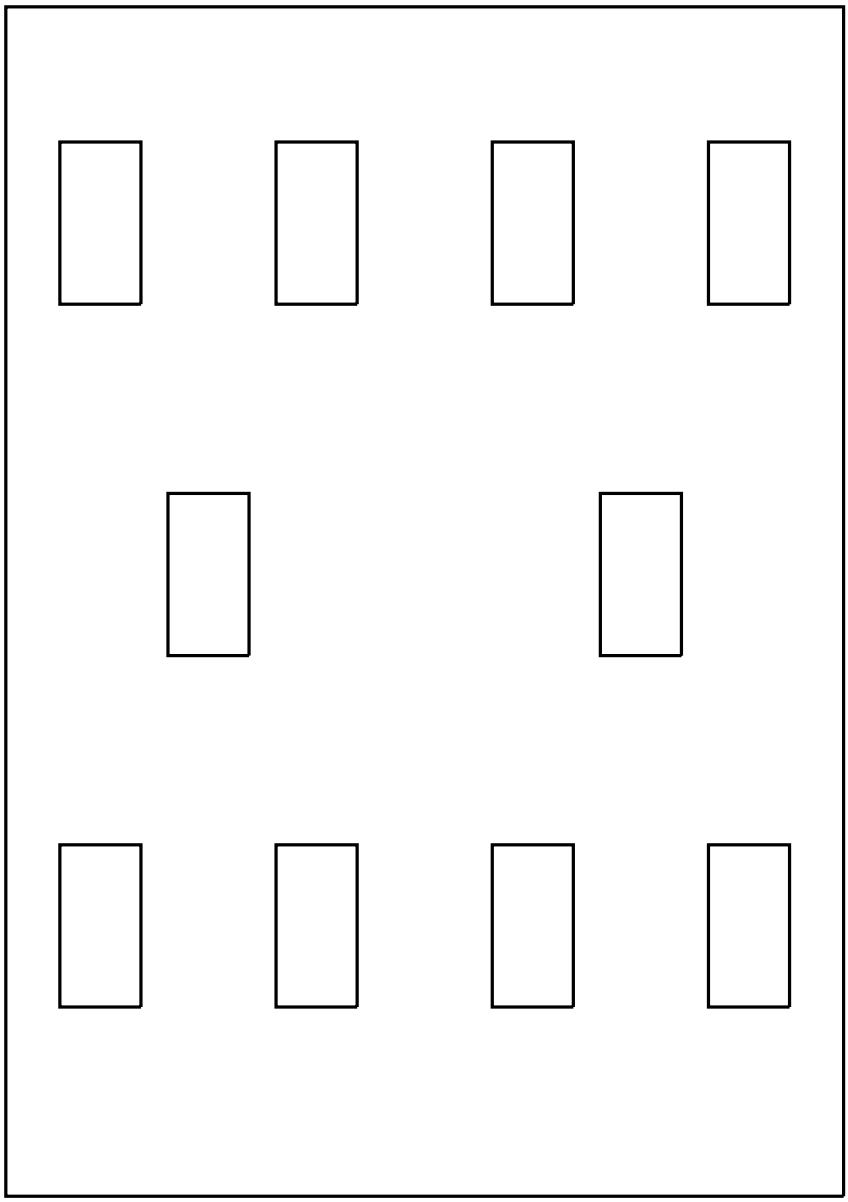


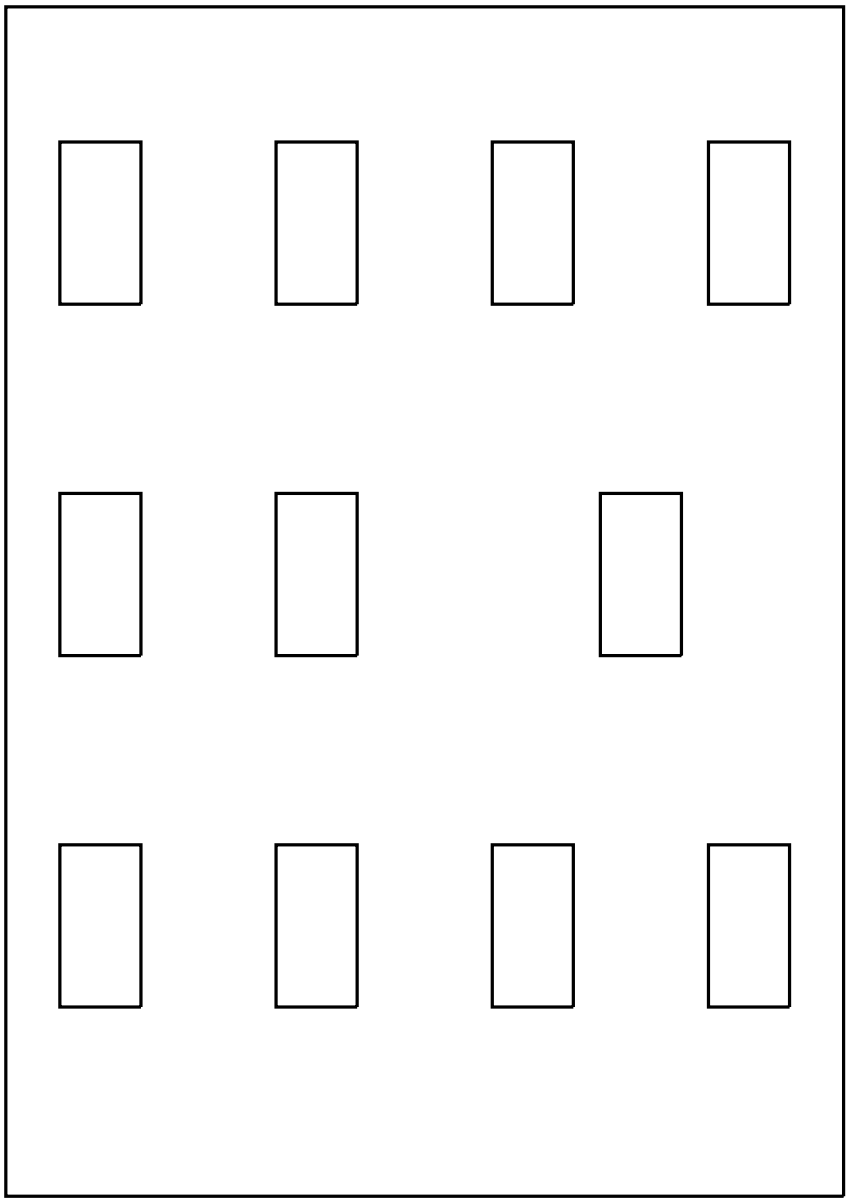


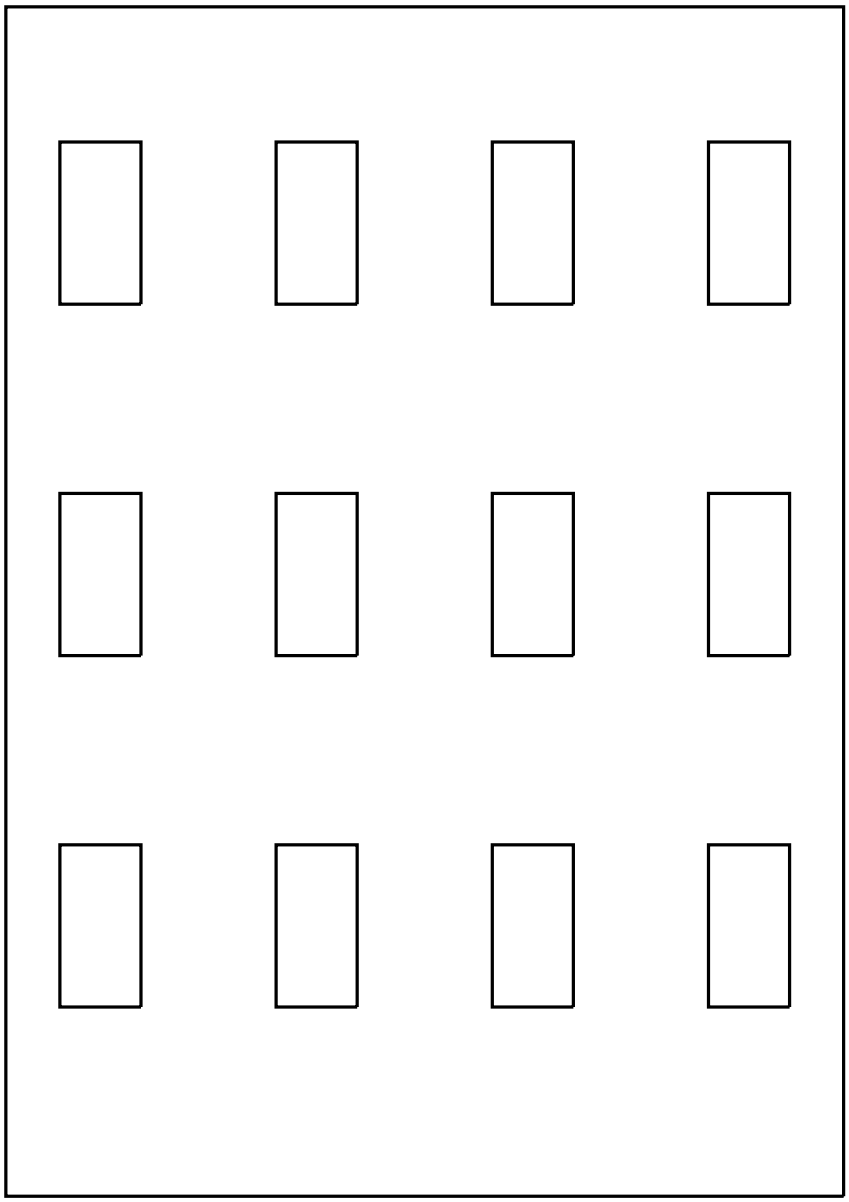


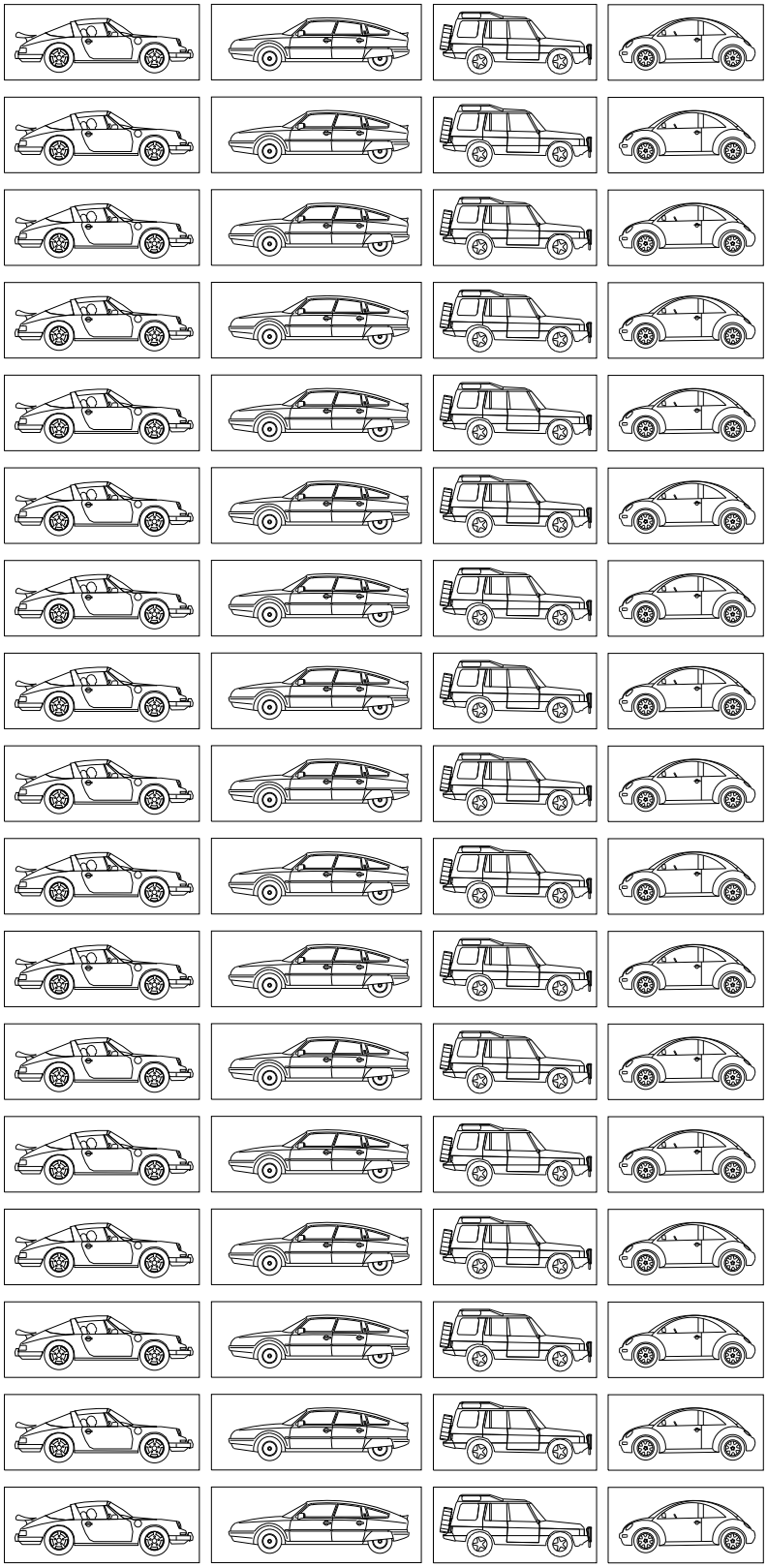




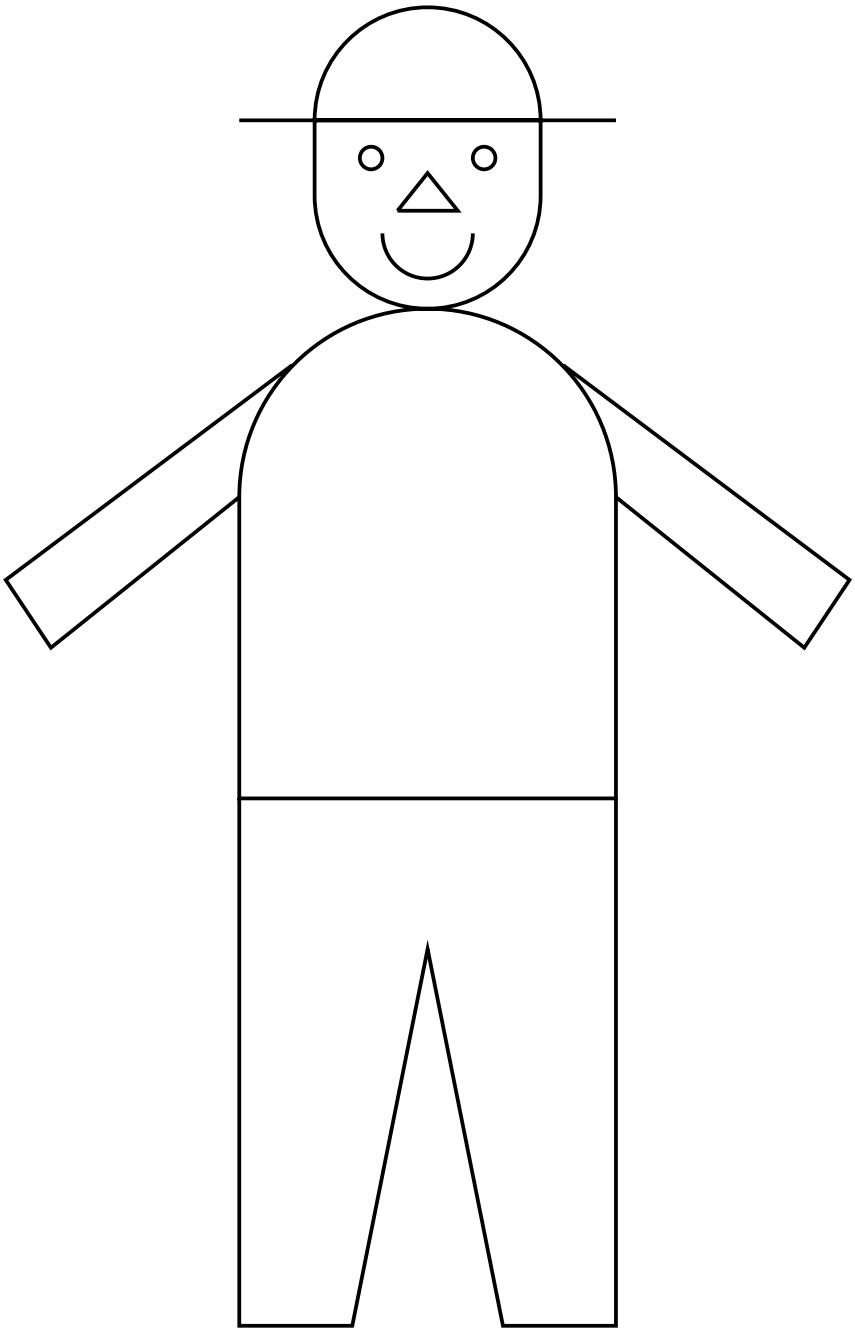


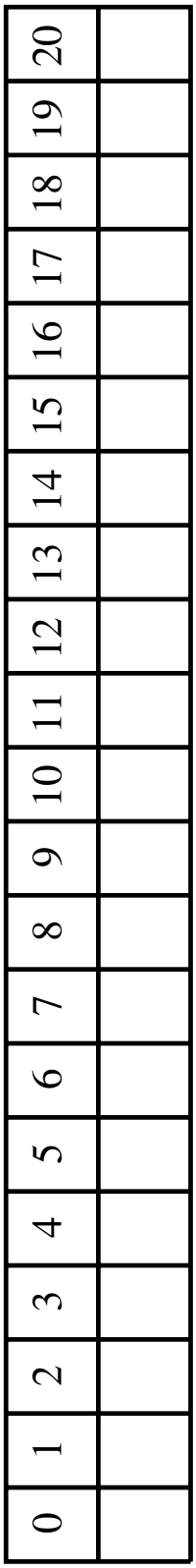






Prends deux bandelettes comportant le même nombre de gommettes. Ce nombre doit être égal au nombre de ronds sur le clown. Colle la première sous le dessin. Place les gommettes de la deuxième bandelette sur le costume du clown pour vérifier si ton choix est correct.




0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Comptines numériques (1)

La poule

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
Moi je compte jusqu'à neuf
avant de pondre mon œuf.
1, 2, 3, 4, 5, 6,
Si je compte jusqu'à six,
mon œuf est en pain d'épice.
1, 2, 3,
Si je compte jusqu'à trois,
mon œuf est en chocolat.

Les cubes

1 cube, 2 cubes, 3 cubes, 4 cubes, 5 cubes, 6 cubes, 7 cubes, 8 cubes, 9 cubes,
ça titube !
10 cubes, . . .
Patatras !
10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
Et voilà !
Tous les cubes sont en tas. . .

Violette, Violette

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
Violette, Violette.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
Violette à bicyclette.

Kourou

Tu cours où ?
À Kourou,
Dans le nord de la Guyane
Pour voir la fusée Ariane.
Elle décolle aujourd'hui,
5, 4, 3, 2, 1, partie !

Dix miniqui

Une minilune,
Deux minibœufs,
Trois minicroix,
Quatre minicartes,
Cinq minizincs,
Six minilits,
Sept minimiettes,
Huit mininuits,
Neuf miniveufs,
Dix miniqui,
Miniquoi, gare à toi !
C'est fini !

En rêvant, j'ai vu. . .

En rêvant, j'ai vu. . .
Un chien taper dans un tambourin ;
Deux macareux voler des œufs ;
Trois oies chanter dans les bois ;
Quatre canards pleurer dans le noir ;
Cinq requins sauter sur des coussins ;
Six souris planter des céleris ;
Sept poulettes faire du patin à roulettes ;
Huit brebis attraper des canaris ;
Neuf crapauds jouer du pipeau
Et dix fourmis en chemise de nuit
Qui m'ont crié : « Réveille-toi ! Assez dormi ! ».

Comptines numériques (2)

Sept petits enfants

Sept petits enfants,
quatre filles et trois garçons,
ont inventé cette chanson.
La première s'appelait Lundi :
elle était vraiment jolie.
La deuxième, c'était Mardi :
elle savait danser sans bruit.
La troisième, Mercredi,
pleurait toujours à midi.
La quatrième, Jeudi
marchait, marchait jour et nuit.
Le cinquième, Vendredi,
avait toujours plein d'amis.
Le sixième, Samedi,
faisait des jardins fleuris.
Dimanche était le dernier.
Il glissait sans s'arrêter
de nuage en arc-en-ciel
au milieu du ciel.

Les douze mois

Le premier :
Janvier ouvre le bal.
Le deuxième :
Février fête carnaval.
Le troisième :
Mars envoie ses giboulées.
Le quatrième :
Avril ne se découvre pas d'un fil.
Le cinquième :
Mai offre du muguet.
Le sixième :
Juin cueille des cerises.
Le septième :
Juillet part en vacances.
Le huitième :
Août joue sans chemise.
Le neuvième :
Septembre fait sa rentrée.
Le dixième :
Octobre court dans le vent.
Le Onzième :
Novembre ramasse les feuilles.
Le douzième :
Décembre décore le sapin.

Comptines numériques (3)

Voici ma main

Voici ma main
Elle a cinq doigts
En voici deux
En voilà trois
Voici ma main
Elle a cinq doigts
En voici quatre
Et un tout droit.

Les mains

Un, deux,
Un, deux, trois,
Ça fait une main.
Un, deux, trois,
Quatre, cinq,
Ça fait cinq doigts.
Six, sept, huit, neuf, dix,
Ça fait deux mains
Qui se disent bonjour.

1, 2, v'là les œufs

1, 2, v'là les œufs
3, 4, faut les battre !
5, 6, c'est Alice
7, 8, qui les cuit !
9, 10, c'est Félix
11, 12, qui les couve !

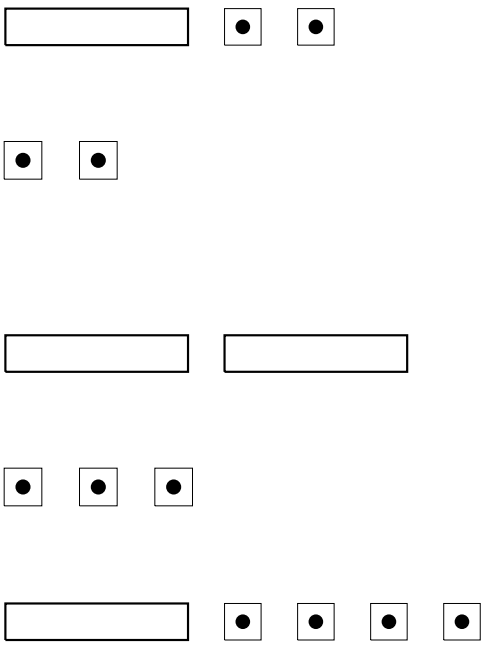
Le singe

Un petit singe comptait ses dents
Vingt-et-une : la lune
Vingt-deux : le feu
Vingt-trois : la croix
Vingt-quatre : l'emplâtre
Vingt-cinq : c'est la fin.
Des saucisses et du boudin.

1, 2, 3, 4, 5, la lune est éteinte

1, 2, 3, 4, 5, la lune est éteinte
6, 7, 8, 9, 10, l'étoile se glisse
11, 12, 13, 14, chez le rouge-gorge
15, 16, 17, qui chante à tue-tête
18, 19, car il voit dans l'œuf
20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,
son petit enfant !

Indique le nombre représenté à côté du dessin.



Dessine les réglettes.

8 :

4 :

2 :

3 :

7 :

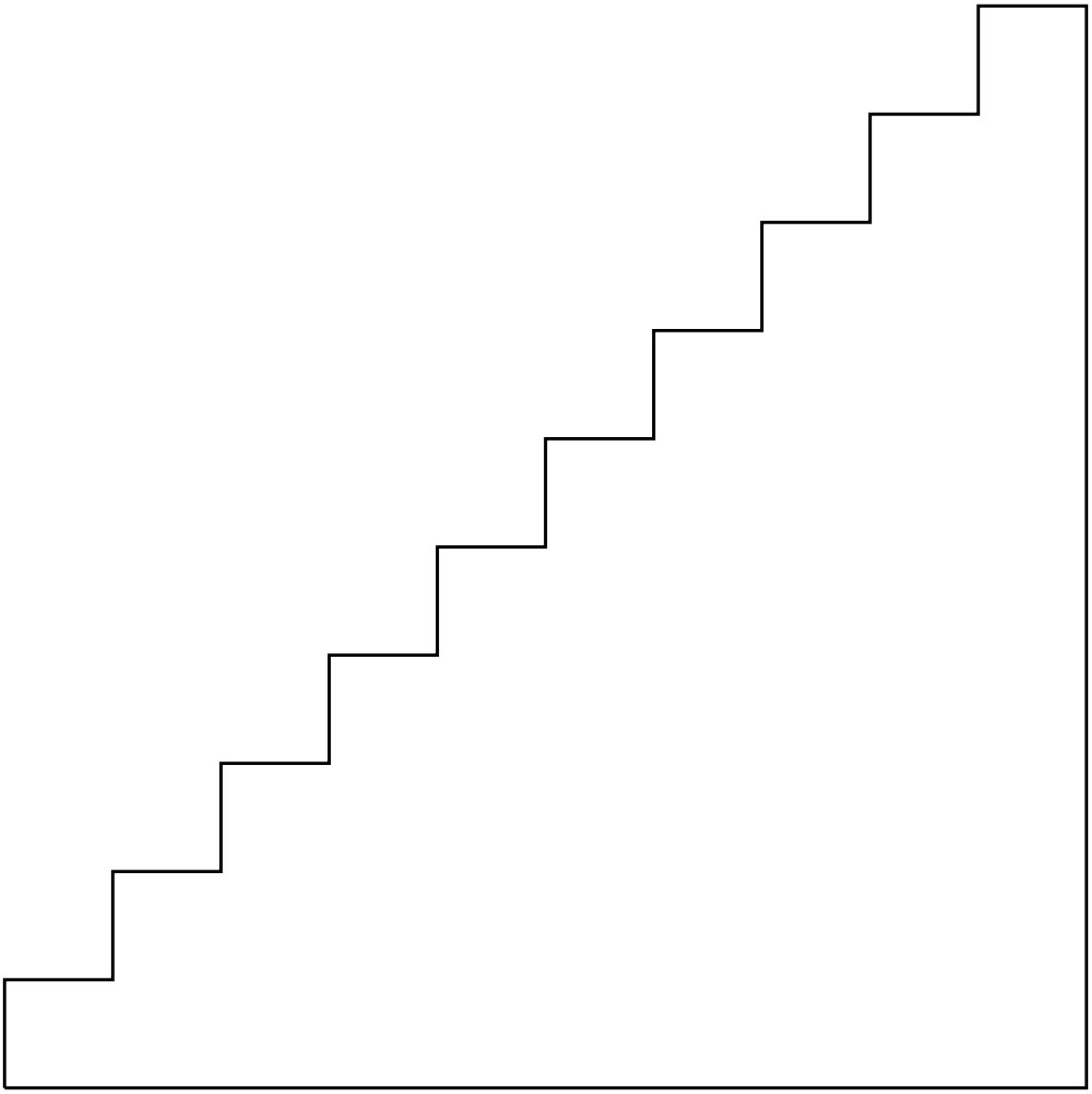
6 :

9 :

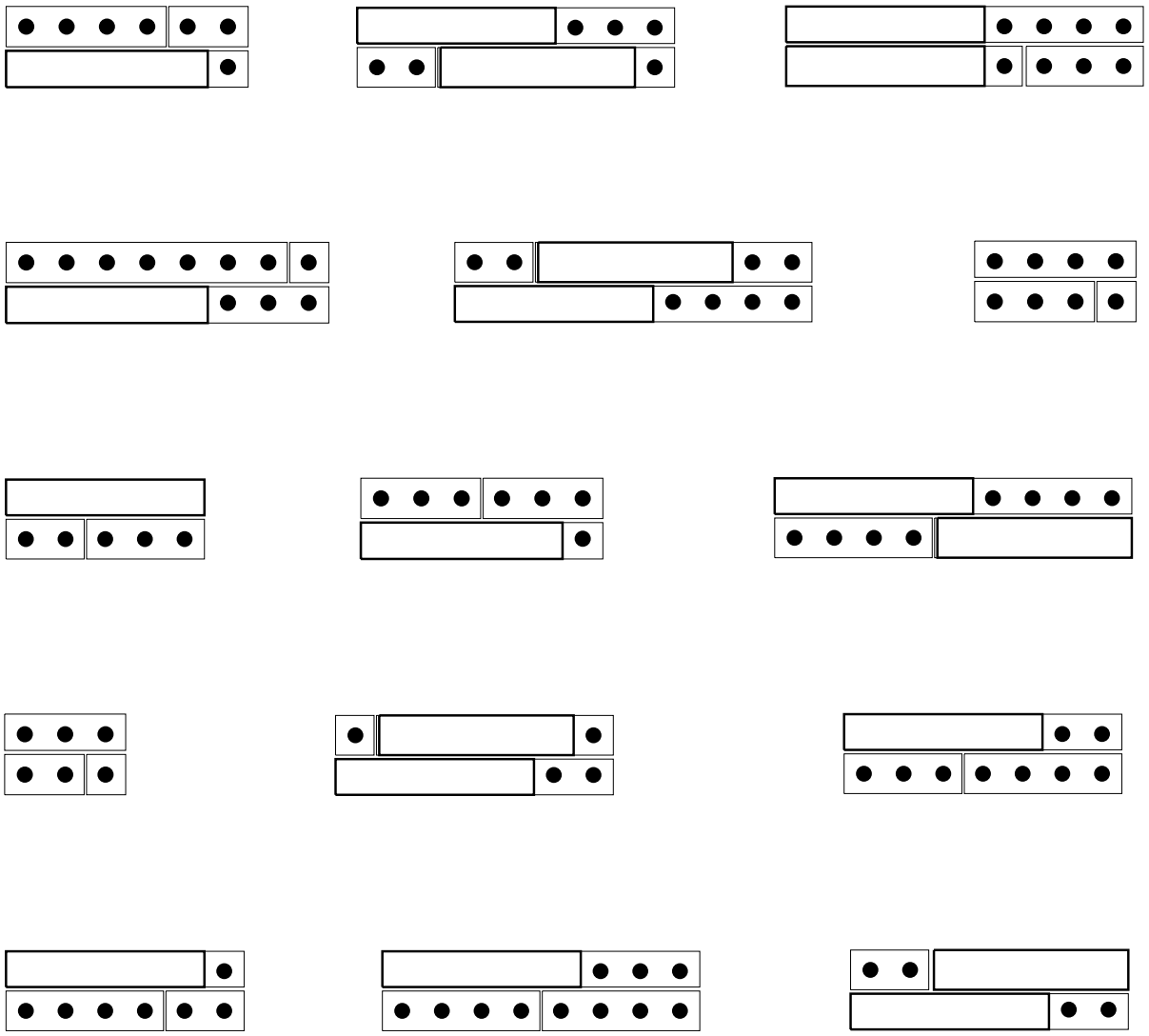
1 :

5 :

10 :



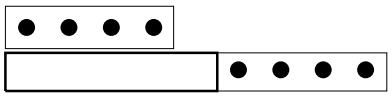
Écris le calcul correct en dessous de chaque dessin.



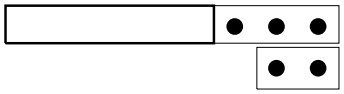
Dessine les réglettes pour représenter chaque opération.

3+6=9	8=3+5	6=2+4
4=3+1	4+4=8	9=7+2
7=4+3	5=3+2	5+1=6
8=6+2	3+4=7	9=4+5
1+1=2	6=1+5	6+1=7

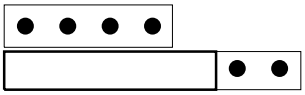
Ajoute la réglette manquante. Complète le calcul pour qu'il soit correct.



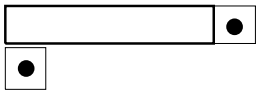
4+. . .=9



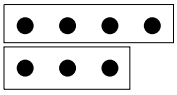
8=. . .+2



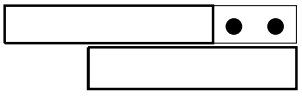
4+. . .=7



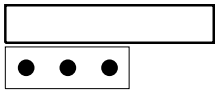
6=1+. . .



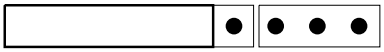
4=3+. . .



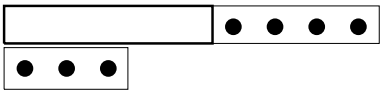
7=. . .+5



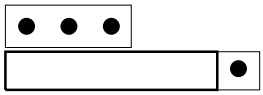
5=3+. . .



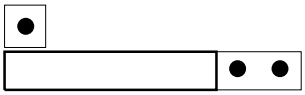
6+3=. . .



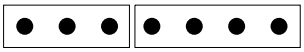
9=3+. . .



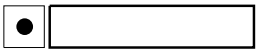
3+. . .=6



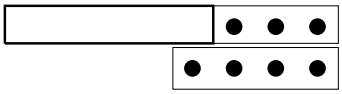
1+. . .=7



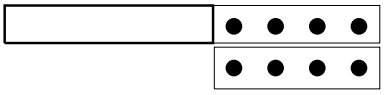
3+4=. . .



1+5=. . .



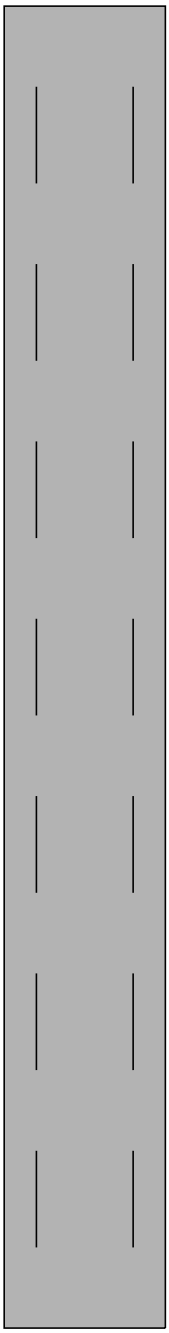
8=. . .+4

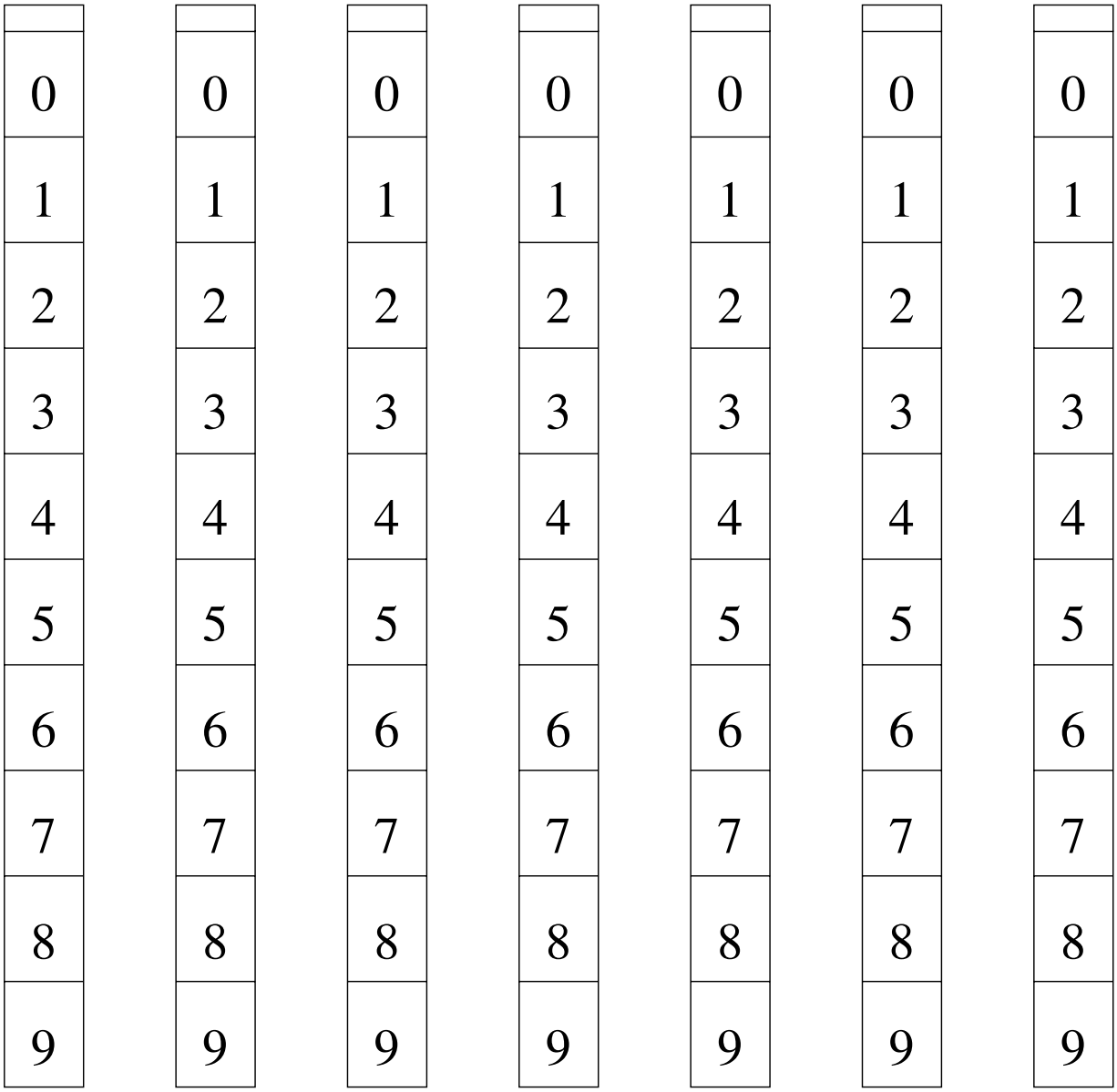


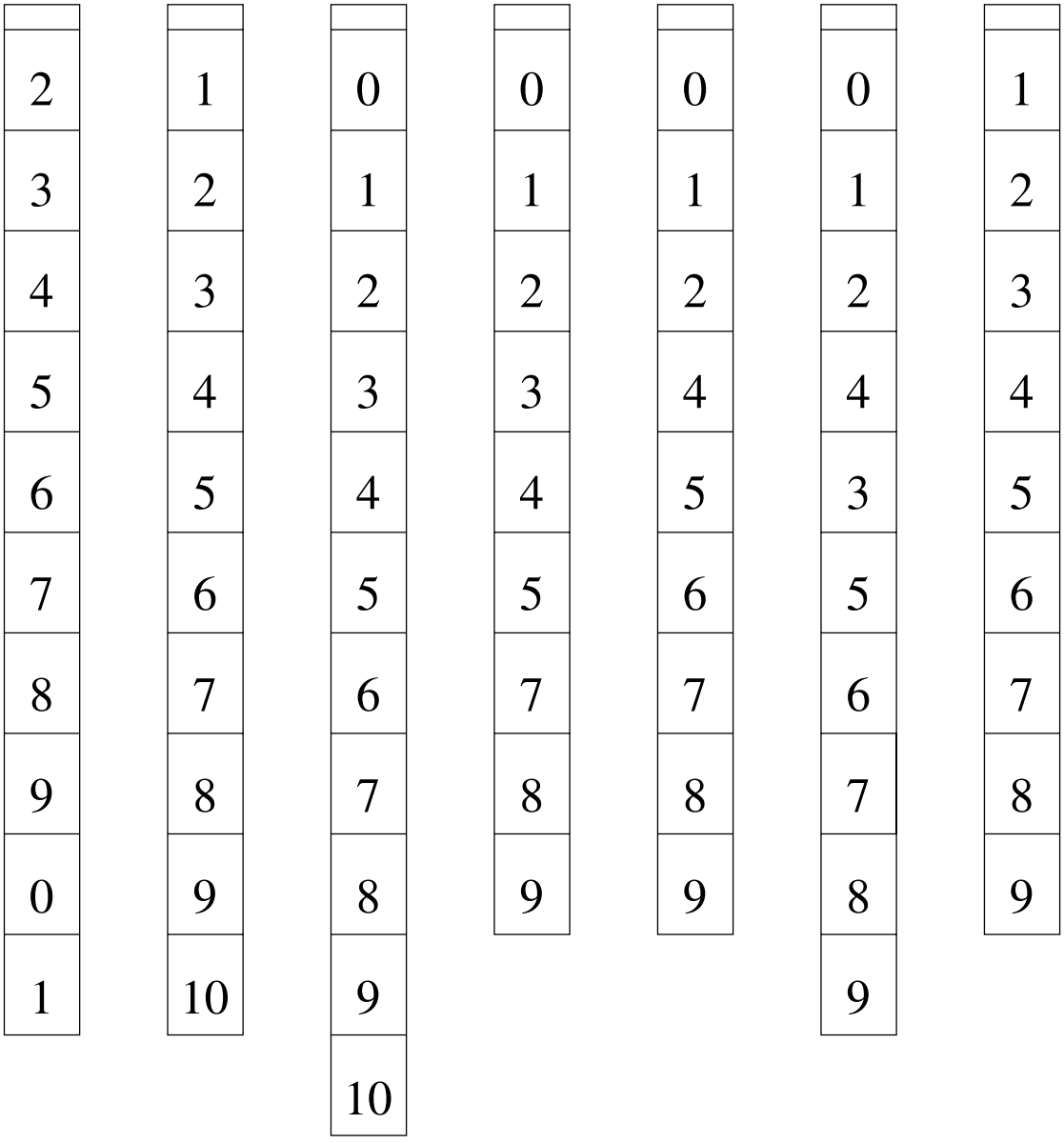
9=. . .+4

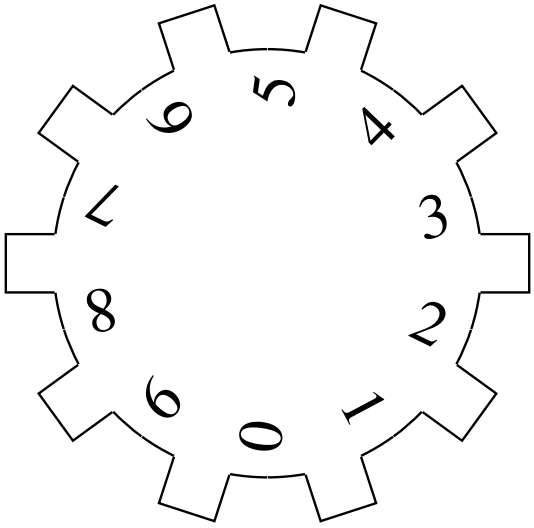
Complète pour obtenir une égalité.

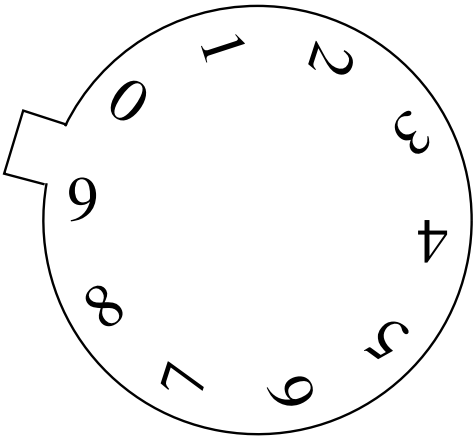
$7 = 4 + \ldots$	$5 = 2 + \ldots$	$3 + 1 = \ldots$
$\cdots + 4 = 6$	$\cdots = 4 + 2$	$5 + \cdots = 8$
$9 = \cdots + 2$	$6 + 3 = \ldots$	$\cdots + 2 = 4$
$\cdots = 5 + 4$	$6 + \cdots = 7$	$8 = \cdots + 3$
$5 = 4 + \ldots$	$7 + 1 = \ldots$	$\cdots + 1 = 2$
$\cdots = 3 + 5$	$1 + \cdots = 3$	$7 = \cdots + 5$
$8 = 4 + \ldots$	$5 + 2 = \ldots$	$\cdots + 3 = 4$
$\cdots = 5 + 2$	$4 + \cdots = 5$	$9 = \cdots + 4$
$8 = 1 + \ldots$	$2 + 6 = \ldots$	$\cdots + 6 = 9$
$\cdots = 2 + 2$	$4 + \cdots = 8$	$7 = \cdots + 1$



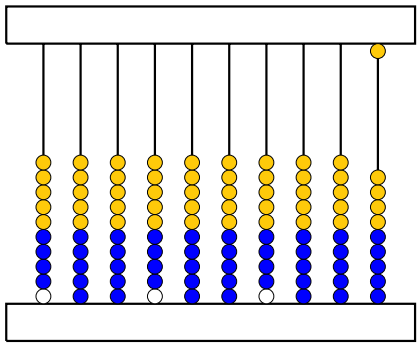

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9


2 3 4 5 6 7 8 9 0 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 4 5 6 7 8 9
0 1 2 4 3 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9

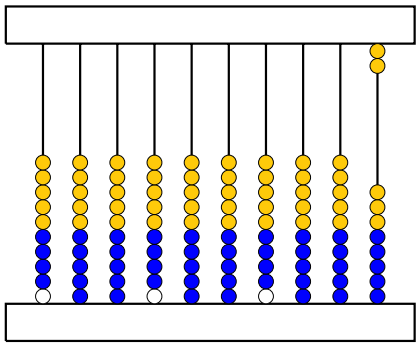

5
4
3
2
1
0
9
8
7
6


1
2
3
4
5
6
7
8
9
0

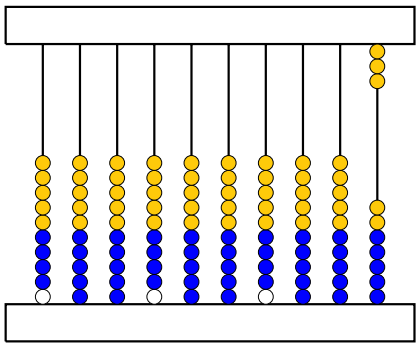
Observe bien les bouliers qui sont dessinés sur cette feuille. Quelle est la valeur des boules de la première tige (à droite), de la deuxième tige ?



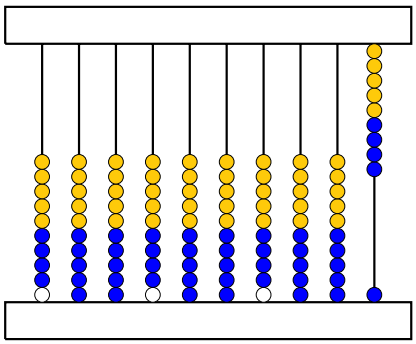
1



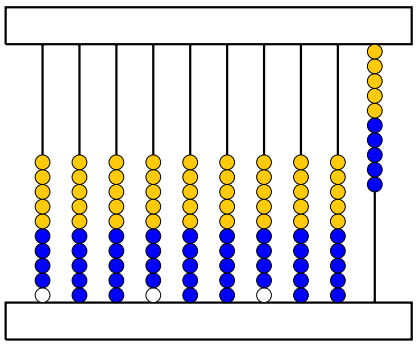
2



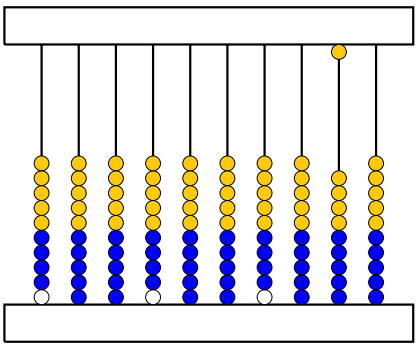
3



9

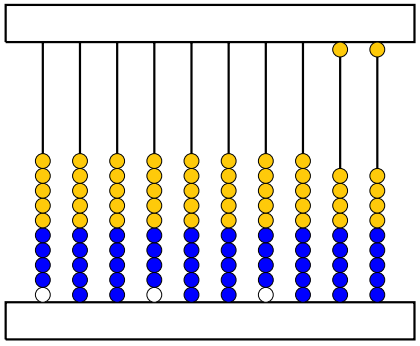


10

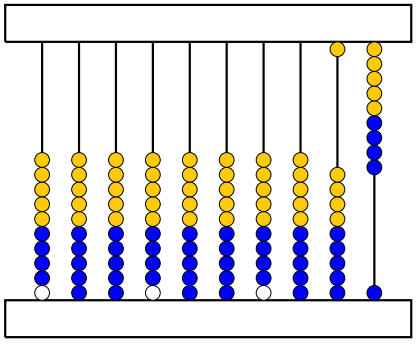


10

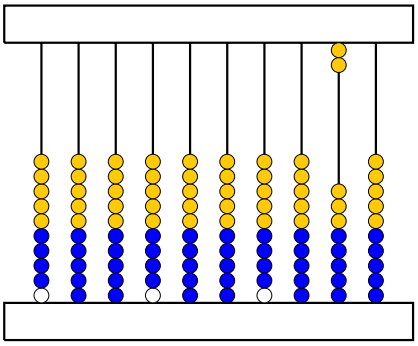
Quelle est la valeur des boules de la première tige (à droite), de la deuxième tige, . . . ?



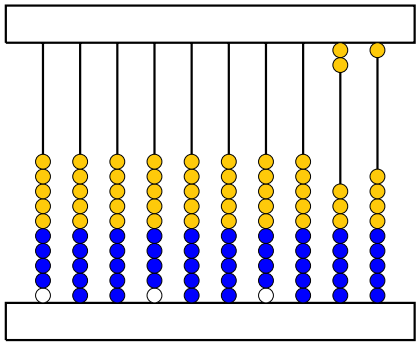
11



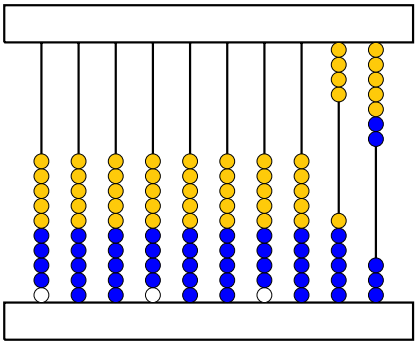
19



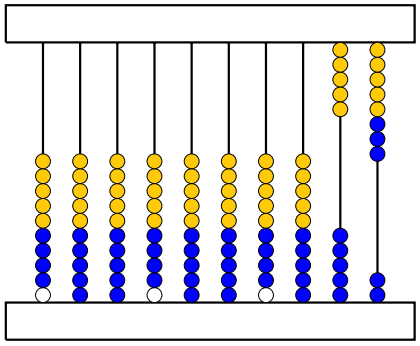
20



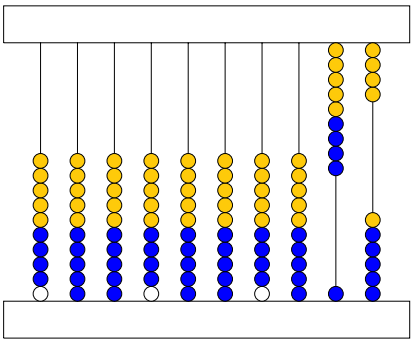
21



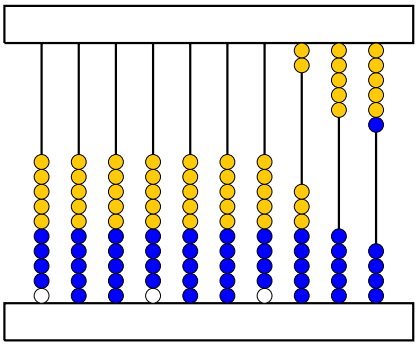
47



58

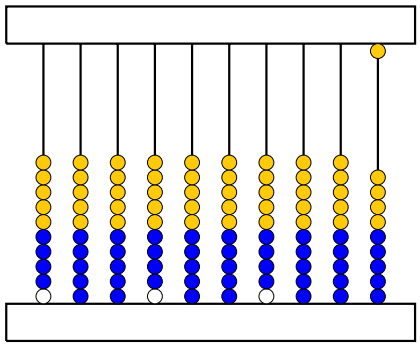


94

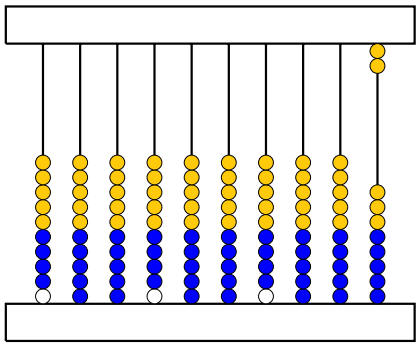


256

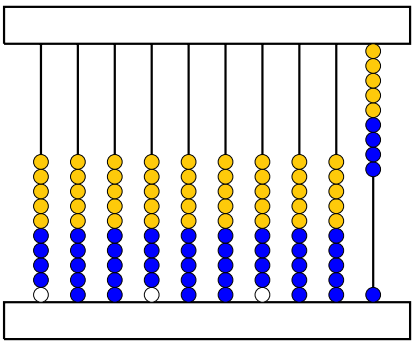
Observe bien les bouliers qui sont dessinés sur cette feuille. Quelle est la valeur des boules de la première tige (à droite), de la deuxième tige ?



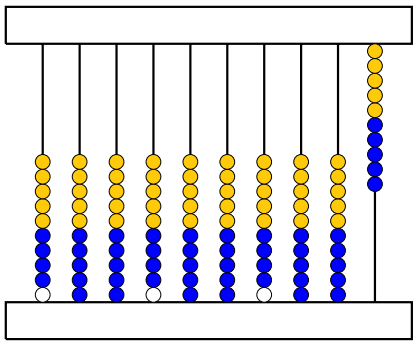
1



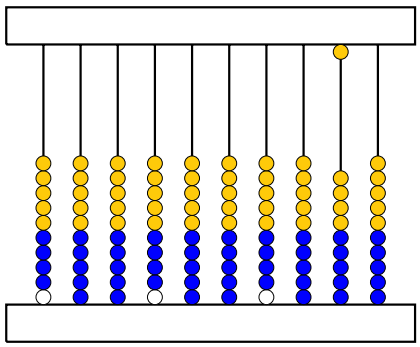
2



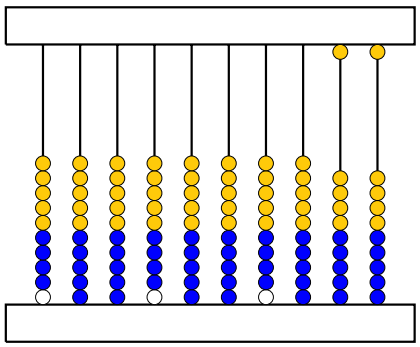
9



10

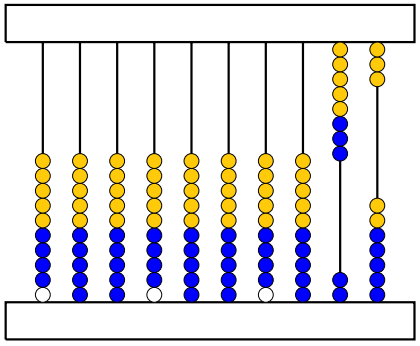


10

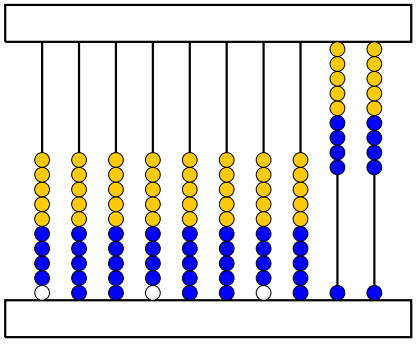


11

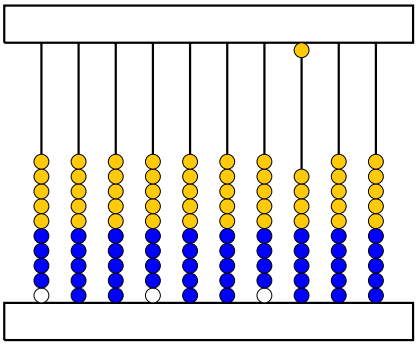
Quelle est la valeur des boules de la première tige (à droite), de la deuxième tige, . . . ?



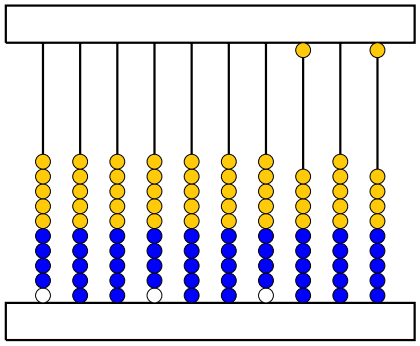
83



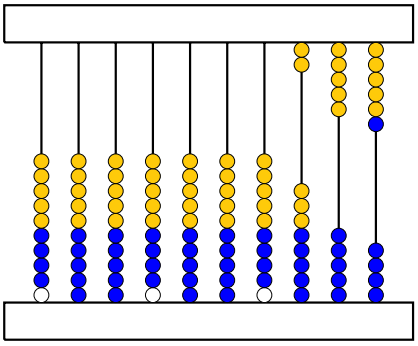
99



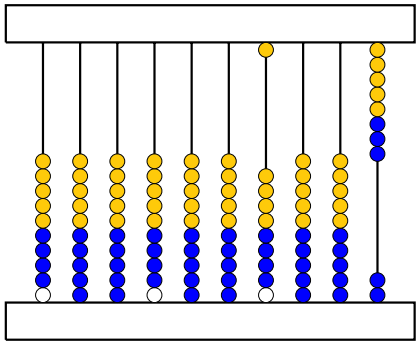
100



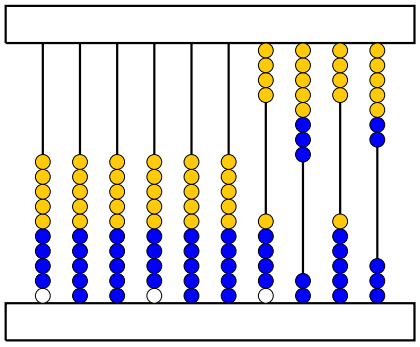
101



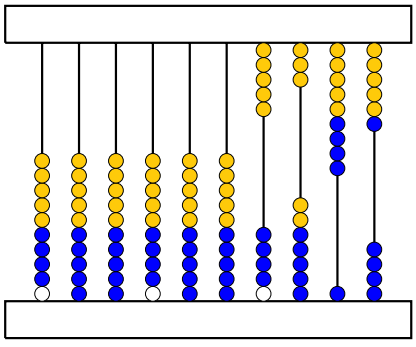
256



1 008

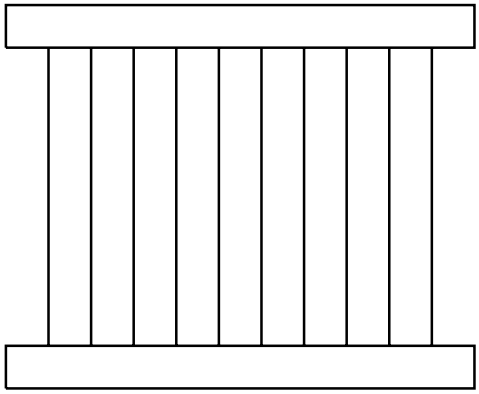


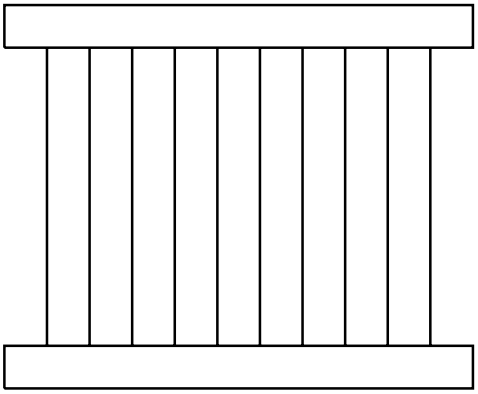
4 847

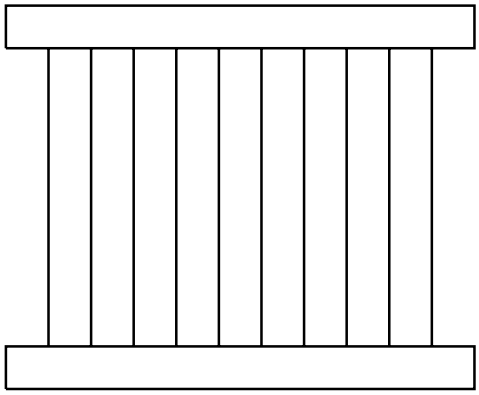


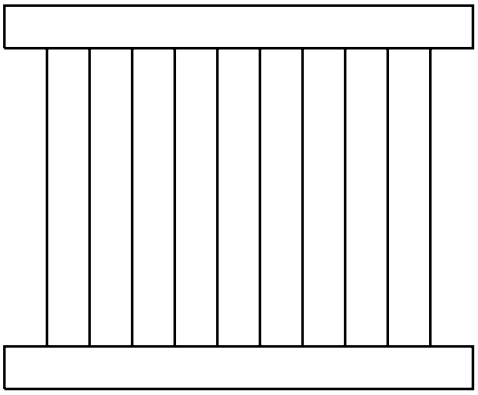
5 396

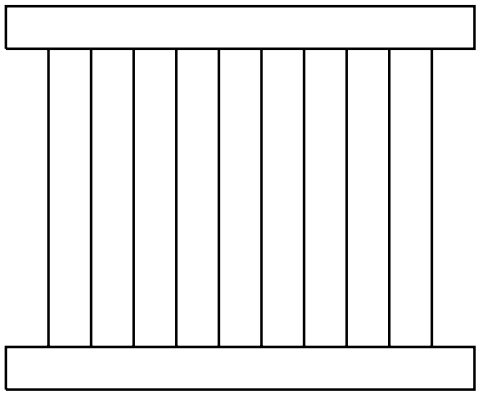
Quels nombres sont représentés ? Indique la valeur sous chacun des bouliers.

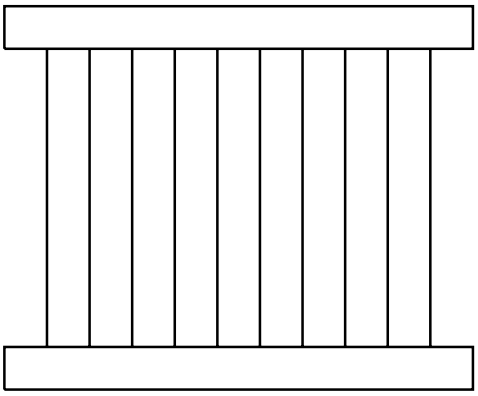








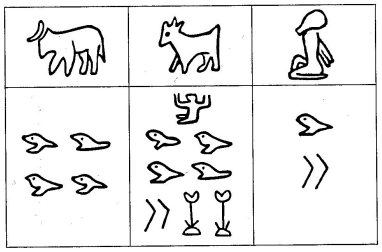




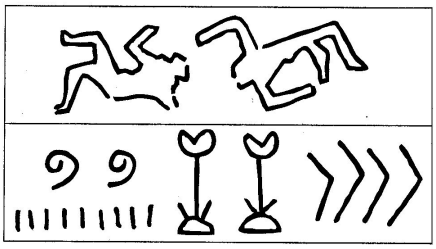
Numération égyptienne

Dans l'Égypte ancienne, certains pharaons faisaient élever des temples en l'honneur de leurs dieux. Ils en faisaient décorer les murs de sculptures et de peintures illustrant les épisodes les plus glorieux de leur vie ou des scènes de la vie quotidienne. Voici les reproductions de trois documents découverts dans deux de ces temples. Observe-les bien. Complète ensuite le tableau du bas de la page.

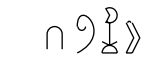
Le premier indique le nombre d'hommes, de chèvres et de bœufs capturés au cours d'une bataille gagnée par le pharaon de Hiérakonpolis, soit : 120 000 hommes, 1 422 000 chèvres et 400 000 boeufs.



Le second indique le nombre d'ennemis massacrés au cours de cette même bataille, soit : 42 209 hommes.



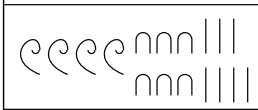
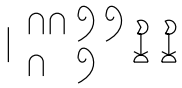
Le troisième fait l'inventaire des richesses d'une basse-cour, soit : 121 200 pigeons, 11 110 oies, 121 022 canards et 111 200 grues.

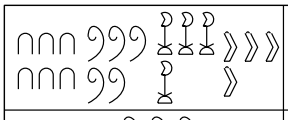
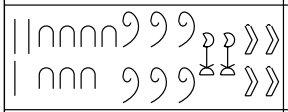
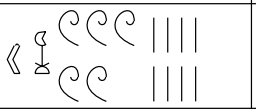
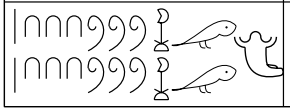
pigeons	
oies	
canards	
grues	

						
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

À partir du tableau ci-dessus, écris les nombres égyptiens suivants dans notre système.

Écris les nombres suivants dans le système égyptien.

54	
387	
1 376	
5 555	
8 004	

26 214	
12 543	
331 205	
3 100 000	
5 000 034	

Numération romaine

Observe bien les documents qui te sont proposés. Tu as certainement déjà rencontré ce type d'écriture. C'est comme cela que les Romains représentaient leurs nombres. Nous les avons traduits dans notre système de numération. Recherche la signification des symboles présents. Complète le tableau.



ligne 4	LI	51
ligne 5	LXXIIII	74
ligne 5	CXXIII	123
ligne 6	CLXXX	180
ligne 7	CCXXXI	231
ligne 7	CCXXXVII	237
ligne 8	CCCXXI	321
ligne 12	DCCCCXVII	917

V	X	C	I	M	L	D

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

À partir du tableau ci-dessus, écris les nombres romains suivants dans notre système.

VII	
XXVI	
XXXVIII	
LXVI	
CLXXVI	
CCXXII	

CCCLII	
CX	
MDCLXVI	
MMMDLVI	
MDCCLXVII	
MLI	

Écris les nombres suivants dans le système romain.

9	
17	
67	
238	
361	
512	

1 340	
2 585	
4 003	
3 326	
2 781	
4 657	

Numération alphabétique grecque

Dans l'Antiquité, les Grecs n'utilisaient pas de signes spéciaux pour écrire les nombres, mais ils se servaient de leur alphabet. À l'époque, ils utilisaient les vingt-sept lettres que voici.

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{\text{Ϙ}}$
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\phi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\text{ϡ}}$

Observe maintenant les exemples suivants puis, recherche la signification de chacun des symboles et complète le tableau.

$\overline{\zeta}$	7
$\overline{\kappa\delta}$	24
$\overline{\pi\gamma}$	83
$\overline{\rho\nu\gamma}$	153
$\overline{\upsilon\nu\varsigma}$	456
$\overline{\psi o\theta}$	779
$\overline{{}'\alpha\tau\kappa\epsilon}$	1 325

$\overline{\sigma\xi\epsilon}$	265
$\overline{{}'\alpha\omega\lambda\varsigma}$	1 836
$\overline{{}'\beta\text{ϡ}\text{Ϙ}\alpha}$	2 991
$\overline{{}'\eta\mu\beta}$	8 042
$\overline{{}'\gamma\tau\iota}$	3 310
$\overline{{}'\theta\phi\eta}$	9 508
$\overline{{}'\gamma\chi}$	3 600

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{\text{Ϙ}}$
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\phi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\text{ϡ}}$

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{\iota}$	$\overline{\kappa}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{\varphi}$
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\phi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{\lambda}$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

À partir du tableau ci-dessus, écris les nombres suivants dans notre système.

$\overline{\lambda\gamma}$	
$\overline{\varphi\theta}$	
$\overline{\pi\varsigma}$	
$\overline{\iota\zeta}$	
$\overline{\rho\kappa\gamma}$	
$\overline{\omega\mu\eta}$	

$\overline{{}'\epsilon\psi\xi\varsigma}$	
$\overline{{}'\theta\chi\iota\beta}$	
$\overline{{}'\alpha\chi\varphi\epsilon}$	
$\overline{{}'\varsigma\omega\nu\eta}$	
$\overline{{}'\gamma\mu\gamma}$	
$\overline{{}'\delta\lambda\pi}$	

Écris les nombres suivants dans le système grec.

54	
67	
98	
384	
832	
105	

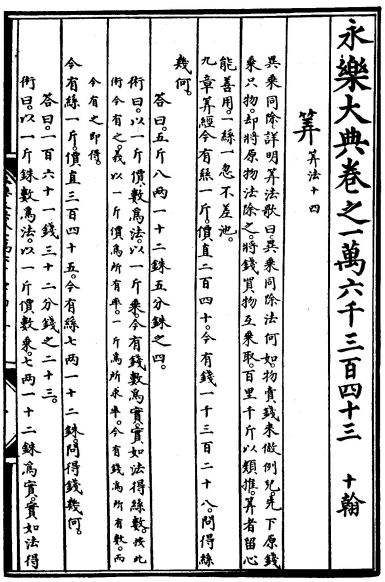
4 673	
2 745	
3 482	
8 551	
1 209	
9 090	

critères / systèmes	nombre de symboles	base employée	existence d'un zéro	importance de la position	longueur des écritures	nombre le plus grand possible
numération égyptienne						
numération romaine						
numération grecque						
notre numération						

Numération chinoise

Les Chinois écrivaient généralement de haut en bas et de droite à gauche. Actuellement, on préfère disposer les symboles horizontalement de gauche à droite. Voici une page d'un document mathématique chinois du XVe siècle et la transcription actuelle de certaines de ses parties.

Observe bien les exemples proposés et essaie de comprendre comment sont formés les nombres écrits dans la numération chinoise. Tu peux t'aider du tableau de correspondance du bas de la page.


永樂大典卷之一萬六千三百四十三　十翰

筭　筭法十四

異乘同除詳明筭法歌曰異乘同除法何如物貴錢來做例兒先下原錢乘只物却將原物法除之將錢買物互乘聚百里千斤以類推筭者留心能善用一絲一忽不差池

九章筭經今有絲一斤價直二百四十今有錢一千三百二十八問得絲幾何

答曰五斤八兩一十二銖五分銖之四

術曰以一斤價數爲法以一斤乘今有錢數爲實實如法得絲數按此術今有之義以一斤價爲所有乘一斤爲所求乘今有錢爲所有數兩今有之即得

今有絲一斤價直三百四十五今有絲七兩一十二銖問得錢幾何

答曰一百六十一錢三十二分錢之二十三

術曰以一斤銖數爲法以一斤價數乘七兩一十二銖爲實實如法得

六	6
一十九	19
三十二	32
八十四	84
三百四十五	345
七百六十一	761

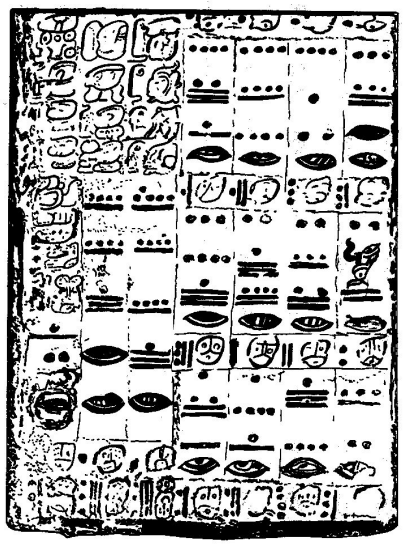
二百七	207
六千三百五十二	6 352
一千九百八	1 908
一萬六千三百四十三	16 343
八萬一千三百四十九	81 349
七萬五	70 005

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10 000

Numération maya

Les Mayas étaient les habitants de certains états d'Amérique centrale (Guatemala, Mexique). Entre le IVe et le IXe siècle, on a pu voir apparaître leur façon de compter. Voici un extrait d'un document maya et la traduction de certaines de ses parties dans notre numération actuelle.

Observe bien les nombres écrits dans la numération maya qui te sont présentés. Essaie de comprendre comment sont formés ces nombres.

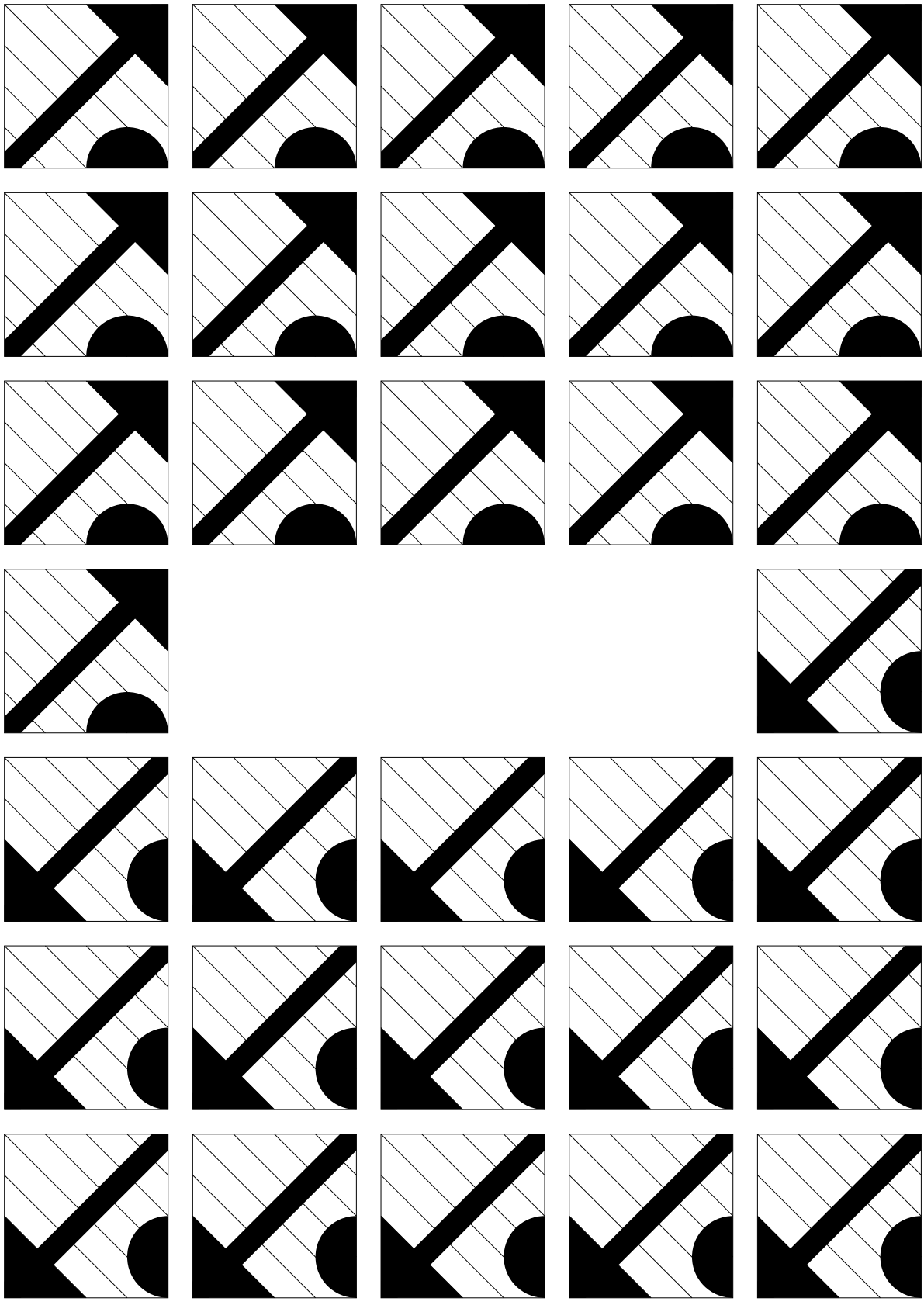


	6
	13
	19
	20
	21
	28

	39
	40
	87
	124
	251
	348

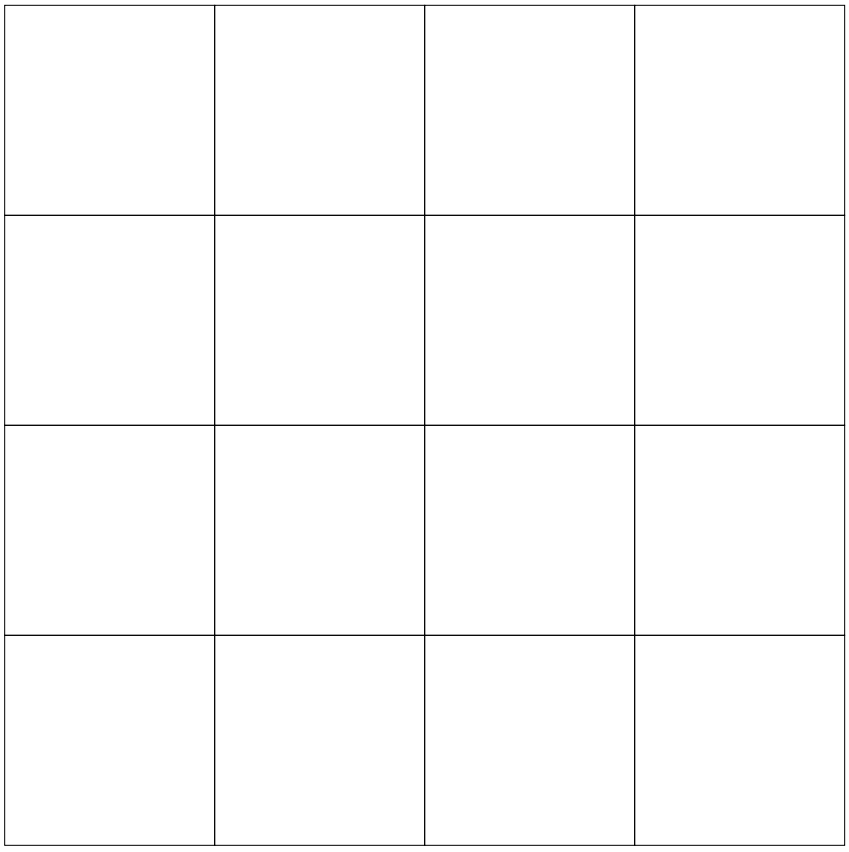
		

systèmes \ critères	nombre de symboles	base employée	existence d'un zéro	importance de la position	longueur des écritures	limite de représentation
numération égyptienne						
numération romaine						
numération grecque						
numération chinoise						
numération maya						
notre numération						

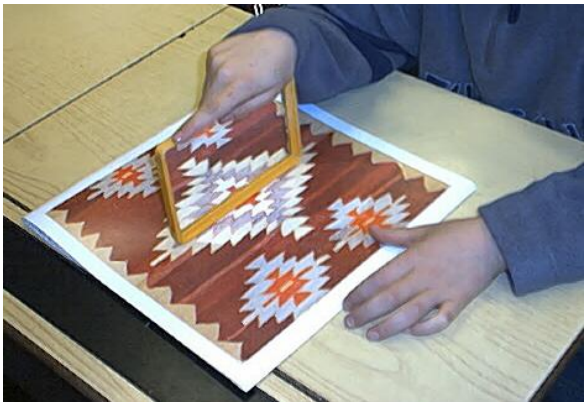


Je réalise un tema. . .

Colle 16 pièces sur la fiche de manière à obtenir quelque chose de joli.



L'**axe de symétrie** d'une figure est une droite qui partage la figure en deux morceaux, chacun étant l'image de l'autre dans un miroir.

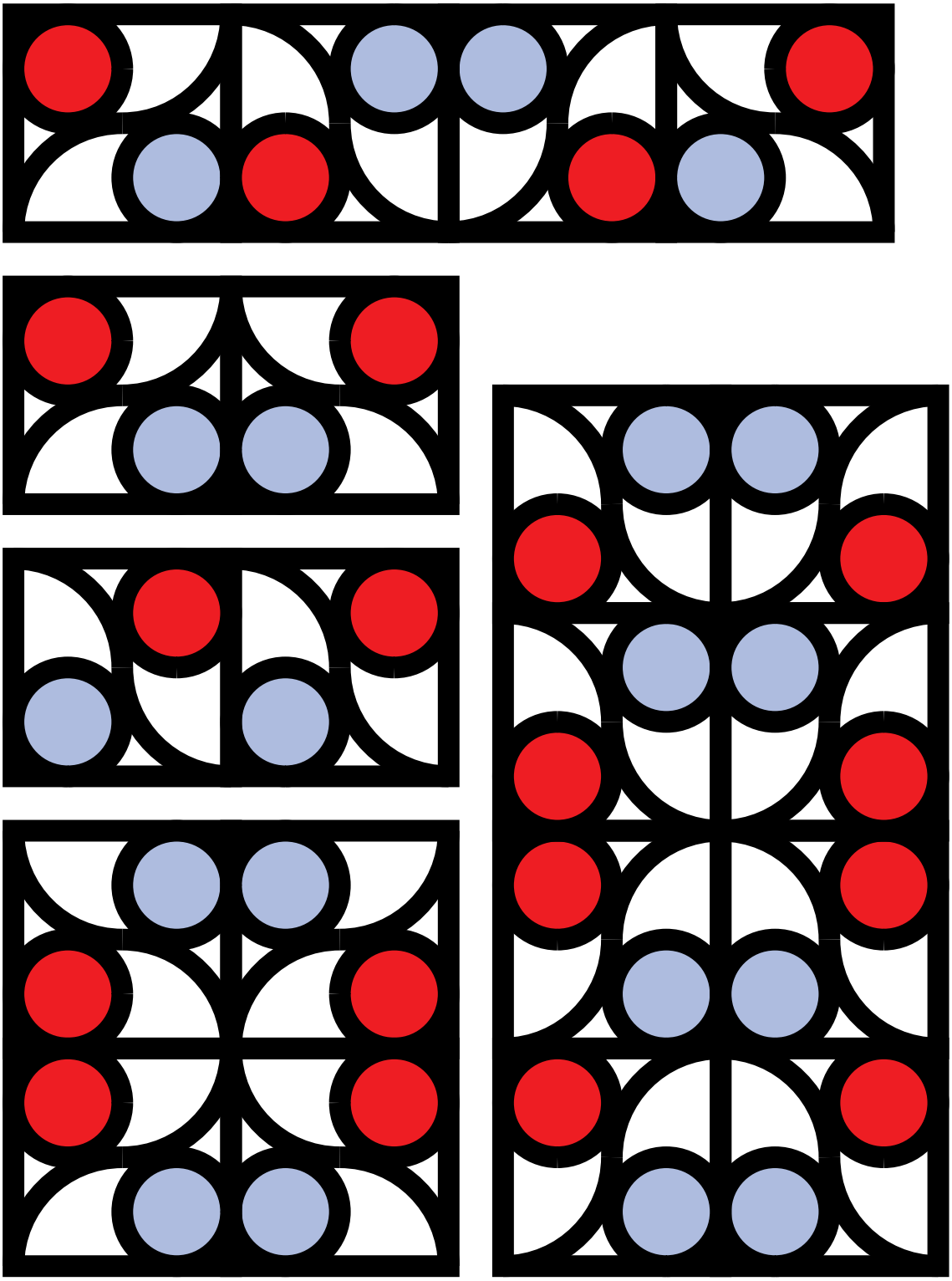


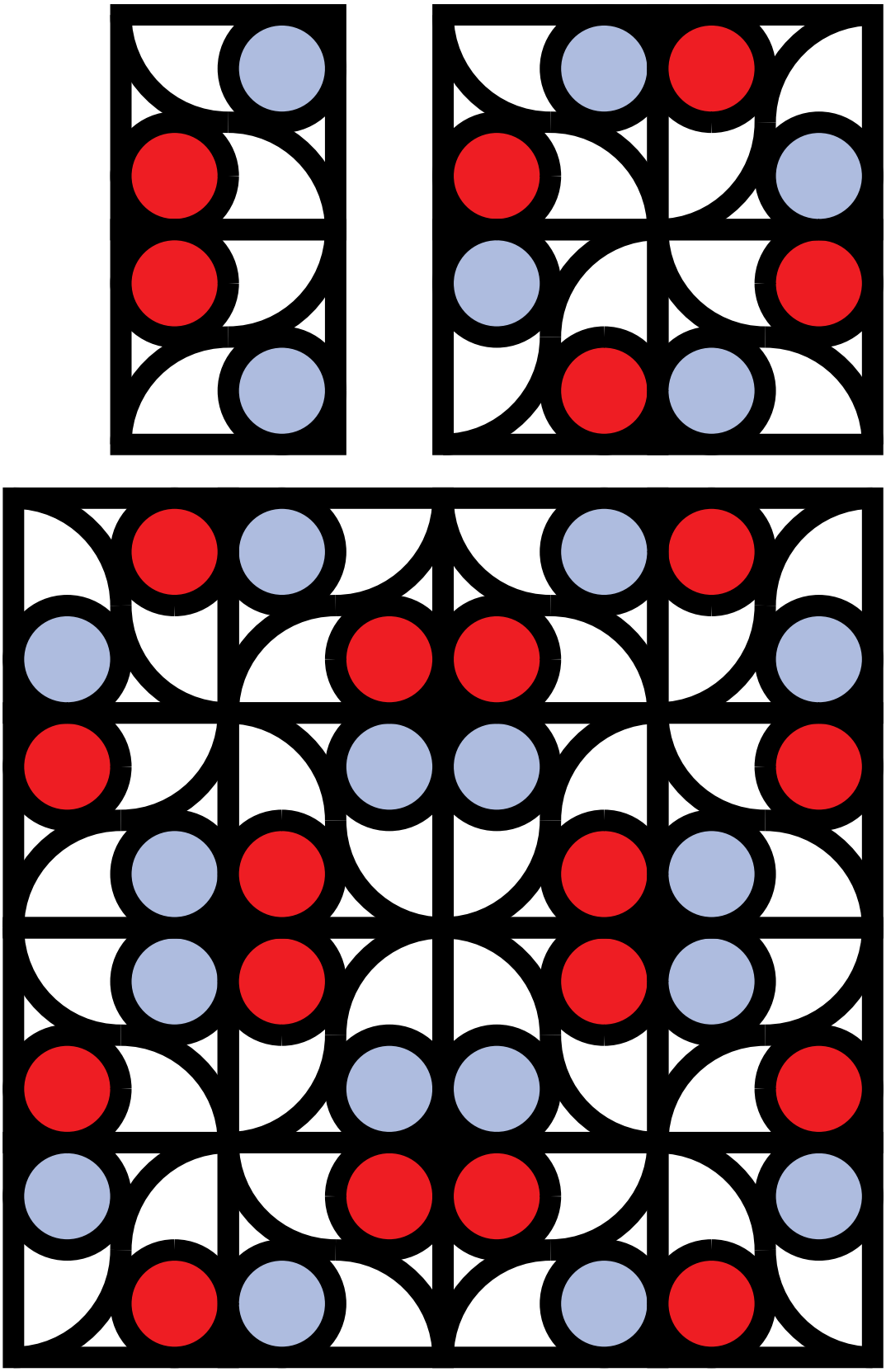
Comment utiliser un miroir pour visualiser correctement la symétrie axiale ?

– choisis un morceau de la peinture ;
– en tenant le miroir perpendiculairement à la feuille, place-le de manière à y voir l'image du morceau choisi ;
– si tu retrouves l'ensemble de la peinture de départ, l'endroit où le miroir est placé correspond à un axe de symétrie.

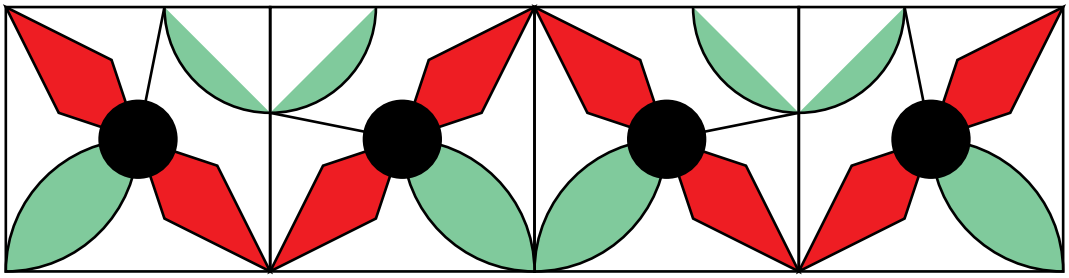
Tu pourras observer une double symétrie en utilisant deux miroirs perpendiculaires.

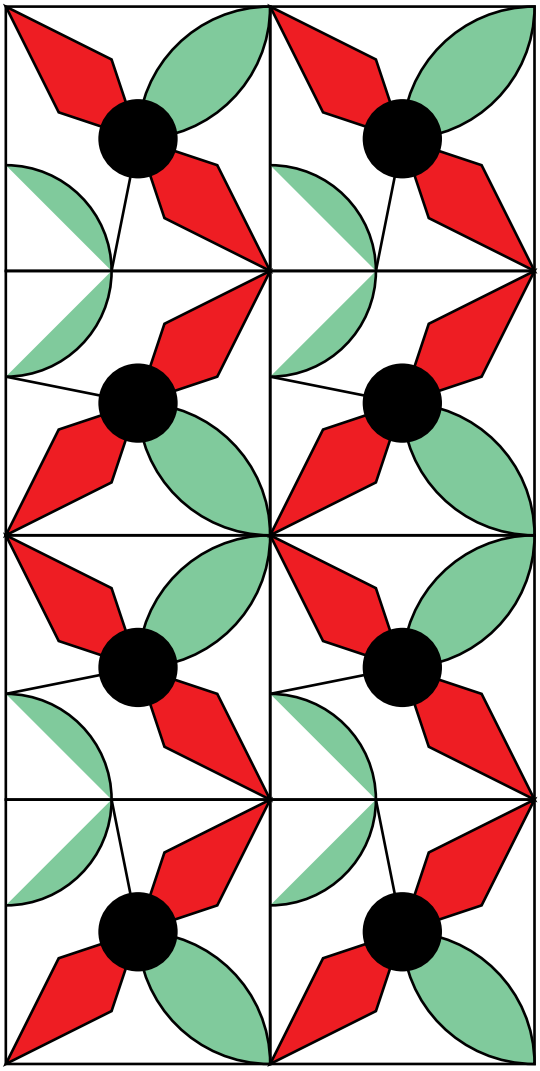
Représente, avec le matériel reçu, les axes de symétrie des différents *litema*.
Les axes doivent être tracés par rapport à l'ensemble du *tema*.

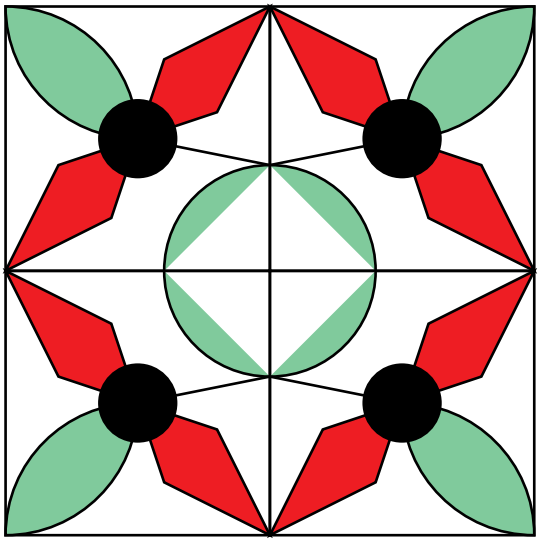


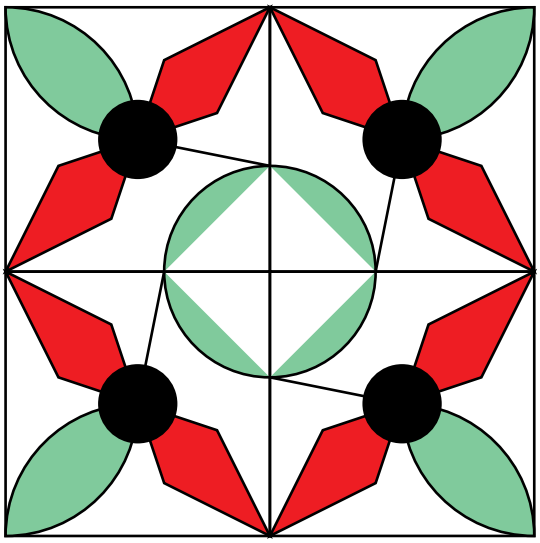


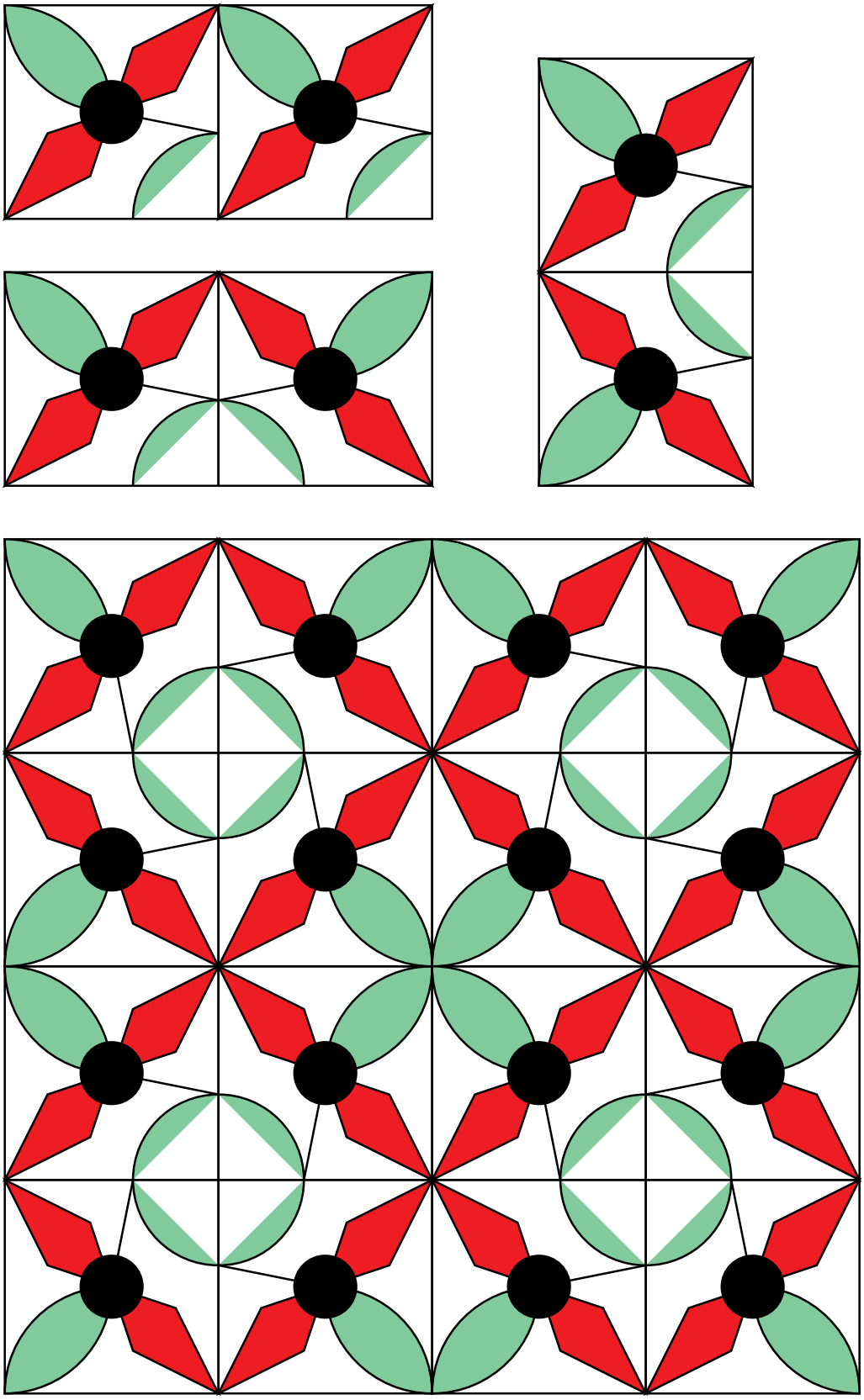
Représente, avec le matériel reçu, les axes de symétrie des différents *litema*.
Les axes doivent être tracés par rapport à l'ensemble du *tema*.



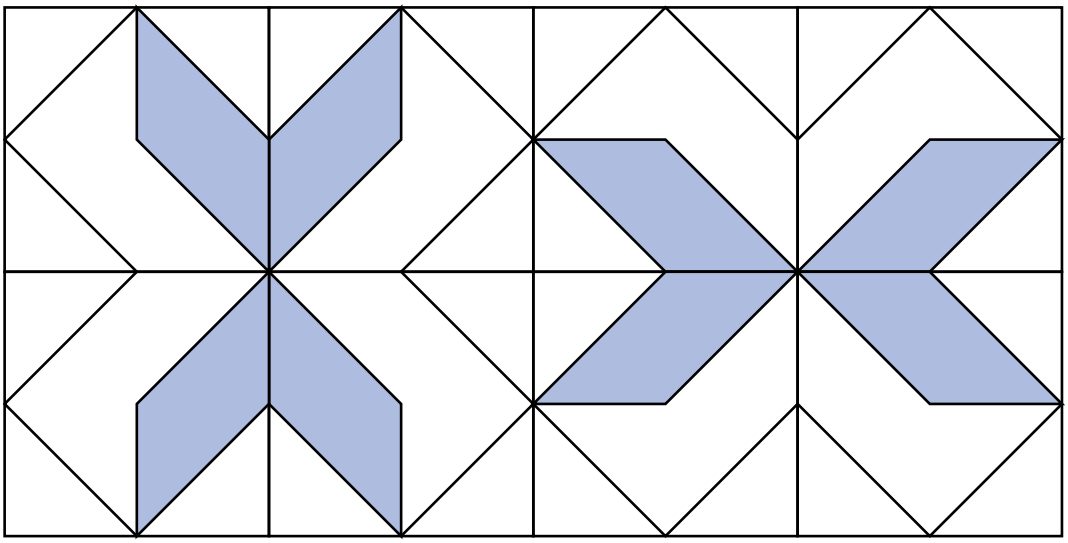


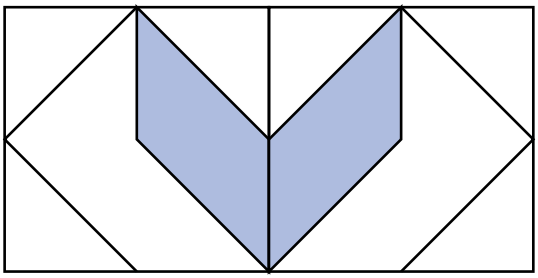


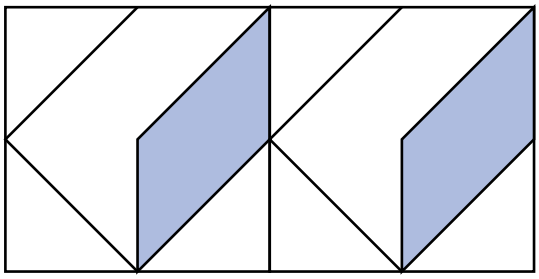


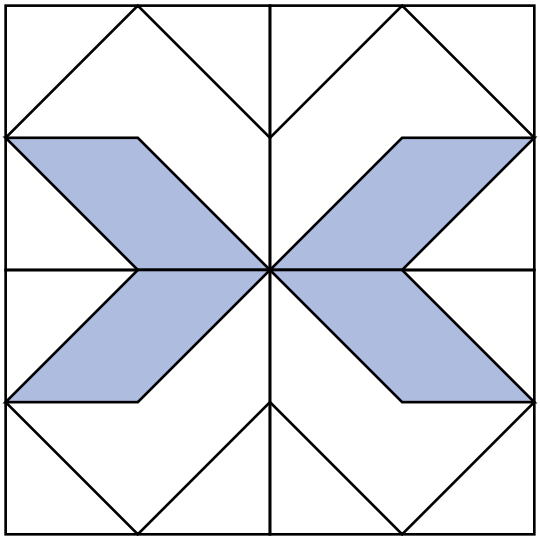


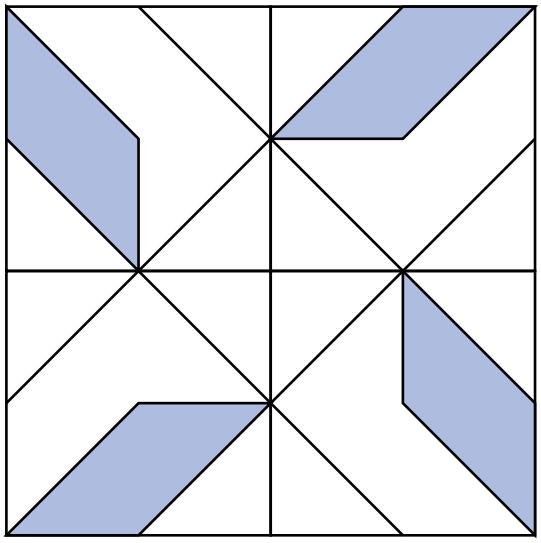
Représente, avec le matériel reçu, les axes de symétrie des différents *litema*.
Les axes doivent être tracés par rapport à l'ensemble du *tema*.

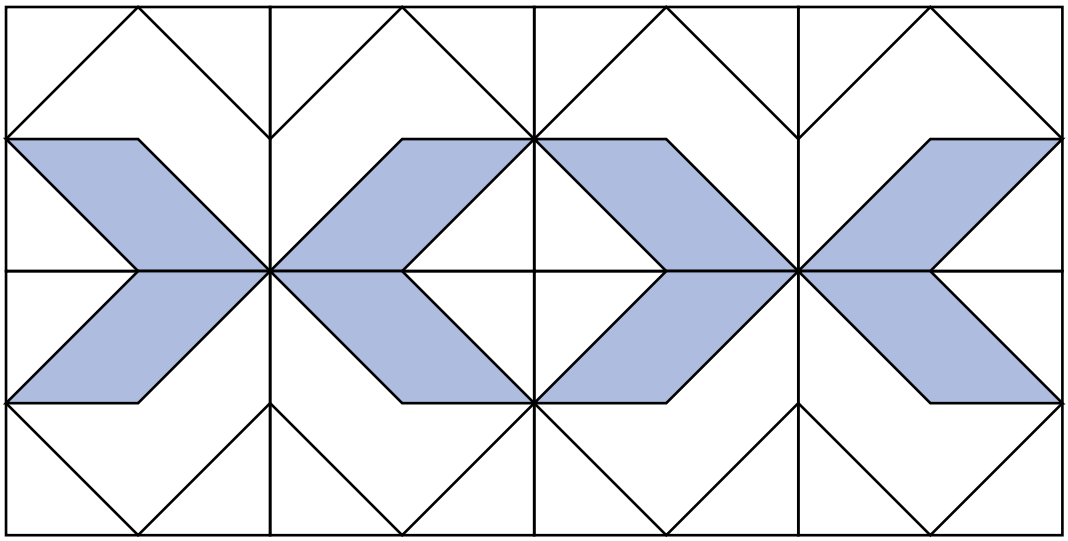


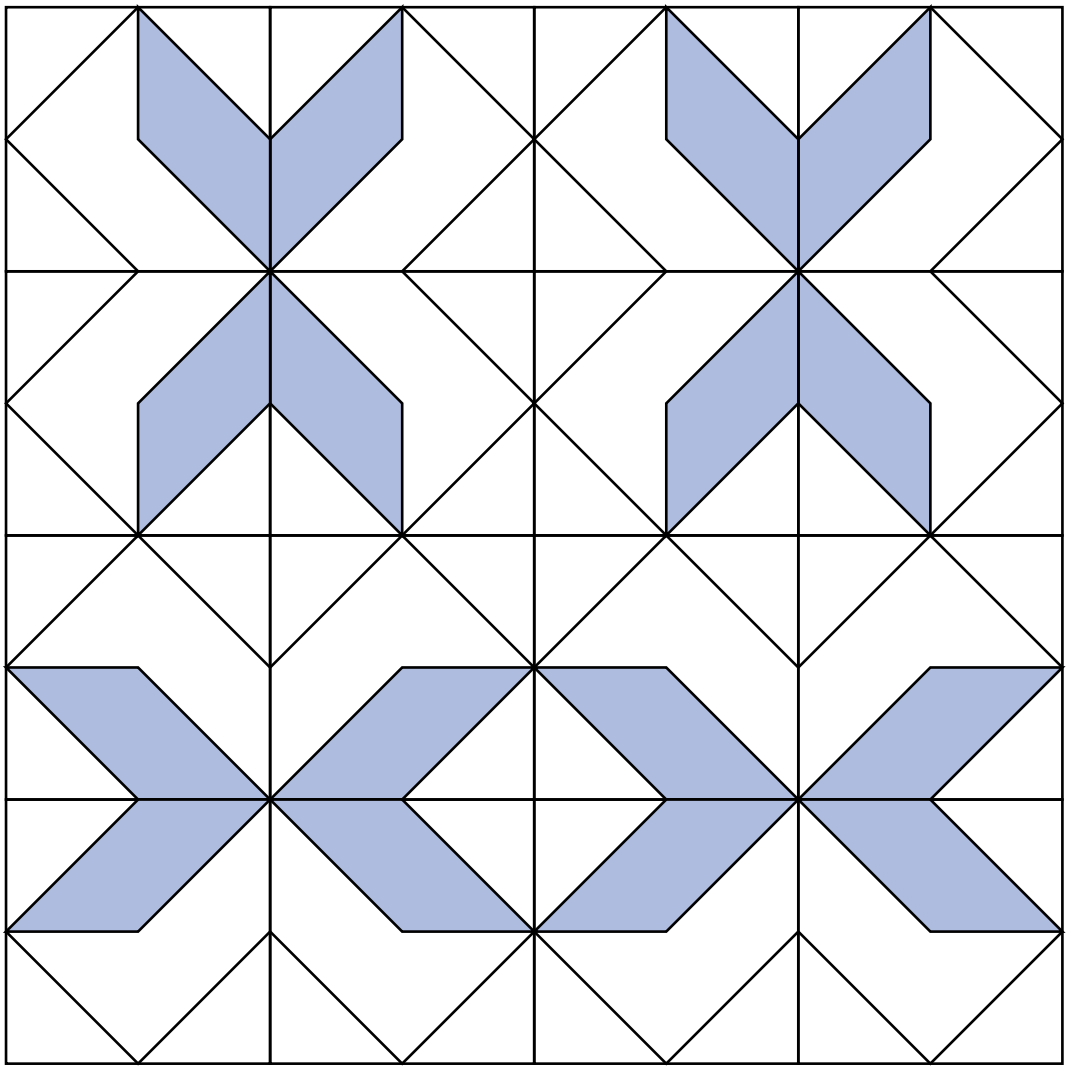




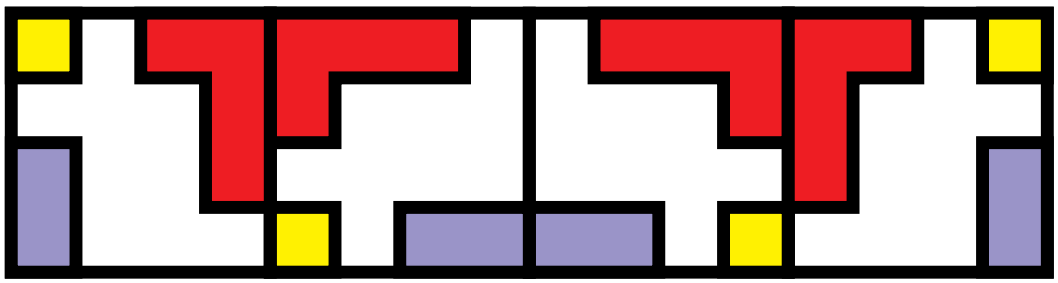


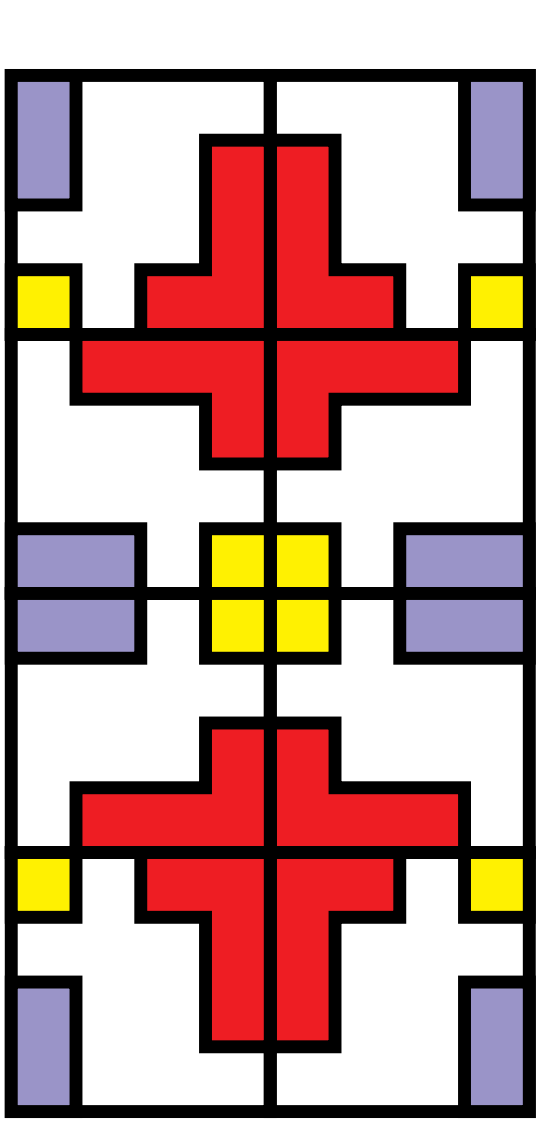


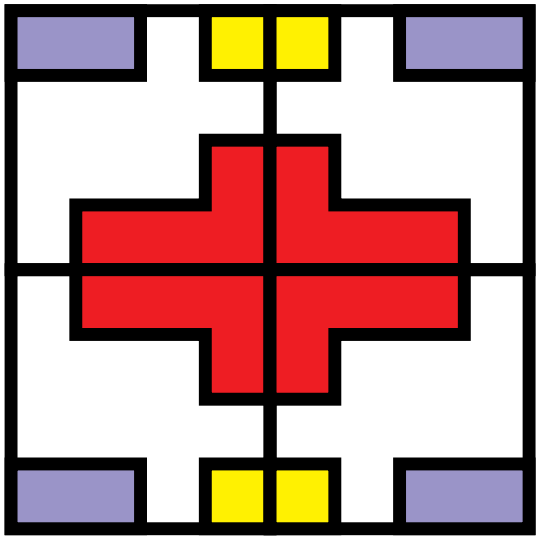


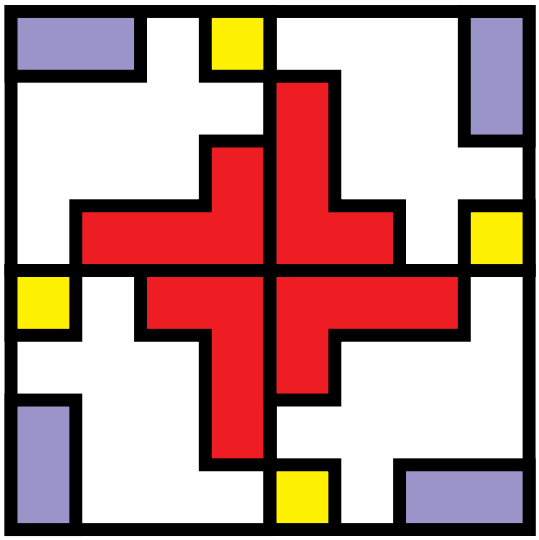


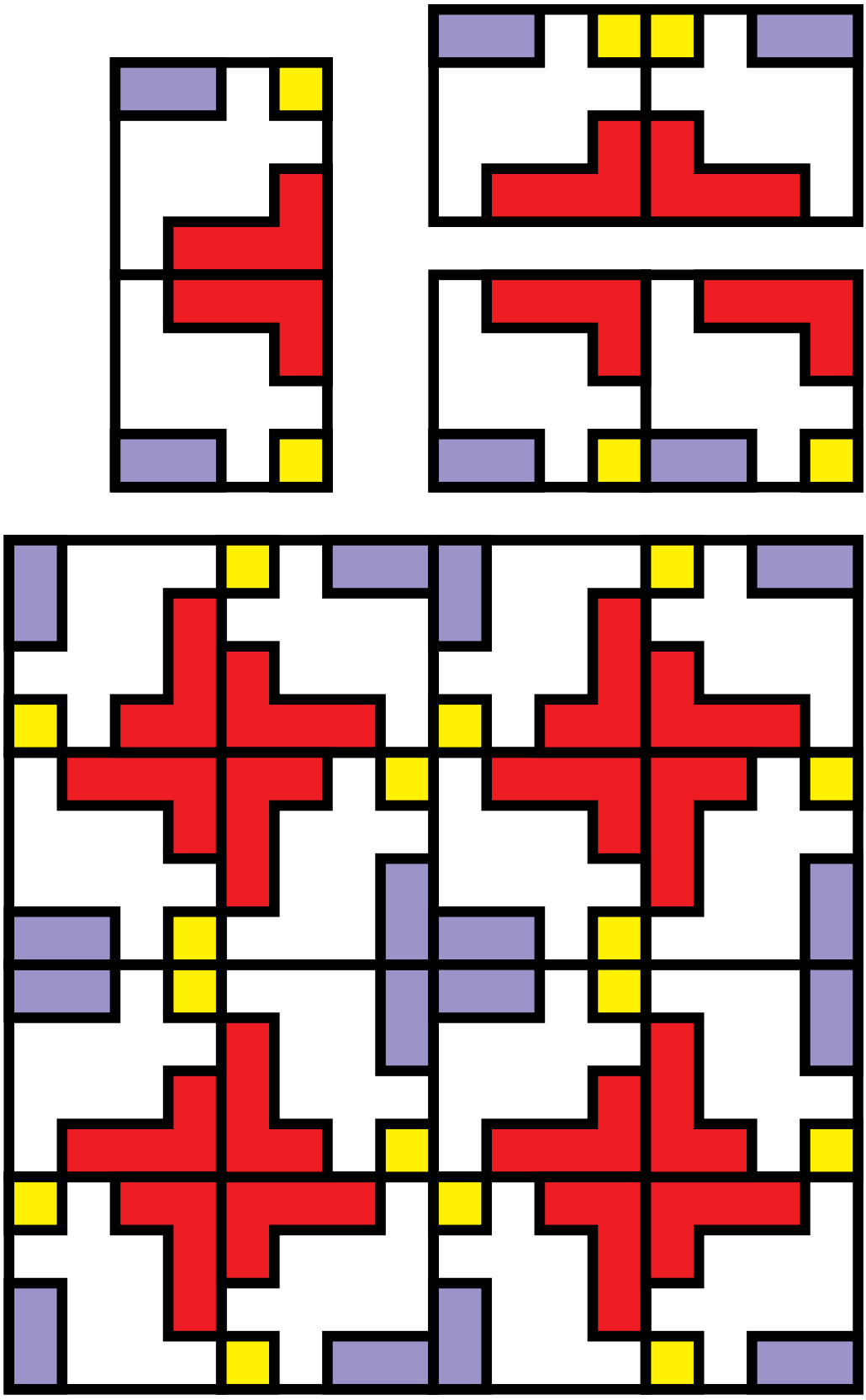
Représente, avec le matériel reçu, les axes de symétrie des différents *litema*.
Les axes doivent être tracés par rapport à l'ensemble du *tema*.





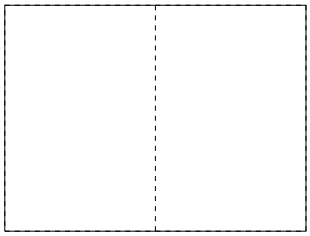




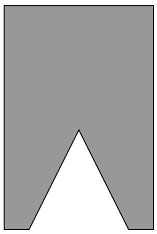


Pliage et découpage (1)

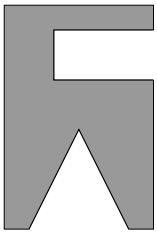
1. Prenez une feuille. Pliez-la en deux comme le montre le dessin ci-dessous et gardez-la fermée.



2. Découpez un triangle à travers les deux épaisseurs, comme ci-dessous.



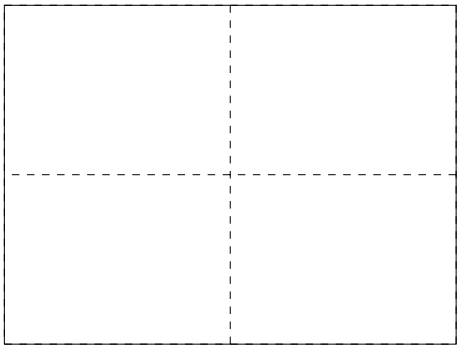
3. Découpez ensuite un rectangle, toujours à travers les deux épaisseurs, comme on le voit ci-dessous.



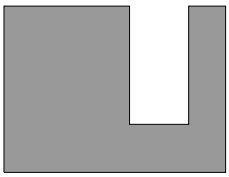
4. Ouvrez la feuille, regardez attentivement le résultat puis notez vos observations.

Pliage et découpage (2)

1. Prenez une deuxième feuille. Pliez-la en quatre comme le montre le dessin ci-dessous et gardez-la fermée.



2. Découpez un rectangle à travers l'ensemble des épaisseurs, comme ci-dessous.



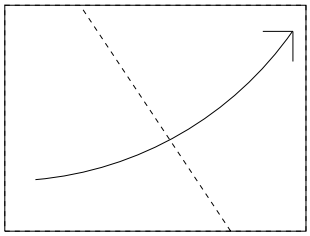
3. Découpez ensuite un triangle, toujours à travers l'ensemble des épaisseurs, comme on le voit ci-dessous.



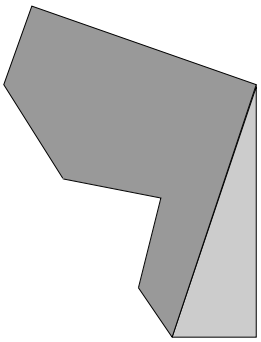
4. Ouvrez la feuille, regardez attentivement le résultat puis notez vos observations.

Pliage et découpage (3)

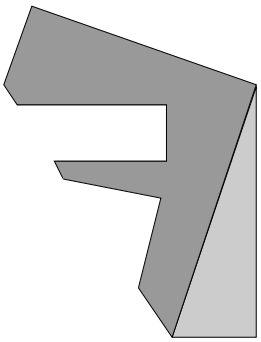
1. Prenez une troisième feuille. Pliez-la de sorte que deux coins opposés se superposent et gardez-la fermée.



2. Découpez un triangle à travers les deux épaisseurs, comme le montre le dessin ci-dessous.



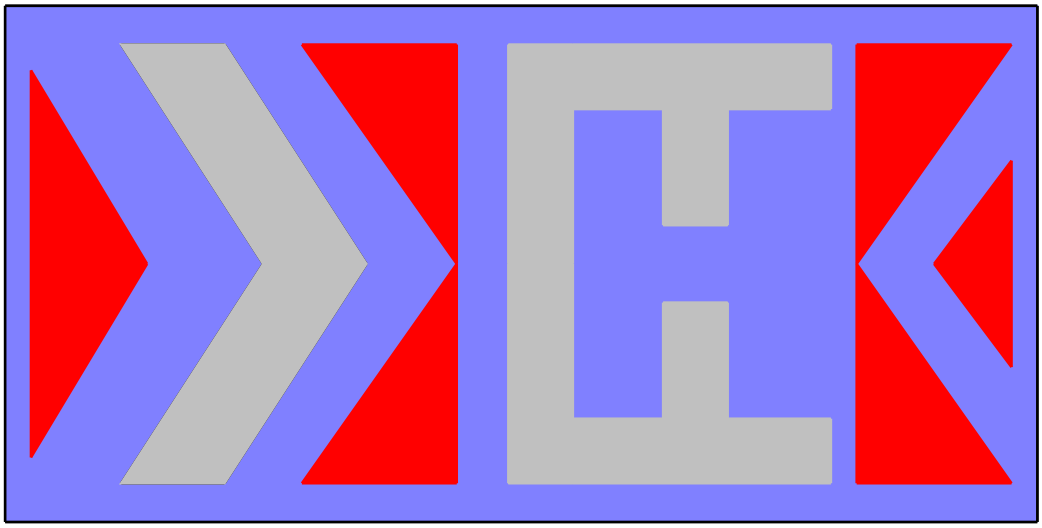
3. Découpez ensuite un trapèze, toujours à travers les deux épaisseurs, comme ci-dessous.

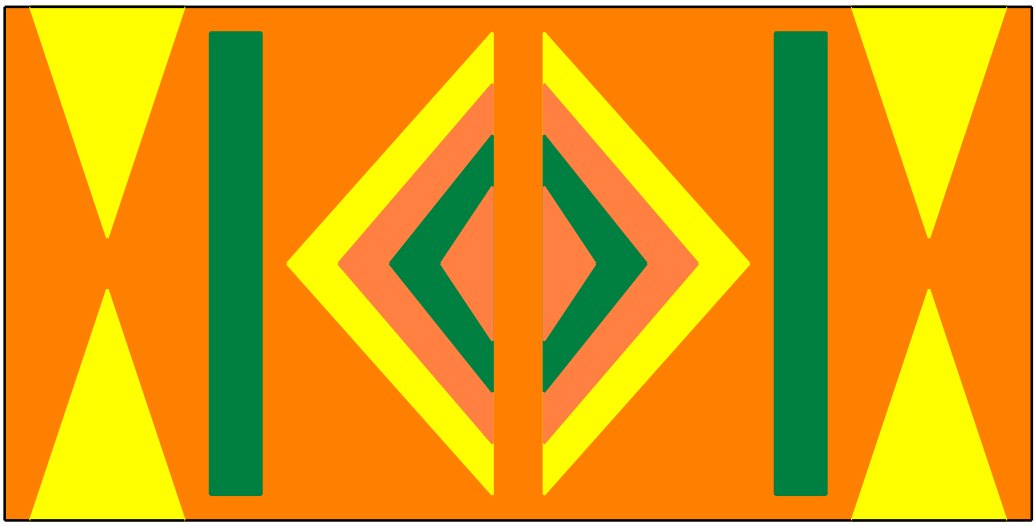


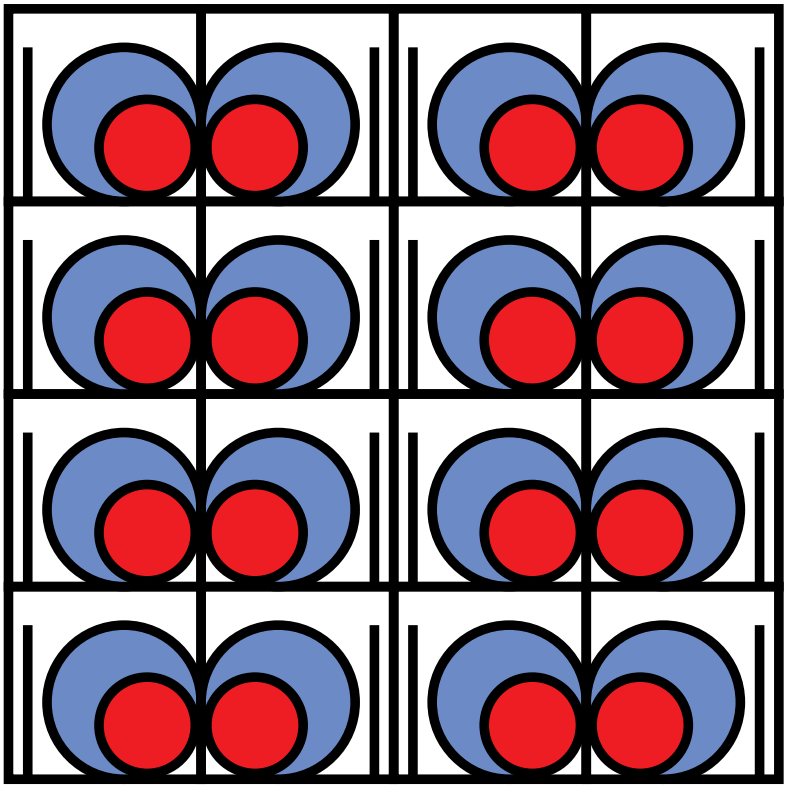
4. Ouvrez la feuille, regardez attentivement le résultat puis notez vos observations.

Par pliage et découpage, reproduisez ces deux *ikghuptu*.

Pour vous aider, dessinez les axes de symétrie sur votre fiche et, lorsque votre feuille est pliée, tracez au crayon les motifs à découper.









Deuxième partie

Culture mathématique à partir de 12 ans

Chapitre 5

Mathémagiques

1 Multiples et diviseurs de nombres composés de 0 et de 1

De quoi s'agit-il ? Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie.

Enjeux Expliquer un phénomène numérique qui peut paraître « magique » à première vue. Ce développement permettra de réexaminer le principe de la numération de position et son rôle dans la multiplication écrite. Il nécessitera également un travail sur les nombres ainsi que sur la notion de diviseurs et de multiples. Une attention particulière devra être portée à l'utilisation rigoureuse des vocables « chiffre » et « nombre ». Cette distinction est indispensable pour effectuer le travail décrit dans cette activité.

Compétences transversales

Dans les activités qui suivent, on retrouve les quatre compétences transversales à développer dans le cadre du cours de mathématiques.

Analyser et comprendre un message.

Résoudre, raisonner et argumenter.

Appliquer et généraliser.

Structurer et synthétiser.

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

Choisir et utiliser avec pertinence le calcul mental, le calcul écrit ou la calculatrice en fonction de la situation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une calculatrice.

Prérequis

La notion de diviseur d'un nombre. La propriété : si a est multiple de b, alors a est multiple de tous les diviseurs de b.

L'écriture d'un nombre sous la forme d'une somme de produits.

La distributivité simple.

1.1 Multiplier un nombre par 11.

Les multiplications, dans lesquelles un des facteurs est un nombre formé uniquement de chiffres 1, mettent en exergue le principe de la numération de position.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant introduit l'activité de la manière suivante.

> Lorsque je multiplie le nombre 25 par 11, j'additionne les deux chiffres qui forment le nombre 25. J'obtiens le nombre 7 que je place entre le 2 et le 5. Le nombre obtenu, 275, est le produit de 25 par 11.
>
> Est-ce exact ? Est-ce que cela fonctionne dans tous les cas ? Modifie éventuellement le « truc ».

L'enseignant demande aux élèves de vérifier que ce qu'il vient d'utiliser comme procédure de calcul donne un résultat exact. Ensuite, il leur demande de proposer des nombres pour illustrer cette affirmation. Il les écrit au tableau (en veillant à espacer le chiffre des unités et celui des dizaines). Il calcule la somme des chiffres et l'écrit au milieu comme il l'a précédemment indiqué.

La classe est confrontée à deux cas de figure : d'une part, la somme des chiffres peut être inférieure à 10 et d'autre part, elle peut être supérieure à 10. Ces deux situations vont être explorées l'une après l'autre.

Si la somme des chiffres est inférieure à 10, l'explication du phénomène est relativement simple. L'illustration de la situation sous forme de calcul écrit permet de comprendre la technique proposée et de lever l'aspect magique du problème.

$$\begin{array}{rccc} & & 2 & 5 \\ \times & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & 5 \\ & 2 & 5 & \\ \hline & 2 & 7 & 5 \end{array}$$

Il peut cependant être intéressant de procéder à un travail de verbalisation sur ce premier cas, afin de mettre en place le vocabulaire pour expliquer les suivants.

Pour le produit,

- le chiffre des unités, 5, est obtenu en multipliant 1 unité par 5 unités ;
- le chiffre des dizaines, 7, est obtenu en calculant la somme du produit d'1 unité par 2 dizaines (= 2 dizaines) et du produit d'1 dizaine par 5 unités (= 5 dizaines) ;

– le chiffre des centaines, 2, est obtenu en multipliant 1 dizaine par 2 dizaines.

Le produit est donc bien un nombre à trois chiffres où le chiffre des dizaines est égal à la somme des chiffres composant le nombre initial. Le « truc » proposé par l'enseignant est ainsi expliqué dans cette première situation.

Le deuxième cas de figure que l'on peut rencontrer concerne les nombres dont la somme des chiffres est supérieure à 10. Lorsque l'on travaille avec ces nombres, on se rend immédiatement compte qu'il faut modifier le « truc » fourni par l'enseignant au début de l'activité. Pour trouver la procédure à suivre, nous allons à nouveau avoir recours au calcul écrit, ce dernier illustrant bien le phénomène à observer.

$$\begin{array}{rccc} & & 3 & 9 \\ \times & & 1 & 1 \\ \hline & & 3 & 9 \\ & 3 & 9 & \\ \hline & 4 & 2 & 9 \end{array}$$

Pour le produit,

– le chiffre des unités, 9, est obtenu en multipliant 1 unité par 9 unités (= 9 unités) ;
– le chiffre des dizaines, 2, est obtenu en calculant la somme du produit d'1 unité par 3 dizaines (= 3 dizaines) et du produit d'1 dizaine par 9 unités (= 9 dizaines), soit 12 dizaines, c'est-à-dire 1 centaine et 2 dizaines ; on ne conserve, pour le chiffre des dizaines, que le nombre de dizaines, le chiffre des centaines étant ajouté aux centaines ;
– le chiffre des centaines, 4, est obtenu en mutlipliant 1 dizaine par 3 dizaines (= 3 centaines) ; à ce produit, on ajoute la centaine obtenue précédemment.

Dans les exemples rencontrés jusqu'ici, le produit par 11 d'un nombre de deux chiffres – dont la somme des chiffres est supérieure à 10 – est un nombre à trois chiffres où

– le chiffre des unités est le chiffre des unités du nombre initial ;
– le chiffre des dizaines correspond au chiffre des unités de la somme des chiffres composant le nombre initial ;
– le chiffre des centaines correspond au chiffre des dizaines du nombre initial (puisqu'il a été multiplié par 10) auquel on ajoute le nombre des dizaines de la somme des chiffres du nombre initial – qui vaudra toujours 1.

Une fois ces conclusions établies avec les élèves, l'enseignant pose la question qui suit.

> A-t-on envisagé tous les cas de figure ? Ne pourrait-on pas obtenir un nombre de quatre chiffres en multipliant un nombre de deux chiffres pas 11 ?

L'enseignant laisse les élèves tester les conclusions établies sur des exemples que chacun choisit. Une fois que l'un d'entre eux a proposé un nombre de deux chiffres pour lequel le produit par 11 est un nombre à quatre chiffres, il s'agit de cibler tous les nombres de deux chiffres qui mettent à mal les procédures de calcul proposées plus haut. Les élèves se rendront rapidement compte que ce sont tous les nombres plus grands que 90.

Une fois cette observation faite, il reste à formuler la procédure à suivre pour ces nombres. Tout comme pour les deux cas précédents, il nous semble plus judicieux de partir d'un exemple numérique.

$$\begin{array}{rcccc} & & & 9 & 3 \\ \times & & & 1 & 1 \\ \hline & & & 9 & 3 \\ & & 9 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

Pour le produit,

- le chiffre des unités, 3, est obtenu en multipliant 1 unité par 3 unités (= 3 unités) ;
- le chiffre des dizaines, 2, est obtenu en calculant la somme du produit d'1 unité par 9 dizaines (= 9 dizaines) et du produit d'1 dizaine par 3 unités (= 3 dizaines), soit 12 dizaines, c'est-à-dire 1 centaine et 2 dizaines ; on ne conserve, pour le chiffre des dizaines que le nombre de dizaines, le chiffre des centaines étant ajouté aux centaines ;
- le chiffre des centaines, 0, est obtenu en mutlipliant 1 dizaine par 9 dizaines (= 9 centaines) ; à ce produit, on ajoute la centaine obtenue précédemment ; on obtient 10 centaines, c'est-à-dire 0 centaine et 1 millier.

Prolongements possibles

Un prolongement possible est de proposer aux élèves un problème comparable à la situation ci-dessus. La question est la suivante.

> Que se passe-t-il si on ne travaille plus avec un nombre formé de deux chiffres mais avec un nombre formé de trois chiffres ?

Grâce au développement effectué, ils peuvent découvrir seuls cette deuxième « astuce calculatoire » en procédant par analogie.

Un autre prolongement consiste à travailler le « caractère de divisibilité par 11 » ou à rechercher le nombre dont le produit par 11 est, par exemple, 253 ou 627.

Échos des classes

La difficulté principale rencontrée par les élèves au cours des différentes étapes de cette activité réside dans la formulation des constatations qu'ils ont effectuées.

Utiliser à bon escient les notions de chiffre, nombre, dizaine, ... n'est pas évident pour beaucoup d'entre eux. Ils savent par exemple expliquer ce que sont des nombres et des chiffres mais une fois qu'il s'agit d'utiliser ces mots pour exprimer ce qu'ils ont découvert, ils ne savent pas mettre en œuvre la différence entre ces deux notions.

Certains élèves sont également vite satisfaits de leurs observations. Il est alors important que l'enseignant les pousse à affiner ou à clarifier leurs remarques. Lors de l'activité, des élèves ont trouvé que pour tous les nombres à deux chiffres se terminant par un 9, la procédure initialement proposée ne fonctionnait pas. Il est certain que cette observation est exacte mais elle doit être complétée ; l'enseignant doit intervenir et les encourager à vérifier s'ils ont bien envisagé tous les cas de figure.

Certains élèves s'orientent également dans des directions non porteuses. Il nous semble cependant important de les laisser faire. L'un d'entre eux a par exemple cherché une explication au niveau des critères de divisibilité des nombres. C'est avec sa propre expérience et en voyant qu'il n'arrivait à aucune conclusion, qu'il a abandonné cette voie.

Il nous semble intéressant de laisser les élèves chercher, avec la méthode de leur choix, les cas pour lesquels le « truc » ne fonctionne pas. En effet, certains d'entre eux se servent de la

calculatrice, d'autres du calcul écrit ou du « truc » proposé par l'enseignant et enfin, certains appliquent la méthode par laquelle on effectue la somme du nombre et de son produit par 10. Nous avons pu observer que les élèves travaillant par calcul écrit ou appliquant le « truc » découvrent l'explication plus facilement, probablement parce qu'ils constatent le phénomème du report.

À la question de savoir si le produit d'un nombre de deux chiffres par 11 pouvait être un nombre de quatre chiffres, l'enseignant a dû insister auprès des élèves pour qu'ils explorent les différentes possibilités. Ils n'avaient, en effet, pas choisi d'eux-mêmes des nombres strictement supérieurs à 90 lors de leur recherche, il leur semblait donc impossible d'obtenir comme résultat autre chose que les deux cas explorés jusque-là. L'enseignant leur a alors demandé s'ils avaient envisagé toutes les possibilités de nombres à deux chiffres. Un élève a alors proposé 99, le plus grand d'entre eux. Comme le produit de ce dernier par 11 est un nombre à quatre chiffres pour lequel aucune des deux procédures de calcul évoquées précédemment ne peut être appliquée, ils ont cherché d'autres exceptions en procédant par ordre décroissant (98, 97, ...).

1.2 Les multiples de 1 001

Comment s'y prendre ?

> Écris ta taille en centimètres deux fois l'une à côté de l'autre. Tu obtiens un nombre à six chiffres. Divise-le par 7, puis divise le quotient par 11, et enfin le dernier quotient par 13. Tu retrouves quelque chose de connu. Pourquoi ?

Pour faciliter l'approche, l'enseignant suggère de citer à haute voix le nombre à six chiffres : 168 mille et 168 unités. L'étape suivante consiste à remplacer les mots par les nombres,

$$168\,168 = (168 \times 1\,000) + (168 \times 1)$$

Les élèves peuvent alors remarquer que le nombre 168 a été distribué sur les nombres 1 000 et 1. Cette somme peut donc s'écrire sous la forme des produits suivants :

$$168\,168 = 168 \times (1\,000 + 1)$$
$$168\,168 = 168 \times 1\,001$$

Les nombres du type *abc abc* sont donc obtenus en multipliant un nombre à trois chiffres par 1 001.

> Quel lien y a-t-il entre 7, 11 et 13 et les nombres de six chiffres de la forme *abc abc* ? Quel lien y a-t-il avec 1 001 ?

Étant donné que chacun des nombres à six chiffres proposés est le produit d'un nombre de trois chiffres par 1 001, l'enseignant propose d'examiner les diviseurs du nombre à six chiffres en passant par les diviseurs de 1 001. Il demande alors aux élèves de trouver les diviseurs de 1 001. Ils se rendront alors compte que les trois diviseurs proposés pour chacun des nombres à six chiffres (7, 11 et 13) divisent 1 001.

La clé réside donc dans la propriété évoquée dans les prérequis. L'enseignant la rappelle aux élèves à l'aide d'exemples numériques. Pour ce faire, il propose le nombre 48 et demande de chercher ses diviseurs. Une fois ces nombres indiqués au tableau, il fait remarquer par les élèves que 12 est un diviseur de 48 et que tous les diviseurs de 12 sont aussi diviseurs de 48. Il peut éventuellement traiter d'autres cas si nécessaire. En fin de parcours, il importe de transférer les observations faites sur ces exemples numériques à la situation précédente.

1 001 est diviseur des nombres à six chiffres du type $abc\,abc$;

7, 11 et 13 sont des diviseurs de 1 001 ;

7, 11 et 13 sont donc des diviseurs des nombres du type $abc\,abc$.

À ce stade, il importe que les élèves réalisent que, quels que soient les chiffres a, b et c, les nombres $abc\,abc$ auront au moins 7, 11 et 13 comme diviseurs. Ce n'est donc pas le nombre en tant que tel qui a de l'importance mais plutôt la manière dont il est formé.

Prolongements possibles

Un premier prolongement possible consiste à aborder d'autres problèmes du même type :

- proposer un nombre du type $aaa\,aaa$; affirmer qu'il est divisible par 13, par 21 et par 407 ; l'explication réside, tout comme dans l'exercice développé ci-dessus, dans le fait que $13 \times 21 \times 407 = 111\,111$;
- proposer un nombre du type $aba\,bab$; affirmer qu'il est divisible par 3, par 7, par 13 et par 37 ; l'explication réside, tout comme dans l'exercice développé ci-dessus, dans le fait que $3 \times 7 \times 13 \times 37 = 10\,101$.

Un deuxième prolongement possible consiste à se baser sur ces problèmes pour découvrir les propriétés des diviseurs et multiples. Dans ce cas, la notion de nombres premiers entre eux intervient. Elle doit donc être un prérequis ou faire l'objet d'un apprentissage préalable.

En partant par exemple du nombre 924 924, l'enseignant peut travailler la propriété : « si un nombre est divisible par deux autres nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit ». Le nombre 924 924 est divisible par 2 et 7, nombres premiers entre eux, il est donc divisible par 14.

2 Des problèmes magiques expliqués par l'algèbre

De quoi s'agit-il ?

Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie.

Enjeux

Transposer un énoncé en une suite de calculs.

Apprendre à formaliser un énoncé et saisir la portée du symbolisme et du calcul algébrique.

Utiliser la distributivité et l'associativité pour transformer une expression algébrique.

Expliquer un phénomène numérique et le démontrer par l'algèbre.

Compétences

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Respecter les priorités des opérations.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.

Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.

Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

Le vocabulaire propre aux quatre opérations. Les règles de priorité des opérations. Les quatre opérations sur les nombres fractionnaires.

La multiplication et la division d'une somme et d'un produit de nombres.

2.1 Toujours 40 !

Comment s'y prendre ?

Chaque élève choisit un nombre, le note et le cache. Il le multiplie par 3, ajoute 120 au produit obtenu puis divise le résultat par 3. Il retranche enfin le nombre de départ.

Le professeur dit : « Je parie que chacun d'entre vous a obtenu 40... »

L'enseignant demande à quelques élèves de citer le nombre qu'ils avaient initialement choisi et le résultat qu'ils ont obtenu de manière à faire remarquer que son pari est gagné.

Il leur pose alors la question qui suit.

Pourquoi obtient-on 40 quel que soit le nombre choisi ?

Les élèves testent la procédure au départ d'un nouveau nombre. Sachant que le résultat est 40, ils ébauchent quelques explications. Comme la formulation est souvent confuse et incomplète, l'enseignant note au tableau plusieurs exemples dont il détaille les étapes.

$$\boxed{23} \xrightarrow{\times 3} \boxed{69} \xrightarrow{+120} \boxed{189} \xrightarrow{:3} \boxed{63} \xrightarrow{-23} \boxed{40}$$

$$\boxed{48} \xrightarrow{\times 3} \boxed{144} \xrightarrow{+120} \boxed{264} \xrightarrow{:3} \boxed{88} \xrightarrow{-48} \boxed{40}$$

$$\boxed{-5} \xrightarrow{\times 3} \boxed{-15} \xrightarrow{+120} \boxed{105} \xrightarrow{:3} \boxed{35} \xrightarrow{-(-5)} \boxed{40}$$

On écrit autant d'exemples que nécessaire pour illustrer la situation.

Le troisième exemple ci-dessus part d'un nombre entier négatif. Si les élèves n'en proposent pas eux-mêmes, l'enseignant peut aborder ces cas dans le prolongement de l'activité.

La phase suivante consiste à décortiquer les différentes étapes de la « procédure magique » de manière à mettre en évidence les passages-clés du phénomène. C'est-à-dire que les calculs intermédiaires ne sont effectués que partiellement en vue de laisser apparaître, tout au long du développement, le nombre choisi.

Nous conseillons d'écrire en couleur le nombre de départ chaque fois qu'il apparaît dans les étapes de calcul, de manière à faciliter la compréhension du phénomène. Ce nombre est indiqué en gras dans l'illustration qui suit.

$$\boxed{\mathbf{23}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{\mathbf{23} \times 3} \xrightarrow{+120} \boxed{(\mathbf{23} \times 3) + 120} \xrightarrow{:3} \boxed{\mathbf{23} + 40} \xrightarrow{-\mathbf{23}} \boxed{40}$$

Cette démarche facilite la phase de formalisation et donc la compréhension. Ceci dit, certains passages seront probablement source de difficultés pour les élèves et principalement celui où il s'agit de diviser la somme obtenue par 3. L'enseignant pourra saisir cette occasion pour retravailler la distributivité.

La dernière étape, consistant à généraliser les observations effectuées, nécessite la formalisation. De la sorte, tous les cas de figure sont illustrés grâce à une seule expression. L'enseignant insiste sur le fait que la lettre a peut remplacer n'importe quel nombre.

Si cela n'a déjà été fait, il introduit la convention selon laquelle une lettre précédée d'un nombre, sans qu'une opération soit indiquée entre les deux, représente le produit de ces deux facteurs.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{\boldsymbol{a}\times 3} \xrightarrow{+120} \boxed{(\boldsymbol{a}\times 3)+120} \xrightarrow{:3} \boxed{\boldsymbol{a}+40} \xrightarrow{-a} \boxed{40}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{3\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+120} \boxed{3\boldsymbol{a}+\ 120} \xrightarrow{:3} \boxed{\boldsymbol{a}+\ 40} \xrightarrow{-a} \boxed{40}$$

La formalisation montre clairement que le nombre de départ disparaît et permet de comprendre la raison pour laquelle le résultat obtenu est 40.

L'enseignant pourra s'il le désire s'assurer de la prise de conscience, par les élèves, de l'utilité de la formalisation, à l'aide du deuxième prolongement.

Prolongements possibles

Comme prolongement, on demande aux élèves d'imaginer un « tour de magie », comparable à celui qui vient d'être exploité. L'obtention d'un résultat constant est le critère de réussite.

Un autre prolongement – qui aura peut-être déjà été abordé précédemment selon les nombres proposés par les élèves – consiste à leur demander ce qui se passe si on part d'un nombre entier négatif ou d'une fraction. L'enseignant vérifie ainsi si les élèves ont intégré la démarche de formalisation.

Échos des classes

La principale difficulté rencontrée dans cette activité est liée à la division par 3. Beaucoup d'élèves ne divisent qu'un des deux termes de la somme. Ce passage a été facilité par une intervention de l'enseignant.

Il a fait rappeler par les élèves une technique de calcul mental qui leur est familière : pour diviser 112 par 4, je divise 100 par 4 et ensuite 12 par 4.

Lorsqu'il s'est agi seulement de montrer que le tour de magie fonctionne avec n'importe quel nombre, les élèves ont proposé de remplacer le nombre par une lettre. Ceci dit, lorsqu'ils ont dû inventer un tour de magie, la plupart sont partis d'un exemple numérique.

Chacun a mis à l'épreuve le tour qu'il a inventé en le testant sur ses condisciples. Certains tours n'ont pas fonctionné. Après quelques échanges, les élèves ont réalisé qu'il était plus judicieux de partir d'une lettre.

Les nombres négatifs n'ayant pas été abordés jusque-là, le professeur a demandé aux élèves le résultat qu'ils obtiendraient si le nombre de départ était -6 par exemple. De manière générale, même si beaucoup sont conscients de la portée de l'expression algébrique, ils éprouvent souvent le besoin de la tester.

2.2 Retrouver le nombre pensé

Comment s'y prendre ?

Chaque élève pense un nombre et effectue les différents calculs énoncés par l'enseignant. En fin de séquence, tous les élèves obtiennent le nombre initialement choisi. L'objectif est d'expliquer ce phénomène.

> Choisis un nombre. Multiplie-le par 8. Ajoute 10 au produit obtenu. Divise cette somme par 2. Ajoute 7 au quotient. Divise cette somme par 4. Et enfin, retranche 3.
>
> Je parie que chacun d'entre vous a obtenu comme résultat final le nombre qu'il avait choisi au départ !

Après avoir demandé confirmation auprès de quelques élèves, l'enseignant leur pose la question suivante :

> Comment expliquez-vous cette situation ?

Tout comme précédemment, le raisonnement se fera en plusieurs phases. Après avoir illustré le problème par quelques exemples numériques, on effectue partiellement les calculs de manière à ce que le nombre de départ reste apparent dans les expressions successives. Enfin, on remplace ce dernier par une lettre de manière à généraliser l'explication.

Première étape : quelques exemples numériques proposés par les élèves sont écrits au tableau.

$$\boxed{15} \xrightarrow{\times 8} \boxed{120} \xrightarrow{+10} \boxed{130} \xrightarrow{:2} \boxed{65} \xrightarrow{+7} \boxed{72} \xrightarrow{:4} \boxed{18} \xrightarrow{-3} \boxed{15}$$

$$\boxed{37} \xrightarrow{\times 8} \boxed{296} \xrightarrow{+10} \boxed{306} \xrightarrow{:2} \boxed{153} \xrightarrow{+7} \boxed{160} \xrightarrow{:4} \boxed{40} \xrightarrow{-3} \boxed{37}$$

$$\boxed{-8} \xrightarrow{\times 8} \boxed{-64} \xrightarrow{+10} \boxed{-54} \xrightarrow{:2} \boxed{-27} \xrightarrow{+7} \boxed{-20} \xrightarrow{:4} \boxed{-5} \xrightarrow{-3} \boxed{-8}$$

Deuxième étape : chaque phase de calcul est réécrite en faisant apparaître clairement le nombre de départ, ce qui met en relief la suite des opérations. L'enseignant écrit ce nombre en couleur. Dans la présentation ci-dessous, il est noté en gras.

$$\boxed{\mathbf{15}} \xrightarrow{\times 8} \boxed{\mathbf{15}\times 8} \xrightarrow{+10} \boxed{(\mathbf{15}\times 8)+10} \xrightarrow{:2} \boxed{(\mathbf{15}\times 4)+5}$$

$$\xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{15}\times 4)+12} \xrightarrow{:4} \boxed{\mathbf{15}+3} \xrightarrow{-3} \boxed{\mathbf{15}}$$

Pour cette partie, nous ne proposons qu'un exemple numérique. Dans les classes, l'enseignant procèdera de la sorte à plusieurs reprises de manière à clarifier le phénomène ; l'étape suivante en sera facilitée.

Troisième étape : la formalisation est nécessaire pour comprendre la constance du résultat. Pour ce faire, le canevas établi précédemment est conservé.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 8} \boxed{8\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+10} \boxed{8\boldsymbol{a}+10} \xrightarrow{:2} \boxed{4\boldsymbol{a}+5} \xrightarrow{+7} \boxed{4\boldsymbol{a}+12} \xrightarrow{:4} \boxed{\boldsymbol{a}+3} \xrightarrow{-3} \boxed{\boldsymbol{a}}$$

Ce développement algébrique illustre de manière claire qu'après les différents calculs, le résultat final est le nombre choisi.

Prolongement possible

Les problèmes magiques du type de ceux présentés dans ce chapitre ont eu, à une époque, beaucoup de succès dans les milieux intellectuels. L'un des auteurs bien connu pour ce genre de récréations mathématiques est Claude-Gaspard Bachet sieur de Méziriac (1581 - 1638). Outre ses ouvrages mathématiques, il a écrit des poèmes, des textes relatifs à la mythologie et à la religion ou encore diverses traductions. Il fut également désigné pour siéger à l'Académie Française, lors de sa création en 1634.

Nous proposons ci-dessous un de ses *Problèmes plaisants et délectables* [12]. Le choix est arbitraire et d'autres énoncés auraient également pu être mentionnés. Même si la formulation peut surprendre les élèves, nous la reproduisons dans sa version originale.

Fais doubler le nombre pensé et à ce double fais ajouter 5, puis multiplier le tout par 5, puis ajouter 10 et multiplier le tout par 10. Lors t'enquérant quel est ce dernier produit, et ôtant d'icelui 350, le nombre des centaines du reste sera le nombre pensé.

Échos des classes

Tout comme lors de l'activité précédente, la division de la somme a été source de difficultés. Ceci dit, l'explication du « tour de magie » précédent a permis aux élèves d'acquérir une certaine aisance tant dans la façon d'aborder le problème que dans la manière de l'expliquer.

Une fois que les élèves ont compris le principe, ils proposent de rendre le tour plus intéressant. Selon eux : « C'est nul que le prof ne doive pas calculer et pas réfléchir pour retrouver le nombre choisi ». Ils veulent ajouter une manipulation que l'enseignant aura à effectuer une fois qu'ils lui donneront leurs résultats. Modifier le tour en ce sens peut se faire avec les élèves, certains ont d'ailleurs immédiatement fait des propositions. Un exemple cité a été de ne pas terminer par -3 mais par -8. De la sorte, l'enseignant doit ajouter 5 au résultat qui lui sera donné pour trouver le nombre initial.

3 Des problèmes magiques expliqués par la numération de position et l'algèbre

De quoi s'agit-il ?

Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie. L'explication est à la fois fondée sur un passage à la formalisation et sur une bonne compréhension de la numération de position.

Enjeux

Expliquer un phénomène numérique qui peut paraître à première vue magique.

Transposer un énoncé en une suite de calculs.

Apprendre à formaliser cet énoncé et saisir par là la portée du symbolisme et du calcul algébrique.

Exprimer un nombre sous la forme d'une somme ou d'un produit de puissances de 10.

Les activités qui suivent respectent les intentions présentées en introduction de la partie *Algèbre* du document *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques* [2]. À titre informatif, un extrait est reproduit ci-dessous.

Les compétences algébriques reposent sur la connaissance de propriétés articulées entre elles et sur la capacité à traduire une situation en langage mathématique. Leur mise en œuvre requiert d'avoir acquis des routines de calcul, mais surtout de savoir élaborer et mener à bien les plans de calcul utiles à la solution. Cette habileté comporte le bon usage des outils de calcul électroniques, quand la difficulté ou l'efficacité l'imposent, ainsi que l'interprétation des résultats ainsi obtenus.

Compétences terminales

Organiser une suite d'opérations conduisant à la résolution du problème.

Interpréter le résultat des calculs en les replaçant dans le contexte du problème.

Traduire une situation en langage mathématique sous forme d'équation, d'inéquation ou d'autres formes de conditions.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

Le vocabulaire propre aux quatre opérations.

Le calcul sur les fractions.

La différence entre chiffre et nombre ainsi que l'utilisation de ces deux notions à bon escient.

3.1 Deviner le domino

Comment s'y prendre ?

Un ensemble de dominos est étalé sur la table. Les élèves en choisissent un que l'enseignant va deviner. Pour ce faire, il demande aux élèves d'effectuer les calculs suivants.

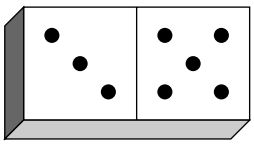
> Multiplier le nombre de gauche par 5. Ajouter 7 au résultat obtenu. Multiplier le résultat par 2. Retrancher 14. Ajouter le nombre de droite du domino.

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à deux chiffres. Le chiffre des dizaines correspond au nombre de gauche du domino et le chiffre des unités au nombre de droite du domino. L'élève donne le résultat obtenu au bout de la procédure proposée par l'enseignant et ce dernier retrouve sans mal le domino choisi. Il répète l'expérience à plusieurs reprises.

L'objectif de cette activité est d'amener les élèves à expliquer le phénomène. Ils auront vite fait de remarquer que les deux chiffres du nombre qu'ils obtiennent désignent les points du domino. Il reste maintenant à comprendre pourquoi il en est ainsi.

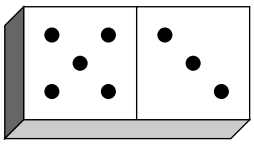
> Comment expliquer qu'on obtient un nombre dont le chiffre des dizaines correspond à la valeur de gauche du domino et celui des unités à la valeur de droite ?

On commence par écrire les calculs qui ont été faits mentalement et on les présente comme ci-dessous.

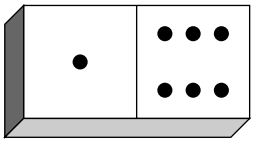


$$\boxed{3} \xrightarrow{\times 5} \boxed{15} \xrightarrow{+7} \boxed{22} \xrightarrow{\times 2} \boxed{44} \xrightarrow{-14} \boxed{30} \xrightarrow{+5} \boxed{35}$$

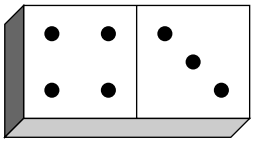
Si l'élève est de l'autre côté du domino, sa gauche et sa droite sont inversées et son résultat est 53, nombre qui désigne le même domino.



$$\boxed{5} \xrightarrow{\times 5} \boxed{25} \xrightarrow{+7} \boxed{32} \xrightarrow{\times 2} \boxed{64} \xrightarrow{-14} \boxed{50} \xrightarrow{+3} \boxed{53}$$

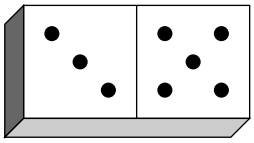


$$\boxed{1} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5} \xrightarrow{+7} \boxed{12} \xrightarrow{\times 2} \boxed{24} \xrightarrow{-14} \boxed{10} \xrightarrow{+6} \boxed{16}$$



$$\boxed{4} \xrightarrow{\times 5} \boxed{20} \xrightarrow{+7} \boxed{27} \xrightarrow{\times 2} \boxed{54} \xrightarrow{-14} \boxed{40} \xrightarrow{+3} \boxed{43}$$

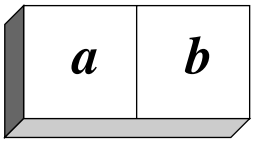
La deuxième étape vers la compréhension du phénomène consiste à développer quelques exemples en effectuant partiellement les calculs de manière à conserver tout au long du déroulement les deux nombres du domino. Nous présentons ci-dessous une possibilité parmi d'autres.



$$\boxed{\mathbf{3}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{\mathbf{3} \times 5} \xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{3} \times 5) + 7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{(\mathbf{3} \times 10) + 14} \xrightarrow{-14} \boxed{\mathbf{3} \times 10} \xrightarrow{+\mathbf{5}} \boxed{\mathbf{3} \times 10 + \mathbf{5}}$$

Une difficulté apparaît lorsqu'il s'agit de multiplier par 2 une somme dont un des termes est un produit.

La dernière étape consiste à généraliser les observations faites jusqu'ici sur des exemples numériques. Pour ce faire, nous inventons un ≪ domino algébrique ≫.



$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+7} \boxed{5\boldsymbol{a}+7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{10\boldsymbol{a}+14} \xrightarrow{-14} \boxed{10\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+b} \boxed{10\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

Une fois la procédure de calcul décortiquée et formalisée, l'explication du phénomène apparaît clairement. Il reste cependant à interpréter l'écriture $10a + b$ comme l'écriture qui produit le nombre dont les chiffres sont a et b (dans cet ordre).

Prolongement possible

Le prolongement proposé est comparable à l'activité qui vient d'être exploitée, si ce n'est que l'on découvrira deux inconnues. Cette version du problème est valable pour 2003, l'enseignant devra l'adapter chaque année.

L'enseignant s'adresse à une personne et lui propose un tour qui lui permettra de trouver l'âge de n'importe qui. Il lui propose de le tester et lui dit :

> Pense un nombre compris entre 0 et 9. Multiplie-le par 50. Ajoute 6 au produit obtenu. Multiplie le résultat par 2. Ajoute 1 991 si ton anniversaire est passé et 1 990 s'il n'est pas encore passé. Enfin, retranche ton année de naissance. Avec le nombre obtenu, tu peux retrouver ton âge.

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à trois chiffres : le chiffre des centaines correspond au nombre choisi et le nombre formé des deux derniers chiffres, à son âge. Cette procédure ne nécessite pas en réalité de restreindre le choix initial aux nombres compris entre 0 et 9. Si un élève choisit un nombre composé de deux chiffres, son résultat est un nombre à quatre chiffres dans lequel les deux premiers chiffres forment le nombre initial. La limitation à un chiffre a pour seul but de simplifier l'explication.

Pour comprendre cette situation, il est indispensable de passer par la formalisation et ensuite d'analyser l'expression obtenue. Nous développerons le cas où l'anniversaire de la personne est déjà passé, l'explication étant similaire dans l'autre cas.

Soit a, le nombre choisi.

Soit b, l'année de naissance de la personne.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 50} \boxed{50\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+6} \boxed{50\boldsymbol{a}+6} \xrightarrow{\times 2} \boxed{100\boldsymbol{a}+12} \xrightarrow{+1\,991} \boxed{100\boldsymbol{a}+2\,003} \xrightarrow{-b} \boxed{100\boldsymbol{a}+2\,003-\boldsymbol{b}}$$

Pour ce qui est du chiffre des centaines, on retrouve bien le nombre choisi et l'expression algébrique $100a$ est claire. Pour ce qui est de l'âge de la personne, il reste à analyser à quoi correspond le $2\,003 - b$.

Une fois la logique comprise, l'enseignant peut demander aux élèves d'adapter la situation pour l'année suivante. Il peut également leur demander d'inventer des variantes. La proposition suivante en est un exemple.

Choisis un nombre. Multiplie-le par 50. Ajoute 7 au produit. Multiplie le résultat obtenu par 2. Ajoute 1 989 si ton anniversaire est passé et 1 988 s'il n'est pas encore passé. Enfin, retranche ton année de naissance.

Une variante consiste à expliquer un tour dans lequel trois inconnues interviennent. Chaque élève doit disposer d'une calculatrice et effectuer les opérations qui lui sont dictées. En fin de parcours, sa date de naissance apparaîtra sur l'écran de la calculatrice.

> Encode le jour de ta naissance. Multiplie ce nombre par 20. Ajoute 3. Multiplie le résultat obtenu par 5. Ajoute le mois de ta naissance. Multiplie le nombre obtenu par 20. Ajoute 3. Multiplie le résultat obtenu par 5. Ajoute les deux derniers chiffres de ton année de naissance. Ôte 1 515, date de la bataille de Marignan. Que reconnais-tu sur l'écran ?

Si on pose que x est le jour de naissance, y le mois de naissance et z, le nombre formé des deux derniers chiffres de l'année de naissance, on obtiendra $10\,000x + 100y + z$.

3.2 Toujours 222

Comment s'y prendre ?

Le professeur demande à chacun de réaliser les étapes suivantes.

> Choisis trois chiffres différents (en évitant le 0). Additionne-les. Écris tous les nombres que l'on peut former à l'aide de ces trois chiffres. Additionne ces six nombres. Divise cette dernière somme par la première. Je peux affirmer, sans aucun doute, que vous avez tous obtenu 222.

L'enseignant sonde la classe en demandant à l'un ou l'autre élève le nombre qu'il a obtenu. Après avoir montré qu'ils ont tous le même résultat, l'enseignant leur demande :

Vous obtenez tous 222. Pourquoi ?

Première étape : développer la procédure pour un exemple numérique proposé par un élève.

Soit 2, 5 et 8, les trois chiffres choisis.

Leur somme vaut

$$2 + 5 + 8 = 15.$$

Les six nombres formés à l'aide de ces chiffres sont

$$258; 285; 528; 582; 825; 852.$$

La somme de ces nombres est

$$258 + 285 + 528 + 582 + 825 + 852 = 3\,330.$$

Le quotient de la deuxième somme par la première vaut

$$\frac{3\,330}{15} = 222.$$

Dans ce cas, les exemples numériques n'illustrent pas vraiment le phénomène.

Deuxième étape : éclairer la situation en formalisant.

Soit a, b et c, les trois chiffres choisis.

Leur somme est

$$a + b + c.$$

Les six nombres formés à l'aide de ces chiffres s'écrivent

$$100a + 10b + c\,;\ 100a + 10c + b\,;\ 100b + 10a + c\,;\ 100b + 10c + a\,;\ 100c + 10a + b\,;\ 100c + 10b + a.$$

La somme de ces nombres s'écrit

$$\begin{aligned} &100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a \\ &= 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c). \end{aligned}$$

Le quotient vaut

$$\frac{222(a + b + c)}{(a + b + c)} = 222.$$

Après cette démonstration algébrique, le phénomène, apparaissant à première vue comme un « tour de magie », est mis à nu.

Chapitre 6

Produits remarquables

Préambule

Les produits remarquables ne semblent guère difficiles à apprendre. Pour les établir, il s'agit seulement d'appliquer les propriétés de distributivité et d'observer qu'à des produits de sommes particulières correspondent des développements particuliers. Et pourtant !

Tous les enseignants constatent que les élèves hésitent souvent devant une expression algébrique : ont-ils affaire à une somme que l'on peut factoriser ou à un produit que l'on peut développer ? En général, ils perçoivent mal quand et pourquoi il faut passer, selon le contexte, d'une écriture à l'autre. Et que dire du nombre de doubles produits « oubliés », des problèmes de signes qui refont brusquement surface dès lors que les élèves se mettent à « fabriquer » les termes d'un développement sans plus avoir conscience de la nature des opérations qu'ils effectuent ?

Il s'avère que l'apprentissage des produits remarquables mobilise un ensemble de procédures et constitue par là, tout à la fois un seuil à franchir et un accès à une réelle habileté calculatoire.

La maîtrise de cet ensemble articulé de procédures passe par un travail de symbolisation à partir de contextes géométriques ou arithmétiques. L'élève apprend par là à construire une expression algébrique qui traduit une relation, il apprend aussi à organiser une suite de calculs pour établir de nouvelles relations.

Dans le cadre qui nous occupe, les contextes les plus éclairants sont ceux, déjà présents dans les mathématiques grecques, qui tirent les égalités remarquables de relations entre des aires de figures planes et les appliquent à des questions d'arithmétique.

Les activités proposées s'inscrivent dans cette tradition sans pour autant reprendre les objectifs de calcul rapide, importants jadis, devenus inutiles à l'ère des calculatrices. Notre démarche prend acte de la présence de celles-ci dans les classes et, à maintes occasions, utilise leurs ressources. Nous dépassons ensuite le contexte des aires de figures pour aborder des formes plus abstraites de calcul : celles qui intègrent des nombres relatifs.

1 Carré d'une somme

De quoi s'agit-il ? Les élèves décodent et appliquent une procédure de calcul avec des nombres naturels. Ils expliquent ce phénomène numérique par analogie

avec le calcul de l'aire d'un carré. Un travail de généralisation s'ensuit.

Enjeux

Découverte du carré d'un binôme sous ses différents aspects : numérique, géométrique et algébrique.

Compétences

La plupart des compétences (relatives aux nombres) qu'il faut certifier à 14 ans sont travaillées dans les activités ci-après.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.

Construire des expressions littérales.

Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

Utiliser dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.

De plus, ces activités répondent à ce qui est dit dans le texte qui introduit ces compétences et les situe dans la genèse des apprentissages mathématiques [3]. Voici un extrait de ce texte.

La découverte et l'élaboration de propriétés relatives à certaines catégories de nombres naturels contribuent à assurer une aisance dans le domaine des nombres. De plus, l'analyse de ces phénomènes arithmétiques conduit à établir des preuves et à employer des lettres pour généraliser. Cette étude constitue ainsi un tremplin pour accéder à l'algèbre.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Papier quadrillé, règle graduée, crayon, gomme, calculatrice.

Prérequis

L'écriture avec des lettres : le carré d'un nombre, deux nombres consécutifs, la somme de deux nombres, le double d'un nombre.

Le calcul numérique avec les entiers et les nombres relatifs (ou si l'on préfère, avec des décimaux positifs ou négatifs).

La double distributivité. La mise en évidence.

1.1 Au suivant !

Comment s'y prendre ?

Connaissant le carré d'un nombre, on peut calculer mentalement (ou presque), le carré du nombre qui suit. Voici comment procéder :
ajouter 1 au carré du nombre donné,
ajouter ensuite le double du nombre donné.
Utiliser ce procédé pour calculer le carré de 21 à partir du carré de 20, puis le carré de 22. Vérifier et expliquer le procédé.

La plupart des élèves imaginent que le carré de 21 est formé du carré de 20 auquel on ajoute le carré de 1. Il leur semble étrange de devoir ajouter aussi le double du nombre. Le professeur les engage à vérifier leurs conjectures, soit par calcul écrit, soit en utilisant la calculatrice. Ils réalisent qu'ils se trompent et retournent à l'énoncé.
On sait que le carré de 20 est 400. En appliquant le procédé, on trouve

$$21^2 = 400 + 1 + (2 \times 20) = 441,$$

$$22^2 = 441 + 1 + (2 \times 21) = 484.$$

Vérifions à la calculatrice :

$$22^2 = 484.$$

Le procédé a donc l'air fiable. On l'utilisait jadis pour construire une table de carrés. D'où vient ce procédé, comment l'expliquer ? Ces questions introduisent la consigne suivante.

Faire un dessin qui montre le carré de 10, puis le carré de 11.

L'expression *carré d'un nombre* peut être associée à l'image de points disposés en carré, comme les représentaient les Grecs, probablement déjà à l'époque des Pythagoriciens. C'est ce que montre la figure 1.

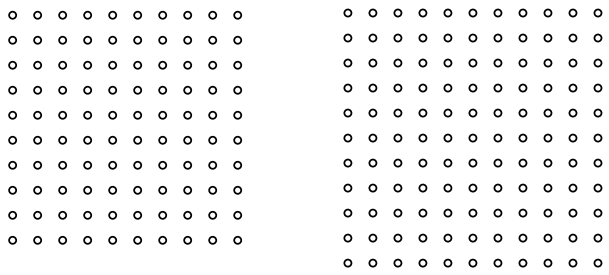


Fig. 1

La figure 2 montre les points qu'il faut ajouter au premier carré pour obtenir le second.

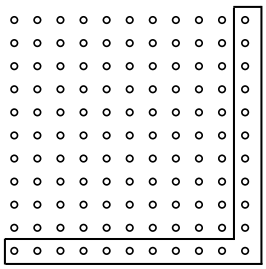


Fig. 2

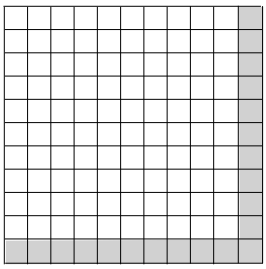


Fig. 3

Ces points sont disposés en équerre, figure que les Grecs appelaient *gnomon*[1]. Le gnomon qui complète 10^2 pour former 11^2 est formé de deux rangées de 10 points et d'un point supplémentaire.

D'autres élèves, plutôt que de dessiner des points, utilisent leur page quadrillée pour représenter 10^2 et 11^2. Ils dessinent la figure 3 et font ainsi le lien entre *nombre carré* et *aire d'un carré*.

Le professeur demande alors de généraliser à partir d'un carré de côté $n+1$ (voir figure 4) et d'écrire dans le langage algébrique comment passer du carré d'un nombre quelconque n au carré du nombre $n+1$. D'où la formule :

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

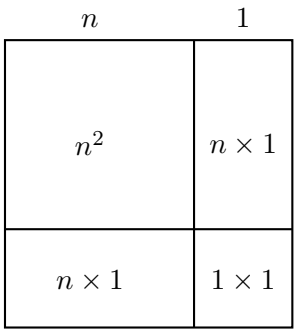


Fig. 4

Prolongement possible

Voici une question qui requiert d'utiliser les acquis récents dans une situation analogue. Il y en a bien sûr beaucoup d'autres.

> Un carré est tel que si son côté augmente d'un mètre, son aire augmente de 57 m^2. Calculer le côté de ce carré.

On sait que $(c+1)^2 - c^2 = 2c+1$. D'après l'énoncé, $2c+1 = 57$, donc $c = 28$.

Le côté mesure donc 28 mètres.

1.2 Attention aux deux rectangles !

Comment s'y prendre ?

On explore à présent une situation plus générale : le nombre 1 ne joue plus aucun rôle, les sommes et les nombres que l'on élève au carré sont quelconques.

> Quelqu'un dit $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Est-ce vrai ?

[1]Ce mot désignait à l'origine, un objet ayant la forme d'une équerre et dont l'ombre indique l'heure. C'est en quelque sorte une forme primitive de cadran solaire. Plus tard, ce mot a été utilisé par les Pythagoriciens dans le contexte des *nombres figurés* pour désigner le nombre qui ajouté à un nombre carré, permet d'atteindre le nombre carré suivant.

Deux approches sont possibles. L'une, numérique, consiste à remplacer a et b par des naturels. Elle conduit très vite à invalider l'énoncé mais ne montre pas la différence entre les deux expressions. L'autre, géométrique, permet de comparer le carré d'une somme de deux nombres avec les carrés de chacun de ces nombres et de *voir* la différence.

Dessiner des carrés, ça va ! Mais comment comparer ? Le travail précédent donne des pistes. Lorsque les élèves indiquent les mesures respectives des côtés, il faut les inciter à ne pas effectuer les sommes, ni les carrés pour garder la trace des données. Ils tentent alors de placer les deux premiers carrés à l'intérieur du troisième. On s'attarde aux figures qui font apparaître deux rectangles et deux carrés. Ensuite le professeur trace des figures, il y introduit des lettres et explique que de cette façon, le dessin n'est pas lié à des mesures particulières (voir figure 5). Les élèves écrivent l'aire de chaque pièce.

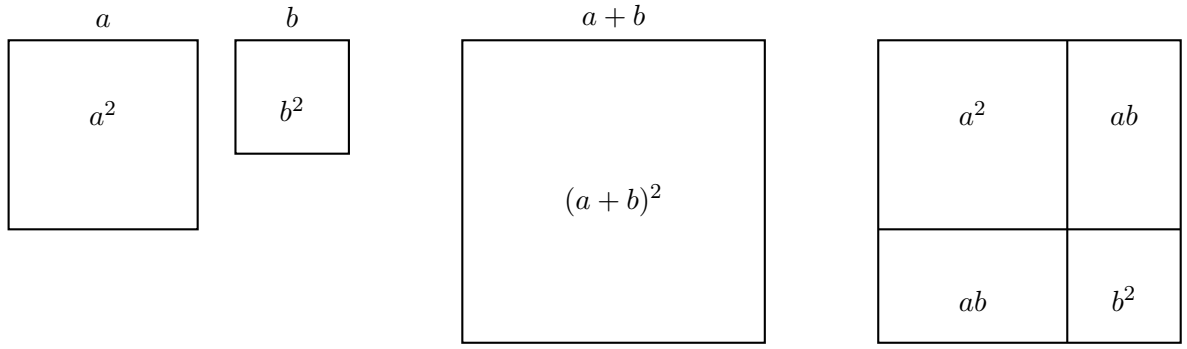


Fig. 5

Les deux derniers dessins montrent les deux façons d'écrire le carré d'une somme. La première façon consiste à effectuer d'abord la somme des deux nombres et à élever le résultat au carré, l'autre façon consiste à élever chaque terme au carré, en faire la somme et y ajouter le double produit des deux nombres. On retient l'égalité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Parmi les calculs ci-après, quels sont ceux qui ont comme résultat le carré de 19 ?

$$20^2 - 1^2$$

$$10^2 + 9^2$$

$$100 + 180 + 81$$

$$400 - 40 + 1$$

Si on compare les résultats de ces calculs à celui de 19^2 (que l'on trouve par calcul écrit ou avec une calculatrice), on constate que seuls les deux derniers calculs donnent le même résultat. Pour expliquer pourquoi ces résultats sont égaux, comparons les calculs au développement que nous venons d'écrire.

La somme $100 + 180 + 81$ est la valeur numérique de $a^2 + 2ab + b^2$ pour $a = 10$ et $b = 9$.

La somme $400 - 40 + 1$ est la valeur numérique de la même expression pour $a = 20$ et $b = -1$.

Utiliser la même identité pour calculer 29^2, 49^2, 99^2.

Les élèves s'exercent à calculer des valeurs numériques de $a^2 + 2ab + b^2$ pour $b = (-1)$. Ils écrivent par exemple

$$29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841,$$
$$49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401,$$
$$99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801.$$

Ils s'aperçoivent que ce développement permet de calculer certains carrés sans recourir à la calculatrice et sans calcul écrit.

Il s'agit à présent d'explorer plus avant l'égalité remarquable pour des valeurs de a et de b qui sont tantôt positives, tantôt négatives. C'est l'objet de la consigne qui suit.

Calculer les deux membres de l'égalité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ en prenant pour a les valeurs 5 ou -5 et pour b les valeurs 2 ou -2.

On incitera les élèves à présenter leurs calculs de manière à ce qu'ils puissent vérifier facilement que tous les cas ont été envisagés, par exemple en complétant un tableau.

	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$a = 5$ et $b = 2$	$7^2 = 49$	$5^2 + 20 + 2^2 = 49$
$a = 5$ et $b = -2$	$3^2 = 9$	$5^2 + (-20) + (-2)^2 = 9$
$a = -5$ et $b = 2$	$(-3)^2 = 9$	$(-5)^2 + (-20) + 2^2 = 9$
$a = -5$ et $b = -2$	$(-7)^2 = 49$	$(-5)^2 + 20 + (-2)^2 = 49$

Il s'avère donc que cette seule égalité suffit pour calculer le carré d'une somme ou le carré d'une différence, étant entendu que, dans ce dernier cas, il faut ajouter *l'opposé* du terme à retrancher. On peut démontrer cela en appliquant la double distributivité au produit $(a + b)(a + b)$, dans lequel a et b sont des nombres relatifs. On a ainsi

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Revenons à présent aux mesures de longueurs et d'aires qui s'expriment toutes par des nombres positifs.

En supposant $a > b$, montrer à l'aide de figures que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

On peut chercher l'inspiration du côté de la figure 5. Il suffit de considérer le carré extérieur (voir figure 6) comme le carré de côté a et l'un des carrés intérieurs comme le carré de la différence. On voit ensuite que l'on ne peut retrancher qu'un rectangle (ab) au carré (a^2) et que pour en ôter un deuxième, il faut au préalable rajouter le petit carré (b^2).

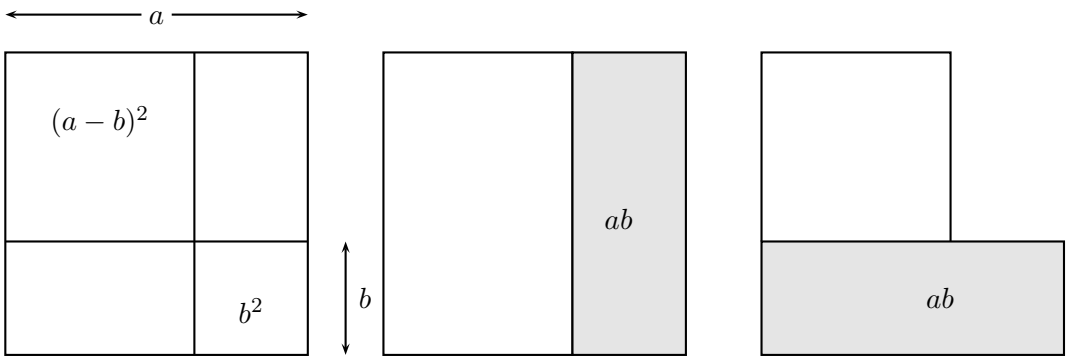


Fig. 6

D'autres figures, plus difficiles à découvrir, illustrent aussi cette égalité. En voici une que le professeur peut faire travailler en classe.

Voici une figure qui montre comment développer le carré d'une différence de deux nombres positifs. Reconstituer les étapes qui y conduisent.

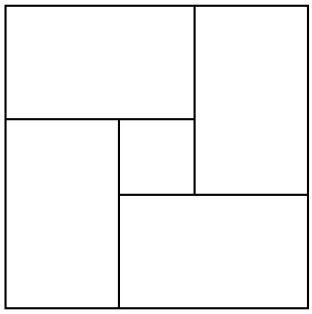


Fig. 7

Il suffit d'appeler a et b respectivement la longueur et la largeur de chacun des quatre rectangles. Le carré intérieur a comme côté $(a-b)$ et comme aire $(a-b)^2$. On peut calculer son aire comme différence entre celle du carré extérieur et celles des quatre rectangles. On a alors

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab,$$

puis

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$$

et finalement

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

La question qui suit conduit à utiliser le carré d'une somme pour expliquer une égalité surprenante et à la généraliser.

1.3 Des calculs surprenants

Comment s'y prendre ?

La procédure que décrit l'énoncé ci-dessous permet de calculer le carré d'un nombre dont la partie décimale est cinq dixièmes. À condition que la partie entière ne soit pas trop grande, on peut faire ce calcul mentalement. Il va de soi que cet énoncé ne doit pas être mémorisé par les élèves. L'intérêt de l'exercice réside principalement dans l'exploration numérique et dans le travail de symbolisation algébrique qui conduit à expliquer ce phénomène.

> Pour élever $7,5$ au carré, je fais 7×8 et j'écris 56 qui est la partie entière du résultat. La partie décimale étant 25 centièmes. Le résultat est ainsi $56,25$.
> De même, pour élever $9,5$ au carré, je fais $9 \times 10 = 90$, puis j'écris 25 centièmes à la droite de 90.
> Utiliser cette méthode pour calculer d'autres carrés. Vérifier les résultats et expliquer.

Les différents tests (qui doivent comporter des exemples et des contre-exemples), conduisent les élèves à conjecturer que la méthode fonctionne uniquement pour des nombres dont la partie décimale est cinq dixièmes.

Les difficultés commencent quand il faut expliquer pourquoi la méthode fonctionne à tous les coups pour de tels nombres !

En un premier temps, on peut demander aux élèves d'écrire les calculs qui traduisent le procédé, sans les effectuer et ensuite de les comparer au développement du carré d'une somme.
Pour le premier exemple cela donne, en appliquant le procédé,

$$7,5^2 = (7 \times 8) + 0,5^2.$$

Par ailleurs, en utilisant l'égalité remarquable on a

$$7,5^2 = (7 + 0,5)^2 = 7^2 + (2 \times 7 \times 0,5) + 0,5^2.$$

L'idée qu'il faut avoir ici, c'est bien sûr de mettre 7 en évidence sur les deux premiers termes. On trouve alors

$$7,5^2 = 7(7 + 1) + 0,5^2.$$

Et tout s'éclaire !

Deuxième étape : utiliser des lettres. Cette forme d'expression permet en effet de généraliser et de découvrir par là comment l'application de la procédure correspond au développement du carré d'une somme. Pour ce faire, il faut décomposer le nombre donné pour qu'apparaisse la partie entière (a) et la partie décimale ($0,5$). La démonstration (car il s'agit bien de cela) tient en une seule ligne.

$$(a + 0,5)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 0,5 + 0,5^2 = a(a + 1) + 0,5^2.$$

Cette dernière expression algébrique traduit exactement la procédure.

Les deux questions qui terminent l'activité requièrent d'utiliser conjointement le produit remarquable comme méthode de démonstration et l'écriture d'un nombre dans le système décimal.

Vrai ou faux ?
Si un nombre se termine par 5, son carré se termine par 25.

Après avoir procédé à des essais numériques, les élèves sont amenés, dans une démarche analogue à celle que nous venons de détailler, à écrire la démonstration suivante.

Le nombre dont on parle est de la forme $(10d+5)$, la lettre d représentant le nombre de dizaines contenu dans ce nombre. On écrit donc

$$(10d+5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d+1) + 25.$$

Le premier terme $100d(d+1)$ est un multiple de 100, il se termine donc par deux zéros. Lorsqu'on lui ajoute 25, on trouve bien un nombre qui se termine par 25.

1.4 La calculatrice est dépassée !

Dans la foulée des calculs surprenants, voici un procédé décrit par Ibn al-Bannā[2] (vers 1256 – vers 1321).

Vrai ou faux ?

Pour élever 999 999 au carré, je multiplie 999 998 par 1 000 000 puis j'ajoute 1. Je trouve le résultat en moins de temps qu'il n'en faut pour sortir ma calculatrice... C'est 999 998 000 001.

La multiplication écrite est assez fastidieuse et les calculatrices qui n'affichent que 8 ou 10 chiffres ne permettent pas de vérifier ce calcul. Par contre, le produit remarquable conduit assez rapidement tout à la fois à valider et à expliquer le procédé.

$$(1\,000\,000 - 1)^2 = 1\,000\,000^2 - 2 \times 1\,000\,000 + 1,$$

$$(1\,000\,000 - 1)^2 = 1\,000\,000(1\,000\,000 - 2) + 1.$$

Et la question rebondit : voici une méthode qui permet de calculer un carré que la calculatrice ne peut afficher. Y en a-t-il d'autres ?

Le procédé s'applique évidemment aux carrés de nombres dont tous les chiffres sont des 9. Après quelques vérifications analogues à celles que nous venons de montrer, on peut passer (si les élèves sont rompus au calcul avec des exposants littéraux) à une généralisation.

$$(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1,$$

$$(10^n - 1)^2 = 10^n(10^n - 2) + 1.$$

[2] Mathématicien originaire de Marrakech.

2 Binômes conjugués

De quoi s'agit-il ?

Les élèves explorent un phénomène numérique et l'expliquent par la voie géométrique. Un travail de généralisation s'ensuit qui passe par du calcul avec des entiers et aboutit à un traitement algébrique du problème.

Enjeux

Découverte du produit de binômes conjugués sous différents aspects : numérique, géométrique et algébrique.

Compétences

Ce sont les mêmes que celles relatives à la section 1 (voir page 169).

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Papier quadrillé, règle graduée, crayon, gomme, ciseaux.

Prérequis

L'écriture avec des lettres : le carré d'un nombre, trois nombres consécutifs, le produit de deux nombres.

Le calcul numérique avec les entiers et les nombres relatifs (ou si l'on préfère, avec des décimaux positifs ou négatifs).

La double distributivité. La mise en évidence.

2.1 Trois nombres consécutifs

Comment s'y prendre ?

L'exploration du phénomène numérique ci-après introduit le produit de deux binômes conjugués pour des binômes dont l'un des termes est le nombre 1.

> Soient trois nombres consécutifs. Le carré du deuxième, diminué de 1 est-il égal au produit des deux autres ?

Les élèves procèdent à des essais numériques qui donnent à penser que la réponse à la question posée est affirmative. Le professeur demande alors d'expliquer ce phénomène en dessinant des figures dont les aires correspondent aux calculs effectués. Partons par exemple du triple 5, 6, 7. L'énoncé se traduit alors sous forme de l'égalité

$$36 - 1 = 5 \times 7.$$

La figure 8 illustre le premier membre de l'égalité, la figure 9 illustre le second.

Pour expliquer l'égalité, il faut montrer que ces deux figures ont la même aire. La figure 10 indique comment transformer la figure 8 pour obtenir la figure 9. On imagine sans peine qu'on peut faire une transformation analogue pour tout autre *gnomon* dans lequel le carré ôté vaut 1.

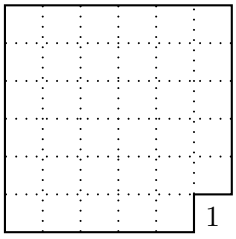


Fig. 8

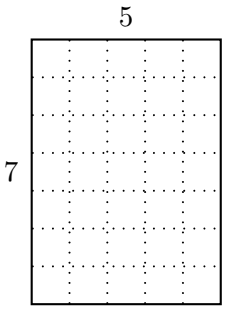


Fig. 9

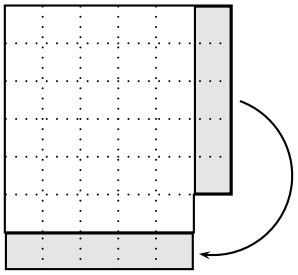


Fig. 10

Un autre découpage permet d'illustrer la même égalité. On coupe le gnomon en deux selon la diagonale montrée par la figure 11

On peut assembler les deux pièces de façon à faire apparaître un parallélogramme dont la base est 7 et dont la hauteur est 5. C'est ce que montre la figure 12. Avec les deux mêmes pièces, on peut encore former un rectangle ou un trapèze (voir figures 13 et 14).

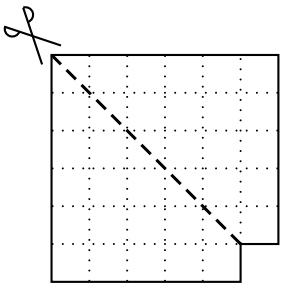


Fig. 11

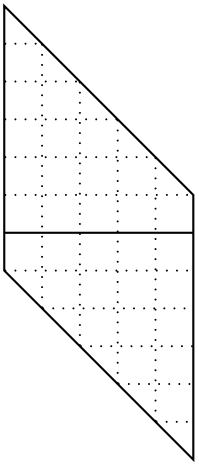


Fig. 12

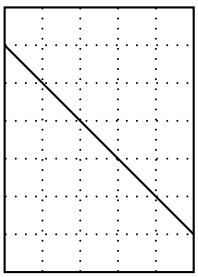


Fig. 13

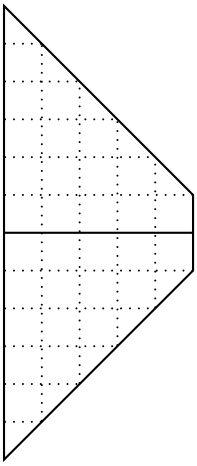


Fig. 14

L'aire des deux premiers quadrilatères s'exprime sous la forme du produit de 7 par 5, celle du trapèze est

$$\frac{(12+2)\times 5}{2}.$$

Pour que la transposition algébrique se présente sous la forme d'un produit remarquable et non d'une factorisation, on pose la question suivante.

Montrer, par la voie algébrique, que si trois nombres sont consécutifs, alors le produit du premier par le troisième est égal au carré de celui du milieu diminué de 1.

Les élèves commencent souvent en choisissant trois lettres différentes pour les trois nombres. Lorsque le professeur leur demande d'exprimer le lien entre ces trois nombres tel qu'il est décrit dans l'énoncé, ils les écrivent sous la forme a, $a+1$ et $a+2$. Ils montrent que

$$a(a+2) = (a+1)^2 - 1.$$

Ce calcul ne fait pas intervenir de binômes conjugués. Pour faire le lien avec l'exploration géométrique qui précède, le professeur signale que l'expression $a+2$ n'intervient dans aucun dessin et demande d'écrire trois nombres consécutifs dont le deuxième est a. Les trois nombres s'écrivent alors sous la forme a, $a-1$, et $a+1$ et l'égalité à vérifier est

$$(a-1)(a+1) = a^2 - 1.$$

Les élèves transforment le premier membre en appliquant la double distributivité et réduisent les termes semblables. Ils obtiennent le second membre.

2.2 D'un rectangle à un gnomon

Comment s'y prendre ? On procède à présent à des généralisations successives qui conduiront à traiter des produits qui ne privilégient pas le nombre 1, puis des produits qui sortent du cadre de la géométrie et portent sur des nombres relatifs.

Montrer par la voie géométrique que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Le premier membre de l'égalité est un produit que l'on interprète comme l'aire d'un rectangle de dimensions $a+b$ et $a-b$. On peut voir le deuxième membre comme un *gnomon*. Il faut montrer que ces deux figures ont même aire.

Les élèves puisent leur inspiration dans les figures construites lors des activités précédentes. Les figures ci-après montrent les différentes étapes de la transformation.

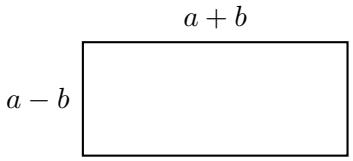


Fig. 15

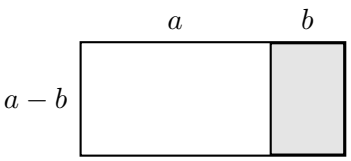


Fig. 16

On déplace le rectangle ombré de la figure 16 pour faire apparaître le gnomon de la figure 17. La figure 18 montre que celui-ci est obtenu par la différence des deux carrés d'aires a^2 et b^2.

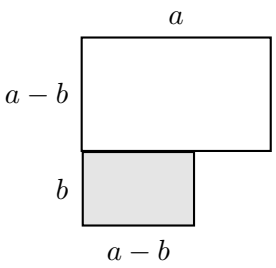


Fig. 17

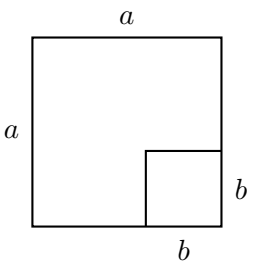


Fig. 18

Il faut à présent explorer comment se comporte cette égalité lorsque les nombres a et b sont des entiers. Pour ce faire on donne aux élèves la consigne

> Calculer les deux membres de l'égalité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ en prenant pour a les valeurs 5 ou -5 et pour b les valeurs 2 ou -2.

Les élèves construisent un tableau analogue à celui que l'on a montré à propos du carré d'une somme.

Le professeur termine l'activité en demandant de prouver l'égalité par la voie algébrique.

Chapitre 7

Découpages géométriques

1 La relation de Pythagore

De quoi s'agit-il ?

Découvrir la relation de Pythagore, d'abord dans le cas du triangle rectangle isocèle à l'aide d'extraits du *Ménon* de Platon, puis dans le cas général à l'aide d'un découpage d'origine chinoise (et indienne) et de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'Euclide.

Grâce à ce théorème, résoudre des problèmes faisant intervenir des carrés, des sommes de carrés et des racines carrées simples.

Enjeux

Approcher géométriquement, pour leur donner du sens, les notions de carré, de somme de carrés et de racine carrée, indispensables en algèbre.

Amener les élèves à établir un dessin à partir d'un texte le décrivant, puis à raisonner rigoureusement sur un dessin similaire.

Compétences

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.

Traduire une information d'un langage dans un autre.

Rassembler des arguments et les organiser dans une chaîne déductive.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

L'introduction historique et philosophique.

Le texte extrait du *Ménon* de Platon (en annexe à la page 319).

Le texte de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'Euclide.

Prérequis

Le vocabulaire lié aux figures du carré, du rectangle et du triangle rectangle.

1.1 Introduction historique

L'origine de la relation de PYTHAGORE se perd dans la nuit des temps et son énoncé prend des formes différentes selon la civilisation envisagée. L'Inde du Ve siècle av. J.-C., par exemple, exprime dans un rectangle la relation quadratique existant entre sa diagonale d'une part et ses longueur et largeur d'autre part. Elle ne donne aucune démonstration de cette relation, mais distingue le cas particulier où le rectangle est un carré. Cette distinction trahit probablement l'origine différente des deux propriétés. Celle du carré pourrait avoir été découverte à l'aide d'un pavage de carrés découpés en triangles isocèles de deux couleurs, comme dans la décoration de vases provenant de la civilisation de l'Indus (figure 1).

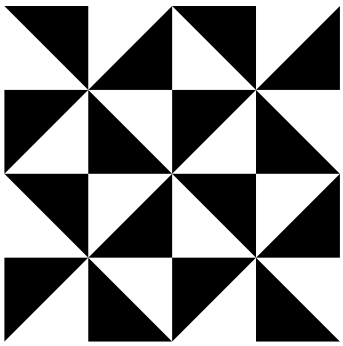


Fig. 1

Celle du rectangle proviendrait de la découverte fortuite de l'utilité des nombres 3, 4 et 5 pour construire un angle droit. Depuis fort longtemps, les artisans savent que tout rectangle a ses diagonales d'égales longueurs et se servent de cette propriété pour construire des objets rectangulaires. Ainsi, les ébénistes, au moment de coller les quatre parois d'un tiroir, vérifient l'égalité des deux diagonales pour s'assurer que le tiroir aura bien la forme voulue pour coulisser dans le meuble. Les Mésopotamiens faisaient vraisemblablement de même pour construire un moule à briques rectangulaires et, c'est sans doute à l'occasion de la vérification de l'égalité des diagonales d'un moule pour des briques de proportion 4/3 qu'ils ont pu découvrir le triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 unités. Il y a peu, ce triangle était encore utilisé dans les métiers de la construction pour obtenir un angle droit.

Historiquement, la relation quadratique dont jouissent 3, 4 et 5 ne serait venue qu'ensuite, par comparaison avec la propriété du carré. Au contraire des Indiens, les Grecs exprimaient cette relation dans un triangle rectangle, qui est la moitié d'un rectangle coupé par sa diagonale. Ils ne font plus aucune distinction entre les deux cas et donnent, à l'époque d'EUCLIDE (IIIe siècle avant J.-C.), une démonstration de la propriété. Les Chinois en donnent une démonstration par découpage, assez tôt semble-t-il, mais qui n'a été explicitée qu'au IIIe siècle après J.-C. par LIU HUI dans son commentaire au *Jiuzhang suanshu*, souvent traduit par *Les neuf chapitres sur l'art du calcul*. Ce dernier ouvrage date de la dynastie des Han, vers le début de notre ère[1]. Un découpage similaire apparaît dans la *Yukti Bhāṣā*, ouvrage indien du XVe siècle après J.-C. Enfin, les Mésopotamiens n'en donnent pas d'énoncé, mais nous sommes certains qu'ils le connaissaient au début du IIe millénaire avant J.-C. puisqu'ils l'utilisaient dans la résolution de certains problèmes de « canne contre le mur » (voir les prolongements possibles).

1.2 La duplication du carré

Nous allons, à l'aide de la traduction d'un texte grec fourni aux élèves, les amener à découvrir une propriété de la diagonale du carré. Ce texte est un extrait du *Ménon* de PLATON, philosophe grec célèbre du IVe siècle avant J.-C. Comme beaucoup de dialogues de PLATON, il met en scène SOCRATE, qui fut le maître de PLATON, mais ce dernier prête souvent à SOCRATE ses propres conceptions. Le concept nouveau ici, qui sera développé dans plusieurs dialogues ultérieurs, est celui de la réminiscence, ou anamnèse des idées. L'anamnèse est basée sur la croyance, que

[1] Voir [108], p. 8-13, pour plus de détails.

Platon partage avec Pythagore, en la transmigration des âmes : l'âme quitte le corps après la mort et se réincarne dans un autre corps après une période d'attente. La légende rapporte que Pythagore pouvait se souvenir de ses vies antérieures. Pour Platon, l'âme a l'occasion, durant son passage entre deux corps, de contempler le monde des Idées. Ce monde est, selon Platon, le monde vrai tandis que notre monde terrestre n'en est qu'un reflet – on nomme « idéalisme » une telle conception philosophique. Quand elle se réincarne, l'âme garderait un vague souvenir du monde des Idées et l'acquisition de la connaissance par l'intellect ne serait que la réactivation de ce souvenir. Pour démontrer que cela est vrai, Socrate utilise une méthode qu'il nomme maïeutique – littéralement, « méthode d'accouchement » – et interroge un esclave pour l'amener à résoudre un problème de géométrie. Il faut encore noter que la préoccupation principale de Platon dans le *Ménon* n'est pas la notion d'anamnèse, mais bien la question de savoir si l'ἀρετή – « la vertu, l'excellence » – peut être enseignée ou même définie. Dans ce contexte, l'épisode de l'esclave est une leçon d'ouverture d'esprit à la recherche sincère, donnée par Socrate à l'aristocratique Ménon, qui pense qu'il est inutile de chercher à enseigner une « vertu » qu'on ne peut définir. Remarquons aussi que le choix par Socrate du carré comme thème du problème de géométrie n'est pas innocent : Pythagore avait déjà classé le carré dans la même liste que la « vertu », au contraire du rectangle qu'il plaçait dans la liste des contraires. Pour les Grecs, dire d'un homme qu'il est carré ne signifie pas qu'il est borné, mais bien qu'il est vertueux[2].

Comment s'y prendre ?

L'activité consiste en une lecture commentée du *Ménon*[3], avec la consigne suivante.

> Représenter chaque étape importante du dialogue par un dessin.

Ménon : Soit, Socrate. Mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas, mais que ce que nous appelons le savoir est une réminiscence ? Peux-tu me montrer qu'il en est ainsi ?

Socrate : Je t'ai dit tout à l'heure, Ménon, que tu étais adroit et maintenant tu demandes si je peux t'instruire, moi qui affirme qu'il n'y a pas d'enseignement, mais seulement réminiscence, pour que tout de suite je me contredise moi-même.

Ménon : Nullement, Socrate, par Zeus ! Ce n'était pas mon intention, c'est seulement l'habitude qui m'a fait parler ainsi. Mais s'il t'est possible de me prouver qu'il en est comme tu dis, prouve-le.

Socrate : Cela n'est pas facile, cependant j'y mettrai beaucoup d'ardeur, par amitié pour toi. Mais appelle pour moi un membre de ta nombreuse suite, celui que tu voudras, pour que je te le prouve par lui.

Ménon : Certes. (S'adressant à un esclave) Viens ici.

Socrate : Est-il Grec ? Sait-il le grec ?

Ménon : À coup sûr. Il est né chez moi.

Socrate : Veille à déterminer s'il semble, soit se souvenir, soit apprendre de moi.

Ménon : J'y veillerai.

Socrate : (à l'esclave) Dis-moi, mon enfant, sais-tu que ceci est une surface carrée ?

---

[2]Selon [29], p. 157-158.

[3]Il s'agit de courts extraits de [117]. Un texte plus complet de *Ménon*, 81e-86a, est donné en annexe. Les mots entre < > ont été ajoutés dans la traduction pour clarifier le sens.

L'emploi par SOCRATE du démonstratif « ceci » nous assure qu'il montre ou trace une figure tout en parlant. Ici, il s'agit d'un simple carré.

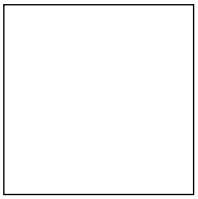


Fig. 2

SOCRATE trace ensuite les médianes du carré en vue de calculer son aire. Bien que cette partie du texte ne soit pas indispensable à la compréhension, nous l'avons gardée parce qu'elle introduit les mesures grecques de longueur et d'aire. Il s'agit dans les deux cas du « pied », mais nous les distinguerons en nommant « pied carré » la mesure d'aire.

L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Et que la surface carrée a toutes ces lignes égales, au nombre de quatre[4] ?
L'ESCLAVE : Certainement.
SOCRATE : N'a-t-elle pas aussi ces lignes par le centre égales[5] ?
L'ESCLAVE : Si.
SOCRATE : Eh bien, une telle surface ne pourrait-elle être rendue plus grande ou plus petite ?
L'ESCLAVE : Certainement.
SOCRATE : Si donc ce côté était de deux pieds et celui-ci aussi, de combien de pieds serait le tout ? Envisage les choses de la manière suivante : s'il y avait deux pieds pour ce côté et un pied seulement pour ce côté, la surface ne serait-elle pas d'une fois deux pieds carrés ?
L'ESCLAVE : Si.
SOCRATE : Et quand ce côté aussi est de deux pieds, ne produit-on pas une surface de deux fois deux ?
L'ESCLAVE : On la produit.
SOCRATE : On produit donc une surface de deux fois deux pieds <carrés> ?
L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Combien de pieds font donc deux fois deux ? Dis-le moi après avoir fait le calcul.
L'ESCLAVE : Quatre, SOCRATE.

À l'aide des médianes, SOCRATE a donc découpé le carré de côté deux pieds en quatre petits carrés unités. Il aurait suffi de compter ces carrés pour donner l'aire du grand carré : quatre pieds carrés. Mais SOCRATE préfère passer par un détour qui n'est pas inutile, puisqu'il justifie qu'on remplace le simple comptage des carrés unités par le produit de deux nombres. Le premier est le nombre de carrés unités que l'on doit accoler pour former un rectangle de largeur unité dans le grand carré. Le second est le nombre de tels rectangles qu'on peut placer côte à côte dans le grand carré.

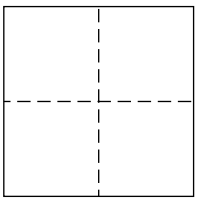


Fig. 3

Cette justification géométrique de l'utilisation du produit des dimensions – et du « carré numérique » de la longueur du côté dans le cas du carré géométrique – apparaît dans d'autres traditions que la grecque.

[4] Il s'agit des côtés.
[5] Il s'agit des médianes.

Maintenant vient la question fondamentale : comment construire un carré d'aire double du carré donné ? On pourrait nommer ce problème « duplication du carré » par analogie avec le problème historique de la « duplication du cube », qui est l'un des trois classiques des mathématiques grecques.

Socrate : Ne pourrait-on produire une autre surface, double de cette surface mais semblable, ayant toutes ses lignes égales comme celle-ci.
L'esclave : Oui.
Socrate : De combien de pieds sera-t-elle ?
L'esclave : Huit.
Socrate : Eh bien, essaie de me dire de quelle grandeur sera chaque côté de cette surface-là. Le côté de celle-ci est de deux pieds. Qu'est le côté du double ?
L'esclave : Il est clair, Socrate, qu'il est double.
Socrate : Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais lui demande tout. Et maintenant, il croit savoir quel est le côté à partir duquel la surface de huit pieds est produite. Ne te semble-t-il pas ?
Ménon : Si.
Socrate : Le sait-il donc ?
Ménon : Certes non.
Socrate : Il pense en vérité que la surface est produite à partir d'un côté double.
Ménon : Oui.
Socrate : Mais observe maintenant qu'il se souvient progressivement, comme on doit se souvenir.

[...]

Socrate : (à l'esclave) N'est-ce pas que ce côté-ci deviendra double de celui-là, si nous lui ajoutons un autre aussi grand ici ?
L'esclave : Certainement.
Socrate : La surface de huit pieds sera donc, dis-tu, produite à partir de ce côté si quatre côtés de même longueur sont produits ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Nous tirerons donc quatre côtés identiques sur le modèle de celui-ci. La surface que tu dis être de huit pieds ne serait-elle pas celle-ci ?
L'esclave : Si.
Socrate : N'est-il pas que dans cette nouvelle surface, il y en a quatre dont chacune est égale à quatre pieds ?
L'esclave : Si.
Socrate : Quelle aire est donc produite ? N'est-elle pas quatre fois aussi grande ?
L'esclave : Sans doute.

[...]

Socrate : Donc, mon enfant, sur un côté double est produit non pas une surface double, mais une surface quadruple.
L'esclave : Tu dis vrai.
Socrate : Et en effet quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas ?
L'esclave : Oui.

Comme SOCRATE le fait dire à MÉNON, l'esclave s'est trompé en croyant pouvoir doubler l'aire du carré de départ en doublant son côté. C'est une erreur très commune qu'on retrouve aussi dans le problème de la « duplication du cube ». Beaucoup d'élèves s'y laissent prendre et, comme SOCRATE, ils doivent construire le carré de côté double pour comprendre qu'il engendre une aire quadruple. Mais, ainsi que le fait remarquer l'éditeur[6] du *Ménon*, c'est l'apparition de cette erreur qui témoigne de la sincérité avec laquelle l'épreuve est conduite par SOCRATE. Les figures successivement indiquées par SOCRATE sont les suivantes :

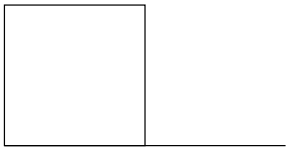


Fig. 4

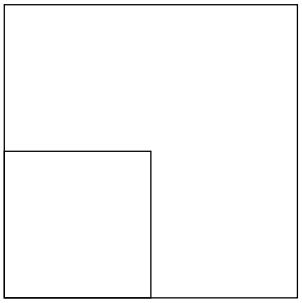


Fig. 5

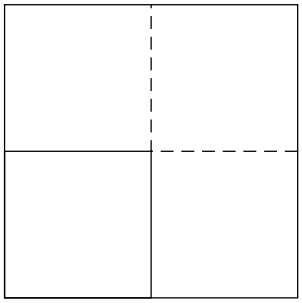


Fig. 6

Dans la partie du dialogue qui n'est pas reproduite ici[7], SOCRATE rappelle à l'esclave que l'aire du carré cherché est intermédiaire entre celle du carré de côté 2 pieds et celle du carré de côté 4 pieds, ce qui incite l'esclave à choisir 3 pieds. Nouvelle erreur que SOCRATE corrige en faisant construire par l'esclave le carré de côté 3 pieds, afin qu'il réalise que son aire vaut 9 pieds carrés et non les 8 cherchés.

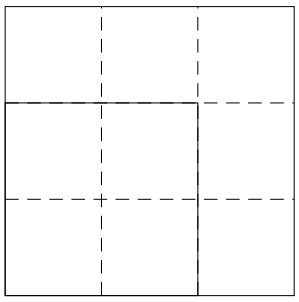


Fig. 7

[...]

SOCRATE : Donc, ce n'est pas encore sur le côté de trois pieds qu'est construite la surface de huit pieds ?

L'ESCLAVE : Certes non.

SOCRATE : Mais sur laquelle ? Essaie de nous le dire exactement et, si tu ne peux le calculer, montre-nous sur laquelle.

L'ESCLAVE : Mais, par Zeus, SOCRATE, je ne sais pas, moi.

[...]

SOCRATE : Ces quatre espaces ne sont-ils donc pas identiques ?

L'ESCLAVE : Oui.

SOCRATE : Et le tout, combien de fois est-il multiple de celui-ci ?

[6] [117], p. 252.

[7] Pour ne pas allonger démesurément le texte, mais il peut être éclairant pour les élèves de l'aborder en classe.

L'ESCLAVE : Quatre fois.
SOCRATE : Mais il nous fallait produire un espace double, tu ne t'en souviens pas ?
L'ESCLAVE : Certainement.
SOCRATE : N'est-il pas vrai que cette ligne tracée d'un angle à l'autre coupe chacune des surfaces carrées en deux ?
L'ESCLAVE : Si.
SOCRATE : N'est-il pas vrai que ces quatre lignes égales produisent cette surface carrée en l'entourant ?
L'ESCLAVE : Elles le font.
SOCRATE : Regarde maintenant : de quelle taille est cette surface carrée ?
L'ESCLAVE : Je ne sais pas.
SOCRATE : Chaque ligne n'a-t-elle pas délimité à l'intérieur de la surface carrée la moitié de chacune des quatre surfaces carrées présentes ?
L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Combien y a-t-il donc de telles moitiés dans cette surface carrée ?
L'ESCLAVE : Quatre.
SOCRATE : Et combien dans celle-ci ?
L'ESCLAVE : Deux.
SOCRATE : Et que sont quatre par rapport à deux ?
L'ESCLAVE : Le double.
SOCRATE : Et combien de pieds contient cette surface ?
L'ESCLAVE : Huit.
SOCRATE : À partir de quel côté est-il construit ?
L'ESCLAVE : À partir de celui-ci.
SOCRATE : À partir de la ligne tendue d'un angle à l'autre du carré de quatre pieds ?
L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Les sophistes nomment précisément cette ligne diamètre. Si diamètre est son nom, tu dirais, enfant de MÉNON, que la surface double est produite à partir du diamètre.
L'ESCLAVE : C'est bien cela, SOCRATE.

Après le dernier essai tenté par l'esclave pour exprimer le côté du carré cherché par un nombre entier de pieds, SOCRATE lui suggère de prendre plutôt une ligne géométrique qu'il construit dans la figure 6. Il s'agit de l'une des diagonales[8] du carré de base. En traçant une diagonale dans chacun des trois autres carrés, on obtient ainsi un carré « sur pointe ». La figure 8 montre clairement que son aire est double de celle du carré situé dans le coin inférieur gauche, par exemple.

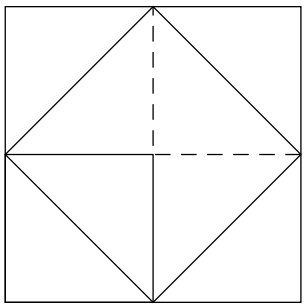


Fig. 8

Nous pouvons maintenant laisser SOCRATE conclure.

[8] Les sophistes, nous dit SOCRATE, utilisent le terme « diamètre ».

Socrate : Que t'en semble-t-il, Ménon ? Y a-t-il une seule conjecture à laquelle il n'a pas répondu de lui-même ?
Ménon : Non, tout vient de lui.
Socrate : Et cependant il ne savait pas, nous l'avons dit il y a peu.
Ménon : Tu dis vrai.
Socrate : Ces opinions étaient assurément en lui, n'est-ce pas ?
Ménon : Oui.

[...]

Socrate : Le fait que l'on rappelle la science dans sa propre mémoire n'est-ce pas se ressouvenir ?
Ménon : Certainement.
Socrate : Et cette science, qu'il a maintenant, ne l'a-t-il pas, soit apprise un jour, soit eue depuis toujours ?

[...]

Ménon : Je sais que personne ne lui a jamais enseigné.
Socrate : A-t-il ces opinions, oui ou non ?
Ménon : Cela semble incontestable, Socrate.
Socrate : S'il ne les a pas acquises dans la vie actuelle, n'est-il pas dès lors évident qu'il les avait eues et apprises à quelque autre époque.
Ménon : Il me semble.
Socrate : Ce temps n'est-il pas justement celui où il n'était pas un homme ?
Ménon : Oui.

Conclusion : On peut ne pas être d'accord avec la conclusion philosophique de ce dialogue, mais, du point de vue mathématique, Socrate a incontestablement prouvé que la diagonale d'un carré donné est le côté sur lequel il faut construire le carré d'aire double.

1.3 La somme de deux carrés

Comment s'y prendre ?

On peut encore considérer que ce qui précède permet de construire un carré dont l'aire vaut la somme des aires de deux carrés égaux. Pourrait-on généraliser cela ?

> Comment construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires de deux carrés quelconques ?

Cette interrogation, assez générale, est sans doute trop difficile pour les élèves et il faudra poser des sous-questions. En fait, si on regarde la figure 8, on y voit quatre carrés ! Non pas deux. Si l'on veut avoir une chance de généraliser la construction, il est peut-être souhaitable d'isoler deux carrés (parmi les quatre). On se trouve ainsi face à une « configuration de départ ». On l'analyse alors, afin de déterminer les « lignes à construire » pour arriver à la solution. Une discussion au sein de la classe devrait mettre en évidence deux configurations distinctes, illustrées par les figures 9 et 10.

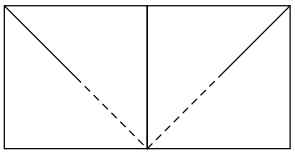


Fig. 9

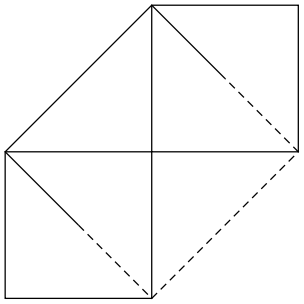


Fig. 10

Esquisser le cas plus général, où les deux carrés ne sont pas égaux et analyser la situation en vue de faire un pas vers la solution.

Un groupe d'élèves devrait arriver à une configuration du type de la figure 11, et un autre groupe, à une configuration du type de celle de la figure 13.

Les deux approches mènent à la solution ; explorons la première en observant la figure 11. À gauche et à droite du « point d'interrogation », on voit apparaître deux triangles rectangles qui « semblent » être égaux. Et en fait, s'ils le sont, leurs deux hypoténuses sont évidemment égales et l'angle qu'elles déterminent vaut un droit (à justifier).

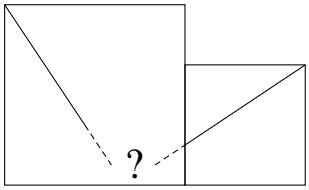


Fig. 11

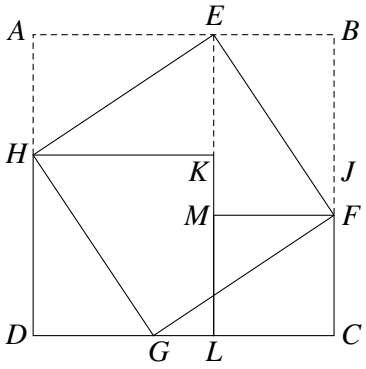


Fig. 12

On construit alors un carré et on complète le dessin, en prolongeant des verticales et en traçant une horizontale, comme dans la figure 12. Il y a toute une série de justifications à demander aux élèves...

Comment sont les quatre triangles rectangles dans les coins ? Que valent les mesures des côtés de l'angle droit de ces triangles ?

Ces quatre triangles rectangles sont évidemment égaux et ont pour côtés de l'angle droit, des côtés égaux à ceux des deux carrés de départ.

Comparer, par un découpage du grand carré $ABCD$, l'aire du carré $EFGH$ à la somme des aires des carrés $HKLD$ et $MFCL$.

On voit que l'aire du carré $EFGH$ est égale à l'aire du carré $ABCD$ diminuée de quatre fois l'aire d'un triangle rectangle tel que FCG, par exemple. Il en va de même de la somme des aires des deux carrés $HKLD$ et $MFCL$.

Dans la figure 13, la discussion entre les élèves devrait mettre en évidence que la solution ne peut être de construire un carré sur une diagonale du grand carré, car on aurait une aire double de celle de ce grand carré, ce qui est trop. Si on essaie de le faire sur une diagonale du petit carré, alors ce n'est pas assez.

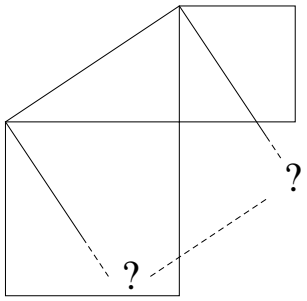


Fig. 13

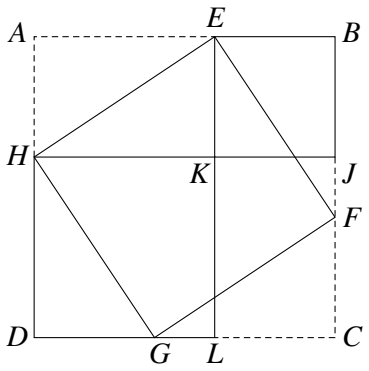


Fig. 14

Le segment oblique, en haut à gauche, est peut-être un bon candidat pour le côté du carré que l'on désire construire, puisque sa mesure est comprise entre les mesures des diagonales du grand et du petit carré. On va donc mener les perpendiculaires passant par les extrémités de ce segment oblique, puis observer la figure obtenue, en la « complétant quelque peu », par prolongement des horizontales et verticales et par fermeture du quadrilatère central, comme dans la figure 14.

Il y a de nouveau toute une série de justifications à fournir, sur l'égalité des quatre triangles rectangles dans les coins, sur le fait que le quadrilatère $EFGH$ est un carré, ... L'activité se conclut en posant la même question que pour la configuration précédente.

On voit que l'aire du carré $EFGH$ est celle du carré $ABCD$ diminuée de quatre fois l'aire d'un triangle rectangle. Et la somme des aires des carrés $EBJK$ et $HKLD$ est l'aire du carré $ABCD$ diminuée de deux fois l'aire d'un rectangle formé de deux triangles rectangles.

1.4 Énoncé général du théorème dit de Pythagore

Les élèves observent la figure 14. On leur demande de focaliser leur attention sur le triangle rectangle EKH et sur les carrés dessinés sur ses côtés.

Énoncer la propriété qui vient d'être montrée...

On comparera ensuite leurs réponses à ce qui suit.

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

Ce texte est la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'EUCLIDE, dans la traduction de Bernard VITRAC[9].

Très souvent, on présente ce résultat, essentiellement géométrique, au moyen de la figure ci-contre.

On peut encore énoncer : si a est la mesure du côté BC, b, la mesure du côté AC et c la mesure de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, alors

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

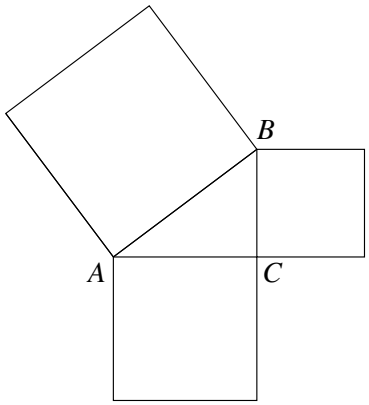


Fig. 15

Prolongements possibles

Nous donnons ci-dessous quatre problèmes – puisés dans des textes anciens – qui utilisent le théorème de PYTHAGORE.

1. Le *Baudhāyana Śulbasūtra*, un texte indien d'avant l'ère chrétienne, donne l'énoncé suivant de la « relation de PYTHAGORE ».

   La corde diagonale du rectangle produit ce que produisent séparément la longueur et la largeur. <Il y a> compréhension <de ces diagonales> lorsque ces <longueurs et largeurs sont> quatre et trois, douze et cinq, quinze et huit, vingt-quatre et sept, trente-cinq et douze, trente-six et quinze.

Interpréter les nombres énumérés.

   Il s'agit d'une énumération de valeurs entières pour a et b dans la relation de PYTHAGORE, pour lesquelles c (qui doit être calculé) est aussi un entier. Un triple de nombres entiers (a, b, c) satisfaisant la relation de PYTHAGORE est nommé triplet pythagoricien. Les premiers triplets pythagoriciens sont donc (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37) et (15, 36, 39). Mais ce dernier est un multiple de (5, 12, 13).

2. En utilisant la « relation de PYTHAGORE », résoudre le problème de la « canne contre le mur » (problème 9 de la tablette mésopotamienne BM 85196, XVIIIe siècle av. J.-C.)[10].

   Un palû (une poutre, une canne ?) de longueur $30'$ <est appuyé contre un mur>. En haut, il est descendu de $6'$. En b[as, de combien s'est-il éloigné ?][11]

   ---

[9] [67], p. 282.

[10] Cette tablette est conservée au British Museum, comme l'indique le préfixe BM.

[11] Traduction de THUREAU-DANGIN, d'après VAN DER WAERDEN, [137], p. 76. Les symboles « < » et « > » encadrent un texte ajouté par THUREAU-DANGIN pour rendre la traduction plus lisible. Les crochets encadrent une partie du texte original abîmée sur la tablette et restituée par THUREAU-DANGIN. Les Mésopotamiens exprimaient les nombres dans un système positionnel de base 60. Donc, $30'$ exprime 30 sous-unités d'une unité qui en compte 60, comme notre heure ou nos angles de 60 minutes. Cette analogie, qui n'est pas fortuite, explique l'utilisation du symbole $'$ par Thureau-Dangin.

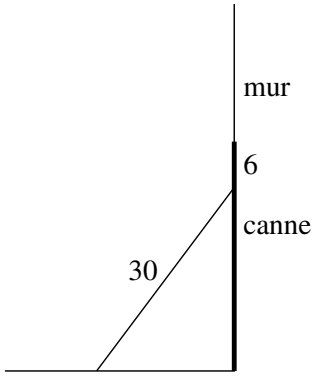


Fig. 16

La canne, d'une longueur de 30 unités, était initialement appuyée contre le mur. Puis, elle a glissé vers le bas de 6 unités, déterminant ainsi un triangle rectangle d'hypoténuse 30. En plus de l'hypoténuse, nous connaissons le côté vertical de ce triangle, il mesure $30-6=24$ unités. Pour calculer ce qui est demandé, à savoir la distance d du bas de la canne au pied du mur, il nous suffit maintenant d'utiliser la relation de PYTHAGORE : $d^2 = 30^2 - 24^2 = 900 - 576 = 324$. Donc, d vaut $\sqrt{324} = 18$ unités. Notons que $(18, 24, 30)$ est un multiple du triplet $(3, 4, 5)$.

3. Le texte I des *Textes Mathématiques de Suse*[12] contient la figure d'un triangle isocèle et son cercle circonscrit (voir figure 17). La figure 18 en donne une traduction avec nos chiffres, mais en base 60.

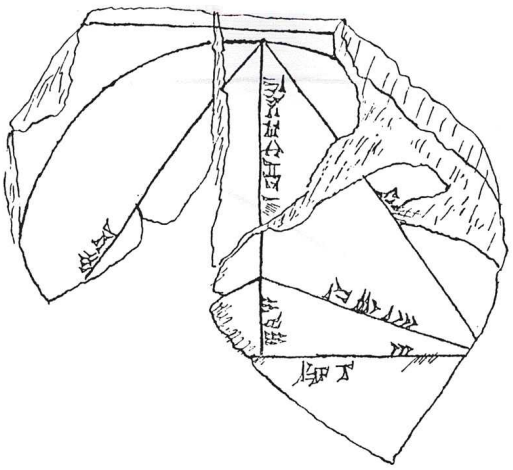


Fig. 17

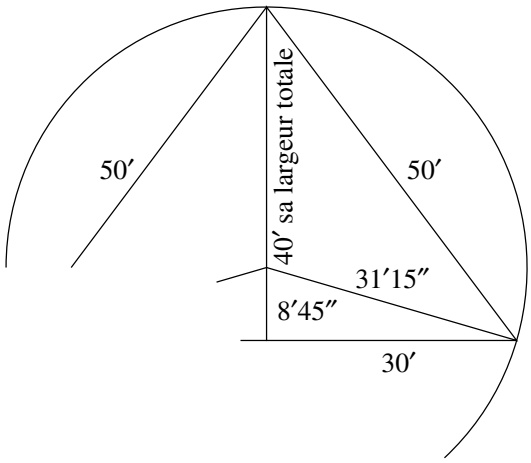


Fig. 18

Vérifier la cohérence de l'ensemble des nombres indiqués dans la figure 18.

Il est bon de signaler que l'expression « $40'$ sa largeur totale » signifie que la hauteur du triangle isocèle vaut $40'$.

Comme le montre les figures[13] 17 et 18, il y a deux triangles rectangles en jeu. Le plus grand a pour hypoténuse 50 unités et pour côtés de l'angle droit 30 et 40. C'est donc un triangle semblable au triangle rectangle de côtés 3, 4, 5. On obtient le rayon du cercle en soustrayant $8'45''$ ou $8\,\frac{3}{4}$ de 40, ce qui donne $31'15''$ ou $31\,\frac{1}{4}$. On peut aussi utiliser la relation de PYTHAGORE dans le petit triangle rectangle, qui a pour côtés de l'angle droit

[12] [31], p. 23 et pl. 1 pour le dessin de la tablette. Ces textes, originaires de la Perse et datant de la fin de la première dynastie de Babylone (XVIIIe siècle av. J.-C.), sont comparables aux textes mathématiques mésopotamiens de la même époque.

[13] La tablette est abîmée, ce qui explique que nous n'ayons qu'une partie du cercle et du triangle isocèle. Mais cela suffit pour en comprendre le contenu.

30 et $8\,\frac{3}{4}$ unités. Son hypoténuse mesure donc $\sqrt{30^2 + \left(8\,\frac{3}{4}\right)^2} = 31\,\frac{1}{4}$ unités. C'est bien le rayon trouvé plus haut.

4. On peut généraliser le problème de trouver un carré d'aire double de celle d'un carré donné en la construction d'un carré d'aire triple de celle d'un carré donné.
   Le mathématicien arabe ABŪ-L-WAFĀ' (Xe siècle) propose le découpage décrit par le texte qui suit[14].

Que les trois carrés soient a, b, c. En menant dans b et c la diagonale, on obtient 4 triangles rectangles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qu'on place autour du carré a, de telle façon que le sommet de l'un des deux angles de 45° de chaque triangle tombe sur un sommet du carré a et l'hypoténuse le long d'un côté de ce carré ; puis, en joignant les sommets des angles droits des 4 triangles, on obtient le carré cherché $ABCD$. En effet, on démontre très facilement que $ABCD$ est un carré [...], et que l'on aura donné une solution du problème qui est exacte, et qui satisfait en même temps aux besoins des praticiens.

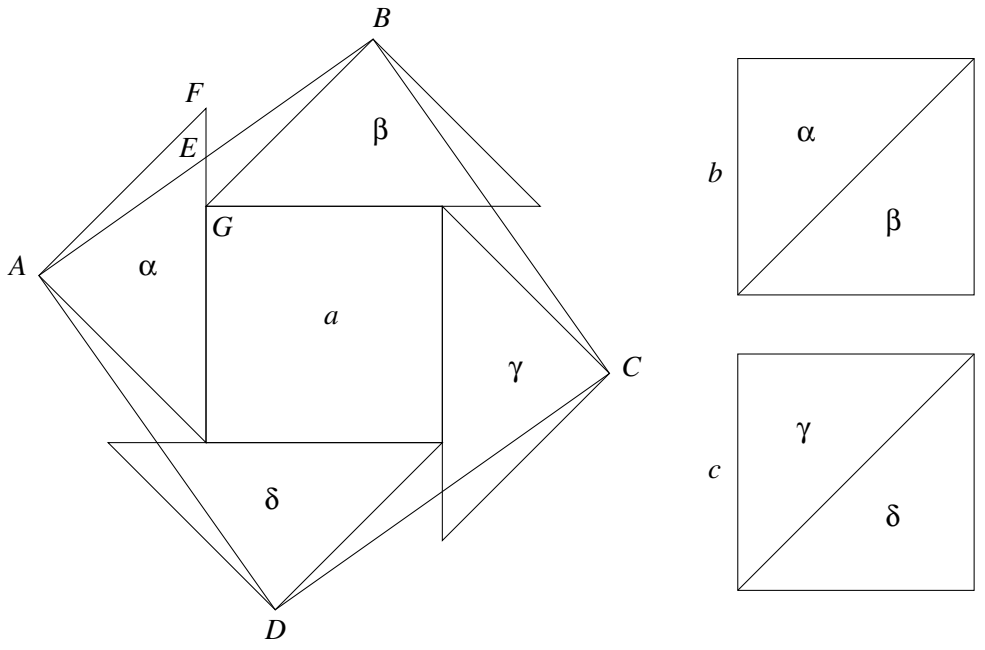


Fig. 19

Justifier la construction d'ABŪ-L-WAFĀ'.

Dans la figure 19, montrons que chacun des quatre morceaux dépassant du carré $ABCD$ est congruent à un triangle manquant à l'intérieur de ce même carré $ABCD$, par exemple l'un de ceux avec lesquels il a un sommet commun. Montrons-le pour les triangles AFE et BGE. On sait que AF est parallèle à BG. Les deux triangles ont donc leurs trois angles égaux (opposés par le sommet ou alternes-internes). Ils sont donc semblables. Mais, puisque le segment $[AF]$ a la même mesure que le segment $[BG]$, les deux triangles sont égaux.

[14] Traduction de Woepcke, [141], p. 350.

2 La différence de deux carrés

De quoi s'agit-il ?

Utiliser le théorème de PYTHAGORE pour résoudre un problème de construction.

Enjeux

Développer les capacités des élèves à exploiter des savoirs récemment acquis pour faire face à une situation-problème.

Compétences

Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre.

Choisir une procédure adéquate et la mener à son terme.

Produire un dessin qui éclaire une situation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une règle et un compas.

Prérequis

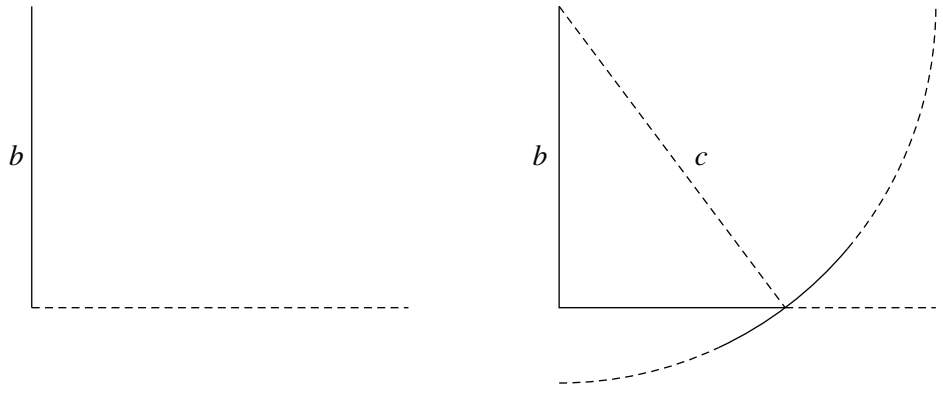
Les acquis de la section 1.

Comment s'y prendre ?

> Construire géométriquement – au moyen de la règle et du compas – un carré dont l'aire égale la différence des aires de deux carrés donnés.

La consigne est simple. Le professeur ne donne aucun renseignement supplémentaire. Le travail demandé à l'élève est l'occasion, pour ce dernier, de faire valoir son aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir la tâche qui lui est demandée.

La solution la plus simple est donnée ci-dessous. Si c est la mesure du côté du plus grand des deux carrés donnés et b, la mesure du côté du plus petit, nous cherchons la mesure a du côté d'un carré dont l'aire est la différence des aires des deux précédents.



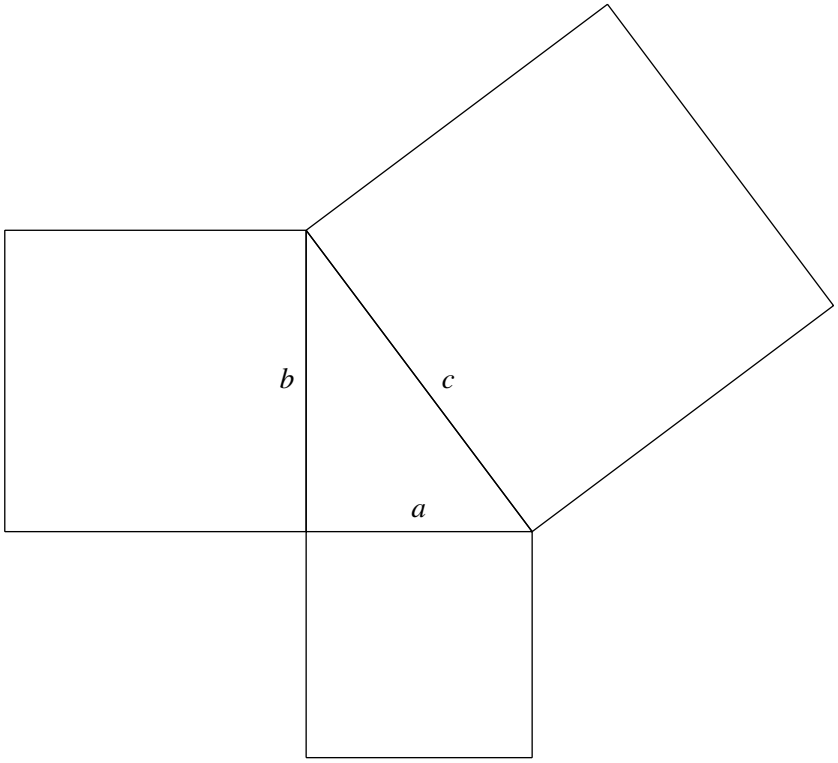


Fig. 20

Chapitre 8

À la découverte des pourcentages.

Préambule

Dans la vie quotidienne, les pourcentages sont présents dans les magasins, sur les étiquettes d'aliments et de vêtements, dans de nombreuses publicités et sous forme de statistiques dans les journaux. Ils préoccupent beaucoup de personnes, dans la mesure où ils provoquent des hésitations, soulèvent des controverses ou engendrent des erreurs.

Dès la fin de l'école primaire, les enfants apprennent à calculer un certain pourcentage d'un nombre. Ensuite, ils résolvent des problèmes où il faut calculer ce que devient un montant lorsqu'il est augmenté ou diminué d'un certain pourcentage. Ce calcul passe généralement par une étape intermédiaire qui consiste à établir la valeur de l'augmentation ou de la diminution.

Au niveau secondaire, des opérations impliquant des pourcentages interviennent occasionnellement dans de nombreuses disciplines : les sciences économiques, les sciences humaines, la géographie, la physique, la chimie, les mathématiques, les statistiques... Les élèves peuvent être perturbés par la variété des méthodes mises en œuvre par leurs professeurs pour calculer des pourcentages. Pour notre part, nous avons privilégié celle qui utilise un opérateur de multiplication et une calculatrice. Les raisons de ce choix apparaissent clairement aux sections 4 et 5.

Les problèmes présentés dans ce chapitre s'adressent à des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire. Les situations choisies, relativement simples, sont adaptées à leur âge et proches de leur vécu. Elles sont destinées à faire découvrir les pourcentages comme outil de comparaison et à mettre en place des procédures de calcul efficaces, pour évaluer un pourcentage, puis pour augmenter ou diminuer une quantité d'un certain pourcentage.

L'accent sera donc mis sur ces deux aspects, à savoir

- la comparaison : les pourcentages en tant que rapports,
- le calcul : les pourcentages traduits par des coefficients de fonctions linéaires.

Les deux premières activités sont bâties sur un problème d'interprétation de données. Ainsi, nous espérons contribuer à la formation du futur citoyen en respectant les intentions présentées dans la partie *Traitement de données* du document [3]. En voici l'introduction :

L'objectif est de former le futur citoyen à la compréhension et à la critique des données fournies par les médias, d'initier à l'utilisation de divers supports de l'information chiffrée.

Il importe d'apprendre à interpréter, comparer des tableaux, des arbres, des graphiques et d'en construire pour clarifier une situation ou éclairer une recherche. Le calcul de pourcentages, de moyennes, d'effectifs et de fréquences sont des outils pour répondre à des questions.

Le traitement de certaines situations prépare la notion de fonction.

1 Et si on apprenait à comparer !

De quoi s'agit-il ?

Comparer des données relatives à une enquête ; celles-ci sont présentées dans des tableaux et sous forme de diagrammes circulaires.

Enjeux

Transformer des rapports en pourcentages.

Découvrir les pourcentages comme outil de comparaison.

Compétences transversales

Analyser et comprendre un message : se poser des questions ; repérer la nature des informations dans un tableau, un graphique...

Raisonner et argumenter : agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, calculatrices, ...) ; utiliser un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.

Compétences

Nombres : écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale, fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Grandeurs : calculer des pourcentages, déterminer le rapport entre deux grandeurs.

Traitement de données : interpréter un tableau de nombres, un graphique, un diagramme.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 2 et 3, en annexe aux pages 323 et 324.

Une calculatrice.

Prérequis

La comparaison des fractions.

L'écriture d'une fraction sous forme décimale.

L'écriture d'un nombre donné en numération décimale sous forme de fraction de dénominateur 100 ou de pourcentage.

La détermination d'un arrondi.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant fournit aux élèves un document (fiche 2) reprenant les résultats d'une enquête concernant le cours d'éducation physique.

Les professeurs d'éducation physique d'une école ont soumis leurs élèves à une enquête afin de déterminer leurs préférences pour les trois grandes parties du cours : le développement et l'entretien de la condition physique, la formation aux sports-ballon et la natation.

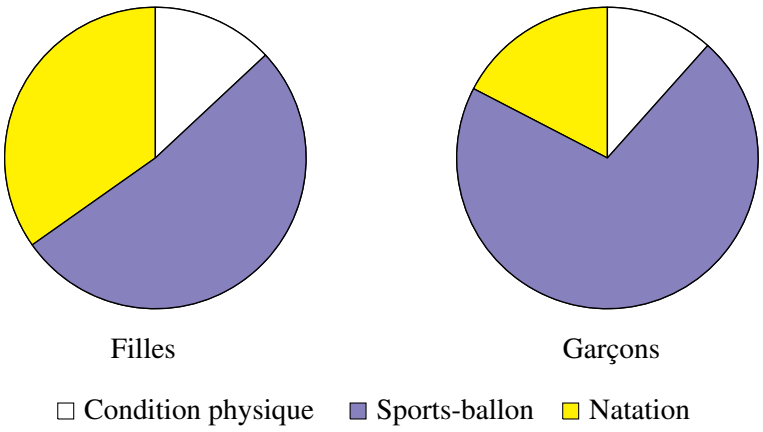
Ils ont interrogé 468 filles et 701 garçons. Chacun devait cocher une seule case, celle correspondant à sa préférence.

Les résultats sont présentés dans deux tableaux.

Filles		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
61	243	164

Garçons		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
84	498	119

Le professeur demande d'abord aux élèves de prendre connaissance des informations contenues dans les tableaux. Il précise que les diagrammes circulaires obtenus au moyen d'Excel traduisent graphiquement les données des tableaux. Ces diagrammes peuvent éventuellement être réalisés rapidement devant les élèves.



Comparer les choix des filles et ceux des garçons, à partir des tableaux et des graphiques.

Cette consigne, volontairement vague, est destinée à susciter une discussion dans la classe. La confrontation entre les données chiffrées des tableaux et les informations visuelles des diagrammes provoque quelques observations qui, par leur côté paradoxal, stimulent le débat.

– D'après les tableaux, il y a environ deux fois plus de garçons que de filles préférant les sports-ballon. Or, dans les diagrammes, le secteur représentant les garçons qui préfèrent les sports-ballon n'est visiblement pas double du secteur correspondant chez les filles.

- Le secteur illustrant la préférence des filles pour la natation est presque le double de celui des garçons, alors que, dans les tableaux, 164 n'est pas le double de 119.
- Les secteurs illustrant la préférence pour l'entretien de la condition physique sont visuellement presque égaux dans les deux diagrammes, alors que dans les tableaux, les nombres correspondant, 61 et 84, sont loin d'être égaux.

Ces constatations soulignent la difficulté à établir un lien entre les tableaux de nombres et les diagrammes circulaires.

Que représentent les secteurs des diagrammes circulaires ?

Si, au lieu de comparer les deux tableaux et les deux diagrammes, on fixe son attention sur un seul tableau à la fois et sur le diagramme correspondant, on voit apparaître un début d'explication.

Sur le diagramme qui représente les choix des filles, on voit qu'un peu plus de la moitié d'entre elles préfèrent les sports-ballon. Et en effet, il y a 243 filles sur 468 qui ont fait ce choix.

Chez les garçons, ils sont 498 sur 701 à préférer les sports-ballon, soit presque les trois quarts d'entre eux. C'est bien ce que montre le diagramme relatif aux choix des garçons.

Les secteurs des diagrammes circulaires représentent donc des proportions[1]. Le premier diagramme montre la proportion de filles qui préfèrent les sports-ballon, ou la natation, ou encore l'entretien de la condition physique. Ces proportions sont calculées par rapport au nombre total de filles, à savoir 468. Ce nombre est le *nombre de référence* de l'ensemble des filles. De même, le *nombre de référence* pour l'ensemble des garçons est 701.

Comparer les choix des filles et des garçons à propos des sports-ballon.

La première comparaison, qu'on dégage immédiatement des tableaux, est que dans l'école, il y a 498 garçons pour 243 filles qui préfèrent les sports-ballon. Les garçons qui font ce choix sont donc à peu près deux fois plus nombreux que les filles.

La deuxième comparaison s'établit sur des proportions qui sont évaluées de manière assez grossière à partir des diagrammes : il y a un peu plus de la moitié des filles qui préfèrent les sports-ballon. La proportion est plus élevée chez les garçons, elle représente un peu moins des trois quarts.

Si on veut quantifier avec plus de précision, on retourne aux nombres du tableau et on calcule des rapports. Il y a 243 filles sur 468 et 498 garçons sur 701 qui préfèrent les sports-ballon. Le rapport du nombre de filles qui préfèrent les sports-ballon au nombre total des filles vaut donc $\frac{243}{468}$; pour les garçons, ce rapport vaut $\frac{498}{701}$. Or, comparer ces rapports revient à comparer des fractions, qui n'ont ni le même dénominateur, ni le même numérateur. Ce type de comparaison n'est guère aisé et donc, il faudrait disposer d'un moyen pratique d'évaluation des fractions de dénominateurs quelconques.

Le passage de l'écriture fractionnaire du rapport à son écriture décimale offre une première piste. On a

$$\frac{243}{468} = 0,51923\ldots \simeq 0,52 \quad \text{et} \quad \frac{498}{701} = 0,71041\ldots \simeq 0,71.$$

[1] Ce terme est employé ici au sens du langage commun.

La comparaison des rapports est facilitée, mais des valeurs comme 0,52 et 0,71 ne sont guère porteuses d'images mentales.

À ce stade de l'activité, il est plausible d'imaginer que quelques élèves vont proposer d'exprimer ces rapports en « pour cent », tant les pourcentages sont fréquemment associés aux diagrammes circulaires dans les *media*. Si ce n'est pas le cas, le professeur peut provoquer une réaction en reprenant le fichier Excel présentant les diagrammes et en demandant d'afficher les pourcentages (dans les « options du graphique »).

Les élèves constatent que pour la zone du graphique correspondant à la valeur $\frac{243}{468} \simeq 0,52$, Excel affiche 52 %, et 71 % pour la zone qui représente $\frac{498}{701} \simeq 0,71$.

Ceci éclaire la façon dont on transforme un rapport quelconque en rapport exprimé en « pour cent », en passant par l'écriture décimale :

$$\frac{243}{468} = 0,51923\cdots \simeq 0,52 = \frac{52}{100} = 52\,\% \quad \text{et} \quad \frac{498}{701} = 0,71041\ldots \simeq 0,71 = \frac{71}{100} = 71\,\%.$$

Convertir des rapports en pourcentages revient donc à les écrire sous forme de fractions de dénominateur 100, ce qui facilite les comparaisons. Le choix de 100 comme dénominateur commun est évidemment arbitraire. Ce qui est primordial, c'est de disposer d'un nombre de référence commun pour comparer. Cela permet de « visualiser » les rapports en s'exprimant comme suit : sur 100 filles, il y en a 52 qui préfèrent les sports-ballon ; sur 100 garçons, il y en a 71.

Cette interprétation se voit bien sur le diagramme circulaire qui fournit une répartition des données par rapport à un tout, représenté par un disque complet. Celui-ci peut être perçu de différentes manières.

- Le disque complet représente 468 filles et la zone foncée les 243 filles qui préfèrent les sports-ballon.
- Le disque complet représente 100 filles et la zone foncée les 52 filles sur 100 qui préfèrent les sports-ballon.
- Le disque complet représente un ensemble quelconque de filles et la zone foncée les 52 % de filles qui préfèrent les sports-ballon.

Il est à présent évident que le calcul des pourcentages correspondant aux différentes zones des diagrammes va faciliter la comparaison des préférences. Ce travail complète l'information visuelle fournie par les diagrammes, en apportant des précisions chiffrées.

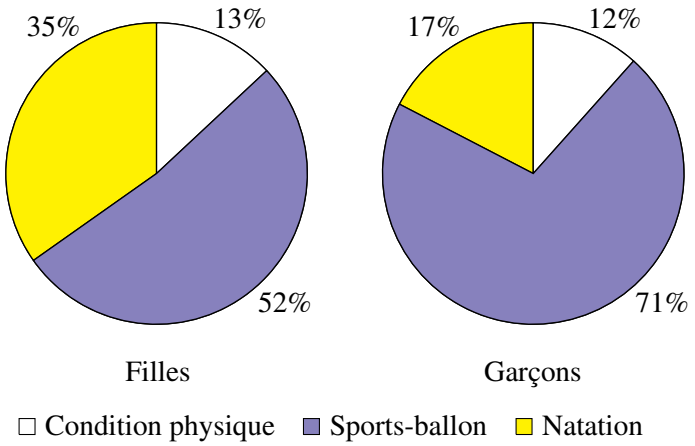
Compléter les tableaux et les diagrammes de la fiche 3 en y indiquant les pourcentages.

En exécutant les calculs demandés, les élèves retravaillent le passage entre les écritures fractionnaires et décimales, ainsi que la détermination d'un arrondi.

Les résultats obtenus sont confrontés avec ceux du fichier Excel réalisé par le professeur.

Filles		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
61	243	164
13 %	52 %	35 %

Garçons		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
84	498	119
12 %	71 %	17 %



Comparer les choix des filles et des garçons en ce qui concerne l'entretien de la condition physique et la natation.

Cette dernière consigne permet, au vu des réponses fournies par les élèves, de vérifier l'apport du travail antérieur, et vise à consolider les acquis.

En ce qui concerne l'entretien de la condition physique, la comparaison des préférences fournit l'occasion d'une remarque intéressante. Il y a plus de garçons (84) qui ont fait ce choix que de filles (61). Mais le pourcentage de filles (13 %) est légèrement plus important que celui des garçons (12 %).

De plus il nous paraît également indispensable pour la suite des apprentissages de mettre une fois encore en exergue les nombres de référence. Ce qui est relativement facile par le biais d'écritures établissant le lien entre les nombres du tableau et les pourcentages.

Filles	Garçons
$61 \simeq 13\,\%$ de 468	$84 \simeq 12\,\%$ de 701
$243 \simeq 52\,\%$ de 468	$498 \simeq 71\,\%$ de 701
$164 \simeq 35\,\%$ de 468	$119 \simeq 17\,\%$ de 701

Conclusion

L'utilisation des signes mathématiques pour comparer des nombres et traduire des expressions telles que « est plus grand que », « est supérieur à », « est égal à », « est différent de », « est plus petit que » ou « est inférieur à » ne pose généralement pas trop de problèmes.

Mais dès qu'il faut comparer des rapports, et c'est souvent ce type de comparaison qui est pertinent, le recours aux pourcentages s'avère très utile. En passant par des pourcentages, on réalise une normalisation des données par rapport à 100. Ceci conduit à l'emploi du symbole %, dont les origines remontent au XVe siècle, comme l'atteste l'extrait ci-dessous.

Les origines du signe %

Dans *A History of Mathematical Notations* [34], page 312, F. Cajori[2] retrace l'évolution historique du signe % en citant les travaux de D. E. Smith[3].

[...] This may be a convenient place to refer to the origin of the sign % for "per cent", which has been traced from the study of manuscripts by D. E. Smith. He says that in an Italian manuscript an "unknown writer of about 1425 uses a symbol which, by natural stages, developed into our present %. Instead of writing 'per 100', '℘ 100' or '℘ cento', as had commonly been done before him, he wrote '℘ $\overset{\circ}{\frown}$' for '℘ $\overset{\circ}{\text{c}}$', just as the Italians wrote $\overset{\circ}{1}$, $\overset{\circ}{2}$, ... and 1º, 2º, ... for primo, secundo, etc. In the manuscripts which I have examined the evolution is easily traced, the $\overset{\circ}{\frown}$ becoming $\frac{0}{0}$ about 1650, the original meaning having even then been lost. Of late the 'per' has been dropped; leaving only $\frac{0}{0}$ or %."

Voici une traduction de cet extrait.

[...] Ceci pourrait être l'endroit idéal pour faire allusion à l'origine du signe % pour « pour cent » dont on retrouve la trace grâce à l'étude de manuscrits réalisée par D. E. Smith. Il dit que dans un manuscrit italien, un « copiste inconnu utilise, vers l'an 1425, un symbole qui s'est développé, par étapes naturelles, en notre actuel %. Au lieu d'écrire 'per 100', '℘ 100' or '℘ cento', comme on le faisait habituellement avant lui, il écrivit '℘ $\overset{\circ}{\frown}$' pour la forme italienne '℘ $\overset{\circ}{\text{c}}$', comme dans $\overset{\circ}{1}$, $\overset{\circ}{2}$, ... et 1º, 2º, ... pour primo, secundo, etc. Dans les manuscrits que j'ai examinés, il est aisé de retracer l'évolution, le $\overset{\circ}{\frown}$ devenant $\frac{0}{0}$ vers 1650, la signification d'origine ayant même été perdue. Par la suite, le 'per' a été abandonné, ne laissant que $\frac{0}{0}$ ou % ».

---

2 Peut-on additionner des pourcentages ?

De quoi s'agit-il ?

Analyser les résultats d'une enquête sur les déplacements quotidiens des Belges, résultats présentés sous forme de diagrammes rectangulaires.

S'interroger sur la pertinence d'additionner des pourcentages, dans le cadre de cette enquête d'abord, dans celui de l'enquête sur le cours d'éducation physique ensuite.

Enjeux

Donner du sens aux pourcentages à l'aide de supports géométriques tels que des diagrammes rectangulaires ou des diagrammes circulaires.

Utiliser ces diagrammes pour distinguer les cas où l'addition des pourcentages a un sens de ceux où elle n'en a pas, en mettant en valeur le nombre de référence.

[2] Florian Cajori enseignait l'histoire des mathématiques à l'Université de Californie.
[3] D. E. Smith, *Rara arithmetica* (1898), p. 439, 440.

Compétences transversales

Analyser et comprendre un message : se poser des questions ; repérer des informations dans un graphique ; distinguer, sélectionner les informations utiles des autres.

Raisonner, argumenter : utiliser un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents ; estimer un résultat, vérifier sa plausibilité ; rechercher un exemple pour illustrer une propriété ou un contre-exemple pour prouver qu'un énoncé est faux.

Compétences disciplinaires

Grandeurs : additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées.

Traitement de données : interpréter un tableau de nombres, un graphique, un diagramme.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 4 et 5, en annexe aux pages 325 et 326.

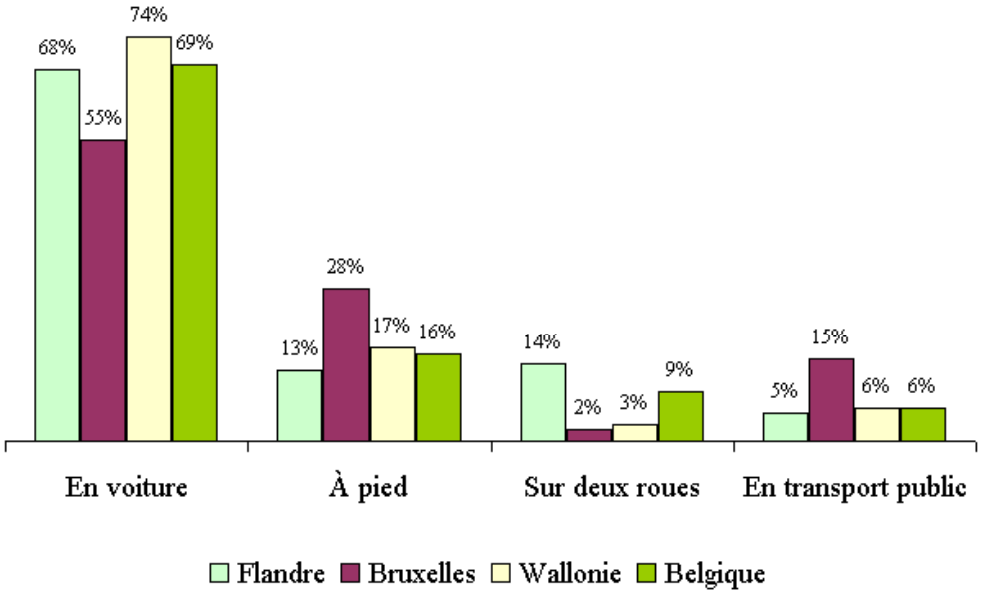
Prérequis

L'activité de la section 1.

2.1 Les déplacements des Belges

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue la fiche 4, où figure un graphique, exécuté avec Excel, illustrant les résultats d'une enquête sur les déplacements quotidiens des Belges.



Répartition des déplacements d'un jour ouvrable selon le moyen de transport principal.

Ce diagramme est inspiré de celui qui figure dans un article publié en page 3 dans le journal « Le Soir » du 22 janvier 2003. Sous le titre *Le Belge bouge, surtout en voiture*, l'article présente un ouvrage édité par les Presses universitaires de Namur et intitulé *La mobilité quotidienne des Belges*, de J.-P. Hubert et Ph. Toint.

Certaines données ont été légèrement modifiées afin d'obtenir 100 % lorsqu'on additionne les pourcentages correspondant aux différents modes de déplacements dans une même région.

Une indication sous le graphique précise qu'il représente la répartition des déplacements un jour ouvrable selon le moyen de transport principal. C'est donc en termes de pourcentages de déplacements que nous formulerons les questions et les commentaires. Il faut remarquer que les Belges ne se déplacent pas forcément dans la région où ils résident. C'est particulièrement vrai à Bruxelles où de nombreux déplacements sont effectués par des gens qui viennent de l'extérieur. C'est pourquoi il faut prendre garde à la formulation et ne pas confondre « déplacements à Bruxelles » et « déplacements des Bruxellois », par exemple.

Les élèves prennent connaissance des informations, puis recherchent directement sur le diagramme les réponses à quelques questions.

> À Bruxelles, quel est le pourcentage des déplacements effectués à pied ?
>
> En Wallonie, quel est le pourcentage des déplacements effectués en voiture ?
>
> En Flandre, quel est le pourcentage des déplacements effectués sur deux roues ?
>
> En Belgique, quel est le pourcentage des déplacements effectués à l'aide d'un moyen de transport public ?

Cette première série de questions est destinée à vérifier si les élèves ont une bonne compréhension des données. Viennent ensuite quelques questions qui portent sur des comparaisons.

> À part la voiture, moyen de transport privilégié partout en Belgique, quel est le mode de déplacement le plus utilisé en Flandre ? à Bruxelles ? en Wallonie ?
>
> Dans quelle partie du pays les déplacements en transport public sont-ils plus fréquents que dans les autres régions ?
>
> Dans quelle région les déplacements sur deux roues ont-ils le plus de succès ?

Les questions suivantes font appel à des additions de pourcentages.

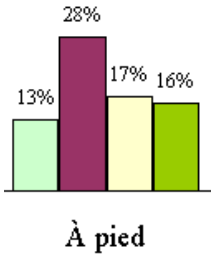
> En observant les diagrammes, peut-on affirmer que, en Belgique, 22 % des déplacements sont effectués soit à pied, soit à l'aide d'un moyen de transport public ? Pourquoi ?

En additionnant les 16 % de déplacements effectués à pied et les 6 % de déplacements utilisant un transport public, on obtient effectivement 22 %.

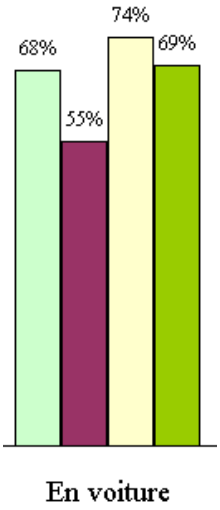
> En Wallonie, seuls 9 % des déplacements ne sont effectués ni en voiture, ni à pied. Vrai ou faux ?

On obtient 9 % en calculant la somme de 3 % et de 6 %, c'est-à-dire en additionnant les pourcentages des déplacements effectués, en Wallonie, sur deux roues ou en transport public.

En regardant la partie du diagramme qui concerne les déplacements à pied, quelqu'un affirme que 58 % des déplacements des Belges se font à pied puisque $13\,\% + 28\,\% + 17\,\% = 58\,\%$. A-t-il tort ou raison ?



La réponse se lit directement sur le diagramme : il y a 16 % de déplacements effectués à pied, et non 58 %.

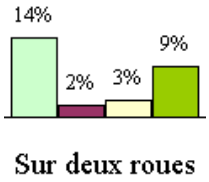


Les élèves peuvent exhiber d'autres exemples où l'addition des pourcentages n'a aucun sens.

Si on s'intéresse à la partie du diagramme donnant par région, les pourcentages des déplacements effectués en voiture, on voit que

$$68\,\% + 55\,\% + 74\,\% > 100\,\%.$$

On y lit aussi que dans 69 % des cas, les Belges choisissent la voiture comme moyen de transport principal.



Analysons à présent la partie du diagramme qui concerne les deux roues. Bien que la Flandre, Bruxelles et la Wallonie constituent la Belgique, la somme des pourcentages des déplacements sur deux roues en Flandre, à Bruxelles et en Wallonie ne vaut pas 100 %.

De plus, on voit que ce moyen de transport concerne seulement 9 % des déplacements effectués en Belgique.

$$14\,\% + 2\,\% + 3\,\% \neq 100\,\% \quad \text{et} \quad 14\,\% + 2\,\% + 3\,\% \neq 9\,\%.$$

Par contre, en Flandre, 68 % des déplacements sont effectués principalement en voiture, 13 % à pied, 14 % sur deux roues et 5 % en transport public. Si on additionne les pourcentages, on trouve

$$68\,\% + 13\,\% + 14\,\% + 5\,\% = 100\,\%.$$

Il y aurait donc des pourcentages que l'on peut additionner, et d'autres dont la somme n'a pas de sens !

C'est la mise en évidence des ensembles de référence qui éclaire la situation. Si les élèves ne les évoquent pas d'eux-mêmes, il convient de leur rappeler que chaque pourcentage se rapporte à un ensemble, qu'on appelle *ensemble de référence*.

Dans l'enquête sur les déplacements quotidiens des Belges, il y en a quatre : les déplacements en Flandre, les déplacements à Bruxelles, les déplacements en Wallonie et les déplacements en Belgique.

En indiquant les ensembles de référence dans les différents cas examinés précédemment, les élèves s'aperçoivent que l'on peut additionner des pourcentages d'un même ensemble, mais que cela n'a aucun sens d'additionner des pourcentages d'ensembles différents. Reprenons deux exemples.

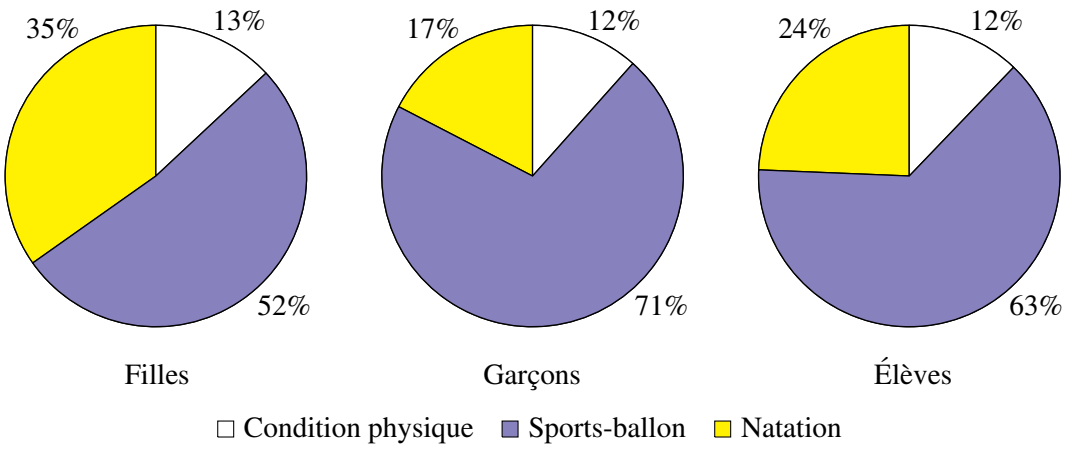
- On peut affirmer que 22 % des déplacements en Belgique sont effectués à pied ou en transport public en additionnant
  16 % de déplacements à pied + 6 % de déplacements en transport public = 22 %.
  On additionne des pourcentages de l'ensemble des déplacements en Belgique.
- En ce qui concerne les déplacements à pied, cela n'a aucun sens de dire que
  13 % des déplacements en Flandre + 28 % des déplacements à Bruxelles +
  17 % des déplacements en Wallonie = 58 % des déplacements en Belgique.
  Les pourcentages additionnés se rapportent à des ensembles différents.

Les élèves ont peut-être remarqué que les pourcentages qui se rapportent à un même ensemble de référence sont de la même couleur sur les diagrammes. L'activité suivante devrait les dissuader d'associer « ensemble de référence » et « couleur ».

2.2 Enquête sur le cours d'éducation physique

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue la fiche 5, qui reprend les deux diagrammes étudiés à la section 1, et y adjoint un troisième, qui illustre les préférences des élèves, sans distinction de sexe.



Faire les calculs nécessaires pour vérifier les pourcentages affectés au troisième diagramme.

Les élèves s'aperçoivent très vite qu'en additionnant deux pourcentages représentés par des secteurs de même couleur dans les deux premiers diagrammes, ils n'obtiennent jamais le pourcentage correspondant à cette même couleur dans le troisième. Ce qui est parfaitement illustré par l'exemple suivant :

$$35\,\% \text{ des filles} + 17\,\% \text{ des garçons} \neq 24\,\% \text{ des élèves.}$$

Ces pourcentages ne se rapportent pas au même ensemble de référence ; cela n'a aucun sens de les additionner.

Dès lors, comment peut-on obtenir le troisième diagramme ? Après avoir fait remarquer que les deux premiers diagrammes ont été construits à partir de tableaux, le professeur demande de constituer le tableau correspondant au troisième. Les données figurant sur la fiche 3 permettent de le réaliser.

Élèves		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
145	741	283
12 %	63 %	24 %

C'est l'ensemble des élèves qui constitue l'ensemble de référence de ce troisième tableau ; il compte 1 169 individus.

Si l'on s'en tient à des pourcentages arrondis à l'unité, on constate que la somme des pourcentages vaut 99 % et non 100 %, comme on aurait pu s'y attendre. Un travail sur les arrondis permet d'expliquer cette différence. Si l'on calcule les pourcentages en arrondissant au dixième, on obtient 12, 4 %, 63, 4 % et 24, 2 %, dont la somme vaut bien 100 %.

Pour s'assurer de la bonne compréhension de tous, le professeur pose quelques questions supplémentaires, par exemple celles-ci.

> Vrai ou faux ?
>
> Il y a 29 % des garçons qui préfèrent la natation ou l'entretien de la condition physique.
>
> Sachant que 13 % des filles et 12 % des garçons préfèrent la condition physique, 25 % des élèves choisissent ce type d'activité.

Conclusion

Les élèves ont été confrontés à deux types de diagrammes, rectangulaires d'une part, et circulaires d'autre part.

Remarquons tout d'abord que dans les deux enquêtes dont ces diagrammes présentent les résultats, les personnes interrogées ne pouvaient cocher qu'un seul choix. De cette manière, chaque ensemble de référence est subdivisé en sous-ensembles disjoints, de sorte que la somme des pourcentages affectés à chacun de ces sous-ensembles vaut 100 %. C'est toujours le cas dans un

diagramme circulaire, et nous nous limitons ici aux diagrammes rectangulaires élaborés de cette façon.

Les différences entre les deux types de diagramme devraient mettre en évidence le rôle prépondérant du nombre de référence directement lié à un pourcentage. Le professeur engage les élèves à retenir que seuls les pourcentages affectés à un même nombre de référence peuvent être additionnés.

Prolongements possibles

Le professeur peut profiter de l'occasion pour comparer les deux modes de représentation de données numériques qui viennent d'être abordés. Un diagramme circulaire montre toujours une répartition de données par rapport à un tout. Tandis que certains diagrammes rectangulaires juxtaposent des grandeurs indépendantes l'une de l'autre. Cette analyse, assez sommaire, peut être complétée par un exercice de passage d'un type de diagramme à un autre.

1. On propose d'abord de convertir les diagrammes circulaires de l'enquête sur le cours d'éducation physique en un diagramme rectangulaire. Pour ce faire, la fiche 6 à la page 327 présente un diagramme à compléter. Les élèves associent une couleur à chaque ensemble de référence, puis colorient dans les colonnes comportant 100 graduations, des rectangles dont la hauteur représente le pourcentage correspondant à chaque donnée.
2. On demande ensuite de construire quatre diagrammes circulaires, représentant respectivement les déplacements en Flandre, à Bruxelles, en Wallonie et en Belgique, à partir du diagramme rectangulaire illustrant les déplacements des Belges (fiche 7 à la page 328). Pour réaliser cela, le professeur fournit aux élèves des rapporteurs en « pour cent » qu'il réalise en photocopiant sur transparent la fiche 8 (page 329). Ce matériel a été mis au point lors d'une précédente recherche (voir [48]).

3 Et si on utilisait la touche % d'une calculatrice !

De quoi s'agit-il ?

Employer une calculatrice dans une situation de la vie quotidienne, en utilisant la touche %.

Enjeux

Identifier les manipulations à effectuer pour utiliser correctement la touche % d'une calculatrice.

Mettre en évidence les inconvénients de la touche % et motiver ainsi la recherche d'autres procédures (section 4).

Compétences transversales

Analyser et comprendre un message : se poser des questions.

Raisonner et argumenter : agir et interagir sur des matériels divers (ici calculatrices) ; estimer le résultat, vérifier sa plausibilité ; confronter ses résultats avec ceux des autres et avec une estimation préalable.

Schématiser une démarche, c'est-à-dire ordonner une suite d'opérations, construire un organigramme.

Compétences disciplinaires

Nombres : écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale, fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Grandeurs : calculer des pourcentages.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une calculatrice comportant les quatre opérations et une touche %.

Une information utile : il faut savoir qu'en général, les calculatrices non scientifiques fonctionnent de la même manière. Quant aux calculatrices scientifiques, elles emploient des procédures très variées et assez artificielles. C'est pourquoi nous conseillons de tester les machines des élèves avant de commencer l'activité.

Nous décrivons ci-après quelques procédures parmi les plus courantes. Mais, tenant compte de l'évolution constante des machines, le lecteur pourrait être amené à modifier certaines séquences de touches proposées ou à en ajouter d'autres.

Prérequis

L'écriture d'un pourcentage sous forme de fraction de dénominateur 100 et *vice versa*.

L'écriture d'une fraction de dénominateur 100 sous forme décimale et *vice versa*.

Le calcul d'un pourcentage d'un nombre ou d'une grandeur.

Le rôle des parenthèses dans un calcul numérique.

La résolution d'un problème simple de pourcentage (TVA, soldes, intérêt simple).

Comment s'y prendre ?

Les problèmes de pourcentages conduisent souvent à des calculs répétitifs. Le recours à la calculatrice s'impose naturellement, d'autant plus qu'une touche [%] figure habituellement sur les claviers. Les élèves ont envie de s'en servir. Encore faut-il qu'ils l'utilisent correctement.

L'activité qui suit n'introduit pas de notions nouvelles, mais focalise le travail sur les procédures propres aux calculatrices.

C'est la période des soldes. Dans les magasins, de nombreux articles sont proposés avec des ristournes : 10 %, 20 %, ou 30 %.

Comment calculer rapidement, en utilisant la touche [%] de la calculatrice, le prix qu'il faudra effectivement payer pour chacun de ces trois chemisiers :

le premier à 52 € avec une ristourne de 30 %,

ou celui-ci à 61 € avec une ristourne de 10 %,

ou ce dernier à 47 € avec une ristourne de 20 % ?

La plupart des élèves décomposent chaque calcul en deux étapes : d'abord la ristourne, ensuite le prix à payer. C'est la méthode qu'ils ont apprise à l'école primaire.

3.1 Calcul de la ristourne

Les élèves adopteront sans doute des attitudes variées pour utiliser la touche [%] de la calculatrice.

- Les uns, qui croient connaître les manipulations à accomplir, se précipitent directement sur la touche [%]. Il convient alors de les inviter à contrôler la validité du résultat fourni.
- D'autres, probablement plus circonspects, calculent d'abord mentalement une valeur approchée de la réponse, puis tentent d'obtenir la réponse exacte en utilisant la touche [%].
- D'autres encore effectuent d'abord le calcul à la machine, mais sans employer la touche [%]. Ensuite, ils procèdent comme les précédents, par essais et erreurs, mais en disposant ainsi de la réponse exacte.
- Enfin, certains élèves pourraient essayer de découvrir la procédure correcte en testant diverses manipulations sur la valeur de 100 €, valeur pour laquelle le montant de la ristourne est connu d'avance.

Après une mise en commun des différents procédés, l'enseignant attire l'attention sur l'importance de la détermination d'une valeur approchée de la réponse attendue lors de l'utilisation d'une machine. Une confiance aveugle en un résultat présenté à l'écran peut se révéler très dangereuse.

Nous décrivons ci-dessous une manière d'élaborer la séquence de touches demandée, à partir d'une transformation d'écriture.

Pour calculer la ristourne réalisée sur le premier chemisier, l'élève doit calculer 30 % de 52, qu'il écrit

$$\frac{30}{100} \times 52 \quad \text{ou} \quad 52 \times 30 \div 100 \quad \text{ou} \quad 52 \div 100 \times 30,$$

ou encore, avec des parenthèses,

$$52 \times (30 \div 100) \quad \text{ou} \quad (52 \div 100) \times 30.$$

Il évalue mentalement ce montant à environ 15 €, puis effectue le calcul par une première séquence de touches qui n'utilise pas la touche [%]. Il frappe, par exemple,

[5] [2] [×] [3] [0] [÷] [1] [0] [0] [=]

ou bien

[5] [2] [×] [(] [3] [0] [÷] [1] [0] [0] [)] [=]

et obtient la réponse 15,6.

Ensuite, sachant que $30 \div 100 = \dfrac{30}{100} = 30\,\%$, il peut élaborer la séquence de touches recherchée sous la forme :

[5] [2] [×] [(] [3] [0] [%] [)] [=]

ou plus simplement

5	2	×	3	0	%	=

et vérifier sa validité en l'employant pour effectuer le calcul.

À ce moment, les élèves constatent que certains d'entre eux doivent terminer la séquence en frappant la touche [=] pour obtenir le résultat, tandis que d'autres voient apparaître la réponse dès qu'ils ont frappé la touche [%]. Dans ce cas, le fait d'appuyer ensuite sur la touche [=] amène à l'écran un message d'erreur, ou un résultat inattendu (comme par exemple 811,2 qui est le résultat du produit $52 \times 15,6$). L'utilisation de la touche [%] diffère donc d'une machine à l'autre ; c'est un inconvénient et une source d'erreur.

Ensuite, on vérifie la procédure découverte sur les autres exemples proposés dans l'énoncé et on conclut que, pour les calculatrices qui ont été testées, on calcule $x\,\%$ de y en frappant

y	×	*x*	%	=	ou	*y*	×	*x*	%

3.2 Calcul du prix à payer en passant par le calcul de la ristourne

Les élèves sont à présent capables de calculer un prix à payer suite à l'octroi d'une ristourne, en deux étapes et en utilisant la touche [%] de leur calculatrice. On fait d'abord :

5	2	×	3	0	%	=	ou	5	2	×	3	0	%

On obtient la réponse 15, 6 qu'on note sur une feuille de travail, ou qu'on introduit dans la mémoire de la calculatrice. Ensuite, on introduit :

5	2	−	1	5	.	6	=

ou une séquence analogue dans laquelle on rappelle la valeur mise en mémoire. Et la réponse recherchée (36,4) figure à l'écran.

3.3 Calcul du prix à payer sans passer par celui de la ristourne

L'enseignant demande maintenant aux élèves de résoudre le problème en une séquence unique, en respectant la consigne d'utiliser la touche [%], mais sans passer par l'étape intermédiaire du calcul du rabais. Il est d'ailleurs possible qu'une partie de la classe ait entrepris spontanément de travailler de cette manière.

Les élèves disposent de la réponse calculée en deux étapes, à savoir 36, 4 € pour le premier chemisier. Dès lors, ils peuvent tester diverses séquences de touches en se laissant guider par les transformations d'écritures, comme ils l'ont fait pour le calcul de la ristourne. S'ils obtiennent la réponse attendue 36, 4 € , ils auront sans doute découvert la procédure correcte.

Ils posent le calcul à effectuer,

$$52 - 30\,\%\text{ de }52 = \ldots \qquad \text{ou plus souvent :} \qquad 52 - (30\,\%\text{ de }52) = \ldots,$$

et en s'inspirant de la première partie du travail, ils écrivent

$$52 - (30\,\%\text{ de }52) = 52 - (52 \times 30\,\%) = ...$$

Ceci amène logiquement à tester la séquence

5	2	−	(	5	2	×	3	0	%	)

ou bien, selon la machine,

5	2	−	(	5	2	×	3	0	%	)	=

Les réponses obtenues, en utilisant ces séquences, sont très variées et manifestement erronées ; les messages d'erreurs sont fréquents. Si les élèves, qui ne disposent généralement plus du mode d'emploi de leur calculatrice, poursuivent leurs investigations par essais et erreurs, leurs recherches risquent fort de s'avérer infructueuses.

Le professeur fournit alors l'information, car la procédure est tellement artificielle qu'il est quasi impossible de l'imaginer. En outre, elle est souvent différente d'une machine à l'autre. Il s'agit habituellement de

5	2	−	3	0	%

ou

5	2	−	3	0	%	=

Si ces deux séquences de touches sont assez proches du langage parlé, la suivante est plus inattendue.

5	2	×	3	0	%	−

Et on imagine aisément l'existence d'autres machines qui fonctionneraient encore autrement !

Chaque élève détermine, parmi les modèles fournis par le professeur, la séquence de touches appropriée à sa calculatrice, et termine alors les calculs. Une mise en commun des résultats permet de vérifier le travail réalisé.

Conclusion

Que retiendrons-nous de cette expérience ? La touche | % | est-elle pratique ?

On peut conclure que l'utilisation de la touche | % | pose manifestement des problèmes, surtout quand il s'agit de calculer une quantité diminuée d'un certain pourcentage. Ces mêmes inconvénients réapparaissent évidemment quand il s'agit de majorer un montant, par exemple calculer directement un prix TVA comprise. Le principal obstacle est la variété des procédures. Celles-ci diffèrent d'une machine à l'autre et sont parfois si artificielles qu'elles ne sont pas faciles à retenir. Néanmoins, une procédure adaptée existe sur chaque calculatrice.

Il est cependant possible d'effectuer toutes les opérations impliquant un calcul de pourcentage, au moyen d'une procédure unique, commune à toutes les machines. C'est la découverte de cette méthode qui fait l'objet de la section suivante.

4 Des tableaux de proportionnalité aux calculs de pourcentages

De quoi s'agit-il ?

Présenter sous forme de tableaux des calculs de TVA et reconnaître des tableaux de proportionnalité.

Enjeux

Construire des tableaux de nombres pour présenter des résultats. Utiliser les propriétés de ces tableaux pour dégager une règle de calcul.

Découvrir des procédures simples adaptées à toutes les calculatrices pour calculer un pourcentage d'un nombre, pour majorer ou minorer un nombre d'un certain pourcentage.

Compétences transversales

Raisonner et argumenter : utiliser un schéma, un tableau lorsque ces supports sont pertinents ; estimer le résultat, vérifier sa plausibilité.

Appliquer : évoquer et réactiver des connaissances en relation avec la situation ; se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement ; construire une formule, une règle, schématiser une démarche.

Compétences disciplinaires

Nombres : écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale, fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Grandeurs : calculer des pourcentages, résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe, déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une calculatrice, de préférence celle qui a été employée dans l'activité précédente (section 3).

Les fiches 9 et 10, en annexe aux pages 330 et 331.

Prérequis

L'écriture d'un pourcentage sous forme de fraction de dénominateur 100 et *vice versa*.

L'écriture d'une fraction de dénominateur 100 sous forme décimale, et *vice versa*.

Le calcul d'un pourcentage d'un nombre ou d'une grandeur.

La résolution d'un problème simple de pourcentage (TVA, soldes, intérêt simple).

Les propriétés d'un tableau de proportionnalité[4].

[4]De nombreuses activités de découverte des tableaux de proportionnalité sont présentées dans une précédente publication du CREM (voir [48]).

Remarque : Le calcul des pourcentages peut aussi fournir l'occasion de découvrir ces propriétés ou de les retravailler.

4.1 Calculer un pourcentage d'un nombre

Comment s'y prendre ?

> Un commerçant doit calculer les montants de TVA d'une série d'articles soumis au taux légal de 21 %, et dont les prix hors TVA sont :
>
> 120 € 250 € 172 € 344 € 370 €
> 1000 € 480 € 750 € 100 € 1 €
>
> Effectuer les calculs et les présenter dans un tableau.

Chaque élève exécute les calculs à la machine, en utilisant ou non la touche %, et note les résultats. La plausibilité des résultats peut être vérifiée en estimant le cinquième de chaque prix.

Dans une telle activité, les réponses sont généralement présentées de manière assez désordonnée. Pour y voir plus clair, on dispose l'ensemble des prix hors TVA et des montants de TVA dans un tableau. La fiche 9 facilite l'exécution de ce travail.

Certains élèves auront l'idée qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité, puisque chaque prix a été multiplié par la fraction $\frac{21}{100}$, ou par 0,21.

Ils auront sans doute besoin, pour se convaincre, d'analyser aussi le tableau à partir des rapports internes. Remarquons que les prix ont été choisis de manière à mettre en évidence différentes caractéristiques du tableau de proportionnalité, par exemple :

- le montant de TVA sur 480 est bien le quadruple du montant sur 120,
- le montant de TVA sur 370 est bien la somme des montants sur 120 et 250.

Prix hors TVA (en €)	Montant de TVA (en €)
120	25,2
250	52,5
172	36,12
344	72,24
370	77,7
1 000	210
480	100,8
750	157,5
100	21
1	0,21

Les nombres du tableau se prêtent à d'autres vérifications de ce genre.

La dernière ligne du tableau fournit la valeur du rapport externe (0,21). Ainsi, chaque montant de TVA est obtenu en multipliant le prix par 0,21. Les calculs peuvent donc être écrits de deux manières, comme dans le tableau ci-après. On en déduit, par exemple pour la première ligne, la séquence de touches suivante :

1 **2** **0** **×** **0** **.** **2** **1** **=** .

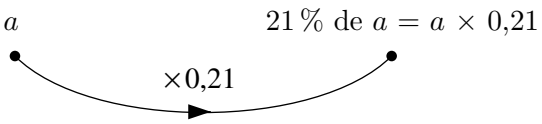
Cette procédure, qui évite l'utilisation de la touche **%**, est identique sur toutes les calculatrices. Elle trouve sa justification dans l'équivalence des écritures ; le coefficient 0,21 n'est autre

que l'écriture décimale de 21 %.

Ainsi, pour calculer le montant de TVA sur 120 €, on effectue :

$$21\,\%\text{ de }120 = 120 \times \frac{21}{100} = 120 \times 0,21.$$

Prix hors TVA (en €)	Montant de TVA (en €)
120	$25,2 = 21\,\%$ de $120 = 120 \times 0{,}21$
250	$52,5 = 21\,\%$ de $250 = 250 \times 0{,}21$
172	$36,12 = 21\,\%$ de $172 = 172 \times 0{,}21$
344	$72,24 = 21\,\%$ de $344 = 344 \times 0{,}21$
370	$77,7 = 21\,\%$ de $370 = 370 \times 0{,}21$
1 000	$210 = 21\,\%$ de $1\,000 = 1\,000 \times 0{,}21$
480	$100,8 = 21\,\%$ de $480 = 480 \times 0{,}21$
750	$157,5 = 21\,\%$ de $750 = 750 \times 0{,}21$
100	$21 = 21\,\%$ de $100 = 100 \times 0{,}21$
1	$0,21 = 21\,\%$ de $1 = 1 \times 0{,}21$



Le graphe fléché sous le tableau permet de visualiser l'opération. La généralisation résulte du remplacement du montant de départ par la variable a.

Pour calculer 21 % de a, on multiplie a par $0,21$.

4.2 Majorer un montant d'un certain pourcentage

Comment s'y prendre ?

Un autre commerçant doit calculer les prix à indiquer sur les étiquettes d'une série d'articles soumis au taux légal de 6 %, et dont les prix hors TVA sont :

12 €	25 €	72 €	144 €	36 €
100 €	48 €	75 €	10 €	1 €

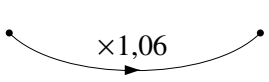
Effectuer les calculs et les présenter dans un tableau.

La plupart des élèves effectuent le calcul en deux étapes, en calculant d'abord le montant de TVA, puis le prix TVA comprise. Le tableau de la fiche 10, dans lequel la troisième colonne est obtenue par addition des deux premières, permet de noter les résultats.

Prix hors TVA (en €)	Montant de TVA (en €)	Prix TVA comprise (en €)
12	0,72	12,72
25	1,5	26,5
72	4,32	76,32
144	8,64	152,64
36	2,16	38,16
100	6	106
48	2,88	50,88
75	4,5	79,5
10	0,6	10,6
1	0,06	1,06

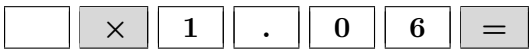
Le professeur suggère alors aux élèves de cacher la colonne centrale afin de comparer directement le prix hors TVA et le prix TVA comprise. Le but est clairement annoncé : il s'agit de trouver la règle de calcul qui permet d'obtenir directement le prix TVA comprise, sans passer par l'intermédiaire du montant de TVA.

Prix hors TVA (en €)	Prix TVA comprise (en €)
12	12,72
25	26,5
72	76,32
144	152,64
36	38,16
100	106
48	50,88
75	79,5
10	10,6
1	1,06



C'est l'analyse du sous-tableau formé de la première et de la troisième colonne du tableau précédent qui va permettre de dégager la règle. Par analogie avec la situation antérieure, les élèves vérifient qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité, ce qui devrait se faire sans trop de peine. Ici aussi, les prix ont été choisis pour permettre une vérification aisée des propriétés du tableau.

La dernière ligne met en évidence le coefficient externe : 1,06. Ainsi chaque prix TVA comprise est obtenu en multipliant le prix hors TVA par 1,06. On en déduit la séquence de touches suivante, identique sur toutes les calculatrices.



Cette procédure peut être justifiée par une transformation d'écriture. Pour calculer le prix, TVA de 6 % incluse, d'un article coûtant 12 € hors TVA, on effectue

$$100\,\%\text{ de }12 + 6\,\%\text{ de }12 = 106\,\%\text{ de }12 = 12 \times 1,06$$

ou encore,

$$12 + 6\,\%\text{ de }12 = 12 + 12 \times 0,06 = 12 \times (1 + 0,06) = 12 \times 1,06.$$

Plus généralement, pour majorer un nombre a de 6 %, on effectue

$$100\,\%\text{ de }a + 6\,\%\text{ de }a = 106\,\%\text{ de }a = a \times 1,06$$

ou

$$a + 6\,\%\text{ de }a = a + a \times 0,06 = a \times (1 + 0,06) = a \times 1,06.$$

4.3 Minorer un montant d'un certain pourcentage

Comment s'y prendre ? Le travail précédent permet de reprendre le problème des soldes (section 3) et de demander la séquence de touches adaptée à toutes les calculatrices pour calculer les prix des chemisiers soldés.

Pour le premier chemisier, qui coûte 52 €, avec une ristourne de 30 %, il faut effectuer

$$100\,\%\text{ de }52 - 30\,\%\text{ de }52 = 70\,\%\text{ de }52 = 52 \times 0,7$$

ou bien,

$$52 - 30\,\%\text{ de }52 = 52 - 52 \times 0,3 = 52 \times (1 - 0,3) = 52 \times 0,7.$$

La séquence de touches [5] [2] [×] [0] [.] [7] [=] réalise ce calcul.

Plus généralement, pour minorer un nombre a de 30 %, on effectue

$$100\,\%\text{ de }a - 30\,\%\text{ de }a = 70\,\%\text{ de }a = a \times 0,7$$

ou encore,

$$a - 30\,\%\text{ de }a = a - a \times 0,3 = a \times (1 - 0,3) = a \times 0,7.$$

Pour minorer un nombre a de tout autre pourcentage, 14 % par exemple, on calcule de la même manière

$$100\,\%\text{ de }a - 14\,\%\text{ de }a = 86\,\%\text{ de }a = a \times 0,86$$

ou

$$a - 14\,\%\text{ de }a = a - a \times 0,14 = a \times (1 - 0,14) = a \times 0,86.$$

5 Des graphes fléchés pour résoudre des problèmes

De quoi s'agit-il ? Retrouver un montant dont on connaît un certain pourcentage, ou un montant qui a été majoré ou minoré d'un certain pourcentage.

Calculer un taux d'intérêt, le pourcentage d'une ristourne, un taux d'augmentation ou de diminution.

Enjeux Explorer différents types de problèmes de pourcentages que l'utilisation des graphes fléchés permet de résoudre facilement.

Compétences transversales

Raisonner et argumenter : utiliser un schéma.

Appliquer : évoquer et réactiver des connaissances en relation avec la situation ; se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement ; imaginer une situation, un énoncé en partant de la solution effective ou de la structure ; construire une formule, une règle, schématiser une démarche, c'est-à-dire ordonner une suite d'opérations, construire un organigramme.

Compétences disciplinaires

Nombres : écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale, fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Grandeurs : calculer des pourcentages, résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe, déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une calculatrice.

Prérequis

La procédure qui utilise un opérateur de multiplication pour calculer un pourcentage d'un nombre, pour majorer ou minorer un nombre d'un certain pourcentage.

La représentation des opérations par des graphes fléchés pour les visualiser et formuler correctement les opérations réciproques.

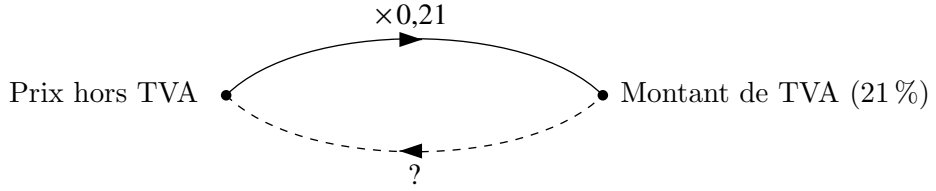
5.1 Retrouver un montant

Comment s'y prendre ?

Retrouver un montant dont on connaît un certain pourcentage

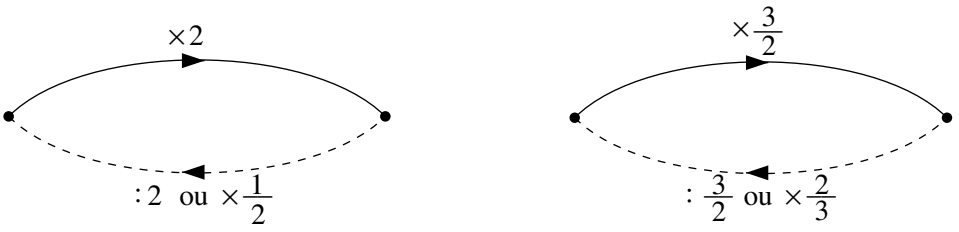
> Calculer le prix hors TVA d'un article pour lequel le montant de TVA est de $9,45$ € et le taux de TVA, de $21\,\%$.

Les élèves sont invités à schématiser par un graphe fléché l'opération qui permet de calculer le montant de TVA à partir du prix hors TVA. Ce graphe montre bien que la résolution du problème passe par la détermination de l'opérateur réciproque.

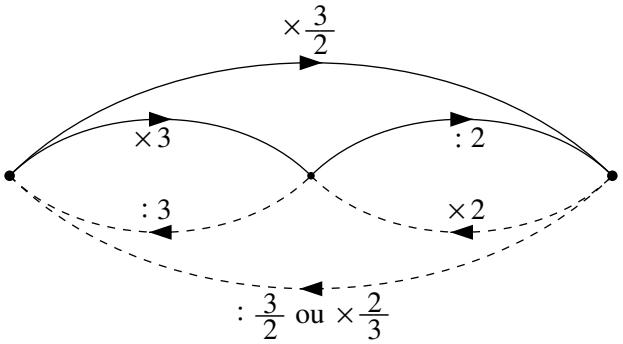


Un travail préalable sur les tableaux de proportionnalité a montré l'existence de cet opérateur réciproque. Si les nombres de la deuxième colonne sont obtenus en multipliant ceux de la première

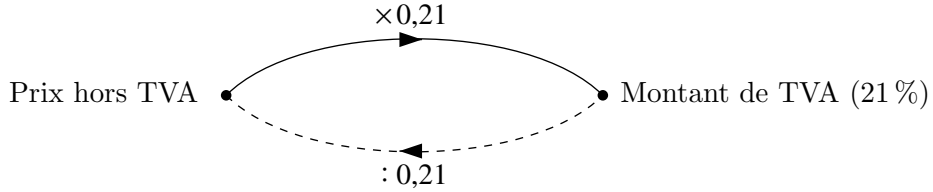
colonne par un nombre (le rapport externe), on peut retrouver ceux de la première colonne en divisant ceux de la seconde par ce même nombre, ou en les multipliant par l'inverse de ce nombre. Les élèves sont familiarisés avec des situations où le rapport externe du tableau est un nombre entier ou fractionnaire.



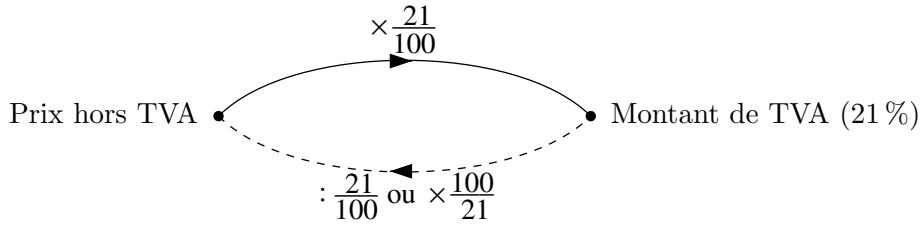
Dans ce dernier cas, la recherche de l'opérateur réciproque peut être facilitée par la décomposition de la multiplication par $\frac{3}{2}$ en deux opérations successives : multiplier par $\frac{3}{2}$, cela revient à multiplier par 3, puis à diviser par 2. L'opération réciproque consiste donc à multiplier par 2, puis à diviser par 3, ce qui revient à multiplier par $\frac{2}{3}$. C'est une façon de mettre en évidence l'équivalence des opérateurs $\times\frac{2}{3}$ et $:\frac{3}{2}$. Le graphe ci-dessous, dont une variante consiste à remplacer : 2 par $\times\frac{1}{2}$ et : 3 par $\times\frac{1}{3}$, illustre cette décomposition.



Dans le cas du calcul du montant de TVA au taux de 21 %, la situation est schématisée par l'un ou l'autre des graphes fléchés équivalents qui suivent. Les opérateurs sont exprimés sous forme décimale dans le premier,



sous forme fractionnaire dans le second.



Même si les élèves sont peu habitués à effectuer des divisions par des nombres décimaux, la première forme est plus familière sur le plan du principe. Un travail de décomposition des opérations leur sera sans doute utile pour se convaincre de l'équivalence des opérations $\times\frac{100}{21}$, $:\frac{21}{100}$ et $:0,21$ pour passer du montant de TVA au prix hors TVA.
Ceci étant acquis, les élèves sont en mesure d'élaborer la séquence de touches qui fournit la réponse au problème en une seule opération, à savoir

9	**.**	**4**	**5**	**÷**	**0**	**.**	**2**	**1**	**=**

.

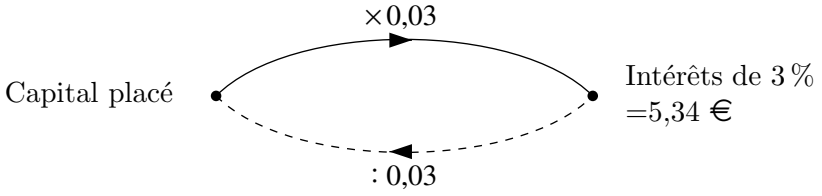
Imaginer d'autres problèmes qu'on pourrait résoudre de la même façon.

Dans un premier temps, les élèves s'en tiendront probablement à des problèmes de TVA. Leurs productions feront sans doute apparaître des énoncés incomplets, qui donnent le montant de TVA mais pas le taux. D'autre part, si le montant de TVA et le taux sont donnés au hasard, le prix hors TVA risque fort d'être un nombre décimal illimité, ce qui n'a guère de sens. À partir de ces constatations, les élèves doivent imaginer une procédure pour fabriquer des énoncés plausibles. Il est donc opportun de leur demander d'inventer quelques problèmes de ce type, et de les résoudre.

Le professeur suggère ensuite la recherche d'autres problèmes du même genre, mais qui ne concernent pas la TVA. Les problèmes d'intérêt simple, abordés dès l'école primaire, seront peut-être évoqués. Sinon, on pose la question suivante, dans le but de faire percevoir l'analogie entre les problèmes d'intérêts et les problèmes de TVA.

Sachant qu'un intérêt de $5,34$ € a été perçu pour un capital placé pendant un an au taux de $3\,\%$, calculer le capital.

Les élèves élaborent un graphe fléché similaire à celui utilisé pour résoudre les problèmes de TVA. Le coefficient multiplicatif doit évidemment être adapté au taux de $3\,\%$.



Le capital placé est obtenu en calculant $5,34 \text{ €} : 0,03 = 178 \text{ €}$.

Ici encore les élèves sont invités à produire quelques énoncés. La mise en commun des propositions peut s'avérer fort riche non seulement pour la compréhension du travail réalisé, mais encore pour les compétences transversales qu'elle permet d'exercer.

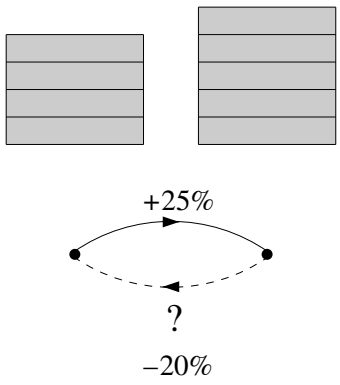
Retrouver un montant qui a été majoré ou minoré d'un certain pourcentage.

Comment retrouver un montant qui a été majoré de 25 % ?

Même si on a travaillé auparavant avec des tableaux de proportionnalité et des graphes fléchés, il est presque sûr que certains élèves proposeront de retrancher 25 % du montant majoré.

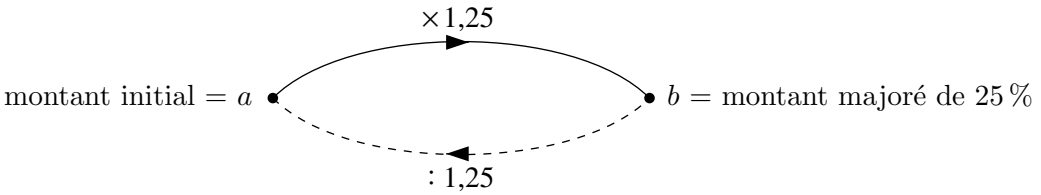
C'est une idée fausse très répandue dans le grand public et qui est d'ailleurs souvent exploitée dans les annonces publicitaires. Par exemple, une phrase comme « nous vous offrons la TVA de 21 % » donne à penser à l'acheteur éventuel qu'il va bénéficier d'une ristourne de 21 %, ce qui n'est pas le cas (ce problème sera traité à la section 5.2).

Le schéma ci-dessous illustre le problème de manière très visuelle.



La quantité de départ est représentée par la colonne de gauche, qui comporte quatre rectangles. On lui ajoute 25 %, c'est-à-dire un rectangle. On obtient ainsi la colonne de droite, composée de cinq rectangles, qui représente la quantité majorée. Pour retrouver la quantité de départ, il faut retrancher un rectangle sur les cinq que comporte la colonne de droite, c'est-à-dire 20 %. À partir de ce graphique, les élèves peuvent découvrir eux-mêmes que l'opération réciproque de « ajouter 25 % » n'est pas « retrancher 25 % » mais bien « retrancher 20 % ».

Comment expliquer ce résultat très étonnant ? Le recours au graphe fléché, avec les opérateurs multiplicatifs, permet de comprendre tout en donnant la procédure correcte pour résoudre tous les problèmes du même type.



Comme $b = a \times 1,25$, on retrouve a en calculant $a = b : 1,25$. Plusieurs transformations d'écriture sont susceptibles d'établir l'équivalence entre $b : 1,25$ et 80 % de b. On effectue, par exemple,

$$a = b : 1,25 = b : \frac{125}{100} = b : \frac{5}{4} = b \times \frac{4}{5} = b \times \frac{80}{100} = 80\,\% \text{ de } b,$$

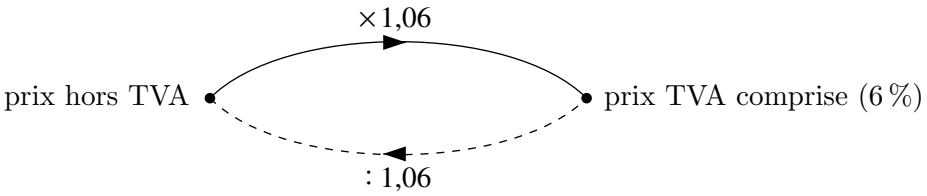
ou encore,

$$a = b : 1,25 = b \times \frac{1}{1,25} = b \times 0,8 = 80\,\% \text{ de } b.$$

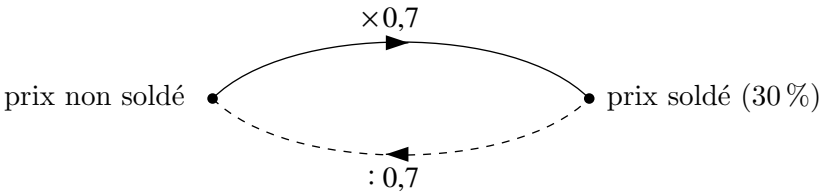
Le professeur guide les élèves dans la démarche qui lui paraît la plus adaptée au niveau de la classe. Il reste à interpréter que si $a = 80\,\%$ de b, on retrouve a en retranchant $20\,\%$ de b. Ce raisonnement explique pourquoi « retrancher $20\,\%$ » est l'opération réciproque de « ajouter $25\,\%$ », mais n'est pas utile pour retrouver un montant qui a été majoré de $25\,\%$, l'opération à effectuer étant la division du montant majoré par 1,25.

Les graphes fléchés permettent d'imaginer d'autres problèmes que l'on pourrait résoudre, tout en fournissant la procédure adéquate. Par exemple,

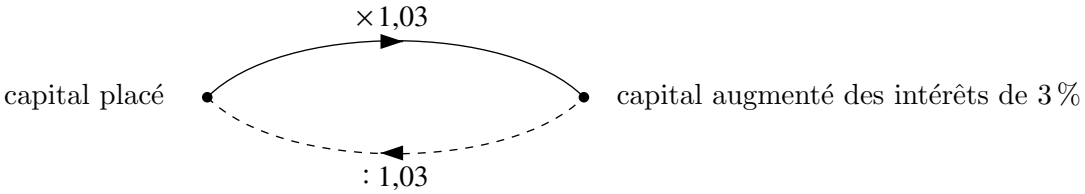
- retrouver le prix hors TVA d'un article dont on connaît le prix TVA comprise et le taux de TVA ;



- retrouver le prix initial d'un article dont on connaît le prix soldé et le pourcentage de la ristourne ;

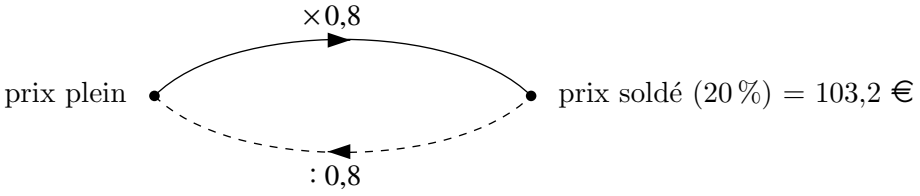


- retrouver le capital initial si on connaît le montant du capital augmenté des intérêts et le taux.



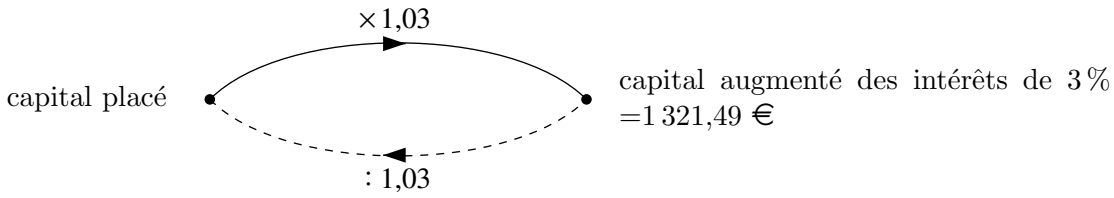
On peut envisager de demander aux élèves de rédiger des problèmes de ces différents types, et de les résoudre. Sinon, c'est le professeur qui fournit des énoncés comme ceux qui suivent.

Quel était le prix plein d'un article qu'on a payé 103,2 € avec une ristourne de 20 % ?



Le recours au graphe fléché fournit la solution. Le prix plein vaut $103,2 \text{ €} : 0,8 = 129 \text{ €}$.

Sachant que le solde, comprenant 3 % d'intérêts, d'un carnet d'épargne s'élève à 1 321, 49 €, quel était le capital antérieur ?

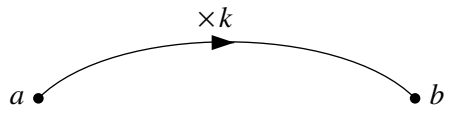


Le capital placé est obtenu en calculant $1\,321,49 \text{ €} : 1,03 = 1\,283 \text{ €}$.

5.2 Calculer le taux

Comment s'y prendre ?

Les graphes fléchés liés aux problèmes de pourcentages peuvent être représentés sous la forme



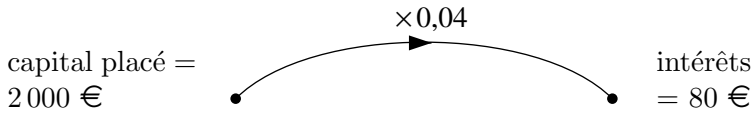
Nous avons résolu des problèmes où il faut calculer b connaissant a et k ; ensuite des problèmes où il faut retrouver le montant a connaissant b et k. Nous allons à présent proposer des problèmes où l'inconnue est k.

Comme $b = a \times k$, on obtient immédiatement $k = \dfrac{b}{a}$. La difficulté ne réside pas dans le calcul, mais dans l'interprétation de cet opérateur de multiplication k. Selon le problème, il faudra en déduire un taux d'intérêt ou de TVA, le pourcentage d'une ristourne, un taux d'accroissement ou de diminution.

Voici quelques exemples.

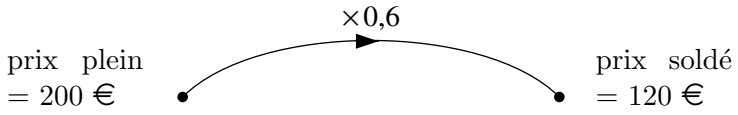
À quel taux est placé un capital de 2 000 € qui rapporte 80 € en un an ?

Le calcul donne $k = 80 : 2\,000 = 0,04$. Or $0,04 = \dfrac{4}{100} = 4\,\%$, c'est le taux d'intérêt.



Quel est le pourcentage de la ristourne que j'ai obtenue sur ce manteau qui coûtait 200 € et que j'ai payé 120 € ?

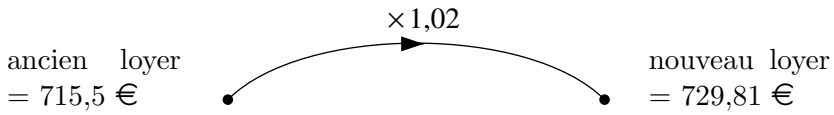
On obtient $k = 120 : 200 = 0,6$.



La valeur de l'opérateur $k = 0,6 = \dfrac{60}{100} = 60\,\%$ indique que le prix soldé vaut 60 % du prix plein, la ristourne est donc de 40 %.

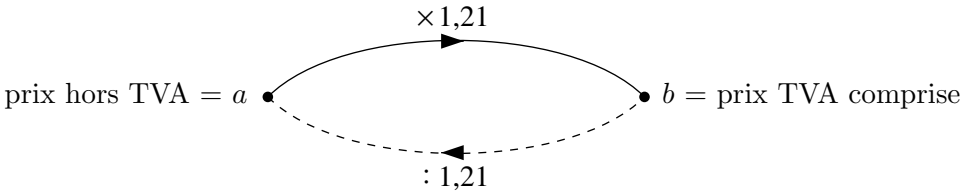
Quel est le pourcentage d'augmentation sur un loyer qui vient de passer de 715,50 € à 729,81€ ?

La valeur de l'opérateur vaut cette fois $k = 729,81 : 715,5 = 1,02 = \dfrac{102}{100} = 102\,\%$.



Le nouveau loyer vaut 102 % de l'ancien, l'augmentation est de 2 %.

Le client bénéficie-t-il réellement d'une ristourne de 21 % si on lui offre la TVA ?



Le client paie le prix hors TVA (a) au lieu du prix TVA comprise (b). Or,

$$a = b : 1,21 = b \times \frac{1}{1,21} = b \times 0,8264 = 82,64\,\% \text{ de } b.$$

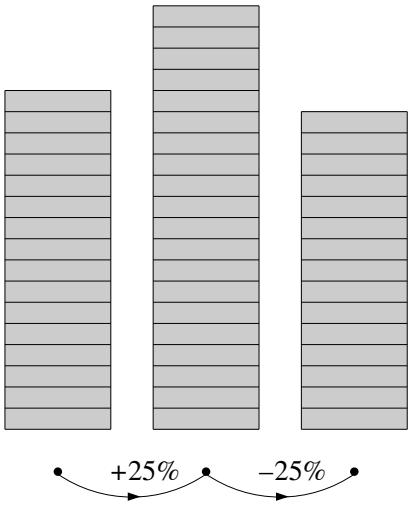
La ristourne est donc de 17,36 %.

Prolongements possibles L'utilisation des facteurs multiplicatifs pour majorer ou minorer une quantité d'un certain pourcentage permet d'aborder des problèmes où une quantité subit plusieurs augmentations ou diminutions successives.

Qu'advient-il d'une quantité qui subit deux modifications successives, une augmentation de 25 % et une diminution de 25 % ?

La quantité finale est-elle égale, inférieure ou supérieure à la quantité intiale ? De quel pourcentage ?

Ce problème, dont le résultat peut sembler paradoxal, est abordé de manière visuelle dans la fiche 11 qui propose une explication du phénomène à partir du graphique ci-contre.



La première colonne, subdivisée en 16 rectangles, représente la quantité initiale. Quand on l'augmente de 25 %, on lui ajoute 4 rectangles ; on obtient alors la deuxième colonne de 20 rectangles, qui représente la quantité majorée de 25 %. Lorsqu'ensuite on diminue cette quantité de 25 %, on retire 5 rectangles, et on obtient la troisième colonne de 15 rectangles, qui représente la quantité finale. Le schéma montre clairement que le prix a diminué.

Lorsqu'on effectue la diminution, on retire 25 % de la quantité majorée, qui est forcément plus grande que la quantité initiale ; on retire donc plus que ce que l'on avait ajouté. Dès que les élèves ont compris cela, on peut leur demander d'énoncer le résultat sous une forme plus générale.

Lorsqu'une quantité est successivement majorée puis minorée d'un même pourcentage, elle diminue.

Se pose alors la question de l'ordre des opérations. Après avoir réalisé le schéma qui illustre ce qu'il advient d'une quantité qui subit successivement une diminution de 25 %, suivie d'une augmentation de ce même pourcentage, les élèves constatent que la quantité a diminué du même pourcentage quel que soit l'ordre des opérations.

Sur le graphique, cette diminution correspond à un rectangle, soit $\frac{1}{16}$ de la quantité initiale. Il reste à transformer ce $\frac{1}{16}$ en pourcentage : $\frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\,\%$. La diminution est donc de 6,25 %.

On peut aussi calculer le pourcentage de diminution par calcul direct. Pour cela, il suffit de décrire l'évolution de la quantité Q au cours des différentes étapes, en utilisant les coefficients multiplicatifs qui traduisent la majoration, puis la minoration.

La quantité Q est devenue

$$Q \times 1,25 \times 0,75 = Q \times 0,9375 = Q \times (1 - 0,0625).$$

Il reste alors à interpréter que la diminution est de 6,25 %. La commutativité de la multiplication justifie le fait que l'ordre des opérations n'a pas d'importance.

Les élèves disposent à présent d'une méthode pour résoudre des problèmes où une quantité subit plusieurs majorations et minorations successives. Ils peuvent aussi répondre à une question

comme celle-ci : « Si les côtés d'un carré sont augmentés de 15 %, de quel pourcentage l'aire a-t-elle augmenté ? »

Vers où cela va-t-il ?

Des majorations ou minorations successives, d'un pourcentage constant conduisent à une fonction exponentielle.

Avec des élèves plus âgés, le recours aux facteurs multiplicatifs permet aussi de résoudre facilement des problèmes de pourcentages beaucoup plus compliqués en apparence, comme par exemple celui-ci.

> Dans un certain groupe social, le nombre de fumeurs a diminué de 20 % au cours des dix dernières années. Pendant ce même temps, la consommation moyenne de cigarettes par fumeur a augmenté de 21 %. La consommation totale de cigarettes a-t-elle augmenté ou diminué ? De quel pourcentage ?

La difficulté supplémentaire du problème vient du fait qu'il faut prendre en compte les modifications que subissent trois quantités liées entre elles : le nombre de fumeurs, la consommation moyenne de cigarettes par fumeur et la consommation totale.

- Notons N_F le nombre initial de fumeurs, et N'_F le nombre de fumeurs après 10 ans,
- notons C_M la consommation moyenne de cigarettes initiale, et C'_M la consommation moyenne de cigarettes après 10 ans,
- notons C_T la consommation totale de cigarettes, et C'_T la consommation totale de cigarettes après 10 ans.

On a :

$$C_T = C_M \cdot N_F \quad \text{et} \quad C'_T = C'_M \cdot N'_F.$$

Comme

$$\begin{aligned} C'_M &= C_M \cdot 1,21 \\ N'_F &= N_F \cdot 0,8 \end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned} C'_T &= C_M \cdot 1,21 \cdot N_F \cdot 0,8 \\ &= C_M \cdot N_F \cdot 0,968 \\ &= C_T \cdot 0,968. \end{aligned}$$

La consommation totale de cigarettes a diminué de 3,2 %.

Voici encore deux autres problèmes du même genre.

Le rayon d'un cylindre est augmenté de 30 % et sa hauteur est diminuée de 35 %. Son volume a-t-il augmenté ou diminué ? De quel pourcentage ?

Si le budget total disponible pour les pensions diminue de 8 % et que le nombre de pensionnés augmente de 15 %, le montant moyen des pensions va-t-il augmenter ou diminuer ? De quel pourcentage ?

Chapitre 9

Pourcentages et traitement de données

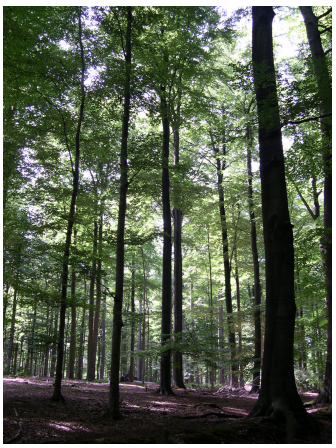
Préambule

Les problèmes rassemblés dans ce chapitre s'adressent à des adolescents ou à des adultes. Les premiers énoncés ont été construits à partir d'une exploration sur Internet au sujet du déboisement de la planète. Les questions posées aux élèves portent sur les données elles-mêmes. Il s'agit d'en saisir la portée, de comprendre comment on passe d'un relevé de données brutes à des taux ou à des pourcentages et de pouvoir se servir de ces calculs pour comparer des situations, analyser une évolution. On traite ensuite le problème du cumul des pourcentages en analysant un article, issu d'un magazine de consommateurs, proposant de réaliser des économies d'énergie.

Les élèves peuvent aborder ces questions avec comme seuls préalables une pratique des quatre opérations et quelques notions élémentaires sur les grandeurs proportionnelles. Les situations sont agencées de façon à conduire à une conceptualisation progressive, guidée par le contexte. En fin de parcours, sont mis en place des modes de pensée, des techniques de calcul et des formules qui donnent accès à la compréhension et à la critique des données telles qu'elles sont souvent présentées dans les médias.

1 Le taux de boisement

De quoi s'agit-il ?



Les élèves comparent les parties boisées dans différentes régions du globe. Ils traitent des données puisées sur différents sites Internet à propos du déboisement.

Enjeux

Prendre i % d'un nombre, transformer un rapport en un pourcentage, majorer ou minorer un nombre d'un certain pourcentage de celui-ci et calculer des pourcentages successifs d'un même nombre.

Construire des séquences de calcul efficaces, adaptées à la calculatrice.

Utiliser et construire des tableaux de nombres pour voir plus clair lorsque les données sont difficiles à saisir, pour déterminer les étapes d'un calcul ou encore pour présenter des résultats.

Compétences

Les compétences citées ci-après sont tirées du document *Compétences terminales et savoirs communs. Humanités professionnelles et techniques* [4].

Acquérir les savoir-faire et les savoirs essentiels relatifs à la construction d'une représentation interdisciplinaire de l'environnement.

Comprendre la présentation de sondages ou d'enquêtes, connaître différentes formes de représentations statistiques.

Pouvoir calculer des proportions, des pourcentages, un taux, utiliser à bon escient une calculatrice et la manipuler avec aisance.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 12 à 14, en annexe aux pages 333 à 335.

Une calculatrice.

Prérequis

Les propriétés d'un tableau de proportionnalité.

La multiplication d'un nombre par une fraction. La conversion d'une fraction en nombre décimal.

1.1 Superficies boisées en Union Européenne et en Chine

Comment s'y prendre ?

Le professeur fournit l'énoncé ci-après sans donner d'indication préalable. Selon leurs acquis, les élèves s'engagent dans des calculs ou des procédures qui leur sont propres. Le professeur répond aux questions et repère les différentes façons de faire. Il organise ensuite une synthèse qui rassemble et confronte les méthodes.

> Vers 1990, dans l'Union Européenne, 31 % du territoire est couvert de forêts pour seulement 16 % du territoire de la Chine. Peut-on dire pour autant qu'il y a, dans l'Union Européenne, plus de territoires boisés qu'en Chine ?

Les pourcentages fournis correspondent à ce que l'on appelle un « taux de boisement ». Ce taux exprime en %, le rapport entre la superficie boisée d'une région et sa superficie totale.

Pour répondre à cette question, il faut connaître les superficies de chacune des régions, puis calculer ce que représentent 31 % de l'une et 16 % de l'autre. Le professeur demande aux élèves

de rechercher eux-mêmes ces superficies.

Pour information : la superficie de l'Union Européenne en 2003 est 2 337 000 km^2,
la superficie de la Chine est 9 597 000 km^2.

Les méthodes de calcul peuvent se ramener à l'une ou l'autre façon de rattacher le problème à une procédure familière. Nous en relevons quatre que le professeur clarifie après avoir analysé les propositions des élèves.

1. On peut interpréter l'expression « prendre 31 % de » en exprimant que pour chaque territoire qui a une superficie de 100 km^2, on a 31 km^2 de bois. On détermine donc d'abord combien de fois la superficie de 100 km^2 est contenue dans 2 337 000 km^2 et puis on multiplie ce nombre par 31. Ceci conduit à effectuer
$$\frac{2\,337\,000}{100} \times 31 = 724\,470 \quad \text{et} \quad \frac{9\,597\,000}{100} \times 16 = 1\,535\,520.$$
2. On peut aussi raisonner selon un schéma communément appelé « règle de trois » et intégrer les calculs dans un tableau de proportionnalité.

Superficie du territoire en km^2	Superficie boisée en km^2
100	31
1	$\frac{31}{100}$
2 337 000	$2\,337\,000 \times \frac{31}{100} = 724\,470$

Superficie du territoire en km^2	Superficie boisée en km^2
100	16
1	$\frac{16}{100}$
9 597 000	$9\,597\,000 \times \frac{16}{100} = 1\,535\,520$

3. Si l'on sait que prendre i % d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par la fraction $\frac{i}{100}$, on calcule d'emblée 31 % de 2 337 000 et 16 % de 9 597 000 en posant les opérations
$$\frac{2\,337\,000 \times 31}{100} = 724\,470 \quad \text{et} \quad \frac{9\,597\,000 \times 16}{100} = 1\,535\,520.$$
4. La fraction $\frac{i}{100}$ peut s'écrire sous forme décimale. Après avoir opéré la conversion, une seule multiplication suffit pour calculer un pourcentage. On obtient
$$2\,337\,000 \times 0,31 = 724\,470 \quad \text{et} \quad 9\,597\,000 \times 0,16 = 1\,535\,520.$$
Cette méthode est particulièrement indiquée lorsqu'on doit calculer des pourcentages, au même taux, de toute une liste de nombres. On place alors le décimal dans la mémoire de la calculatrice.

Il y a donc 724 470 km^2 couverts de forêts en U.E. pour 1 535 520 km^2 en Chine.

La confrontation des méthodes met en lumière les liens qui existent entre la multiplication d'un nombre par une fraction, la division d'un produit par un nombre et la multiplication par un nombre décimal.

Revenons à la comparaison des superficies. Pour disposer d'une vue synthétique de tous les éléments, rassemblons les données et les résultats dans un même tableau.

	Superficie en km^2	Superficie boisée en km^2	Taux de boisement
Union Européenne	2 337 000 km^2	724 470 km^2	31 %
Chine	9 597 000 km^2	1 535 520 km^2	16 %

Ce tableau montre que les superficies et les taux de boisement sont dans des ordres contraires. On y voit aussi que la superficie de la Chine est à peu près quatre fois celle de l'Union Européenne, que sa superficie boisée est à peu près le double et que son taux de boisement est à peu près la moitié.

Dans cette situation on dispose de données (les superficies boisées) puisées dans des ensembles de référence différents (les superficies des deux pays). On peut comparer soit les valeurs absolues (les superficies boisées), indépendamment de l'ensemble de référence, soit les valeurs relatives (les taux) qui rapportent chaque donnée à son ensemble de référence.

Retenons que, lorsque les pourcentages sont calculés dans des ensembles de référence distincts, l'ordre des pourcentages (qui sont des valeurs relatives) n'est pas nécessairement le même que celui des données absolues.

1.2 Le déboisement dans le monde

Comment s'y prendre ?

Les données que nous avons trouvées sur Internet à propos du déboisement sont très touffues. La question posée ci-après porte sur une partie seulement d'un texte qui a retenu notre attention. Un extrait plus large est proposé en prolongement de l'activité.

> Au début des années 2000 les forêts du monde occupaient 3,9 milliards d'hectares. Entre 1980 et 1990, on a constaté une perte de 130 millions d'hectares et entre 1990 et 2000, une perte de 90 millions d'hectares. Calculer en %, le taux de déboisement pour chacune de ces périodes.

Avant de calculer les taux, reprenons les données en remontant l'ordre chronologique puisque nous connaissons la superficie pour l'année 2000 et que nous devons calculer celles des années 1990 et 1980. Il faut aussi exprimer les mesures dans la même unité : ici nous choisissons de prendre le million d'hectares. On sait que

$$1 \text{ milliard d'ha} = 1 \text{ million d'ha} \times 1\,000,$$

$$3,9 \text{ milliards d'ha} = 3\,900 \text{ millions d'ha}.$$

On a donc le tableau ci-dessous.

Années	Superficie totale de la forêt en millions d'ha
2000	3 900
1990	$3\,900 + 90 = 3\,990$
1980	$3\,990 + 130 = 4\,120$

Le taux de déboisement correspond au rapport entre la superficie perdue sur une période donnée et la superficie boisée en début de période. Il s'agit donc de chercher ce que représente en %, une perte de 130 millions d'ha sur une superficie de 4 120 millions d'ha, puis ce que représente en %, une perte de 90 millions d'ha sur une superficie de 3 990 millions d'ha. Pour convertir un rapport en pourcentage, plusieurs méthodes sont possibles. Nous en montrons trois pour un même calcul.

La première utilise les propriétés d'un tableau de proportionnalité, elle est particulièrement adaptée à des élèves qui ont peu d'acquis scolaires en mathématique. La seconde se base sur la résolution d'une équation élémentaire et la troisième utilise la conversion d'une fraction en un nombre décimal. Ces méthodes ont évidemment des liens entre elles. Il est intéressant de les faire découvrir aux élèves, c'est ainsi que s'élabore une pensée mathématique cohérente. Avec des élèves qui ont les prérequis, prendre le temps de travailler les trois méthodes n'est pas du temps perdu !

Il importe que tous intègrent et fixent la troisième méthode : les changements d'écriture qui permettent de passer d'un rapport à un quotient puis à un décimal et ensuite à un pourcentage sont à la base de tous les développements ultérieurs. Les concepts liés à ces passages unifient et simplifient la plupart des problèmes de pourcentage qui sont dès lors traités comme des proportions particulières.

1. Construire et compléter un tableau de proportionnalité dans lequel la première ligne met en correspondance le nombre d'éléments de l'ensemble de référence avec 100 %.

Superficie en millions d'hectares	pourcentage
4 120	100
1	$\frac{100}{4\,120} = \frac{10}{412}$
130	$\frac{10}{412} \times 130 = 3,15533\ldots$

2. Déterminer une fraction équivalente dont le dénominateur est 100.
   Le pourcentage est le nombre x tel que
   $$\frac{130}{4\,120} = \frac{x}{100}.$$
   D'où
   $$x = \frac{130 \times 100}{4\,120} = \frac{1300}{412} = 3,15533\ldots$$
3. Calculer le quotient des deux nombres, puis multiplier par 100. On obtient
   $$\frac{130}{4\,120} = 0,0315533\ldots$$
   $$0,0315533\ldots \times 100 = 3,15533\ldots$$
   Cette procédure vient de l'égalité
   $$0,0315533\ldots = \frac{0,0315533\ldots}{1} = \frac{3,15533\ldots}{100}.$$

Lorsqu'on présente des données, on arrondit généralement les taux au dixième. Le taux de déboisement entre 1980 et 1990 est de 3,2 %.

Pour convertir le rapport entre 90 millions d'ha et la superficie de 3 990 millions d'ha, nous utilisons la première méthode.

Superficie en millions d'hectares	pourcentage
3 990	100
1	$\frac{100}{3\,990} = \frac{10}{399}$
90	$\frac{10}{399} \times 90 = 2,255639\ldots$

Le taux de déboisement entre 1990 et 2000 est de 2,3 %.

Prolongement possible

Les données relatives à cette activité – nous l'avons dit – ont été puisées sur Internet. En les examinant, nous avons trouvé une erreur qui peut être décelée par les élèves et faire l'objet d'un exercice qui en dit long sur les précautions à prendre quand on recueille des informations.

Ainsi donc, le 17/03/2003, cherchant sur Internet des données relatives au déboisement de notre planète, nous avons trouvé à l'adresse

`http://www.forestinformation.com/french/Forest_statistics.asp`

des informations dont voici un extrait.

> ≪ Au début des années 2000, les forêts du monde occupaient 3,9 milliards d'hectares, soit 29,6 % de la surface émergée du globe, qui représente 13,1 milliards d'hectares. Entre 1980 et 1990, on a constaté une perte nette de 130 millions d'hectares ou 3 % de la superficie émergée du globe. Entre 1990 et 2000, la perte nette a été de 90 millions d'hectares, ce qui représente 2,3 % de la superficie totale de la forêt ≫.
> Comparer ces données aux calculs que l'on vient de faire.

Premier étonnement, la perte entre 1980 et 1990 est exprimée sous la forme d'un pourcentage de la *superficie émergée du globe* alors que la perte entre 1990 et 2000 est un pourcentage de la *superficie totale de la forêt*.

Deuxième sujet d'étonnement, une perte de 130 millions d'hectares sur une superficie de 13,1 milliards d'hectares, à vue d'œil, cela ne peut donner 3 %.

Une erreur a dû se glisser dans ce texte. Examinons-le de plus près.

Ces deux interrogations trouvent une explication si l'on considère que les 3 % ont été calculés par rapport à la *superficie totale de forêts* comme nous venons de le faire et non pas par rapport à la *superficie émergée du globe* comme le dit le texte.

Troisième sujet d'étonnement, un des taux de déboisement est différent, il est de 3 % là où nous avons 3,2 %. Pouquoi cet arrondi à l'unité près, alors que les autres pourcentages sont donnés au dixième près ?

On peut ensuite vérifier si les 3,9 milliards d'hectares de forêts représentent bien 29,6 % de la surface émergée du globe. Et cette fois, les résultats correspondent.

1.3 Le clivage Nord-Sud

Comment s'y prendre ?

Toutes les données que nous avons consultées indiquent que le taux de déboisement n'est pas uniforme dans les différentes parties du monde.

Nous nous intéressons ici à des données fournies par la FAO (1999), qui distingue seulement deux catégories : les régions du globe situées au Nord et celles situées au Sud.

On y apprend qu'entre 1990 et 1995, le monde aurait perdu 11 269 000 ha de forêts par an. Voici des chiffres calculés à partir de données recueillies en mai 2003 sur le site IDD (Indicateurs pour un Développement Durable).

`http://club.euronet.be/idd/documents/indicateurs/indic01-2.pdf`

Partie du monde	Superficie boisée en milliers d'hectares en 1990	Variation annuelle en %
Nord	1 618 431	$+0,1$
Sud	1 892 296	$-0,7$

Le professeur demande aux élèves de traiter la question suivante.

> Calculer, année après année, les superficies boisées de chaque partie du globe après chaque perte ou chaque gain.

Les nombres sont grands, les calculs nombreux, il faut éviter le découragement ! Le professeur cherche donc avec les élèves comment réduire les calculs et présenter les résultats successifs. Cette préoccupation méthodologique est essentielle, c'est un des ressorts de l'activité. D'une procédure de simplification à l'autre, on aboutit à une formule très facile à comprendre lorsqu'elle a été découverte, mais mystérieuse et vite oubliée lorsqu'elle est enseignée d'abord.

Il faut évidemment embrayer sur les propositions des élèves ou les discuter. Voici, à titre d'exemple une progression possible pour faire les calculs relatifs à la partie Nord.

Notons d'abord que 0,1 pour cent, c'est 1 pour mille et que multiplier par un millième c'est diviser par mille. Les calculs pour le Nord sont donc très simples. Nous les disposons dans un tableau qui montre les gains année après année ainsi que les superficies telles qu'elles sont devenues après l'année écoulée.

Année	Superficie boisée en début d'année	Gain	Superficie boisée en fin d'année
1990	1 618 431	1 618 ,4	1 620 049,4
1991	1 620 049,4	1 620	1 621 669,4
1992	1 621 669,4	1 621 ,7	1 623 291,1
1993	1 623 291,1	1 623 ,3	1 624 914,4
1994	1 624 914,4	1 624 ,9	1 626 539,3
1995	1 626 539,3	1 626 ,5	1 628 165,8

Avant de se lancer dans les calculs pour le Sud, analysons le tableau en cherchant comment réduire les étapes. Est-il possible, par exemple de construire la dernière colonne du tableau sans passer par la deuxième ?

Il s'agit de chercher comment passer, en effectuant une seule opération, d'un nombre quelconque de la deuxième colonne à son correspondant dans la quatrième.

On examine d'abord les différences entre nombres correspondants : elles varient d'un couple à l'autre. On examine ensuite les quotients, mais comme les résultats ont été obtenus en enchaînant une division et une addition, on ne soupçonne pas que ces quotients sont constants. Pour en avoir l'intuition, des essais à la calculatrice sont nécessaires. Les quotients sont tous très proches de 1,001.

Pour des élèves qui ont peu d'acquis algébriques, on montre seulement comment le nombre 1 majoré de 0,1 % (le taux de croissance) devient 1,001. Pour d'autres, qui auront remarqué d'eux-mêmes que ce nombre n'est pas sans lien avec le taux de croissance, on pose la question suivante.

> Comment expliquer qu'augmenter un nombre d'un certain pourcentage de ce nombre, équivaut à effectuer une seule multiplication ?

Détaillons les calculs pour la première ligne du tableau en gardant la trace de chaque opération, ce qui donne

$$1\,618\,431 + 1\,618\,431 \times 0,001.$$

Rapprochons ceci de ce que nous venons d'observer, à savoir que ces calculs peuvent être remplacés par la multiplication du nombre donné par 1,001.

La mise en évidence de 1 618 431 lève le mystère. En effet,

$$1\,618\,431 + (1\,618\,431 \times 0,001) = 1\,618\,431 \times (1 + 0,001).$$

Il s'agit d'une mise en évidence qui pose souvent des problèmes aux élèves : pour voir le premier terme comme un produit, il faut *imaginer* le facteur 1 du premier terme. On peut leur rappeler cela en écrivant l'égalité sous une forme qui fait mieux voir 1 618 431 comme un *facteur* commun,

$$(1\,618\,431 \times 1) + (1\,618\,431 \times 0,001) = 1\,618\,431 \times (1 + 0,001).$$

On sait qu'on peut faire de même au départ de n'importe quel nombre. Cette conviction permet de généraliser : on traduit les calculs à partir d'un nombre qu'on appelle n et on écrit l'égalité

$$n + 0,001n = n(1 + 0,001) = 1,001n.$$

Abordons à présent les calculs pour le Sud en remplissant *directement* la dernière colonne du tableau. On pose donc la question suivante.

> Comment diminuer un nombre de 0,7 pour cent de ce nombre en ne faisant qu'une seule multiplication ?

Les élèves qui se sont arrêtés à l'observation du tableau trouvent le coefficient en faisant tous les calculs pour la première ligne. Ils utilisent ce coefficient pour déterminer les superficies qui correspondent aux années suivantes.

Année	Superficie boisée en début d'année	Perte	Superficie boisée en fin d'année
1990	1 892 296	$1\,892\,296 \times 0,007 = 13\,246,07$	1 879 049,93

Ils effectuent le quotient entre 1 879 049,93 et 1 892 296. Ils trouvent 0,993. Ce qui indique que chaque unité a été diminuée de 7 millièmes. Ils font ensuite le lien avec le taux.

Ceux qui ont pris le temps de comprendre d'où vient ce coefficient peuvent poser directement le calcul

$$1\,892\,296 - 1\,892\,296 \times 0,007 = 1\,892\,296 \times (1 - 0,007) = 1\,892\,296 \times 0,993.$$

Ils peuvent aussi déterminer ce coefficient à partir de l'écriture algébrique

$$n - 0,007n = n(1 - 0,007) = 0,993n.$$

Voici le tableau complet. Nous avons enchaîné les calculs avec une calculatrice, en gardant chaque fois le résultat précédent sur l'écran. Ceci évite de cumuler les erreurs liées aux approximations successives. Dans le tableau, nous avons recopié les nombres en les arrondissant au centième près.

Année	Superficie boisée en début d'année	Superficie boisée en fin d'année
1990	1 892 296	1 879 049,93
1991	1 879 049,93	1 865 896,58
1992	1 865 896,58	1 852 835,3
1993	1 852 835,3	1 839 865,46
1994	1 839 865,46	1 826 986,4
1995	1 826 986,4	1 814 197,5

Les calculs sont répétitifs : une même multiplication opère chaque fois sur le résultat précédent. Si l'on s'adresse à des élèves qui connaissent bien les puissances à exposants naturels, on peut introduire ici une méthode de calcul qui permet de trouver directement le dernier nombre du tableau

$$1\,892\,296 \times 0,993^6 = 1\,814\,197,5.$$

Arrêtons-nous à présent pour dégager de tout ceci une méthode de calcul qui pourra servir en d'autres occasions. Appelons n le nombre de départ que l'on majore ou que l'on minore de $i\,\%$. Les sommes algébriques

$$n + (n \times i\,\%) \quad \text{et} \quad n - (n \times i\,\%)$$

deviennent après mise en évidence, les produits

$$n(1 + \frac{i}{100}) \quad \text{et} \quad n(1 - \frac{i}{100}).$$

Ainsi par exemple, majorer un montant de 30 % revient à multiplier ce montant par 1,3 et minorer un montant de 7,5 % revient à multiplier ce montant par 0,925.

Il reste à interpréter les résultats de tous ces calculs et à les confronter avec le texte qui est à l'origine du travail.

Ces résultats conduisent-ils à ce qui est annoncé dans le texte : « Entre 1990 et 1995, le monde aurait perdu 11 269 000 hectares par an » ?

Cette perte est une moyenne annuelle calculée à partir d'un bilan entre les gains et pertes. On peut organiser les calculs de diverses façons. Ici encore, le professeur laisse l'initiative aux élèves, note les différentes démarches et organise la mise en commun.Voici une façon de procéder.

Total des superficies gagnées entre début 90 et fin 95 (en milliers d'ha)

$$1\,628\,165,8 - 1\,618\,431 = 9\,734,8.$$

Total des superficies perdues entre début 90 et fin 95 (en milliers d'ha)

$$1\,892\,296 - 1\,814\,197,5 = 78\,098,5.$$

Différence entre pertes et gains

$$78\,098,5 - 9\,734,8 = 68\,363,7.$$

Moyenne annuelle de début 90 à fin 95

$$68\,363,7 : 6 = 11\,393,95.$$

Cette moyenne est assez proche de celle annoncée. La différence provient du fait que les moyennes (0,7 % et 0,1 %) sont des arrondis, elles ont été calculées à partir de données que nous n'avons pas jugé utile de reproduire ici.

Prolongement possible

Le document « Indicateurs pour un développement durable », dont nous avons extrait quelques données, propose des hypothèses sur les causes du déboisement. Il analyse les différences entre les pays du monde situés au Nord et ceux situés au Sud. Nous reproduisons une partie de ce texte, il peut faire l'objet d'un travail interdisciplinaire. La fiche 15 à la page 336 reprend ce même texte sous une forme photocopiable pour les élèves.

Le Brésil et l'Indonésie enregistrent les plus grandes pertes en valeur absolue, suivis du Congo, de la Bolivie, du Mexique, du Venezuela. La forêt tropicale apparaît donc comme la plus affectée en *quantité absolue*. Sans doute des raisons écologiques y contribuent : l'emprise des feux dans les forêts tropicales dégradées et la fragilité des sols tropicaux, qui, rendant l'agriculture peu durable, incite à répéter les défrichements. Mais les contraintes de l'environnement n'expliquent pas tout. En *grandeurs relatives*, c'est dans les pays pauvres non tropicaux que le déboisement est le plus fort : le Liban détient le record mondial (−7,8 %) par an, suivi de l'Afghanistan (−6,8 %) par an. Plus près de nous, l'Algérie perd 1,2 % par an, donc plus que les pays tropicaux.

Il semble ainsi que la déforestation pourrait, avec la pauvreté et la croissance démographique, être tenue comme un critère d'appartenance au tiers-monde, sans que ce critère ne doive être pris isolément. Les exceptions à la règle sont rares en tout cas.

Le même document insiste ensuite sur les conséquences de cette situation.

Sur le plan économique, le bilan global est atténué par la part croissante des forêts artificielles, en général plus productives que les forêts naturelles. Néanmoins, elles n'ont pas toujours la même résilience, donc la même durabilité, et elles répondent davantage aux demandes de l'industrie qu'aux besoins des populations locales, qui dépendent d'une diversité de produits et de services offerts par la végétation naturelle.

Dans une large mesure, la déforestation traduit une surexploitation des forêts directe (pour le bois) ou indirecte (par la fertilité des terres récemment défrichées), donc une gestion non durable.

Sur le plan environnemental, les plantations ne jouent pas le rôle compensatoire envers les pertes de biodiversité et les rôles écologiques. La déforestation globale est susceptible d'affecter les climats. Elle est aussi de nature à amplifier les conséquences du changement climatique global, par la perte des fonctions régulatrices exercées par la forêt sur le régime des eaux.

---

2 Économies d'énergie

De quoi s'agit-il ?



Les élèves analysent un graphique extrait d'un magazine de défense des consommateurs, ils examinent comment les résultats annoncés ont été calculés.

Enjeux

Calculer des pourcentages successifs d'un même nombre.

Construire des séquences de calcul efficaces, adaptées à la calculatrice.

Compétences

Voir celles de la section 1 à la page 228.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La fiche 16, en annexe à la page 337.

Une calculatrice.

Prérequis

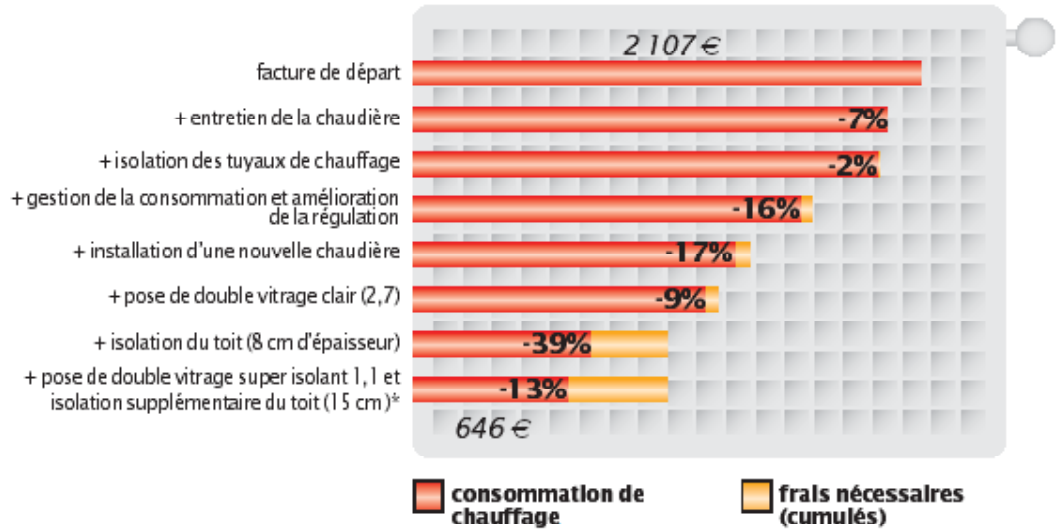
Prendre i % d'un nombre, transformer un rapport en un pourcentage, majorer ou minorer un nombre d'un certain pourcentage de celui-ci.

Comment s'y prendre ?

Sous le titre *Faites baisser votre facture d'énergie*, le magazine Test Achats de septembre 2002 explique comment réaliser des économies sur les frais de chauffage et sur l'eau chaude. Il passe en revue les interventions possibles concernant l'entretien de la chaudière, l'isolation des tuyaux, une meilleure régulation de la température, l'installation d'une nouvelle chaudière et l'isolation de la maison.

L'article étudie l'effet de ces interventions sur la facture relative à la consommation pour trois cas concrets, correspondant à trois types d'habitations. On demande aux élèves d'examiner deux graphiques extraits du magazine.

Le graphique ci-dessous montre comment une facture d'énergie de 2 107 € pour une fermette à rénover peut se réduire à 646 € lorsqu'on cumule une série d'interventions.



*bien entendu cette opération doit se passer au moment du changement des châssis ou lors de la première isolation du grenier.

Quels sont les calculs qui conduisent à un tel résultat ?

À la vue de tous ces pourcentages précédés d'un signe « − » et des mentions relatives aux interventions qui elles, sont précédées d'un signe « + », les élèves sont tentés de minorer la facture de départ d'un pourcentage qui vaut la somme de toutes ces réductions. Ils s'aperçoivent rapidement que c'est une voie sans issue : la somme des réductions est de 103 %.

Par ailleurs le graphique suggère que les réductions sont chaque fois calculées sur le montant précédent. Les élèves font un nouvel essai : ils calculent, étape par étape, les montants successifs. Pour minorer 2 107 € de 7 %, ils multiplient 2 107 par 0,93 et trouvent 1 959,51. Ils multiplient ce montant par 0,98 et ainsi de suite. S'inspirant de ce qui a été fait lors du traitement de la question précédente, certains présentent leurs calculs sous forme d'un tableau qui montre la suite des montants réduits et permet de bien réaliser ce qui se passe lorsqu'on cumule des pourcentages.

Intervention	Montant avant réduction	Montant après réduction
entretien de la chaudière	2 107	1 959,51
isolation des tuyaux de chauffage	1 959,51	1 920,32
gestion de la consommation	1 920,32	1 613,07
installation d'une nouvelle chaudière	1 613,07	1 358,85
pose de double vitrage clair	1 358,85	1 218,35
isolation du toit	1 218,35	745,19
pose de double vitrage super isolant	745,19	646,58

On retrouve un nombre très proche de celui du magazine. En cours de traitement, ayant examiné de près chacune des réductions, on peut s'interroger sur le cumul des réductions concernant le double vitrage. Pose-t-on un double vitrage super-isolant après avoir posé un double vitrage clair ? Ou alors, la réduction de 13 % est-elle seulement un surcroît d'économie par rapport à la pose d'un vitrage clair ? Le texte qui accompagne les graphiques ne donne aucune indication.

Une fois le mécanisme mis au point, le professeur peut montrer comment poser l'opération qui permet de cumuler des pourcentages successifs d'un même montant. On écrit et on calcule

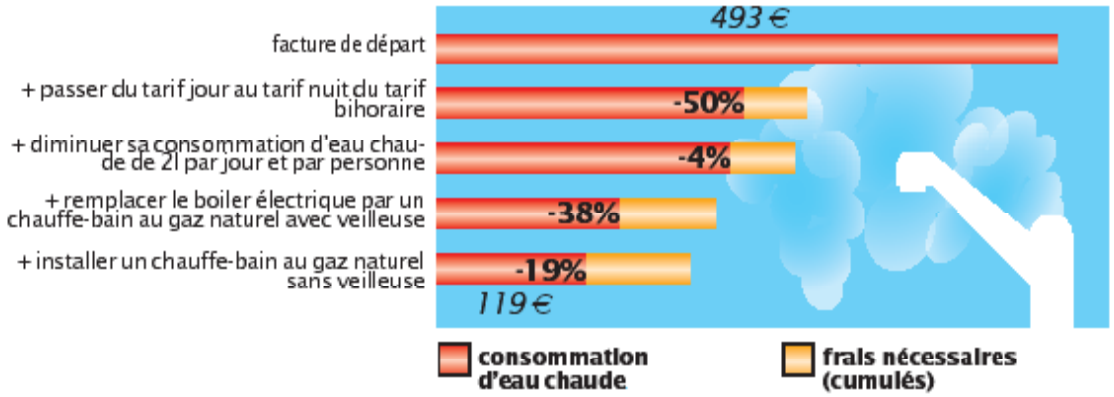
$$2\,107 \times 0,93 \times 0,98 \times 0,84 \times 0,83 \times 0,91 \times 0,61 \times 0,87 = 646,58.$$

On retiendra que lorsqu'on applique successivement des pourcentages à un nombre donné, l'effet cumulé n'est pas égal à la somme des pourcentages.

Prolongement possible

On peut demander aux élèves d'analyser le graphique extrait du même magazine, relatif à la consommation d'eau chaude pour une maison mitoyenne construite dans les années 50.

Le graphique ci-dessous montre comment une facture de 493 € peut se réduire à 119 € lorsqu'on cumule une série d'actions.



Quels sont les calculs qui conduisent à un tel résultat ?

Les questions relatives aux augmentations et baisses successives de pourcentages sont nombreuses. Un observateur attentif trouve rapidement dans les médias des analyses qui font indûment la somme ou la différence de pourcentages.

Chapitre 10

Des pavages aux polyèdres

Préambule

Les pavages sont très présents dans la vie de tous les jours : les carrelages de la cuisine, les trottoirs, les allées de garage, les murs de briques, ... sont autant de motifs qui nous semblent banals et que nous ne prenons plus le temps de regarder. Pourtant, ils sont élaborés avec une grande rigueur et dégagent des régularités surprenantes.

L'étude des pavages, dès le début du secondaire, donne l'occasion d'aborder les constructions élémentaires et bon nombre de concepts mathématiques, tels que les angles, les symétries et les rotations. Elle constitue déjà à elle seule une bonne activité mathématique. Elle va nous mener d'une analyse plus approfondie des pavages réguliers et semi-réguliers à la découverte des polyèdres réguliers, en passant par des considérations sur les mesures des angles.

1 À la découverte des pavages

De quoi s'agit-il ? À l'aide de divers documents (reproductions, photos, dessins), faire découvrir les pavages aux élèves.

Enjeux Dégager les caractéristiques des pavages et formuler des hypothèses quant à leur construction.

Mettre au point la définition de pavage en l'affinant progressivement, par la vérification qu'elle s'adapte bien à tous les documents présentés.

Compétences

Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.

Reconnaître, comparer des figures et les classer.

Dans un contexte de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La fiche 17, à la page 338, sur laquelle se trouvent des reproductions ou photographies de pavages.

Prérequis

La connaissance du vocabulaire de géométrie plane (noms des figures, notion d'angle, de côté, ...).

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue la fiche 17, sur laquelle se trouve la consigne suivante.

> Quel est le lien entre toutes ces images ? Comment pourrait-on les appeler ? Quelles en sont les caractéristiques communes ?

Les élèves observent les images et remarquent que l'on y trouve des régularités. Ils prennent note de leurs observations. Parmi les images se trouvent des photos liées à la vie quotidienne (figures 3, 4, 5, 6 et 9) qui devraient leur paraître familières. D'autres images sont des réalisations artistiques (figures 1 et 7) ou encore des photos prises dans des sites archéologiques ou autres (figure 2). On acceptera à ce moment qu'ils parlent de carrelages, de pavés, de briques, ... le mot *pavage* ne sera sans doute évoqué que par la suite.

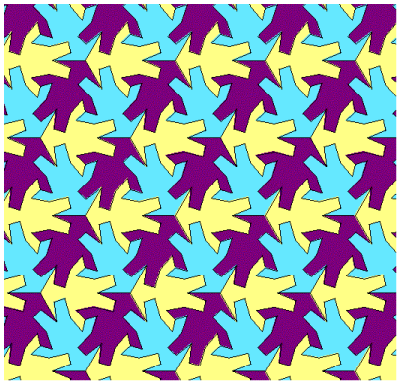


Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

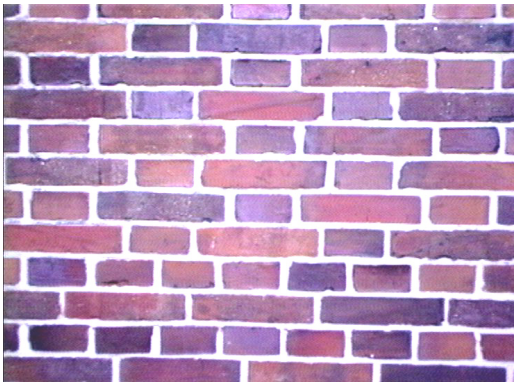


Fig. 4

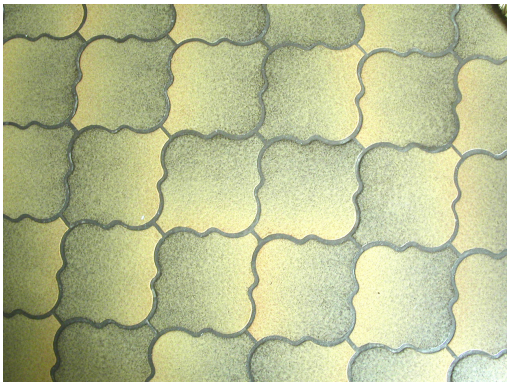


Fig. 5



Fig. 6



Fig. 7

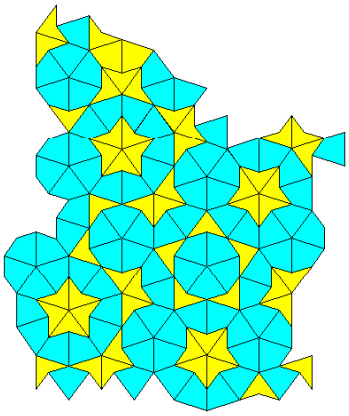


Fig. 8



Fig. 9

Peu à peu, les élèves font ressortir les caractéristiques des pavages, et proposent des définitions qu'ils affinent. À chaque étape, ils doivent vérifier que ces essais de définition s'adaptent à toutes les reproductions. Si ce n'est pas le cas, ils doivent les préciser davantage.

Voici une première idée de la notion de pavage à laquelle les élèves devraient arriver.

*Un **pavage** est un assemblage de figures qui couvre le plan entier, et tel que ces figures ne se recouvrent pas et ne laissent entre elles aucune lacune.*

Échos des classes

Cette activité et celles qui suivent ont été réalisées dans une classe de deuxième secondaire d'un institut technique de Bruxelles.

Nous avons remarqué que les élèves se focalisent davantage sur les couleurs et les formes des figures, plutôt que sur les conditions de non-recouvrement et d'absence de lacune.

Ils accordent également de l'importance à la nature des images : « ce sont des carrelages, des murs, des fonds de piscine, des mosaïques, des papiers peints, ... ». Le professeur doit donc veiller particulièrement à recentrer la discussion sur les caractéristiques des pavages.

2 Paver le plan à l'aide de polygones réguliers

De quoi s'agit-il ?

Réaliser des pavages réguliers et semi-réguliers à l'aide de différents matériels.

Déterminer le nombre de pavages réguliers et explorer les pavages semi-réguliers.

Élaborer des calculs sur les angles des polygones.

Enjeux

Étudier les polygones réguliers et leurs caractéristiques.

Découvrir les conditions qui déterminent si un pavage est régulier ou semi-régulier.

Établir une formule qui permette de connaître la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés.

Vérifier la plausibilité de certaines conjectures.

Compétences

Reconnaître, comparer des figures, les différencier et les classer.

Construire des figures avec du matériel varié.

Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles.

Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions [...].

Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables.

2.1 Manipulation

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Pour chaque élève, une enveloppe contenant une série de polygones réguliers en carton, et la reproduction de ces mêmes polygones en grand format pour le tableau. Dans chacun des deux formats, les longueurs des côtés de ces différents polygones doivent être égales entre elles. Pour cette activité, notre choix s'est porté sur une quantité particulière de chaque type de polygones : 4 dodécagones, 4 hendécagones[1], 4 décagones, 4 ennéagones[2], 6 octogones, 6 heptagones, 8 hexagones, 6 pentagones, 9 carrés et 18 triangles équilatéraux. C'est un choix qui permet une bonne pratique de la manipulation. Mais le professeur peut le modifier à sa guise.

Les fiches 18 à 27, aux pages 339 à 348, reprennent les gabarits des petits polygones. Les grands polygones pour le tableau peuvent être obtenus

[1] Polygone à onze côtés.
[2] Polygone à neuf côtés.

par agrandissement à la photocopieuse.

Prérequis

Les notions de triangle, de quadrilatère, de polygone, de côté et d'angle.

L'activité 1 ou toute autre activité qui introduit la notion de pavage.

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue une enveloppe à chaque élève, et donne la consigne suivante.

> À l'aide des figures contenues dans ton enveloppe, amorce un pavage du plan.

Les élèves travaillent seuls mais peuvent confronter leurs idées avec celles de leurs voisins. Ils essaient plusieurs combinaisons de polygones afin d'obtenir un pavage qui couvre le plan sans recouvrement ni lacune.

La consigne étant volontairement vague, il est probable que les élèves obtiennent des constructions variées. Afin de limiter les possibilités et de focaliser l'attention sur certains pavages particuliers, le professeur ajoute la consigne suivante.

> Assemble les polygones de telle sorte que deux polygones qui se touchent aient en commun soit un sommet, soit un côté complet.

Pour illustrer la consigne, le professeur montre les figures 3, 4 et 6. Celles-ci sont des exemples de pavages qui ne remplissent pas la condition de la nouvelle consigne.

Lors de l'activité, on demande aux élèves d'expliquer ce qu'ils ont réalisé, en justifiant pourquoi tel assemblage convient ou pourquoi il ne convient pas. De ce dialogue devraient ressortir des remarques du type

- on observe souvent des régularités dans les pavages,
- on peut mélanger différentes sortes de polygones ou bien n'utiliser que des polygones identiques,
- en tout sommet commun à plusieurs polygones (ce qu'on appelle un nœud), la somme des angles vaut 360°,
- il y a toujours au moins 3 polygones en chaque nœud,
- ...

À la suite d'une discussion entre le professeur et les élèves, ceux-ci identifient deux familles particulières de pavages. Certains utilisent un seul type de polygones réguliers, on les appelle *pavages réguliers* ; d'autres utilisent deux (ou plusieurs) types de polygones réguliers différents.

Échos des classes

La plupart des réalisations des élèves présentent des régularités : on y trouve un assemblage de quelques polygones tel que le pavage soit constitué par une reproduction infinie d'assemblages identiques. Le professeur attire l'attention des élèves sur ces régularités.

Lors de la première expérimentation, il avait été demandé de réaliser des pavages présentant de telles régularités. Cette consigne s'est révélée trop difficile à mettre en œuvre, c'est pourquoi nous avons renoncé à imposer cette condition supplémentaire.

Le premier réflexe des élèves est généralement de prendre un grand polygone (au moins un décagone) et de l'entourer de plus petits. Ils obtiennent ainsi souvent des rosaces qu'ils ne peuvent ensuite étendre à tout le plan avec les polygones dont ils disposent (figures 10 et 11).

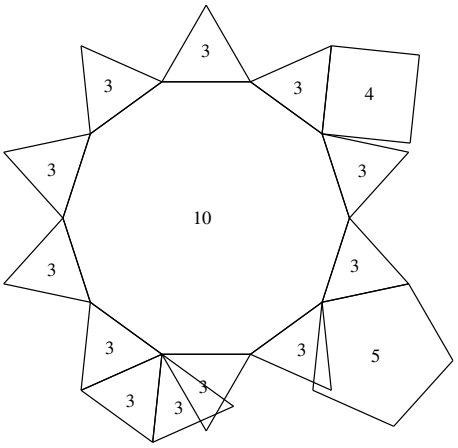


Fig. 10

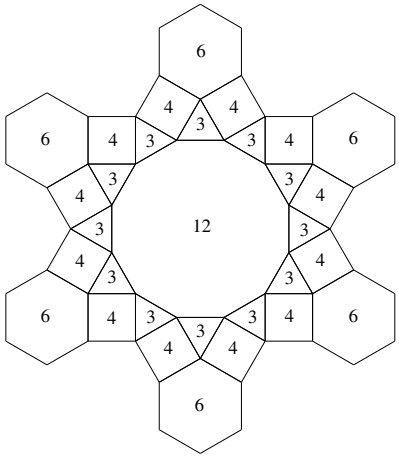


Fig. 11

Lors de la mise en commun, les élèves ne passent pas aisément de la manipulation intuitive à une réflexion de cause à effet.

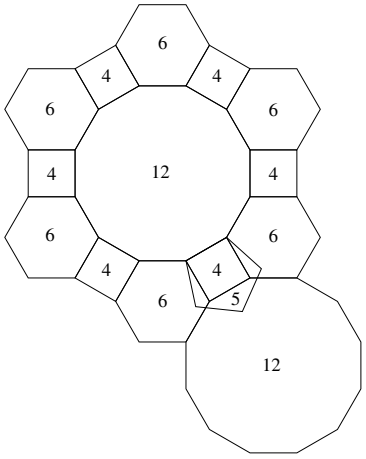


Fig. 12

À la question : « Pourquoi cet assemblage (figure 12) fonctionne-t-il avec un carré et pas avec un pentagone ? », les élèves ne répondent pas correctement. Ils disent par exemple : « C'est parce qu'il y a un côté en trop » ou bien « C'est parce que les côtés ne sont plus multiples ». Nous supposons ici qu'ils veulent dire que 5 n'est pas un diviseur de 12. Ils n'ont pas l'idée de s'exprimer en terme d'angles.

La notion de nœud n'est pas non plus simple à mettre en place. En effet, celle-ci est nouvelle pour les élèves. La question : « Combien d'hexagones trouve-t-on en chaque nœud dans le pavage régulier d'hexagones ? » n'était pas claire pour eux. Il semble donc très important que le professeur prenne le temps de mettre correctement cette notion en place.

2.2 Dénombrement et analyse des pavages réguliers

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les même polygones en carton que pour la section 2.1.

Prérequis

L'amplitude des angles du triangle équilatéral et du carré.

Comment s'y prendre ?

Le professeur propose de continuer à travailler par essais et erreurs avec les polygones en carton.

> Combien de pavages réguliers différents existe-t-il ? Utilise tes polygones pour les trouver.

Les élèves essaient d'amorcer un pavage du plan à l'aide uniquement de polygones réguliers identiques. Ils devraient trouver sans trop de difficultés les trois seuls pavages réalisables de cette manière (figures 13 à 15),

à l'aide de triangles équilatéraux, ou de carrés, ou d'hexagones réguliers.

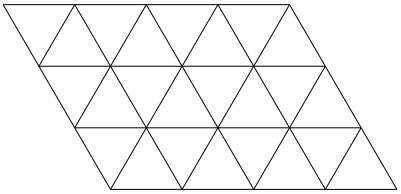


Fig. 13

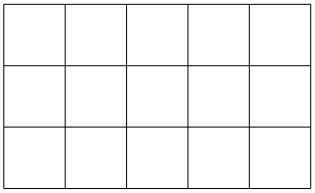


Fig. 14

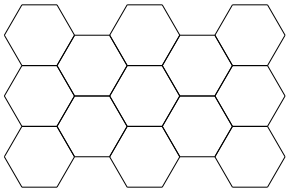


Fig. 15

Il est important de passer à une phase d'analyse de ce résultat. Pour ce faire, le professeur demande tout d'abord aux élèves d'expliquer pourquoi ils n'ont pu trouver que ces trois pavages réguliers. Ils doivent alors mener une réflexion sur les angles des polygones, en utilisant leurs acquis antérieurs.

- « On peut paver le plan à l'aide de triangles équilatéraux car leurs angles valent 60° ; si on en place six autour d'un nœud, la somme fait effectivement 360°. »
- « On peut paver aussi avec des carrés car leurs angles valent 90° ; on peut en placer quatre en chaque nœud. »
- « Cela ne fonctionne pas avec les pentagones car si on en met trois, il y a un trou (une lacune) comme le montre la figure 16, et si on en met quatre, ils se superposent (un recouvrement), comme à la figure 17. »

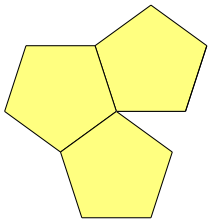


Fig. 16

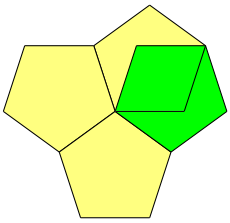


Fig. 17

- « Pour les hexagones, on constate que trois en un nœud amorcent un pavage. »

  Le professeur peut poser la question suivante : « Connaît-on la valeur de l'angle d'un hexagone ? N'a t-on pas déjà rencontré cette forme quelque part ? »

S'il n'y a pas de réaction de la part des élèves, il peut attirer leur attention sur le pavage de triangles équilatéraux et leur faire remarquer qu'on peut y voir des hexagones, comme le montre la figure 18.

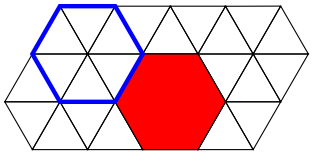


Fig. 18

Les élèves voient alors que la mesure de l'angle de l'hexagone vaut deux fois celle de l'angle d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire 120° et cela justifie le fait que l'on peut placer trois hexagones en chaque nœud.

– « À partir des heptagones, si on essaie d'en mettre trois, il y a toujours recouvrement. »

Il y a donc trois pavages réguliers dont nous avons montré l'existence ; on peut considérer que cette démarche correspond à une démonstration intuitive largement suffisante pour des élèves de treize ans.

2.3 Calcul de l'angle intérieur d'un polygone régulier

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 28 et 29, aux pages 349 et 350.

Prérequis

Les premiers éléments de calcul littéral.

La somme des angles d'un triangle quelconque.

Comment s'y prendre ?

À la section 2.2, nous nous sommes rendu compte qu'il était nécessaire de connaître les valeurs des angles intérieurs des polygones réguliers, pour justifier l'existence d'un pavage régulier.

Afin d'aller plus loin dans l'étude des pavages non réguliers, le professeur propose aux élèves de calculer les valeurs de ces angles intérieurs.

> Quelle est la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à trois côtés ? À quatre côtés ? À cinq côtés ?

Les élèves connaissent bien la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à trois côtés, puisqu'il s'agit du triangle équilatéral dont l'angle vaut 60°. Celui à 4 côtés est le carré, son angle intérieur est connu également ; il vaut 90°. Par contre les élèves ne connaissent pas la valeur de l'angle intérieur du polygone régulier à 5 côtés, le pentagone.

Afin de ne pas s'engager dans des calculs fastidieux propres à chaque polygone, le professeur propose aux élèves d'établir une formule générale valable quel que soit le nombre de leurs côtés. Cette formule permettra de déterminer l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés.

Pour y arriver, il existe plusieurs méthodes, dont une consiste à décomposer le polygone régulier en triangles, en partant d'un sommet et en le reliant à tous les autres sommets qui ne lui sont pas adjacents (figures 19 et 20). Le professeur distribue la fiche 28 et réalise la démarche avec les élèves.

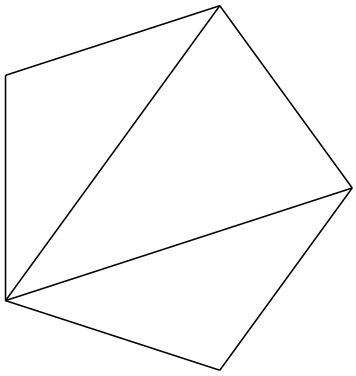


Fig. 19

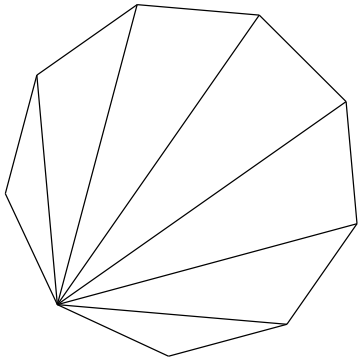


Fig. 20

Combien de triangles peut-on ainsi former dans un polygone régulier à n côtés ?

On remarque que le nombre de triangles contenus dans le polygone vaut toujours le nombre de ses côtés moins 2, on formera donc $(n-2)$ triangles.

Quel lien existe-t-il entre les angles des triangles et les angles du polygone régulier ?

Si on additionne tous les angles des triangles qui composent le polygone, on obtient la somme des angles intérieurs de ce dernier. Cette somme vaut donc le produit de 180° par le nombre de triangles. Comme on sait qu'un polygone régulier à n côtés est composé de $(n-2)$ triangles, on peut dire que la somme de ses angles vaut $180° \cdot (n-2)$.

$$\text{Somme des angles intérieurs du polygone} = (n-2) \cdot 180°.$$

Quelle est alors la valeur d'un seul angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés ?

Lorsqu'un polygone est régulier, tous ses côtés sont égaux, ainsi que tous ses angles. La valeur d'un angle vaut donc la somme des angles intérieurs du polygone divisée par le nombre de ses côtés.

Conclusion : si n est le nombre de côtés d'un polygone régulier, l'angle intérieur α de ce polygone vaut

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$

Vérifions, à l'aide de cette formule, qu'il n'y a pas plus de trois pavages réguliers du plan.

Le professeur demande aux élèves de remplacer le n de la formule par le nombre de côtés du polygone utilisé et d'en déduire α.

Prenons le cas, par exemple, des triangles équilatéraux,

$$\alpha = \frac{(3-2) \cdot 180°}{3} = \frac{1 \cdot 180°}{3} = \frac{180°}{3} = 60°,$$

ce qui correspond bien à la valeur connue des élèves.

Pour les pentagones,

$$\alpha = \frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = \frac{3\cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Pour former un pavage régulier, il faudrait un nombre entier de pentagones en chaque nœud. Ce qui veut dire que 108 devrait être diviseur de 360. Or,

$$3 \times 108 = 324 < 360 \quad \text{et} \quad 4 \times 108 = 432 > 360.$$

On ne peut donc pas construire de pavage régulier à l'aide de pentagones.

Les valeurs des angles sont répertoriées dans un tableau, dans lequel on fait figurer le calcul qui permet de déterminer si les polygones peuvent former ou non un pavage régulier.

n	α	somme des angles en un nœud	pavage possible
3	60	$6 \times 60^\circ = 360^\circ$	oui
4	90	$4 \times 90^\circ = 360^\circ$	oui
5	108	$3 \times 108^\circ < 360^\circ$ et $4 \times 108^\circ > 360^\circ$	non
6	120	$3 \times 120^\circ = 360^\circ$	oui
7	128	$3 \times 128^\circ > 360^\circ$	non

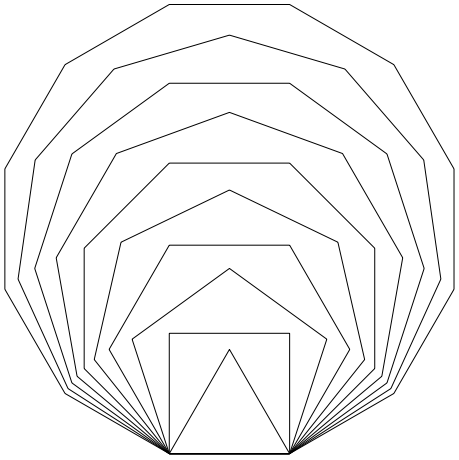


Fig. 21

Par l'illustration de la figure 21, le professeur peut facilement montrer aux élèves que la valeur de l'angle intérieur d'un polygone ne cesse d'augmenter avec le nombre de ses côtés. La démarche est donc bien finie lorsqu'on a vu que trois fois la valeur de l'angle d'un heptagone dépasse 360°.

À l'aide de la formule trouvée, le professeur peut proposer aux élèves de construire le graphe de la valeur de l'angle intérieur du polygone régulier en fonction du nombre de ses côtés (figure 22). Ce genre de graphe peut être facilement réalisé à l'aide de l'assistant graphique du tableur Excel. On peut y voir que la courbe est croissante, que les amplitudes des angles augmentent avec le nombre des côtés, et que cette augmentation est de plus en plus minime. La valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à 53 côtés sera de ce fait juste un peu plus grande, à quelques centièmes de degrés près, que celle d'un polygone régulier à 52 côtés. Le professeur peut également demander aux élèves quelle est la limite de ces amplitudes, et ensuite de prolonger la suite pour que celle-ci vienne donc « lécher » l'horizontale passant par l'ordonnée 180 qu'on appelle asymptote.

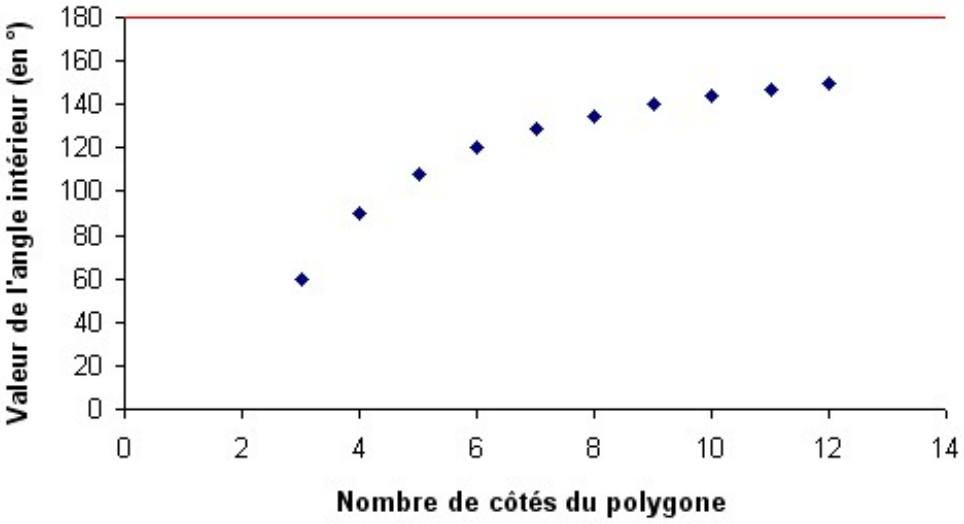


Fig. 22

On peut également montrer algébriquement que si n augmente, alors α augmente. On a

$$\alpha = 180 \cdot \frac{n-2}{n} = 180° \cdot (\frac{n}{n} - \frac{2}{n}) = 180° \cdot (1 - \frac{2}{n}).$$

Si n augmente, alors la fraction $\frac{2}{n}$ diminue (car, pour un même numérateur, un dénominateur plus grand donne une fraction plus petite).

Si la fraction $\frac{2}{n}$ diminue, alors $(1 - \frac{2}{n})$ augmente (car on retranche de 1 une quantité plus petite).

Si $(1 - \frac{2}{n})$ augmente, alors $180° \cdot (1 - \frac{2}{n})$ augmente (car on multiplie 180° par un nombre plus grand), donc α augmente.

Le professeur peut ensuite proposer aux élèves de déterminer eux-mêmes la formule à partir d'un autre découpage (figures 23 et 24). Il leur distribue la fiche 29.

> Retrouve la formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier à partir de cette nouvelle décomposition.

Le professeur laisse les élèves travailler seuls en les guidant de temps en temps si nécessaire.

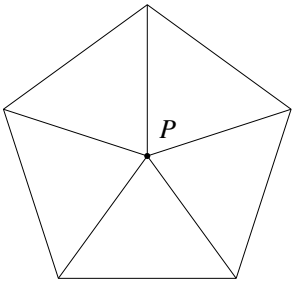


Fig. 23

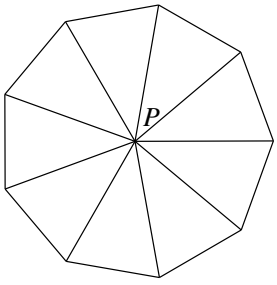


Fig. 24

Remarque. – Le point P est ici situé au centre des polygones afin de faciliter la visualisation. Il faut cependant être conscient du fait que le raisonnement est le même pour n'importe quel point P intérieur au polygone (figure 25).

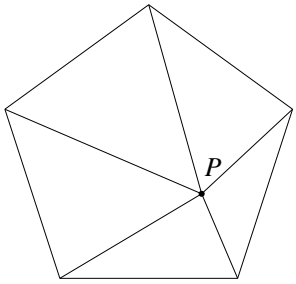


Fig. 25

Les élèves doivent commencer par compter le nombre de triangles obtenus au moyen de cette découpe. Cette fois, il y a autant de triangles que de côtés du polygone. Il y aura donc n triangles dans un polygone à n côtés.

Que vaut la somme des angles des triangles ? Correspond-elle encore à la somme des angles intérieurs du polygone ?

La somme des angles des triangles vaut $n \cdot 180°$.

Mais ici, la somme des angles des triangles ne correspond pas à celle des angles intérieurs du polygone. En effet, les angles autour du point P, dont la somme vaut 360° puisqu'il s'agit d'un tour complet, sont excédentaires.

Si on additionne tous les angles des triangles, puis qu'on retire les angles en P, on obtient la somme des angles du polygone. Cela veut dire que l'on doit multiplier 180° par le nombre de côtés, puis retrancher 360° pour obtenir la somme des angles du polygone

$$n \cdot 180° - 360°.$$

La valeur d'un seul angle intérieur du polygone vaut alors

$$\alpha = \frac{(n \cdot 180°) - 360°}{n}.$$

Cette formule est-elle équivalente à la première ?

Si les élèves n'y pensent pas, le professeur peut leur proposer de mettre 180° en évidence. Ils obtiennent alors la formule de départ

$$\alpha = \frac{(n \cdot 180°) - (2 \cdot 180°)}{n} = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}.$$

Prolongement possible

Il est intéressant de montrer aux élèves que la formule de la somme des angles des polygones régulier est valable pour tous les polygones convexes quelconques. Par exemple, si la somme des angles d'un hexagone régulier (figure 26) vaut 720°, c'est également le cas pour l'hexagone quelconque de la figure 27, puisque le découpage en triangles donne le même résultat.

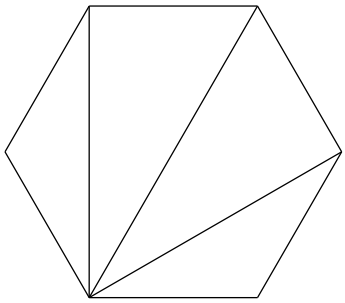


Fig. 26

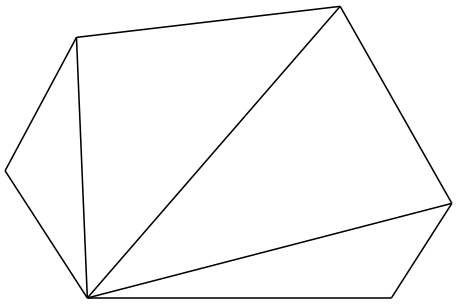


Fig. 27

Échos des classes

La deuxième partie de cette activité se révèle assez difficile pour les élèves. En effet, ils se focalisent sur la formule trouvée et essaient de l'adapter à la nouvelle décomposition. Il est alors extrêmement important que le professeur les amène à se poser les bonnes questions, c'est-à-dire celles qui permettent de mener une démarche semblable à la première.

Nous proposons donc une fiche détaillée (fiche 30, à la page 351), sur laquelle se trouve des questions intermédiaires. Une de ces questions est : ≪ Que vaut la somme des angles des triangles ? Correspond-elle encore à la somme des angles intérieurs du polygone ? ≫. Cette question est très difficile pour les élèves et nécessite souvent une explication complémentaire. Voici une proposition qui peut débloquer la situation en permettant de la visualiser.

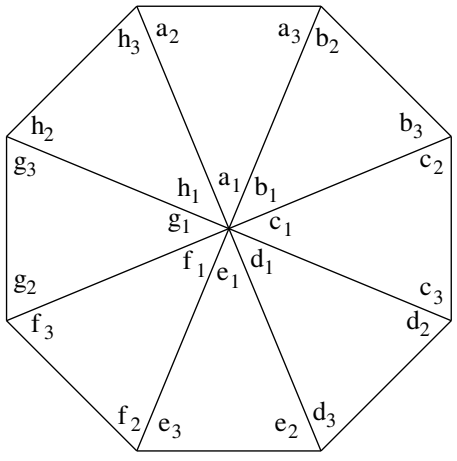


Fig. 28

On propose de numéroter (ou de symboliser) les angles de chaque triangle (figure 28). On demande aux élèves de dire ce qui va être additionné si on calcule la somme des angles de tous les triangles. Ici : $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + h_1 + h_2 + h_3$. On demande encore aux élèves si en effectuant ce calcul on obtient exactement la somme des angles du polygone. Les élèves se rendent compte qu' on a certains angles en trop, les angles situés au centre, additionnés $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1 + g_1 + h_1$ et dont la somme vaut $360°$.

2.4 Exploration des pavages semi-réguliers

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les mêmes polygones en carton que pour la section 2.2 et éventuellement un logiciel de dessin. *Apprenti Géomètre*, par exemple, permet de

disposer rapidement de tous les polygones nécessaires à cette activité.

Les fiches 31 et 32, aux pages 352 et 353.

Prérequis

Les acquis des sections 2.2 et 2.3.

Une familiarisation à un logiciel de dessin (initiation au kit standard pour *Apprenti Géomètre*), si on utilise ce type d'outil.

Comment s'y prendre ?

Le professeur récapitule les résultats des activités précédentes. Nous avons signalé que les pavages construits à l'aide d'une seule sorte de polygones réguliers étaient appelés *pavages réguliers*. Nous avons remarqué que l'on pouvait construire des pavages à l'aide de plusieurs sortes de polygones réguliers. Le professeur explique alors aux élèves que l'on ne donne habituellement à ces derniers le nom de *pavages semi-réguliers* que si la condition supplémentaire suivante est respectée : *en chaque nœud doit se répéter le même assemblage de polygones, dans le même ordre.*

Afin de bien faire comprendre cette condition, le professeur peut montrer un exemple de pavage (figure 29) utilisant trois types de polygones réguliers mais qui ne peut être appelé *pavage semi-régulier*, bien qu'il y ressemble fort. En effet, l'ordre des polygones autour des nœuds n'est pas toujours identique.

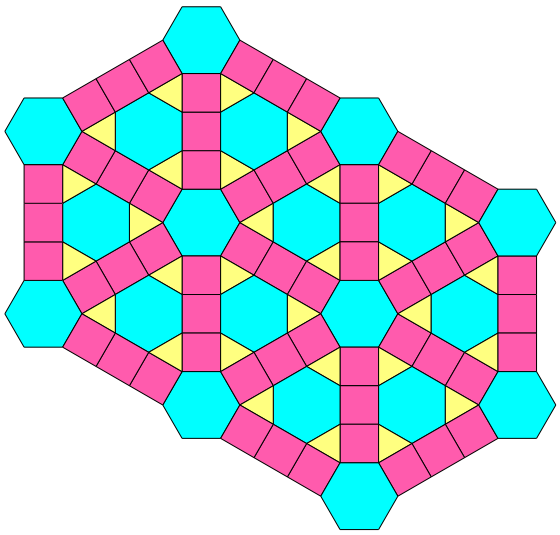


Fig. 29

Vers le « centre », on trouve un nœud constitué, dans l'ordre, des polygones suivants : hexagone - carré - triangle - carré. Si on remplace les noms des polygones par le nombre de leurs côtés, on peut coder l'ordre autour du nœud de cette manière : 6.4.3.4.

Mais on trouve aussi des nœuds de type 6.4.4.3.

On veillera à ce que les élèves soient bien conscients qu'il s'agit de deux situations tout à fait différentes. En effet, dans le deuxième cas, deux carrés se trouvent côte à côte.

Le professeur propose ensuite aux élèves d'utiliser les trois outils mis à leur disposition – les cartons, la formule donnant l'angle intérieur d'un polygone et le logiciel de dessin – afin de découvrir un maximum de pavages semi-réguliers.

> Essaie maintenant de découvrir le plus grand nombre possible de pavages semi-réguliers. Travaille avec tous les outils mis à ta disposition.

Les élèves peuvent utiliser au choix les polygones en carton, la formule ainsi que le logiciel

de dessin. Ils prennent note de leurs découvertes qui seront mises en commun par la suite, notamment pour réaliser le tableau ci-dessous.

Quelques pavages semi-réguliers peuvent être facilement trouvés à l'aide de la manipulation des cartons. Par contre, la motivation et la facilité qu'apporte le matériel informatique constituent un atout majeur pour la découverte de pavages semi-réguliers plus compliqués. En effet, il faut parfois pouvoir disposer d'un grand nombre de figures identiques pour se rendre compte de l'existence d'un pavage, et la découpe de nombreux polygones est un travail fastidieux que l'outil informatique permet d'éviter. La possibilité de créer de jolis dessins grâce aux couleurs et à la précision d'*Apprenti Géomètre* représente également une motivation supplémentaire pour explorer tous les pavages semi-réguliers.

Il faut signaler une difficulté supplémentaire : certaines combinaisons offrent deux pavages différents selon l'ordre dans lequel les polygones sont placés autour des nœuds. C'est le cas notamment de l'assemblage des carrés et des triangles. En effet, on obtient la figure 30 en plaçant deux triangles consécutifs, puis un carré suivi d'un triangle et d'un dernier carré. Par contre, on obtient la figure 31 en regroupant les trois triangles suivis des deux carrés.

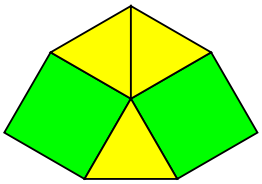


Fig. 30

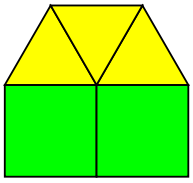


Fig. 31

Il sera donc opportun que le professeur rappelle aux élèves la condition supplémentaire pour avoir un pavage semi-régulier.

La formule trouvée à la section 2.3 permet de déterminer les valeurs des angles intérieurs de tous les polygones réguliers utilisés. Il est intéressant de récapituler toutes ces valeurs dans un tableau afin d'avoir une vue d'ensemble et de pouvoir envisager toutes les combinaisons possibles.

La fiche 31 à la page 352 contient un tableau vierge. Il pourra être complété avec les élèves en fin d'activité, pour élaborer une synthèse de toutes leurs découvertes. Il ressemblera sans doute à celui ci-dessous, qui reprend également le cas des pavages réguliers, indiqués par un astérisque (*). À chaque combinaison est associé un codage indiquant l'ordre dans lequel les polygones s'agencent autour de chaque nœud.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
α	60	90	108	120	128.57	135	140	144	147.27	150	Codage
	6*				////				////		3.3.3.3.3.3
	4			1	////				////		3.3.3.3.6
	3	2			////				////		3.3.3.4.4
	3	2			////				////		3.3.4.3.4
	2			2	////				////		3.6.3.6
	1	2		1	////				////		3.4.6.4
	1				////				////	2	3.12.12
		4*			////				////		4.4.4.4
		1			////	2			////		4.8.8
		1		1	////				////	1	4.6.12
				3*	////				////		6.6.6

Les deux premières lignes constituent un bon exercice d'application de la formule trouvée lors de l'activité 2.3. Les élèves complètent le tableau ligne par ligne.

- On essaie d'abord avec uniquement des triangles, il en faut 6, cela donne un pavage régulier dont le code du nœud est 3.3.3.3.3.3.
- On essaie ensuite avec 5 triangles, mais pour combler le trou on ne peut mettre qu'un triangle, cela revient donc au même que le premier cas.
- Puis on prend quatre triangles et on essaie de combler le trou. En calculant les valeurs des angles, on remarque que « l'angle du trou » vaut 120° et qu'il correspond donc à la valeur de l'angle intérieur de l'hexagone. Le pavage semi-régulier trouvé est codé par 3.3.3.3.6 (figure 34).
- On fait de même avec trois triangles, l'angle du trou à combler vaut alors 180°. Or, il n'existe pas de polygone régulier ayant un angle intérieur égal à 180°. Il faut donc chercher des amplitudes d'angles qui pourraient être additionnées pour obtenir 180°. Trois possibilités : $3 \cdot 60° = 180°$, $120° + 60° = 180°$ et $2 \cdot 90° = 180°$. Les deux premières possibilités ne peuvent pas être prises en compte car elles nous ramènent aux deux pavages déjà répertoriés. C'est donc la troisième qui nous intéresse : combler le trou à l'aide de deux carrés. On obtient alors le pavage 3.3.3.4.4 (figure 35) ou en mélangeant les triangles et carrés autrement, le pavage 3.3.4.3.4 (figure 36).
- ...

Les colonnes des heptagones et hendécagones peuvent être écartées dès le début car les valeurs décimales de leurs angles intérieurs ne conviennent pas pour constituer des pavages (la somme des angles autour de tout nœud doit valoir exactement 360°). Par contre, les colonnes des pentagones, ennéagones et décagones restent des candidats valables. Les élèves essaieront probablement de telles combinaisons, même si on sait que celles-ci resteront sans résultat.

Par cette méthode, avec de la patience et de l'organisation, on peut trouver les huit pavages semi-réguliers ainsi que les pavages réguliers. Mais il faut être très attentif aux exigences, car des intrus peuvent se glisser dans le tableau. Voici deux exemples de pavages pour lesquels les amplitudes des angles s'additionnent correctement mais dans lesquels on trouve différentes sortes de nœud (figures 32 et 33).

Voyons à quoi ressemblent ces pavages en utilisant le logiciel *Apprenti Géomètre*.

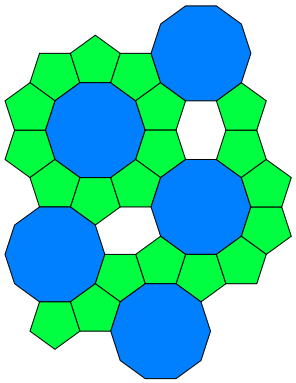


Fig. 32

Deux pentagones et un décagone en un nœud,

$$2 \cdot 108° + 144° = 360°.$$

Le code de cet assemblage est donc : 5.5.10.
Mais celui-ci n'est pas un pavage semi-régulier car les espaces blancs laissés par les pentagones et décagones ne peuvent être remplis par un de ces mêmes polygones réguliers. Cet espace doit être comblé par un hexagone non-régulier.

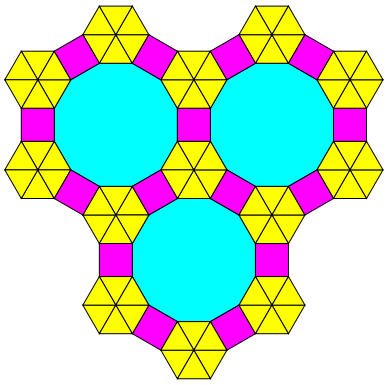


Fig. 33

Deux triangles, un carré et un dodécagone en un nœud,

$$2 \cdot 60° + 90° + 150° = 360°.$$

Le code de cet assemblage est donc : 3.3.4.12.
Celui-ci n'est pas un pavage semi-régulier car il est constitué de deux nœuds de types différents, puisqu'un nœud se trouve au centre des six triangles. Cet assemblage devient un pavage semi-régulier si on remplace les groupements de six triangles par des hexagones (figure 41).

Les huit pavages semi-réguliers à trouver sont les suivants (figures 34 à 41). Le professeur peut distribuer la fiche 32 sur laquelle se trouvent ces huit pavages. Les élèves complètent alors les codes des nœuds.

3.3.3.3.6

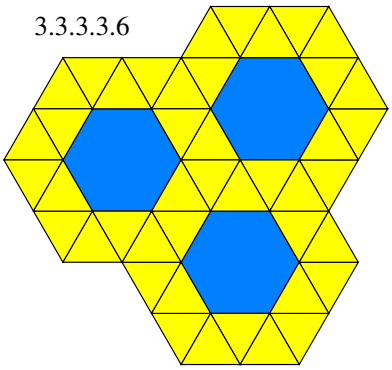


Fig. 34

3.3.3.4.4

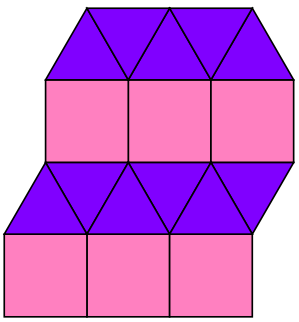


Fig. 35

3.3.4.3.4

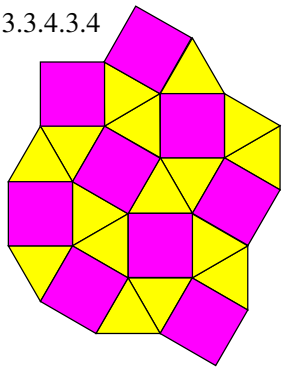


Fig. 36

3.6.3.6

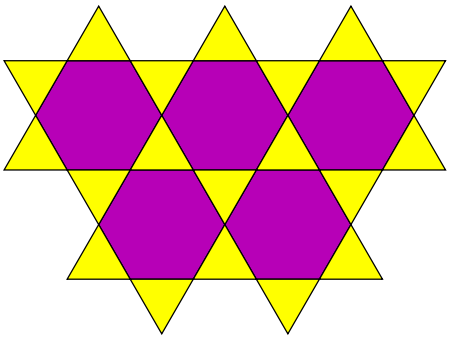


Fig. 37

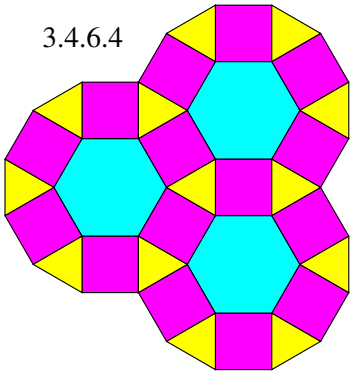


Fig. 38

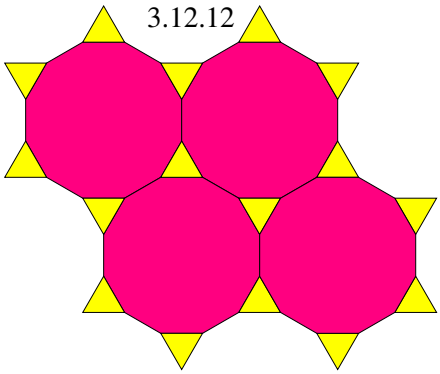


Fig. 39

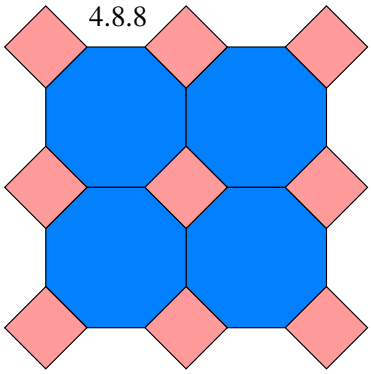


Fig. 40

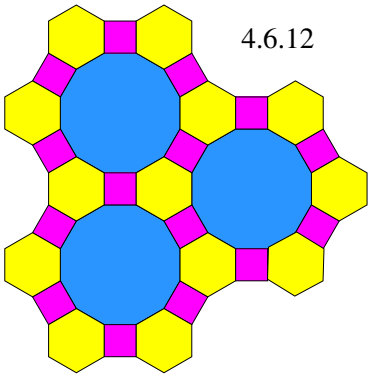


Fig. 41

3 Les polyèdres platoniciens

De quoi s'agit-il ? Les élèves découvrent les cinq polyèdres réguliers par une manipulation.

Contextualiser cette découverte par un extrait de Platon.

Enjeux Connaître les cinq polyèdres réguliers et leurs propriétés.

Lire et comprendre un texte écrit par Platon au quatrième siècle avant J.C., transcrire des parties de ce texte en langage plus actuel.

Compétences dans le domaine des mathématiques

Reconnaître, comparer des solides.

Construire des solides avec du matériel varié.

Compétences dans le domaine du français

Gérer la compréhension du document pour dégager les informations explicites, et pour vérifier des hypothèses émises personnellement ou proposées.

3.1 Activité de découverte

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une grande quantité de polygones réguliers en carton, tous à côtés égaux entre eux, et du papier collant ; ou bien les mallettes de *Polydron*.

Prérequis

La séquence 2.

Comment s'y prendre ?

Le professeur propose aux élèves de repartir d'une tentative de pavage régulier impossible, au moyen des pentagones.

> Comment faire pour assembler trois pentagones ? Comment « supprimer le trou » ?

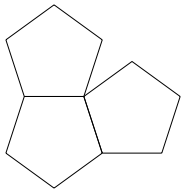


Fig. 42

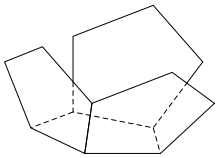


Fig. 43

La solution consiste à passer du plan à l'espace. En effet, si on relève les pentagones autour du nœud, celui-ci devient un sommet et les côtés coïncident alors parfaitement. La forme obtenue est une sorte de coupelle composée de trois pentagones autour d'un sommet. On peut alors ajouter un autre pentagone sur un des côtés (figure 43), et ainsi de suite.

> Est-il possible de continuer l'assemblage, de manière à avoir trois pentagones en chaque sommet ?

Les élèves ajustent les pentagones en tenant compte de la consigne. L'assemblage réalisé semble se refermer ; les élèves construisent en fait un solide dont toutes les faces sont des pentagones réguliers, qui se réunissent par trois autour de chaque sommet. Ce solide existe effectivement.

Le professeur demande aux élèves de décrire leur construction.

- « Ce n'est pas un pavage car on ne travaille plus dans le plan, mais dans l'espace. »
- « C'est un volume, un solide. »
- « Il a des faces, des arêtes et des sommets. »
- « Toutes ses faces sont identiques, ce sont des pentagones réguliers. »
- ...

Le professeur leur propose d'affiner leur description par une analyse précise des caractéristiques de ce solide. Il leur demande tout d'abord d'en compter les faces : il y en a douze. Il leur demande s'ils se souviennent du nom du polygone à douze côtés : le dodécagone. Il leur explique que le préfixe dodéca vient du grec *δεκα-δὺο* qui signifie douze. Il est alors naturel de l'utiliser pour

nommer le solide étudié. Le professeur explique aux élèves que ce solide est particulier. En effet, il est composé de faces identiques qui sont des polygones réguliers, présentes en même nombre autour de chaque sommet. On appelle ce genre de solide un *polyèdre*[3] régulier. Celui-ci sera donc le *dodécaèdre* régulier (figures 44 et 45).

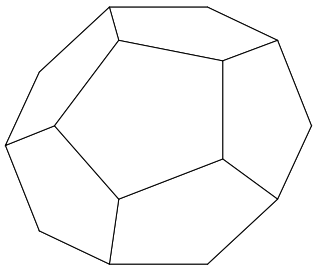


Fig. 44

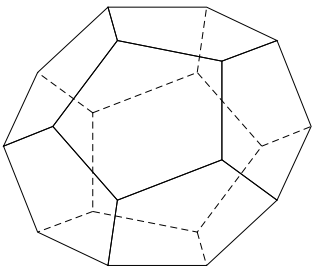


Fig. 45

Afin de poursuivre l'analyse, le professeur propose aux élèves de déterminer le nombre d'arêtes et de sommets du dodécaèdre. Pour cela, ils peuvent développer une stratégie de comptage afin de faciliter le calcul et d'être sûr de ne pas en oublier.

Pour compter le nombre de sommets : on sait que chaque face du dodécaèdre contient 5 sommets (figure 46) et il y a 12 faces. On obtient donc $12 \times 5 = 60$ sommets. Mais chaque sommet appartient à 3 faces (figure 47), nous en avons alors compté trois fois trop. Il faut donc diviser 60 par 3, ce qui nous fait 20 sommets.

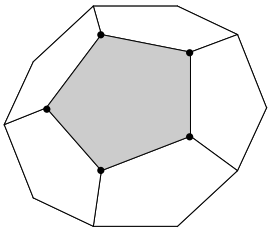


Fig. 46

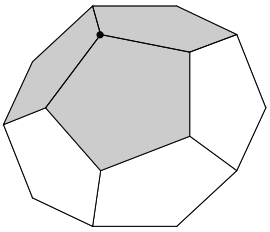


Fig. 47

Pour compter le nombre d'arêtes : par le même raisonnement, en chaque face, il y a 5 arêtes (figure 48), cela fait donc à nouveau 60 arêtes. Mais chaque arête est comptée deux fois car elle appartient à 2 faces (figure 49). On divise donc 60 par 2 et on obtient 30 arêtes.

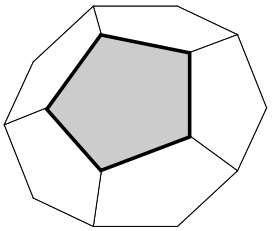


Fig. 48

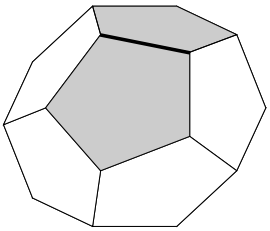


Fig. 49

[3]Polyèdre vient du grec *polis* ($\pi o \lambda \acute{\upsilon} \varsigma$) signifiant nombreux et *hedra* ($^{\varsigma}\acute{\varepsilon}\delta \rho \alpha$) signifiant base.

On peut également déterminer le nombre d'arêtes en partant du nombre de sommets, plutôt que du nombre de faces. On sait qu'il y a 20 sommets. De chaque sommet partent 3 arêtes (figure 50), ce qui fait 60 arêtes. Or, les arêtes ont été comptées deux fois car celle qui part de A vers B est la même que celle qui part de B vers A (figure 51). On divise donc 60 par 2, ce qui nous donne bien 30 arêtes.

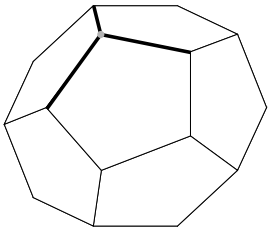


Fig. 50

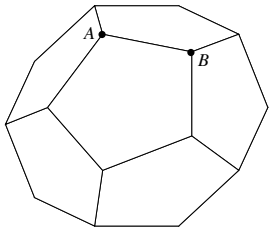


Fig. 51

Récapitulons : Le dodécaèdre a 12 faces (qui sont des pentagones), 20 sommets et 30 arêtes.

Remarque. – On peut également construire le dodécaèdre régulier en assemblant deux moitiés de celui-ci, comme le montre la figure 52. Chaque moitié est facilement obtenue en assemblant cinq pentagones tout autour d'une « base ».

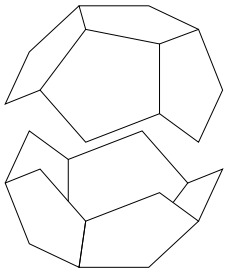


Fig. 52

Essayons de déterminer combien il existe de polyèdres réguliers, à l'aide de la méthode qui vient d'être mise au point.

Pour une meilleure systématisation de l'activité, le professeur propose aux élèves de commencer par utiliser des triangles équilatéraux, et d'envisager d'en disposer un certain nombre, le plus petit possible, en chaque sommet du futur solide. Les élèves se rendent vite compte qu'on ne peut obtenir un volume en n'ayant qu'un seul polygone en chaque sommet, ni même en n'en ayant que deux. Il faut donc minimum trois faces pour obtenir un sommet.

En disposant trois triangles équilatéraux autour d'un sommet, les élèves obtiennent une pyramide, dont ils n'ont plus qu'à refermer la base. Ce qui donne le polyèdre régulier ci-dessous (figures 53 et 54).

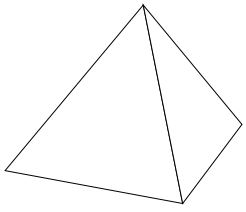


Fig. 53

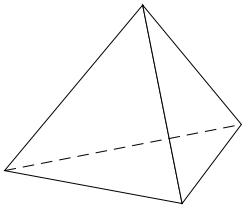


Fig. 54

On l'appelle *tétraèdre* régulier car il a 4 bases (le préfixe tétra vient du grec $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha$ qui signifie quatre). Le tétraèdre régulier possède 4 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 4 sommets et 6 arêtes.

Afin d'être systématique, le professeur demande aux élèves de réaliser, si possible, la construction suivante, en disposant non pas trois mais quatre triangles autour d'un sommet. Les élèves obtiennent à nouveau le « toit » d'une pyramide, à base carrée cette fois. En complétant les sommets afin qu'ils soient tous composés de quatres triangles équilatéraux, ils obtiennent un autre polyèdre régulier, qui a huit faces (figures 55 et 56). On l'appellera donc l'*octaèdre* régulier (du grec $\text{'}o\kappa\tau\acute{\alpha}$ qui signifie huit).

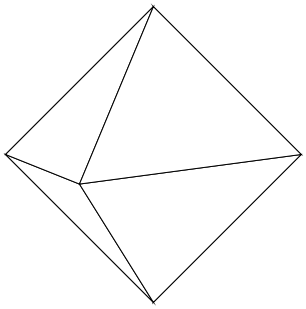


Fig. 55

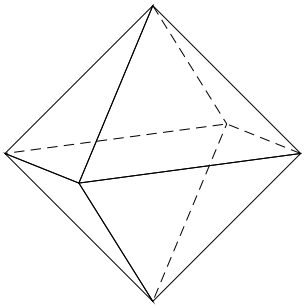


Fig. 56

L'octaèdre régulier possède 8 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 6 sommets et 12 arêtes.

En suivant la même démarche, les élèves assemblent 5 triangles équilatéraux autour de chaque sommet. Cette construction est plus fastidieuse, le professeur devra donc être bien attentif et guidera les élèves qui s'embrouillent. Une fois réussie, la construction donne lieu à un quatrième solide (figures 57 et 58). Celui-ci est constitué de 20 faces, on l'appellera donc *icosaèdre* régulier (le préfixe icosa vient du grec $\varepsilon\text{'}\acute{\iota}\kappa o\sigma\iota$ qui signifie vingt).

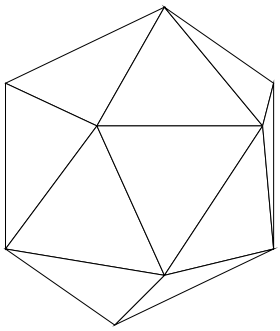


Fig. 57

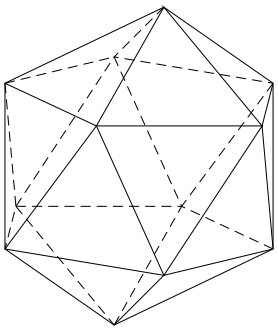


Fig. 58

Pour dénombrer les sommets et arêtes, il est à nouveau nécessaire de passer par une stratégie numérique car, vu la complexité du solide, il est assez difficile de les compter « à vue ».

Pour les sommets : chaque face possède 3 sommets (figure 59), ce qui donne $3 \times 20 = 60$ sommets. Or chaque sommet est entouré de 5 faces (figure 60), il faut donc diviser 60 par 5. On a donc 12 sommets.

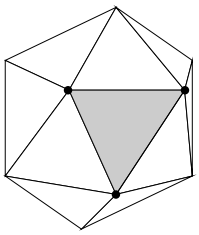


Fig. 59

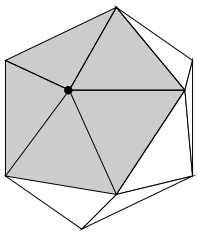


Fig. 60

Pour les arêtes : chaque face possède 3 arêtes (figure 61), ce qui fait à nouveau 60 arêtes. Mais chaque arête est comptée deux fois puisqu'elle est commune à deux faces (figure 62). On a donc 30 arêtes.

On peut également compter le nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets. On sait qu'il y a 12 sommets, et qu'en chaque sommet il y a 5 arêtes (figure 63). Cela fait donc 60 arêtes. Or, chaque arête est comptée deux fois, comme expliqué pour le cas du dodécaèdre (figure 51). On obtient donc bien 30 arêtes.

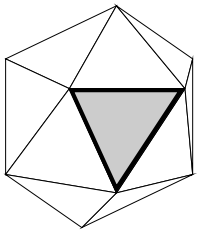


Fig. 61

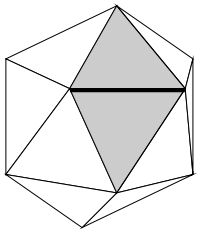


Fig. 62

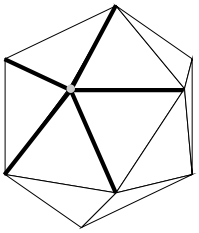


Fig. 63

L'icosaèdre régulier possède 20 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 12 sommets, et 30 arêtes.

Suivant la logique de l'activité, les élèves essaient de réaliser le prochain solide en assemblant 6 triangles équilatéraux en chaque sommet. Ils se rendent rapidement compte qu'ils retrouvent le pavage régulier de triangles. Ils essaient alors avec 7 triangles, mais ne peuvent y arriver car ils se superposent. On a épuisé toutes les possibilités avec des faces triangulaires. Le professeur propose alors aux élèves d'essayer avec le « polygone suivant », le carré.

Ils assemblent donc trois carrés en chaque sommet et réalisent le polyèdre régulier le plus connu, c'est le *cube* (figures 64 et 65).

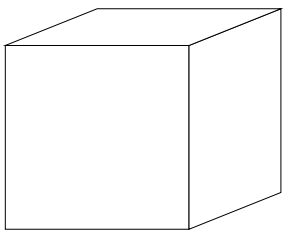


Fig. 64

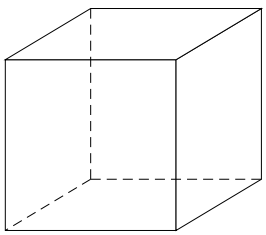


Fig. 65

Le cube possède 6 faces (qui sont des carrés), 8 sommets et 12 arêtes.

Essayer de disposer quatre carrés en chaque sommet mène au pavage régulier. Les élèves n'auront sans doute pas besoin de vérifier que la construction est impossible avec 5 carrés, car la superposition est immédiate. Il n'y a donc qu'un seul polyèdre régulier composé de carrés.

Pour poursuivre la démarche, les élèves doivent utiliser maintenant des pentagones. Or, le polyèdre régulier constitué par l'assemblage de trois pentagones en chaque sommet a déjà été découvert, tout au début de l'activité. Il s'agissait du dodécaèdre régulier. Ils essaient alors d'assembler quatre pentagones, mais la construction est impossible car les polygones se superposent. Ils tentent alors avec des hexagones, et retrouvent à nouveau le pavage régulier. Ils peuvent encore essayer d'utiliser des heptagones, mais il n'est même pas possible d'en disposer trois en chaque sommet sans qu'ils se superposent. À partir de ce moment, il est inutile de continuer, car les amplitudes des angles intérieurs des polygones réguliers augmentent avec le nombre de côtés. Il y aura donc toujours une superposition de trois polygones, à partir de l'heptagone.

On récapitule alors les résultats des constructions.

On a construit cinq polyèdres réguliers[4] qui sont : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre, et nous avons expliqué pourquoi il est impossible d'en trouver d'autres.

N'est-il pas impressionnant de ne trouver que cinq polyèdres réguliers, alors qu'il y a une infinité de polygones réguliers ?

3.2 Le *Timée* de Platon

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La fiche 38, à la page 359.

Comment s'y prendre ?

Le professeur annonce aux élèves que l'on va lire un texte, extrait du *Timée* [118], écrit par Platon (figure 66) au quatrième siècle avant J.-C., qui parle de l'existence de seulement cinq polyèdres réguliers.



Fig. 66

Le tout début du passage du *Timée* relatif aux polyèdres n'est guère simple à comprendre. Platon y décrit la construction des quatre premières espèces à partir de triangles ; il s'agit du tétraèdre, de l'octaèdre, du cube et de l'icosaèdre. Pour lui, toute face du cube est obtenue en accolant quatre triangles rectangles isocèles. Il ajoute alors « Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il a dessiné l'arrangement final. » Il fait ici allusion au dodécaèdre, qui est la cinquième et dernière « combinaison », affirme-t-il.

Dans la suite du texte, Platon associe les éléments (feu, eau, terre, air) aux quatre premières espèces qu'il a construites. C'est cette partie du texte qu'on va lire en classe. Le professeur distribue la fiche 38 qui contient l'extrait en question, ainsi que la consigne suivante.

[4]Les développements des cinq polyèdres réguliers sont repris sur les fiches 33 à 37, aux pages 354 à 358. Remarquons que les développements de quatre des cinq polyèdres réguliers (tous sauf celui du dodécaèdre) sont des parties d'un pavage régulier.

Lis attentivement le texte. Quelle association le philosophe fait-il entre les quatre premières espèces de polyèdres et les quatre éléments ?

Les élèves lisent le texte seuls. Ils essaient d'en comprendre les éléments importants. Voici une liste non exhaustive de ce qui peut apparaître lors de cette analyse. Nous donnons ci-dessous une présentation sur deux colonnes. Celle de gauche reprend des parties du texte de Platon, et celle de droite propose une explication en langage plus actuel.

Et les espèces qui viennent de naître par la vertu de notre raisonnement, divisons-les en feu, terre, eau et air.	On peut associer les quatres polyèdres réguliers découverts par cette démarche aux quatres éléments : feu, terre, eau et air.
À la terre attribuons certes la figure cubique. Car la terre est la plus difficile à mouvoir des quatre espèces et c'est de tous les corps le plus tenace. Et il est très nécessaire que ce qui a de telles propriétés ait reçu, en naissant, les bases les plus solides. [...]	Le cube est associé à la terre car c'est le polyèdre régulier le plus stable.
De même en attribuant à l'eau la figure la moins mobile, au feu la plus mobile, et la figure intermédiaire à l'air. Et le corps le plus petit au feu, le plus grand à l'eau, l'intermédiaire à l'air. Et le plus aigu au feu, le second par ce caractère à l'air, et le troisième à l'eau.	On associera le feu au polyèdre respectant le mieux trois critères, ensuite, en deuxième position, l'air et enfin l'eau. On tiendra compte du critère de la mobilité, de celui de la petitesse, et de l'acuité.
Ainsi, entre toutes ces figures, celle qui a les bases les plus petites doit avoir forcément la nature la plus mobile : c'est toujours la plus coupante, la plus aiguë de toutes, et en outre la plus légère, puisqu'elle est composée du plus petit nombre des mêmes parties. Et la seconde doit tenir le second rang en ce qui touche ces mêmes propriétés, et la troisième, le troisième rang.	Le solide qui sera le plus mobile, sera également le plus petit et le plus aigu.
En conséquence, à la fois selon la droite logique et selon la vraisemblance, la figure solide de la pyramide est l'élément et le germe du feu ; la seconde selon l'ordre de la naissance, disons que c'est l'élément de l'air et la troisième, celui de l'eau.	Selon ce principe, le feu est associé au tétraèdre, l'air à l'octaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

Le professeur fait remarquer aux élèves que Platon ne parle ici que des quatres premiers polyèdres réguliers et omet donc le dodécaèdre, mais on y trouve une allusion ailleurs dans le texte.

Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.	Le dernier polyèdre est associé au monde. C'est le dodécaèdre.

Chapitre 11

Frises ornementales et groupes

« Les élèves doivent avoir toutes les occasions de se familiariser avec un matériel géométrique riche, d'acquérir une connaissance sensorielle multiple : visuelle, tactile, rythmique. »

P. Libois

Préambule

Les frises et les pavages font partie de notre environnement culturel. On en trouve dans toutes les civilisations. De tous temps, les hommes ont mis beaucoup d'imagination dans la création de motifs et la structuration des surfaces au moyen de figures géométriques qui se répètent ou s'organisent suivant un schéma régulier. Cette recherche procure à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. Pensons aux merveilleux pavages de l'Alhambra à Grenade, aux bandes décorées qui ornent les bords des plats et des vases en céramique un peu partout dans le monde. On trouve des frises dans les galons qui ornent les vêtements, les serviettes de bain, les tentures. Les tissus, les tapis, les papiers peints et les carrelages fournissent, quant à eux, des exemples de surfaces structurées.

Ces motifs géométriques qui se répètent peuvent être soumis à une analyse mathématique qui facilite leur compréhension. De nombreux ouvriers et artisans sont amenés à décoder les symétries des motifs dans l'exercice de leur profession. Que ce soit pour poser un papier peint, recouvrir un fauteuil, exécuter des garnitures de fenêtre, poser un carrelage, ciseler ou peindre une frise, une bonne analyse des structures des dessins est une aide précieuse à la réalisation d'un travail soigné.

L'étude des frises offre des intérêts variés. Pour les élèves des sections professionnelles, le concept est facile d'accès. L'apprentissage aiguise le sens de l'observation tout en présentant un attrait artistique ; la motivation est directement liée au travail dans les ateliers. Les frises se prêtent à la découverte de quelques propriétés de la composition des isométries et à un travail de classification. Pour les élèves de l'enseignement général, elles donnent accès à la structure de groupe, dans un contexte riche de sens.

C'est dans cette optique que nous proposons une séquence d'apprentissage qui peut être utilisée à deux niveaux.

Il peut s'agir d'abord d'une suite d'activités de découverte destinée aux élèves du premier degré

des humanités générales et technologiques, ou à des élèves de l'enseignement professionnel. Elle est conçue pour amener ces élèves à reconnaître des translations, des symétries axiales et des symétries centrales (rotations d'un demi-tour) et leur fournir des outils pour analyser les structures des dessins géométriques. Dans ce cas il n'y a pas de prérequis, mais le travail devra être complété par une synthèse reprenant les caractéristiques de ces isométries, ainsi que les étapes de la construction de l'image d'une figure par chacune d'elles.

La séquence d'apprentissage débute par une activité d'observation et de création (section 1) qui met en place une série d'intuitions. Tout en produisant des frises à partir d'un matériel simple, les élèves sont amenés à associer un mouvement à l'isométrie du plan correspondante, à observer et identifier l'image d'une figure par une translation, une symétrie et une rotation. L'activité se poursuit par la découverte des types de frises (section 2) à partir des isométries qui les conservent globalement et se termine par l'élaboration d'une méthode de classement (section 3).

On peut aussi proposer ces activités à des élèves du second degré de l'enseignement général, qui ont déjà rencontré les isométries. Dans ce cas, notre but est de plonger les élèves dans le contexte des isométries du plan, par le biais d'une approche intuitive, avec l'objectif de les amener à découvrir la structure de groupe à partir des groupes de frises (section 4).

Il nous semble qu'il y a deux écueils à éviter. Le premier est de se limiter à des observations et à des productions artisanales, le second de se placer d'emblée dans un contexte théorique quelque peu rebutant. Nous tentons, dans cette suite d'activités, de proposer une démarche qui, à partir de manipulations très simples, accessibles à tous, amène progressivement les élèves à organiser des acquis dans une construction théorique.

1 Créer des frises

De quoi s'agit-il ?

Observer et prolonger des dessins de frises. En imaginer et en produire d'autres à partir d'un motif initial.

Enjeux

Aborder les translations, les symétries axiales, les rotations et les symétries centrales.

Associer un mouvement à l'isométrie du plan correspondante.

Observer l'image d'une figure par une isométrie et la reconnaître.

Compétences transversales

Laisser s'exprimer son imagination dans des pratiques créatives.

Agir et interagir sur des matériels divers (figures).

Compétences disciplinaires

Reconnaître, comparer des figures, les différencier et les classer sur base des éléments de symétrie.

Dans un contexte de reproduction de dessins, relever la présence de régularités. Reconnaître et caractériser une translation, une symétrie axiale et une rotation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des frises en tous genres. On en trouve dans les livres d'art, les magazines de décoration ou de mode.

Les fiches 39 à 46, en annexe aux pages 360 à 367.

Des photocopies sur transparent des fiches 39 et 41.

Du papier quadrillé et du matériel de dessin, des épingles.

Éventuellement un logiciel de dessin comme *Apprenti Géomètre* ou *Cabri-Géomètre*.

Prérequis

Les translations, les symétries, les rotations de figures dans le plan.

Si l'activité vise à la découverte des isométries, celles-ci seront définies au fur et à mesure.

1.1 Frises et motifs

Comment s'y prendre ?

Le professeur montre aux élèves quelques frises pour expliquer de quoi il s'agit, frises de papier peint, galons de tissu, photos, illustrations extraites d'un livre d'art...

Cette première prise de contact avec les frises devrait mettre l'accent sur l'aspect multiculturel, mais aussi l'aspect esthétique de ces bandes décorées. Bien sûr, des frises choisies exclusivement pour leurs qualités artistiques ne sont pas toujours très faciles à analyser, mais il nous semble important de valoriser d'abord le contenu esthétique.

Par exemple, l'art hispano-musulman qui s'est développé en Andalousie à partir du IXe siècle s'est largement inspiré de motifs géométriques. Les deux frises superposées de la figure 1 ornent les murs de l'Alcazar de Séville, celle de la figure 2 se trouve au palais de l'Alhambra de Grenade.



Fig. 1



Fig. 2

Une première phase d'observation révèle sans trop de peine qu'une frise est un décor sur bande

et que ce décor est obtenu par reproduction d'un « motif de base » qui se répète régulièrement.

Pour illustrer ce que nous désignons par *motif de base*, reprenons l'une des frises de Séville (figure 3), et demandons aux élèves d'isoler un motif qui se répète tout au long de la bande.



Fig. 3

Les élèves désigneront sans doute le motif noir sur fond blanc (figure 4), ou le motif blanc sur fond noir (figure 5). Nous remarquons ainsi que le motif de base n'est pas unique ; on pourrait en imaginer une infinité d'autres, comme celui de la figure 6, par exemple. Les élèves s'en tiendront probablement aux deux premiers, il n'est certainement pas opportun d'attirer leur attention sur les autres possibilités s'ils ne les évoquent pas eux-mêmes.



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6

Le motif de base est parfois plus compliqué que ce qu'on perçoit à première vue. Ainsi, pour la frise de l'Alhambra, si on observe attentivement les dessins à l'intérieur d'un motif en zig-zag, on constate qu'il y en a de trois types, qui se répètent régulièrement et dans le même ordre. Il en faut donc trois pour constituer un motif de base, comme dans les figures 7, 8 et 9.

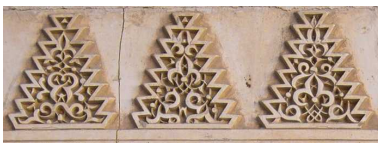


Fig. 7



Fig. 8



Fig. 9

C'est l'envie de mieux comprendre les frises pour les recopier ou en construire d'autres qui motivera le recours à une analyse mathématique de leur structure. D'autres frises, plus simples, plus faciles à décoder sont alors proposées pour faciliter ce travail d'analyse.

1.2 D'une goutte à l'autre

Le vocabulaire utilisé au début de l'activité est proche du langage quotidien, les termes spécifiques seront précisés en cours de travail au fur et à mesure des besoins.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève reçoit la fiche 39, comportant des frises de gouttes comme celle de la figure 10, ainsi qu'une photocopie de cette fiche sur transparent. La fiche et le transparent sont découpés en bandelettes ne comportant qu'une seule frise. Dans un premier temps, les élèves travaillent avec une seule bandelette de chaque type (papier et transparent). On leur demande de déposer la frise transparente sur la frise de papier de telle sorte que les deux frises de huit gouttes se superposent exactement.

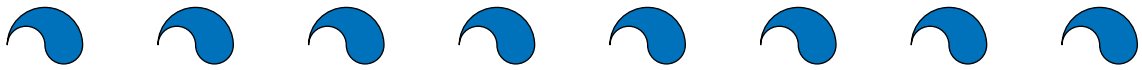


Fig. 10

À partir de la position où la frise transparente est superposée exactement à la frise de papier, quels mouvements du transparent amènent une goutte de celui-ci sur une goutte de la frise de papier ?

On voit que si on fait glisser le transparent dans la direction de la bande, vers la gauche ou vers la droite, il est possible de faire coïncider une goutte du transparent avec une goutte de la frise de papier. Par exemple le mouvement vers la droite, représenté par la flèche qui détermine la direction, le sens et la longueur du déplacement, amène la première goutte du transparent sur la deuxième goutte de la feuille. Un tel déplacement est une *translation* déterminée par un *vecteur* (la flèche).



Fig. 11

D'autres translations répondent à la question. La figure 12 montre les vecteurs associés à quelques-unes d'entre elles.

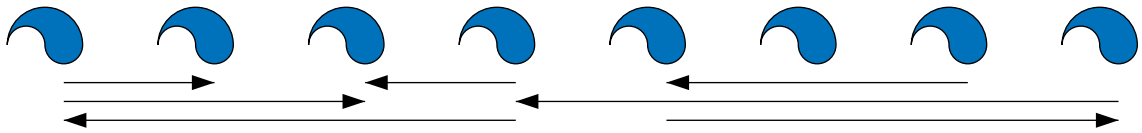


Fig. 12

Après avoir exécuté l'un ou l'autre de ces mouvements de translation, les élèves ont sous les yeux une frise de neuf, dix, onze, ... ou quinze gouttes. On convient de dire qu'il s'agit de la même frise, qui a été prolongée.

La translation qui amène une goutte sur la suivante, représentée à la figure 11, est la translation la plus courte qui amène une goutte de la frise sur une autre. Elle permet, si on la répète, de prolonger la frise vers la droite, chaque motif ajouté étant obtenu par translation du précédent. La translation de même longueur en sens inverse prolonge la frise vers la gauche.

L'activité se poursuit par des exercices où la consigne donnée aux élèves est de prolonger des frises amorcées, sur du papier quadrillé. Il conviendra de choisir des motifs de base qui peuvent être reproduits facilement à main levée. Des exemples sont proposés en annexe (fiches 43 à 46). Le même type d'exercices peut être proposé sur du papier pointé triangulaire, ou encore exécuté au moyen d'un logiciel de dessin.

Ce travail est destiné à amener progressivement les élèves à la notion de figure illimitée. Dans un premier temps, ils diront qu'une frise peut être prolongée aussi loin que l'on veut, vers la droite

et vers la gauche et percevront sans doute l'analogie à cet égard avec l'ensemble des nombres entiers. L'étude des frises offre donc l'opportunité d'aborder la notion d'infini dans un contexte géométrique, en plus de l'approche numérique.

Il importe de proposer des frises à prolonger dans les deux sens (figure 13). Pour chacune d'elles, on demande aux élèves de déterminer un motif de base et la translation la plus courte qui permet de construire la frise.

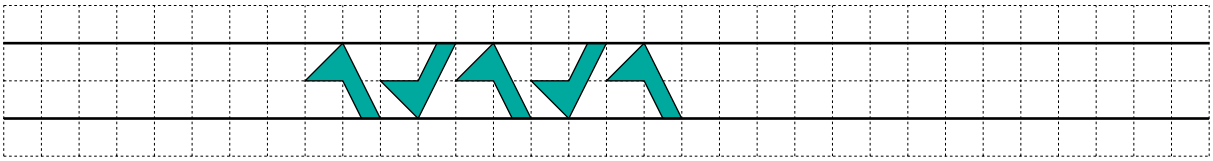


Fig. 13

Les figures 14 et 15 illustrent deux façons de percevoir un motif de base et les translations qui permettent de prolonger la frise dans les deux sens.

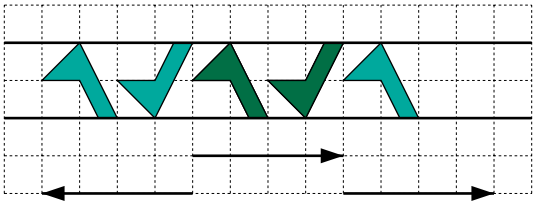


Fig. 14

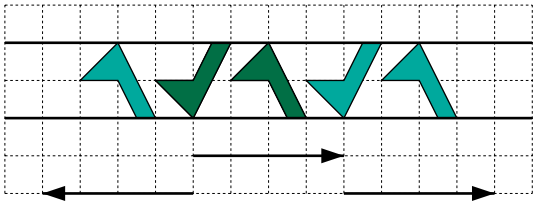


Fig. 15

Cette démarche conduit à l'élaboration progressive de définitions intuitives comme celles-ci.

*Une **frise** est une bande décorée dans laquelle un motif se répète régulièrement de telle sorte que chaque motif est l'image du précédent par une translation, toujours la même. Un motif qui permet de construire la frise de cette manière par la translation la plus courte, est appelé **motif de base** de la frise.*

1.3 La goutte dans tous ses états

Comment s'y prendre ?

En déplaçant le transparent par d'autres translations, créer de nouvelles frises et déterminer un motif de base pour chacune d'elles.

Des translations dans la direction de la bande produiront des frises comme celles des figures 16 et 17, par exemple.



Fig. 16



Fig. 17

On voit que les frises des figures 10 et 16 ont un même motif de base, la goutte de la figure 18. Elles diffèrent par la longueur de la translation qui permet de passer d'une goutte à la suivante. La frise de la figure 17 a un motif de base plus complexe, formé de deux gouttes partiellement superposées (figure 19).



Fig. 18



Fig. 19

Quant à la frise de la figure 20, elle est obtenue par la translation du transparent dans une direction autre que celle de la bande initiale.

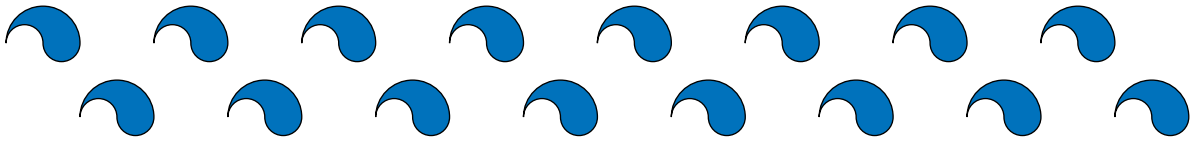


Fig. 20

Pour cette dernière frise, les élèves s'en tiendront probablement aux motifs de base formés de deux gouttes décalées, illustrés par les figures 21 et 22, mais on pourrait en imaginer d'autres, comme celui de la figure 23, par exemple.

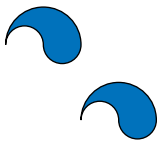


Fig. 21

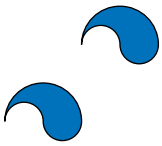


Fig. 22



Fig. 23

À partir de la frise de la figure 10 et de sa copie sur transparent, et en n'utilisant que des translations, nous avons fabriqué d'autres frises dont le *motif de base* est plus complexe, composé de plusieurs gouttes (deux dans les exemples proposés jusqu'ici).

La suite de l'activité a pour but d'explorer cette possibilité à partir d'autres mouvements des bandelettes de transparent.

Le professeur montre les deux frises ci-dessous.

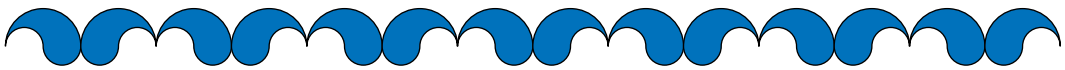


Fig. 24

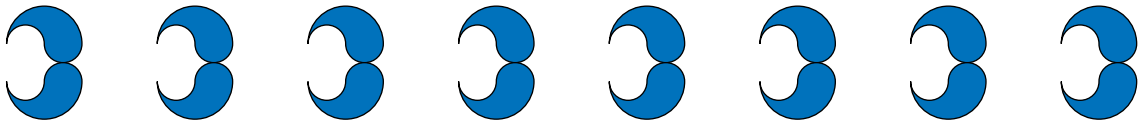


Fig. 25

Isoler un motif de base pour chacune des frises des figures 24 et 25.
Reproduire ces deux frises à l'aide des frises de papier et des bandelettes de transparent.
En imaginer d'autres et, pour chacune d'elles, identifier un motif de base.
Décrire à chaque fois le mouvement qui a été appliqué au(x) transparent(s) pour obtenir le résultat.

Retenons les motifs des figures 26 ou 27 pour la première de ces deux frises, et celui de la figure 28 pour la seconde. Chacun de ces motifs est composé de deux gouttes *symétriques*.

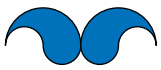


Fig. 26



Fig. 27



Fig. 28

Il est assez clair que ces deux frises n'ont pu être obtenues par une translation de la frise transparente. On y voit apparaître des gouttes « dans l'autre sens », qui ne sont pas superposables aux gouttes de départ par simple glissement. Cette observation amène l'idée de retourner le transparent.

Le professeur conseille alors aux élèves de disposer toutes les bandelettes transparentes de manière à pouvoir les superposer aux frises de la fiche 39, puis de coller des pastilles d'une même couleur sur la face qui se trouve alors au-dessus, et enfin de coller des pastilles d'une autre couleur sur l'autre face. Ces pastilles serviront de témoin pour indiquer si la bandelette transparente a été retournée ou non lors des manipulations.

Lorsque la frise est déposée dans la position représentée à la figure 29, convenons d'appeler la direction de la bande de papier *direction horizontale*, et la direction perpendiculaire dans le plan de la feuille *direction verticale*.

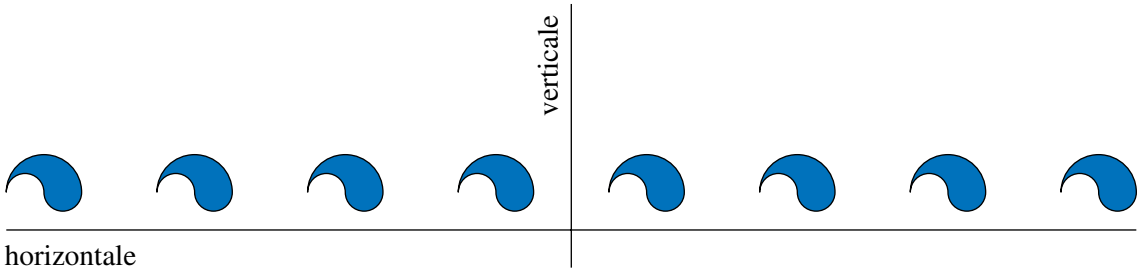


Fig. 29

Il semble bien que la frise de la figure 24 peut être obtenue en intercalant entre les gouttes de la

frise initiale des gouttes « retournées ». Les élèves retournent le transparent, puis le déposent sur la frise de papier, en ajustant sa position, pour composer le dessin demandé. S'ils procèdent par essais et erreurs, c'est la couleur de la pastille témoin qui leur indiquera que le transparent a été retourné. Il leur restera alors à associer au mouvement de retournement l'isométrie qui lui correspond : dans ce cas, une *symétrie d'axe vertical*.

Le motif de base de la frise de la figure 25 est lui aussi composé de deux gouttes non superposables par translation. Cette frise est obtenue en retournant le transparent dans un mouvement qui correspond à une *symétrie d'axe horizontal*, mais suivant la position de cet axe, on peut obtenir quelques variantes (figures 30 et 31 par exemple).

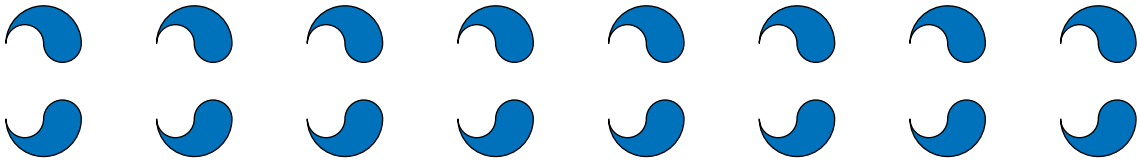


Fig. 30

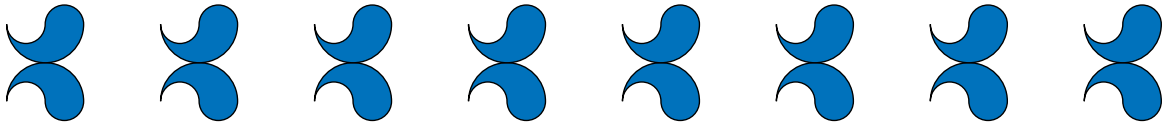


Fig. 31

Si on translate le transparent, dans la direction horizontale, après une symétrie d'axe horizontal, on peut encore obtenir la frise de la figure 32.

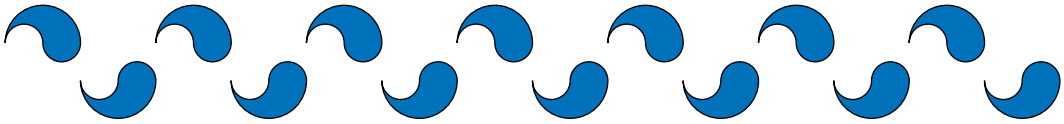


Fig. 32

Pour faire voir qu'on peut obtenir d'autres frises par un mouvement de rotation particulier, le professeur propose aux élèves d'utiliser une épingle. Après avoir superposé la frise et sa copie transparente, de telle manière que les motifs coïncident exactement, on plante l'épingle dans les deux épaisseurs, puis on fait tourner la bande transparente d'un demi-tour. On obtient une frise comme celles des figures 33 ou 34, selon la position de l'épingle. L'isométrie correspondant à ce mouvement est une *rotation d'un demi-tour* ou *symétrie centrale*.

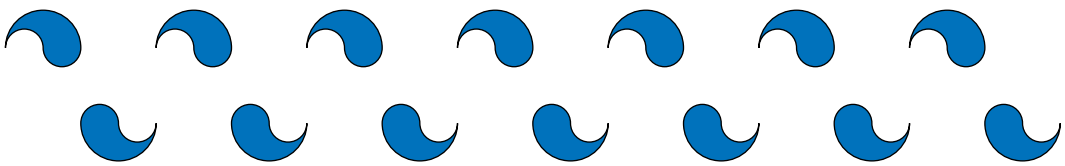


Fig. 33



Fig. 34

Dès que les élèves ont bien perçu la différence entre le demi-tour et le retournement, ils peuvent se dispenser du recours à l'épingle. En ajustant le transparent après le demi-tour, ils peuvent encore obtenir la frise de la figure 35.



Fig. 35

Ils produiront certainement encore beaucoup d'autres frises, éventuellement en utilisant plusieurs transparents pour compléter la bande initiale, et en combinant plusieurs mouvements. Les motifs de base sont de plus en plus complexes et comportent davantage de gouttes. Nous en reproduisons quelques exemples à la fiche 40.

À la fin de cette phase de l'activité, le professeur procède à une mise en commun des réalisations des élèves. Après avoir éliminé les frises qui font double emploi, il demande d'assembler avec du papier collant les différentes bandelettes qui composent les frises sélectionnées et de noter pour chacune d'elles les mouvements utilisés et le nom des isométries correspondantes. Le document qui laissera une trace dans le cahier sera ensuite réalisé par photocopie.

1.4 Les « bons mouvements »

Comment s'y prendre ?

Le matériel mis à la disposition des élèves a ses limites. Il ne laisse pas une totale liberté de création. Il permet cependant d'obtenir une grande variété de frises en un minimum de temps, et il attire l'attention sur les différents mouvements qui amènent une bande horizontale sur une bande horizontale. La question suivante vise à s'assurer que les élèves ont bien identifié ces mouvements.

> À partir d'une position où la frise transparente est superposée exactement à la frise de papier, on a créé de nouvelles frises par des mouvements du transparent. Ces mouvements amènent la frise transparente dans une position où elle vient compléter la frise initiale pour composer une nouvelle frise. Quels sont ces mouvements ?

Les élèves devraient être capables, à ce stade de l'activité, d'établir la liste de ces mouvements « privilégiés » et des isométries correspondantes :

1. des translations,
2. des symétries d'axe horizontal (c'est-à-dire parallèle à la direction de la frise),
3. des symétries d'axe vertical (c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de la frise),
4. des symétries centrales ou rotations d'un demi-tour.

On peut distinguer les *retournements*, qui correspondent à un retournement du transparent, et les *déplacements*. Les translations et les demi-tours sont des déplacements, les symétries par rapport à un axe sont des retournements.

Plusieurs frises ont été obtenues par une succession de mouvements effectués l'un après l'autre. Par exemple, la frise de la figure 32 est réalisée en retournant le transparent dans un mouvement qui correspond à une symétrie d'axe horizontal, puis en le translatant dans la direction de cet axe. On dit que le mouvement du transparent est la *composée* d'une symétrie d'axe horizontal et d'une translation. Il s'agit d'un retournement, puisque le transparent a été retourné une fois.

Les pastilles de couleurs différentes collées sur les deux faces des transparents permettent de découvrir ces propriétés de la composition :

- la composée de deux déplacements est un déplacement,
- la composée d'un déplacement et d'un retournement est un retournement,
- la composée de deux retournements est un déplacement.

On en déduit que

- la composée d'un nombre pair de retournements est un déplacement,
- la composée d'un nombre impair de retournements est un retournement.

Ce travail de synthèse sur les mouvements « privilégiés » est destiné à préparer l'étude des isométries qui appliquent une frise sur elle-même.

Autres mouvements

Les élèves auront peut-être remarqué que les symétries qui viennent d'être répertoriées correspondent aux symétries des motifs de base des frises qui ont été créées par ces mouvements. Ils pourraient alors imaginer de fabriquer de nouveaux motifs de base à partir du motif initial (la goutte) en utilisant d'autres mouvements, par exemple des rotations. La figure 36 montre une frise dont un motif de base est constitué de quatre gouttes. Les deuxième, troisième et quatrième gouttes sont les images de la goutte initiale par des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour. La question suivante vise à montrer que les procédures qui ont été mises en œuvre avec les mouvements « privilégiés » ne fonctionnent plus avec les rotations quelconques. C'est une façon d'amener intuitivement l'idée qu'on peut percevoir dans un motif des isométries qui ne conservent pas la frise toute entière.

Peut-on obtenir la frise de la figure 36 au moyen du même matériel ? Pourquoi ?

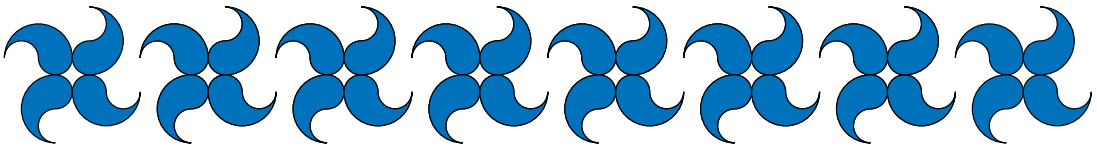


Fig. 36

Voici une procédure qui pourrait être imaginée :

– on superpose trois tranparents à la frise initiale,
– on plante une épingle en bas et à droite de la quatrième goutte (figure 37),
– on fait tourner les transparents respectivement d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour, dans le même sens.



Fig. 37

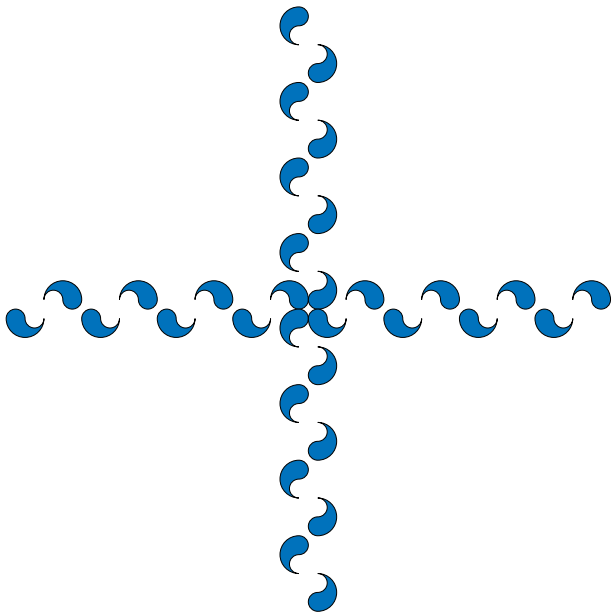


Fig. 38

La figure 38 illustre le résultat obtenu. Le motif de base de la frise de la figure 36 a bien été reconstitué, mais la frise basée sur ce motif n'apparaît pas pour autant. L'impossibilité de construire la frise de la figure 36 avec les transparents (utilisés jusqu'ici) résulte du fait qu'une rotation autre que celles d'un nombre entier de demi-tours n'amène pas une bande horizontale sur une bande horizontale. L'expérience qui vient d'être décrite le montre bien. L'exemple concerne les rotations d'un quart et de trois quarts de tour, mais la généralisation aux autres rotations est immédiate.

1.5 De la goutte à la feuille

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue d'autres bandes de papier et de transparent obtenues en découpant la fiche 41 (figure 39).

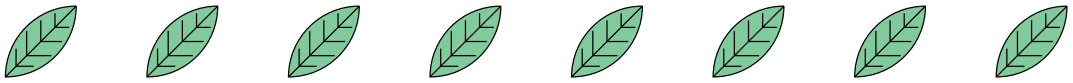


Fig. 39

À l'aide de ce matériel, construire des frises de feuilles en reproduisant des procédures identiques à celles qui ont été mises en œuvre pour fabriquer des frises de gouttes.

Commençons par les modèles les plus simples. Voici des résultats obtenus en retournant le transparent par une symétrie d'axe vertical (figure 40), par une symétrie d'axe horizontal (figure 41), par une symétrie d'axe horizontal suivie d'une translation (figure 42) et par une symétrie centrale ou rotation d'un demi-tour (figure 43).

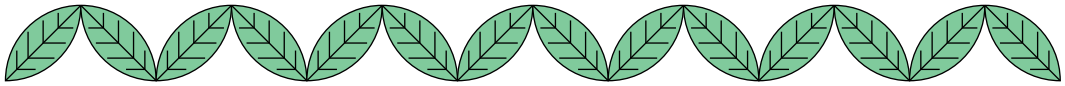


Fig. 40

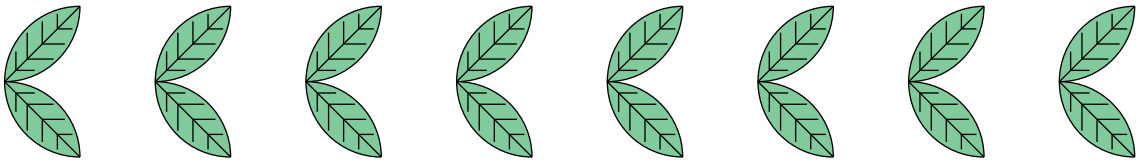


Fig. 41

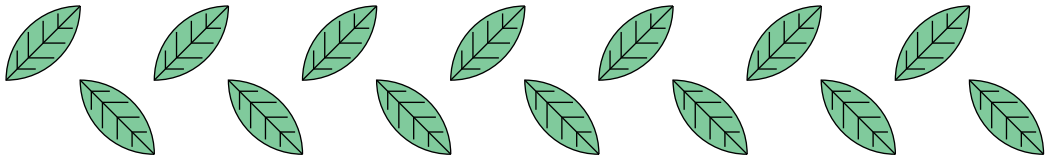


Fig. 42

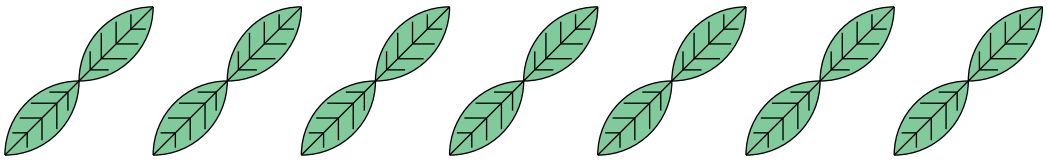


Fig. 43

On observe immédiatement que les frises de feuilles demandent une attention plus soutenue que les frises de gouttes. Seule l'orientation des nervures permet de distinguer la feuille initiale de son image par symétrie centrale, ou encore l'image de la feuille initiale par une symétrie d'axe vertical, de celle par une symétrie d'axe horizontal.

Ainsi, on pourrait confondre la frise de la figure 40 avec celle de la figure 44, obtenue par un retournement du transparent par une symétrie d'axe horizontal suivie d'une translation.

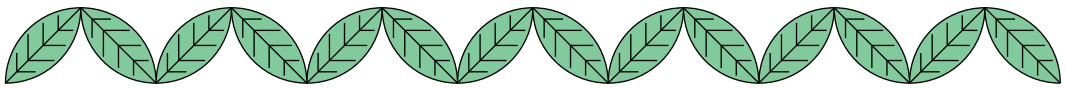


Fig. 44

Le professeur distribue la fiche 40, laisse quelques frises de gouttes (sur papier et sur transparent) à la disposition des élèves, et donne une consigne qui nécessite la mise en œuvre de toute une succession d'observations.

Composer des frises de feuilles par des procédures identiques à celles qui ont servi à construire les frises de gouttes de la fiche 40.

Ce travail se fait en plusieurs étapes :

- identifier à vue le mouvement du transparent qui a permis de réaliser la frise,
- si nécessaire, vérifier le mouvement avec le matériel,
- reproduire le même mouvement avec le transparent de la frise de feuilles.

Les frises ainsi obtenues dépendent de la position des axes et centres de symétrie, et des translations choisies. La fiche 42 illustre un résultat possible.

La comparaison des fiches 40 et 42 montre à nouveau que des procédures qui produisent des frises de gouttes très différentes donnent lieu à des frises de feuilles que seule la présence des nervures permet de distinguer. Les élèves auront sans doute l'intuition que c'est l'asymétrie de la goutte qui rend immédiatement discernables ses images par les différentes symétries.

Cette dernière activité attire aussi l'attention sur la « ressemblance de structure » entre des frises différentes qui ont été composées par des procédures analogues. Les frises des figures 45 et 46 en sont un exemple.

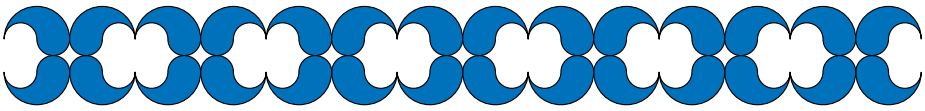


Fig. 45

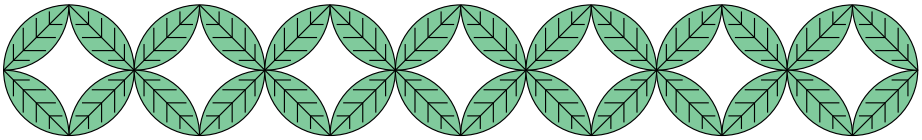


Fig. 46

2 Découvrir les types de frises

De quoi s'agit-il ? Étudier les isométries qui appliquent une frise sur elle-même.

Dégager les sept types de frises et analyser les caractéristiques de chaque type.

Enjeux Concevoir des figures infinies.

Reconnaître les isométries qui laissent invariante une figure, finie ou infinie.

Compétences transversales

Si l'activité est destinée à des élèves du premier degré, on se reporte aux compétences de la section 1. À partir du deuxième degré, le travail

peut être davantage axé sur les justifications et viser à développer les compétences suivantes.

Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre.

Formuler une conjecture, dégager une méthode de travail.

Choisir une procédure adéquate et la mener à son terme.

Produire un dessin qui éclaire ou résume une situation.

Reconnaître une propriété commune à des situations différentes.

Compétences disciplinaires

Connaître les translations, les symétries, les rotations de figures dans le plan.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 47 à 51, en annexe aux pages 368 à 372.

Des photocopies sur transparent de la fiche 49.

Du matériel de dessin.

Éventuellement un logiciel de dessin comme *Apprenti Géomètre* ou *Cabri-Géomètre*.

Prérequis

Les activités de la section 1 ou toute autre activité qui met en place les mêmes intuitions géométriques concernant

- les frises et les motifs de base,
- les translations et les symétries des figures,
- les mouvements qui amènent une bande sur une bande de même direction.

Les axes et les centres de symétrie des figures planes.

2.1 Isométries laissant une figure invariante

Comment s'y prendre ?

Les activités développées dans la section 1 ont fait apparaître une grande variété de frises et de motifs. Cependant, la création de frises de feuilles analogues à des frises de gouttes (page 276) a aussi mis en évidence des « ressemblances de structure » entre des frises dont les motifs de base sont différents mais présentent des symétries analogues.

Le professeur commence par vérifier que les élèves comprennent l'affirmation « une figure est sa propre image par une isométrie ». Il rappelle que, pour qu'une figure soit sa propre image par une isométrie, il faut que tous les points de l'image coïncident avec des points de la figure initiale et réciproquement. Ensuite, il présente quelques figures simples, qui peuvent être des motifs de base des frises déjà rencontrées, et pose la question suivante.

Parmi les figures proposées, désigner celles qui sont leur propre image par

- une symétrie d'axe vertical,
- une symétrie d'axe horizontal,
- une symétrie d'axe horizontal et une symétrie d'axe vertical,
- une symétrie centrale (ou rotation d'un demi-tour),
- une rotation,
- une translation.



Fig. 47



Fig. 48



Fig. 49

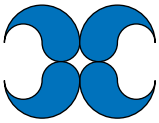


Fig. 50



Fig. 51

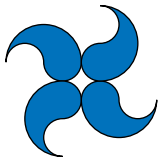


Fig. 52

Après ces mises au point, le professeur peut signaler différentes formulations pour exprimer la même idée. Par exemple, on peut dire que la figure 47

- a un axe de symétrie vertical,
- est symétrique par rapport à un axe vertical,
- est sa propre image par une symétrie d'axe vertical,
- est appliquée sur elle-même par une symétrie d'axe vertical,
- est conservée par une symétrie d'axe vertical,
- est invariante par une symétrie d'axe vertical.

Le vocabulaire sera adapté à l'âge et à la motivation des élèves. La mise en place du concept d'invariance peut être renforcée par des exercices où on demande de compléter une figure de telle manière qu'elle soit sa propre image pour une transformation donnée. La fiche 48 propose un exercice de ce genre.

Remarquons que la figure 49 pose le problème de l'invariance d'une figure par une translation et peut servir à introduire la section suivante.

2.2 Des petites gouttes jusqu'à l'infini

Comment s'y prendre ?

Les frises sont répertoriées en fonction des isométries qui les conservent globalement, et non en fonction des isométries d'un motif de base. Pour effectuer ce travail de classement, il convient tout d'abord de mettre en évidence la nécessité de considérer des frises infinies.

Lorsqu'on a sous les yeux une frise quelconque, ce qui frappe en premier, ce sont les translations : c'est par translation qu'on passe d'un motif à un autre, c'est par translation qu'on prolonge la frise. La question suivante se pose donc assez naturellement.

Existe-t-il une translation qui applique une frise sur elle-même, (par exemple celle de la figure 53) ?



Fig. 53

Les élèves seront probablement d'avis différents. Il est important de les laisser s'exprimer, car ceux qui répondent « oui » ont peut-être déjà l'image mentale de la frise infinie.

La translation qui applique une goutte sur la suivante sera sans doute évoquée.



Fig. 54

Pour bien faire percevoir où est le problème, on rappelle que, pour qu'une frise soit sa propre image par une isométrie, il faut que tous les points de l'image coïncident avec des points de la frise initiale et réciproquement.

Si les élèves en éprouvent le besoin, on les invite à reprendre les frises de gouttes sur papier et sur transparent, déjà utilisées précédemment. La question est alors reformulée en termes plus concrets et décomposée en deux étapes.

Déplaçons le transparent par la translation qui amène une goutte sur la suivante. Toutes les gouttes de la frise de papier sont-elles recouvertes ? Sinon, que faudrait-il faire pour que ce soit le cas ?

En effectuant cette translation, les élèves constatent que la première goutte à gauche de la frise de papier n'est pas recouverte. Pour que toutes les gouttes de la frise soient recouvertes, il faudrait donc ajouter une goutte à gauche sur la frise transparente.

Toutes les gouttes de la frise transparente recouvrent-elles une goutte de la frise de papier ? Sinon, que faudrait-il faire pour que ce soit le cas ?

S'ils portent leur attention sur la droite, les élèves observent que la dernière goutte transparente ne recouvre rien et qu'il faudrait donc ajouter une goutte à droite sur la frise de papier.

La frise ainsi complétée est-elle invariante par la translation t ?

Si on répète l'opération avec le transparent un certain nombre de fois, il faudra ajouter à chaque fois une goutte à gauche sur la frise transparente et une goutte à droite sur la frise de papier. Aucune frise limitée n'est invariante par une translation.

Cependant, la frise peut être prolongée en répétant le motif indéfiniment dans les deux sens. Bien sûr, on ne peut observer que des frises limitées, mais on peut toujours imaginer les frises infinies qui les prolongent. Ce passage de la frise réelle, nécessairement finie, à la frise mathématique idéalisée est difficile pour la plupart des élèves. Concevoir une droite infinie comme extension d'un segment, et un plan infini à partir du rectangle ou du parallélogramme qu'on utilise généralement dans la représentation en perspective, relève du même processus d'abstraction.

Le professeur précise que c'est cette bande infinie qu'il désignera dorénavant par le terme de *frise* et repose la question de la coïncidence d'une frise et de son image par une translation sous une forme plus générale.

Existe-t-il une translation qui applique une frise sur elle-même ?

Une fois acquise la notion de frise infinie, on peut répondre par l'affirmative à cette question.

L'étape suivante consiste à faire sentir aux élèves qu'il y a aussi une infinité de translations qui appliquent la frise sur elle-même.

Combien y a-t-il de translations qui appliquent la frise sur elle-même ?

Le travail effectué devrait permettre d'arriver assez rapidement à la conclusion qu'il y a une infinité de telles translations dans la direction de la bande décorée. Il y a des translations qui vont de gauche à droite et d'autres qui vont de droite à gauche. Les longueurs de ces translations ne sont pas quelconques, ce sont des multiples de la longueur d'une *translation minimale*. Celle-ci est définie comme la plus petite translation qui applique la frise sur elle-même. Il y a une translation minimale dans chaque sens, chacune d'elles amène un motif de base sur l'un des deux motifs adjacents.

En conclusion, il y a une famille infinie de translations qui appliquent la frise sur elle-même ; elles sont de même direction, vont dans les deux sens et leurs longueurs sont des multiples de la longueur d'une translation minimale. On peut considérer que les translations de droite à gauche sont les multiples négatifs de la translation minimale de gauche à droite.

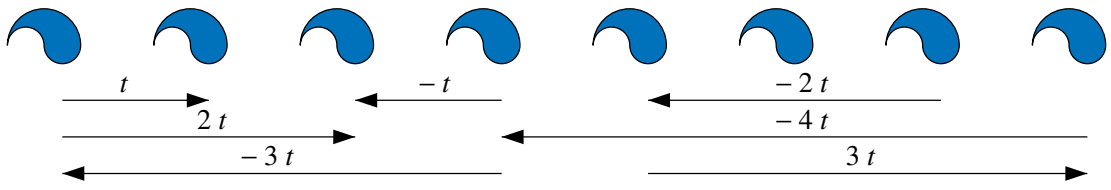


Fig. 55

Ce travail se termine par l'élaboration d'une nouvelle définition.

Une frise est une bande décorée, invariante par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples d'une translation minimale.

Remarque. – La propriété esssentielle d'une frise ornementale est qu'elle est conservée par une certaine *translation minimale*. Cette définition exclut des bandes composées exclusivement de droites parallèles (figure 56). Une telle bande est une figure invariante par translation, mais il n'y a pas de translation non nulle minimale qui la conserve ; la famille des translations qui la laissent invariante est non dénombrable.



Fig. 56

Par contre, les « graduations » ou « échelles » des figures 57 et 58 sont des frises, au sens de la définition précédente, qui peuvent être découvertes par les élèves.



Fig. 57



Fig. 58

2.3 Les sept types de frises

Comment s'y prendre ? Pour amener de manière naturelle les différents types de frises et les faire découvrir par les élèves, une question préliminaire s'avère très utile.

> Quelles sont les isométries qui laissent invariante une « bande de papier » infinie, c'est-à-dire une figure délimitée par deux droites parallèles ?

Le travail effectué à la section 1.4 sur les « mouvements privilégiés » devrait permettre d'établir la liste de ces isométries :

1. des translations dans la direction de la bande,
2. une symétrie d'axe parallèle aux deux droites et situé à égale distance de celles-ci (axe médian),
3. des symétries d'axe perpendiculaire aux deux droites parallèles,
4. des symétries centrales (ou rotations d'un demi-tour) dont le centre est situé à égale distance des deux droites parallèles.

Il faut encore ajouter les composées des isométries ainsi répertoriées, puisque toute composée d'isométries qui conservent une figure laisse cette figure invariante.

Comme une frise est une bande décorée infinie, il est aisé de comprendre que les isométries qui laissent une frise invariante font obligatoirement partie de cette liste.

Lors de l'activité 1, les élèves se sont constitué une « bibliothèque de frises » dont ils connaissent le mode de création. Pour diversifier les exemples, ils apportent des objets décorés de frises ou des documents – dessins, photos – qui en présentent. Le professeur distribue la fiche 49 et sa photocopie sur transparent (à découper en bandelettes) ; le matériel est cette fois destiné à découvrir les isométries qui appliquent une frise sur elle-même, ou à effectuer des vérifications.

Trouver, parmi ces exemples, des frises invariantes pour

- uniquement des translations,
- des translations et un seul type de symétrie (verticale, horizontale ou centrale),
- des translations et plusieurs types de symétries.

Dans chacun des cas, quelles sont les isométries qui appliquent le motif de base sur lui-même ?

Cette exploration conduit à la découverte des différents types de frises. En fonction de l'intérêt de ses élèves, chaque professeur décidera jusqu'où il veut pousser l'analyse des différents types, et jugera de l'opportunité de demander des justifications. Le fait de se limiter à l'aspect purement descriptif n'exclut pas de poursuivre l'activité jusqu'à la section 3.

La frise T : des translations et rien d'autre

Toutes les frises, telles que nous les avons définies, sont invariantes par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples de la translation minimale.

Consultons notre « bibliothèque de frises » et cherchons des frises qui ne sont invariantes **que** par ces translations. Nous en trouvons quelques exemples : celles des figures 10, 16, 17, 20, 39... ou encore celle-ci. Nous les appellerons frises de type T.



Fig. 59

*Une **frise de type T** est une frise invariante uniquement par une infinité de translations, toutes multiples d'une translation minimale.*

Nous constatons que les motifs de base de ces frises n'ont pas d'axe de symétrie horizontal ou vertical, ni de centre de symétrie. La suite de nos investigations confirmera que les frises dont un motif de base est symétrique par rapport à un axe vertical ou horizontal ou par rapport à un centre ne peuvent appartenir au type T (car elles sont obligatoirement d'un autre type).

Cependant, d'autres types de symétries peuvent apparaître dans les motifs de base des frises de type T. Par exemple, la feuille, motif de base de la frise de la figure 39, est symétrique par rapport à un axe oblique, formant un angle de 45° avec l'horizontale. Un tel axe n'est jamais un axe de symétrie de la frise.

Le recours au matériel permet de s'en convaincre : on superpose à une frise de feuilles sa copie sur transparent, puis on retourne le transparent dans un mouvement de symétrie par rapport à l'axe de symétrie d'une feuille. La figure 60 illustre le résultat obtenu et montre clairement que la symétrie d'axe oblique n'applique pas la frise sur elle-même.

Pas plus que les rotations autres que celles d'un nombre entier de demi-tours, les symétries d'axe oblique ne sont pas à prendre en considération lors de la recherche des isométries laissant la frise invariante.

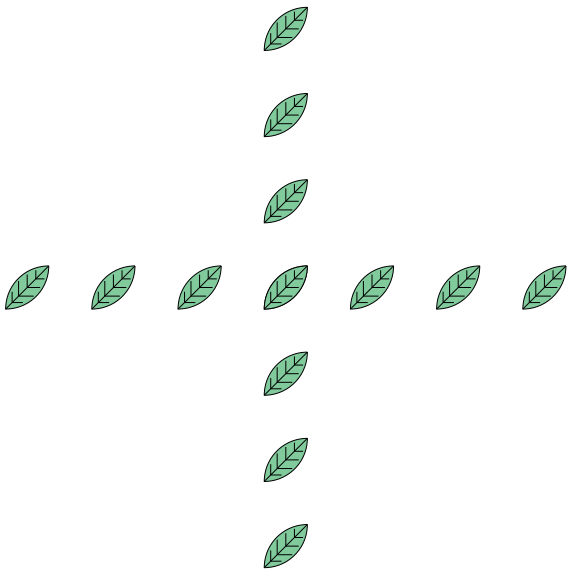


Fig. 60

De plus, il est clair que les translations minimales et ses multiples appliquent globalement la frise sur elle-même, mais n'appliquent aucun motif sur lui-même.

La frise H : translations et symétrie d'axe horizontal

Orientons nos recherches vers des frises dont un motif de base a lui-même un axe horizontal de symétrie, mais pas d'axe vertical. Les frises des figures 25, 30, 41 en sont des exemples. Sur la fiche, nous trouvons encore celle de la figure 61. Nous les appelons frises de type H.

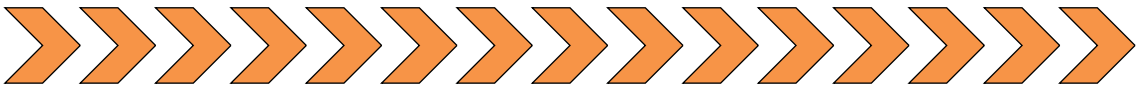


Fig. 61

La symétrie d'axe horizontal (axe médian) applique globalement la frise sur elle-même, mais aussi chaque motif sur lui-même.

Par composition des isométries qui conservent la frise, les élèves sont amenés à découvrir un autre mouvement qui applique la frise sur elle-même. En utilisant le transparent qui reproduit globalement la frise, ils peuvent effectuer le mouvement et le décrire, mais ils ne peuvent nommer l'isométrie car ils ne l'ont sans doute jamais rencontrée. Il s'agit d'une symétrie d'axe médian horizontal, suivie (ou précédée) d'une translation dans la direction de la frise, donc dans la direction parallèle à l'axe. Cette composée, appelée *symétrie glissée*, est un retournement, puisque le transparent a été retourné une fois.

Les symétries glissées, obtenues par composition de la symétrie d'axe médian et d'une des translations qui conservent la frise, laissent la frise invariante mais n'appliquent aucun motif sur lui-même.

*Une **symétrie glissée** est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation dans la*

direction de l'axe de symétrie.

*Une **frise de type H** est une frise invariante par*
– une famille infinie de translations,
– la symétrie orthogonale d'axe médian,
– une famille infinie de symétries glissées.

La frise V : translations et symétries d'axe vertical

Nous pouvons exhiber quelques frises dont un motif de base est symétrique par rapport à un axe vertical, mais pas par rapport à un axe horizontal. Ainsi sont les frises des figures 24 et 40.

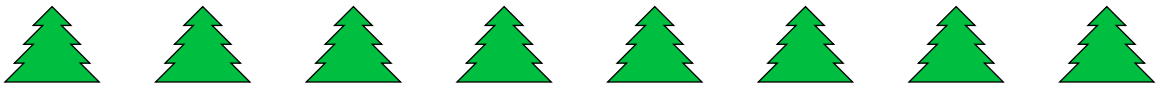


Fig. 62

Sur la fiche, on trouve celle de la figure 62. Le petit sapin, considéré comme motif de base, est symétrique par rapport à un axe vertical. En s'aidant du transparent, on constate que la frise est appliquée sur elle-même par n'importe quelle symétrie dont l'axe coïncide avec l'axe de symétrie d'un petit sapin (axes en trait plein sur la figure 63). Chacune de ces symétries applique un motif de base sur lui-même (le petit sapin dont l'axe coïncide avec l'axe de la symétrie), les autres motifs sont appliqués sur le motif situé symétriquement dans la frise. Il y a une famille infinie de symétries de ce type.

On s'aperçoit assez vite qu'il y a une autre famille infinie de symétries, dont les axes sont situés à mi-chemin entre deux petits sapins (axes en pointillé sur la figure 63). Les symétries de cette famille appliquent la frise sur elle-même, mais aucun des motifs de base que nous avons choisi sur lui-même. Si les élèves n'évoquent pas spontanément cette deuxième famille de symétries, le professeur relancera la recherche par une question.

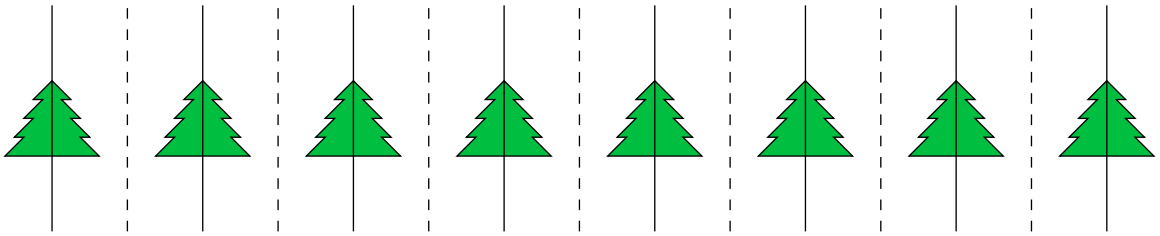


Fig. 63

Les élèves retrouvent les deux familles de symétries d'axe vertical dans les frises des figures 24 et 40.

Dans les frises de ce type, il n'y a aucun motif de base qui soit symétrique à la fois par une symétrie de chaque famille. Ceci montre bien que, si les symétries d'un motif de base peuvent servir de guide dans la recherche des isométries qui conservent la frise, elles ne suffisent pas à les identifier toutes.

*Une **frise de type V** est une frise invariante par*
– *une famille infinie de translations,*
– *deux familles infinies de symétries orthogonales d'axe perpendiculaire à la direction de la frise (axes de deux types).*

Remarque. – Dans les frises de type V, il est fréquent que deux motifs de base différents, tous deux symétriques par rapport à un axe vertical s'imposent à la perception. Ainsi, on peut interpréter la frise de la figure 64 comme une frise de champignons (sur fond blanc) ou comme une frise de flacons blancs (sur fond coloré).

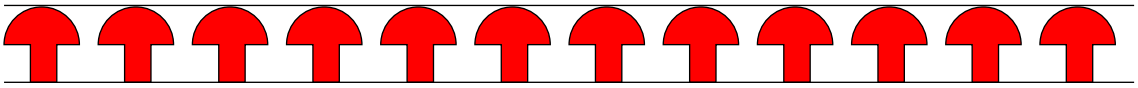


Fig. 64

La remarque s'applique aussi dans d'autres cas. Par exemple, la frise de la figure 61, de type H, peut être vue comme une frise de chevrons colorés sur fond blanc ou comme une frise de chevrons blancs sur fond coloré.

La frise G : translations et symétries glissées

Le professeur attire l'attention sur deux frises de la collection, qui ne sont pas très différentes de la frise de type H. Il s'agit des frises des figures 32 et 42. Les élèves savent comment ces deux frises ont été obtenues : en translatant la frise transparente (de gouttes ou de feuilles) après l'avoir retournée par une symétrie d'axe horizontal. Sur la fiche, on en trouve une troisième, qui semble construite de manière analogue (figure 65).

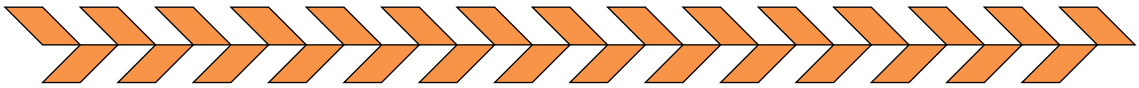


Fig. 65

Quel mouvement applique la frise de la figure 65 sur elle-même ? Quelle isométrie laisse cette frise invariante ?

En s'aidant du transparent, les élèves identifient le mouvement : une symétrie d'axe médian horizontal, suivie (ou précédée) d'une translation dans la direction de la frise, donc dans la direction parallèle à l'axe. Il s'agit donc d'une *symétrie glissée*. Mais contrairement à ce qui se passe dans la frise de type H, cette symétrie glissée n'est pas la composée de deux isométries qui conservent la frise, puisque celle-ci n'est pas symétrique par rapport à l'axe médian.

Analysons les symétries glissées qui conservent la frise, et intéressons-nous aux translations qui entrent dans leur composition. Pour cela, notons t_f la translation minimale, de gauche à droite, qui laisse la frise invariante et t_g la *translation de glissement minimale*, c'est-à-dire la plus petite translation, de gauche à droite, qui en composition avec la symétrie d'axe médian

horizontal, produit une symétrie glissée laissant la frise invariante. Dessinons les translations t_f et t_g pour les frises des figures 65 et 42 (figures 66 et 67 ci-dessous).

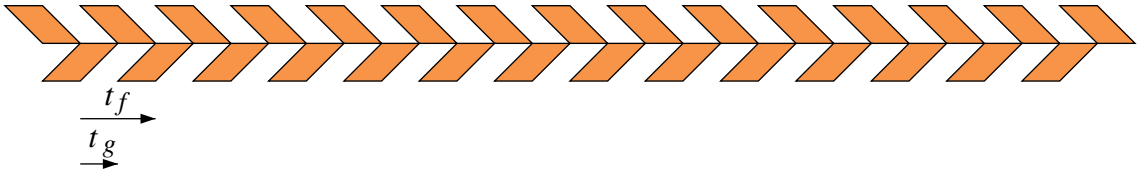


Fig. 66

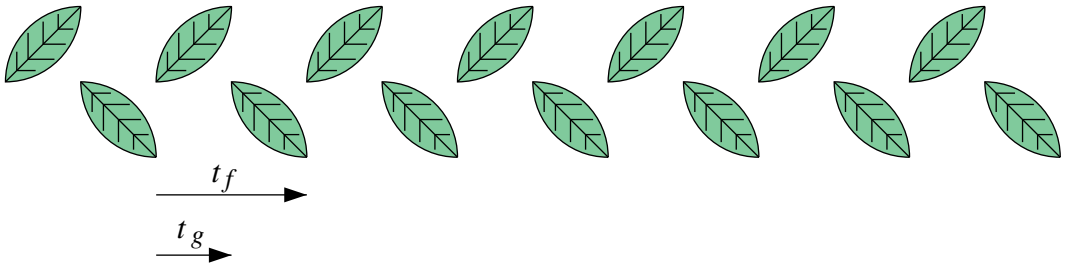


Fig. 67

On constate à chaque fois que la translation t_g, de même direction que t_f a pour longueur la moitié de la longueur de t_f. On voit aussi qu'une symétrie glissée laissant la frise invariante est toujours une composée de la symétrie d'axe médian horizontal avec une translation multiple *impair* de t_g. Aucune autre translation ne convient pour effectuer le glissement.

Contrastons à présent la frise de la figure 67 avec celle de la figure 68, où les « feuilles retournées » ne sont plus à mi-chemin entre les autres. Cette dernière est-elle également invariante par une symétrie glissée ?

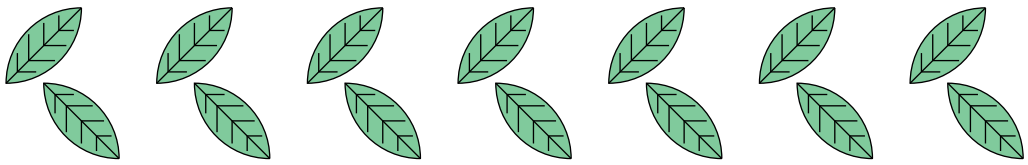


Fig. 68

Le recours au transparent lève le doute. On superpose à la frise sa copie sur transparent, on retourne celui-ci, puis on le fait glisser de manière à appliquer les unes sur les autres les « feuilles retournées » du dessous. Remarquons que, dans ce cas, la translation du glissement effectué n'est pas la moitié de la translation minimale qui conserve la frise. La figure 69 montre le résultat.

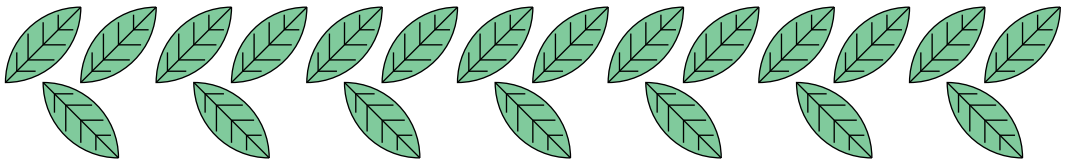


Fig. 69

Il n'existe pas de symétrie glissée qui appplique sur elle-même la frise de la figure 68. Il s'agit d'une frise de type T, invariante seulement par une famille de translations.

*Une **frise de type G** est une frise invariante par*
– une famille infinie de translations,
– une famille infinie de symétries glissées.
La longueur de la translation de glissement minimale vaut la moitié celle de la translation minimale qui conserve la frise.

On peut se convaincre de cette propriété par un raisonnement intuitif, en s'aidant du transparent. Si on effectue successsivement deux fois une même symétrie glissée, on compose deux retournements qui conservent la frise. On doit donc obtenir un déplacement qui laisse la frise invariante. Or, la composée de deux symétries glissées de même axe et de translation de glissement g est la translation $2g$. La longueur de la translation minimale t_f qui conserve la frise vaut donc le double de celle de la translation de glissement minimale t_g.

Remarque. – Les frises de types G sont parfois plus difficiles à reconnaître, notamment lorsque les « parties retournées » du motif sont intercalées entre les autres. En voici deux exemples (figures 70 et 71). La fiche 55, exploitée à la section 3 en présente de plus compliquées.

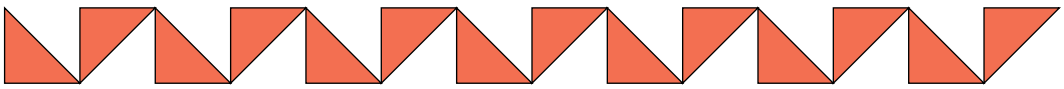


Fig. 70

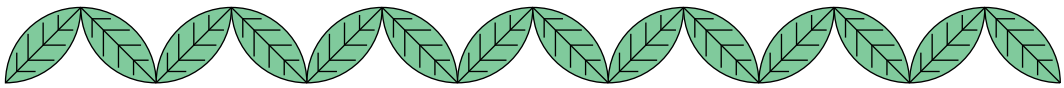


Fig. 71

La frise C : translations et symétries centrales

Nous avons déjà rencontré quelques frises dont un motif de base présente une symétrie centrale mais pas de symétrie d'axe vertical ni horizontal : celles des figures 33, 34, 35, 43, et aussi celle de la figure 36. Nous découvrons sur la fiche 49 la frise de la figure 72 qui jouit des mêmes propriétés.

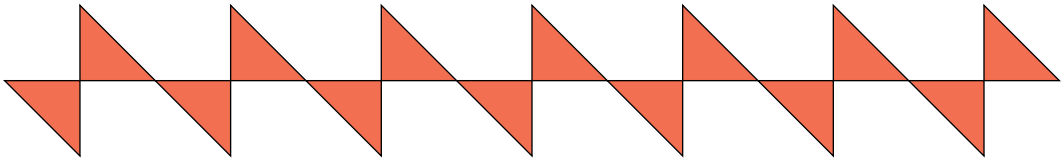


Fig. 72

Examinons-la de plus près. On y décèle deux motifs de base invariants par une symétrie centrale. Marquons les centres de ces motifs d'un petit cercle, plein ou vide selon le cas (figures 73 et 74).

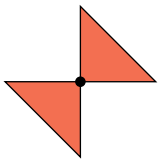


Fig. 73

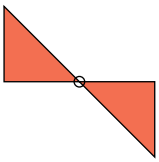


Fig. 74

Pour vérifier que ces points sont bien des centres de symétrie de la frise, on utilise à nouveau le transparent : on le superpose exactement à la frise de papier, on plante une épingle dans les deux épaisseurs à l'endroit d'un point marqué, puis on fait tourner le transparent d'un demi-tour. On constate alors que la frise est appliquée sur elle-même par chacun des demi-tours effectués.

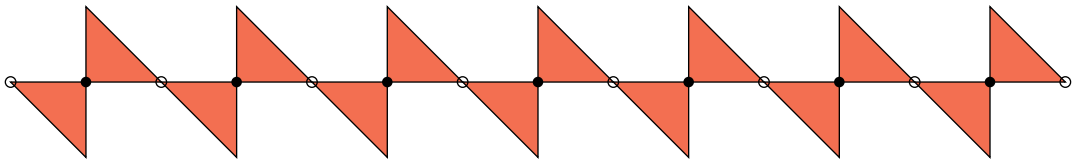


Fig. 75

On vérifie ainsi l'existence de deux sortes de centres de symétrie et donc de deux familles infinies de demi-tours.

Si le motif de base considéré est celui de la figure 73, les demi-tours dont le centre est marqué par un petit cercle plein appliquent le motif au centre duquel il se trouve sur lui-même. Les autres motifs sont appliqués sur le motif situé symétriquement dans la frise. Les demi-tours dont le centre est marqué par un petit cercle vide n'appliquent aucun motif sur lui-même. Les rôles des deux familles de symétries sont inversés si on convient que le motif de base est celui de la figure 74. Dans ce cas, ce sont les demi-tours dont le centre est marqué par un petit cercle vide qui appliquent un motif sur lui-même.

Une ***frise de type C*** *est une frise invariante par*
– *une famille infinie de translations,*
– *deux familles infinies de symétries centrales ou demi-tours (centres de deux types).*

La frise CHV : translations, symétries d'axe horizontal, d'axe vertical et... symétries centrales

Nous avons examiné jusqu'ici les frises qui présentent soit un axe de symétrie horizontal, soit des axes de symétries verticaux, soit des centres de symétrie. Fixons à présent notre attention sur celles qui présentent à la fois une symétrie d'axe horizontal et une symétrie d'axe vertical. Les frises des figures 45 et 46 sont de ce type, ainsi que celle de la figure 76.

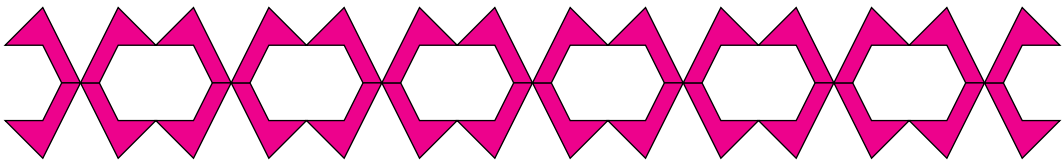


Fig. 76

On voit apparaître, outre la symétrie d'axe horizontal, deux familles de symétries d'axe vertical, comme dans les frises de type V. Mais de plus, on découvre deux familles de demi-tours, dont les centres se trouvent aux points d'intersection de l'axe horizontal avec les axes verticaux des deux familles.

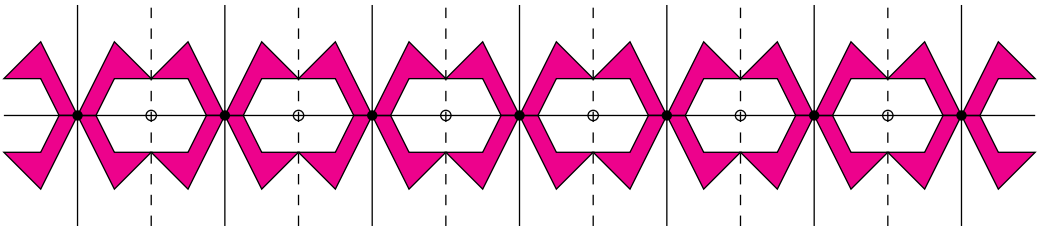


Fig. 77

Le fait que le point d'intersection de deux axes de symétrie soit un centre de symétrie est-il particulier à cette frise, ou bien s'agit-il d'une propriété générale ?

Existe-t-il une frise (ou une figure), symétrique par rapport à un axe horizontal et par rapport à un axe vertical, qui ne soit pas symétrique par rapport au point d'intersection des deux axes ?

Pour guider la réflexion, le professeur suggère de rechercher le(s) point(s) fixe(s) de la composée des deux symétries axiales. Voici un exemple de raisonnement accessible aux élèves.

Dans une symétrie axiale, les points de l'axe sont des points fixes. Le point d'intersection des deux axes est donc fixe pour la symétrie d'axe vertical et pour la symétrie d'axe horizontal. La composée des deux symétries axiales est donc une isométrie telle que le point d'intersection des deux axes est un point fixe. C'est un déplacement puisque c'est la composée de deux retournements. Il s'agit donc d'une rotation ayant ce point fixe comme centre et, dans le cas d'une frise, cette rotation ne peut être qu'un demi-tour, puisqu'il n'y a pas d'autre rotation qui applique une frise sur elle-même.

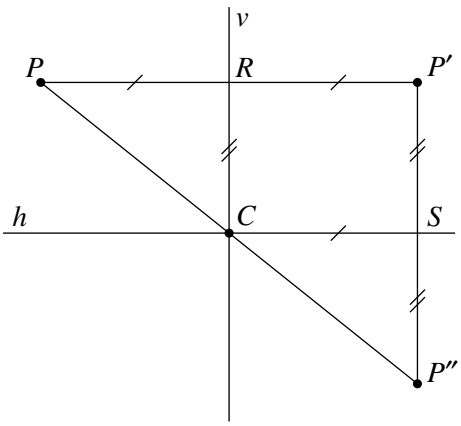


Fig. 78

Plus généralement, la figure 78 montre

- un point P quelconque du plan,
- son image P' par la symétrie d'axe ν,
- son image P'' par la composée de la symétrie d'axe ν et de la symétrie d'axe h (image de P' par la symétrie d'axe h).

Le point P'' est l'image de P par un déplacement du plan dont C est un point fixe.

De l'égalité des triangles PRC et CSP'', on peut déduire que $|PC| = |CP''|$ et que les points P, C et P'' sont alignés, ce qui démontre que P'' est l'image de P par le demi-tour de centre C.

La démonstration peut également s'appuyer sur la configuration de Thalès dans le triangle $PP'P''$.

On peut donc énoncer les propriétés plus générales suivantes.

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est le demi-tour dont le centre se trouve à l'intersection des deux axes.

Toute figure symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires est symétrique par rapport au point d'intersection des deux axes.

Une frise qui présente les mêmes symétries orthogonales que celle de la figure 77 est toujours invariante par deux familles infinies de symétries centrales.

On y perçoit deux motifs de bases invariants par la symétrie d'axe horizontal, par une symétrie d'axe vertical et un demi-tour. Les figures 79 et 80 en donnent une illustation.

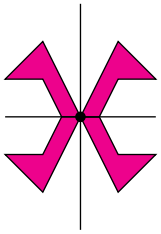


Fig. 79

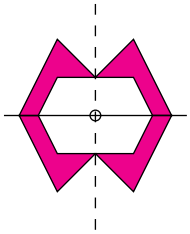


Fig. 80

Par composition de la symétrie d'axe médian et des translations, on trouve encore une famille infinie de symétries glissées qui conservent une frise de ce type.

*Une **frise de type CHV** est une frise invariante par*
- *une famille infinie de translations,*
- *la symétrie orthogonale d'axe médian,*
- *deux familles infinies de symétries orthogonales d'axe perpendiculaire à la direction de la frise (axes de deux types).*
- *deux familles infinies de symétries centrales ou demi-tours (centres de deux types, aux intersections de l'axe médian avec les axes perpendiculaires à la direction de la frise),*
- *une famille infinie de symétries glissées.*

La frise CV : translations, symétries d'axe vertical, symétries centrales et... symétries glissées

Il existe des frises qui ne sont pas symétriques par rapport à leur axe médian horizontal, mais qui présentent des symétries d'axes verticaux et des symétries centrales. La frise de la figure 81 en est un exemple, ainsi que la frise « grecque » de la figure 82.



Fig. 81



Fig. 82

Fixons notre attention sur la première, dessinons les axes de symétries et marquons les centres.

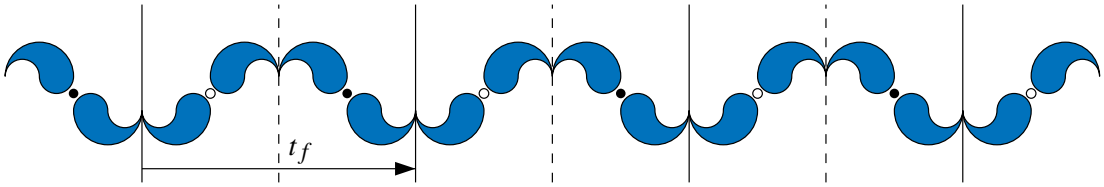


Fig. 83

On distingue deux familles de symétries d'axe vertical et deux familles de demi-tours, dont les centres sont situés sur l'axe médian de la frise, à mi-chemin entre deux axes verticaux successifs. Le recours au transparent permet de vérifier que la frise est également invariante par une symétrie glissée.

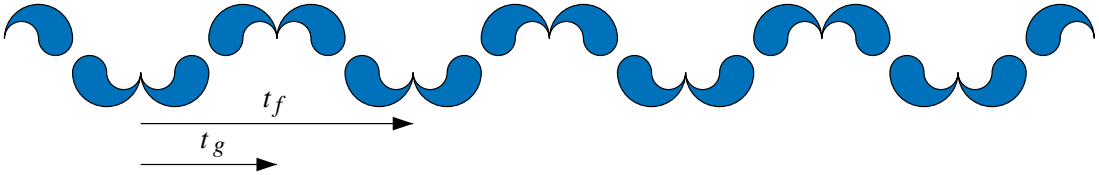


Fig. 84

Existe-t-il un motif de base symétrique par rapport à un axe vertical et par rapport à un centre ?

Les figures 85 à 88 illustrent quatre façons de percevoir un motif de base qui présente une symétrie : les deux premiers motifs sont symétriques par rapport à un axe, les deux derniers par rapport à un centre.

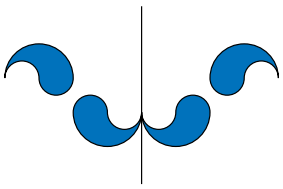


Fig. 85

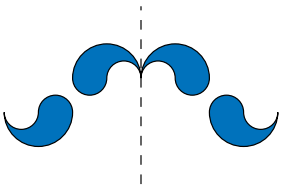


Fig. 86

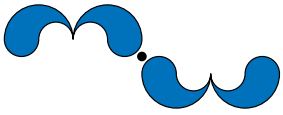


Fig. 87

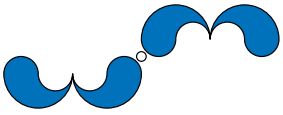


Fig. 88

Il n'existe aucun motif de base qui soit invariant pour plus d'une des isométries qui conservent la frise.

*Une **frise de type CV** est une frise invariante par*
- *une famille infinie de translations,*
- *deux familles infinies de symétries orthogonales d'axe perpendiculaire à la direction de la frise (axes de deux types),*
- *deux familles infinies de symétries centrales ou demi-tours (centres de deux types, sur l'axe médian, à mi-chemin entre des axes successifs, perpendiculaires à la direction de la frise),*
- *une famille infinie de symétries glissées.*

Remarque. – Une même frise peut être classée différemment selon qu'on tient compte ou non des couleurs.

Les frises des figures 89 et 90 sont-elles du même type ?



Fig. 89

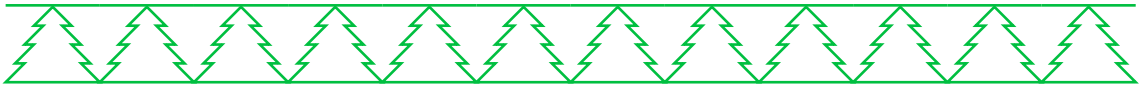


Fig. 90

Bien que le dessin de ces deux frises soit le même, l'absence de coloriage de la seconde en fait une frise du type CV, tandis que la première est du type V.

Synthèse

Les élèves complètent un tableau récapitulatif en indiquant les isométries qui conservent les frises de chaque type.

Type	Translations	Symétrie d'axe horizontal	Symétries d'axe vertical	Symétries centrales	Symétries glissées
T	×				
H	×	×			×
V	×		×		
G	×				×
C	×			×	
CHV	×	×	×	×	×
CV	×		×	×	×

La dernière partie de l'activité est destinée à montrer qu'il est possible de construire une frise de chaque type à partir d'un même motif initial (bien choisi).

> Produire une frise de chaque type à partir d'un motif au choix. Le motif de base de chacune de ces frises doit être composé exclusivement de ce motif initial et d'une ou plusieurs images de celui-ci par une symétrie axiale, ou centrale, ou glissée.

Les fiches 50 et 51 illustrent des réalisations effectuées à partir de gouttes et de feuilles, mais on peut démarrer avec un motif beaucoup plus simple. Ce travail est facilement réalisable avec le kit standard d'*Apprenti Géomètre*.

Une discussion au sein de la classe fera apparaître que, si le motif de départ présente certaines symétries, il est impossible de fabriquer les sept types (notamment le type T).

2.4 Sept types de frises et pas plus

Le but de cette section est de justifier, même de manière incomplète, qu'il n'y a que sept types de frises. Les raisonnements exposés ci-après ne sont pas accessibles à tous les élèves, et ne seront abordés que si la classe le permet. Les isométries y sont implicitement perçues comme des transformations du plan, ce qui est difficile à concevoir pour pas mal d'élèves. De plus, la compréhension de ce qui suit repose sur un classement des isométries du plan qui sera établi sans que son caractère exhaustif soit démontré. Voici ce classement.

1. Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.
   Une translation n'a pas de point fixe.
   Une rotation a un point fixe : le centre de la rotation.
2. Tout retournement du plan est soit une symétrie axiale, soit une symétrie glissée.
   Une symétrie axiale a une droite de points fixes : l'axe de symétrie.
   Une symétrie glissée n'a pas de point fixe, mais une droite globalement fixe, qui « glisse » sur elle-même : l'axe de la symétrie glissée.

L'analyse des frises du type CHV a montré qu'une frise symétrique par rapport à un axe vertical et par rapport à un axe horizontal est invariante pour le demi-tour dont le centre se trouve à l'intersection des deux axes. On pourrait penser qu'une figure conservée par deux des isométries évoquées ci-dessus est nécessairement invariante pour la troisième. Cette intuition peut être vérifiée pour les figures finies, mais se révèle fausse en ce qui concerne les frises. En effet, nous avons exhibé plusieurs frises de type CV, invariantes pour des symétries d'axe vertical et pour des demi-tours mais qui n'ont pas d'axe de symétrie horizontal. On pourrait dès lors imaginer que, comme il y a des frises CV, il pourrait exister des frises CH, avec des centres de symétrie et un axe horizontal de symétrie, mais pas d'axe vertical. Or, on n'en trouve pas. Dans notre bibliothèque de frises, toutes les frises symétriques par rapport à leur axe médian et qui sont invariantes pour des demi-tours sont du type CHV. Cette constatation ne suffit pas à prouver que le type CH n'existe pas. C'est pourquoi, nous engageons les élèves à s'en assurer.

> Une frise, symétrique par rapport à un axe horizontal et par rapport à un centre a-t-elle nécessairement un axe de symétrie vertical ?

Cette question peut être précisée par d'autres, destinées à guider la réflexion.

Où est situé le centre de symétrie par rapport à l'axe de symétrie horizontal ?

Si une frise est appliquée sur elle-même par une symétrie d'axe horizontal et par un demi-tour, le centre de rotation se trouve obligatoirement sur l'axe médian de la frise, donc sur son axe de symétrie horizontal. La frise est appliquée sur elle-même par la composée de ces deux isométries. Il s'agit d'un retournement, puisque c'est la composée d'un retournement et d'un déplacement.

Quelle est l'image par cette composée de la droite verticale passant par le centre ?

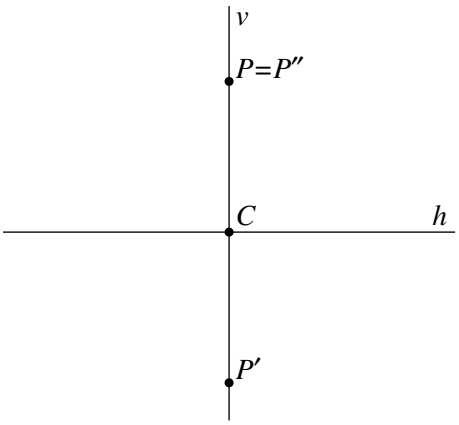


Fig. 91

La figure 91 montre

- un point P quelconque de la droite verticale ν,
- son image P' par la symétrie d'axe h (ou par la symétrie de centre C),
- son image P'' par la composée de la symétrie d'axe h et de la symétrie de centre C.

La composée est donc un retournement qui fixe chaque point de la droite ν, il ne peut s'agir que de la symétrie d'axe ν. Par conséquent, toute frise symétrique par rapport à un axe horizontal et par rapport à un demi-tour est aussi symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le centre.

Les frises CHV des figures 45, 46 et 76 illustrent ce cas.

Une frise, symétrique par rapport à un axe vertical et par rapport à un centre est-elle nécessairement invariante par une symétrie d'axe horizontal ou par une symétrie glissée ?

La situation est différente de celle de la question précédente. En effet, si une frise est appliquée sur elle-même par une symétrie d'axe vertical et par un demi-tour, le centre du demi-tour ne se trouve pas obligatoirement sur l'axe vertical. La frise est appliquée sur elle-même par la composée – un retournement – de ces deux isométries.

Quelle est l'image par cette composée de la droite horizontale passant par le centre ?

Lorsque le centre appartient à l'axe vertical, un raisonnement similaire au précédent indique que cette droite est fixe et dans ce cas, la frise est symétrique par rapport à son axe médian horizontal ; est du type CHV.

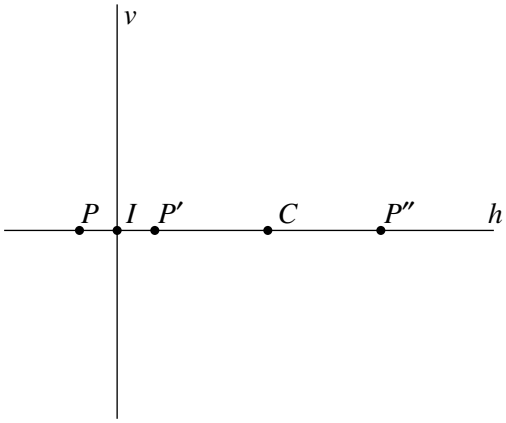


Fig. 92

La figure 92 montre ce qui se passe dans le cas contraire. On y voit

- le point I, point d'intersection de la droite horizontale h et de la droite verticale ν,
- un point P quelconque de la droite horizontale h,
- son image P' par la symétrie d'axe ν,
- l'image P'' de P' par la symétrie de centre C, ou encore l'image de P par la composée de la symétrie d'axe ν et de la symétrie de centre C.

Ceci montre que les points de la droite h ne sont pas fixes par cette composée. Il ne s'agit donc pas d'une symétrie d'axe h.

Montrer que la composée de la symétrie d'axe ν et de la symétrie de centre C est une symétrie glissée.

Comme $|PI| = |IP'|$ et que $|P'C| = |CP"|$, on a $|PP"| = 2|IC|$ pour tout point P de la droite h. La composée est un retournement tel que la droite h subit une translation de longueur $2|IP|$ dans sa propre direction. Il ne peut s'agir que de la symétrie glissée d'axe h.

Les frises CV des figures 81 et 82 illustrent ce cas.

Pour compléter les justifications, il faudrait encore établir que toute frise invariante par une symétrie d'axe vertical et une symétrie glissée est aussi invariante par une symétrie centrale ; et que toute frise invariante par une symétrie centrale et une symétrie glissée est aussi invariante par une symétrie d'axe vertical. Ce point est abordé à la page 316.

Remarque. – Dans une figure finie, cette situation ne peut jamais se produire, car l'axe de symétrie passe toujours par le centre de la figure. D'ailleurs, aucune figure finie n'est appliquée sur elle-même par une symétrie glissée.

On peut énoncer la propriété suivante.

Toute figure finie invariante par une symétrie axiale et par un demi-tour est symétrique par rapport à la droite passant par le centre et perpendiculaire à l'axe de la première symétrie.

3 Classer des frises

De quoi s'agit-il ? Classer des frises en fonction des isométries qui les laissent invariantes.

Enjeux

Dégager une méthode de classement.

Approfondir l'analyse des frises invariantes par des symétries centrales.

Affiner la perception des frises invariantes par des symétries glissées.

Compétences transversales

On se reportera aux compétences de la section 1 ou 2 selon que l'activité est destinée à des élèves du premier ou du deuxième degré.

Compétences disciplinaires

Reconnaître, comparer des figures, les différencier et les classer sur base des éléments de symétrie.

Connaître les translations, les symétries, les rotations de figures dans le plan.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 52 à 55, en annexe aux pages 373 à 376.

Des dessins de frises de différents types.

Des photocopies sur transparent des fiches 52 et 55.

Du matériel de dessin, des épingles.

Prérequis

Le classement des frises en sept types sur base des isométries qui les laissent invariantes.

3.1 Élaborer une méthode de classement

Comment s'y prendre ? Le professeur distribue la fiche 52, avec la consigne de classer les frises qui y sont représentées. Les élèves auront sans doute quelques difficultés à organiser une démarche efficace pour déterminer à quel type appartient une frise.

Bien sûr, on peut établir pour chacune la liste des isométries qui la conservent et retrouver à quel type cette liste correspond ; mais cette méthode n'est pas très performante.

On peut remarquer qu'il est possible de poser dès le départ une question qui restreint le champ des investigations à trois ou quatre types. Ainsi, si on commence par s'interroger sur l'invariance de la frise par une symétrie centrale, une réponse positive indique que la frise est de type C, CV ou CHV ; sinon, elle est de type H, V, G ou T. On s'arrange ensuite pour poser des questions telles que la réponse « oui » débouche sur un seul type, et la réponse « non » sur la poursuite de la recherche, et ce jusqu'au moment où il ne reste qu'une possibilité.

Suite à ces quelques remarques, on demande aux élèves d'établir un algorithme de classement.

Établir un organigramme de classement pour les frises.

Le résultat attendu est un graphe comme celui de la figure 93, par exemple.

Les questions à poser sont ici symbolisées de la manière suivante :
S_c ? signifie « La frise est-elle invariante par une symétrie centrale ? »,
S_h ? signifie « La frise est-elle invariante par la symétrie d'axe horizontal (axe médian) ? »,
S_ν ? signifie « La frise est-elle invariante par une symétrie d'axe vertical (perpendiculaire à l'axe médian ? »,
S_g ? signifie « La frise est-elle invariante par une symétrie glissée ? ».

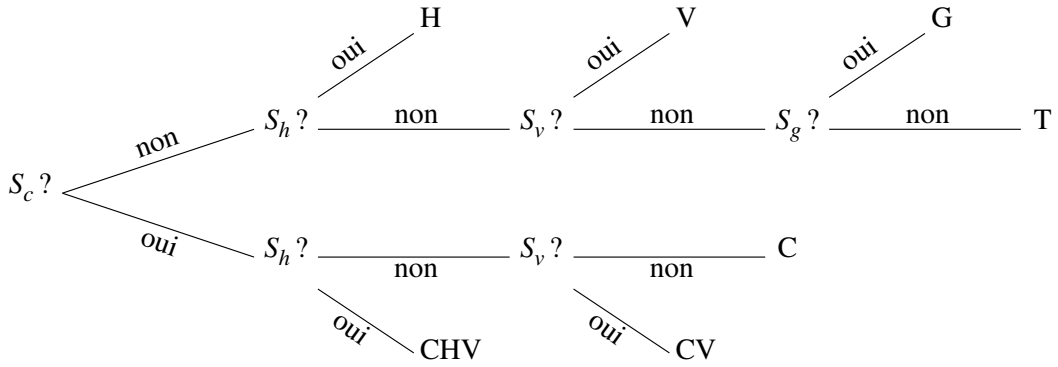


Fig. 93

Une autre procédure consiste à poser d'abord la question de la présence d'un axe de symétrie vertical. Si la frise est invariante par une symétrie d'axe vertical, elle est de type V, CV ou CHV ; sinon elle est de type H, C, G ou T. On obtient alors l'organigramme de la figure 94.

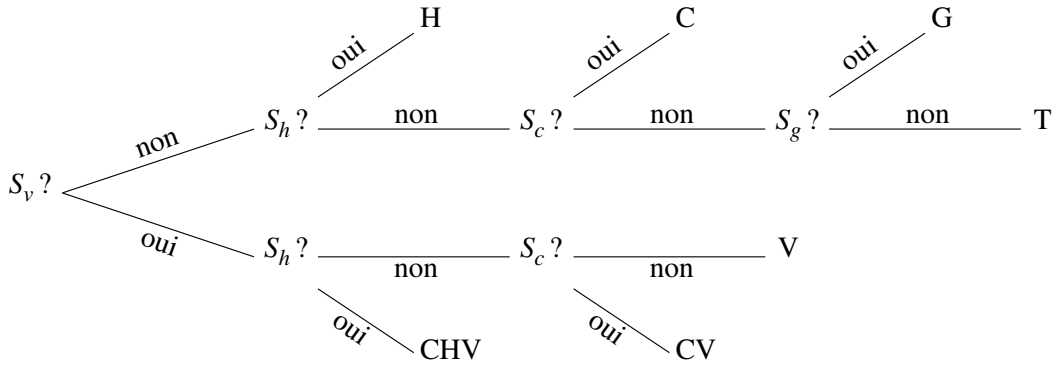


Fig. 94

L'activité se termine par la détermination du type des frises des fiches 52 à 54, en utilisant l'un ou l'autre de ces deux algorithmes de classement. D'autres frises apportées par les élèves fourniront des exercices supplémentaires.

3.2 Déterminer les centres de symétrie

Comment s'y prendre ?

Si les élèves perçoivent assez facilement la position des axes de symétries d'une frise, il n'en va pas de même pour les centres. Sauf pour les frises de type CHV dont les centres se trouvent aux points d'intersection de l'axe médian horizontal avec les axes verticaux, la détermination des centres des frises invariantes par une symétrie centrale peut poser problème.

L'utilisation du transparent permet de s'assurer qu'une frise est de type C ou CV sans connaître la position des centres. On fait tourner le transparent d'un demi-tour, puis on ajuste sa position pour vérifier la coïncidence de la frise de papier et de sa copie sur transparent. La détermination du centre peut se faire par tâtonnements en utilisant une épingle qui marque le centre de rotation. Pour se dégager de cette méthode empirique, on propose un problème préliminaire.

Comment déterminer le centre de symétrie d'une figure.

On peut rappeler la construction de l'image d'un point par une symétrie centrale ou rotation d'un demi-tour.

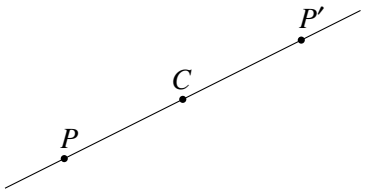


Fig. 95

Si P est un point quelconque du plan et C le centre de symétrie, l'image P' de P par la symétrie centrale de centre C est situé sur la droite PC, à la même distance de C que P mais de l'autre côté. Le centre C se trouve donc au milieu du segment $[PP']$.

Cette dernière observation permet de dégager une méthode pour déterminer un centre de symétrie éventuel ; on repère un point caractéristique de la figure et le point qui serait son image. Le centre de symétrie, s'il existe, se trouve au milieu du segment qui joint ces deux points. Il reste alors à vérifier que la figure toute entière est bien symétrique par rapport à ce milieu.

Appliquer cette méthode pour découvrir les centres de symétrie de la frise de la figure 96.



Fig. 96

En marquant les milieux des segments joignant des sommets correspondants des petits carrés, comme à la figure 97, on fait apparaître les centres des deux familles, marqués respectivement par des petits cercles pleins et des petits cercles vides.

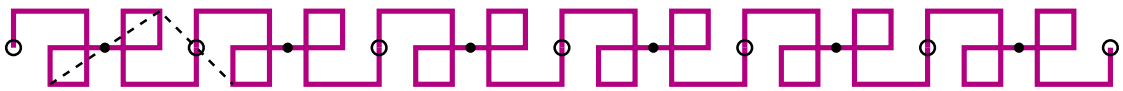


Fig. 97

Prolongement possible Le professeur qui le souhaite peut consolider les acquis et affiner la perception des frises du type G en proposant la fiche 55 à titre d'exercice.

Parmi les frises de la fiche 55, déterminer à vue celles qui sont invariantes par une symétrie glissée. Utiliser ensuite le transparent pour vérifier.

Après discussions éventuelles, le recours aux transparents ne laisse aucun doute : les frises F1, F3, F4 et F7 sont invariantes par une symétrie glissée. Pour chacune d'entre elles, notons t_f la translation minimale, de gauche à droite, qui laisse la frise invariante et t_g la *translation du glissement* (c'est-à-dire, rappelons-le, la plus petite translation, de gauche à droite, qui en composition avec la symétrie d'axe médian horizontal, produit une symétrie glissée laissant la frise invariante).

Encadrer un motif de base pour chaque frise.
Tracer et comparer les vecteurs des translations t_f et t_g des frises F1, F3, F4 et F7.
Préciser le type de chacune des frises.
Marquer les centres de symétrie éventuels.

Analysons tout d'abord les trois premières frises stables par une symétrie glissée : F1 (figure 98), F3 (figure 99) et F4 (figure 100).



Fig. 98

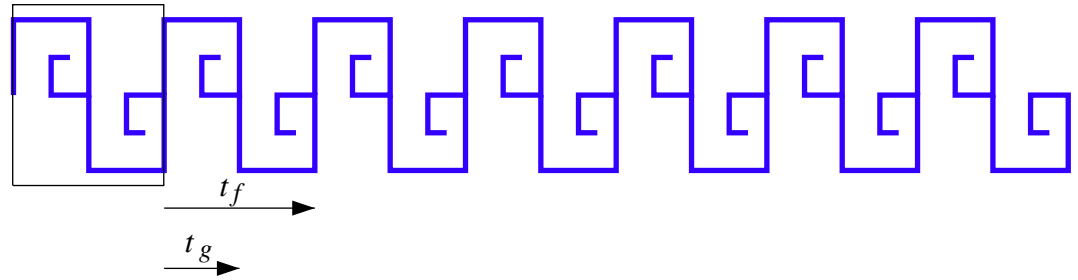


Fig. 99

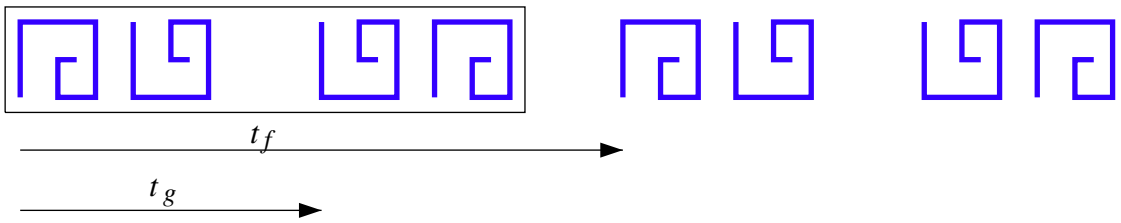


Fig. 100

On retrouve deux propriétés déjà évoquées auparavant :
– la translation t_g a pour longueur la moitié de la longueur de t_f,
– une symétrie glissée laissant la frise invariante est une composée de la symétrie d'axe médian horizontal avec une translation multiple impair de t_g.

Le matériel permet également de découvrir que la composée de deux symétries glissées laissant la frise invariante est une translation multiple de t_f ; les propriétés précédentes fournissent des arguments pour s'en convaincre.

Ces trois frises sont conservées par une famille de translations et par une famille de symétries glissées, aucune autre isométrie ne les laisse invariantes : elles sont du type G.

Quant à la frise F7 (figure 101), elle est conservée par une symétrie glissée, mais aussi par des symétries d'axe vertical et des demi-tours. Elle est de type CV.

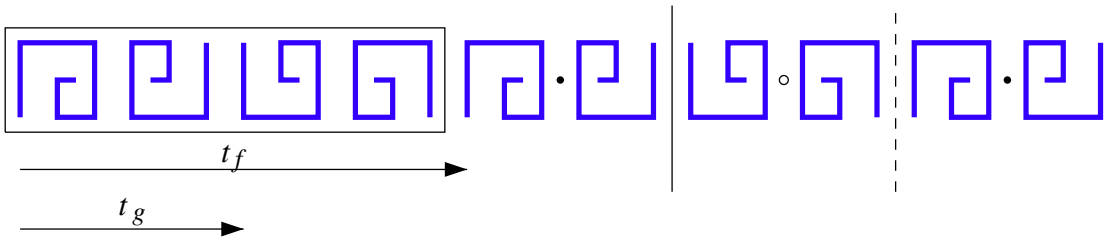


Fig. 101

La frise F2 est invariante par des symétries d'axe vertical, elle est du type V.

La frise F5 n'est pas invariante par une symétrie glissée, et pourtant, outre sa ressemblance (apparente !) avec la frise F4, on y voit un motif de base identique à celui de la frise F1 (le motif encadré dans les figures 98 et 102). On constate que la translation g de la symétrie glissée qui applique la première spirale de ce motif de base sur la seconde n'a pas pour longueur la moitié de la longueur de t_f (comme c'est le cas pour la frise F1).

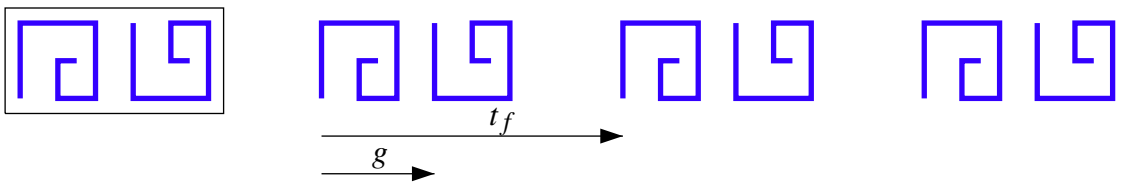


Fig. 102

La comparaison des longueurs de la translation minimale t_f et d'une « éventuelle » translation de glissement g (il faut que $g = \frac{1}{2}t_f$) constitue ainsi un moyen d'éviter le recours au transparent. Une autre méthode consiste à vérifier si la composée de la symétrie d'axe médian avec la translation $\frac{1}{2}t_f$ laisse la frise invariante. Ce n'est pas le cas pour la frise F5, aucune symétrie glissée ne l'applique sur elle-même. Comme elle n'a ni axe ni centre de symétrie, elle est de type T.

Quant à la frise F6, elle est du type C. En marquant les milieux des segments joignant les points extrêmes de deux spirales successives, comme à la figure 103, on fait apparaître les deux familles de centres.

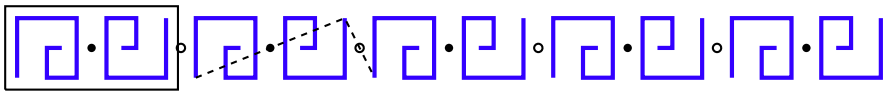


Fig. 103

4 Les sept groupes de frises

De quoi s'agit-il ?

Découvrir le concept de groupe dans un contexte géométrique.

Enjeux

Découvrir et démontrer quelques propriétés de la composition des isométries du plan.

Compétences transversales

Rédiger une explication, une démonstration.

Généraliser, structurer, synthétiser : reconnaître une propriété commune à des situations différentes ; formuler des généralisations et en contrôler la validité ; organiser des acquis dans une construction théorique.

Compétences disciplinaires

Organiser des propriétés d'un ensemble de figures en termes de structure de groupe.

Cette activité répond à ce qui est préconisé dans le texte qui introduit les compétences terminales en géométrie [2]. Voici l'extrait concerné.

Les translations, les symétries, les rotations sont utilisées pour décrire et organiser les propriétés des figures et aussi pour illustrer la notion de groupe à titre d'exemples et de contre-exemple.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 56 à 60, en annexe aux pages 377 à 381.

Du matériel de dessin.

Prérequis

Le classement des frises en sept types sur base des isométries qui les laissent invariantes.

4.1 La structure de groupe

Comment s'y prendre ?

Le type d'une frise est déterminé par la liste des isométries qui la laissent invariante. Pour chaque type, cette liste a été établie par l'observation des axes et des centres de symétries, mais aussi par composition d'isométries déjà répertoriées. C'est le cas de la symétrie glissée qui a été découverte, pour les frises de type H, par la composée de la symétrie d'axe médian et d'une translation qui conserve la frise.

En effet, quand on effectue successivement deux mouvements qui appliquent une figure sur elle-même, le mouvement composé applique aussi la figure sur elle-même. En termes d'isométries, on peut formuler l'énoncé suivant (encore valable si on remplace *frise* par *figure*).

La composée de deux isométries laissant une frise invariante est une isométrie laissant cette frise invariante.

Ceci signifie que si, par composition, on découvre une isométrie qu'on n'avait pas encore identifiée, il faut l'ajouter à la liste.

La composition des isométries d'une frise est associative.

Autrement dit, quand on effectue successivement trois isométries d'une figure (ou plus), on peut les associer de différentes manières. En réalité, quand on effectue plusieurs isométries à la suite, on ne se préoccupe pas d'identifier les étapes intermédiaires. On compare la position initiale et la position finale de la figure, le résultat de la composition est l'isométrie qui applique l'une sur l'autre. Si on remplace deux isométries de la suite par leur composée, cela ne change évidemment rien au résultat final.

Pour chaque frise, nous avons identifié la translation minimale qui applique la frise sur elle-même. Il y en a une dans chaque sens : comme précédemment, notons t celle qui va de gauche à droite et $(-t)$ celle qui va de droite à gauche.

Quelle est la composée des deux translations t et $(-t)$?

Cette question permet d'introduire de manière naturelle la *transformation identique*, que l'on appelle encore *identité* et que nous noterons I. Elle apparaît ici comme la composée des deux translations minimales de sens contraires. Cette tranformation ramène chaque point de la frise dans sa position initiale. Si on ne considère que l'état initial et l'état final de la figure, elle consiste donc à ne pas bouger. Mais elle doit être prise en compte pour que la composée de deux isométries laissant la frise invariante soit toujours une isométrie laissant cette frise invariante (que nous nommerons plus simplement « isométrie de la frise »). On dit alors que l'ensemble des isométries de la frise (ou de toute autre figure) est *stable pour la composition.*

Notons $(-t) \circ t$ le mouvement composé de la translation $(-t)$ effectuée après la translation t. D'une manière générale, le symbole « $\circ$ » est celui de la composition de deux transformations, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ (« $\mathcal{T}_2$ après $\mathcal{T}_1$ ») étant le résultat de la composition[1] de la transformation $\mathcal{T}_1$ suivie de la transformation $\mathcal{T}_2$. En général, la composition n'est pas commutative, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ n'est pas forcément égale à $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$.

[1] Les raisons qui font écrire la composition des transformations dans cet ordre sont analogues à celles qui dictent l'écriture de la composition des fonctions : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

On peut alors écrire

$$t \circ (-t) = I = (-t) \circ t,$$

et comme, en général la composée de deux translations est une translation, on peut percevoir la transformation identique comme la translation *nulle*. Elle vient alors s'intégrer dans l'ensemble des translations qui appliquent la frise sur elle-même, toutes multiples de la translation minimale, en tant que translation $0\,t$.

Cette transformation identique joue un rôle particulier dans la composition, puiqu'en la composant avec une isométrie q quelconque, on a toujours

$$q \circ I = q = I \circ q.$$

On dit qu'elle est *neutre* pour la composition.

Il semble assez naturel de dire que la translation $(-t)$ est l'*inverse* de la translation t. Elle correspond au mouvement inverse, elle ramène la frise dans sa position initiale. D'une manière générale, la transformation inverse d'une transformation q, notée q^{-1}, est définie par la relation

$$q \circ q^{-1} = I = q^{-1} \circ q.$$

Avec cette nouvelle notation, on a $t^{-1} = -t$, ce qui signifie que la transformation inverse t^{-1} de la translation t est la translation $-t$, de même direction et de même longueur que la translation t, mais de sens contraire.

On peut dès lors se demander si les autres isométries laissant une frise invariante ont également une inverse.

> Après avoir effectué une isométrie, peut-on en trouver une autre, appelée l'*inverse* de la première, qui ramène la frise dans sa position initiale ?

Il est facile de voir que l'identité, les symétries axiales et les symétries centrales (ou rotations d'un demi-tour) sont leur propre inverse.

> Quelle est l'inverse d'une symétrie glissée ?

Introduisons quelques notations pour en parler plus facilement. Notons
h l'axe médian (horizontal) de la frise,
s_h la symétrie d'axe h,
g une translation de direction parallèle à h.
On vérifie qu'on a toujours

$$s_h \circ g = g \circ s_h,$$

cette composée est la symétrie glissée d'axe h et de glissement g ; notons-la s_g. Le problème est donc de trouver une isométrie, notée s_g^{-1} telle que

$$s_g \circ s_g^{-1} = I.$$

En imaginant le mouvement inverse, les élèves proposeront sans doute la symétrie glissée d'axe h et de glissement $(-g)$ c'est-à-dire $s_h \circ (-g) = (-g) \circ s_h$. Il reste à vérifier que

$$(s_h \circ g) \circ ((-g) \circ s_h) = I.$$

Comme $(-g) = g^{-1}$, et que la composition est associative, on peut écrire

$$s_h \circ (g \circ g^{-1}) \circ s_h = s_h \circ I \circ s_h = s_h \circ s_h = I,$$

puisque s_h est sa propre inverse.

L'inverse d'une symétrie glissée est donc la symétrie glissée de même axe et de glissement de translation inverse.

Propriétés de la composition des isométries des frises

1. La composée de deux isométries d'une frise est une isométrie de cette frise.
2. La composition des isométries d'une frise est associative. Cela signifie que, si on souhaite composer trois isométries, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat. En général, pour trois transformations p, q et r :

$$(r \circ q) \circ p = r \circ (q \circ p).$$

3. Il existe un neutre pour la composition, à savoir l'identité I. Cela signifie que si on la compose avec n'importe quelle isométrie, le résultat est cette même isométrie :

$$q \circ I = q = I \circ q.$$

4. Chaque isométrie d'une frise possède une inverse (notée q^{-1}), c'est l'isométrie avec laquelle il faut la composer pour obtenir l'identité :

$$q \circ q^{-1} = I = q^{-1} \circ q.$$

Ces quatre propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des isométries laissant une frise invariante forme un *groupe* pour la composition.

Chaque frise est caractérisée par l'ensemble des isométries qui la laissent invariante. Comme cet ensemble forme groupe pour la composition, on peut encore dire qu'une frise est caractérisée par son groupe d'isométries. On distingue donc sept *groupes de frises.*

$\mathcal{T}$ est le groupe d'une frise de type T, il ne contient que des translations.
$\mathcal{H}$ est le groupe d'une frise de type H, il ne contient que des translations, une symétrie d'axe médian et des symétries glissées.
$\mathcal{V}$ est le groupe d'une frise de type V, il ne contient que des translations, et des symétries d'axe perpendiculaire à l'axe médian.
$\mathcal{G}$ est le groupe d'une frise de type G, il ne contient que des translations et des symétries glissées.
$\mathcal{C}$ est le groupe d'une frise de type C, il ne contient que des translations et des symétries centrales.
$\mathcal{CHV}$ est le groupe d'une frise de type CHV, il ne contient que des translations, une symétrie d'axe médian, des symétries d'axe perpendiculaire à l'axe médian, des symétries centrales et des symétries glissées.
$\mathcal{CV}$ est le groupe d'une frise de type CV, il ne contient que des translations, des symétries d'axe perpendiculaire à l'axe médian, des symétries centrales et des symétries glissées.

4.2 Les générateurs du groupe

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue successivement les fiches 56 à 58, qui comportent des exercices où on demande de compléter une figure de telle manière qu'elle soit invariante par une ou plusieurs isométrie(s) donnée(s). La figure de départ est un motif en forme de triangle rectangle facile à reproduire à main levée sur du papier quadrillé.

Le groupe $\mathcal{T}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t.



Fig. 104

Il faut ajouter l'image par t de l'unique motif de départ, qui lui-même doit être l'image par t d'un motif identique situé à sa gauche (en fait l'image du motif par t^{-1}). La figure ainsi complétée (figure 105) n'est cependant pas encore invariante par translation.

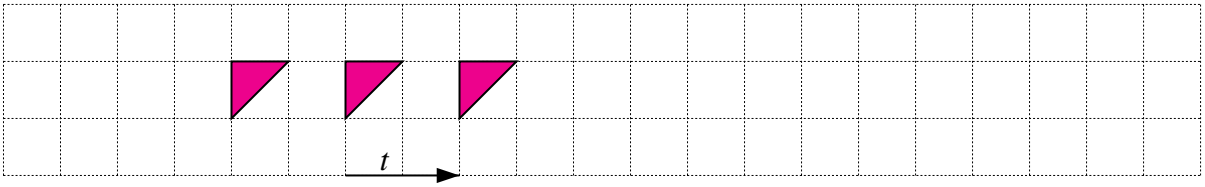


Fig. 105

En recommençant le raisonnement, on complète la figure indéfiniment vers la droite et vers la gauche. On obtient ainsi la frise de groupe $\mathcal{T}$ illustrée à la figure 106.

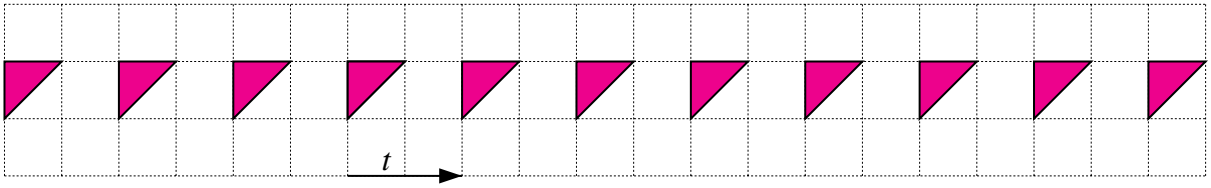


Fig. 106

Comme la frise a pu être construite à partir du motif et de la seule translation t, qui correspond à la translation minimale de gauche à droite laissant la frise invariante, on peut se demander si toutes les translations du groupe ne peuvent pas être obtenues à partir de t, par composition.

En effet, si le groupe contient t, il doit contenir t^{-1} et toute les composées que l'on peut obtenir à partir de ces deux translations inverses. On retrouve évidemment l'identité par la composée

$t \circ t^{-1}$. Notons

$$t \circ t = t^2, \quad t \circ t \circ t = t^3, \quad t \circ t \circ t \circ t = t^4, \ldots$$
$$t^{-1} \circ t^{-1} = t^{-2}, \quad t^{-1} \circ t^{-1} \circ t^{-1} = t^{-3}, \quad t^{-1} \circ t^{-1} \circ t^{-1} \circ t^{-1} = t^{-4}, \ldots$$

Les élèves découvriront et établiront sans peine que

$$t^2 = 2\,t, \quad t^3 = 3\,t, \quad t^4 = 4\,t, \ldots$$
$$t^{-2} = -2\,t, \quad t^{-3} = -3\,t, \quad t^{-4} = -4\,t, \ldots$$

et d'une manière générale,

$$t^i \circ t^j = t^j \circ t^i = t^{i+j} = (i+j)\,t,$$

pour toute valeur entière, positive ou négative de i et j. L'identité correspond à $t^i \circ t^{-i} = t^0 = 0\,t$.

Toutes les isométries laissant invariante la frise T ont été ainsi retrouvées, on dit que le groupe $\mathcal{T}$ des isométries qui la conservent est engendré par la translation t, ce qui est noté $\mathcal{T} = < t >$.

Précisons les notations et le vocabulaire.

$< t >$ est la notation désignant le *groupe engendré* par la translation t,
t est un *générateur* du groupe $< t >$.

Plus généralement,

$< p_1, p_2, p_3, \ldots >$ désigne le *groupe engendré* par les transformations p_1, p_2, p_3, ... ;
p_1, p_2, p_3, ... sont des *générateurs* du groupe $< p_1, p_2, p_3, \ldots >$.

Le groupe $\mathcal{H}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_h d'axe h.

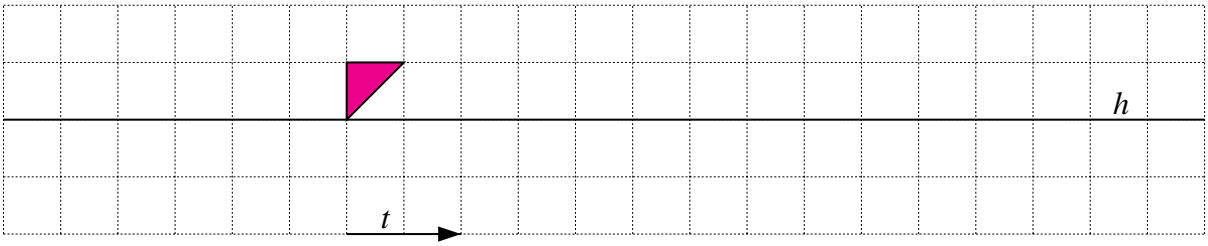


Fig. 107

On complète d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie d'axe h, puis par la translation t (figures 108 et 109).

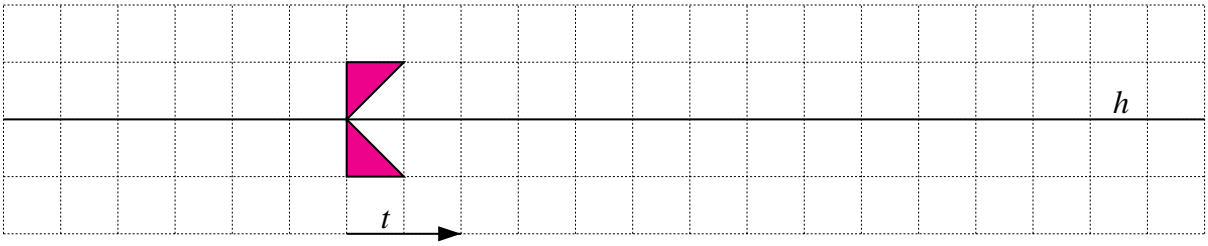


Fig. 108

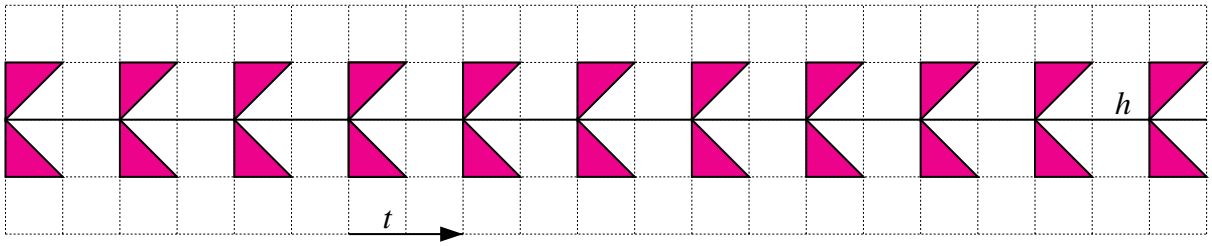


Fig. 109

On obtient finalement la frise de groupe $\mathcal{H}$, illustrée à la figure 109.

Si on procède dans l'ordre inverse, en complétant d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t, l'étape intermédiaire est illustrée à la figure 106.

Par quelles isométries le groupe $\mathcal{H}$ peut-il être engendré ?

La translation t engendre toutes les translations multiples de t ; en composant celles-ci avec la symétrie s_h, on obtient toute la famille des symétries glissées d'axe h et de glissement kt (k entier). Les générateurs du groupe sont donc t et s_h, on a $\mathcal{H} = < t, s_h >$

Le groupe $\mathcal{V}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par les symétries s_a et s_b, respectivement d'axes a et b.

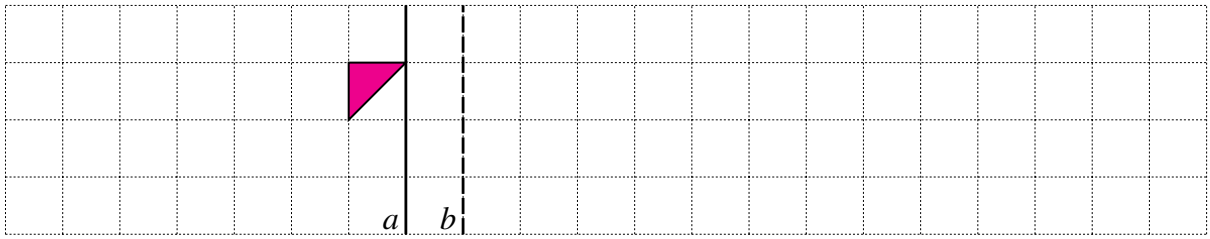


Fig. 110

On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie s_a,

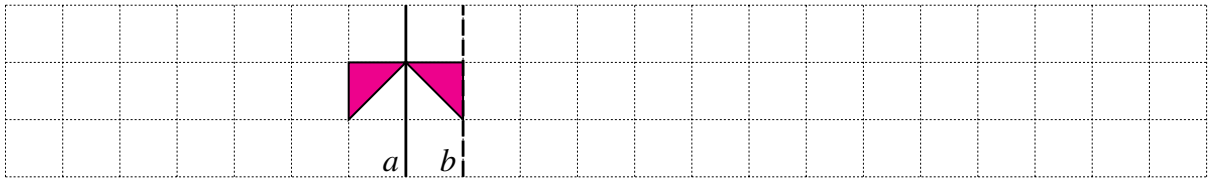


Fig. 111

puis par la symétrie s_b,

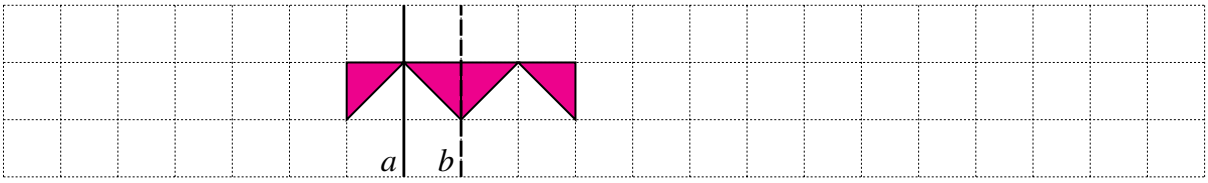


Fig. 112

et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_a et s_b.

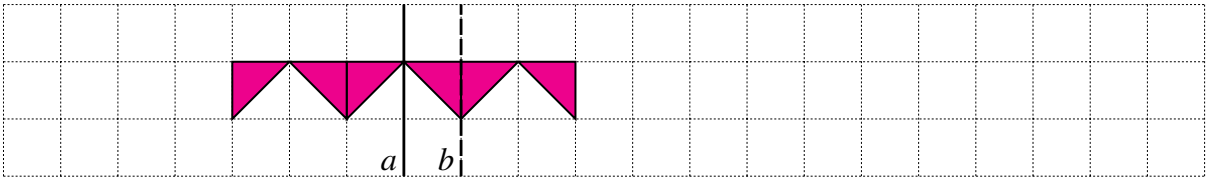


Fig. 113

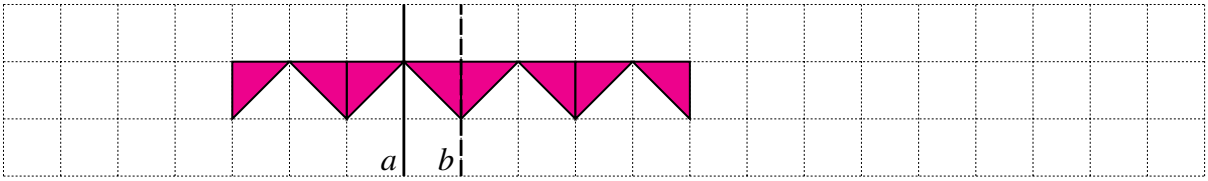


Fig. 114

On obtient finalement la frise de groupe $\mathcal{V}$, illustrée à la figure 115. Traçons sur la même figure la translation minimale t qui applique la frise sur elle-même. On observe que l'image du motif initial par la composée $s_b \circ s_a$ coïncide avec son image par la translation t.

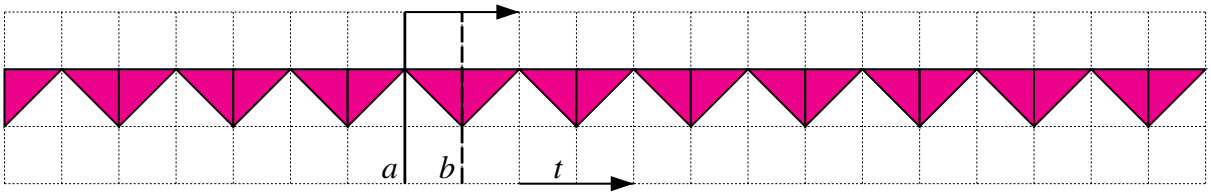


Fig. 115

C'est l'occasion d'étudier de manière plus générale la composition de deux symétries d'axes parallèles.

Montrer que la composée des symétries d'axes parallèles a et b est une translation. Préciser de quelle translation il s'agit.

Construisons, comme le montre la figure 116, l'image d'un point P quelconque du plan, par la composée $s_b \circ s_a$. Sur cette figure,

- P' est l'image de P par la symétrie s_a d'axe a,
- P'' est l'image de P' par la la symétrie s_b d'axe b, ou encore l'image de P par la composée $s_b \circ s_a$ de la symétrie d'axe a suivie de la symétrie d'axe b,

– les points A et B sont les points d'intersection de la droite PP'' avec les axes a et b.

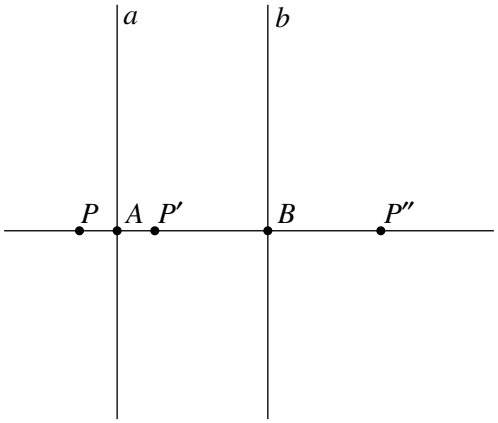


Fig. 116

Puisque la droite PP'' est perpendiculaire aux axes a et b, la longueur $|AB|$ est la distance qui sépare ces deux axes de symétrie. Comme $|PA| = |AP'|$ et que $|P'B| = |BP"|$, on a $|PP"| = 2|AB|$ pour tout point P du plan. Ainsi la composée $s_b \circ s_a$ est un déplacement tel que $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$. Il s'agit donc de la translation dont le vecteur est perpendiculaire aux axes a et b, de longueur double de la distance entre les axes et dont le sens va de a vers b. Notons que la composée $s_a \circ s_b$ est la translation inverse de la précédente, de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

Pour la frise de la figure 115, on a donc

$$s_b \circ s_a = t \quad \text{et} \quad s_a \circ s_b = t^{-1}.$$

La composition de deux symétries d'axes parallèles n'est donc pas commutative. On a aussi

$$s_b \circ s_a \circ s_a = t \circ s_a \quad \text{et donc} \quad s_b = t \circ s_a,$$

puisque s_a est sa propre inverse. De même,

$$s_b \circ s_b \circ s_a = s_b \circ t \quad \text{et donc} \quad s_a = s_b \circ t.$$

Le groupe $\mathcal{V}$ peut être engendré par deux symétries d'axe vertical : $\mathcal{V} = < s_a, s_b >$, ou par une symétrie d'axe vertical et une translation : $\mathcal{V} = < s_a, t >$. Les symétries du groupe sont obtenues par composition de s_a avec les translations engendrées par t.

Le groupe $\mathcal{CHV}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par les symétries s_a et s_h, respectivement d'axe a et h.

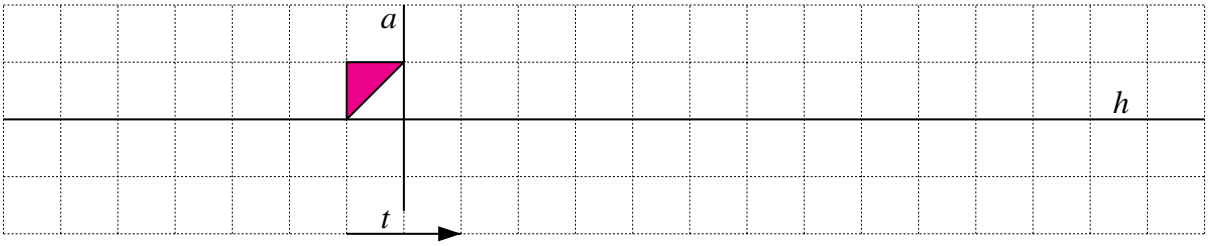


Fig. 117

Nous illustrons une des démarches possibles. Quel que soit l'ordre dans lequel on procède pour compléter la figure, on obtient toujours finalement la frise de type $\mathcal{CHV}$ de la figure 120.

Complétons tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie s_a,

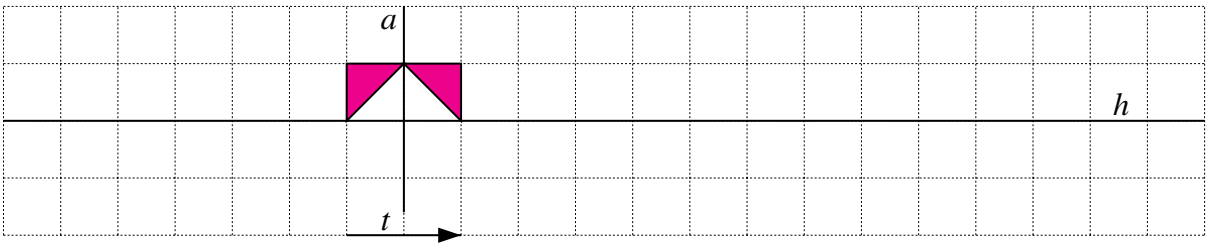


Fig. 118

puis par la symétrie s_h,

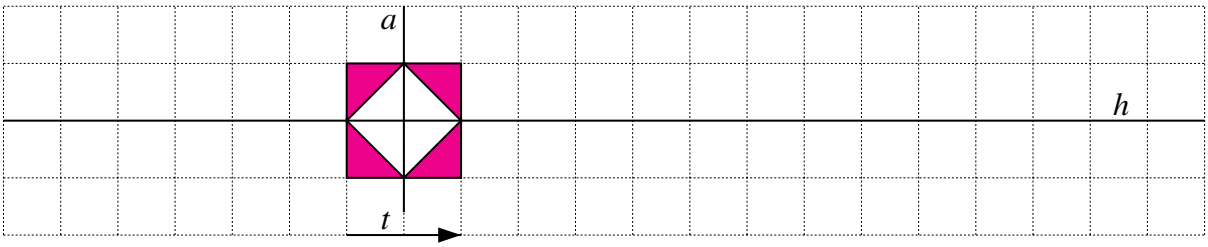


Fig. 119

et finalement par la translation t.

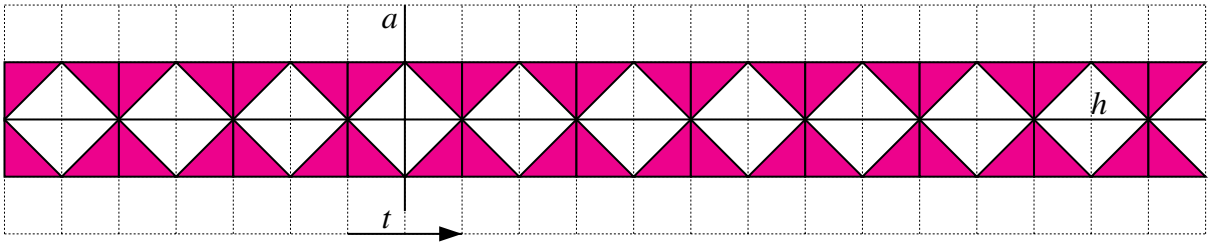


Fig. 120

Les élèves disposent de tous les éléments pour justifier que $\mathcal{CHV} = < t, s_a, s_h >$:

- la translation t engendre toutes les translations du groupe, les translations kt multiples de t,
- les symétries glissées sont obtenues par composition de s_h avec les translations du groupe,
- les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations du groupe,
- les symétries centrales sont obtenues par composition de s_h avec les symétries d'axe vertical.

Le groupe $\mathcal{G}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g d'axe h et de glissement g.

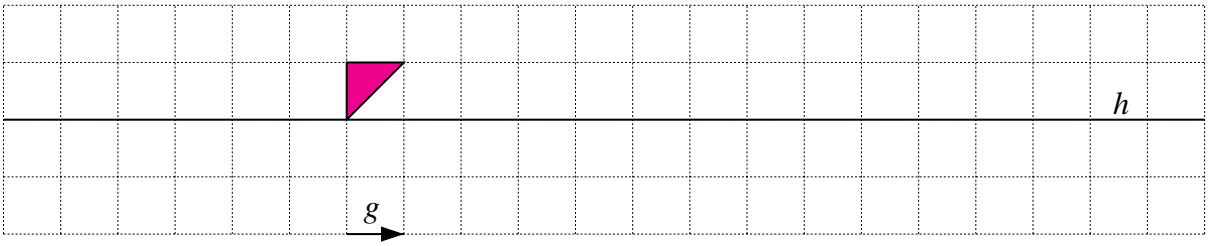


Fig. 121

Complétons tout d'abord la figure en ajoutant un triangle « retourné » à gauche (celui dont le motif initial est l'image par la symétrie glissée s_g), et un autre à droite (l'image du motif initial par s_g).

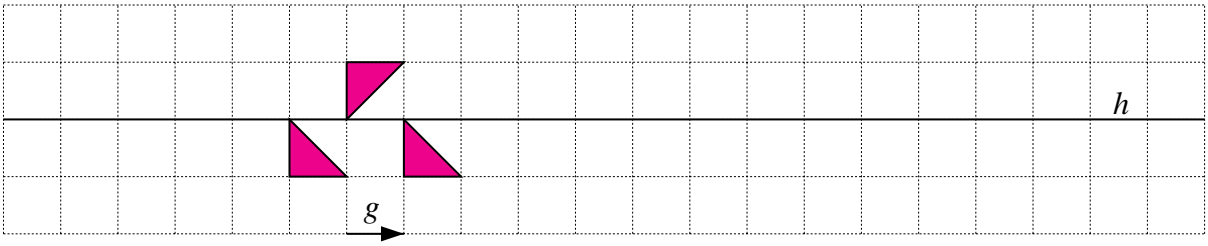


Fig. 122

Pour obtenir une figure invariante par la symétrie glissée, il faut prolonger indéfiniment dans les deux sens jusqu'à l'obtention de la frise de la figure 124.

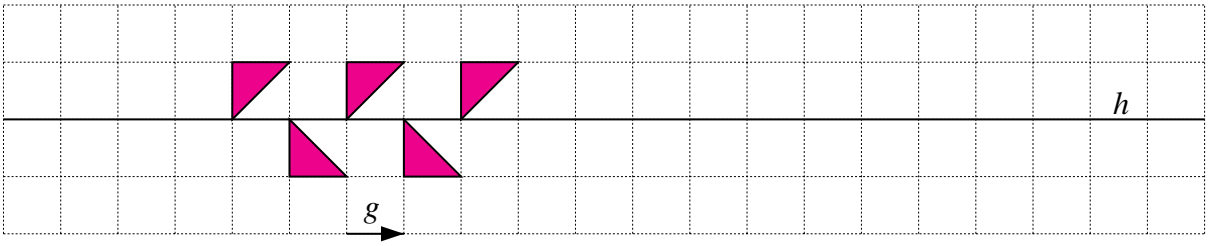


Fig. 123

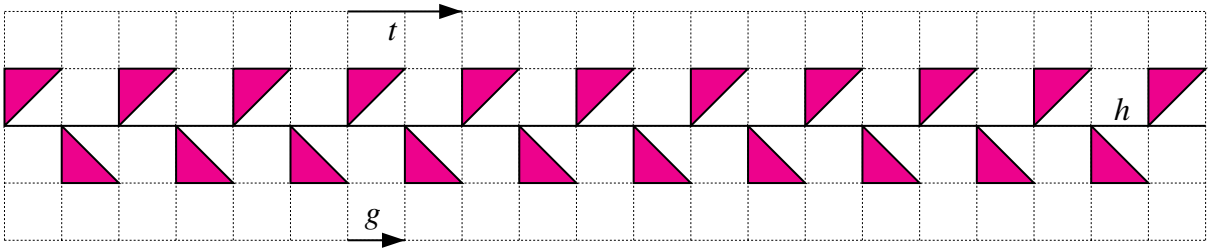


Fig. 124

On a

$$s_g^2 = s_g \circ s_g = g \circ s_h \circ s_h \circ g = g^2 = 2g,$$

c'est la translation minimale t qui applique la frise sur elle-même. Les translations du groupe

sont les puissances d'exposants pairs de s_g, les symétries glissées sont les puissances d'exposants impairs. On conclut que $\mathcal{G} =< s_g >$.

Le groupe $\mathcal{C}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_C de centre C.

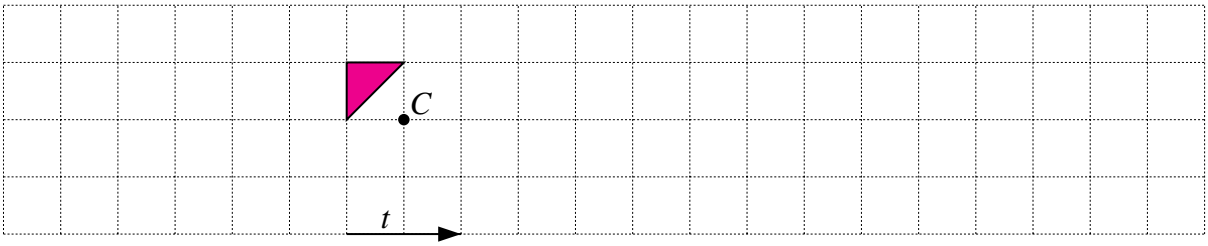


Fig. 125

On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C,

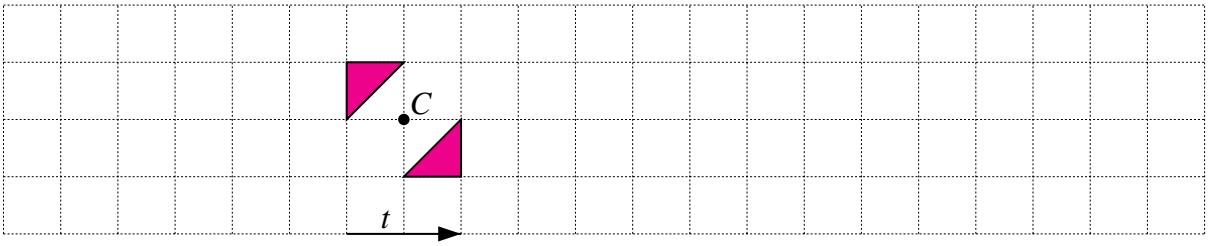


Fig. 126

puis par la translation t.

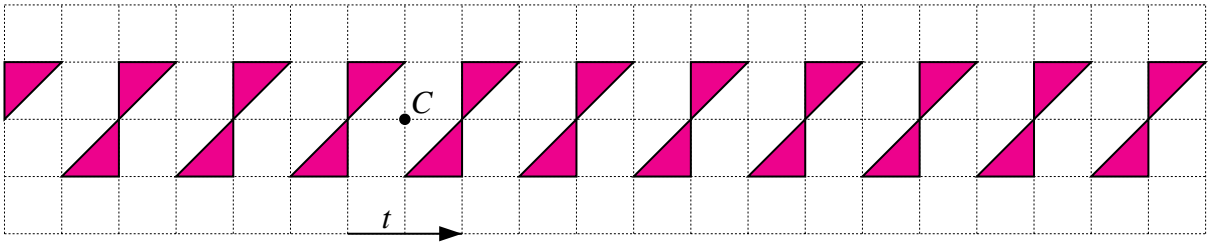


Fig. 127

La composée $s_D \circ s_C$ de deux symétries centrales de centres C et D est la translation t de vecteur $2\overrightarrow{CD}$. On peut demander aux élèves d'établir cette propriété et d'en déduire que les symétries centrales sont obtenues par composition de la symétrie s_C avec les translations du groupe.

Les élèves disposent alors de tous les éléments pour justifier que $\mathcal{C} =< t, s_C >$.

Le groupe $\mathcal{CV}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.

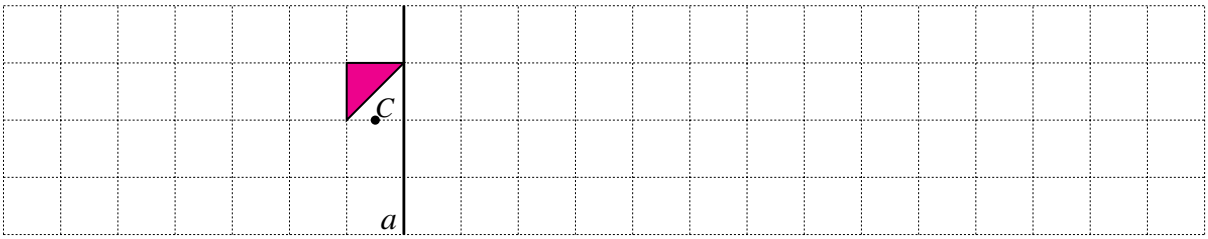


Fig. 128

On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C, puis par la symétrie s_a d'axe a,

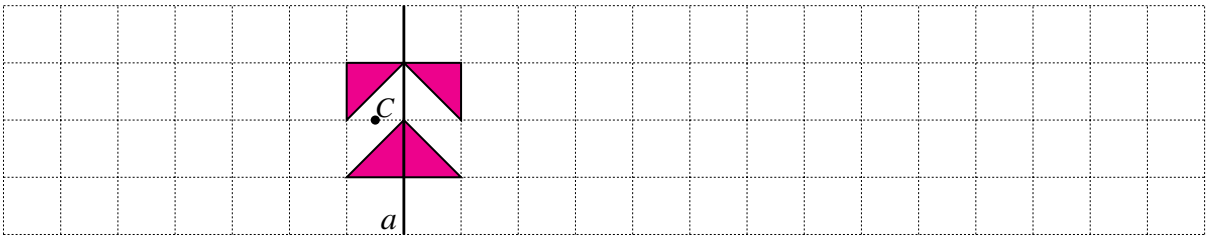


Fig. 129

et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_C et s_a, jusqu'à l'obtention de la frise de la figure 132.

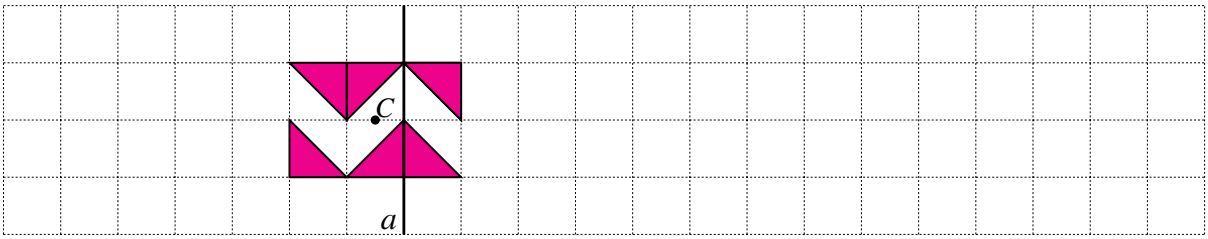


Fig. 130

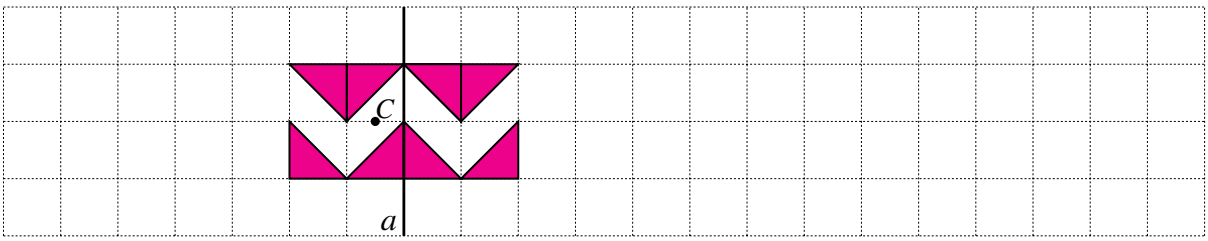


Fig. 131

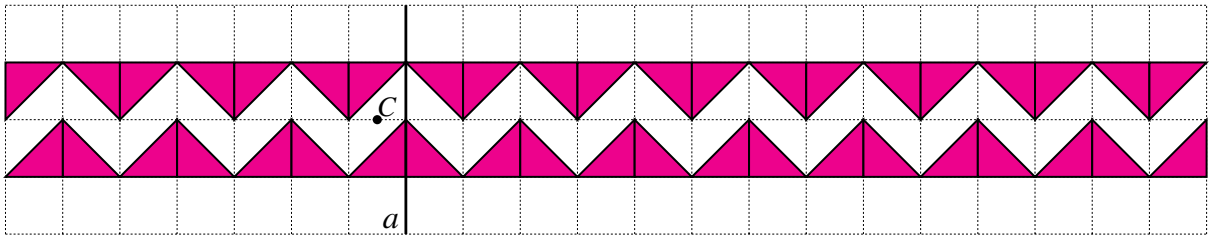


Fig. 132

Ajoutons sur la figure l'axe médian h, la translation de glissement g et la translation t. La symétrie glissée $s_g = s_h \circ g = g \circ s_h$ applique la frise sur elle-même, ainsi que la translation $t = s_g^2$.

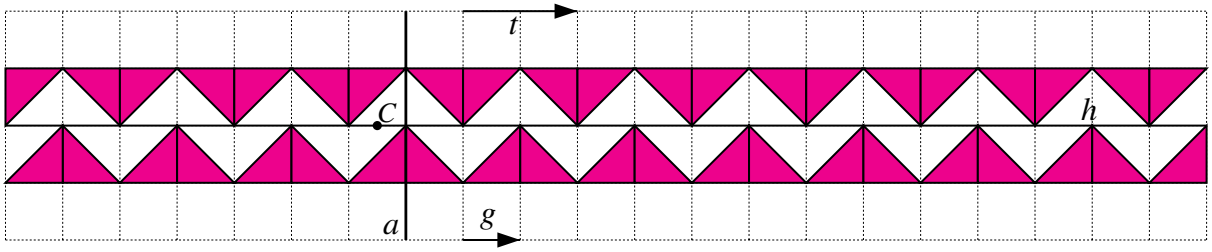


Fig. 133

On a $s_g = s_a \circ s_C$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{CV} = < s_C, s_a >$:
– par la composition de s_a et s_C, on obtient la symétrie glissée s_g,
– les symétries glissées sont obtenues comme puissances à exposant impair de s_g,
– les translations kt sont obtenues comme puissances à exposant pair de s_g,
– les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations,
– les symétries centrales sont obtenues par composition de s_C avec les translations.

Prolongement possible

La fiche 58 (page 379) montre qu'on obtient la même frise à partir du même triangle initial, soit en complétant la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g et par la symétrie s_C de centre C, soit en la complétant pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g et par la symétrie s_a d'axe a.

Le groupe $\mathcal{CV}$ peut aussi être engendré par s_g et s_C ou par s_g et s_a. En effet, comme $s_a \circ s_C = s_g$, on a aussi :

$$s_a \circ s_a \circ s_C = s_a \circ s_g \quad \text{et donc} \quad s_C = s_a \circ s_g,$$

$$s_a \circ s_C \circ s_C = s_g \circ s_C \quad \text{et donc} \quad s_a = s_g \circ s_C.$$

Le dernier exercice de la fiche montre qu'en modifiant la position du centre de symétrie, on obtient une autre frise assez différente d'aspect, mais également de type CV.

La fiche 59 récapitule les sept frises construites à partir du triangle rectangle. Quant aux fiches 60 et 61, elles proposent d'autres exercices de construction et leur solution.

Annexe II

Fiches à photocopier

Extrait du *Ménon* de Platon

Ménon : Soit, Socrate. Mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas, mais que ce que nous appelons le savoir est une réminiscence ? Peux-tu me montrer qu'il en est ainsi ?

Socrate : Je t'ai dit tout à l'heure, Ménon, que tu étais adroit et maintenant tu demandes si je peux t'instruire, moi qui affirme qu'il n'y a pas d'enseignement, mais <seulement> réminiscence. Pour que tout de suite je me contredise moi-même.

Ménon : Nullement, Socrate, par Zeus ! Ce n'était pas mon intention, c'est seulement l'habitude qui m'a fait parler ainsi. Mais s'il t'est possible de me prouver qu'il en est comme tu dis, prouve<-le>.

Socrate : Cela n'est pas facile, cependant j'<y> mettrai beaucoup d'ardeur, par amitié pour toi. Mais appelle pour moi un <membre> de ta nombreuse suite, celui que tu voudras, pour que je te <le> prouve par lui.

Ménon : Certes. (S'adressant à un esclave) Viens ici.

Socrate : Est-il Grec ? Sait-il le grec ?

Ménon : À coup sûr. <Il est> né chez moi.

Socrate : Veille à <déterminer> s'il semble, soit se souvenir, soit apprendre de moi.

Ménon : J'<y> veillerai.

Socrate : (à l'esclave) Dis-moi, mon enfant, sais-tu que ceci est une surface carrée ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Et que la surface carrée a toutes ces lignes égales, au nombre de quatre[2] ?

L'esclave : Certainement.

Socrate : N'a-t-elle pas aussi ces lignes par le centre égales[3] ?

L'esclave : Si.

Socrate : Eh bien, une telle surface ne pourrait-elle <être rendue> plus grande ou plus petite ?

L'esclave : Certainement.

Socrate : Si donc ce côté était de deux pieds et celui-ci aussi, de combien de pieds serait le tout ? Envisage <les choses> de la manière suivante : s'il y avait deux pieds pour ce <côté> et un pied seulement pour ce <côté>, la surface ne serait-elle pas d'une fois deux pieds ?

L'esclave : Si.

Socrate : Et quand ce <côté> aussi <est> de deux pieds, ne produit-on pas <une surface> de deux fois deux ?

L'esclave : On <la> produit.

Socrate : On produit donc <une surface> de deux fois deux pieds ?

L'esclave : Oui.

Socrate : Combien de pieds font donc deux fois deux ? Dis-le moi après avoir fait le calcul.

L'esclave : Quatre, Socrate.

Socrate : Ne pourrait-on produire une autre <surface> double de cette surface, mais semblable, ayant toutes ses lignes égales comme celle-ci.

L'esclave : Oui.

Socrate : De combien de pieds sera-t-elle ?

L'esclave : Huit.

Socrate : Eh bien, essaie de me dire de quelle grandeur sera chaque côté de cette <surface>-là. Le côté de celle-ci <est> de deux pieds. Qu'<est> le <côté> du double.

[2] Il s'agit des côtés.

[3] Il s'agit des médianes.

L'esclave : Il est clair, Socrate, qu'<il est> double.
Socrate : Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais <lui> demande tout. Et maintenant, il croit savoir quel est le <côté> à partir duquel la surface de huit pieds est produite. Ne te semble-t-il pas ?
Ménon : Si.
Socrate : Le sait-il donc ?
Ménon : Certes non.
Socrate : Il pense en vérité <que la surface est produite> à partir d'un côté double.
Ménon : Oui.
Socrate : Mais observe maintenant qu'il se souvient progressivement, comme on doit se souvenir.

[. . .]

Socrate : (à l'esclave) N'est-ce pas que ce <côté>-ci deviendra double de celui-là, si nous <lui> ajoutons un autre aussi grand ici ?
L'esclave : Certainement.
Socrate : La surface de huit pieds sera donc, dis-tu, produite à partir de ce <côté> si quatre <côtés> de même longueur sont produits ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Nous tirerons donc quatre <côtés> identiques sur le modèle de celui-ci. La surface que tu dis être de huit pieds ne serait-elle pas celle-ci ?
L'esclave : Si.
Socrate : N'est-il pas que dans cette <nouvelle> surface, il y en a quatre dont chacune est égale à quatre pieds ?
L'esclave : Si.
Socrate : Quelle aire est donc produite ? N'est-elle pas quatre fois aussi grande ?
L'esclave : Sans doute.
Socrate : Donc, le quadruple d'une grandeur est son double ?
L'esclave : Non, par Zeus !
Socrate : Mais quel multiple <est-elle alors> ?
L'esclave : Le quadruple.
Socrate : Donc, mon enfant, sur un <côté> double est produit non pas une surface double, mais une surface quadruple.
L'esclave : Tu dis vrai.
Socrate : Et en effet quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas ?
L'esclave : Oui.
Socrate : À partir de quelle ligne <construire> une surface de huit pieds ? À partir de celle-ci, n'<avons-nous> pas <une surface> quadruple ?
L'esclave : Je l'affirme.
Socrate : Et à partir de cette <ligne> moitié, cette <surface> de quatre pieds ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Eh bien, la <surface> de huit pieds n'est-elle pas le double de celle-ci et la moitié de celle-là ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Ne sera-t-elle pas <construite> sur une ligne plus grande que celle-ci et plus courte que celle-là, n'est-ce pas ?
L'esclave : Il me semble.
Socrate : Bien. Mais décide ce qu'il te semble. Et dis-moi : cette <ligne->ci n'était-elle pas

de deux pieds et celle-là de quatre ?
L'ESCLAVE : Si.
SOCRATE : Il faut donc que le côté de la surface de huit pieds soit plus grande que celle-ci, celle de deux pieds, et plus petite que celle de quatre pieds.
L'ESCLAVE : Il le faut.
SOCRATE : Essaie de dire de quelle longueur tu crois qu'elle est.
L'ESCLAVE : Trois pieds.
SOCRATE : Si elle doit être de trois pieds, nous ajouterons la moitié de celle-ci et elle sera de trois pieds. En effet, <il y a> ici deux <pieds> et là un. Et, à partir d'ici, également deux <pieds> et un. Et cela produit la surface que tu dis.
L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Mais si ce <côté> est de trois <pieds> et celui-ci de trois <pieds>, la surface totale n'est-elle pas de trois fois trois pieds ?
L'ESCLAVE : Il semble.
SOCRATE : Trois fois trois, combien est-ce de pieds ?
L'ESCLAVE : Neuf.
SOCRATE : Mais de combien de pieds devait être le double ?
L'ESCLAVE : Huit.
SOCRATE : Donc, ce n'est pas encore sur le côté de trois pieds qu'est construite la surface de huit pieds ?
L'ESCLAVE : Certes non.
SOCRATE : Mais sur laquelle ? Essaie de nous le dire exactement et, si tu ne peux le calculer, montre-nous sur laquelle.
L'ESCLAVE : Mais, par Zeus, SOCRATE, je ne sais pas, moi.

[...]

SOCRATE : Ces quatre espaces ne sont-ils donc pas identiques ?
L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Et le tout, combien de fois est-il multiple de celui-ci ?
L'ESCLAVE : Quatre fois.
SOCRATE : Mais il nous fallait produire un <espace> double, tu ne t'en souviens pas ?
L'ESCLAVE : Certainement.
SOCRATE : N'est-il pas <vrai> que cette ligne <tracée> d'un angle à l'autre coupe chacune des surfaces <carrées> en deux ?
L'ESCLAVE : Si.
SOCRATE : N'est-il pas <vrai> que ces quatre lignes égales produisent cette surface <carrée> en l'entourant ?
L'ESCLAVE : Elles le font.
SOCRATE : Regarde maintenant : de quelle taille est cette surface <carrée> ?
L'ESCLAVE : Je ne sais pas.
SOCRATE : Chaque ligne n'a-t-elle pas délimité à l'intérieur <de la surface carrée> la moitié de chacune des quatre surfaces <carrées> présentes ?
L'ESCLAVE : Oui.
SOCRATE : Combien y a-t-il donc de telles <moitiés> dans cette <surface carrée> ?
L'ESCLAVE : Quatre.
SOCRATE : Et combien dans celle-ci ?
L'ESCLAVE : Deux.
SOCRATE : Et que sont quatre par rapport à deux ?

L'esclave : Le double.
Socrate : Et combien de pieds contient cette <surface> ?
L'esclave : Huit.
Socrate : À partir de quel côté <est-il construit> ?
L'esclave : À partir de celui-ci.
Socrate : À partir de la ligne tendue d'un angle à l'autre du <carré de> quatre pieds ?
L'esclave : Oui.
Socrate : Les sophistes nomment précisément cette <ligne> diamètre. Si diamètre est son nom, tu dirais, enfant de Ménon, que la surface double est produite à partir du diamètre.
L'esclave : C'est bien cela, Socrate.
Socrate : Que t'en semble-t-il, Ménon ? Y a-t-il une seule conjecture à laquelle il n'a pas répondu de lui-même ?
Ménon : Non, tout <vient> de lui.
Socrate : Et cependant il ne savait pas, nous l'avons dit il y a peu.
Ménon : Tu dis vrai.
Socrate : Ces opinions étaient assurément en lui, n'est-ce pas ?
Ménon : Oui.

[...]

Socrate : Le <fait que> l'on rappelle la science dans sa propre mémoire n'est-ce pas se ressouvenir ?
Ménon : Certainement.
Socrate : Et cette science, qu'il a maintenant, ne l'a-t-il pas, soit apprise un jour, soit eue depuis toujours ?

[...]

Ménon : Je sais que personne ne lui a jamais enseigné.
Socrate : A-t-il ces opinions, oui ou non ?
Ménon : <Cela> semble incontestable, Socrate.
Socrate : S'il ne les a pas acquises dans la vie actuelle, n'est-il pas dès lors évident qu'il <les> avait eues et apprises à quelque autre époque.
Ménon : Il <me> semble.
Socrate : Ce temps n'est-il pas justement celui où il n'était pas un homme ?
Ménon : Oui.

Platon, *Ménon*, 81e-86a, [117]

Enquête sur le cours d'éducation physique – Données

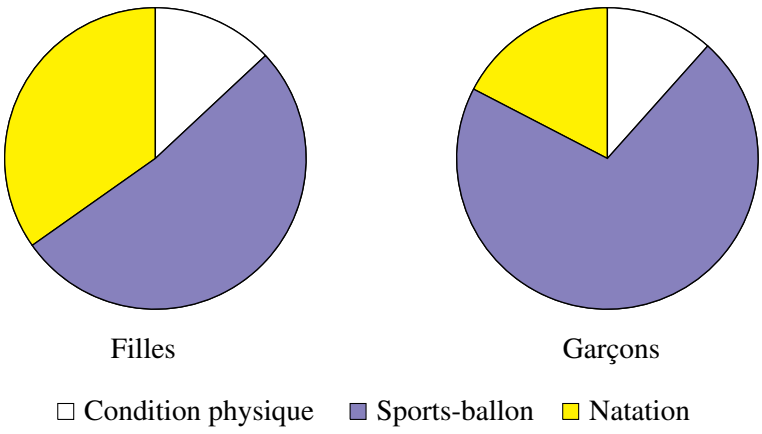
Les professeurs d'éducation physique d'une école ont soumis leurs élèves à une enquête afin de déterminer leurs préférences pour les trois grandes parties du cours : le développement et l'entretien de la condition physique, la formation aux sports-ballon et la natation.

Ils ont interrogé 468 filles et 701 garçons. Chacun devait cocher une seule case, celle correspondant à sa préférence.

Les résultats sont présentés dans deux tableaux.

Filles		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
61	243	164

Garçons		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
84	498	119



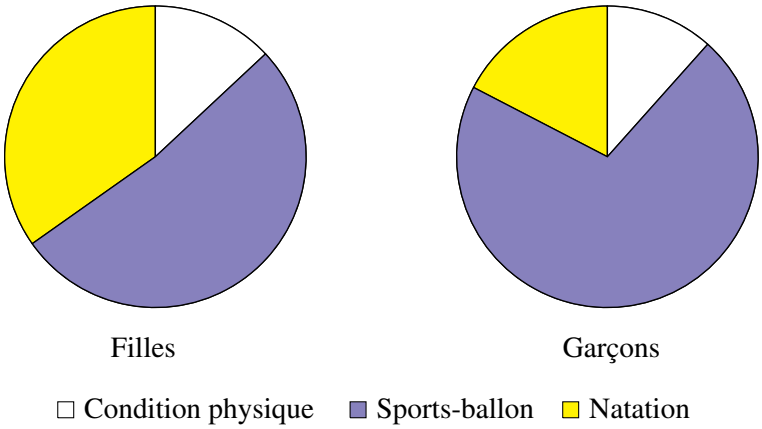
Comparer les choix des filles et ceux des garçons, à partir des tableaux et des graphiques.

Enquête sur le cours d'éducation physique – Pourcentages

Compléter les tableaux et les diagrammes circulaires en y indiquant les pourcentages.

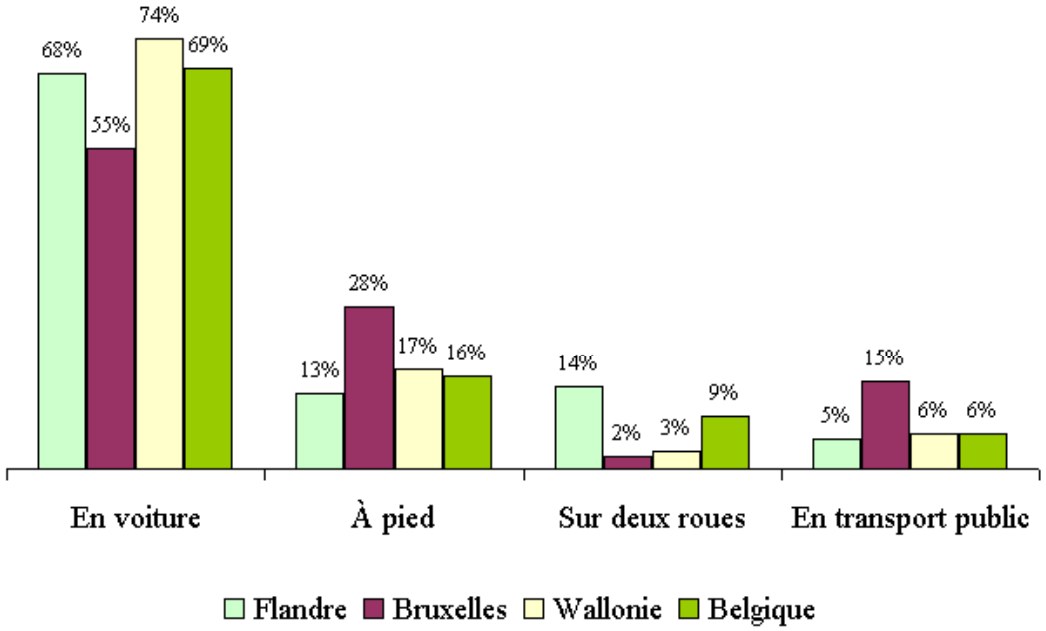
Filles		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
61	243	164

Garçons		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
84	498	119



Enquête sur les déplacements des Belges

Comment se déplacent les Belges ?



Répartition des déplacements d'un jour ouvrable selon le moyen de transport principal.

À Bruxelles, quel est le pourcentage des déplacements effectués à pied ?

En Wallonie, quel est le pourcentage des déplacements effectués en voiture ?

En Flandre, quel est le pourcentage des déplacements effectués sur deux roues ?

En Belgique, quel est le pourcentage des déplacements effectués à l'aide d'un moyen de transport public ?

À part la voiture, moyen de transport privilégié partout en Belgique, quel est le mode de déplacement le plus utilisé en Flandre ? à Bruxelles ? en Wallonie ?

Dans quelle partie du pays les déplacements en transport public sont-ils plus fréquents que dans les autres régions ?

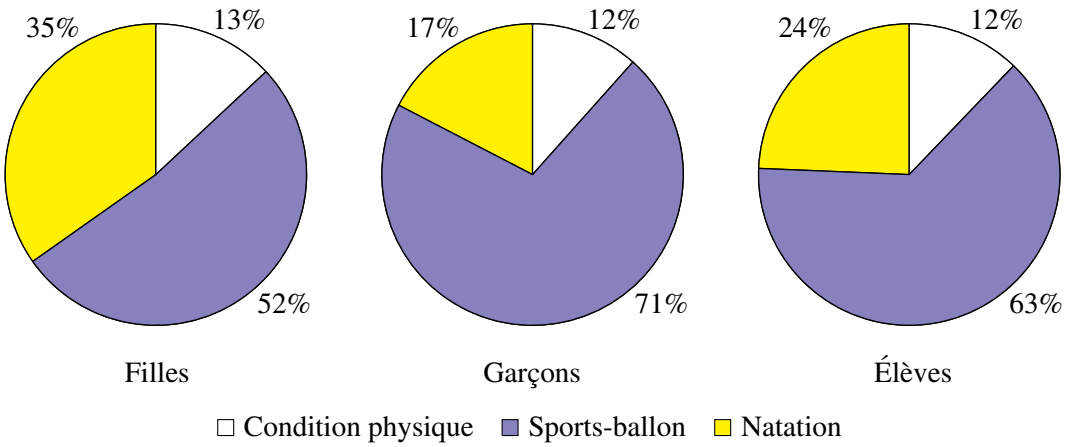
Dans quelle région les déplacements sur deux roues ont-ils le plus de succès ?

En observant les diagrammes, peut-on affirmer que, en Belgique, 22 % des déplacements sont effectués soit à pied, soit à l'aide d'un moyen de transport public ? Pourquoi ?

En Wallonie, seuls 9 % des déplacements ne sont effectués ni en voiture, ni à pied. Vrai ou faux ?

En regardant la partie du diagramme qui concerne les déplacements à pied, quelqu'un affirme que 58 % des déplacements des Belges se font à pied puisque $13\,\% + 28\,\% + 17\,\% = 58\,\%$. A-t-il tort ou raison ?

Enquête sur le cours d'éducation physique
Répartition des élèves



Filles		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
61	243	164
13 %	52 %	35 %

Garçons		
Condition physique	Sports-ballon	Natation
84	498	119
12 %	71 %	17 %

Effectuer les calculs nécessaires pour vérifier les pourcentages affectés au troisième diagramme.

Élèves		
Condition physique	Sports-ballon	Natation

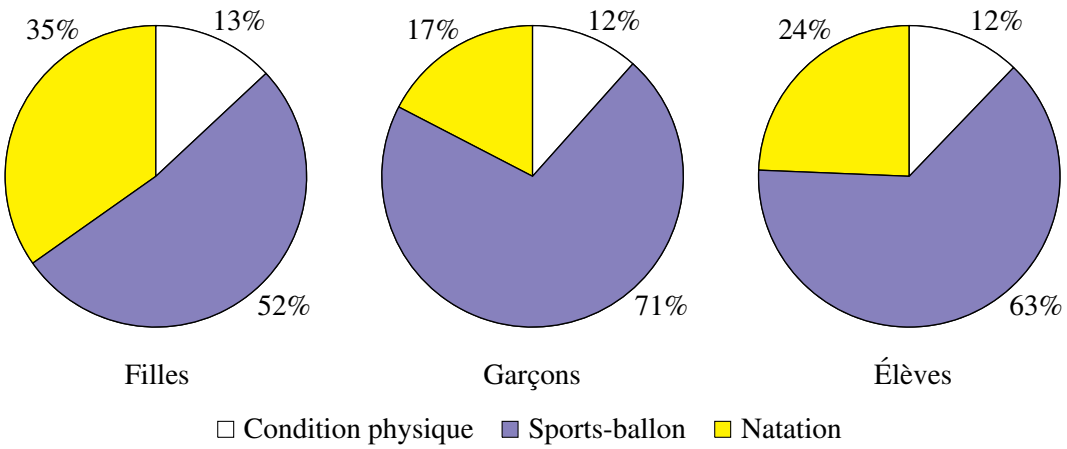
Vrai ou faux ?

Il y a 29 % des garçons qui préfèrent la natation ou l'entretien de la condition physique.

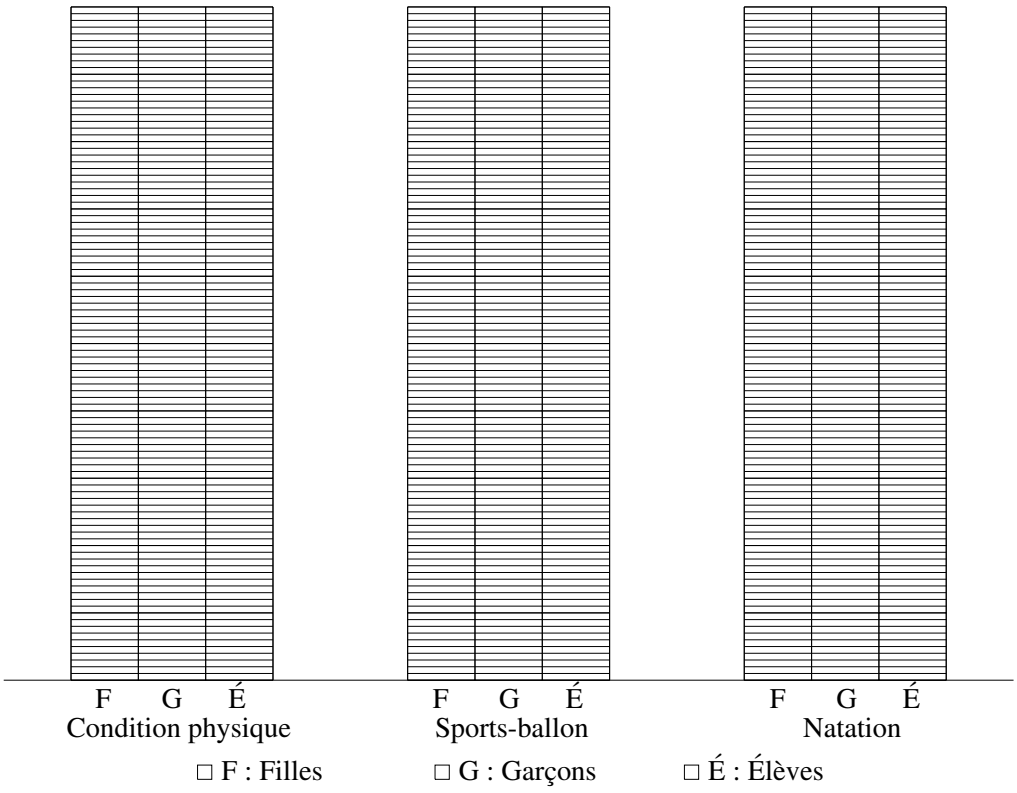
Sachant que 13 % des filles et 12 % des garçons préfèrent la condition physique, 25 % des élèves choisissent ce type d'activité.

Enquête sur le cours d'éducation physique

Construction d'un diagramme rectangulaire



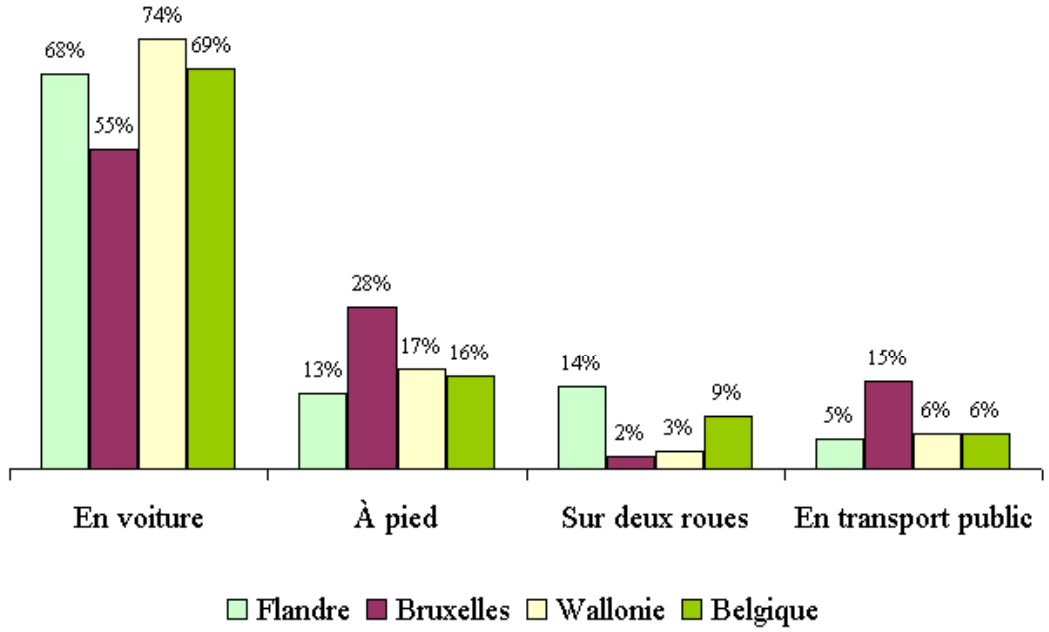
À partir de ces trois diagrammes circulaires, construire un graphique rectangulaire illustrant les préférences des filles, des garçons et des élèves en général pour les trois grandes parties du cours : le développement et l'entretien de la condition physique, la formation aux sports-ballon et la natation.



Enquête sur les déplacements des Belges

Construction de diagrammes circulaires

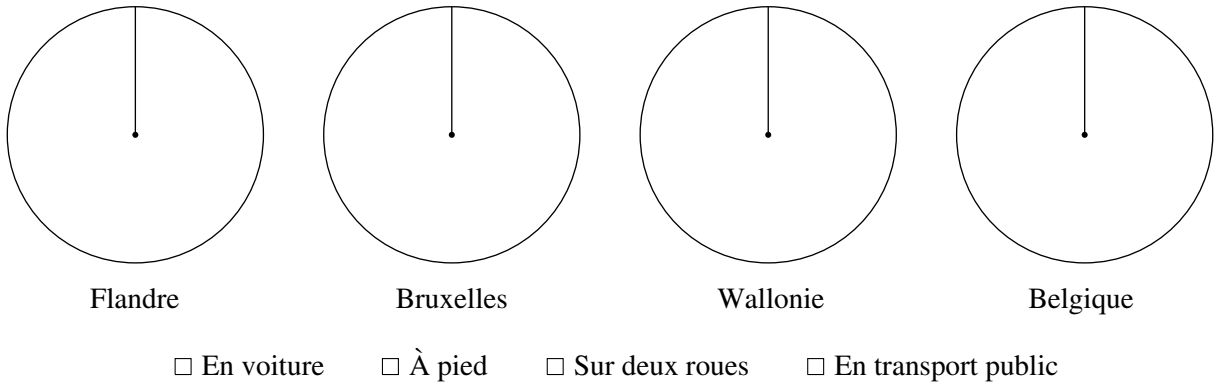
Comment se déplacent les Belges ?



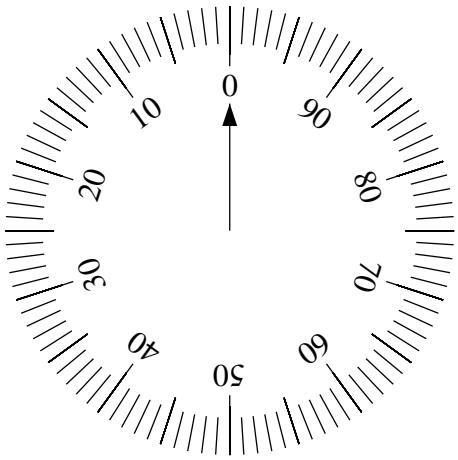
Répartition des déplacements d'un jour ouvrable selon le moyen de transport principal.

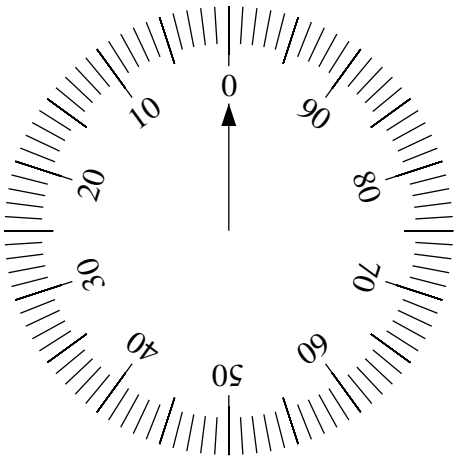
À partir de ce graphique, construire quatre diagrammes circulaires, représentant respectivement les déplacements en Flandre, à Bruxelles, en Wallonie et en Belgique.

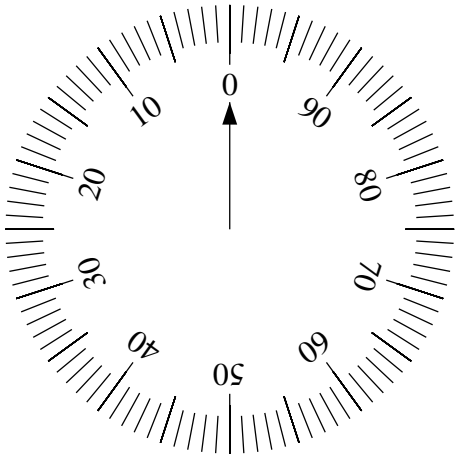
Indication : utiliser un rapporteur en « pour cent ».

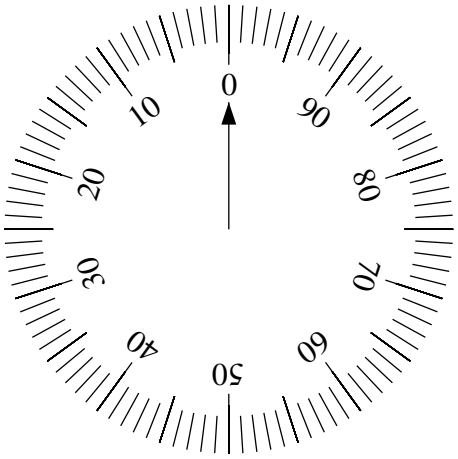


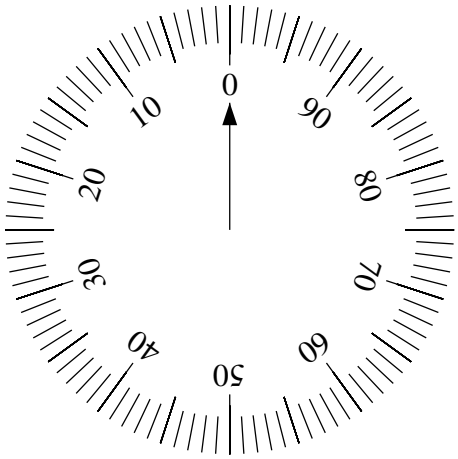
Rapporteurs en « pour cent »

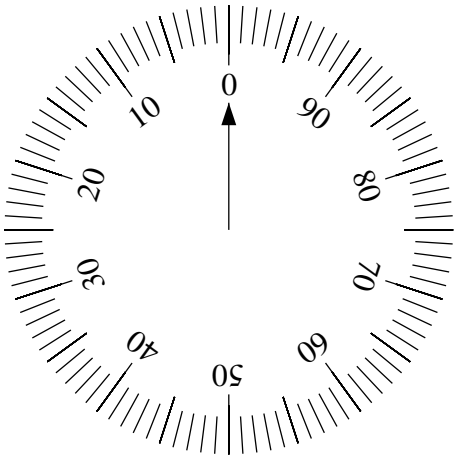












Calculer un pourcentage d'un nombre

Un commerçant doit calculer les montants de TVA d'une série d'articles soumis au taux légal de 21 %, et dont les prix hors TVA sont :

120 € 250 € 172 € 344 € 370 €
1000 € 480 € 750 € 100 € 1 €

Effectuer les calculs et les présenter dans un tableau.

Prix hors TVA (en €)	Montant de TVA (en €)
120	
250	
172	
344	
370	
1 000	
480	
750	
100	
1	



Écrire la séquence de touches qui permet de calculer le montant de TVA.

Majorer un montant d'un pourcentage

Un autre commerçant doit calculer les prix à indiquer sur les étiquettes d'une série d'articles soumis au taux légal de 6 %, et dont les prix hors TVA sont :

12 €	25 €	72 €	144 €	36 €
100 €	48 €	75 €	10 €	1 €

Effectuer les calculs et les présenter dans un tableau.

Prix hors TVA (en €)	Montant de TVA (en €)	Prix TVA comprise (en €)
12		
25		
72		
144		
36		
100		
48		
75		
10		
1		

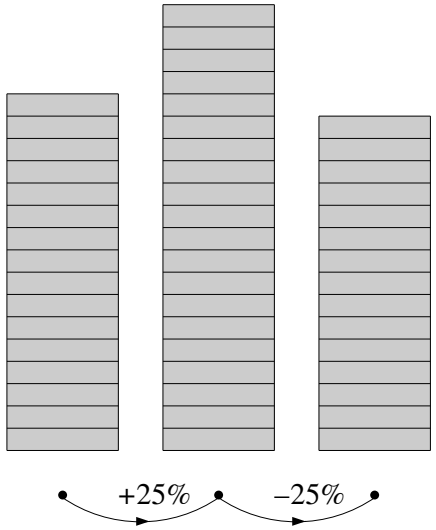


Écrire la séquence de touches qui permet de calculer le prix TVA comprise, sans calculer le montant de TVA.

Augmentation et diminution successives d'un même pourcentage

Le graphique ci-dessous illustre ce qu'il advient d'une quantité qui subit successivement une augmentation de 25 %, suivie d'une diminution de ce même pourcentage.

Interpréter ce graphique et généraliser.



Réaliser le schéma qui illustre ce qu'il advient d'une quantité qui subit successivement une diminution de 25 %, suivie d'une augmentation de ce même pourcentage.

Les schémas montrent clairement que la quantité a diminué d'un même pourcentage dans les deux cas.

Calculer le pourcentage de cette diminution et l'interpréter graphiquement.

Superficies boisées en Union Européenne et en Chine

Vers 1990, dans l'Union Européenne, 31 % du territoire est couvert de forêts pour seulement 16 % du territoire de la Chine.

Peut-on dire pour autant qu'il y a, dans l'Union Européenne, plus de territoires boisés qu'en Chine ?

	Superficie en km^2	Superficie boisée en km^2	Taux de boisement
Union Européenne			31 %
Chine			16 %

Le déboisement dans le monde

Calcul du taux de déboisement

Au début des années 2000, les forêts du monde occupaient 3,9 milliards d'hectares. Entre 1980 et 1990, on a constaté une perte de 130 millions d'hectares et entre 1990 et 2000, une perte de 90 millions d'hectares.

Calculer en %, le taux de déboisement pour chacune de ces périodes.

Années	Superficie totale de la forêt en millions d'ha
2000	3 900
1990	
1980	

Comparaison des résultats avec des données trouvées sur Internet

Le 17/03/2003, cherchant sur Internet des données relatives au déboisement de notre planète, nous avons trouvé à l'adresse

`http://www.forestinformation.com/french/Forest_statistics.asp`

des informations dont voici un extrait.

« Au début des années 2000, les forêts du monde occupaient 3,9 milliards d'hectares, soit 29,6 % de la surface émergée du globe, qui représente 13,1 milliards d'hectares. Entre 1980 et 1990, on a constaté une perte nette de 130 millions d'hectares ou 3 % de la superficie émergée du globe. Entre 1990 et 2000, la perte nette a été de 90 millions d'hectares, ce qui représente 2,3 % de la superficie totale de la forêt ».

Comparer ces données aux calculs que l'on vient de faire.

Le clivage Nord-Sud

Toutes les données que nous avons consultées indiquent que le taux de déboisement n'est pas uniforme dans les différentes parties du monde. Nous nous intéressons ici à des données fournies par la FAO (1999), qui distingue seulement deux catégories : les régions du globe situées au Nord et celles situées au Sud.

On y apprend qu'entre 1990 et 1995, le monde aurait perdu 11 269 000 ha de forêts par an. Voici des chiffres calculés à partir de données recueillies en mai 2003 sur le site IDD (Indicateurs pour un Développement Durable).

`http://club.euronet.be/idd/documents/indicateurs/indic01-2.pdf`

Partie du monde	Superficie boisée en milliers d'hectares en 1990	Variation annuelle en %
Nord	1 618 431	$+0,1$
Sud	1 892 296	$-0,7$

Calculer, année après année, les superficies boisées de chaque partie du globe après chaque perte ou chaque gain.

Ces résultats conduisent-ils à ce qui est annoncé dans le texte : « Entre 1990 et 1995, le monde aurait perdu 11 269 000 hectares par an » ?

Causes et conséquences du déboisement

Le texte qui suit est extrait du document « Indicateurs pour un développement durable ». Il propose des hypothèses sur les causes du déboisement et analyse les différences entre les pays du monde situés au Nord et ceux situés au Sud.

Le Brésil et l'Indonésie enregistrent les plus grandes pertes en valeur absolue, suivis du Congo, de la Bolivie, du Mexique, du Venezuela. La forêt tropicale apparaît donc comme la plus affectée en *quantité absolue*. Sans doute des raisons écologiques y contribuent : l'emprise des feux dans les forêts tropicales dégradées et la fragilité des sols tropicaux, qui, rendant l'agriculture peu durable, incite à répéter les défrichements. Mais les contraintes de l'environnement n'expliquent pas tout. En *grandeurs relatives*, c'est dans les pays pauvres non tropicaux que le déboisement est le plus fort : le Liban détient le record mondial (-7,8 %) par an, suivi de l'Afghanistan (-6,8 %) par an. Plus près de nous, l'Algérie perd 1,2 % par an, donc plus que les pays tropicaux.

Il semble ainsi que la déforestation pourrait, avec la pauvreté et la croissance démographique, être tenue comme un critère d'appartenance au tiers monde, sans que ce critère ne doive être pris isolément. Les exceptions à la règle sont rares en tout cas.

Le même document insiste ensuite sur les conséquences de cette situation.

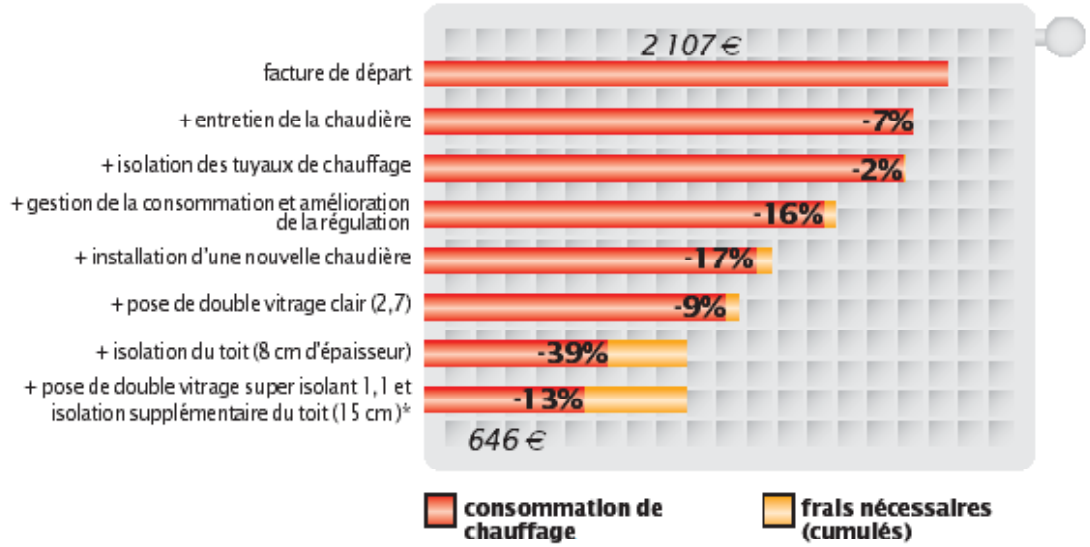
Sur le plan économique, le bilan global est atténué par la part croissante des forêts artificielles, en général plus productives que les forêts naturelles. Néanmoins, elles n'ont pas toujours la même résilience, donc la même durabilité, et elles répondent davantage aux demandes de l'industrie qu'aux besoins des populations locales, qui dépendent d'une diversité de produits et de services offerts par la végétation naturelle.

Dans une large mesure, la déforestation traduit une surexploitation des forêts directe (pour le bois) ou indirecte (par la fertilité des terres récemment défrichées), donc une gestion non durable.

Sur le plan environnemental, les plantations ne jouent pas le rôle compensatoire envers les pertes de biodiversité et les rôles écologiques. La déforestation globale est susceptible d'affecter les climats. Elle est aussi de nature à amplifier les conséquences du changement climatique global, par la perte des fonctions régulatrices exercées par la forêt sur le régime des eaux.

Économies d'énergie

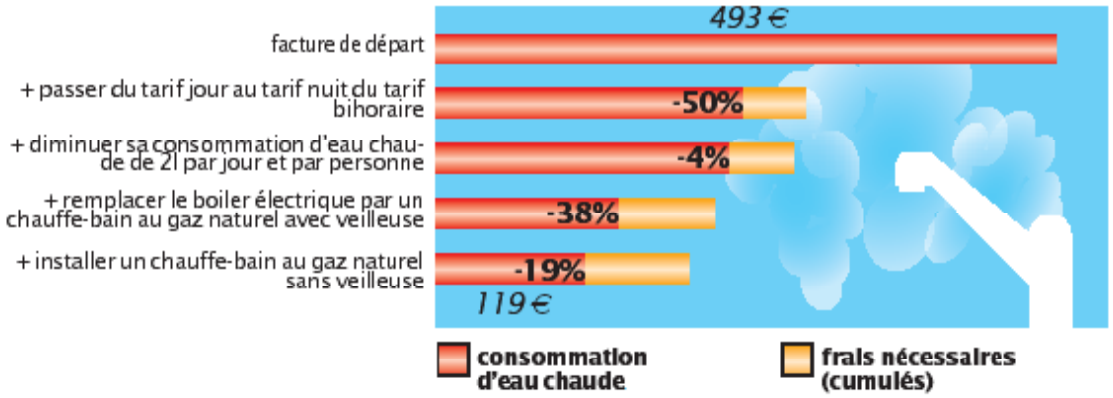
Le graphique ci-dessous montre comment une facture d'énergie de 2 107 € pour une fermette à rénover peut se réduire à 646 € lorsqu'on cumule une série d'interventions.



*bien entendu cette opération doit se passer au moment du changement des châssis ou lors de la première isolation du grenier.

Quels sont les calculs qui conduisent à un tel résultat ?

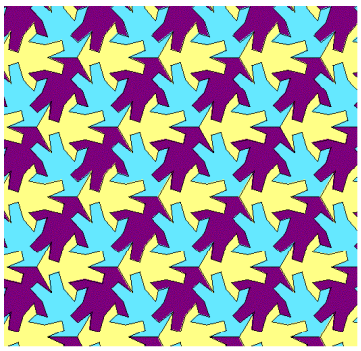
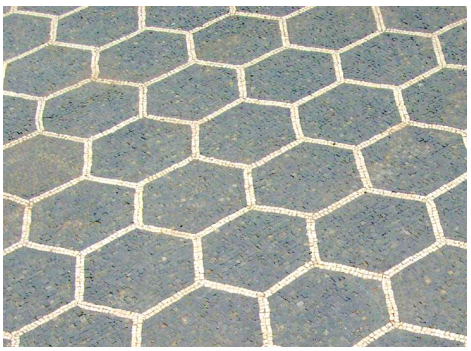
Le graphique ci-dessous montre comment une facture de 493 € peut se réduire à 119 € lorsqu'on cumule une série d'actions.

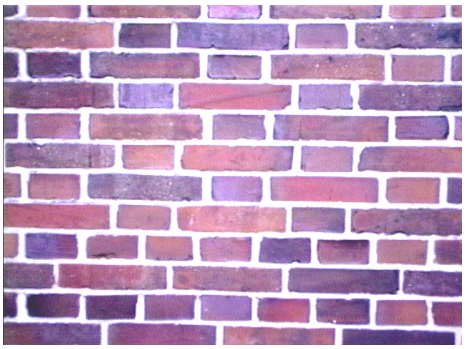
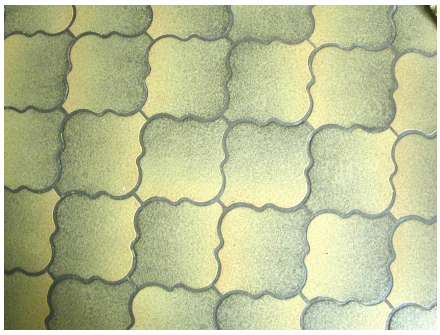


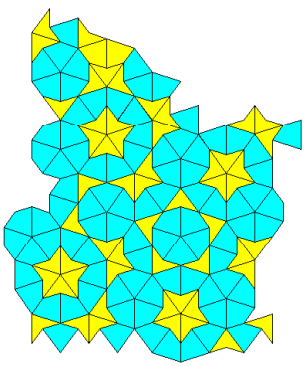
Quels sont les calculs qui conduisent à un tel résultat ?

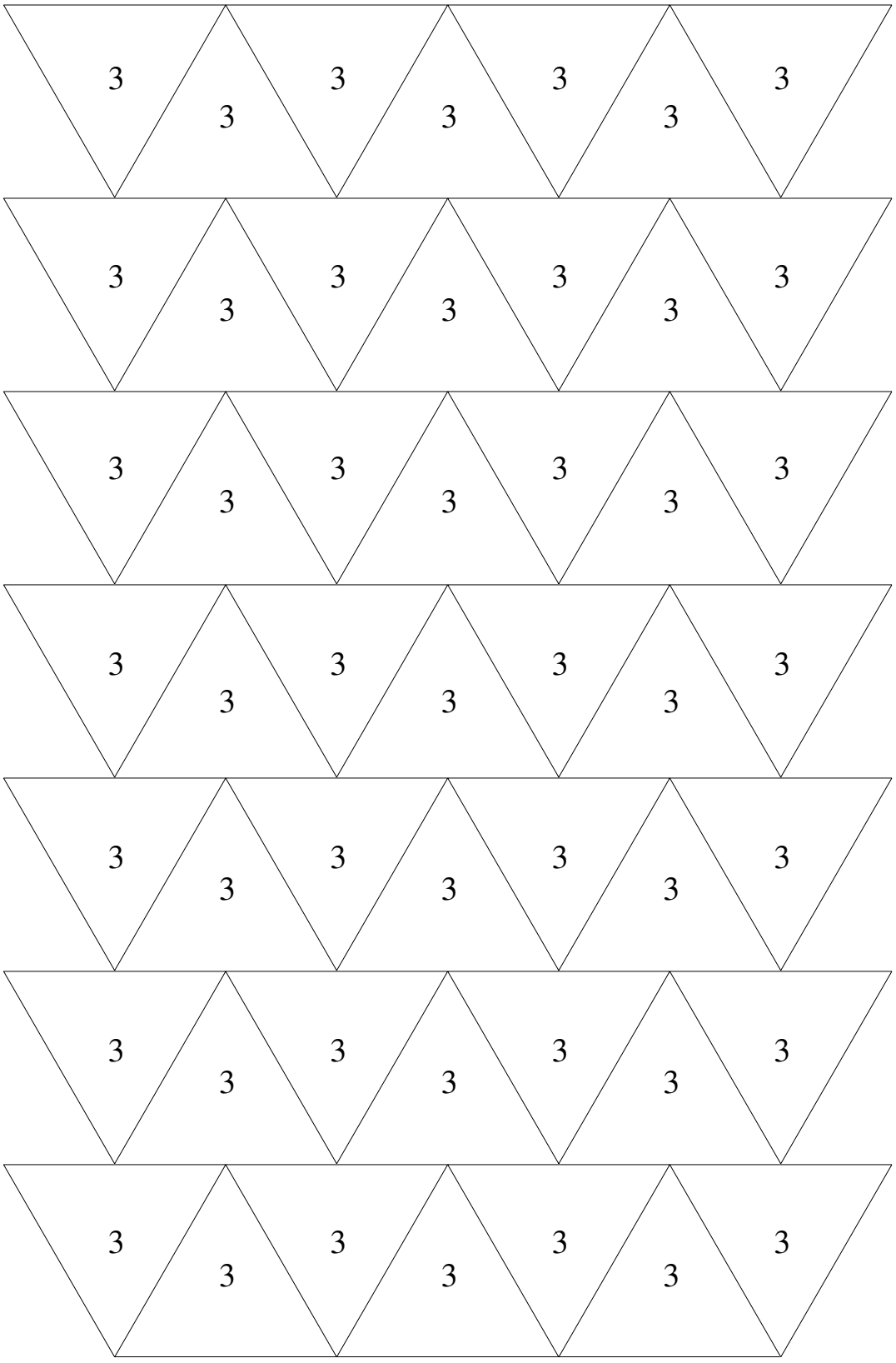
Des photos familières

Quel est le lien entre toutes ces images ? Comment pourrait-on les appeler ? Quelles en sont les caractéristiques communes ?

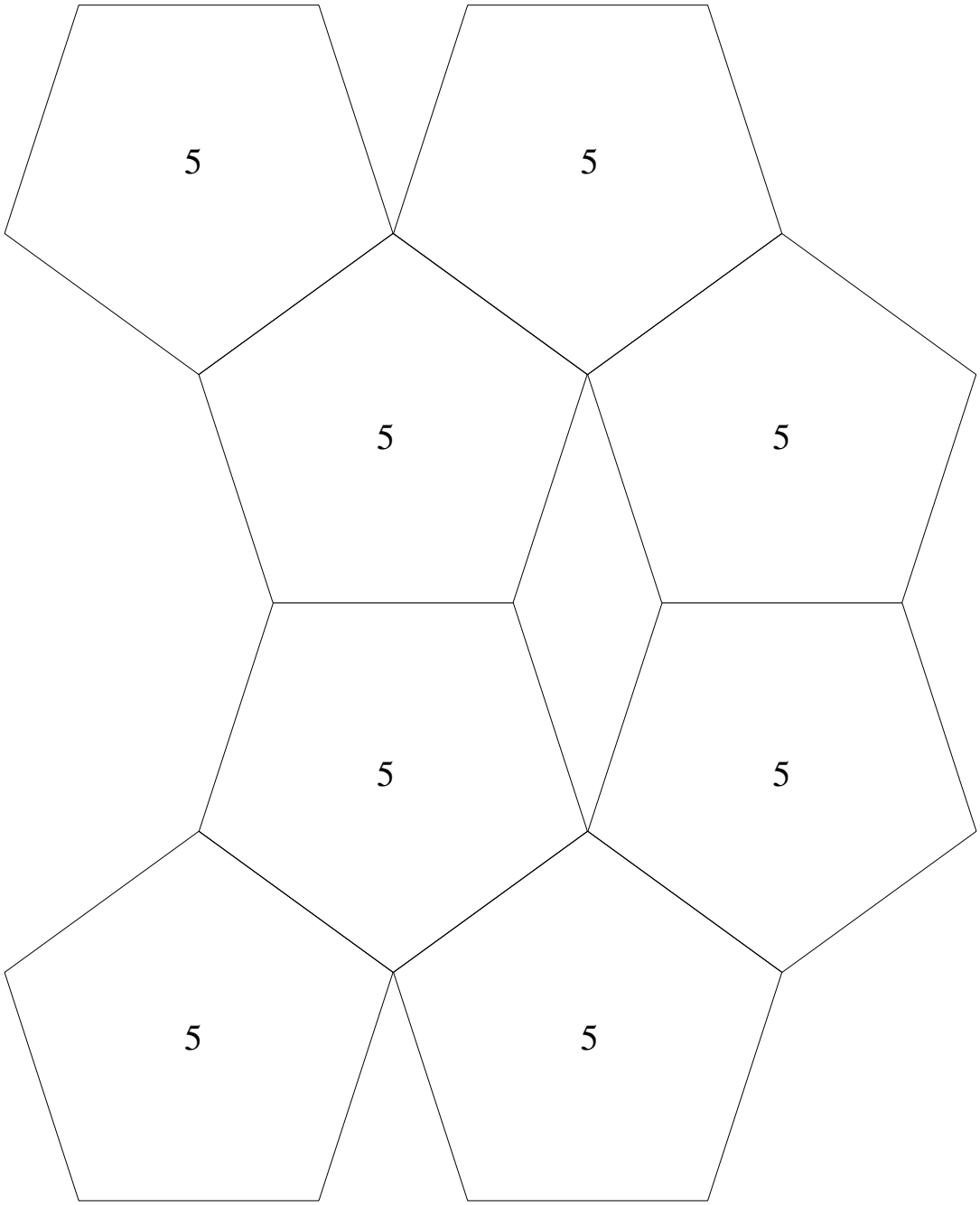



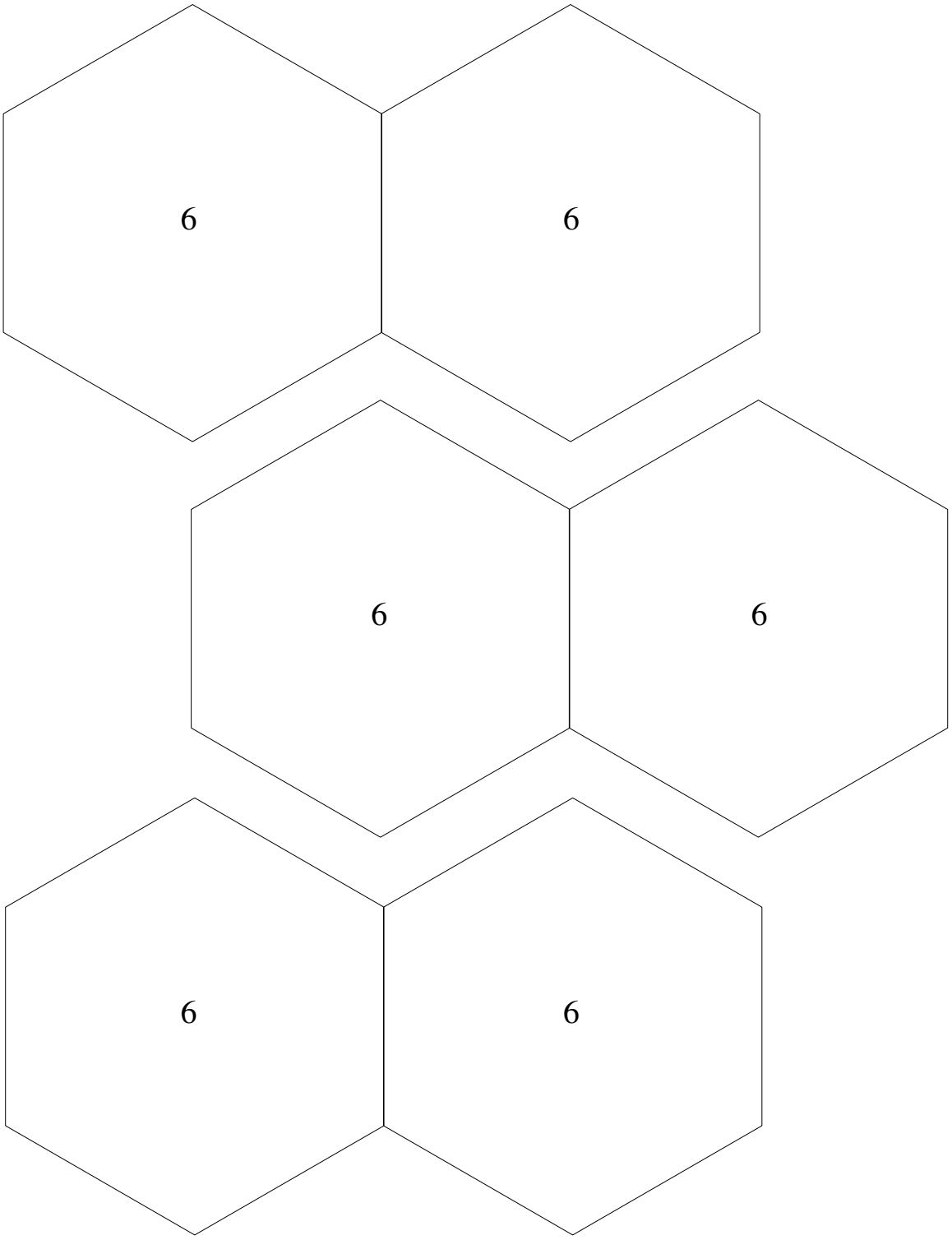



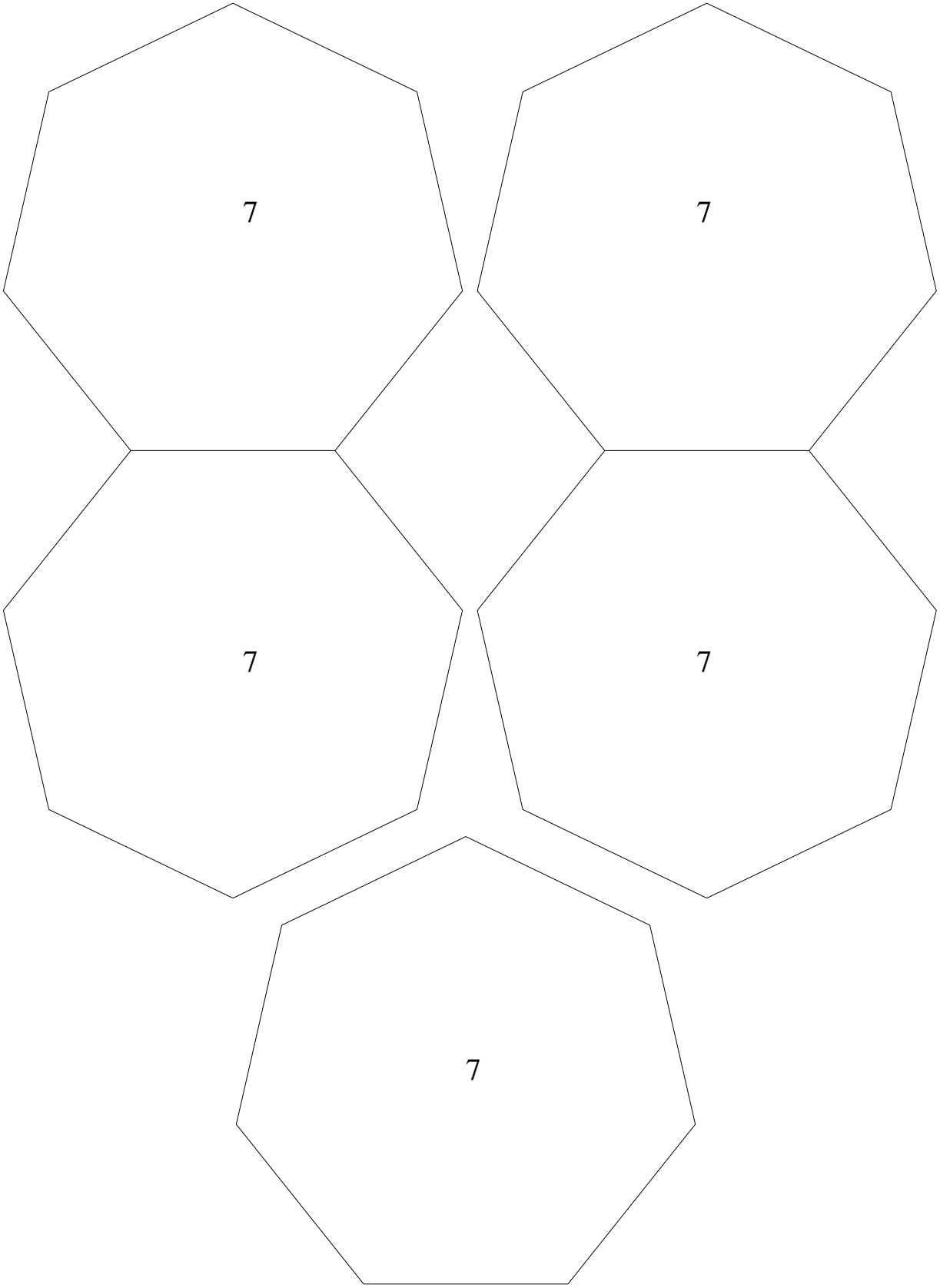



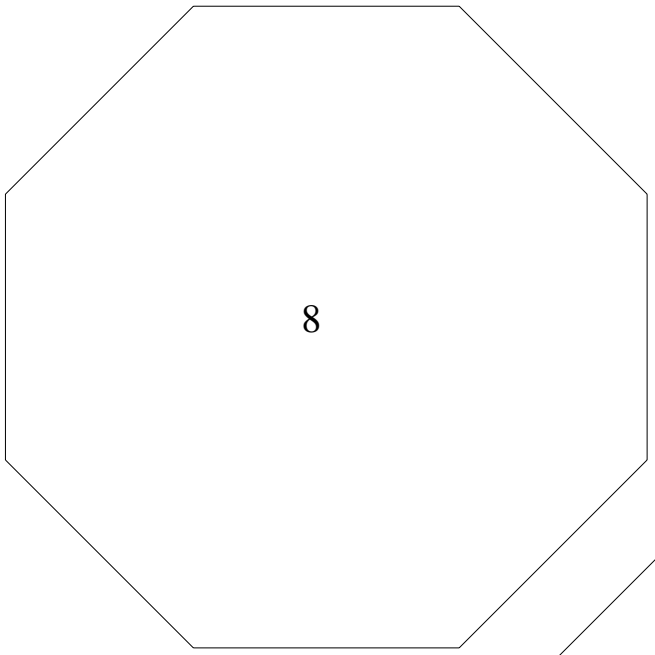


3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3

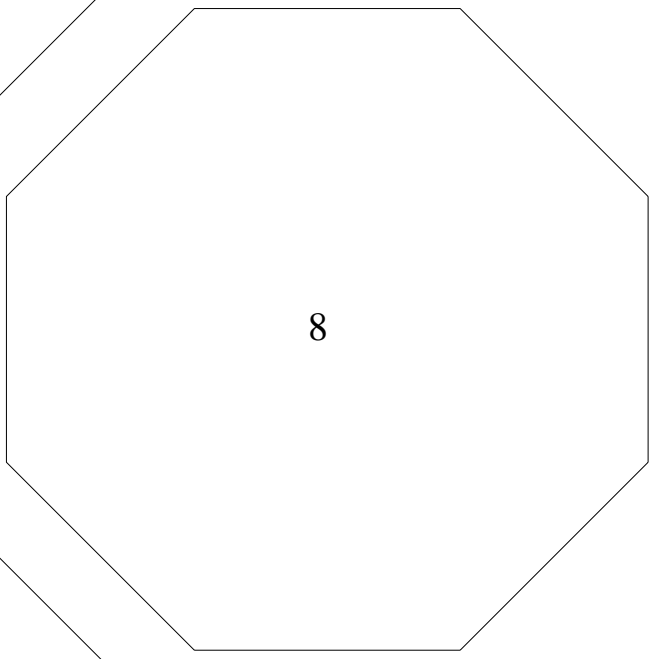
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4

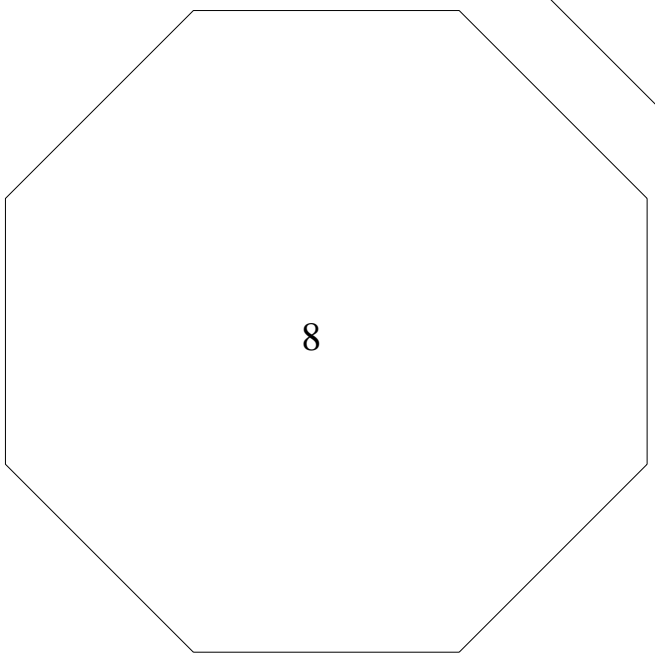

5
5
5
5
5
5
5
5

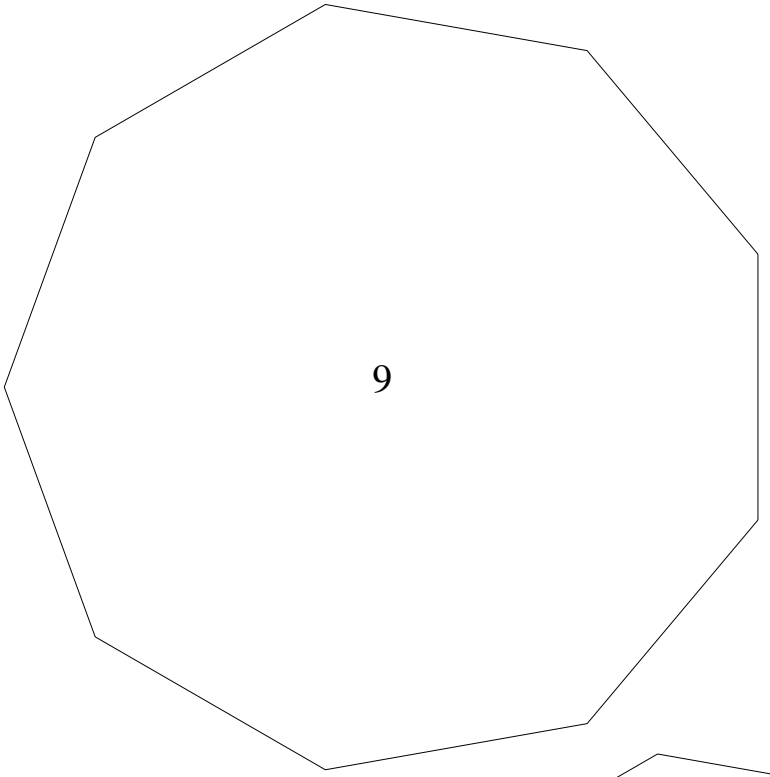

6
6
6
6
6
6

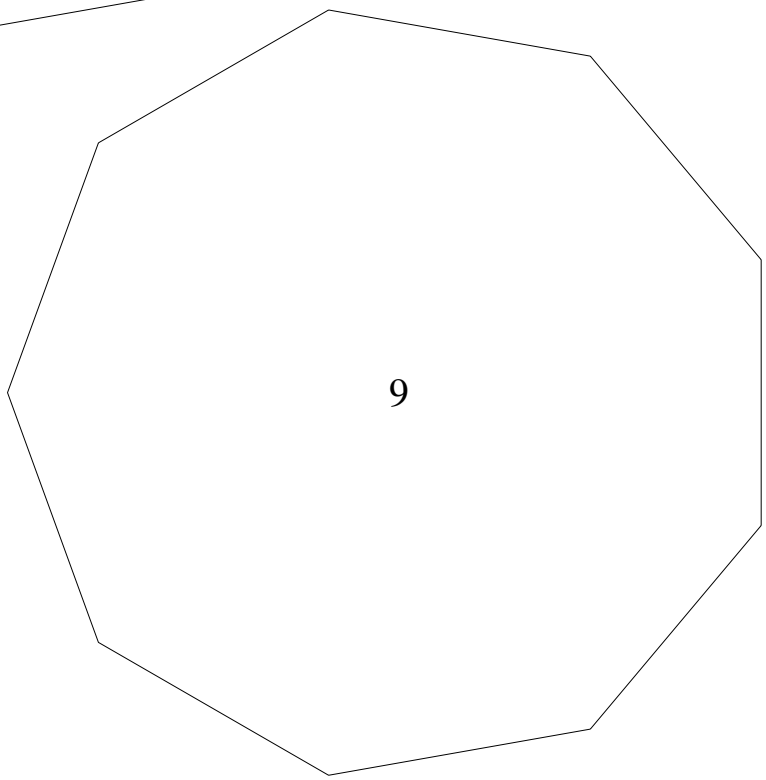

7
7
7
7
7

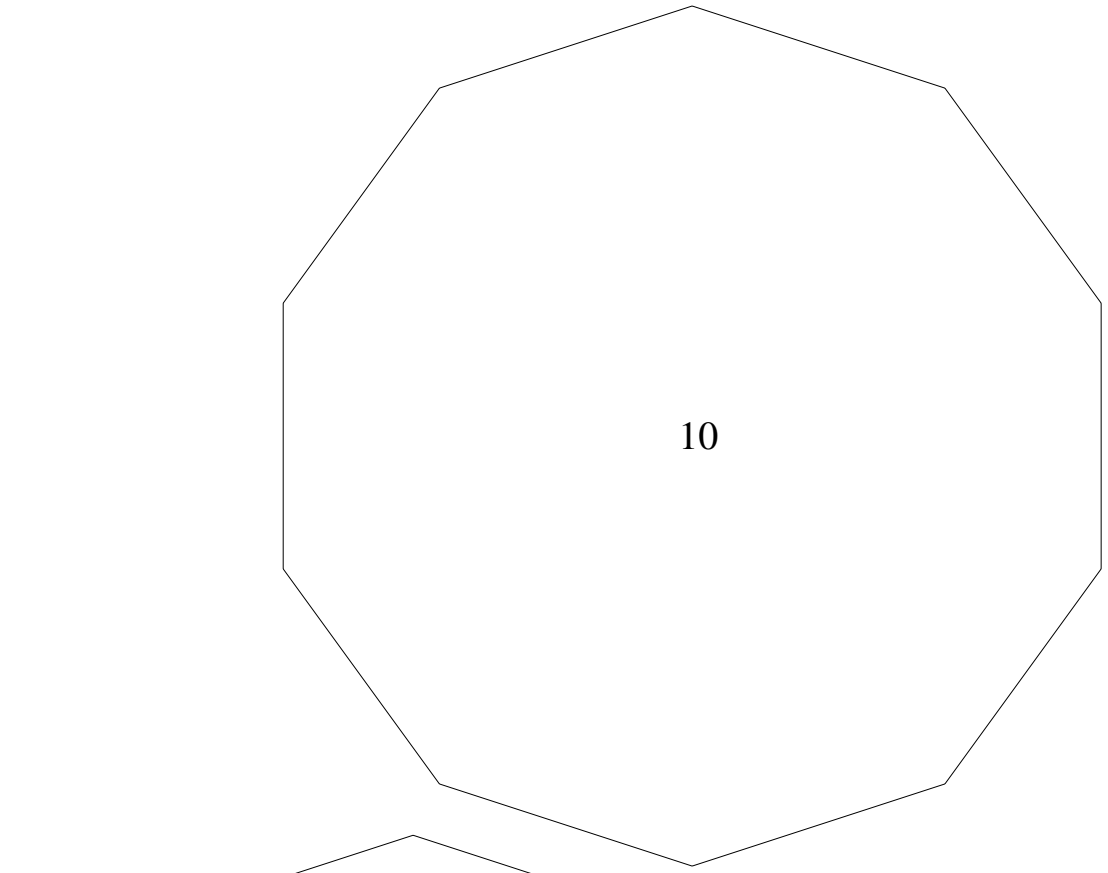

8

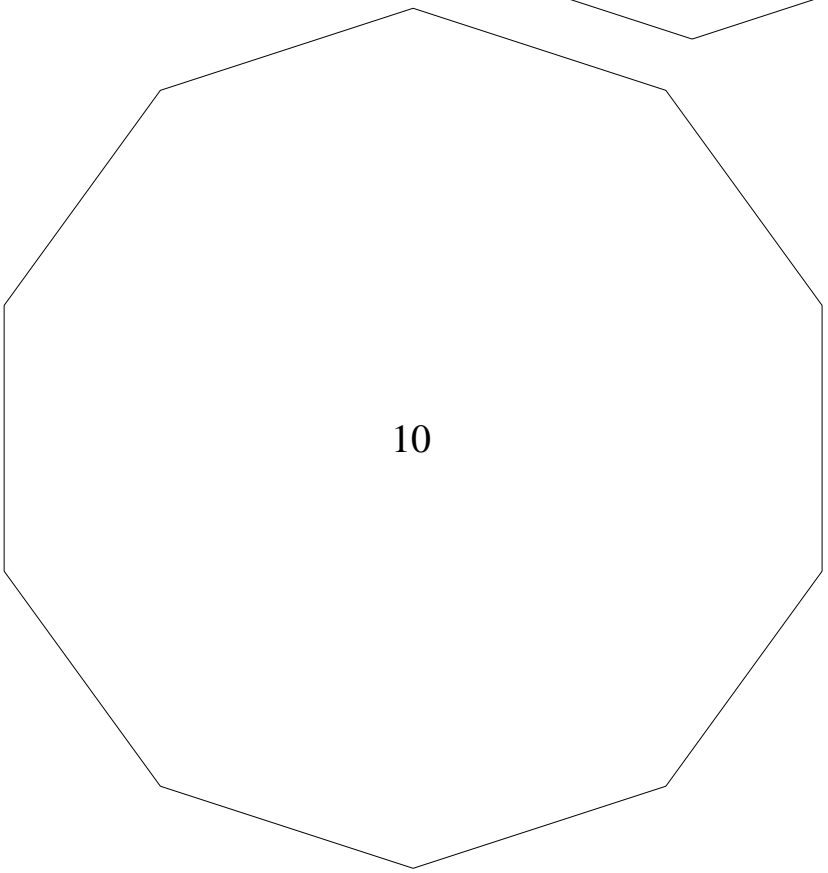

8

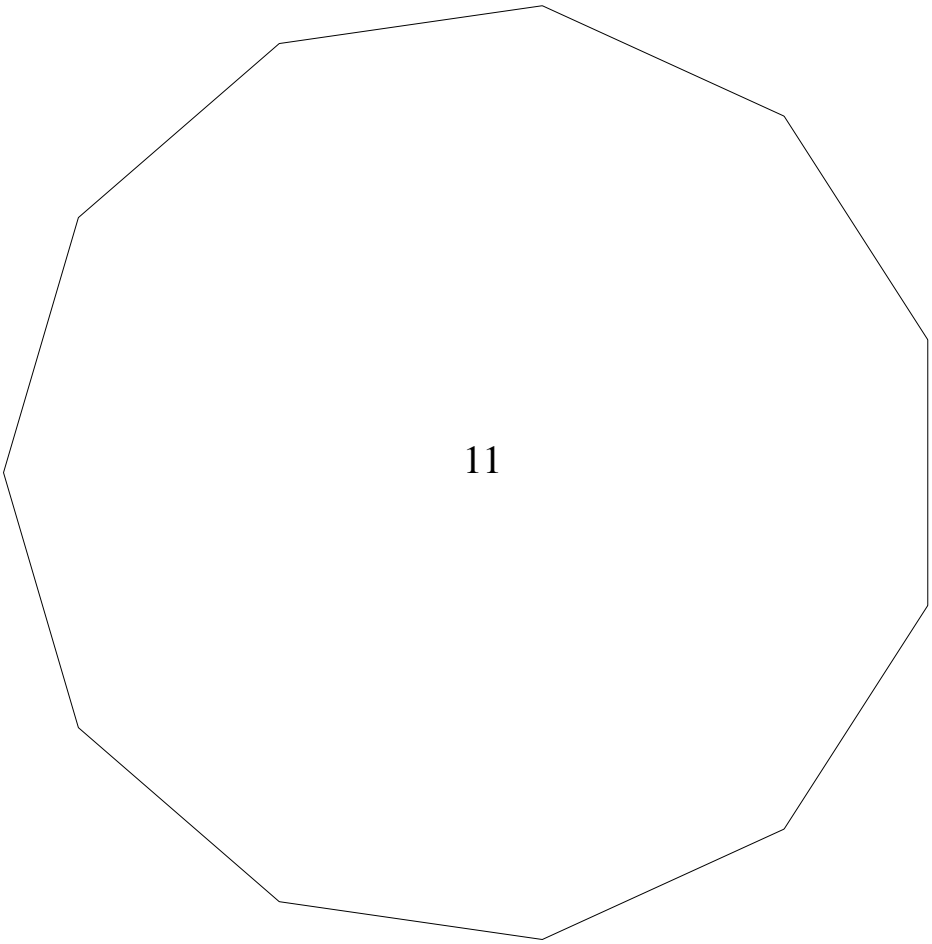

8

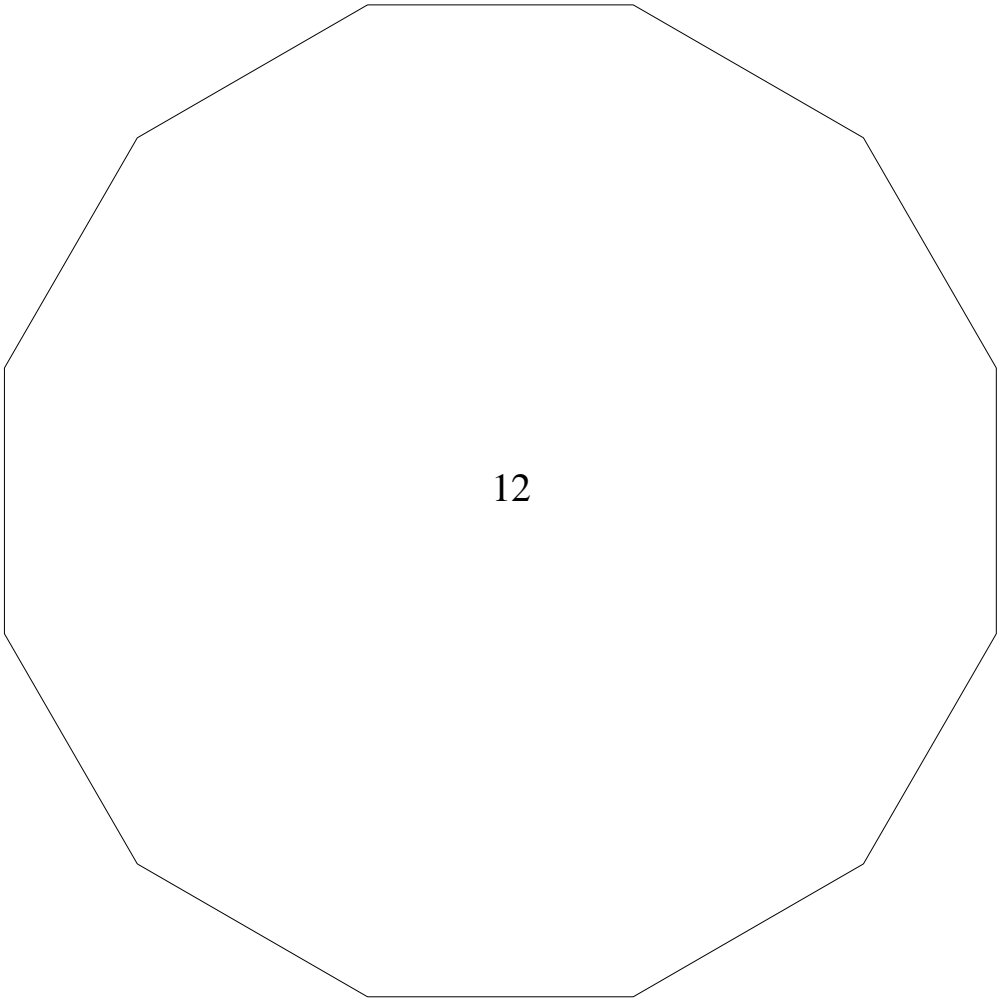

9


9


10

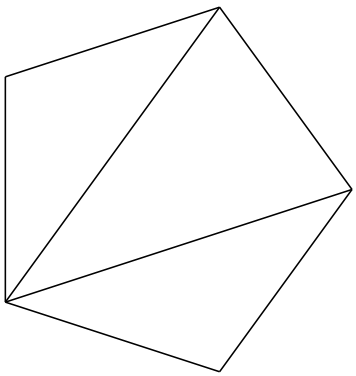

10

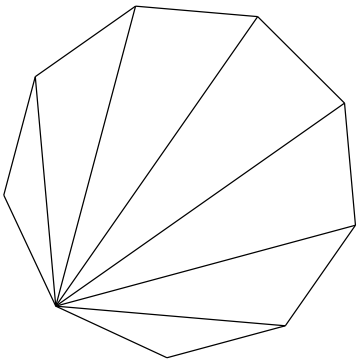

11


12

Formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier (1)

Trouvons ensemble une formule qui permettra de déterminer la valeur de l'angle intérieur de n'importe quel polygone régulier. Aidons-nous d'une décomposition en triangles, illustrée ci-dessous pour le pentagone et l'ennéagone.





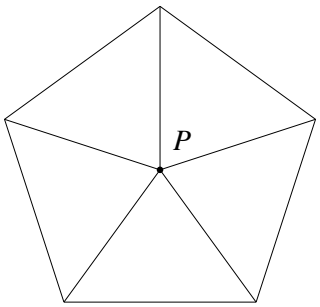
Combien de triangles peut-on ainsi former dans un polygone à n côtés ?

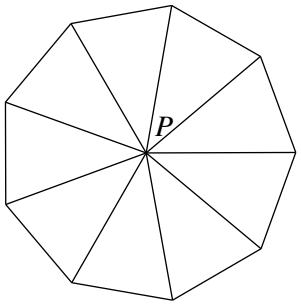
Quel lien existe-t-il entre les angles des triangles et les angles du polygone régulier ?

Quelle est alors la valeur d'un seul angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés ?

Formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier (2)

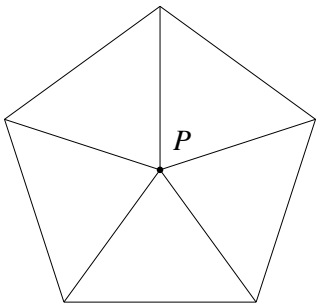
Retrouve la formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés, à partir de cette nouvelle décomposition.

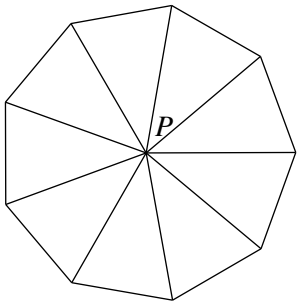




Formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier (3)

Retrouve la formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés, à partir de cette nouvelle décomposition.





Combien de triangles peut-on ainsi former dans un polygone à n côtés ?

Que vaut la somme des angles des triangles ? Correspond-elle encore à la somme des angles intérieurs du polygone ?

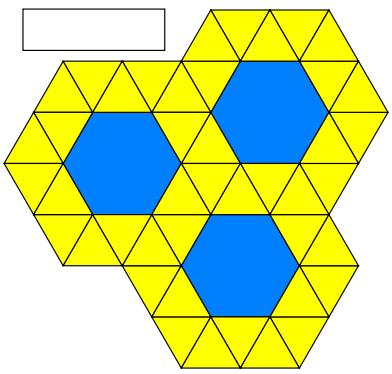
Quelle est alors la valeur d'un seul angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés ?

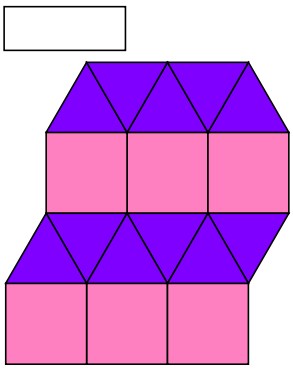
Les pavages semi-réguliers (1)

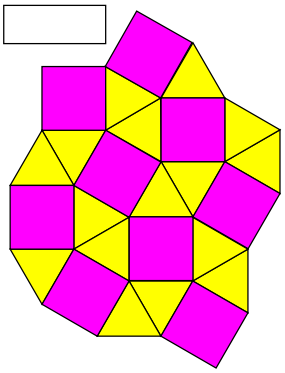
Complète le tableau suivant afin de répertorier les pavages semi-réguliers.

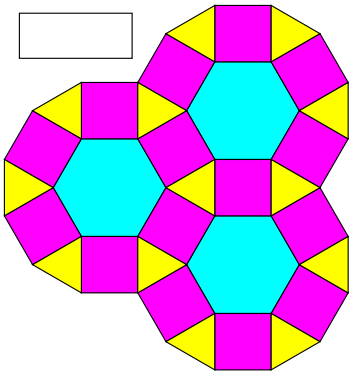
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
α											Codage

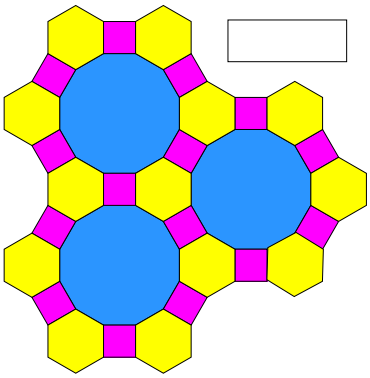
Les pavages semi-réguliers (2)

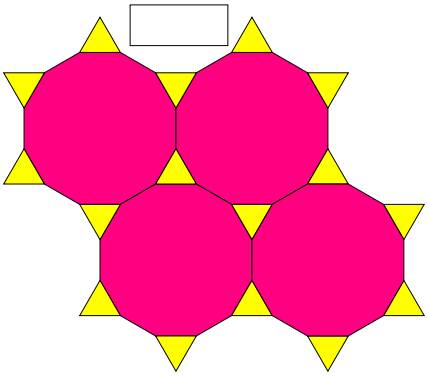


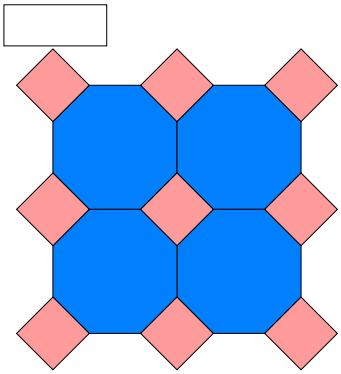


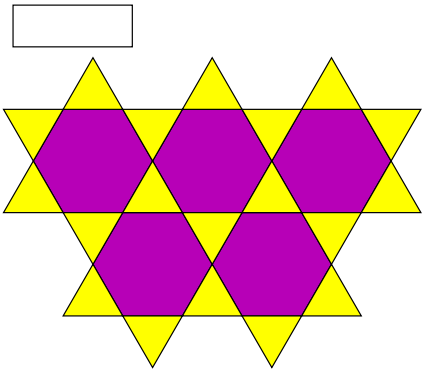




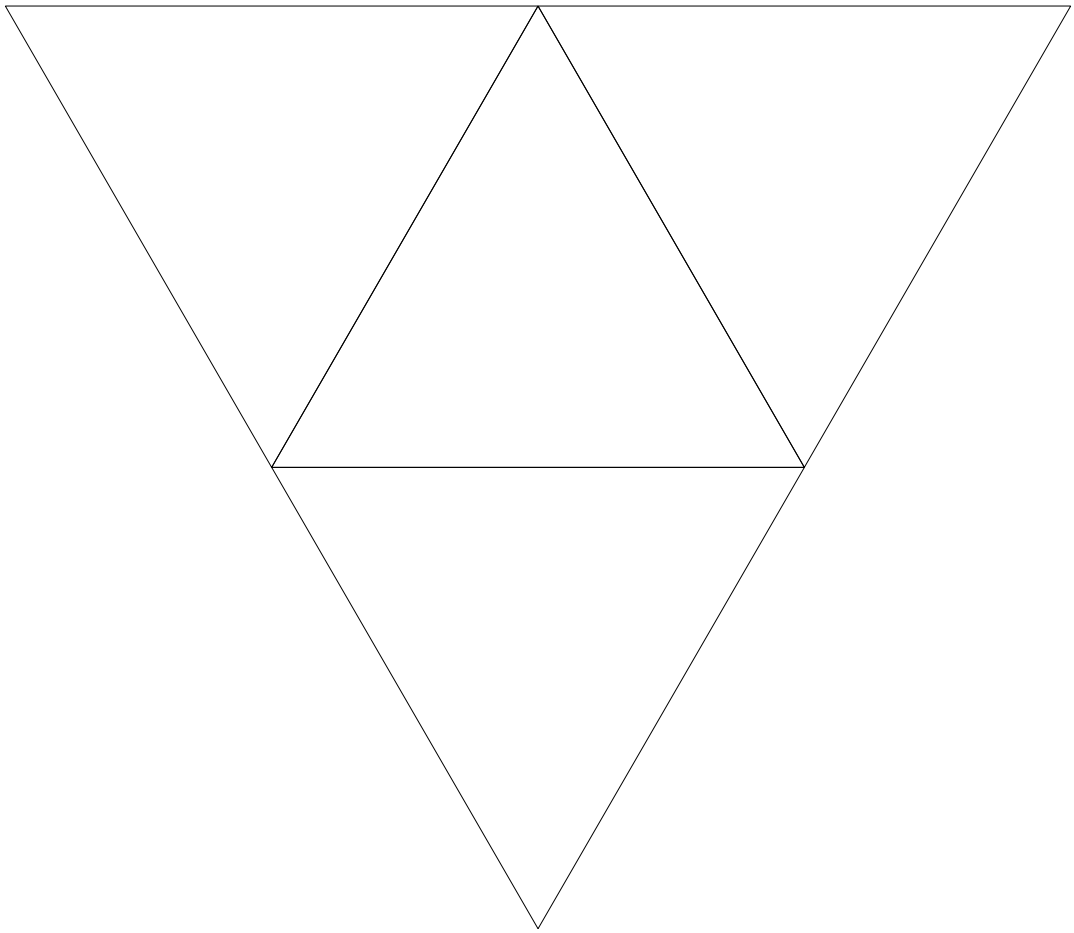




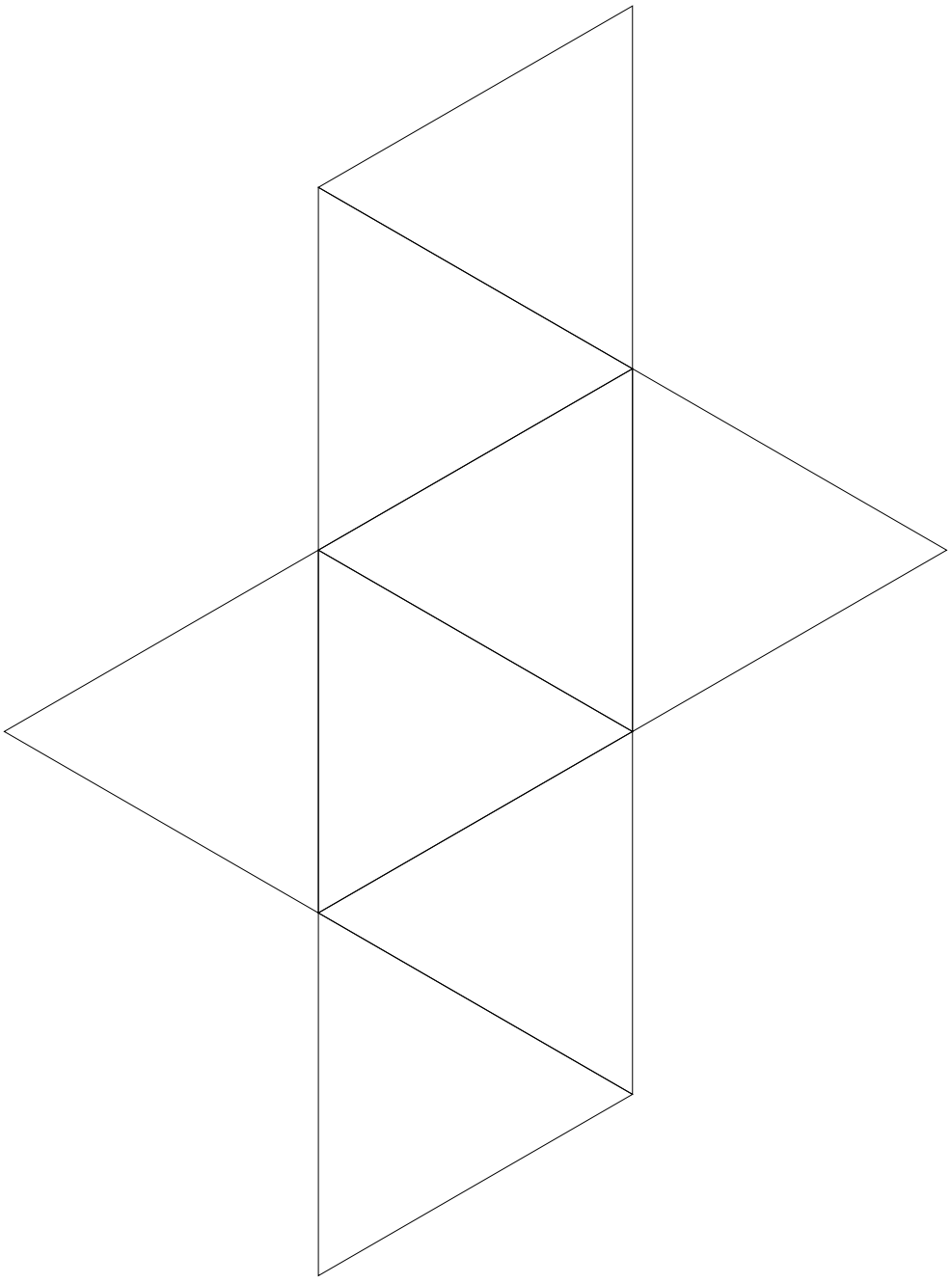




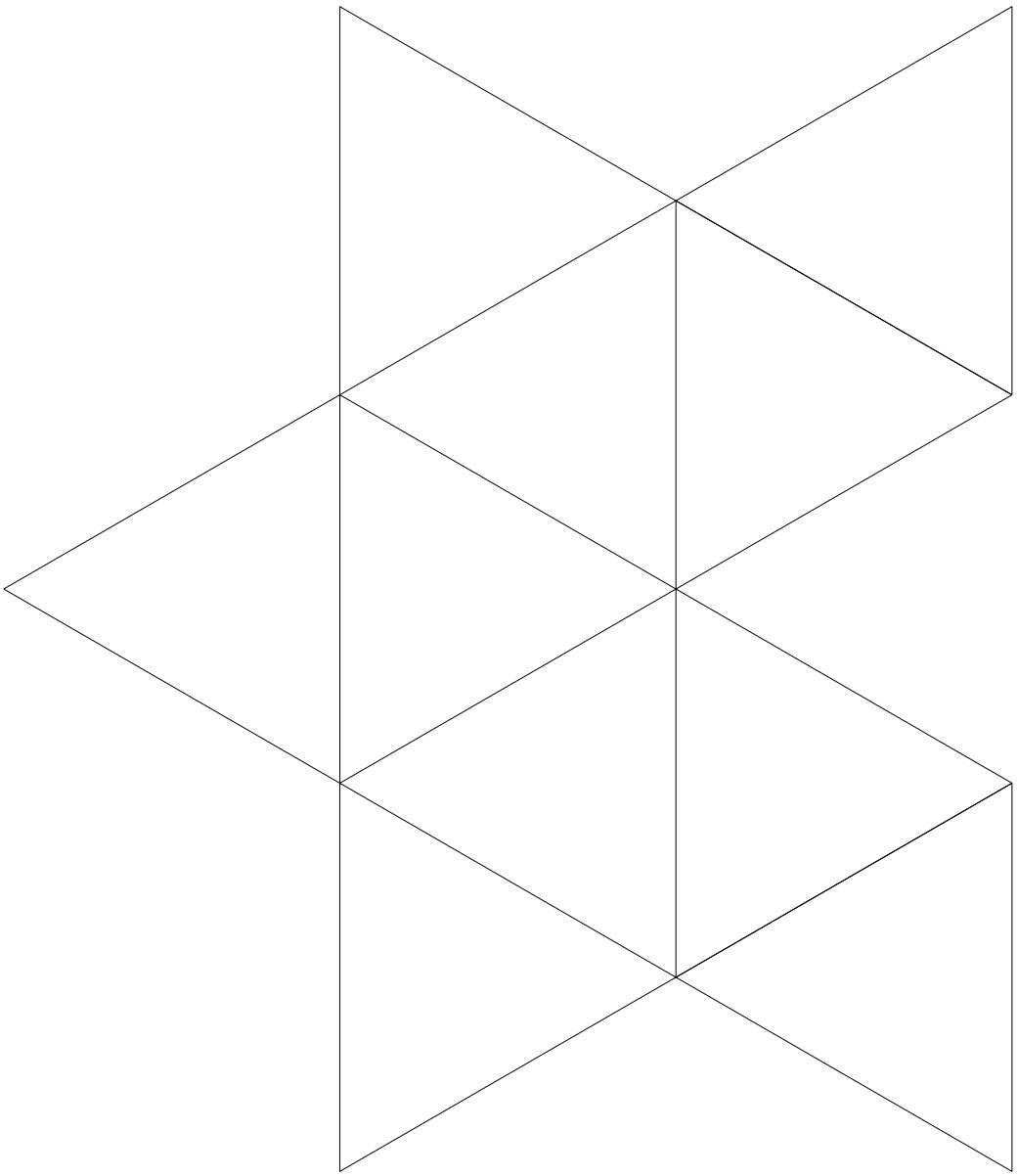
Développement du tétraèdre régulier



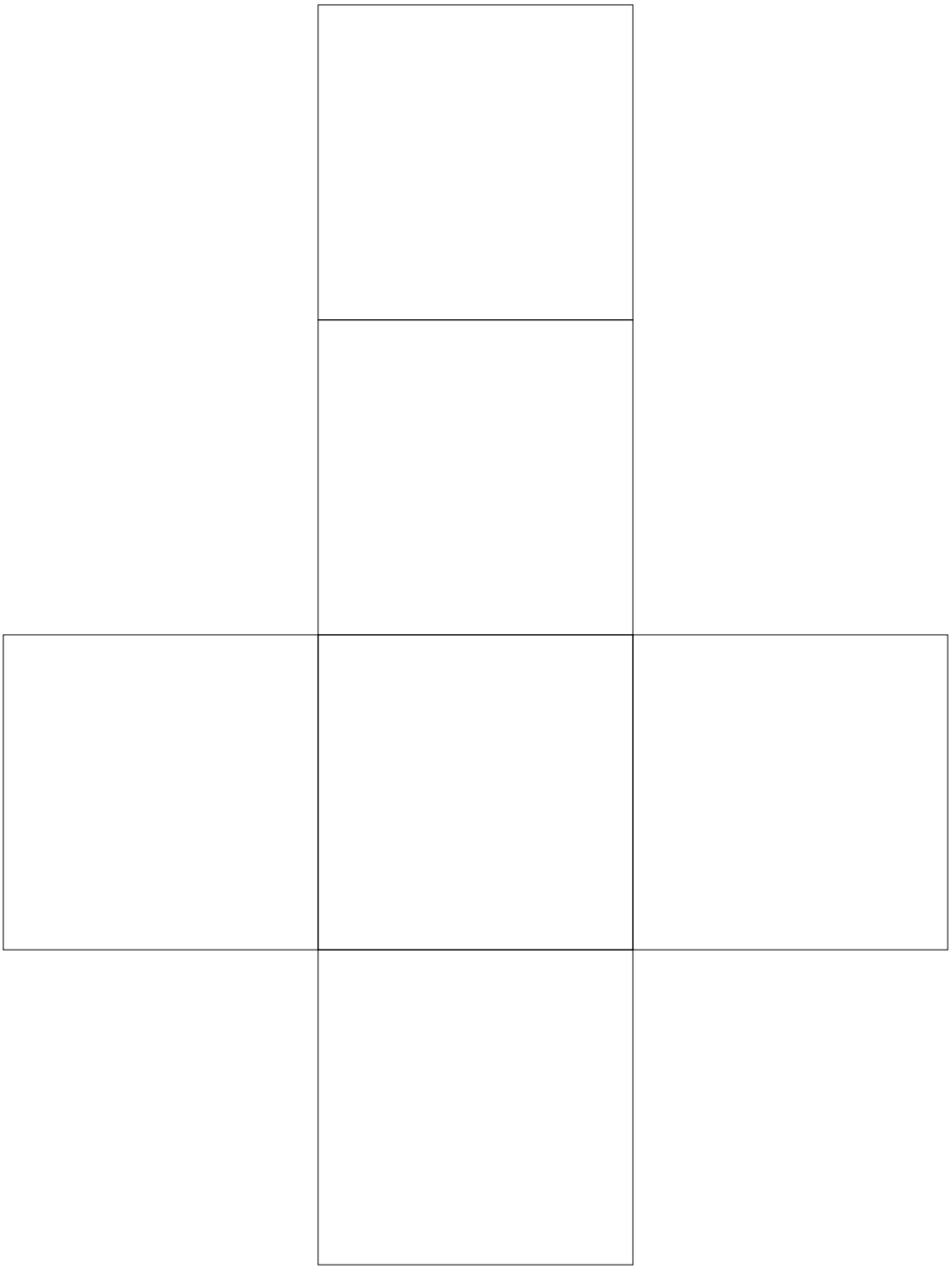
Développement de l'octaèdre régulier



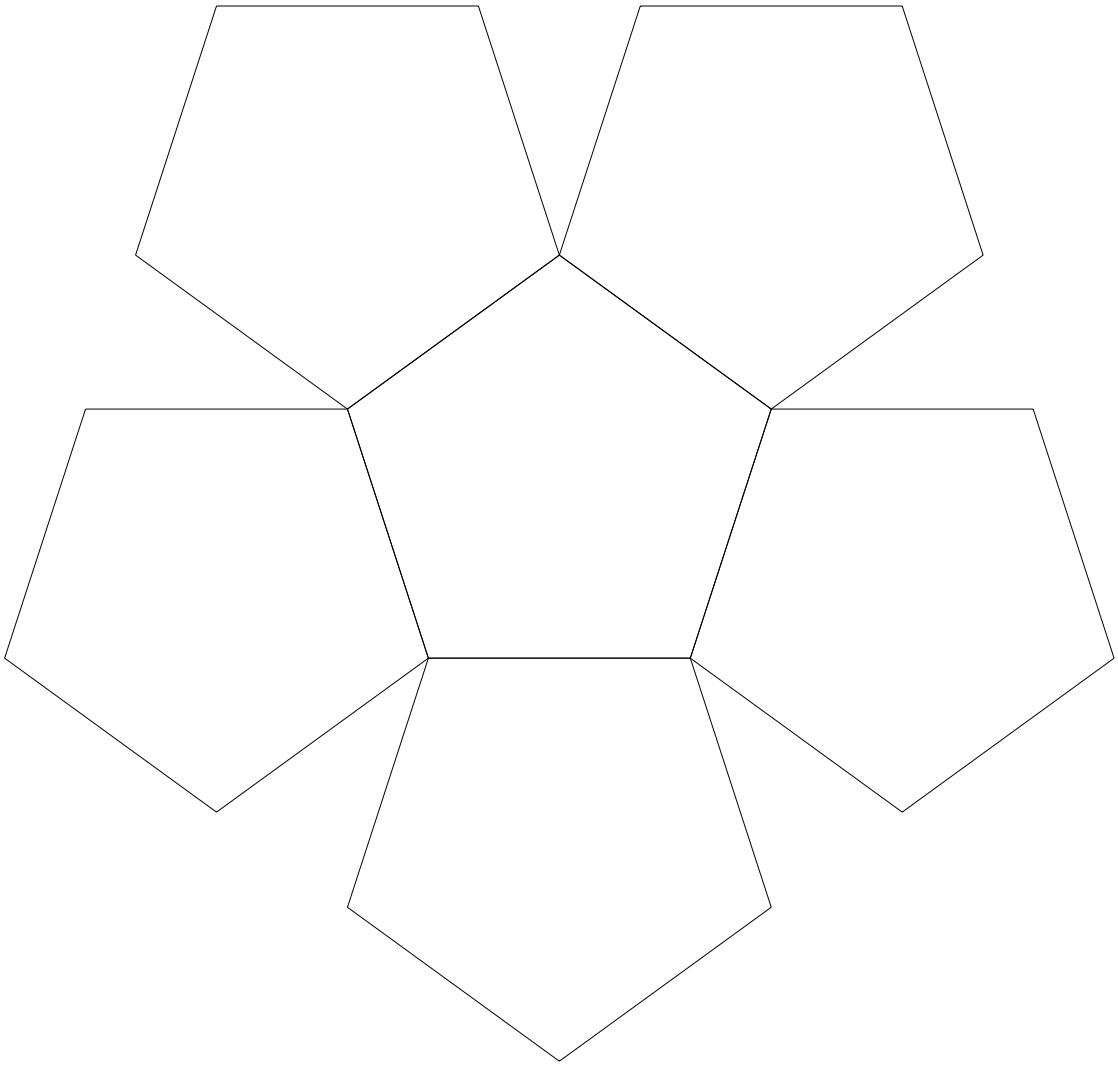
Développement du demi-icosaèdre régulier



Développement du cube



Développement du demi-dodécaèdre régulier



Le *Timée* de Platon

Lis attentivement le texte ci-dessous. Quelle association le philosophe fait-il entre les quatre premières espèces de polyèdres et les quatre éléments ?

Et les espèces qui viennent de naître par la vertu de notre raisonnement, divisons-les en feu, terre, eau et air. À la terre attribuons certes la figure cubique. Car la terre est la plus difficile à mouvoir des quatre espèces et c'est de tous les corps le plus tenace. Et il est très nécessaire que ce qui a de telles propriétés ait reçu, en naissant, les bases les plus solides.

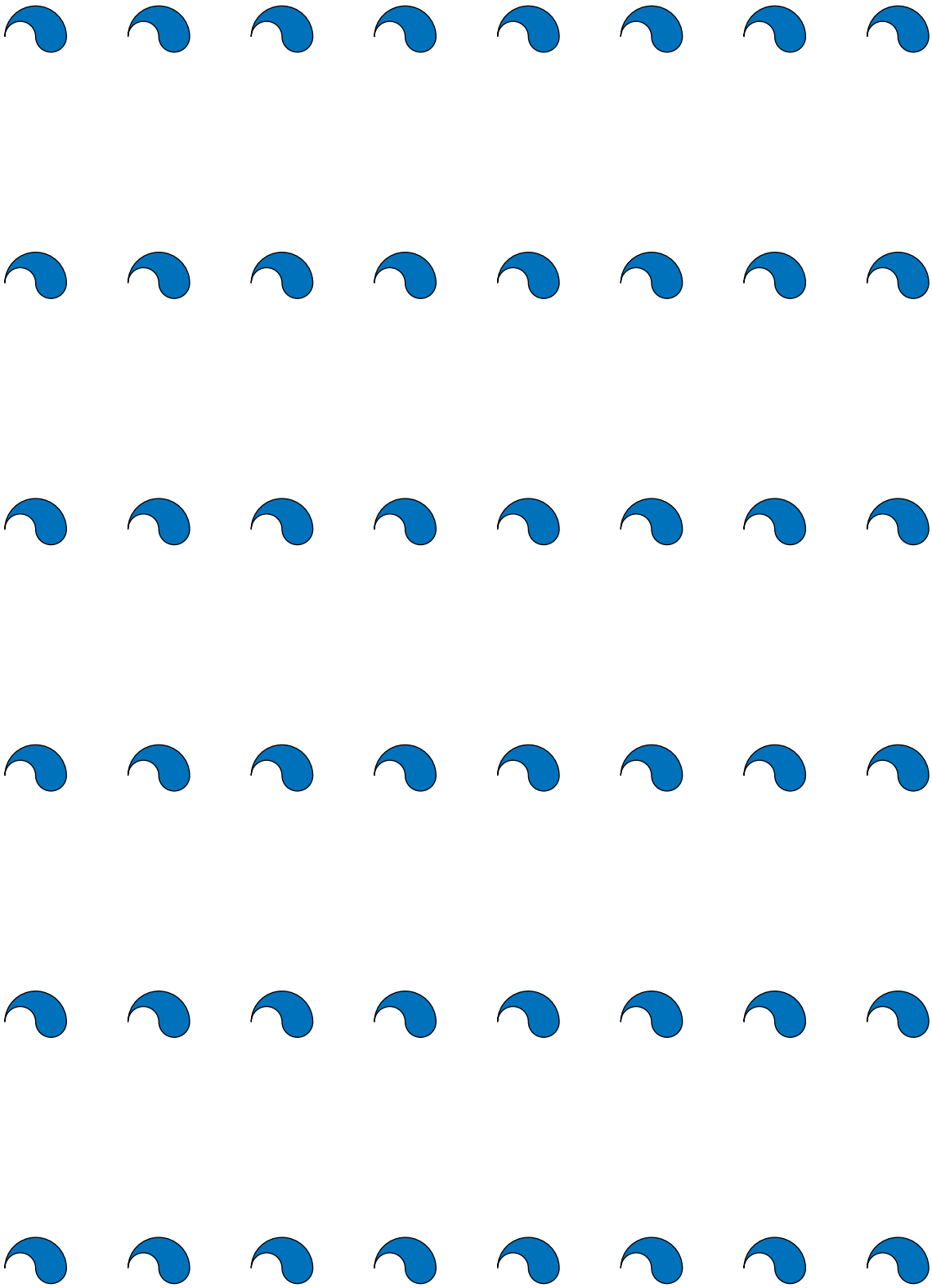
[...]

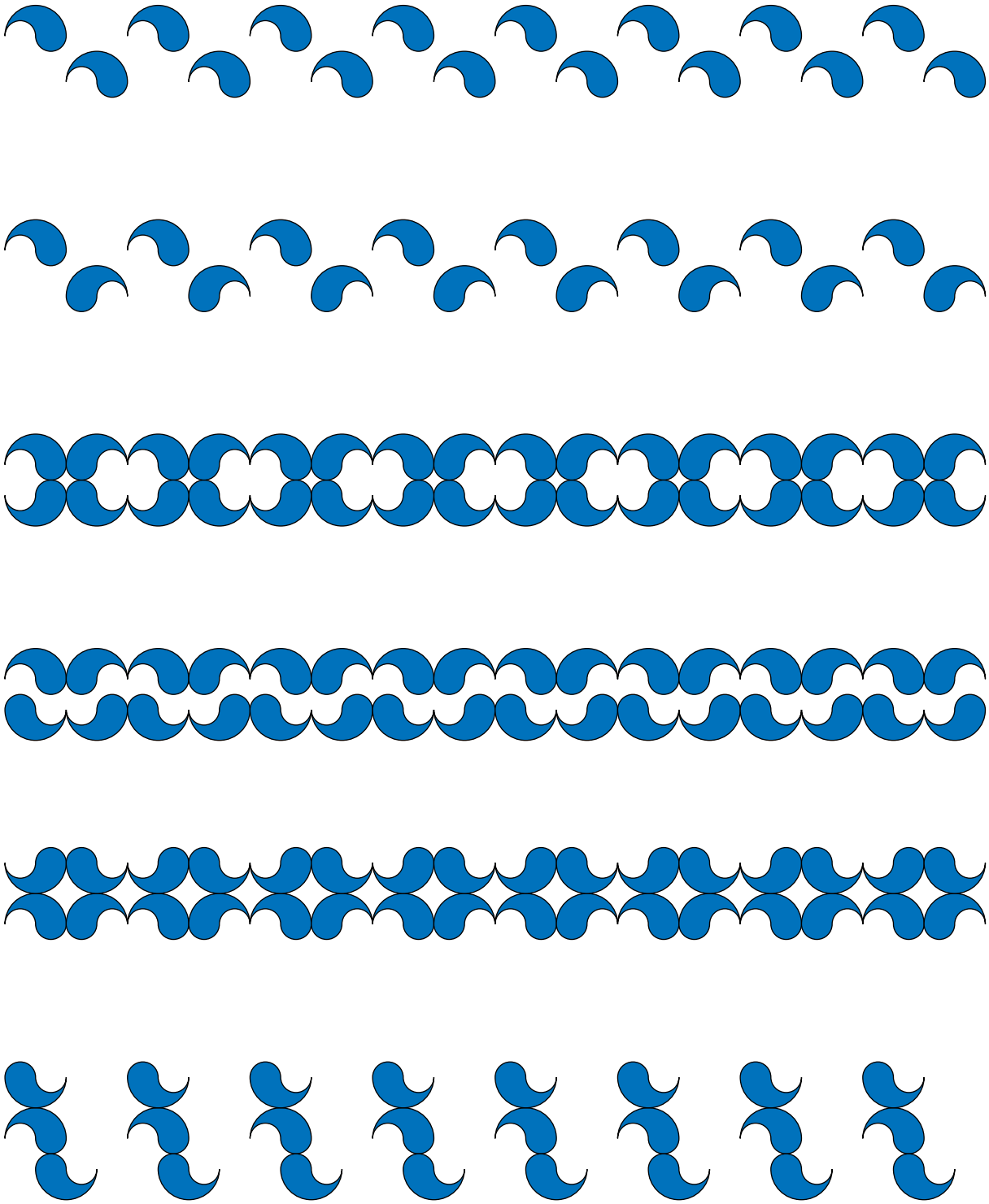
De même en attribuant à l'eau la figure la moins mobile, au feu la plus mobile, et la figure intermédiaire à l'air. Et le corps le plus petit au feu, le plus grand à l'eau, l'intermédiaire à l'air. Et le plus aigu au feu, le second par ce caractère à l'air, et le troisième à l'eau. Ainsi, entre toutes ces figures, celle qui a les bases les plus petites doit avoir forcément la nature la plus mobile : c'est toujours la plus coupante, la plus aiguë de toutes, et en outre la plus légère, puisqu'elle est composée du plus petit nombre des mêmes parties. Et la seconde doit tenir le second rang en ce qui touche ces mêmes propriétés, et la troisième, le troisième rang. En conséquence, à la fois selon la droite logique et selon la vraisemblance, la figure solide de la pyramide est l'élément et le germe du feu ; la seconde selon l'ordre de la naissance, disons que c'est l'élément de l'air et la troisième, celui de l'eau.

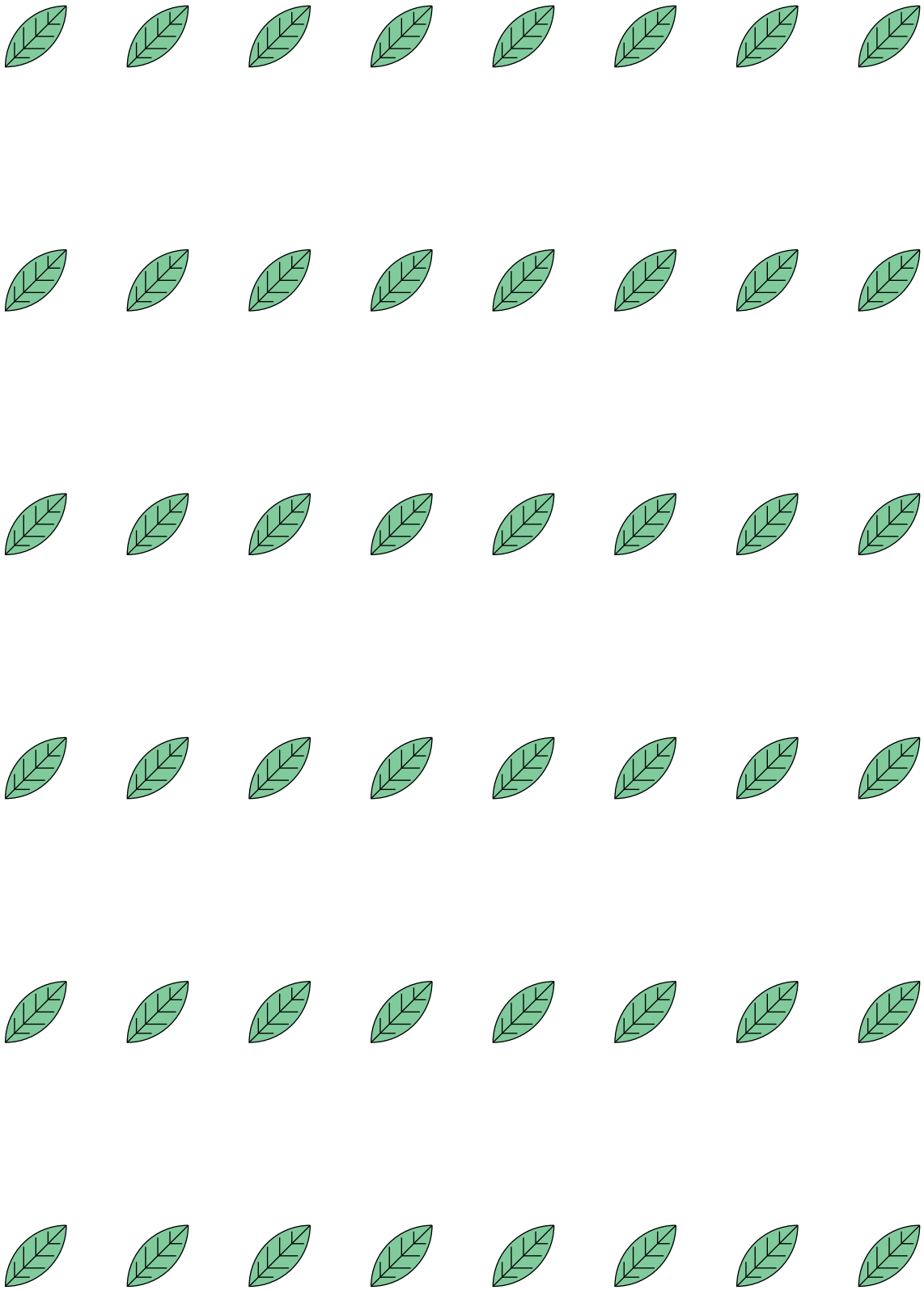
Ailleurs dans le texte on trouve une allusion au dodécaèdre.

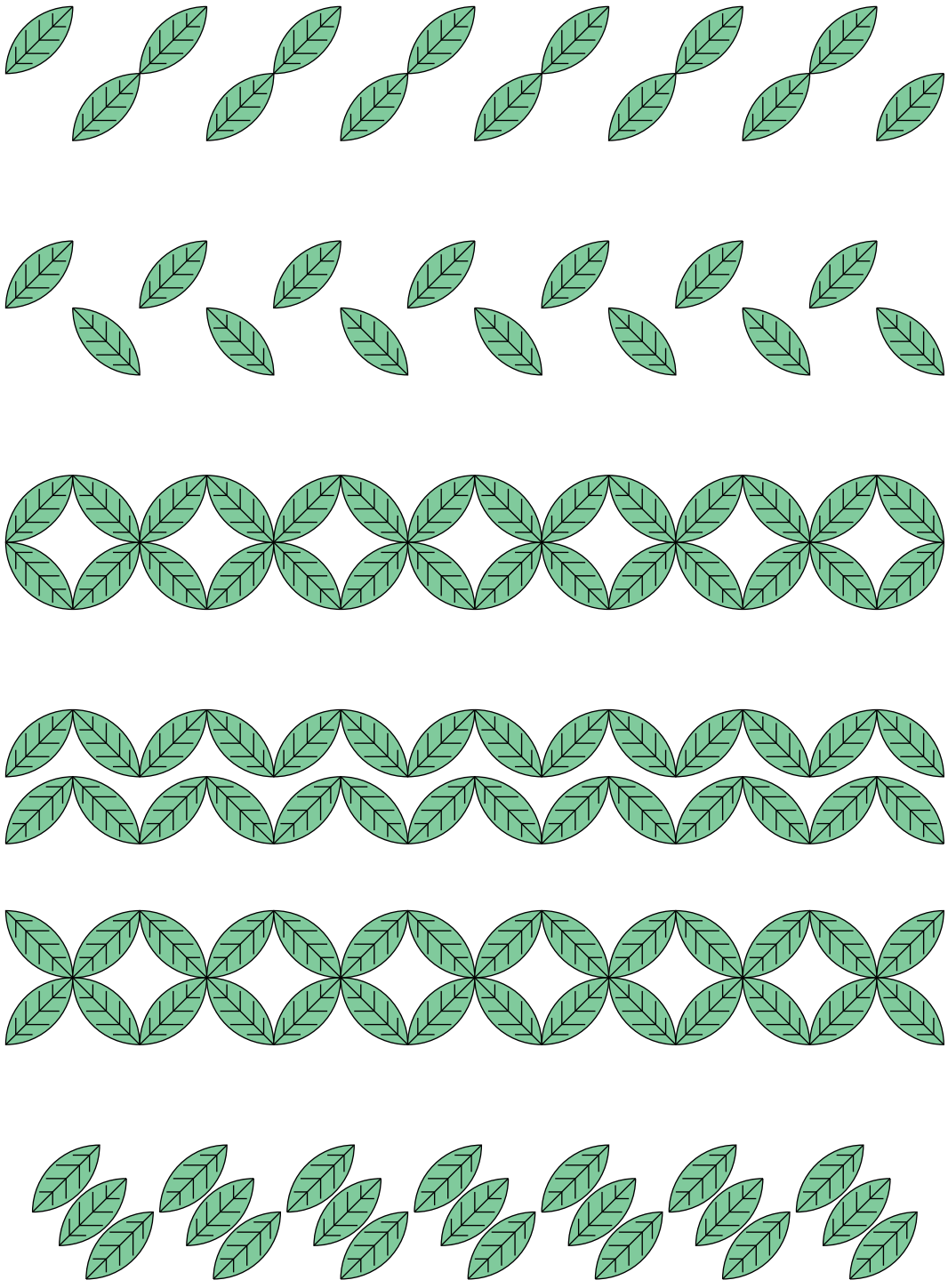
Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.



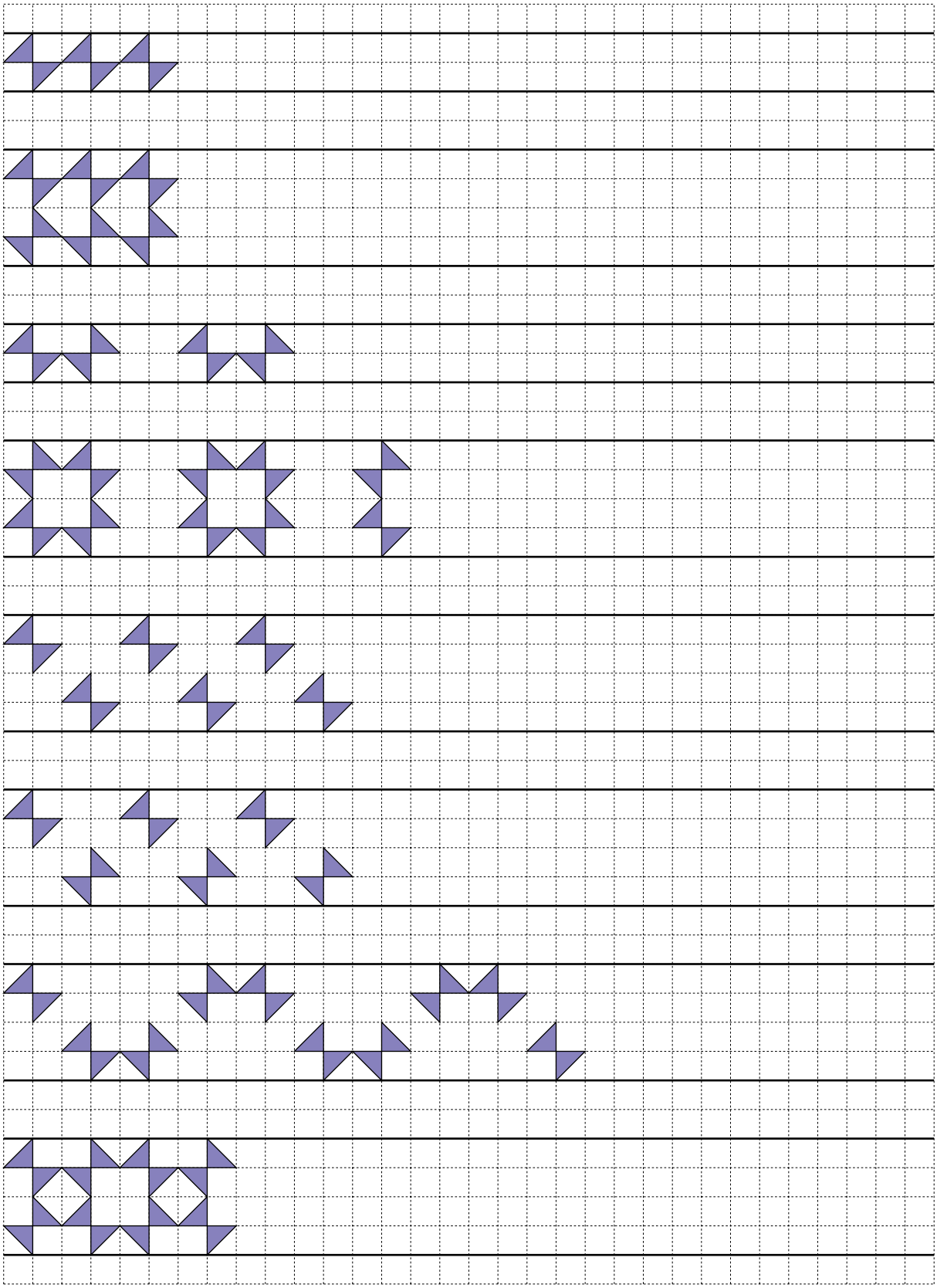




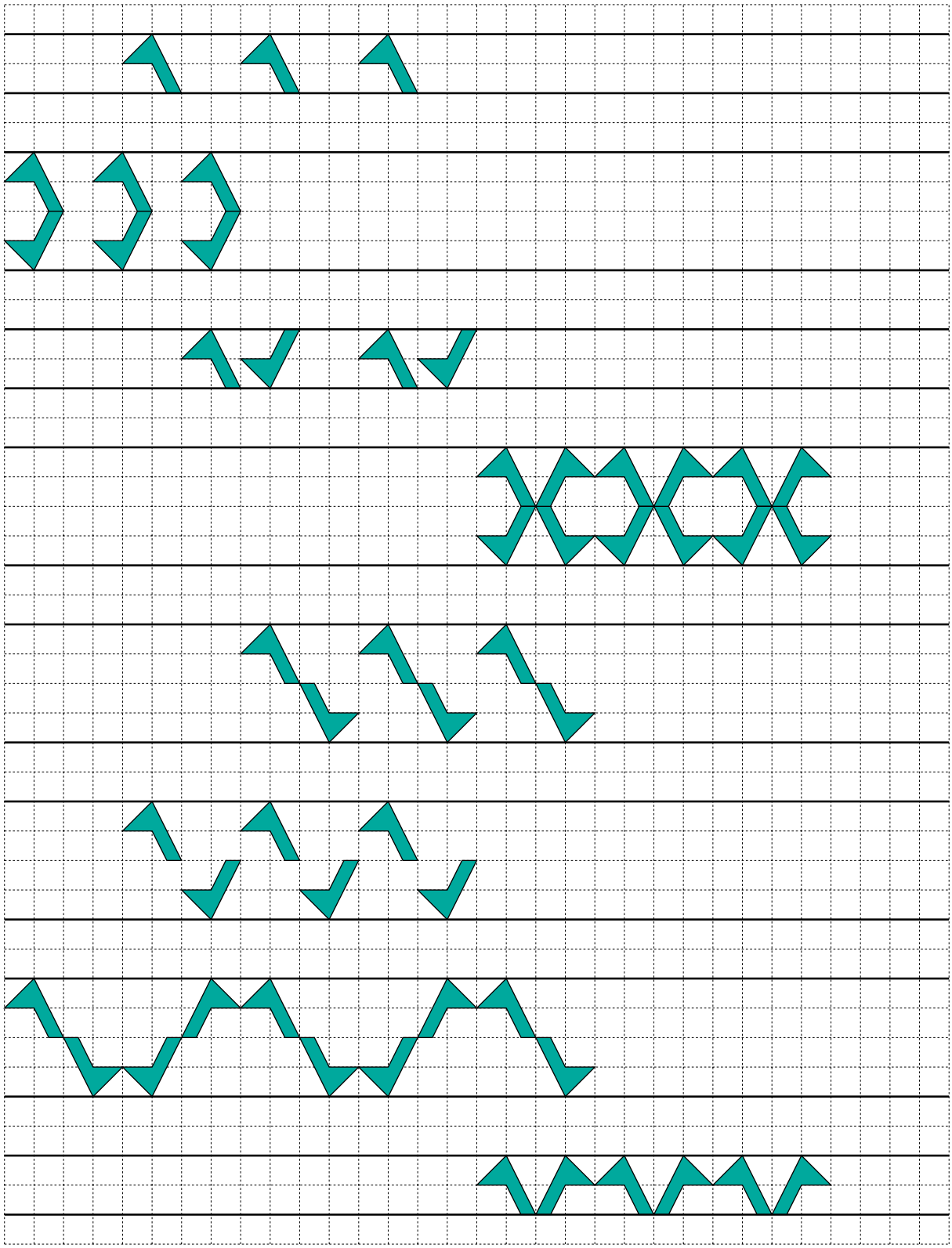




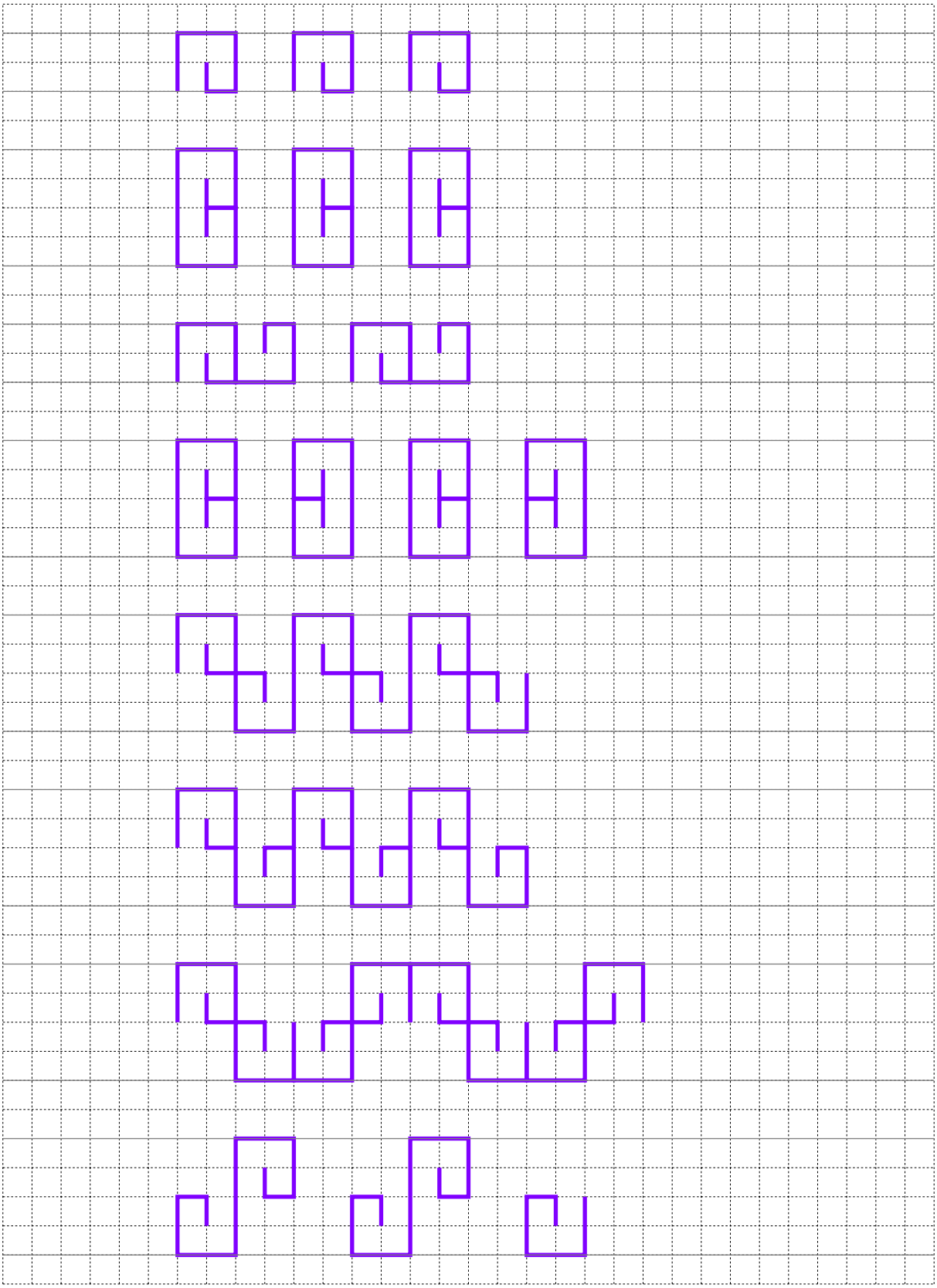
Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et la translation la plus courte qui permet cette construction.



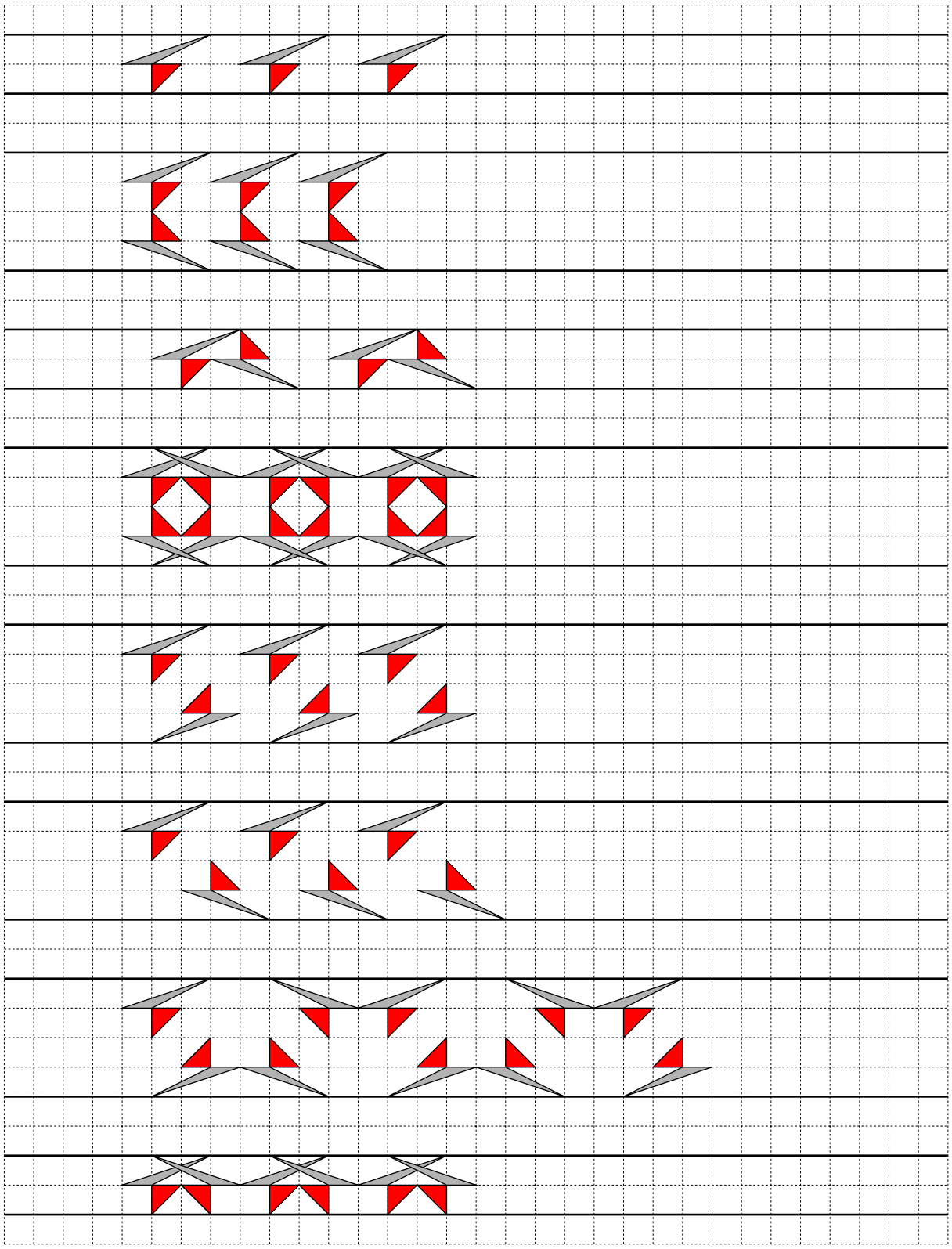
Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et les translations les plus courtes qui permettent cette construction.



Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et les translations les plus courtes qui permettent cette construction.

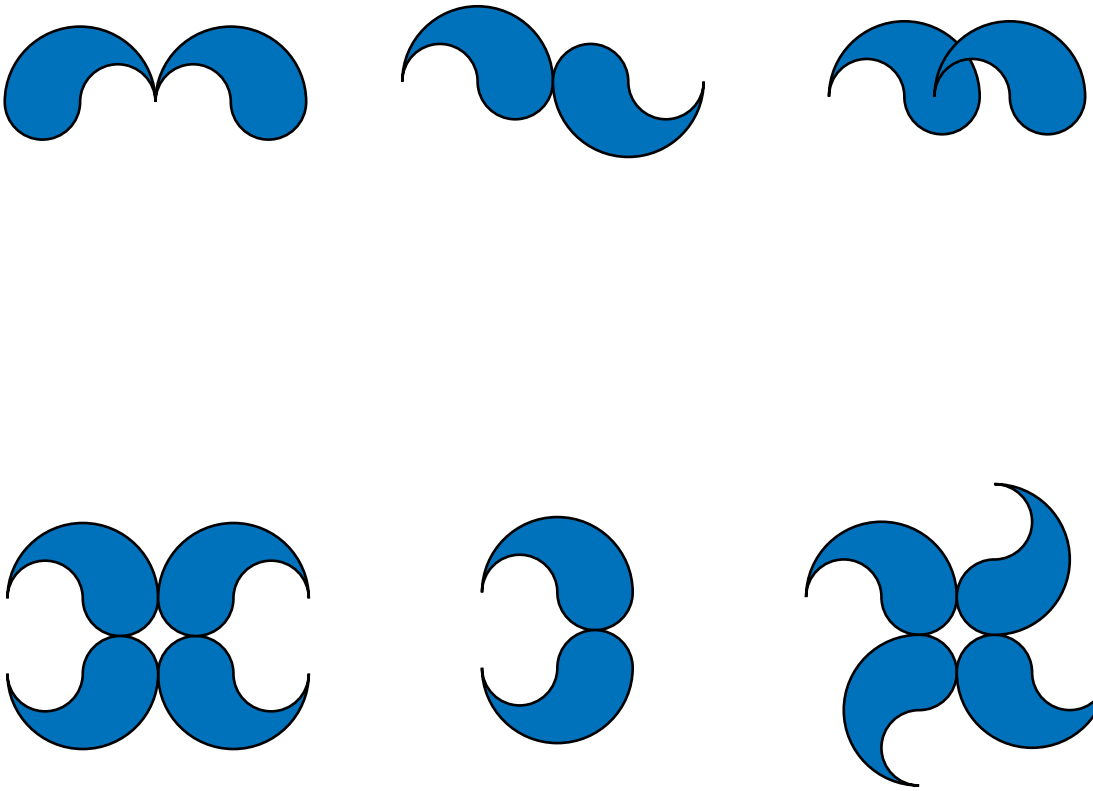


Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et les translations les plus courtes qui permettent cette construction.



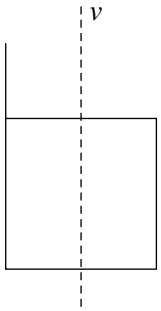
Parmi les figures proposées, désigner celles qui sont leur propre image par une des isométries suivantes. Préciser chaque fois de quelle isométrie il s'agit.

- une symétrie d'axe vertical,
- une symétrie d'axe horizontal,
- une symétrie d'axe horizontal et une symétrie d'axe vertical,
- une symétrie centrale (ou rotation d'un demi-tour),
- une rotation,
- une translation.

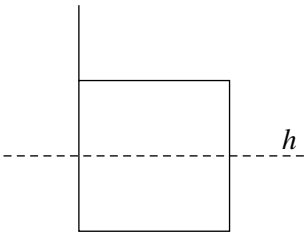


Compléter la figure de telle manière qu'elle soit invariante par l'isométrie indiquée (ou les isométries indiquées).

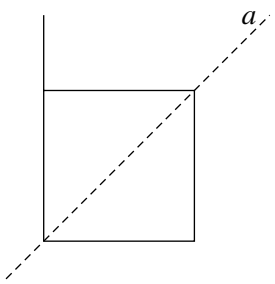
La symétrie orthogonale d'axe ν.



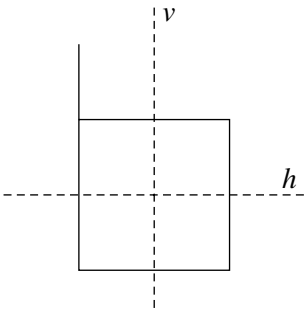
La symétrie orthogonale d'axe h.



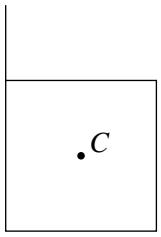
La symétrie orthogonale d'axe a.



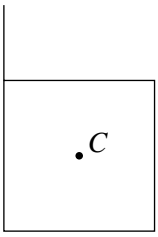
Les symétries orthogonales d'axes ν et h.

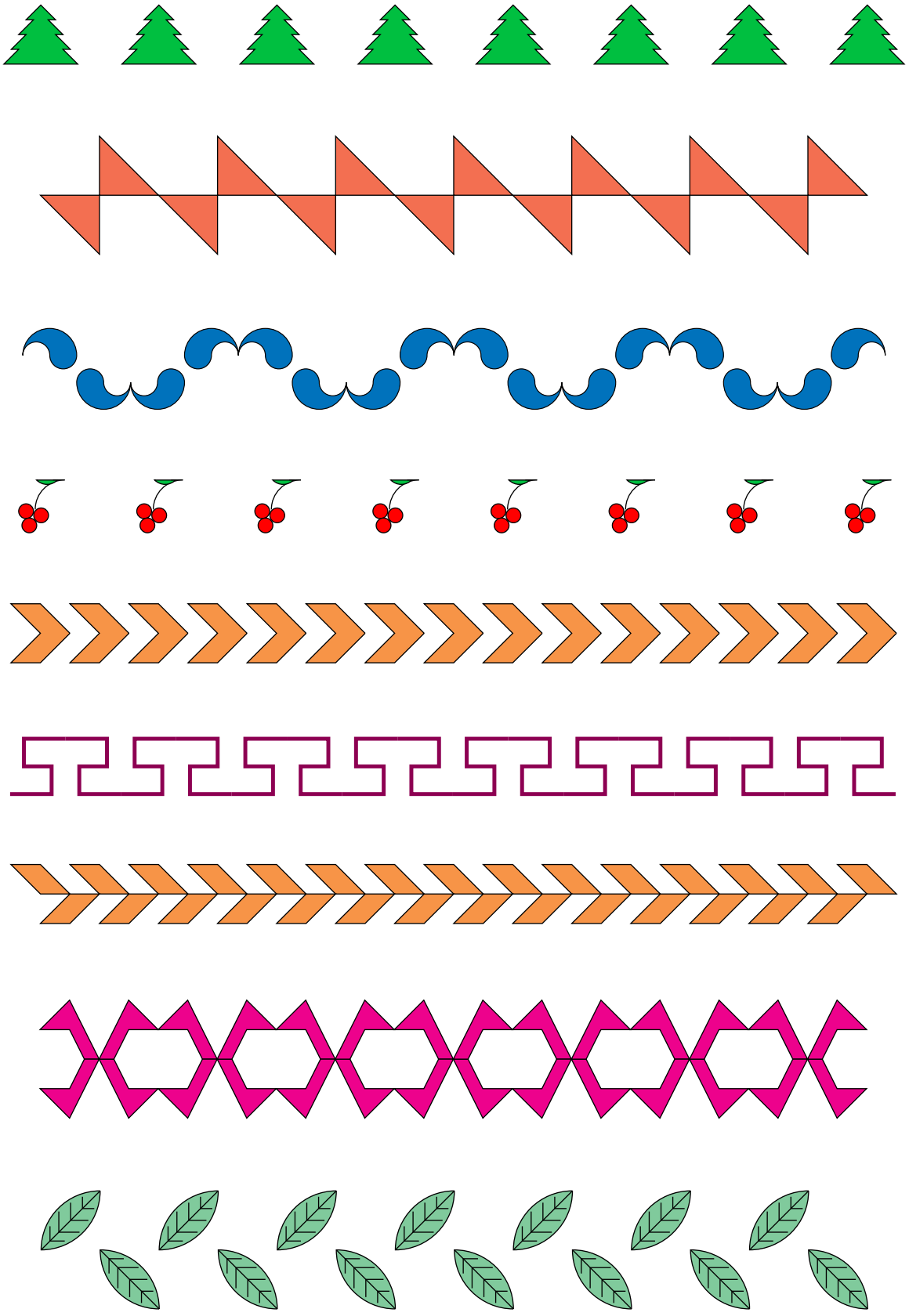


La symétrie centrale de centre C.

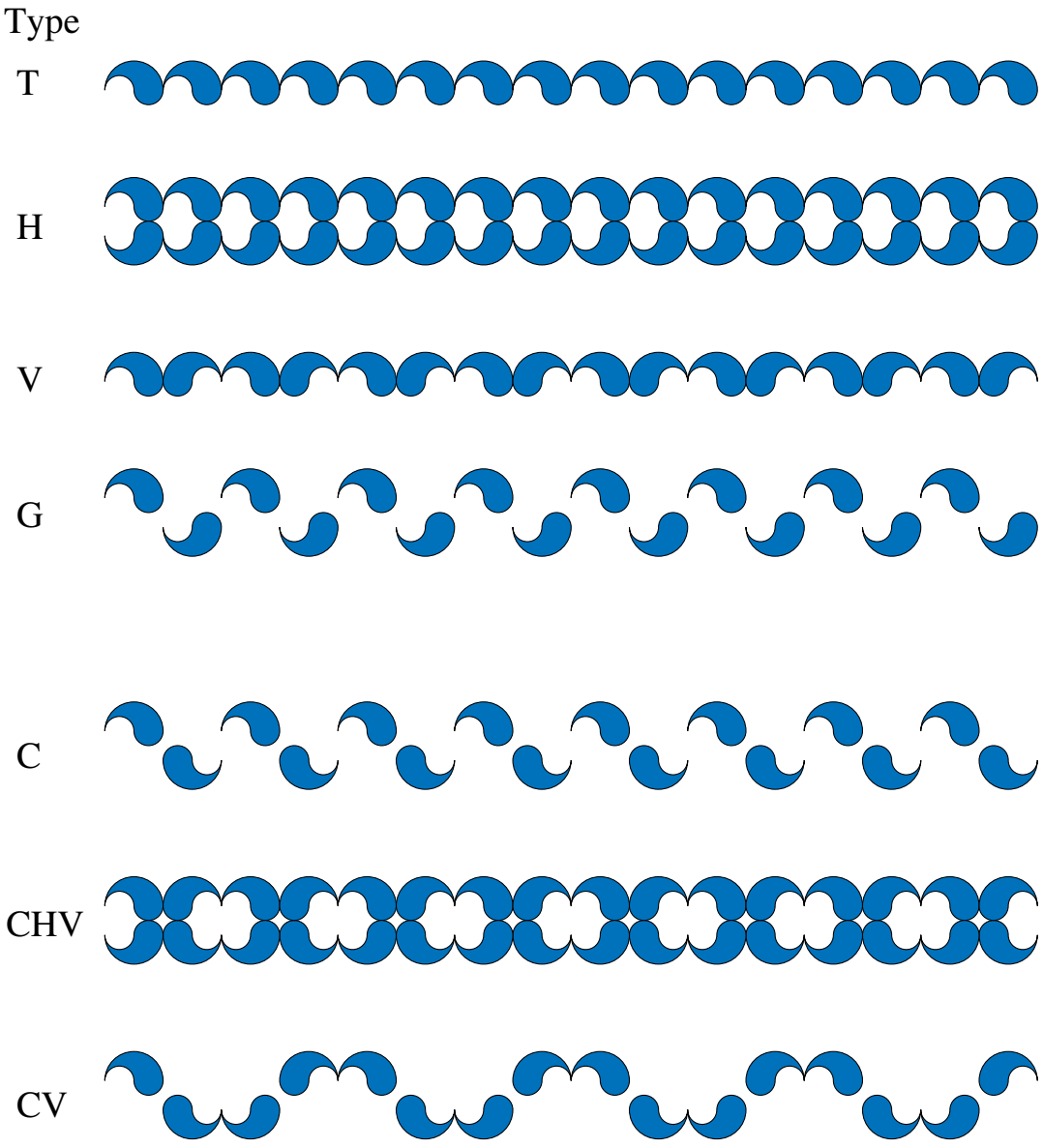


La rotation d'un quart de tour, de centre C.

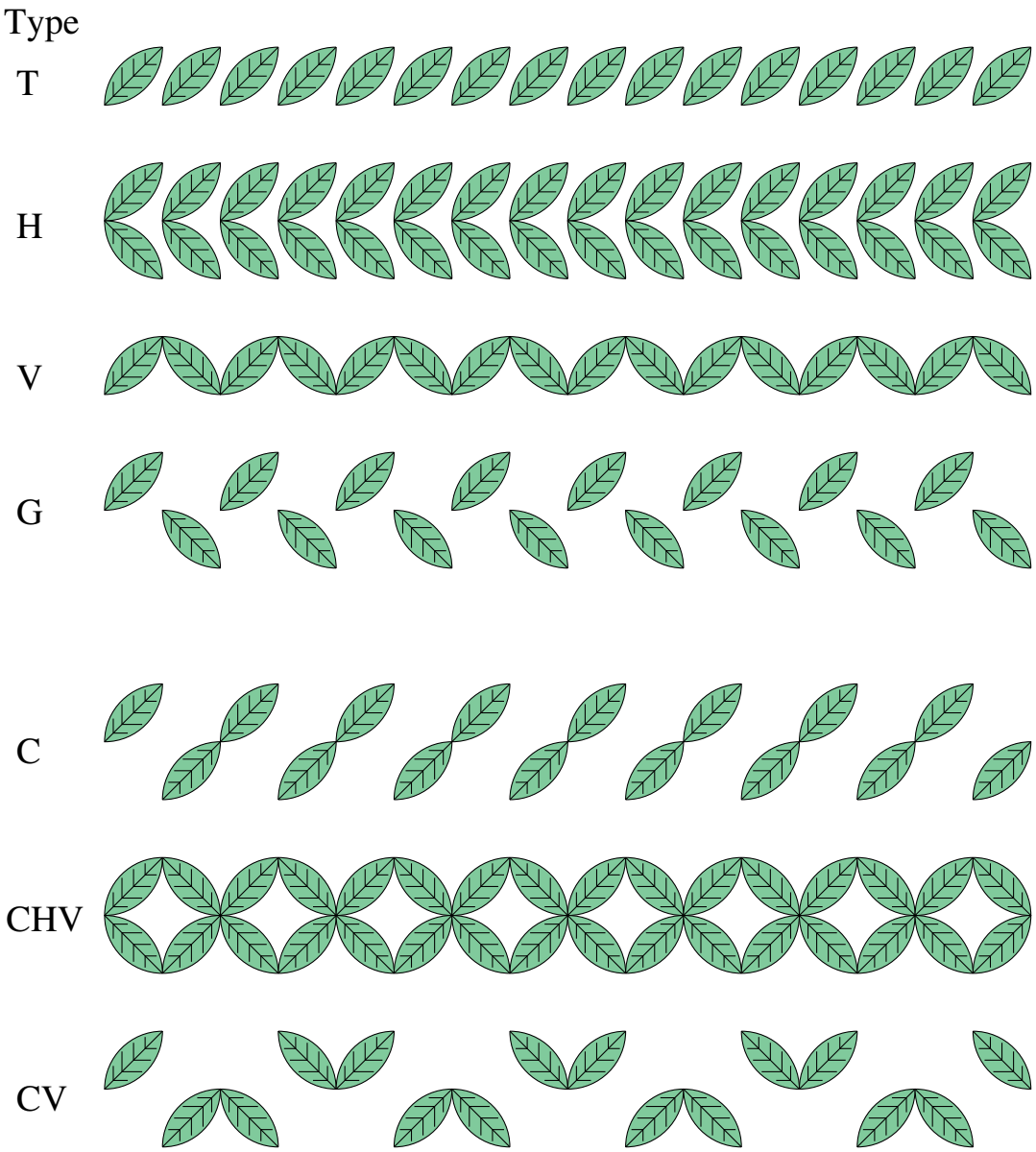




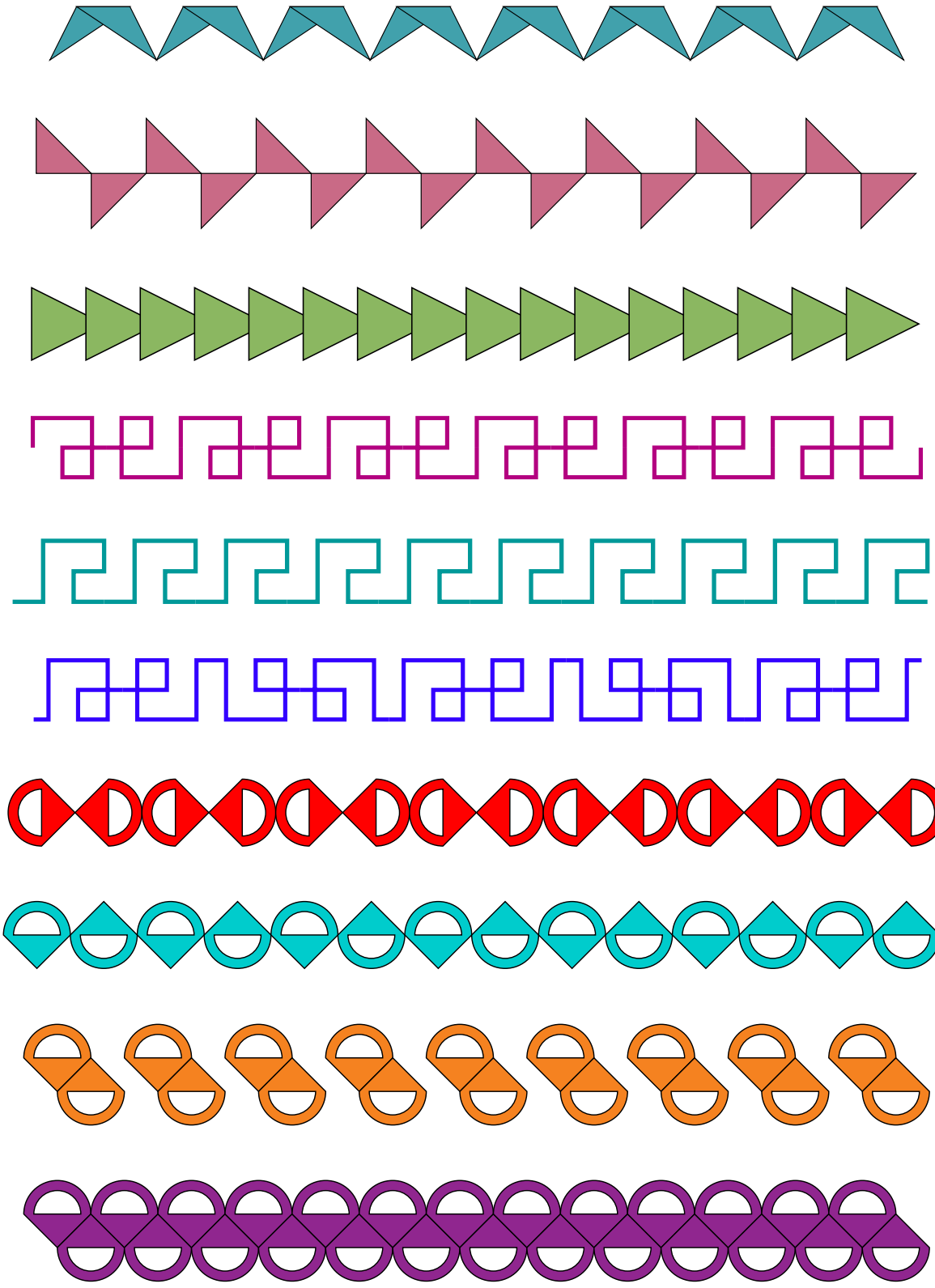
Sept types de frises



Sept types de frises



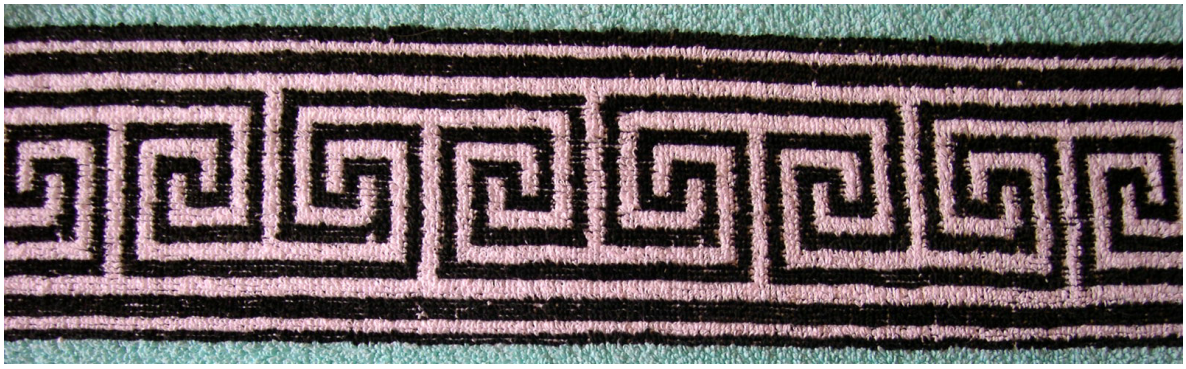
Déterminer le type des frises ci-dessous.

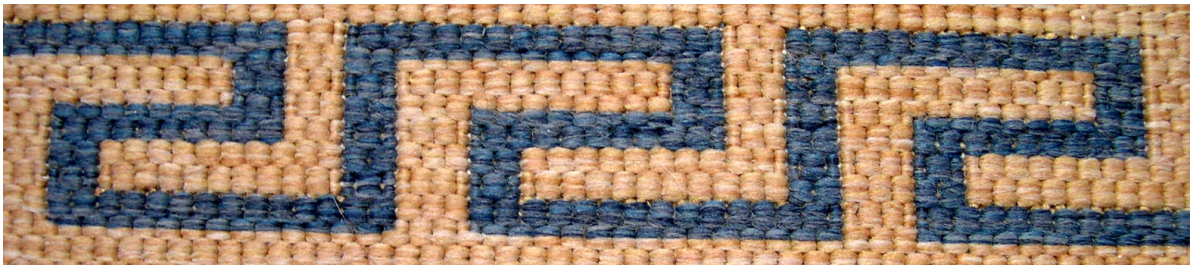


Déterminer le type des frises ci-dessous. Il s'agit de deux bordures de draps de lit, d'un essuie de salle de bain et d'une carpette.









Déterminer le type des frises ci-dessous.



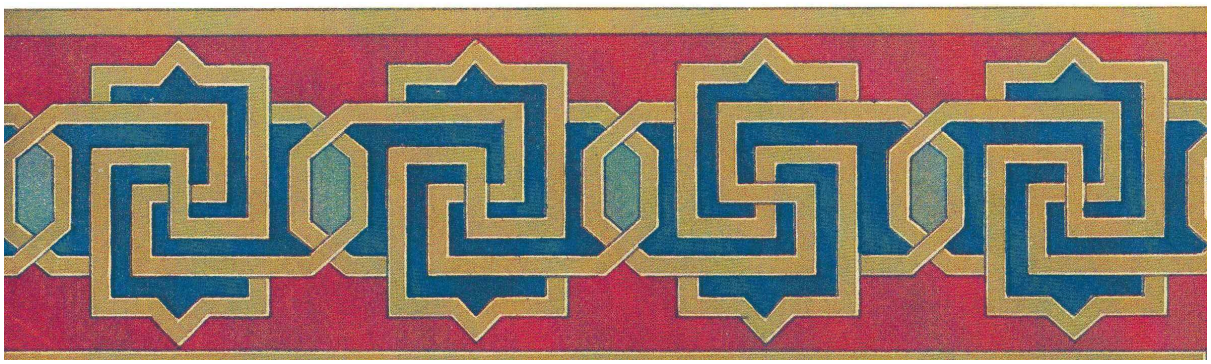
Mosaïque d'Ampurias



Alhambra de Grenade



Alcazar de Séville



Boukhara

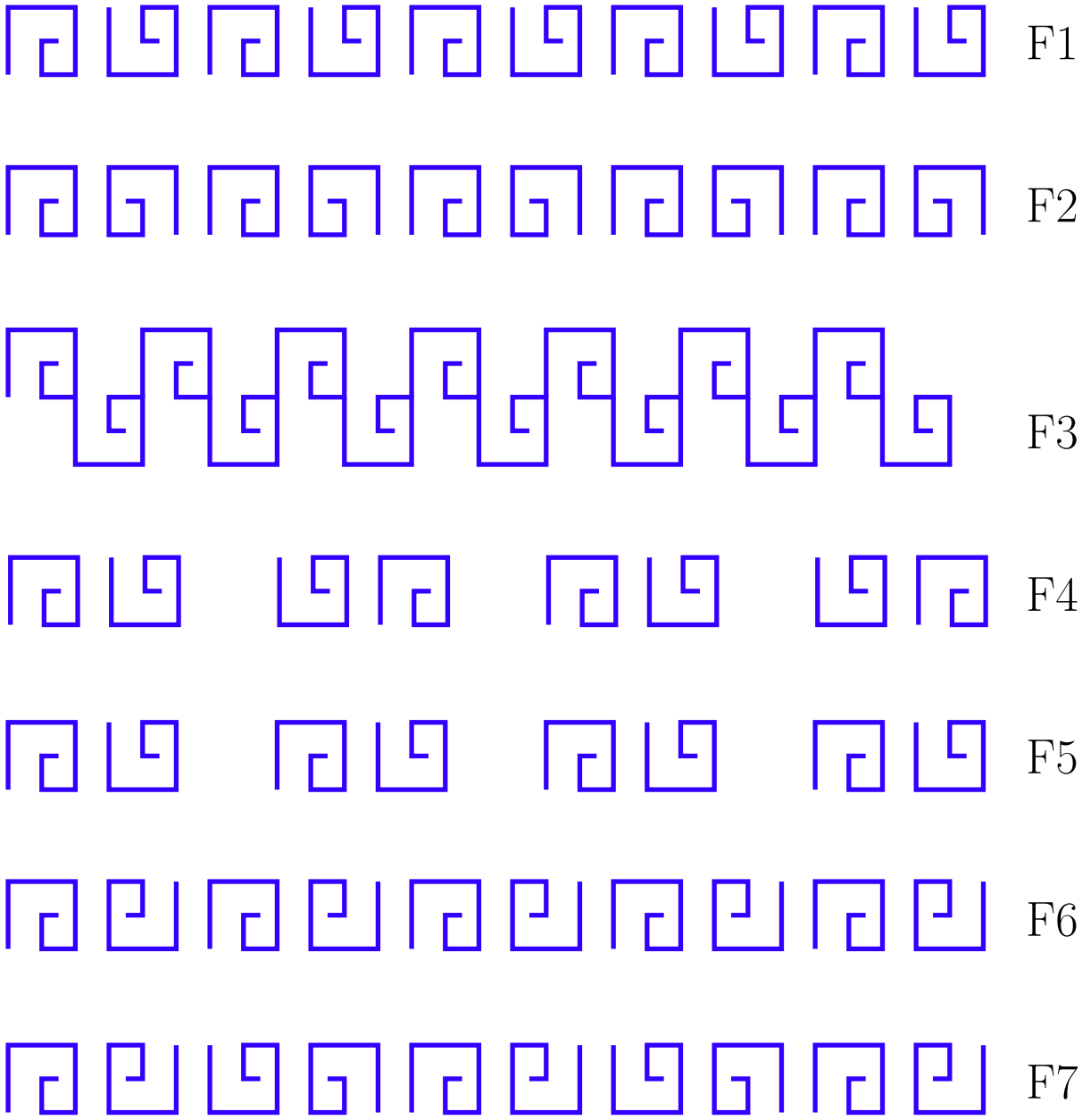
Parmi les frises ci-dessous, déterminer à vue celles qui sont invariantes par une symétrie glissée. Utiliser ensuite le transparent pour vérifier.

Encadrer un motif de base pour chaque frise.

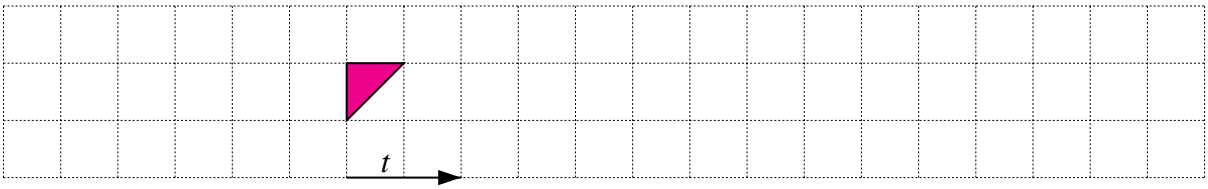
Tracer et comparer les vecteurs des translations t_f et t_g des frises invariantes pour une symétrie glissée.

Préciser le type de chacune des frises.

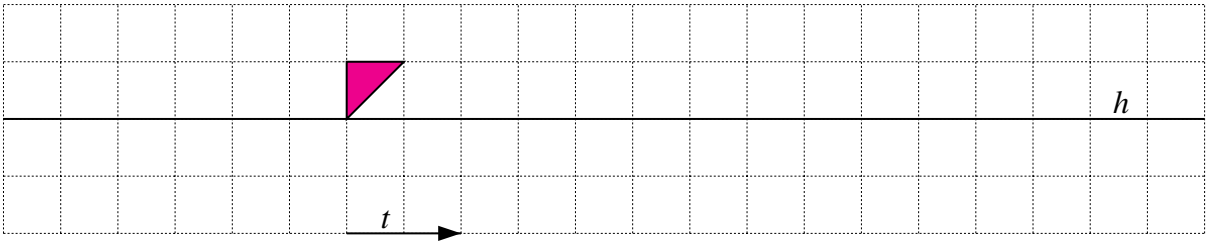
Marquer les centres de symétries éventuels.



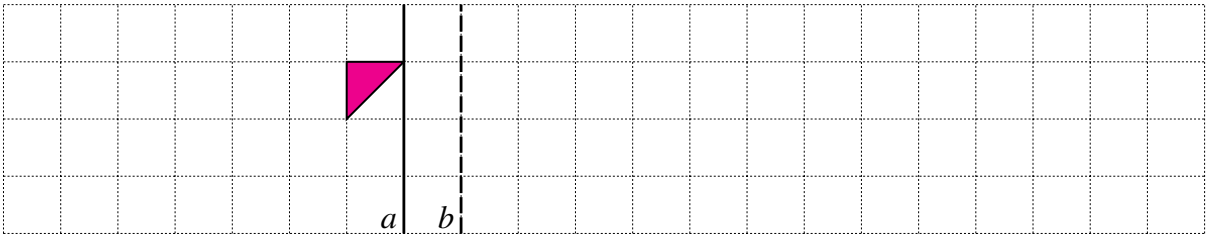
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t.



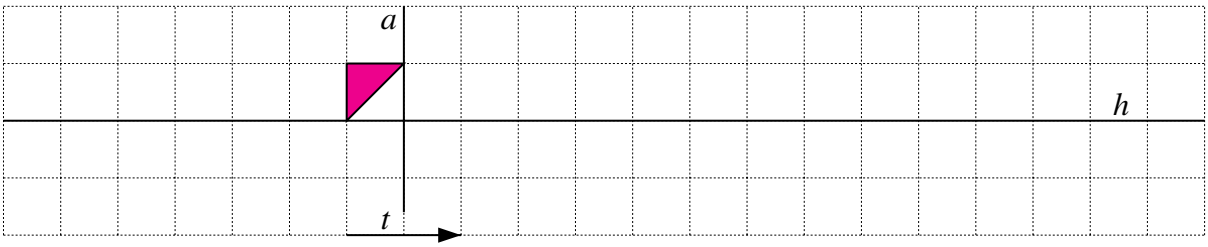
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_h d'axe h.



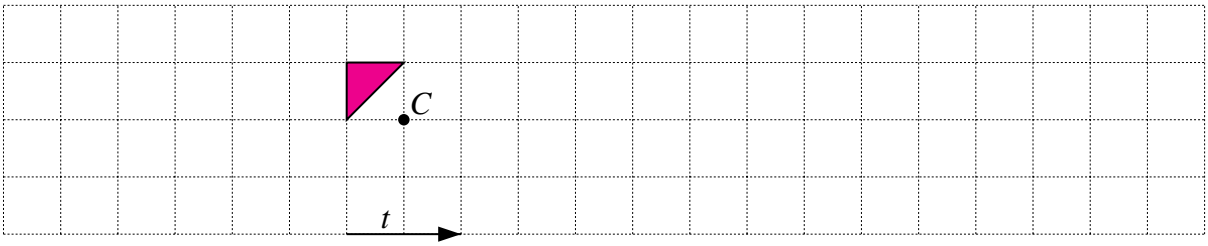
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par les symétries s_a et s_b, respectivement d'axes a et b.



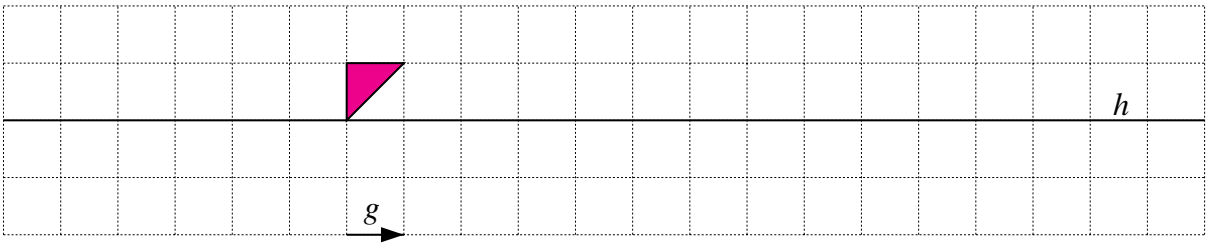
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par les symétries s_a et s_h, respectivement d'axe a et h.



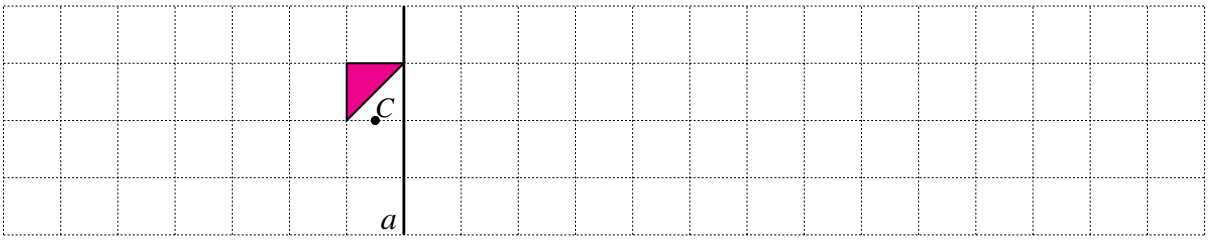
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_C de centre C.



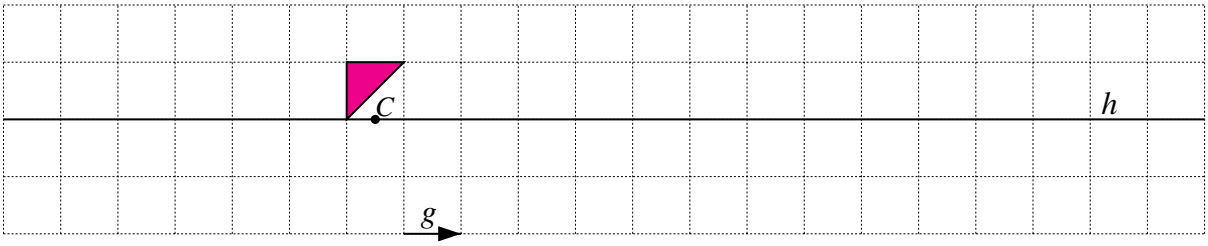
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g d'axe h et de glissement g.



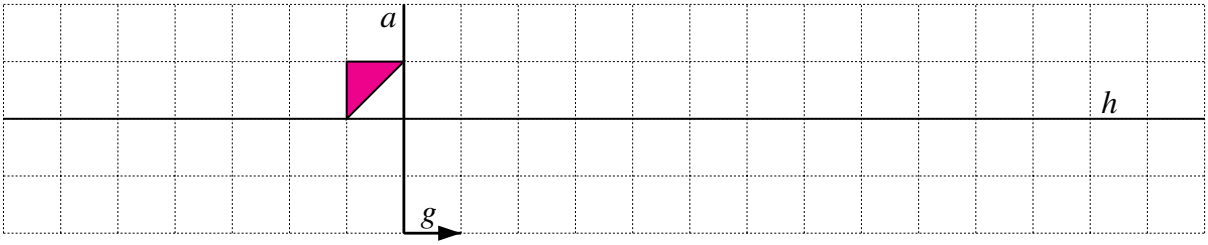
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.



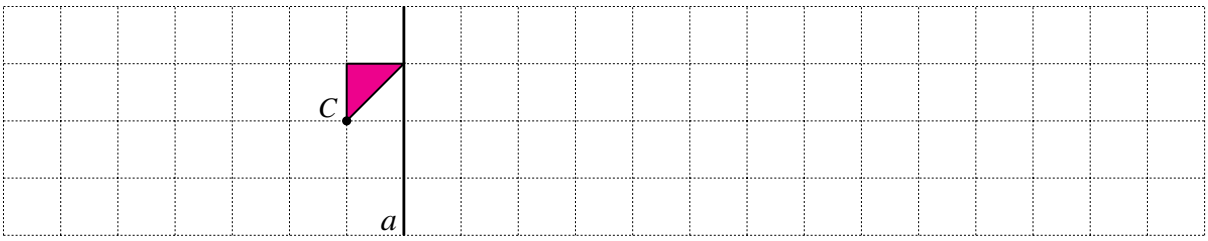
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie glissée d'axe h et de glissement g.



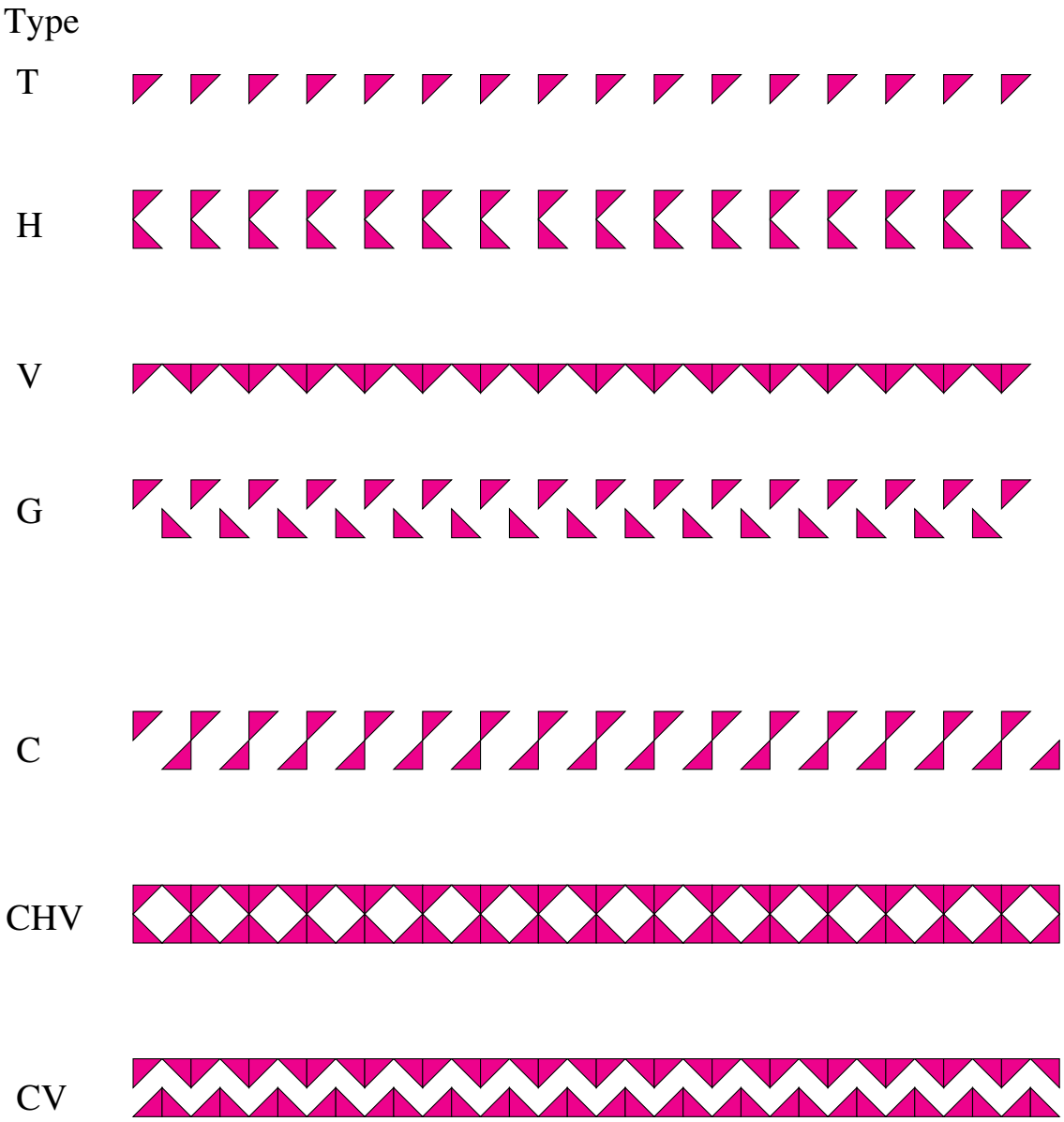
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie d'axe a et par la symétrie glissée d'axe h et de glissement g.



Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.

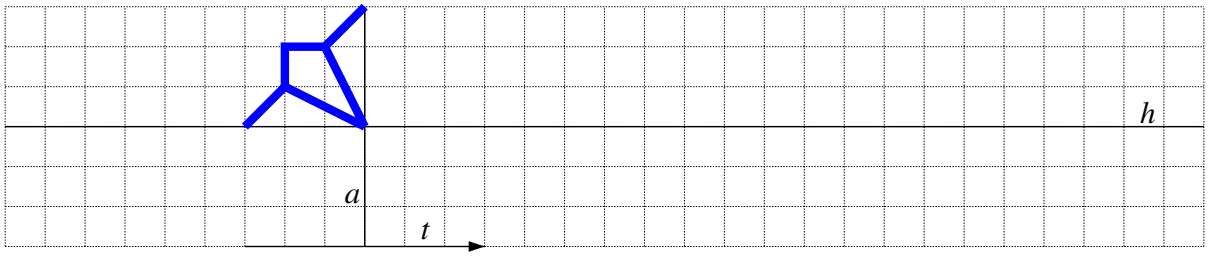


Sept types de frises

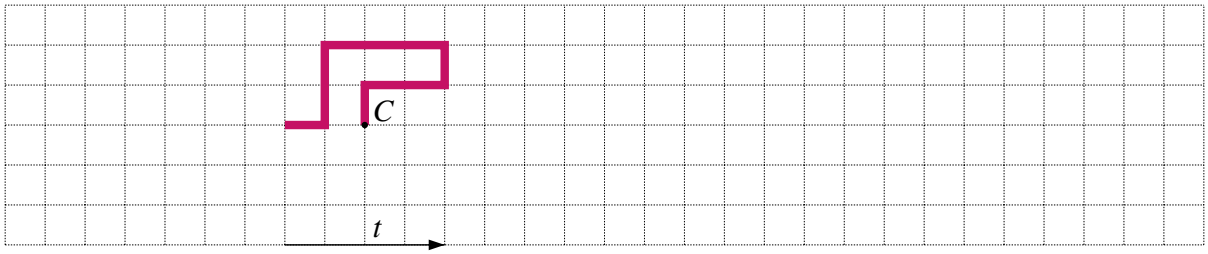


Construire des frises

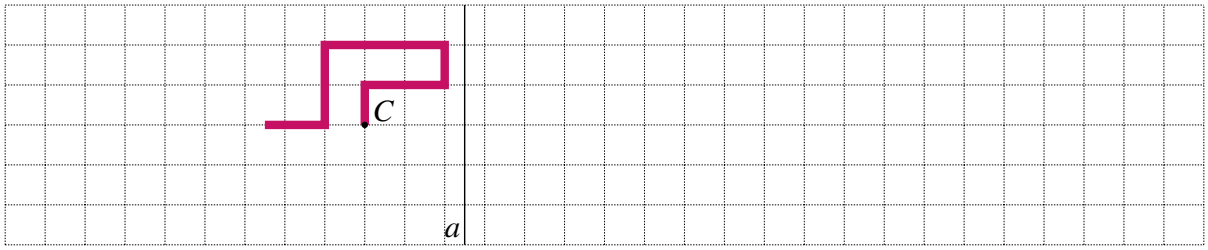
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par les symétries s_a et s_h, respectivement d'axes a et h.



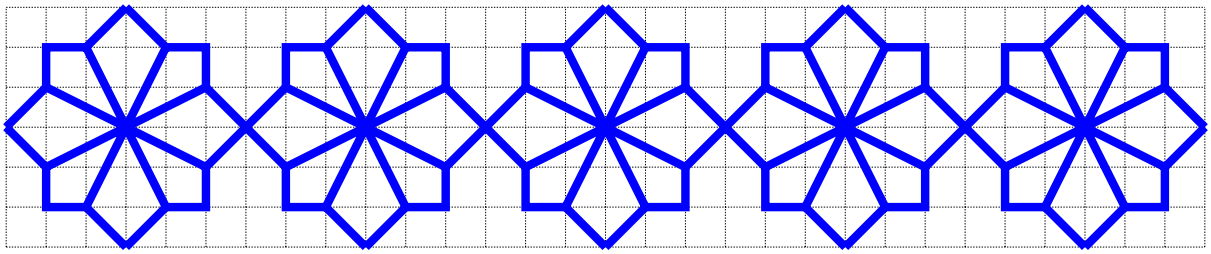
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_C de centre C.

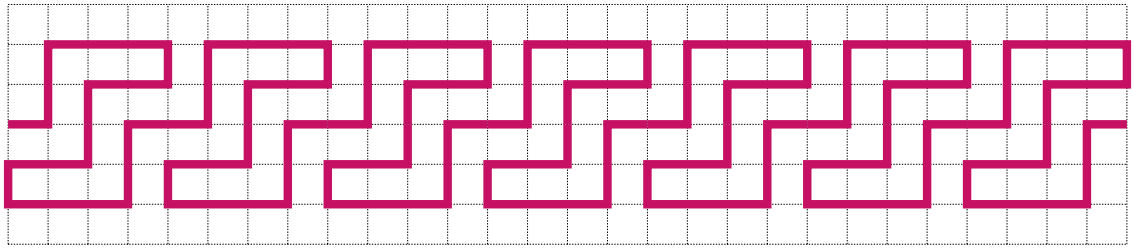


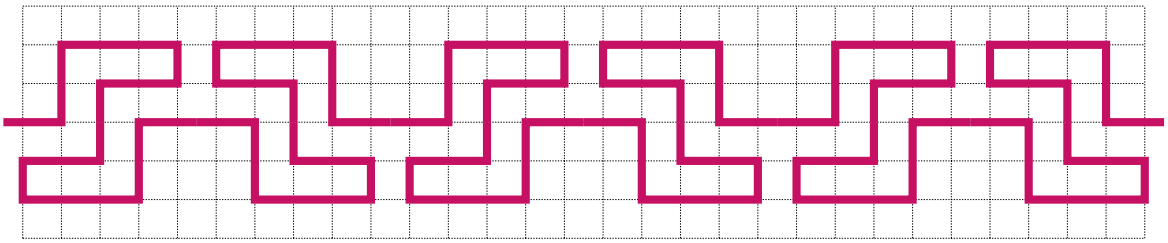
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie s_a d'axe a et par la symétrie s_C de centre C.



Solution de la fiche 60







Troisième partie

Culture mathématique à partir de 15 ans

Chapitre 12

Construire une table à la manière de Ptolémée

Préambule

La trigonométrie fait peu d'adeptes parmi les élèves du secondaire. Nous avons donc imaginé de l'aborder par le biais de l'histoire, qui « justifie » la trigonométrie comme support d'une science appliquée, l'astronomie. Cette dernière suscite, en effet, plus l'enthousiasme de tout un chacun... L'enseignant trouvera au chapitre 19 à la page 530 des informations – dans lesquelles il pourra opérer un choix – qui permettent une telle introduction de la matière.

De nombreux élèves – nous en avons tous été témoins – ne font guère preuve de rigueur dans l'approche des notions mathématiques. Dans le domaine de la trigonométrie, par exemple, l'une des confusions les plus courantes consiste à ne pas trop savoir si c'est le cosinus ou le sinus qui se mesure en abscisse.

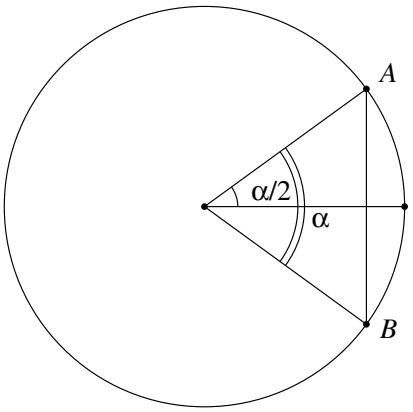


Fig. 1

Nous proposons une activité dans laquelle l'élève va construire, par calcul, une table de cordes à la manière de Ptolémée. De cette table, il déduira ensuite une table de sinus car, comme on peut le voir sur la figure ci-contre, la corde de l'angle α, qui est la mesure du segment $[AB]$, n'est rien d'autre que le double du sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$, dans un cercle de rayon unité.

Nous espérons qu'après ces manipulations, l'élève, qui n'aura travaillé qu'avec la notion de sinus, en soit « tellement imprégné » qu'il ne la confondra plus avec celle de cosinus, dont on lui parlera juste après.

Pour établir sa table de cordes, Ptolémée a besoin de la mesure du côté du pentagone régulier. On peut la donner directement aux élèves, mais on peut aussi envisager une séquence d'apprentissage (conduisant à la construction du côté du pentagone régulier et au calcul de sa mesure) dans laquelle l'élève fournit une justification aux différentes étapes. Cela l'amène à utiliser les outils géométriques mis en place durant la troisième année du secondaire. Ce travail peut ainsi

être envisagé comme une synthèse en fin de troisième ou une consolidation des acquis en début de quatrième.

1 L'*Almageste* de Ptolémée

De quoi s'agit-il ?	Découvrir et comprendre le contenu d'un des chapitres de l'*Almageste* de Ptolémée.
Enjeux	Aborder la trigonométrie dans un contexte historique et culturel. ***Compétence*** *Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.*
De quoi a-t-on besoin ?	Les fiches 1 et 2, en annexe aux pages 471 et 472.
Comment s'y prendre ?	L'enseignant annonce que l'on va construire une table de nombres trigonométriques, en suivant la méthode utilisée par Ptolémée dans le chapitre IX du premier livre de l'*Almageste*.

Il distribue d'abord la fiche 1, qui fournit aux élèves la définition de la corde d'un angle et une première définition du sinus d'un angle. On ne considérera ici que des cordes d'angles compris entre 0 et 180 degrés et des sinus d'angles compris entre 0 et 90 degrés. Par la suite, la définition du sinus sera étendue à tous les angles orientés.

Dans le repère orthonormé Oxy, on considère le cercle de centre O et de rayon 1. Les angles sont orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

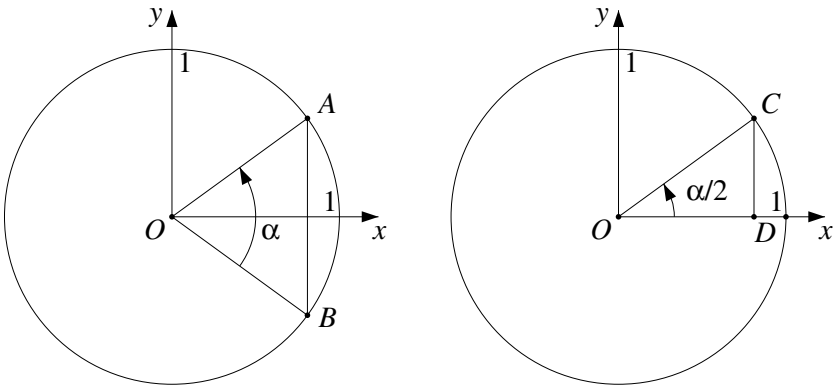


Fig. 2

Observons d'abord le cercle de gauche de la figure 2 et désignons par α l'angle $\widehat{BOA}$. Les anciens appelaient « corde de l'angle α » la mesure du segment $[AB]$. On note $\operatorname{crd}\alpha = |AB|$.

À cette notion de corde, les Arabes ont préféré celle de sinus, qui leur est venue de l'Inde et qui est fort voisine. Elle est illustrée sur le cercle de droite de la même figure 2. Dans ce cas, les angles ont tous pour demi-droite origine l'axe des x du repère. On appelle « sinus de $\frac{\alpha}{2}$ »

la mesure du segment $[CD]$. On note $\sin\frac{\alpha}{2} = |CD|$. On peut encore dire que, puisque tous les angles ont pour demi-droite origine Ox, le sinus est aussi l'ordonnée du point C dans le repère orthonormé Oxy.

Quelle relation y a t-il entre la corde de l'angle α et le sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ de la figure 2 ?

On observe, sans trop de peine, que $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{crd}\alpha$.

On conseillera aux élèves de garder à portée de vue la fiche 1 afin de répondre plus aisément aux questions des fiches suivantes.

On leur donne ensuite la fiche 2 reproduite ci-dessous. On vérifie ainsi qu'ils ont bien acquis les définitions et la propriété précédentes.

Les deux cercles de la figure 3 sont de rayon 1.

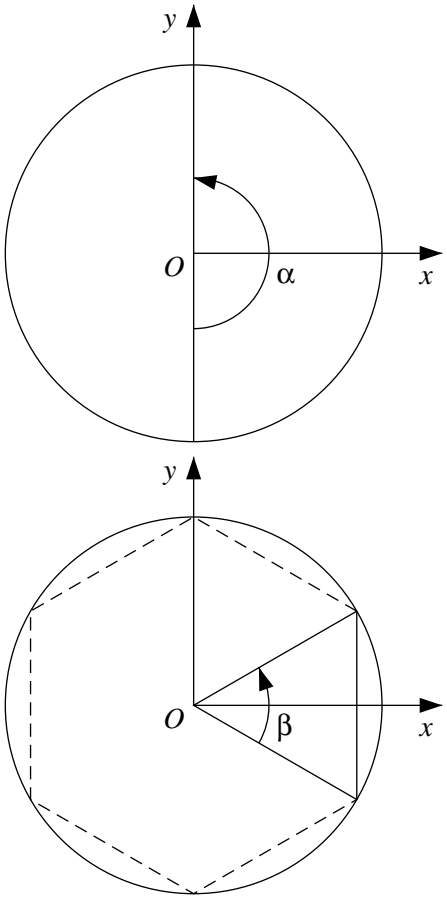


Fig. 3

1. Que vaut l'angle α ?
2. Que vaut $\operatorname{crd}\alpha$?
3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier.

1. Que vaut l'angle β ?
2. Que vaut $\operatorname{crd}\beta$?
3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier.

L'angle α est égal à 180° ; la figure montre que la corde de 180° vaut la mesure de deux rayons, c'est-à-dire 2. De la relation $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{crd}\alpha$, on déduit que le sinus de 90° vaut 1.

Dans le second cercle est inscrit un hexagone régulier. Ainsi, l'angle β vaut 60° ; la corde de 60° est égale à la mesure du rayon, c'est-à-dire 1. La même relation que ci-dessus entraîne que le

sinus de 30° vaut $\frac{1}{2}$.

Le professeur poursuit en décrivant les diverses étapes par lesquelles est passé Ptolémée, et cela afin de justifier les questions que l'on va se poser et résoudre pour élaborer un début de table de sinus. Il demande aux élèves d'en prendre bonne note.

Ptolémée part de la corde de l'angle de 72° et de celle de l'angle de 60°. Si, grâce au résultat obtenu à la fiche 2, on connaît la corde de 60°, il est utile de poser la question qui suit.

De quel polygone la corde de 72° est-elle la mesure du côté ?

Une brève discussion au sein de la classe aboutira sans doute à la conclusion qu'il faudra connaître **la mesure du côté du pentagone régulier.** On en prend note.

À partir des cordes de 72° et 60°, Ptolémée calcule la corde de 12°. Il nous semble intéressant de demander aux élèves s'ils pensent que, pour obtenir la corde de 12°, il suffit de faire la différence des cordes de 72° et de 60°. Ils peuvent tenter de vérifier sur une construction ou se poser la question « à quoi cela correspondrait-il, en terme de sinus ? » et tester, au moyen de leur calculatrice, que $\sin 6^\circ \neq \sin 36^\circ - \sin 30^\circ$. L'enseignant peut en profiter pour attirer leur attention sur le fait qu'il s'agit d'un phénomène non linéaire et mettre en évidence que $\sin(a-b) \neq \sin a - \sin b$. La non-linéarité a déjà été rencontrée : lors de l'élévation au carré, $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$, ou de l'extraction de la racine carrée, $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$, par exemple.

On prend donc également note qu'il faudra pouvoir calculer **la corde de la différence de deux angles.**

Ensuite, Ptolémée recherche les cordes des angles de 6°, 3°, $1\frac{1}{2}^\circ$ et $\frac{3}{4}^\circ$. On inscrit, sur la liste des tâches, qu'il faudra être capable de calculer **la corde de l'angle moitié.**

Arrivé à ce stade, il obtient la corde de $\frac{1}{2}^\circ$, au moyen d'une interpolation assez fine, soutenue par une argumentation géométrique sur laquelle nous ne nous appesantirons pas. Enfin, Ptolémée met au point une formule permettant de calculer la corde de la somme de deux angles – ce qu'on fera peut-être en classe, si on en a encore le courage. Il est ainsi armé pour établir sa table pour des angles allant de $\frac{1}{2}^\circ$ à 180°, par pas de $\frac{1}{2}^\circ$.

Ptolémée calcule, sur trois positions, dans le système sexagésimal des Mésopotamiens, en considérant le rayon du cercle divisé en soixante parties – le système de numération littéral grec[1] est loin d'être adapté à la tâche qu'il s'est fixée. Mais il indique le résultat dans ce système littéral. Les trois positions sexagésimales correspondent, pour nous, à une précision de l'ordre de 10^{-4}. Ainsi, pour la corde de 72°, sa table donne la valeur $o\ \lambda\beta\ \gamma$, c'est-à-dire, en l'écrivant avec nos chiffres, 70 32 3. Il faut comprendre cela comme $\frac{70}{60} + \frac{32}{3\,600} + \frac{3}{216\,000}$, ou $1,175569444\cdots$, dans notre système décimal et pour un cercle de rayon 1. Dans l'activité qui suit, nous obtiendrons $1,175570504\cdots$, pour un même cercle de rayon 1.

Les calculs, dans le système sexagésimal, se faisaient au moyen de tables (de multiplications, d'extractions de racines carrées, ...). On peut encore imaginer que les racines carrées étaient calculées au moyen d'un algorithme, tel que celui de Héron, par exemple[2], qui, itéré trois ou quatre fois, donne la précision désirée. Pour nous, l'activité sera l'occasion d'effectuer un travail avec la calculatrice.

En consultant la liste des tâches, nous voyons qu'il faut d'abord fixer notre attention sur le

[1] Voir à ce sujet le chapitre 3.

[2] Voir à ce propos la section 3.1 du chapitre 14.

pentagone régulier, ensuite sur la corde de la différence de deux angles, et enfin, sur la corde de l'angle moitié. Le professeur signale, qu'avant d'arriver à la mesure du côté du pentagone régulier, il faudra démontrer une série de résultats préliminaires.

2 Construction du pentagone régulier

De quoi s'agit-il ? Découvrir et justifier, étape après étape, la construction du pentagone régulier, au moyen de la règle et du compas.

Enjeux Calculer la mesure du côté du pentagone régulier en fonction de la mesure du rayon du cercle circonscrit.

Compétences

Connaître les grands théorèmes de la géométrie classique relatifs aux longueurs, aux rapports de longueurs, aux angles.

Justifier les étapes d'une construction.

De quoi a-t-on besoin ? Papier, crayon, règle et compas.

Les fiches 3 à 6, en annexe aux pages 473 à 476.

2.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Comment s'y prendre ? L'enseignant distribue la fiche 3, qui contient la figure 4 et les consignes reprises dans les encadrés ci-dessous.

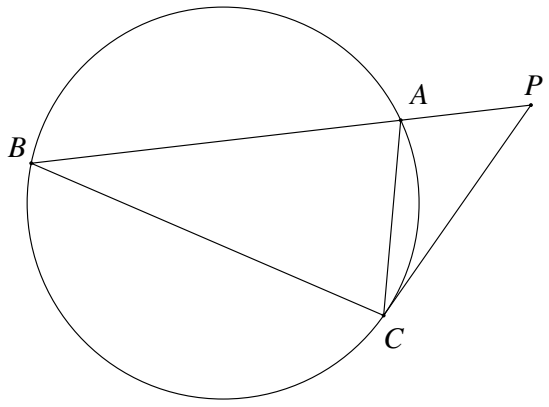


Fig. 4

Le point P est quelconque à l'extérieur du cercle.

La droite PAB est une sécante quelconque au cercle.

La droite PC est tangente au cercle.

Comparer les angles des triangles PCA et PBC.

Les élèves devraient remarquer que

ces deux triangles ont l'angle $\widehat{P}$ en commun ;

l'angle $\widehat{C}$ du triangle PCA est égal à l'angle $\widehat{B}$ du triangle PBC, puisque ce sont des angles respectivement tangentiel et inscrit qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{CA}$.

Comment sont les triangles PCA et PBC ?
En déduire une relation entre $\lvert PA\rvert$, $\lvert PB\rvert$ et $\lvert PC\rvert$.

Les triangles PCA et PBC sont semblables, ce qui permet notamment d'écrire

$$\frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PC|}, \quad \text{ou encore} \quad |PC|^2 = |PA| \times |PB|.$$

Une discussion au sein de la classe mettra en évidence le fait que la droite PC, tangente au cercle, est un cas limite de sécante, celui où les deux points A et B se confondent. Dans ce cas limite, la longueur du segment $[PC]$ et donc aussi $|PC|^2$ ne dépendent que du point P. Puisque la droite PAB peut être une quelconque sécante, ce qui précède montre que, étant donné un cercle et un quelconque point P extérieur, pour n'importe quelle sécante AB passant par ce point P, le produit $|PA| \times |PB|$ est une constante. On l'appelle **puissance du point P par rapport au cercle**.

Cette propriété de produit constant, pour n'importe quelle sécante, est encore vraie si le point P est intérieur au cercle – évidemment la tangente issue de P n'existe alors plus. Cette fois encore, la démonstration ne fait intervenir que des triangles semblables. Si la classe est particulièrement active, l'enseignant peut poser la question « Et si le point P est intérieur au cercle ? » Mais, pour poursuivre l'activité, nous n'avons besoin que du cas où le point est extérieur, et à partir duquel on mène une sécante et une tangente.

2.2 Partage d'un segment en extrême et moyenne raison

Comment s'y prendre ? Le professeur distribue la fiche 4, qui contient la figure 5 et les consignes dans les différents encadrés.

On considère un segment $[CP]$.

Par le point C, on trace la droite CD perpendiculaire à la droite CP et on place le point D de telle manière que $|CD| = |CP|$. On nomme O le milieu de $[CD]$.

On trace le cercle de centre O et de diamètre $[CD]$.

On trace la droite PO et on note A et B ses points d'intersection avec le cercle.

On construit le point M sur le segment $[CP]$, tel que $|PM| = |PA|$.

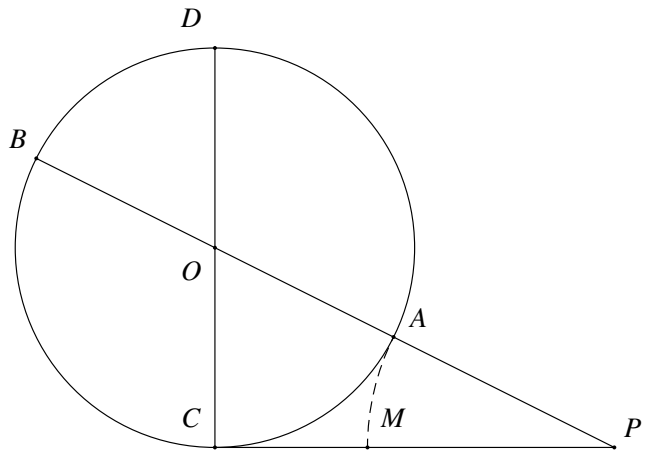


Fig. 5

Sachant que $|PB| = |PA| + |AB|$ et que $|CD| = |AB| = |CP|$, établir que

$$|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|.$$

En déduire que $|PM|^2 = |PC| \times |MC|$.

Si l'élève ne pense pas à comparer les figures 4 et 5, le professeur l'engagera à le faire.

De cette comparaison devrait émerger le fait que, sur les deux figures, on voit une sécante PAB au cercle, issue de P et une tangente PC au cercle, également issue de P.

Grâce à la propriété justifiée à la section 2.1, on peut écrire

$$|PC|^2 = |PA| \times |PB|,$$

et, puisque $|PB| = |PA| + |AB|$, $|PC|^2 = |PA| \times (|PA| + |AB|) = |PA|^2 + |PA| \times |AB|$.

Comme $|PC| = |CD| = |AB|$ et $|PM| = |PA|$, il vient

$$|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|.$$

Ensuite,

$$|PM|^2 = |PC|^2 - |PM| \times |PC| = |PC| \times (|PC| - |PM|),$$
$$|PM|^2 = |PC| \times |MC|.$$

Le professeur fait remarquer que cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$\frac{|PM|}{|MC|} = \frac{|PC|}{|PM|}.$$

On dit que le point M, tel que $\frac{|PM|}{|MC|} = \frac{|PC|}{|PM|}$, partage le segment $[PC]$ en extrême et moyenne raison. Cette construction « fort ancienne » est en fait la proposition 30 du chapitre VI des *Éléments* d'Euclide. Le lecteur intéressé trouvera une autre façon d'aborder ce problème à la section 2.2 du chapitre 13.

Si a représente la mesure du segment $[PC]$, calculer $|PM|$ en fonction de a.

Une manière de procéder utilise le fait que $|PM| = |PA|$ et que le triangle PCO est rectangle en C. Grâce au théorème dit de Pythagore, on trouve

$$|PO| = \sqrt{|PC|^2 + |CO|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Il suffit ensuite d'écrire

$$|PM| = |PA| = |PO| - |OA| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Une autre approche, algébrique celle-là, du problème consiste à considérer $|PM|$ comme un réel inconnu dans la relation $|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|$, rencontrée ci-dessus. En notant $|PM| = x$ et $|PC| = a$, il vient

$$a^2 = x^2 + ax \quad \text{ou encore} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

L'autre relation à laquelle on est arrivé, à savoir $|PM|^2 = |PC| \times |MC|$, se traduit par $x^2 = a(a-x)$, qui est la même équation du deuxième degré. En la résolvant, on obtient les deux solutions

$$x = \frac{a}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right) \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Puisque x représente la mesure d'un segment, x doit être positif, ce qui donne $|PM| = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Calculer le rapport $\dfrac{|PM|}{|MC|}$ dans lequel le point M partage le segment $[PC]$.

On sait que $\dfrac{|PM|}{|MC|} = \dfrac{|PC|}{|PM|}$; il vient donc

$$\frac{|PM|}{|MC|} = \frac{|PC|}{|PM|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{1}{2}\cdot 4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

La valeur numérique de ce rapport dans lequel M partage le segment $[PC]$ en extrême et moyenne raison a fait « fantasmer » pas mal de personnes ; elle est connue sous le nom de *nombre d'or*. Le lecteur trouvera quelques commentaires sur celui-ci à la page 423 du chapitre 13.

2.3 Le décagone régulier

Comment s'y prendre ?

Le professeur annonce que le travail qui vient d'être accompli va permettre de construire un décagone régulier, et par conséquent, un pentagone régulier. L'élève reçoit la fiche 5, qui contient les informations qui suivent.

Le segment $[AB]$ est un côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $[OA]$.

La droite AM est une bissectrice de l'angle en A du triangle ABO.

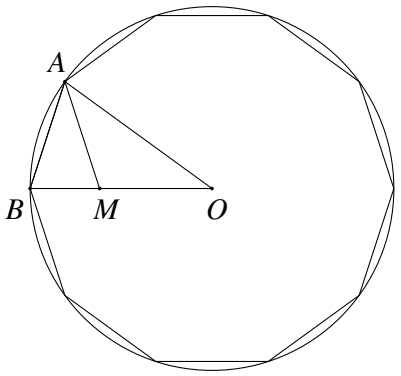


Fig. 6

En calculant les mesures des angles des triangles MAB et AMO, justifier que ces triangles sont isocèles. On a alors $|AB| = |AM| = |OM|$.

Puisque la figure représente un décagone régulier inscrit dans un cercle, l'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut 36°. Les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons du cercle ; ainsi, le triangle AOB est isocèle et, en vertu de ce qu'on vient de constater, les angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{OBA}$ valent 72°.

La droite AM est bissectrice de l'angle $\widehat{BAO}$, ce qui implique que l'angle $\widehat{MAO}$ vaut 36°, tout comme l'angle $\widehat{AOB}$; cela entraîne que le triangle AMO est isocèle. On en déduit immédiatement que l'angle $\widehat{AMO}$ est égal à 108°, ce qui implique que l'angle $\widehat{AMB}$ vaut 72°, tout comme $\widehat{ABM}$. Ainsi, le triangle MAB est lui aussi isocèle et de tout ce qui vient d'être dit, on tire $|AB| = |AM| = |OM|$. De plus, les deux triangles AOB et BAM sont semblables, puisque leurs angles sont égaux deux à deux.

En utilisant la similitude des triangles AOB et BAM et l'égalité trouvée précédemment, établir une relation entre les mesures des segments $[OB]$, $[OM]$ et $[MB]$.

On a $\dfrac{|OB|}{|AM|} = \dfrac{|AB|}{|MB|}$, et, en tenant compte de l'égalité obtenue plus haut, il vient

$$\frac{|OB|}{|OM|} = \frac{|OM|}{|MB|} \quad \text{ou encore} \quad |OM|^2 = |OB| \times |MB|.$$

En comparant cette relation avec celle obtenue dans l'activité de la fiche 4 entre les mesures des segments $[PC]$, $[PM]$ et $[MC]$, que peut-on en conclure pour le point M de la figure ci-dessus ?

La comparaison demandée fait apparaître que le point M divise le rayon $[OB]$ du cercle circonscrit au décagone régulier en extrême et moyenne raison.

En se référant encore à l'activité de la fiche 4, que vaut la mesure de la longueur du côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon r ?

Si c_{10} désigne le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon r, on a assez directement

$$c_{10} = |AB| = |OM| = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Construction du décagone régulier

L'enseignant donne alors la consigne ci-dessous.

En utilisant la configuration de la fiche 4, construire un décagone régulier.

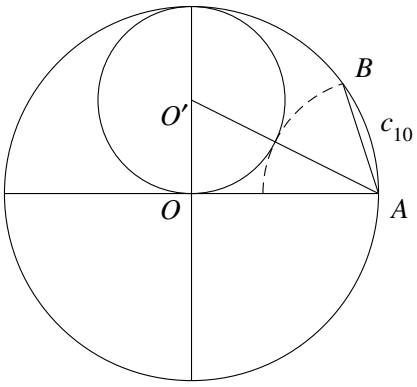


Fig. 7

On reporte évidemment le côté c_{10} tout le long du cercle, ce qui permet de tracer le décagone régulier inscrit dans ce cercle. En joignant un point sur deux, on peut aussi dessiner le pentagone régulier inscrit dont il reste à calculer la mesure du côté. Après ce calcul, nous montrerons que cette construction du pentagone régulier n'est rien d'autre que celle qui était ou est encore classiquement enseignée.

La figure 8 ci-contre montre le décagone régulier et le pentagone régulier inscrits dans le cercle de centre O. L'angle $\beta = 72^\circ$ est le double de l'angle $\alpha = 36^\circ$. On vient de calculer la corde de l'angle α, qui vaut $\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = 0,618033988\cdots r$. Si on met au point une formule donnant la corde de l'angle double d'un angle dont la corde est connue, on aura atteint le premier but, à savoir la connaissance de la mesure du côté du pentagone ce qui équivaut à celle de la corde de l'angle de 72°.

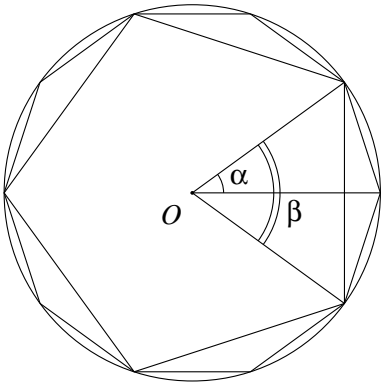


Fig. 8

2.4 Corde d'un angle double d'un angle donné

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue la fiche 6, qui contient la figure 9 et les questions qui suivent.

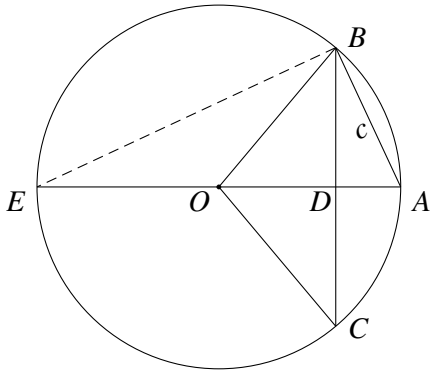


Fig. 9

L'angle $\widehat{COB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{AOB}$.

La mesure de la corde $[AB]$ est notée c.

La mesure du rayon du cercle est notée r.

Le rayon $[AO]$ est prolongé jusqu'en E et on trace le triangle ABE.

Que vaut l'angle en B du triangle ABE ?

Cet angle vaut 90° et le triangle ABE, inscrit dans un demi-cercle, est un triangle rectangle.

En calculant de deux manières le double de l'aire du triangle ABE, exprimer la mesure de la corde $[BC]$ en fonction de la mesure c de la corde $[AB]$.

Le double de l'aire du triangle ABE vaut $|AB| \times |BE| = |BD| \times |AE|$. On sait que $|AE| = 2r$ et que $|AB| = c$.

Le théorème dit de Pythagore nous permet de calculer $|BE| = \sqrt{4r^2 - c^2}$.

La première égalité peut donc s'écrire $c \times \sqrt{4r^2 - c^2} = |BD| \times 2r$.

Ainsi,

$$|BD| = \frac{c \times \sqrt{4r^2 - c^2}}{2r} \quad \text{et donc} \quad |BC| = \frac{c \times \sqrt{4r^2 - c^2}}{r}.$$

En utilisant une calculatrice, en déduire la mesure du côté du pentagone régulier à partir de celle du décagone régulier.

Pour calculer la mesure du côté du pentagone régulier, nous l'identifions à $|BC|$, que nous notons c_5 dans la formule ci-dessus, tandis que la quantité c mesure le côté du décagone régulier, à savoir $c_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0,618033988\cdots r$. On a alors

$$c_5 = |BC| = \frac{c \times \sqrt{4r^2 - c^2}}{r} = \frac{c_{10} \times \sqrt{4r^2 - c_{10}^2}}{r}.$$

L'élève calcule ainsi $c_5 = \dfrac{0,618033988\cdots r \times \sqrt{4r^2 - (0,618033988\cdots)^2\, r^2}}{r}$,

$$c_5 = 0,618033988\cdots \times \sqrt{4 - (0,618033988\cdots)^2}\; r = 1,175570504\cdots r.$$

L'enseignant conviendra avec les élèves de la précision désirée. Une valeur approchée à 7 décimales près, par exemple, suffit pour entreprendre l'activité suivante. Si le professeur envisage de faire effectuer le calcul exact par les élèves, il devra sans doute donner un ≪ très gros coup de pouce ≫. Nous indiquons ci-dessous quelques étapes de ce travail. Il vient

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{\frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \times \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}}{r}, \\
&= \frac{\left(\sqrt{5} - 1\right) \times \sqrt{16r^2 - r^2\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right)}}{4}, \\
&= \frac{r\left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \\
&= \frac{r}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2\left(10 + 2\sqrt{5}\right)} = \frac{r}{4}\sqrt{\left(6 - 2\sqrt{5}\right)\left(10 + 2\sqrt{5}\right)}, \\
&= \frac{r}{4}\sqrt{60 - 20 - 20\sqrt{5} + 12\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{40 - 8\sqrt{5}} = \frac{2r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
c_5 &= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Construction « classique » du pentagone régulier

Cette construction n'est nullement indispensable à la poursuite de l'activité. Nous la donnons simplement à titre indicatif, pour montrer que ce nous avons fait, dans ce qui précède, n'est rien d'autre que la justification de cette construction classique, si on y ajoute le complément ci-dessous.

Maintenant que l'on connaît la mesure du côté du décagone régulier et celle du côté du pentagone régulier, il n'est pas difficile de démontrer la relation qui lie ces deux mesures à celle du côté de l'hexagone régulier. En fait, on a $c_5^2 = c_{10}^2 + c_6^2$.

La vérification est immédiate. Nous savons que

$$c_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad c_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \qquad c_6 = r.$$

Il vient

$$c_5^2 = \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right),$$

$$c_{10}^2 + c_6^2 = \frac{r^2}{4}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) + r^2 = \frac{r^2}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) + 4\frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right).$$

Il suffit alors de modifier légèrement la construction du côté du décagone régulier vue précédemment pour obtenir une construction directe du côté du pentagone régulier.

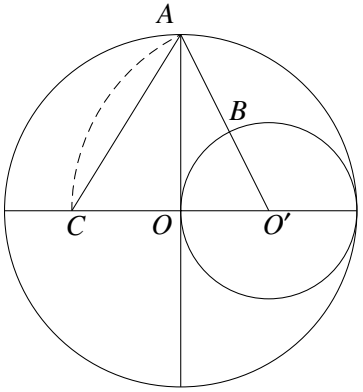


Fig. 10

On voit, sur la figure ci-contre, que $|AB|$ représente la mesure du côté du décagone régulier. Au moyen du compas, on reporte cette longueur $|AB|$ de manière à obtenir le segment $[OC]$. La longueur $|AC|$ est alors la mesure du côté du pentagone régulier, puisque, dans le triangle rectangle OAC, on a bien

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |OC|^2 + |OA|^2, \\ &= c_{10}^2 + c_6^2. \end{aligned}$$

3 Élaboration d'une table de cordes

De quoi s'agit-il ? Élaborer une table de cordes et de sinus, par des moyens géométriques et en s'aidant de la calculatrice.

Enjeux S'imprégner fortement de la notion de sinus.

Compétences

Connaître les grands théorèmes de la géométrie classique et de la trigonométrie relatifs aux longueurs, aux rapports de longueurs, aux angles.

Justifier les étapes d'une démonstration.

Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre.

De quoi a-t-on besoin ?

Papier, crayon, règle, compas, calculatrice.

Les fiches 7 à 11, en annexe aux pages 477 à 481.

3.1 Quelques cordes et sinus connus

Comment s'y prendre ?

Le professeur demande aux élèves de consigner sur une feuille de papier les cordes et sinus déjà connus (pour un cercle de rayon 1) ; cette feuille sera complétée au fur et à mesure de l'activité qui suit, de manière à pouvoir comparer les résultats obtenus par voie géométrique à ceux fournis directement par la touche de la calculatrice.

Ils devraient obtenir une table du type

Angle	Corde	Angle	Sinus
36°	$0,618033988\cdots$	18°	$0,309016994\cdots$
60°	$1,000000000\cdots$	30°	$0,500000000\cdots$
72°	$1,175570504\cdots$	36°	$0,587785252\cdots$
180°	$2,000000000\cdots$	90°	$1,000000000\cdots$

En consultant la liste des tâches, nous constatons qu'il faut maintenant établir une formule donnant la corde de la différence de deux angles. Nous pourrons ainsi, comme Ptolémée l'a fait, calculer la corde de 12° à partir de celles de 72° et de 60°. Nous allons suivre les traces du grand astronome, qui recourt à un théorème qu'on a coutume de lui attribuer.

3.2 Le théorème dit de Ptolémée

Comment s'y prendre ?

Les élèves reçoivent la fiche 7, comprenant deux figures et l'énoncé du théorème « dit » de Ptolémée. Nous la reproduisons ci-après.

On trace un cercle, dans lequel on inscrit un quadrilatère quelconque $ABGD$.

On trace également les deux diagonales de ce quadrilatère, à savoir AG et BD.

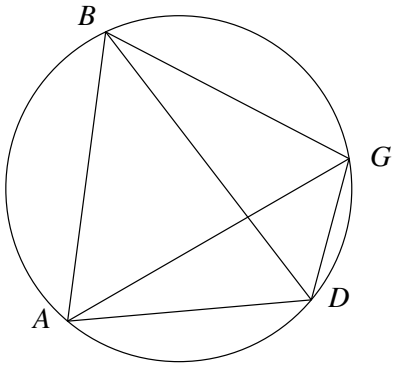


Fig. 11

Le théorème s'énonce

Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des mesures des diagonales est égal à la somme des produits des mesures des côtés opposés.

$$|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| = |BD| \times |AG|.$$

Pour faire sa démonstration, Ptolémée construit alors la droite BE, telle que $\widehat{ABE} = \widehat{DBG}$.

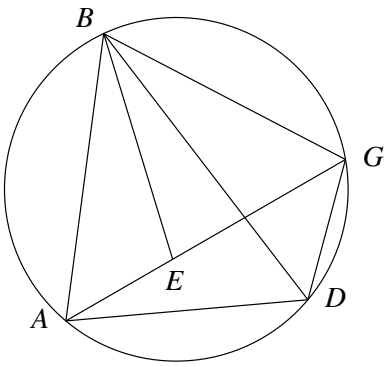


Fig. 12

Si les élèves éprouvent trop de problèmes pour entamer la démonstration, le professeur leur suggérera de repérer, dans la figure 12, des triangles semblables ayant pour côtés certains éléments qui interviennent dans le résultat formalisé plus haut.

Si la situation est tout à fait bloquée, les élèves reçoivent la fiche 8, reprenant les deux précédentes figures et les questions ci-dessous.

Comparer les angles des triangles ABE et DBG.

Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{DBG}$ sont égaux par construction de la droite BE.
Les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GDB}$ sont égaux, car ils sont inscrits et interceptent le même arc.

Comment sont les deux triangles ABE et DBG ? En déduire une relation entre $\|AE\|$, $\|AB\|$, $\|BD\|$ et $\|DG\|$.

Les triangles sont semblables, ce qui permet d'écrire

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|DG|} \quad \text{ou encore} \quad |AB| \times |DG| = |BD| \times |AE|.$$

Comparer les angles des triangles ABD et EBG.

Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{EBG}$ sont égaux par construction de la droite BE.
Les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BGE}$ sont égaux, car ils sont inscrits et interceptent le même arc.

Comment sont les deux triangles ABD et EBG ? En déduire une relation entre $\|AD\|$, $\|BD\|$, $\|BG\|$ et $\|GE\|$.

Les triangles sont semblables, ce qui permet d'écrire

$$\frac{|AD|}{|GE|} = \frac{|BD|}{|BG|} \quad \text{ou encore} \quad |AD| \times |BG| = |GE| \times |BD|.$$

En utilisant les deux relations trouvées plus haut, que vaut $|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD|$?

$$\begin{aligned} |BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| &= |GE| \times |BD| + |BD| \times |AE| \\ &= |BD| \times (|GE| + |EA|) \\ &= |BD| \times |AG|. \end{aligned}$$

3.3 Corde de la différence de deux angles

L'application du théorème précédent au cas particulier où l'un des côtés du quadrilatère inscrit dans le cercle est un diamètre, permet de calculer la corde de la différence de deux angles de cordes connues, et notamment la corde de 12°, à partir des cordes de 72° et 60°.

Remarquons que, dans la foulée, on aura évidemment établi la formule du sinus de la différence de deux angles.

Comment s'y prendre ? Les élèves reçoivent la fiche 9, contenant la figure 13 et les questions reprises ci-dessous.

On considère le quadrilatère $ABGD$ inscrit dans un demi-cercle de centre O. L'un de ses côtés AD est un diamètre du cercle.

On note α l'angle $\widehat{GOA}$ et β l'angle $\widehat{BOA}$.

Exprimer les mesures des côtés et des diagonales du quadrilatère comme cordes d'angles faisant intervenir α et/ou β.

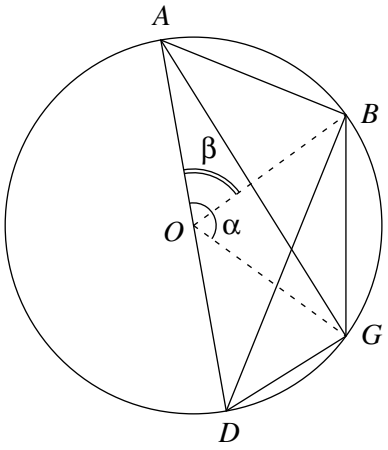


Fig. 13

Il vient

$$|AB| = \operatorname{crd}\beta \qquad |AG| = \operatorname{crd}\alpha$$

$$|AD| = 2 \qquad |BG| = \operatorname{crd}(\alpha - \beta)$$

$$|BD| = \operatorname{crd}(180^\circ - \beta) \qquad |GD| = \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)$$

Appliquer le théorème de Ptolémée au quadrilatère $ABGD$.

En déduire $\operatorname{crd}(\alpha - \beta)$ en fonction des autres cordes.

Le théorème de Ptolémée s'écrit

$$|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| = |BD| \times |AG|.$$

Cela se traduit par

$$2\,\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)+\mathrm{crd}\,(\beta)\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)=\mathrm{crd}\,\alpha\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\beta).$$

On a encore

$$\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{crd}\,\alpha\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\beta)-\mathrm{crd}\,\beta\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)\right].$$

Pour obtenir $\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)$, rien qu'en fonction de $\mathrm{crd}\,\alpha$ et de $\mathrm{crd}\,\beta$ à partir de cette formule, il faut exprimer $\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)$ en fonction de $\mathrm{crd}\,\alpha$ et $\mathrm{crd}\,(180^\circ-\beta)$ en fonction de $\mathrm{crd}\,\beta$. Ce calcul fait l'objet de la section suivante.

3.4 Corde de l'angle supplémentaire

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue la fiche 10, dont voici le contenu.

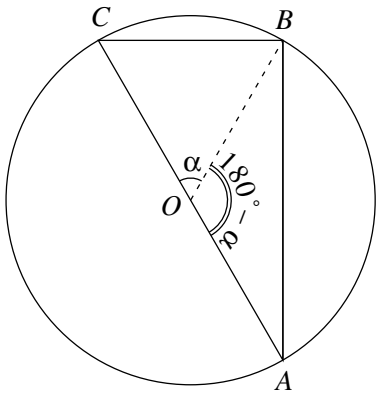


Fig. 14

La droite AC est un diamètre du cercle de centre O.

Le point B est un point de la circonférence distinct de A et de C.

Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires. On les note respectivement α et $180^\circ-\alpha$.

Calculer $\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)$ en fonction de $\mathrm{crd}\,\alpha$.

Le triangle ABC est rectangle, puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle.

La relation de PYTHAGORE, appliquée à ce triangle rectangle, permet d'écrire

$$|AB|^2=|AC|^2-|BC|^2,$$

ou encore, en terme de cordes,

$$[\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)]^2=4-[\mathrm{crd}\,\alpha]^2.$$

On a ainsi

$$\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)=\sqrt{4-[\mathrm{crd}\,\alpha]^2}.$$

En utilisant cette relation conjointement avec celle de la fiche précédente, calculer $\mathrm{crd}\,12^\circ$ à partir de $\mathrm{crd}\,72^\circ$ et $\mathrm{crd}\,60^\circ$. En déduire la valeur de $\sin 6^\circ$.

De ce qui précède, il vient

$$\begin{aligned}\operatorname{crd} 12^\circ &= \operatorname{crd}(72^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{crd} 72^\circ \operatorname{crd}(180^\circ - 60^\circ) - \operatorname{crd} 60^\circ \operatorname{crd}(180^\circ - 72^\circ)\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{crd} 72^\circ \sqrt{4 - (\operatorname{crd} 60^\circ)^2} - \operatorname{crd} 60^\circ \sqrt{4 - (\operatorname{crd} 72^\circ)^2}\right], \\ &= 0,209056926\cdots .\end{aligned}$$

On a encore

$$\sin 6^\circ = 0,104528463\cdots .$$

La consultation de la liste des tâches nous engage maintenant à établir une formule donnant la corde de l'angle moitié d'un angle de corde connue, puisque c'est par ce moyen, nous l'avons dit, que Ptolémée poursuit son travail.

3.5 Corde de l'angle moitié d'un angle donné

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue la fiche 11, dont voici le contenu.

On considère le demi-cercle ABG.

L'angle $\widehat{GOB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{GOD}$, ce qui s'exprime encore par l'égalité $|BD| = |DG|$.

On trace DZ perpendiculaire à AG.

Sur AG, on porte le segment $[AE]$ tel que $|AE| = |AB|$.

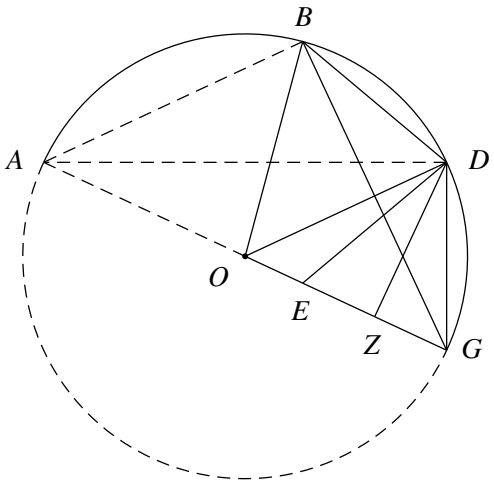


Fig. 15

Montrer que $\|BD\| = \|DE\|$, en exhibant deux triangles égaux dont ils sont un des côtés.

Considérons les triangles ABD et AED.

Ils ont un côté $[AD]$ commun.

Par construction, la mesure du côté $[AB]$ de l'un est égale à la mesure du côté $[AE]$ de l'autre.

L'angle $\widehat{DAB}$ de l'un est égal à l'angle $\widehat{EAD}$ de l'autre (angles inscrits interceptant des arcs égaux par hypothèse).

Les deux triangles ABD et AED sont donc égaux (cas d'un angle égal compris entre deux côtés égaux), et ainsi, $|BD| = |DE|$.

Puisque $|BD| = |DG|$, par hypothèse, justifier que Z est au milieu de $[EG]$.

En déduire que

$$|ZG| = \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right).$$

On vient de montrer que $|BD| = |DE|$; on sait aussi, par hypothèse, que $|BD| = |DG|$. Il vient donc $|DE| = |DG|$, ce qui implique que le triangle EDG est isocèle. La droite DZ qui est hauteur relative à la base $[EG]$ (puisque, par hypothèse, $DZ \perp AG$) est alors également médiane, ce qui entraîne $|EZ| = |ZG|$. Le point Z est milieu de $[EG]$.

On a

$$|ZG| = \frac{1}{2}|EG| = \frac{1}{2}\left(|AG| - |AE|\right) = \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right).$$

Montrer que les triangles ADG et DZG sont semblables et en déduire que

$$|DG|^2 = |AG| \times |ZG| = |AG| \times \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right).$$

Le triangle ADG est rectangle car il est inscrit dans un demi-cercle.

Le triangle DZG est également rectangle, puisque, par hypothèse, DZ est perpendiculaire à AG.

Ces deux triangles rectangles ont l'angle $\widehat{DGA}$ en commun et ils sont ainsi semblables.

Certains élèves pourraient se souvenir de la propriété qui s'énonce

la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle (encore appelée hauteur relative à l'hypoténuse) partage l'hypoténuse en deux triangles rectangles semblables à celui de départ.

Si ce n'est pas le cas, l'enseignant attirera l'attention sur ce fait.

Dans les triangles semblables ADG et DZG, on a alors

$$\frac{|DG|}{|ZG|} = \frac{|AG|}{|DG|} \quad \text{ou encore} \quad |DG|^2 = |AG| \times |ZG| = |AG| \times \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right),$$

puisqu'on vient de voir que $|ZG| = \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right)$.

La corde $|BG|$ est celle d'un certain angle que nous appelons α, on note $|BG| = \operatorname{crd}\alpha$. Avec cette notation, transcrire la dernière égalité en terme de cordes.

Pour transcrire l'égalité en terme de cordes, il faut d'abord remarquer que, avec la notation proposée, $|DG| = \operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$, $|AB| = \operatorname{crd}\left(180^\circ - \alpha\right)$ et $|AG| = 2$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= 2 \times \frac{1}{2}\left(2 - \operatorname{crd}\left(180^\circ - \alpha\right)\right), \\
&= 2 - \operatorname{crd}\left(180^\circ - \alpha\right), \\
\left(\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= 2 - \sqrt{4 - [\operatorname{crd}\alpha]^2} \qquad \text{(cf. fiche 10)} ;
\end{aligned}$$

et il vient

$$\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}\alpha]^2}}.$$

Si les élèves connaissent la résolution de l'équation du deuxième degré au moment où on leur propose cette activité, ils peuvent établir cette dernière formule algébriquement, à partir des résultats obtenus à la fiche 6. La prudence s'imposera toutefois dans le choix du signe de l'expression, lors de l'extraction de certaines racines carrées...

Le professeur demande alors aux élèves d'utiliser cette formule pour rechercher, au moyen de la calculatrice, les cordes des angles de 6°, 3°, $1\frac{1}{2}^\circ$, $\frac{3}{4}^\circ$, ainsi que les valeurs correspondantes des sinus. Les élèves garderont une trace de ces calculs en complétant la table de cordes et sinus déjà élaborée précédemment.

On part évidemment de la valeur $\operatorname{crd}12^\circ=0,209056926\cdots$, obtenue à la fiche 10. En appliquant la dernière formule établie, il vient

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}\frac{12^\circ}{2}=\operatorname{crd}6^\circ &= \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}12^\circ]^2}}\\ &= 0,104671912\cdots,\end{aligned}$$

$$\text{et ainsi, } \sin 3^\circ = 0,052335956\cdots.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}\frac{6^\circ}{2}=\operatorname{crd}3^\circ &= \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}6^\circ]^2}}\\ &= 0,052353897\cdots,\end{aligned}$$

$$\text{et ainsi, } \sin 1\frac{1}{2}^\circ = 0,026176949\cdots.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}\frac{3^\circ}{2}=\operatorname{crd}1\frac{1}{2}^\circ &= \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}3^\circ]^2}}\\ &= 0,026179191\cdots,\end{aligned}$$

$$\text{et ainsi, } \sin\frac{3}{4}^\circ = 0,013089596\cdots.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}\frac{1\frac{1}{2}^\circ}{2}=\operatorname{crd}\frac{3}{4}^\circ &= \sqrt{2-\sqrt{4-\left[\operatorname{crd}1\frac{1}{2}^\circ\right]^2}}\\ &= 0,013089876\cdots,\end{aligned}$$

$$\text{et ainsi, } \sin\frac{3}{8}^\circ = 0,006544938\cdots.$$

et ainsi de suite...

Commentaires

Les onze fiches de travail proposées offrent un assez large éventail d'activités où l'élève a l'occasion d'argumenter, de justifier, de travailler avec la calculatrice, ... dans un contexte historique qui motive la tâche qui lui est demandée. Les modalités d'exploitation des fiches, de même que le nombre de fiches qui seront réellement travaillées, sont des paramètres laissés au contrôle de l'enseignant qui les adaptera à ses besoins et au niveau de sa classe.

Nous avons déjà signalé, qu'arrivé aux résultats qui précèdent, Ptolémée estime la corde de l'angle d'un demi-degré au moyen d'une interpolation de nature géométrique. Ensuite, par une formule « d'addition », il remplit sa table de demi-degré en demi-degré.

Nous pensons, qu'avec les élèves, le travail s'arrête ici. Néanmoins, nous ajoutons quelques remarques, à l'intention de l'enseignant.

Les résultats obtenus au cours des activités qui précèdent peuvent, à peu de frais, être utilisés pour établir les formules dites « d'addition », des « angles doubles », ...

La fiche 1 nous a fait découvrir la relation

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{crd}\alpha,$$

qui équivaut à

$$\operatorname{crd}\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Si nous injectons cette dernière égalité dans la formule démontrée dans la fiche 9, à savoir

$$\operatorname{crd}(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{crd}\alpha\operatorname{crd}(180^\circ-\beta)-\operatorname{crd}\beta\operatorname{crd}(180^\circ-\alpha)\right],$$

il vient

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\times 2\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)-2\sin\frac{\beta}{2}\times 2\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\\
&= \frac{1}{2}\times 4\left[\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\\
&= 2\left[\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\\
&= 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right),\\
\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) &= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

De même, le résultat obtenu dans la fiche 11, à savoir

$$\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}\alpha]^2}}$$

s'écrit

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\alpha}{4} &= \sqrt{2-\sqrt{4-\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}},\\
&= \sqrt{2-\sqrt{4-4\left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}},\\
&= \sqrt{2-\sqrt{4\left[1-\left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2\right]}},\\
&= \sqrt{2-2\sqrt{1-\left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}},\\
&= \sqrt{2-2\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2}.
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
4\left[\sin\frac{\alpha}{4}\right]^2 &= 2-2\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2,\\
2\left[\sin\frac{\alpha}{4}\right]^2 &= 1-\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2,\\
\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2 &= 1-2\left[\sin\frac{\alpha}{4}\right]^2.
\end{aligned}$$

Enfin, pour terminer, nous montrons comment Ptolémée obtient sa formule « d'addition » et à quoi elle correspond dans le cours de trigonométrie que nous avons l'habitude d'enseigner.

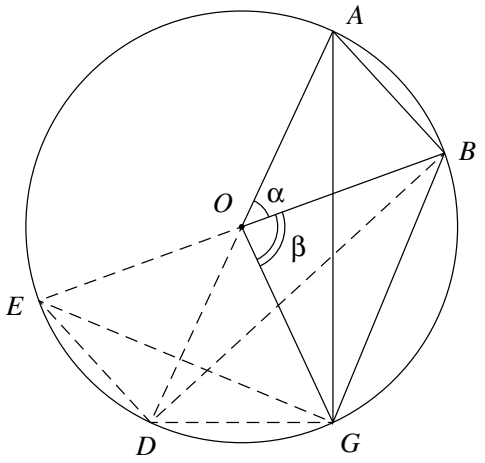


Fig. 16

Dans le cercle de centre O, désignons par α l'angle $\widehat{BOA}$ et par β l'angle $\widehat{GOB}$.

Les droites AOD et BOE sont des diamètres du cercle.

Si on applique le théorème dit de Ptolémée au quadrilatère inscrit $BGDE$, il vient

$$|BD|\times|EG| = |BG|\times|DE| + |BE|\times|DG|.$$

On transcrit alors chacune de ces six longueurs en terme de cordes ; il vient

$$\begin{aligned}
|BD| &= \operatorname{crd}(180^\circ-\alpha),\\
|EG| &= \operatorname{crd}(180^\circ-\beta),\\
|BG| &= \operatorname{crd}\beta,\\
|DE| &= |AB| = \operatorname{crd}\alpha,\\
|BE| &= 2,\\
|DG| &= \operatorname{crd}[180^\circ-(\alpha+\beta)].
\end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)\operatorname{crd}(180^\circ - \beta) = \operatorname{crd}\beta\operatorname{crd}\alpha + 2\operatorname{crd}[180^\circ - (\alpha + \beta)].$$

En terme de sinus, cette égalité devient

$$2\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \times 2\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2} \times 2\sin\frac{\beta}{2} + 2 \times 2\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

on a encore

$$\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} &= \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Chapitre 13

Les équations du deuxième degré

Préambule

Nous avons choisi de faire émerger la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait de l'ouvrage d'AL-ḤWĀRIZMĪ, car on y trouve une justification de chaque étape de l'algorithme. Nous témoignons ensuite des origines babyloniennes de l'algèbre en présentant la résolution d'un problème mésopotamien. Le lecteur pourra constater que la suite de calculs, donnée sans justification, conduit à la même formule. Nous terminons en proposant une interprétation algébrique d'un problème géométrique issu des *Éléments* d'EUCLIDE.

1 À la découverte d'une formule

De quoi s'agit-il ?

Découvrir la formule démontrée par AL-ḤWĀRIZMĪ, dans son *Abrégé de calcul par le ğabr et la muqābala*, pour résoudre une équation du second degré. Établir la formule de résolution actuelle par un processus de généralisation.

Enjeux

S'approprier la formule de résolution de l'équation du second degré, donner du sens aux développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique.

Montrer que les systèmes de notation et la pensée formelle ont été introduits très lentement et beaucoup plus tardivement qu'on ne l'imagine souvent. Faire comprendre que l'élaboration d'une notation appropriée peut être très utile et par là même, assurer une meilleure appréhension du symbolisme actuel.

Compétences transversales

Comprendre un message, en analyser la structure et repérer les idées centrales.

Traduire une information d'un langage dans un autre, passer du langage courant au langage graphique ou algébrique et réciproquement.

Compétences

Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation (2ème degré).

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La traduction en français d'un extrait de l'*Abrégé de calcul par le ğabr et la muqābala* d'AL-ḪWĀRIZMĪ.

Ce document est proposé ci-après et repris en annexe sous une forme photocopiable pour les élèves (fiche 12 à la page 482). Le texte est également disponible en langue arabe (fiche 13 à la page 483).

Les chapitres 16 et 17 contiennent des informations historiques et épistémologiques utiles pour situer l'ouvrage d'AL-ḪWĀRIZMĪ dans son contexte socio-culturel.

Prérequis

La formule du produit remarquable $(a+b)^2$ et son interprétation géométrique.

Comment s'y prendre ?

L'extrait proposé explique la méthode de résolution de l'équation du type $ax^2+bx=c$. Il n'est pas intelligible sans quelques explications qui sont données immédiatement à la suite du texte.

Notre traduction est très fidèle, nous avons seulement jugé utile d'ajouter entre <> les mots <carrée> et <ce cinq> qui ne figurent pas dans le texte arabe. Pour éviter toute confusion entre le « carré x^2 » et le « carré figure géométrique », nous avons délibérément choisi de garder le terme arabe *māl*, qui désigne x^2, au lieu de le traduire.

L'activité commence donc par une lecture commentée de ce texte, dans lequel AL-ḪWĀRIZMĪ donne de l'algorithme qu'il a décrit précédemment, deux démonstrations qui s'appuient sur deux figures différentes. La première démonstration proposée, qui n'est pas reproduite ici, intervient dans l'espace noté [...] entre les deux paragraphes. C'est la deuxième approche, basée sur la figure la plus simple, que nous proposons en lecture aux élèves.

Démonstration du cas « un māl et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. »

La figure pour expliquer ceci est une surface <carrée> dont les côtés sont inconnus. Elle représente le *māl* qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la surface $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines ; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [...]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le *māl*. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces[1] $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est

comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle[2] de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.

Nous savons donc que la première surface est le *māl*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le *māl*, et c'est sa racine. Et le *māl* est neuf. Voici sa figure.

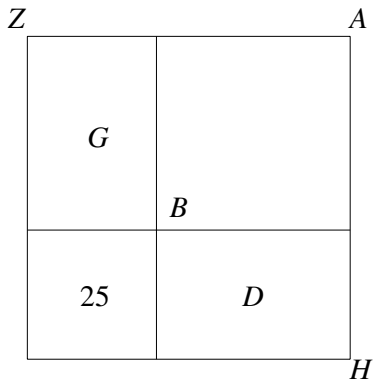


Fig. 1

La découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré se fera en trois étapes, à partir de ce texte accompagné du dessin.

1.1 Analyse du texte

Transposer les explications fournies par le texte en utilisant le symbolisme mathématique actuel.
Compléter la figure 1 en y reportant les mesures des côtés et des aires des carrés et des rectangles.

La lecture du texte appelle quelques commentaires.

Le terme *māl* signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau... Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. En fait on recherche X le *māl* et $\sqrt{X}$ le *ǧiḏr* qui est sa racine, et non une inconnue x et son carré x^2. Quant à l'expression *trente-neuf dirhams*, elle désigne une quantité positive connue, qui n'est ni un nombre de carrés, ni un nombre de racines. C'est ce que nous appelons aujourd'hui le terme indépendant.

[1] Il y a une erreur d'établissement du texte arabe dans l'édition de Rosen, où l'on trouve $\overline{GD}$ au lieu de $\overline{G}$ et $\overline{D}$.

[2] Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

L'équation à résoudre est donc

$$X + 10\sqrt{X} = 39 \quad \text{ou} \quad x^2 + 10x = 39.$$

La première forme est plus proche de l'esprit du texte arabe, mais nous lui substituons la seconde, mieux adaptée au travail à effectuer avec les élèves.

Remarquons au passage que les carrés et les rectangles sont désignés par les extrémités d'une diagonale. La barre au-dessus de AB permet de distinguer le nom d'une figure d'un mot.

C'est le recours au dessin qui montre clairement pourquoi l'auteur recommande de diviser en deux le nombre des racines (10 dans l'exemple choisi), le terme $10x$ de l'équation étant obtenu par l'adjonction au carré de deux rectangles de $5x$ chacun. AL-ḤWĀRIZMĪ insiste sur le fait que la longueur cinq de chacun des deux rectangles est la moitié du nombre des racines. C'est cette précision qui va permettre de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

La figure proposée est euclidienne, elle se trouve dans *Les Éléments* (proposition 4 du livre II) pour illustrer la formule du développement de $(a+b)^2$. Cependant, l'auteur ne fait pas référence au texte d'EUCLIDE pour étayer son raisonnement. On voit apparaître ici une rupture avec la tradition grecque. EUCLIDE aurait dit « le carré de côté cinq » et non « cinq par cinq ». Cette forme d'arithmétisation trouve sa source dans la géométrie du mesurage, d'origine babylonienne et indienne. L'emploi du mot « flanc » et non « côté » est une autre trace de ce vocabulaire de l'arpentage.

Après avoir complété le dessin, comme on le voit à la figure 2, les élèves sont en mesure de transposer, sous forme d'équations, les opérations décrites dans le dernier paragraphe.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= 39 \\ x^2 + 10\,x + 25 &= 39 + 25 \\ x^2 + 10\,x + 25 &= 64 \\ (x+5)^2 &= 64 \\ (x+5) &= 8 \\ x &= 8 - 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

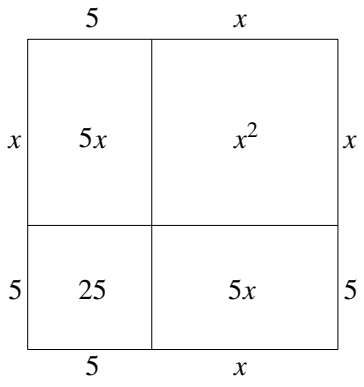


Fig. 2

Pour les mathématiciens de l'époque, qui ne concevaient pas les quantités négatives, la seule valeur dont le carré vaut 64 est 8. Dans le contexte actuel, nous considérons aussi la valeur -8, ce qui nous permet de compléter la résolution d'AL-ḤWĀRIZMĪ.

Dans le domaine des nombres positifs et négatifs, l'équation $(x+5)^2 = 64$ est équivalente à

$$x + 5 = 8 \;\text{ ou }\; x + 5 = -8,$$

ce qui donne les solutions

$$x = 3 \;\text{ ou }\; x = -13.$$

1.2 De l'exemple à l'algorithme

L'étape suivante consiste à se dégager de l'exemple numérique, à franchir un pas vers l'abstraction.

> Recommencer le même raisonnement pour l'équation $x^2 + px = q$ (où p et q sont ce que nous appelons aujourd'hui des rationnels positifs).

Il s'agit donc de remplacer 10 par p, 5 par $\frac{p}{2}$ et 39 par q. Les calculs littéraux qui s'ensuivent mènent à une première formule.

$$\begin{aligned} x^2 + px &= q \\ x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right) &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\ x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

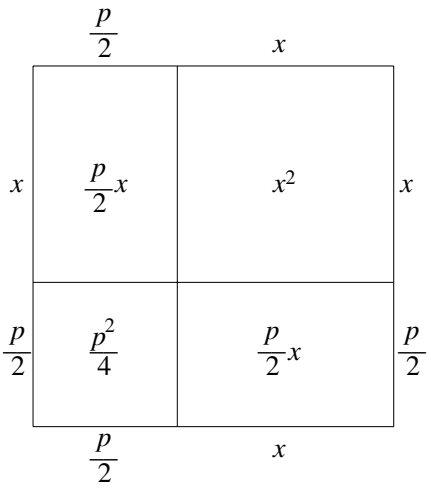


Fig. 3

Complétons à nouveau la résolution en ajoutant la racine carrée négative de $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

L'équation $(x + \frac{p}{2})^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

ce qui donne les solutions

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

En fait, nous avons obtenu une formule générale de résolution de l'équation de deuxième degré $x^2 + px = q$. En effet, si la démonstration géométrique ne s'applique qu'aux seuls cas où p et q sont strictement positifs, le développement algébrique, qui consiste à compléter le membre de gauche pour obtenir un carré parfait, peut être effectué avec n'importe quelle valeur de p et q.

1.3 La formule actuelle

Dans la troisième étape, il reste à dégager la formule qui donne la solution de l'équation sous la forme générale utilisée actuellement, à savoir $ax^2 + bx + c = 0$.

> Modifier les résultats obtenus pour exprimer les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction des coefficients a, b et c, où a est non nul.

Nous avons supposé a non nul de manière à ce que l'équation ne soit pas réduite à une équation de premier degré. Dans ce cas, nous pouvons diviser tous les termes par a, ce qui donne

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a},$$

forme facilement comparable à

$$x^2 + px = q.$$

Les élèves verront qu'il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{-c}{a}$. On leur demande d'effectuer cette transformation de formule.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \qquad \text{devient} \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur, ils obtiennent

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{et finalement} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette unique formule nous permet de résoudre toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, avec des coefficients a, b et c positifs ou négatifs, b et c éventuellement nuls.

On remarquera que le nombre de solutions dépend du signe de l'expression $b^2 - 4ac$, habituellement notée Δ,

si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes,

si $\Delta = 0$, il y a une seule racine qui vaut $\frac{-b}{2a}$,

si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle.

Prolongement possible

Si les élèves manifestent un certain intérêt pour la manière dont les Arabes résolvaient les équations de types autres que celui dont il est question dans le texte, le professeur peut compléter leur information historique.

AL-ḤWĀRIZMĪ classe les équations de degré inférieur ou égal à 2 en six types dont trois sont des équations trinômes, puis il les réduit à leur forme normale, où le coefficient de la plus haute puissance de x vaut 1. Il établit ensuite les algorithmes de résolution des différents cas. Il obtient des formules équivalentes aux expressions reprises dans le tableau suivant.

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(3)	$x^2 + q = px$	$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Dans le dernier cas (3), il précise :
si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, « alors le problème est impossible »,
si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, « alors la racine du carré est égale à la moitié du nombre des racines, exactement, sans aucune addition ni soustraction ».

Ce dernier passage fait état d'une connaissance complète du calcul et des conditions d'existence des *racines positives* d'une équation du deuxième degré.

Pour faire comprendre ces formules, le professeur propose quelques équations bien choisies, par exemple celles qui figurent dans le tableau ci-après, et donne des consignes précises (fiche 14 à la page 484).

Pour chacune de ces équations :

résoudre l'équation par la formule générale,

écrire l'équation sous la forme normale d'AL-ḤWĀRIZMĪ, identifier à quel type elle appartient et la résoudre par la formule adéquate,

reprendre les résultats dans un tableau qui permette une comparaison aisée.

Cette activité, qui fournit aux élèves des exercices de fixation des formules, permet en outre de dresser un tableau comparatif très éclairant.

Résolution actuelle		Résolution d'AL-ḤWĀRIZMĪ		
équation	solution	équation	type	solution
$x^2 + x - 2 = 0$	$x = 1$, $x = -2$	$x^2 + x = 2$	(1)	$x = 1$
$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x = 3$, $x = -1$	$x^2 = 2x + 3$	(2)	$x = 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x = 1$	$x^2 + 1 = 2x$	(3)	$x = 1$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$x = 2$, $x = 3$	$x^2 + 6 = 5x$	(3)	$x = 2$, $x = 3$
$x^2 - x + 7 = 0$	–	$x^2 + 7 = x$	(3)	–
$4x^2 - 8x + 3 = 0$	$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$	$x^2 + \frac{3}{4} = 2x$	(3)	$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x = -2$, $x = -3$	–	–	–
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x = -1$	–	–	–

Le tableau montre bien que les formules énoncées par AL-ḤWĀRIZMĪ permettent de calculer toutes les solutions positives, quel que soit leur nombre. Notre formule actuelle donne, en plus des solutions positives, les solutions négatives éventuelles.

On constate en outre que certaines équations ne sont jamais prises en compte dans le traité arabe. Par exemple, l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ ne se rattache à aucun des types répertoriés. En effet, il est impossible de l'écrire sous une forme où les deux membres ne contiennent que des quantités strictement positives. Cette équation est équivalente à $(x + 1)^2 = 0$, dont la solution est -1, solution qui n'a aucun sens pour les mathématiciens du IXe siècle. Il en va de même pour les équations $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 + 3x = 0$, $x^2 + 4 = 0$, et pour toute équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont tous les trois positifs. De telles équations n'admettent que des solutions négatives ou nulles. Il faut savoir que, jusqu'à la fin du XVIIe siècle, les quantités négatives n'avaient pas le statut de nombre. Dans [48] par exemple, le lecteur intéressé pourra trouver un extrait de texte de J. Wallis (1649-1703) témoignant de la difficulté à accepter tant les nombres négatifs que les imaginaires.

Échos des classes

Nous rendons compte ci-après de deux expériences où nous avons eu l'occasion d'étudier le texte d'al-Ḫwārizmī sur la résolution de l'équation $x^2 + px = q$ avec des élèves.

Exposé à Liège

Tout d'abord, nous avons été invités à présenter, aux élèves de cinquième (enseignement général) d'une école de Liège, un exposé sur les méthodes de résolution des équations des deuxième et troisième degrés chez les auteurs arabes.

Bien sûr, l'expérience s'est déroulée dans des circonstances assez différentes de celles que nous préconisons, puisque le groupe comportait une centaine d'élèves, et que ceux-ci connaissaient déjà la formule de l'équation du deuxième degré. Il ne s'agissait donc plus de découvrir la formule, mais plutôt de la redécouvrir dans un autre contexte. Les professeurs ont assuré le suivi de cet exposé dans leurs classes et nous ont communiqué les réactions les plus significatives.

Les élèves se sont montré très intéressés par l'aspect culturel permettant de faire le lien entre la situation géographique, les contextes historique, politique et religieux et les démarches scientifiques des « savants » de l'époque. Certains d'entre eux ont décidé d'approfondir le sujet dans le cadre d'un travail de rhéto. Ils ont apprécié de recevoir par le biais du cours de mathématiques des informations qui éclairent sous un jour différent des problèmes d'actualité comme la situation au Moyen-Orient, la guerre en Irak...

Ces élèves étaient manifestement peu habitués à établir des passages entre l'algèbre et la géométrie. Le recours à des raisonnements géométriques pour résoudre des équations leur a paru surprenant. Ils ont pris conscience que le décloisonnement entre les différentes branches des mathématiques permet de varier les approches d'un problème et d'élargir le choix des modes de raisonnement pour le résoudre. Certains se sont inquiétés de savoir « depuis quand on séparait les maths ».

Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une longue évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme on le fait maintenant. La résolution algébrique formalisée dont nous disposons actuellement leur paraît un progrès sur le plan pratique, par rapport à « l'algèbre rhétorique ».

Expérimentation à Nivelles

Par la suite, nous avons eu l'occasion de tester l'activité de découverte de la formule de résolution de l'équation du second degré, telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, dans deux classes de quatrième (enseignement général) d'une école de Nivelles.

Dans l'une des classes, les élèves avaient manifesté de l'intérêt pour une approche historique d'un sujet mathématique ; dans l'autre, ils étaient plus réticents. Malgré cette différence d'attitude *a priori*, l'expérience a été positive dans les deux cas. Les disparités entre les deux classes, réputées de niveaux inégaux, n'ont pas été perçues lors de l'analyse du texte ; elles se sont manifestées uniquement dans l'aisance à exécuter des calculs formels.

Après un exposé relativement bref, d'une dizaine de minutes environ, destiné à situer l'ouvrage d'AL-ḤWĀRIZMĪ dans son cadre géographique, historique et culturel, les élèves ont été invités à lire le texte et à transposer les explications sous forme graphique (compléter le dessin comme à la figure 2) et algébrique.

Ce travail, réalisé collectivement, n'a pas posé problème aux élèves, qui ici, avaient déjà été familiarisés avec l'aspect géométrique des produits remarquables. Nous leur avons alors demandé de reproduire le même raisonnement pour résoudre l'équation $x^2 + px = q$, en suivant les indications suggérées dans le texte pour passer de l'équation particulière $x^2 + 10x = 39$ à cette forme plus générale. Nous avons remarqué à cette occasion que certains élèves n'étaient pas capables de franchir le pas vers une forme plus abstraite à ce stade de l'activité. Nous avons donc jugé opportun de leur soumettre une autre équation particulière ($x^2 + 8x = 65$), qu'ils devaient résoudre seuls avant de généraliser.

Dans les deux classes, cette consigne a suscité deux types de comportements. Certains élèves ont réalisé un nouveau dessin pour servir de support au raisonnement algébrique ; d'autres ont travaillé directement sur l'équation, en ajoutant aux deux membres la quantité adéquate pour obtenir, dans le membre de gauche, le développement d'un carré parfait. De nombreux élèves sont arrivés seuls au bout des calculs littéraux, mais nous avons dû remettre sur rail ceux qui avaient ajouté p^2 au lieu de $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ pour compléter le carré. Il a aussi fallu intervenir pour éviter quelques simplifications erronées de l'expression $\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$, ainsi que pour obtenir la deuxième racine.

L'élaboration de la formule pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a posé que des problèmes calculatoires aux élèves les plus faibles. La séquence d'apprentissage s'est terminée par la résolution d'une série d'équations, en l'occurence celles qui figurent dans le tableau de la page 413. Seuls les élèves les plus rapides se sont intéressés à établir une comparaison avec la solution qu'aurait obtenue AL-ḤWĀRIZMĪ.

À l'issue des deux heures de cours consacrées à l'expérimentation, les élèves disposaient de la formule, en avaient compris la démonstration, et étaient capables de l'utiliser pour résoudre des équations ; l'objectif fixé avec le professeur était ainsi atteint.

2 L'algèbre d'avant « al-ğabr »

De quoi s'agit-il ? Plonger dans l'histoire des équations pour découvrir comment procédaient les mathématiciens mésopotamiens il y a quatre mille ans et EUCLIDE au troisième siècle avant Jésus-Christ.

Confronter ces méthodes de résolution à celle d'AL-ḤWĀRIZMĪ, ou à la formule actuelle.

Enjeux Attester les sources mésopotamiennes de la méthode de résolution de l'équation du deuxième degré. Situer son émergence dans un contexte

historique et culturel.

Montrer une interprétation algébrique d'un problème de construction géométrique chez EUCLIDE.

Établir un parallèle entre résolutions algébrique et géométrique pour différents problèmes.

Compétences transversales

Comprendre un message, en analyser la structure et repérer les idées centrales.

Traduire une information d'un langage dans un autre, passer du langage courant au langage graphique ou algébrique.

Compétences

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Le problème 1 de la tablette BM 13 901 conservée au British Museum. Il s'agit d'un texte mésopotamien en écriture cunéiforme.

La proposition 11 du livre II des *Éléments* d'EUCLIDE.

Le chapitre 17 contient des informations historiques et épistémologiques utiles pour situer ces documents dans leur contexte socio-culturel.

Des traductions en français des extraits utilisés sont proposées ci-après et reprises en annexe sous une forme photocopiable pour les élèves (fiches 15 et 17, aux pages 485 et 487).

Prérequis

La formule du produit remarquable $(a+b)^2$.

La formule de résolution de l'équation $x^2 + px = q$.

2.1 Un problème mésopotamien

Comment s'y prendre ?

La tablette répertoriée BM 13 901 au British Museum consiste en un recueil de 21 problèmes, qui conduisent à des équations ou à des systèmes d'équations du second degré. Les résolutions de ces problèmes se présentent comme une suite d'instructions qui décrivent les calculs à effectuer pour obtenir le nombre à déterminer : le « côté du carré ».

Les tablettes qui nous sont parvenues attestent que les Mésopotamiens connaissaient déjà une méthode de résolution des équations du deuxième degré, équivalente à l'algorithme décrit par AL-ḤWĀRIZMĪ, au moins dans les deux cas repris ci-contre.

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$

Il ne s'agit pas ici de dégager la formule, mais seulement de vérifier que les calculs qui figurent sur la tablette correspondent bien aux étapes de l'algorithme de résolution du type (2), équivalent à la formule en notation actuelle qui figure dans le tableau.

Le texte proposé est la traduction due à F. Thureau-Dangin (in [134]) du problème 1 de la tablette BM 13 901. Le signe « : » qui figure dans ce texte n'est pas le symbole d'une division, il annonce le résultat de l'opération décrite juste avant. Le signe « ′ » doit être lu « minute ».

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45′.

Tu poseras 1 l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30′. Tu croiseras 30′ et 30′ : 15′. Tu ajouteras 15′ à 45′ : 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30′, que tu as croisé, de 1 : 30′, le côté du carré.

Interpréter l'énoncé du problème, et la suite de calculs qui mènent à la solution, dans le langage mathématique actuel. Comparer ces calculs avec ceux qu'on effectuerait en appliquant la formule $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$.

Dès la lecture de l'énoncé, la plupart des élèves seront probablement désarçonnés. Que signifie, par exemple, 45′ ? On peut découvrir dans le texte que 30′ représentent la moitié de l'unité. Les Babyloniens utilisaient un système de numération sexagésimale[3] , il s'agit de $\frac{30}{60}$ de l'unité, ce qui correspond pour nous à la fraction $\frac{1}{2}$. On peut en déduire que 45′, représentent $\frac{45}{60}$ de l'unité, ce qui correspond à la fraction $\frac{3}{4}$.

Reprenons l'énoncé du problème et interprétons-le dans le langage mathématique actuel. Notons x le côté du carré, x^2 représente alors la surface. La somme vaut 45′, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$.

L'équation obtenue est alors $x^2 + x = \frac{3}{4}$, elle est du type $x^2 + px = q$, avec $p = 1$ et $q = \frac{3}{4}$.

La suite de calculs qui constitue la résolution de l'équation se présente sous une forme très peu familière. Il conviendra sans doute d'explorer le sens de la phrase « Tu croiseras 30′ et 30′ : 15′. » Après avoir constaté que $30' = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, on peut arriver à l'interprétation suivante : « croiser » signifie « multiplier » et

$$30' \times 30' = \frac{30}{60} \times \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 15'.$$

Reprenons l'ensemble du problème et interprétons-le phrase par phrase.

[3]Nous retrouvons la trace du système babylonien dans la division sexagésimale des degrés et des heures (voir le chapitre 17).

Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : $45'$	$x^2 + x = 45'$	$x^2 + x = \frac{3}{4}$	$x^2 + px = q$
Tu poseras 1 l'unité	1	1	p
Tu fractionneras en 2	$30'$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$
Tu croiseras $30'$ et $30'$	$30' \times 30' = 15'$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Tu ajouteras $15'$ à $45'$	$45' + 15' = 1$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$	$q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$
C'est le carré de 1	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$
Tu soustrairas $30'$, que tu as croisé, de 1	$1 - 30'$	$1 - \frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$
Le côté du carré	$30'$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$

Il apparaît que les instructions du texte reviennent à faire appliquer la formule

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

La tablette révèle ainsi que les Babyloniens avaient une connaissance empirique de cette formule, mais ne renseigne guère sur la manière dont ils l'ont obtenue.

Même si les étapes de calcul semblent ne prendre en compte que des nombres, l'énoncé fait apparaître la nature géométrique du problème. Une hypothèse étayée notamment par HØYRUP[4] est que la méthode de résolution s'appuie sur un procédé géométrique qui trouve sa source dans les pratiques des arpenteurs. Dans cette optique, on peut trouver étrange d'ajouter une surface (le carré) et une longueur (le côté du carré). En réalité, ce qui est ajouté à la surface du carré est un rectangle dont l'une des dimensions est le côté du carré et l'autre l'unité usuelle de mesure de longueur (figure 4). Ce rectangle est partagé en deux (figure 5) et chacune des deux moitiés est accolée au carré de départ comme sur la figure 6. L'énoncé nous apprend que la surface de la figure ainsi obtenue – appelée plus tard *gnomon* par les Grecs – vaut $\frac{3}{4}$. La première opération effectuée dans la résolution consiste à calculer la surface $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ du petit carré (en gris sur la figure 7), qu'il faut lui adjoindre pour obtenir le grand carré dont la surface est alors $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Le côté de ce grand carré est 1. En retirant $\frac{1}{2}$, le côté du petit carré ajouté, on trouve x, le côté du carré de départ.

[4] Voir à ce sujet [89] et [90].

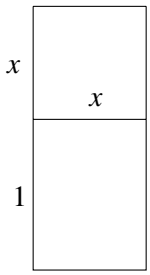


Fig. 4

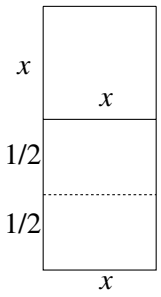


Fig. 5

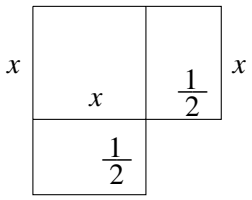


Fig. 6

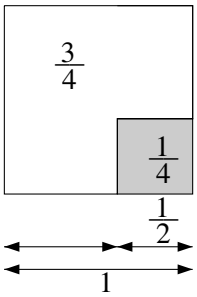


Fig. 7

Ce raisonnement géométrique dont les Babyloniens n'ont pas laissé de preuve connue à ce jour, est en tous points semblable à celui qui sous-tend la démonstration de l'algorithme de résolution dans le traité théorique d'AL-ḪWĀRIZMĪ. Il peut être adapté au cas où, à la surface on ajoute p fois le côté du carré. Dans ce cas on ajoute au carré un rectangle dont une dimension est le côté du carré et l'autre p unités de longueur. Le problème 6 de la tablette BM 13 901, présenté en prolongement illustre ce cas.

Prolongement possible

Le problème 6 de la tablette BM 13 901 conservée au British Museum débouche sur une équation dont le coefficient de x est différent de 1, ce qui permet de distinguer plus facilement les éléments qui interviennent dans la résolution. Par contre, les calculs sous forme sexagésimale sont plus difficiles à effectuer, mais se présentent de manière simple sous forme fractionnaire.

Voici le texte du problème, dans la traduction de F. THUREAU-DANGIN (fiche 16 à la page 486).

J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$.

Tu poseras 1 l'unité. Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$. Tu croiseras $20'$, sa moitié et $20' : 6'\,40''$. Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35' : 41'\,40''$. C'est le carré de $50'$. Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50' : 30'$, le côté du carré.

Les $35'$ de l'énoncé représentent les $\dfrac{35}{60}$ de l'unité, ce qui correspond à la fraction $\dfrac{7}{12}$.
L'équation obtenue est dans ce cas

$$x^2 + \frac{2}{3}x = 35' \quad \text{ou encore} \quad x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12},$$

elle est également du type $x^2 + px = q$.

Reprenons l'ensemble du problème et son interprétation dans un tableau.

Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$	$x^2 + \frac{2}{3}x = 35'$	$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$	$x^2 + px = q$
Tu poseras 1 l'unité	1	1	1
Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$	$\frac{2}{3} \times 60' = 40'$	$\frac{2}{3}$	p
La moitié est $20'$	$\frac{1}{2} \times 40' = 20'$	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{p}{2}$
Tu croiseras $20'$ et $20'$	$20' \times 20' = 6'\,40''$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35'$	$6'\,40'' + 35' = 41'\,40''$	$\frac{1}{9} + \frac{7}{12} = \frac{25}{36}$	$q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$
C'est le carré de $50'$	$\sqrt{41'\,40''} = 50'$	$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$
Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50'$	$50' - 20' = 30'$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$
Le côté du carré	$30'$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$

2.2 Une résolution géométrique chez Euclide

Les *Éléments* d'Euclide

Euclide a vécu au début du troisième siècle avant notre ère. Il travaillait à Alexandrie, qui était à cette époque un important pôle culturel et scientifique. La ville, créée par Alexandre le Grand vers 331, avait été dotée sous le règne du roi Ptolémée I d'un centre de recherche – le Musée – touchant à tous les domaines de la connaissance et muni d'une prestigieuse bibliothèque. De nombreux savants y ont travaillé jusqu'au Ve siècle de notre ère, comme par exemple les mathématiciens Apollonius de Perge, Archimède, Diophante et Pappus, mais aussi l'astronome Ptolémée, le géographe Ératosthène et bien d'autres... C'est dans ce cadre qu'Euclide a enseigné les mathématiques et rédigé de nombreux ouvrages, parmi lesquels les *Éléments* reste le plus fameux à cause de l'influence qu'il a exercé pendant des siècles sur l'enseignement de la géométrie.

Cette œuvre monumentale rassemble la somme des connaissances mathématiques de l'époque, non seulement en géométrie, mais aussi en théorie des grandeurs et des proportions et en théorie des nombres. Euclide a ordonné, complété et perfectionné les travaux de ses prédécesseurs, mais surtout, il a présenté cet ensemble de connaissances mathématiques sous une forme déductive bien structurée, avec des démonstrations et une volonté de rigueur.

La plupart des élèves en ont entendu parler, mais il est probable qu'aucun d'entre eux n'a jamais eu l'occasion de consulter un texte des *Éléments*.

Comment s'y prendre ?

Nous proposons d'étudier la proposition 11 du livre II, dans la traduction de B. VITRAC. Sans vouloir nécessairement analyser avec les élèves les détails de la démonstration, il est intéressant de leur faire découvrir que la solution géométrique exposée par EUCLIDE coïncide avec la solution algébrique qu'ils peuvent calculer.

Euclide – Les Éléments, Livre II, proposition 11

11

Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

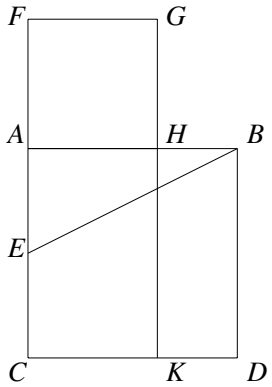


Fig. 8

Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En effet, que le carré $ABCD$ soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

Quel est le problème posé par EUCLIDE ?
Que signifie pour EUCLIDE l'égalité entre le rectangle et le carré ?
Refaire la construction géométrique.
Comment mettre le problème en équation ?
Analyser la solution géométrique proposée par EUCLIDE et l'interpréter en termes de résolution algébrique.

Il faut tout d'abord s'assurer que les élèves interprètent correctement l'égalité entre le rectangle et le carré. EUCLIDE pose un problème d'égalité de grandeurs, en l'occurrence une égalité d'aires.

Le problème est de partager un segment de droite AB par un point noté H de telle sorte que le rectangle dont les côtés sont AB et l'un des segments du partage de AB soit de même aire que le carré dont le côté est le segment restant.

Comme VITRAC, adoptons la notation AB indifféremment pour désigner le segment $[AB]$ et sa longueur $|AB|$, cette notation allégée n'engendre aucune ambiguïté dans la compréhension de ce qui suit.

La dernière phrase du texte

> Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

nous permet de poser le problème dans les mêmes termes qu'EUCLIDE : il s'agit de déterminer la position du point H sur AB tel que le rectangle dont les dimensions sont AB et BH est de même aire que le carré de côté AH, c'est-à-dire tel que

$$AB \cdot BH = AH^2,$$

et non pas $AB \cdot AH = BH^2$, qui est une autre façon de poser le problème, mais qui ne correspond ni au texte, ni au dessin.

Dans ce cas, le point H est situé plus près de B que de A ($AH > BH$) comme on le voit dans la figure 8. En effet, le côté d'un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle est plus grand que la « largeur » du rectangle, mais plus petit que sa « longueur » (« largeur » et « longueur » du rectangle représentant respectivement la plus petite et la plus grande dimension de celui-ci). Une discussion préalable avec les élèves sera peut-être nécessaire pour établir cette propriété, qui peut être éclairée par la comparaison des deux dessins de la figure 9.

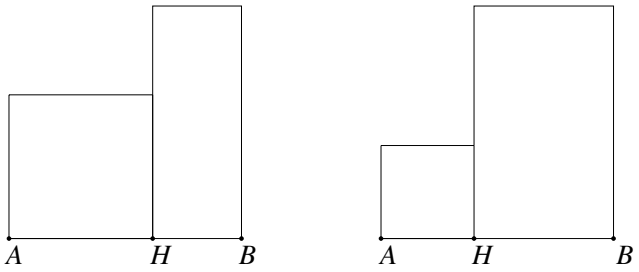


Fig. 9

Pour établir le lien entre la résolution géométrique décrite par EUCLIDE et la formule de résolution algébrique préalablement établie, on demande aux élèves de formaliser.

Désignons par a la longueur du segment AB à partager. Comme EUCLIDE décrit la construction du carré $AFGH$, la longueur du côté de ce carré est l'inconnue que l'on calcule à partir de la résolution géométrique. La comparaison entre la construction et la résolution algébrique sera donc plus aisée si on choisit de noter x le côté du carré, c'est-à-dire le segment AH. Le segment restant BH est noté $a - x$.

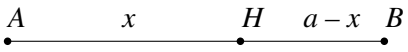


Fig. 10

L'équation à résoudre est alors $x^2 = a(a - x)$ ou $x^2 = a^2 - ax$, qu'on peut encore écrire $x^2 + ax = a^2$. On retrouve ainsi un cas particulier d'une équation de la forme $x^2 + px = q$, avec

p et q positifs. En résolvant cette équation par la formule déjà bien connue des Mésopotamiens, en remplaçant p par a et q par a^2, nous trouvons

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Analysons la construction décrite par Euclide, tout en calculant les longueurs des segments qui interviennent à chaque étape.

Il construit successivement

1. le carré $ABCD$ de côté $AB = a$,
2. le point E, tel que $AE = \frac{a}{2}$,
3. le point F tel que $EF = EB = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$,
4. le carré de côté $AF = EF - EA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$.

Nous constatons que le déroulement de la solution géométrique proposée par Euclide coïncide exactement avec les étapes du calcul effectué lors de la résolution algébrique.

La construction demandée a été effectivement réalisée : le segment AB a été coupé de telle sorte que le rectangle de dimensions AB et BH est de même aire que le carré de côté AH. Ce problème, très célèbre dans l'Antiquité, est repris par Euclide à la proposition 30 du livre VI sous la forme *couper une droite limitée donnée en extrême et moyenne raison.* Cela revient à partager un segment AB en deux segments AH et BH tels que $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{BH}$. Ce rapport est nommé ἡ τομή (la section) par les Grecs et *divina proportione* (divine proportion) par Luca Pacioli. C'est sa valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que nous appelons le *nombre d'or.*

Prolongement possible

Après avoir décrit la résolution géométrique du problème, Euclide valide la construction proposée par une démonstration. Une lecture commentée de celle-ci n'est pas sans intérêt pour des élèves motivés.

En effet, puisque la droite AC a été coupée en deux parties égales au point E et, puisque FA lui a été ajoutée, le rectangle contenu par CF, FA, pris avec le carré sur AE, est donc égal au carré sur EF (II. 6). Or EF est égale à EB. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal au carré sur EB. Mais à celui sur EB sont égaux ceux sur BA, AE (I. 47), car l'angle en A est droit. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal à ceux sur BA, AE (N.C. 1)[5]. Que le carré sur AE soit retranché de part et d'autre. Donc ce qui reste, le rectangle contenu par CF, FA, est égal au carré sur AB (N.C. 3)[6]. Et d'une part, le rectangle contenu par CF, FA est FK – car AF est égale à FG –, d'autre part le carré décrit sur AB est AD. Donc FK est égal à AD. Que AK soit retranché de part et d'autre ; le reste FH est donc égal à HD (N.C. 3). Et, d'une part HD est le rectangle contenu par AB, BH – car AB est égale à BD –, d'autre part FH est le carré décrit sur AH. Donc le rectangle contenu par AB, BH est égal au carré sur AH.

Donc la droite donnée AB a été coupée en H, de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH. Ce qu'il fallait faire.

Voici une traduction de cette démonstration en langage mathématique actuel.

Une première égalité

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 \quad \text{(II, 6)}$$

est énoncée et justifiée par la proposition 6 du livre II. Cette proposition établit géométriquement l'identité remarquable $(a+b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2$, elle est appliquée ici pour $a = AB = CA$ et $b = AF$.

Comme $EF = EB$, par construction, on peut écrire

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2 \quad \text{(I, 47)}.$$

Les élèves devraient reconnaître dans la proposition 47 du livre I justifiant la dernière égalité, le théorème que nous connaissons sous le nom de théorème de Pythagore.

Dès lors, en soustrayant AE^2 des deux membres de l'égalité, il vient

$$CF \cdot FA = AB^2,$$

ce qui signifie que le rectangle FK ($FGKC$) est égal au carré AD ($ABDC$). Remarquons au passage que Euclide désigne les quadrilatères par l'énoncé des extrémités d'une diagonale.

Il reste à retirer le rectangle AK ($AHKC$) de ces deux figures de même aire pour établir l'égalité des aires du carré FH ($FGHA$) et du rectangle HD ($HBDK$), ce qui termine la démonstration puisque $FGHA$ est bien le carré construit sur AH et $HBDK$ le rectangle de dimensions AB et BH.

Échos des classes Le problème 1 de la tablette BM 13 901 a été décortiqué lors de l'exposé à Liège, déjà mentionné et commenté à la page 414.

Commentaires

En ce qui concerne le texte d'al-Ḫwārizmī, nous avons consulté les documents suivants :
- une transcription en latin d'une partie de l'œuvre originale (manuscrit latin 7377A des environs du XIVe siècle conservé à la Bibliothèque Nationale de Paris, in [105]),
- la traduction en anglais et le texte en arabe de l'édition de F. Rosen [5].

Le travail de Rosen s'appuie sur le seul manuscrit disponible à son époque : il s'agit du manuscrit de la *Bodleian collection* à Oxford. Il est contenu dans le volume numéroté CMXVIII. *Hunt.* 214, *fol.*, et porte la date de la transcription A.H. 743 (1342 après J.-C.)[7].

Notre traduction, très proche du texte arabe, nous a été largement inspirée par une lecture commentée que nous en a faite A. Djebbar. C'est sur son conseil, que nous avons délibérément choisi de ne pas traduire le terme *māl*, mais de garder le mot arabe.

Pour le problème 1 de la tablette répertoriée BM 13 901 au British Museum, nous avons reproduit la traduction de F. Thureau-Dangin [134], mais nous avons également consulté les travaux de J. Høyrup [89] et [90].

Quant à la proposition 11 du livre II des *Éléments* d'Euclide, nous avons adopté la traduction de B. Vitrac [67]. Cette traduction a été réalisée à partir du texte grec des *Éléments* établi par J. L. Heiberg. Cette édition de Heiberg, publiée de 1883 à 1888 fait toujours autorité.

[5] Notion commune 1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
[6] Notion commune 3 : Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
[7] A.H. 743 signifie année 743 de l'hégire.

Chapitre 14

La diagonale du carré

Préambule

Examinons un puzzle tout simple : on se donne deux carrés de même aire et on demande, au moyen de quelques découpages, de construire un nouveau carré qui aurait la même aire que les deux carrés réunis.

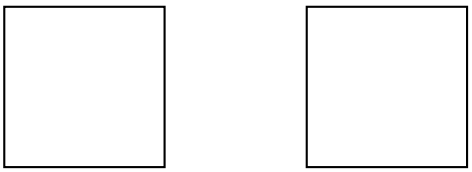


Fig. 1

Ce problème qui consiste à chercher b pour que $b^2 = 2a^2$ lorsque a est donné, est connu sous le nom de « duplication du carré ». Il reçoit une solution géométrique simple en découpant ces deux carrés le long d'une de leurs diagonales et en recomposant les quatre triangles d'aire identique ainsi obtenus.

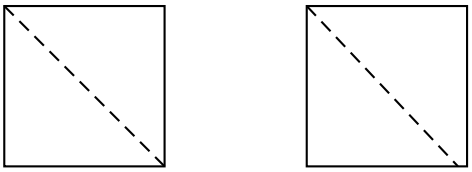


Fig. 2

Dans la figure 3, $AEFC$ est le carré cherché : il se compose des quatre triangles obtenus par le découpage et son aire est égale à la somme des aires des deux carrés donnés.

Remarquons que le carré $ABCD$ est identique à l'un des carrés de départ : il est composé de deux des triangles découpés. Ainsi l'aire du carré $AEFC$ est double de celle du carré $ABCD$.

Si l'on appelle b la longueur du côté du carré $AEFC$, et a la longueur du côté du carré $ABCD$, cette simple figure montre que $b^2 = 2a^2$. Le côté du carré $AEFC$ est de même longueur que la *la diagonale* du carré $ABCD$.

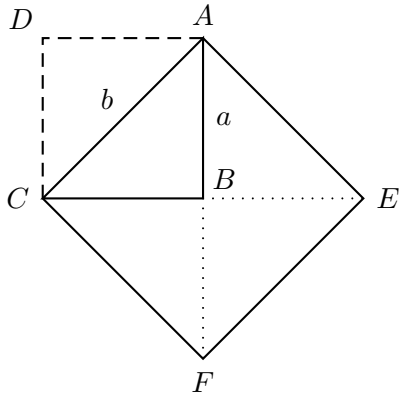


Fig. 3

> Le côté d'un carré d'aire double d'un carré donné a comme longueur celle de la diagonale du carré donné.

L'écriture sous forme fractionnaire de la relation $b^2 = 2a^2$ conduit à $2 = \dfrac{b^2}{a^2}$.

Le rapport $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire le rapport entre les longueurs des côtés de deux carrés dont l'un (celui de côté b) est d'aire double de l'autre (celui de côté a) va servir de définition à un certain nombre positif dont on sait que son carré vaut 2. Ce nombre appelé *racine de deux* se représente par le symbole $\sqrt{2}$ et on a

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}.$$

> Le nombre $\sqrt{2}$ exprime le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur du côté de ce carré.

Revenons sur la figure 3 et portons notre attention sur le triangle rectangle isocèle ABC où la longueur de l'hypoténuse AC vaut b et la longueur des côtés de l'angle droit $AB = BC$ vaut a.

> Le nombre $\sqrt{2}$ exprime le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle isocèle.

Les calculatrices donnent de ce rapport une première idée : c'est un nombre qui s'écrit 1,414213562. Cette dernière décimale 2 affichée par la calculatrice est étrange car le carré d'un nombre qui se termine par une décimale 2 ne saurait être un naturel. Si l'on effectue à la main le produit de 1,414213562 par lui-même, la première étape de l'opération sera $2 \times 2 = 4$ et l'on sait que ce 4 sera la dernière décimale du produit.

Puisque l'on ne peut se fier à cet affichage, on est conduit à se poser quelques questions à propos de ce nombre.

- Ce nombre est-il quand même une fraction, dont l'écriture décimale exacte n'aurait pu être atteinte suite au manque de précision de la calculatrice ?
- S'il est établi que 1,414213562 n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$, comment les calculatrices trouvent-elles cette valeur ?

Au second siècle de notre ère, le mathématicien Théon de Smyrne[1] proposa un algorithme de construction de nombres diagonaux et latéraux[2] qui conduisent à des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$. La section 1 de ce chapitre s'inspire de ce texte pour montrer que $\sqrt{2}$ ne peut être une fraction.

La première activité (section 1.1) pourrait être abordée par des élèves de 4e année : elle montre que $\sqrt{2}$ ne peut pas être la fraction $\frac{17}{12}$, l'une des valeurs approchées proposées par Théon. Elle aborde le concept de démonstration par l'absurde. La seconde activité (section 1.2) est plutôt destinée aux élèves de 5e année : elle montre que $\sqrt{2}$ ne peut en aucun cas être égale à une fraction. On y utilise la démonstration par l'absurde basée sur une descente infinie.

La deuxième section (page 437) développe l'algorithme de Théon. En utilisant une définition par récurrence d'une suite de nombres, cet algorithme permet de rechercher des valeurs approchées de $\sqrt{2}$. Destiné aux élèves de 6e année, c'est un prolongement naturel des résultats obtenus à la section 1.2. On s'intéresse à la transcription de l'algorithme avec une calculatrice et un tableur.

La troisième section (page 450) s'intéresse à un texte de Héron d'Alexandrie[3] donnant une méthode pour trouver des valeurs approchées de plus en plus précises de la racine carrée d'un nombre positif, dans le cadre d'un problème de recherche d'aire d'un triangle. Les élèves de 6e sont invités à analyser ce texte pas à pas pour construire l'algorithme proposé par l'auteur. Ensuite, ils appliquent cette technique d'approximation en utilisant des calculatrices ou un tableur. La démonstration de la *formule de Héron pour l'aire d'un triangle* est donnée en prolongement de cette activité.

1 La racine de deux est-elle une fraction ?

1.1 Plier des triangles...

De quoi s'agit-il ?

À partir du pliage d'un triangle dessiné sur une feuille de papier, montrer que si l'on admet que $\sqrt{2}$ est la fraction $\frac{17}{12}$, d'autres fractions *plus simples* conviennent aussi.

Faire découvrir un exemple de démonstration par l'absurde.

Enjeux

Mettre les élèves en contact avec une première valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Fournir un outil qui permettra, lors de la deuxième activité, de montrer que $\sqrt{2}$ n'est jamais égale à une fraction.

Compétences

Établir un raisonnement par l'absurde.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

La racine carrée d'une fraction est égale au quotient des racines du numérateur et du dénominateur.

[1] L'actuelle Izmir en Turquie.
[2] Il s'agit de nombres naturels dont le rapport converge vers $\sqrt{2}$.
[3] Il vécut probablement au premier siècle de notre ère.

Matériel

Feuille de papier (format A4), ciseaux, équerre, règle, crayon.

Comment s'y prendre ?

La recherche d'une hypothétique valeur rationnelle pour $\sqrt{2}$ conduit à écrire des rapports dont un des termes, le dénominateur par exemple, est un carré parfait : $(\sqrt{2})^2 = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{32}{16} = \cdots = \frac{288}{144} = \cdots$

Si l'on découvrait un numérateur d'un de ces rapports qui est également un carré parfait, on trouverait une valeur de 2 sous forme de rapport de carrés parfaits et donc une expression fractionnaire exacte de $\sqrt{2}$.

La fraction $\frac{288}{144}$ est remarquable de ce point de vue : en effet 288 est très proche de 289, le carré de 17. Ainsi, le nombre rationnel $\frac{17}{12}$ constitue *a priori* une bonne valeur approchée de $\sqrt{2}$. Cette première activité va s'intéresser à cette valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Le professeur demande aux élèves de dessiner sur la feuille de papier un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 12 cm. Ils graduent les deux côtés de l'angle droit tous les cm et vers l'intérieur. Ils découpent soigneusement le triangle (figure 4).

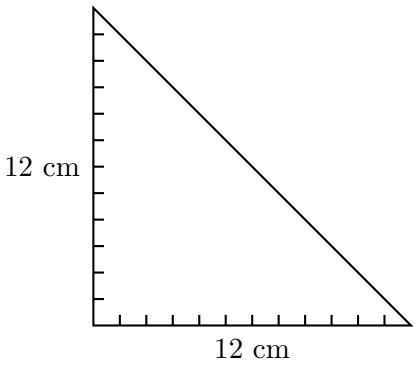


Fig. 4

Ensuite, ils posent devant eux le triangle préparé et désignent les sommets par les lettres A, B et C comme indiqué sur le dessin de la figure 5. Enfin, ils mesurent l'hypoténuse AC. Les élèves trouvent spontanément 17 cm et graduent cette hypoténuse de 17 traits (figure 6).

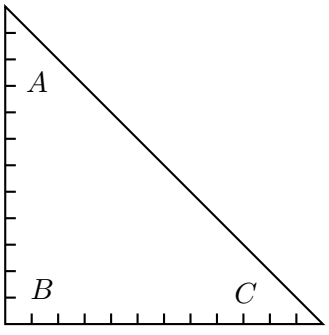


Fig. 5

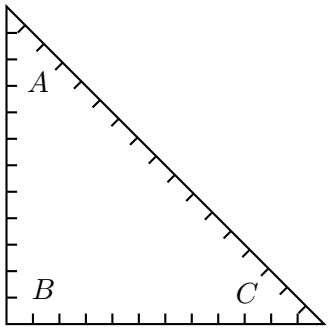


Fig. 6

Il est probable que les élèves se remémorent le théorème de Pythagore qui affirme que le carré de la longueur de l'hypoténuse est la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Dans ce cas, ils constatent que pour ce triangle $17^2 = 289$ et $12^2 + 12^2 = 288$; donc la *vraie* longueur de l'hypoténuse ne peut pas être exactement 17. Ainsi la graduation en 17 traits ne peut être correcte.

On considère que 17 n'est pas une mauvaise approximation de la longueur de cette hypoténuse puisque la différence entre 289 et 288 n'est pas *grande* par rapport aux nombres concernés. Ceci n'est évidemment pas une raison suffisante pour affirmer que la longueur de l'hypoténuse est effectivement 17. Mais supposons que nous en sommes restés à la simple mesure et que nous croyons sincèrement que l'hypoténuse mesure 17. Que va-t-il nous arriver ?

Dans cette hypothèse, puisque $\sqrt{2}$ est le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle, ce triangle de papier illustre le fait que

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$

Le professeur demande aux élèves de plier précisément le triangle (suivant la bissectrice de l'angle en A) pour que le côté AB s'aligne avec le côté AC. Le sommet B de la figure 6 disparaît dans la pliure, mais se retrouve en un point de l'hypoténuse noté E sur la figure 7. Le pli qui matérialise la bissectrice de l'angle en A rencontre le côté BC en un nouveau point D.

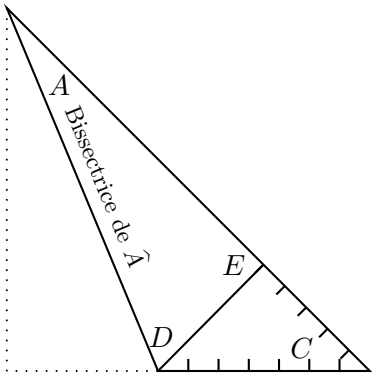


Fig. 7

Comment le triangle CDE se compare-t-il au triangle de départ ?

Le point D où la bissectrice de l'angle en A rencontre le côté BC semble coïncider avec un point de la graduation (CD semble valoir 7).

Le triangle CDE apparu par ce pliage semble être à son tour un triangle rectangle isocèle.

Valider ces observations en déterminant les longueurs des nouveaux segments issus de ce pliage en fonction des longueurs $AB = BC = 12$ et $AC = 17$ des côtés du triangle ABC.

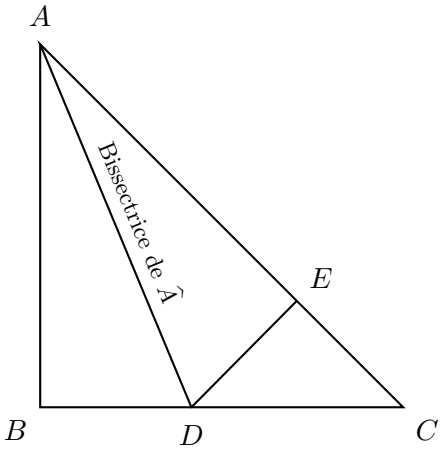


Fig. 8

Première étape : comparer les triangles ABD et ADE (voir figure 8).

Le pliage effectué implique que ces deux triangles sont isométriques : ils ont le côté AD commun, deux côtés égaux ($AE = AB = 12$) et les angles en A égaux puisque AD est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAE}$.

Deuxième étape : quelles sont les propriétés du triangle CDE ?

Puisque $AE = 12$, on trouve $EC = 17 - 12 = 5$.

L'angle de sommet E est un angle droit et l'angle $\widehat{ECD}$ a une amplitude de 45° car le triangle ABC de départ était un triangle rectangle isocèle. L'angle $\widehat{EDC}$ a également une amplitude de 45° ; le triangle DEC est lui aussi un triangle rectangle isocèle, ce qui valide notre seconde observation.

On en déduit que la longueur de DE est 5.

Troisième étape : quelle est la longueur de DC ?

Puisque $BD = DE$ par pliage, la longueur de BD est également de 5 et la longueur de DC est $12 - 5 = 7$. Nous avons validé notre première observation : le point D, où la bissectrice de l'angle A rencontre le côté BC, coïncide avec une graduation.

Conclusions

Ce pliage appliqué à un triangle rectangle isocèle (ABC) dont les longueurs des trois côtés seraient 12, 12 et 17 construit un nouveau triangle rectangle isocèle (CDE) dont les longueurs des côtés seraient 5, 5 et 7.

Remarquons que les dimensions du nouveau triangle sont plus petites que celles du triangle de départ et qu'elles s'expriment par des naturels non nuls.

Quelle conclusion observer à propos de valeurs éventuelles de $\sqrt{2}$?

Au départ, le triangle de papier suggérait que

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$

Dans le nouveau triangle CDE, l'hypoténuse vaut 7 et les côtés de l'angle droit valent 5. En se servant de ce nouveau triangle et de la définition de $\sqrt{2}$ comme rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle, nous obtenons une nouvelle valeur fractionnaire

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}.$$

Nous avons montré rigoureusement que le triangle CDE est un triangle rectangle isocèle sous l'hypothèse que le triangle ABC est également un triangle rectangle isocèle. Les deux valeurs fractionnaires de $\sqrt{2}$ sont conjointement valables et on a

$$\frac{17}{12} = \frac{7}{5}.$$

Si l'on fait l'hypothèse que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$, alors on peut montrer que $\frac{17}{12} = \frac{7}{5}$. Que penser de cette égalité ?

Comme on peut s'en convaincre en réduisant au même dénominateur, l'égalité $\frac{17}{12} = \frac{7}{5}$ est fausse : $\frac{85}{60}$ n'est pas égal à $\frac{84}{60}$.

Or nous avons raisonné juste. Alors qu'est-ce qui ne va pas ?

Admettre que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ conduit à montrer rigoureusement que $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ aussi. Or il est évident que $\frac{17}{12} \neq \frac{7}{5}$. Malgré la rigueur de notre démonstration, quelque chose n'est donc pas correct dans notre démarche : nous ne pouvions pas affirmer que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$.

Cette démarche pour montrer que la fraction $\frac{17}{12}$ n'est pas la valeur exacte de $\sqrt{2}$ peut sembler étrange puisque dès le départ, nous savions qu'elle ne convenait pas. Ce sur quoi nous allons tabler dans la suite, c'est qu'à partir de la fraction proposée comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, nous avons exhibé une *autre* fraction possible et que cette nouvelle fraction est composée de naturels non nuls inférieurs à ceux du départ.

L'activité suivante (section 1.2) va s'inspirer de cette démarche pour montrer que $\sqrt{2}$ ne peut être égale à aucune fraction. Ce fait acquis, on montrera comment une réécriture de la démarche permet de « construire » des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

Commentaire

Sur la démonstration par l'absurde

La démarche du type décrit dans cette expérience s'appelle un *raisonnement par l'absurde*. Cette méthode de démonstration, déjà connue des Grecs consiste à admettre pour vraie la proposition contraire de celle que l'on souhaite établir et en déduire un résultat manifestement faux.

La proposition (P) que l'on souhaitait démontrer est ici :

$$\sqrt{2} \textit{ n'est pas la fraction } \tfrac{17}{12}.$$

La proposition (logiquement) contraire (non P) est bien évidemment :

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$

Une démonstration parfaitement correcte conduit au résultat :

$$\frac{17}{12} = \frac{7}{5}.$$

Ce résultat est faux : cela signifie que nous ne pouvions pas supposer que la proposition (non P) $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ était vraie. Cette proposition (non P) est donc fausse et c'est la proposition de départ (P) qui est vraie.

Prolongement possible

Les longueurs des côtés du triangle de départ étaient représentées par des naturels non nuls. Plier un triangle rectangle isocèle le long de la bissectrice d'un des angles aigus conduit à un nouveau triangle rectangle isocèle. Les longueurs des côtés de celui-ci sont à leur tour représentées par des naturels non nuls, mais plus petits que ceux de départ.

On peut légitimement se demander ce qui se passerait si l'on décidait de poursuivre le processus de pliage. Ceci demande un peu de méticulosité car le papier utilisé deviendra de plus en plus petit (à moins de recommencer avec une plus grande feuille, toujours dans les mêmes proportions, mais où l'unité du dessin serait représentée par 2 cm (à l'échelle 2:1). Après le premier pliage, on découpe avec des ciseaux et on ne garde que le nouveau triangle de côtés de longueur 5, 5 et 7. Plier ce triangle le long de la bissectrice de l'un des angles aigus conduit cette fois à un triangle rectangle isocèle dont les côtés calculés seront de longueurs 2, 2 et 3.

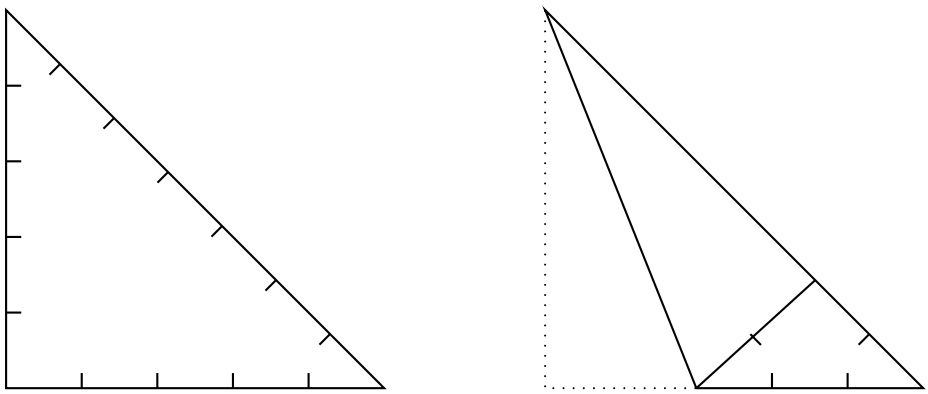


Fig. 9

On ne garde que ce triangle et on plie à nouveau. Surprise : le triangle rectangle isocèle a des côtés dont on calcule les longueurs : on obtient 1 pour les deux côtés de l'angle droit et encore 1 pour l'hypoténuse. Les trois côtés de ce triangle rectangle sont donc... égaux, ce qui est totalement absurde.

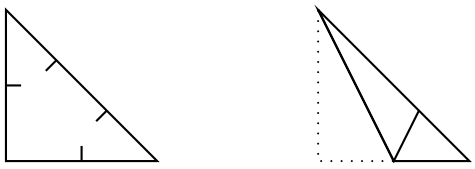


Fig. 10

On arrête de toute manière le processus de pliage, car une étape supplémentaire ferait apparaître des longueurs de côtés qui ne seraient plus exprimées par des naturels non nuls.

1.2 Irrationalité de $\sqrt{2}$

De quoi s'agit-il ? Utiliser la forme de preuve découverte lors de l'activité précédente pour montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction.

Enjeux Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Faire découvrir un exemple de descente infinie.

Compétences

L'existence de nombres irrationnels : la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

Les critères d'isométrie de triangles.

La section 1.1 à la page 427.

Comment s'y prendre ?

En utilisant un triangle isocèle prétendument rectangle dont les longueurs des côtés sont 12, 12 et 17, les élèves ont vérifié à la première activité que $\sqrt{2}$ n'était pas égal à une fraction particulière, à savoir $\frac{17}{12}$.

Dans cette deuxième activité, ils découvriront pourquoi il ne peut exister aucun triangle rectangle isocèle dont les longueurs des trois côtés sont des naturels non nuls. Ils en déduiront que $\sqrt{2}$ ne peut s'exprimer sous forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ où p et q sont des naturels non nuls.

Le professeur (au tableau) et les élèves (dans leur cahier) vont construire étape par étape le dessin qui servira de support au raisonnement.

D'abord, chacun dessine un triangle rectangle isocèle ABC. On désigne par p les longueurs des côtés de l'angle droit et par q la longueur de l'hypoténuse. On suppose que p et q sont deux nombres naturels non nuls. Il importe pour la suite que les élèves relèvent que $q < p$.

Ils savent que le rapport de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle à la longueur d'un des côtés de l'angle droit est noté $\sqrt{2}$. Ils écrivent donc

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Le professeur demande de construire la bissectrice de l'angle en A : celle-ci rencontre le côté BC en D. Il construit ensuite la perpendiculaire à AC issue de D. Il note E l'intersection de AC et de cette perpendiculaire.

Les dimensions indiquées sur la figure 11 seront reportées sur celle-ci au fur et à mesure de leur calcul par les élèves. Pour cela, le professeur leur indique quelques pistes.

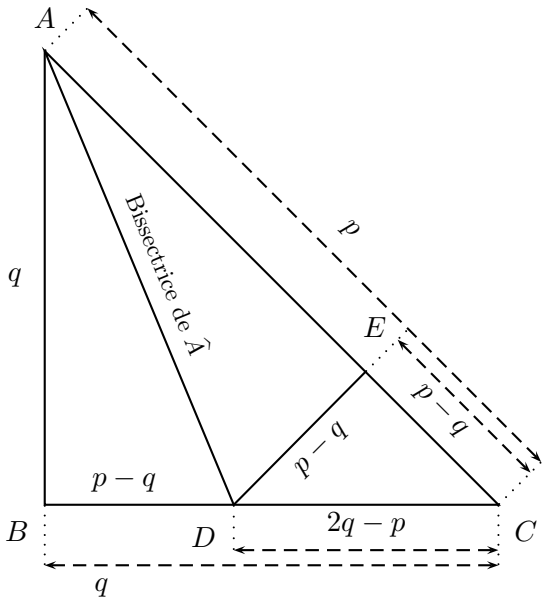


Fig. 11

Comparer les triangles ABD et AED.

Les triangles ABD et AED ont le côté AD commun et deux côtés égaux AB et AE. Les angles compris entre ces deux côtés, $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$ sont égaux par définition de la bissectrice.

Ainsi les triangles ABD et AED sont isométriques.

Caractériser le triangle CDE.

Puisque l'angle $\widehat{E}$ est un angle droit par construction et que $\widehat{C}$ est d'amplitude 45°, $\widehat{D}$ est également d'amplitude 45° : le triangle CDE est donc un triangle rectangle isocèle.

Calculer les longueurs des côtés du triangle CDE.

Les triangles ABD et AED étant isométriques, on a $BD = DE$.

Puisque le triangle CDE est isocèle, $DE = CE$.

Comme $CE = AC - AE = AC - AB$, les deux côtés de l'angle droit du triangle CDE sont de longueur $p - q$.

Enfin, en n'utilisant que les informations données par le pliage, $DC = BC - BD = BC - DE$ montre que l'hypoténuse du triangle CDE est de longueur $2q - p$.

Que peut-on dire des longueurs des côtés de ce nouveau triangle CDE ?

D'une part, les longueurs $2q-p$ et $p-q$ des côtés du triangle CDE s'expriment par des naturels non nuls car p et q sont des naturels non nuls et parce que les dimensions du triangle CDE ne peuvent évidemment pas être négatives.

D'autre part, la construction du triangle CDE « à l'intérieur » du triangle ABC suffit pour se convaincre que les longueurs des côtés de CDE sont strictement inférieures aux longueurs des côtés de ABC. Ainsi par exemple :

$$2q - p < p \quad \text{et} \quad p - q < q.$$

Les triangles rectangles isocèles dont les longueurs des côtés sont des naturels permettent d'exprimer $\sqrt{2}$ sous forme fractionnaire. Quelle conclusion déduire pour $\sqrt{2}$ de l'existence des triangles ABC et CDE ?

Le triangle rectangle isocèle ABC d'hypoténuse de longueur p et de côtés de l'angle droit de longueurs q, avec p et q naturels, permet d'écrire

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

et le triangle rectangle isocèle CDE d'hypoténuse de longueur $2q-p$ et de côtés de l'angle droit de longueur $p - q$, avec $2q - p$ et $p - q$ naturels, permet d'écrire

$$\sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Ces deux fractions sont équivalentes puisque toutes deux expriment le même nombre $\sqrt{2}$. Elles ne s'écrivent pas en utilisant les mêmes naturels puisque

- le numérateur $2q - p$ de la seconde est *strictement inférieur* au numérateur p de la première,
- le dénominateur $p - q$ de la seconde est *strictement inférieur* au dénominateur q de la première.

S'il existait une écriture fractionnaire de $\sqrt{2}$ de type $\frac{p}{q}$, donc composée des naturels p et q, la construction développée ci-dessus conduirait à une *autre* fraction $\frac{2q-p}{p-q}$ constituée de naturels $2q - p$ et $p - q$ strictement inférieurs, respectivement, aux naturels p et q de départ. Que se passe-t-il si l'on essaie de reproduire la construction à partir de cette nouvelle expression fractionnaire de $\sqrt{2}$?

D'un point de vue géométrique, un triangle rectangle isocèle plus petit est construit « à l'intérieur » d'un triangle rectangle isocèle donné. La reproduction de la construction dans ce nouveau triangle est parfaitement légitime et conduit à son tour à un triangle – plus petit – auquel la construction peut à son tour être appliquée...

D'un point de vue numérique, au départ de l'activité, $\sqrt{2}$ est égale à une fraction. Si celle-ci est notée $\frac{n_1}{d_1}$, les répétitions successives de la construction conduisent à de nouvelles fractions : $\frac{n_2}{d_2}$, $\frac{n_3}{d_3}$, $\frac{n_4}{d_4}$, $\cdots$

La répétition du raisonnement développé ci-dessus vérifie que : $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \ \cdots$ et que $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > \cdots$. Il s'agit là de deux suites *décroissantes* de naturels (strictement positifs, non nuls), satisfaisant une règle donnée. Ces suites sont infinies.

Mais ceci heurte le bon sens : quelle que soit la valeur des naturels utilisés dans la fraction de départ, il est impossible d'imaginer que l'on puisse indéfiniment obtenir des fractions composées de naturels strictement inférieurs à ceux que l'on avait déjà. De telles suites décroissantes de naturels ne peuvent se poursuivre indéfiniment.

À quel endroit situer l'erreur dans le raisonnement qui vient d'être fait ? Quelle conclusion en tirer ?

L'existence d'un triangle rectangle isocèle ABC ne peut être mise en doute.

La construction du triangle CDE à partir du triangle ABC est parfaitement légitime. Si le triangle ABC est rectangle isocèle, le triangle CDE l'est également. Ce n'est pas dans ce passage non plus que s'est glissée une erreur.

Le fait de pouvoir répéter indéfiniment la construction proposée pour passer d'un triangle donné à un plus petit ne pose donc aucun problème.

La seule hypothèse qu'il nous est permis de rejeter porte sur les dimensions du triangle de départ : nous avions admis que p et q étaient des naturels.

En conclusion, il n'existe aucune fraction de type $\frac{p}{q}$, où p et q sont des naturels non nuls, qui permette d'exprimer $\sqrt{2}$.

Commentaires

Sur la soustraction réciproque

La méthode de démonstration utilisée ci-dessus était appelée à l'époque des Grecs, la « méthode d'anthyphérèse » ou de « soustraction réciproque ». Dans la démonstration, on « retranche » sans arrêt une longueur d'une autre (le côté de l'angle droit de l'hypoténuse). L'adjectif « réciproque » tient au fait qu'à chaque nouvelle étape, c'est une partie (EC) de l'hypoténuse (AC) qui devient le nouveau côté de l'angle droit et une partie (DC) du côté de l'angle droit (BC) qui devient la nouvelle hypoténuse. Cette méthode fut décrite dans le livre 10 des *Éléments* d'Euclide pour rechercher une commune mesure entre deux longeurs.

Sur la descente infinie

Ce type de démonstration se rattache également à la « descente infinie » surtout exploitée par le français Fermat. La « descente infinie » est le principe selon lequel il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs. Ce principe permet de prouver qu'il n'existe pas de solution à certains problèmes faisant intervenir des nombres entiers : si à partir d'une solution, il est possible d'en fabriquer une autre strictement plus petite mais toujours en nombres entiers, et qu'on peut recommencer indéfiniment, alors le problème initial n'a pas de solution.

Sur l'irrationalité

La notion générale de « ratio » (rapport) de deux grandeurs homogènes (deux longueurs, deux aires, deux volumes,...) nous vient de la Grèce antique, entre autre dans les *Éléments* d'Euclide. On y étudie des identités de rapports sous le nom de « proportions » et de nombreux théorèmes se présentent sous la forme de rapports : par exemple, *les cercles sont entre eux comme les carrés de leur diamètre.*

La traduction de l'arabe كَسر (kasr), signifiant « rompu », donnera à la Renaissance le latin « fractio », d'où procède notre terme « fraction ». Les fractions sont donc des nombres « rompus ». Le nombre $\frac{3}{4}$ signifie trois parties de quatre ; 3 est le numérateur qui « nombre », 4 le dénominateur qui « dénomme ».

La fraction $\frac{m}{n}$ exprime un rapport lorsque les grandeurs (m et n) sont « commensurables » c'est-à-dire lorsqu'il existe une « partie commune » t à m et n, en fait si $m = k \times t$ et $n = k' \times t$ avec k et k' des nombres naturels non nuls.

Les entiers et les fractions forment « l'ensemble de nombres rationnels », ceux qui expriment la « ratio ».

La découverte de l'impossibilité d'utiliser des fractions pour exprimer le « rapport » de la diagonale d'un carré au côté de ce même carré a conduit à utiliser le terme grec $\alpha\lambda o\gamma o\nu$ (alogon), signifiant « inexprimable » pour évoquer ce rapport. Puisque ce nombre refuse d'entretenir un « rapport rationnel » avec l'unité, il sera « le nombre irrationnel ».

Les rationnels et les irrationnels forment « l'ensemble des nombres réels », ceux qui « mesurent ».

Suite à l'écriture décimale des nombres élaborée par le mathématicien persan al-Kashi dans sa *Clé de l'arithmétique*, on s'est aperçu que les nombres rationnels admettent un développement décimal périodique. Ceci implique qu'au bout d'un certain temps, les décimales de ces nombres sont « prévisibles ». Les nombres irrationnels n'ont pas cette propriété et ne peuvent être représentés exactement (et complètement) en écriture décimale : on pourra (au mieux) « encadrer » ces nombres.

La recherche de valeurs approchées de nombres irrationnels par le principe « d'encadrement » a été développée dès l'Antiquité. L'approche de Théon (développée lors de la troisième activité) en est un exemple pour la racine carrée de deux ; celle de Héron (développée lors de la quatrième activité) en est un exemple plus général pour encadrer la racine d'un naturel quelconque. On peut également signaler les travaux d'Archimède pour « encadrer » π par l'utilisation de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle.

2 Valeurs approchées de $\sqrt{2}$

De quoi s'agit-il ?

Découvrir et expérimenter l'algorithme de Théon.

Enjeux

Comprendre la définition par récurrence d'une suite de nombres.

Appliquer un algorithme pour rechercher des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Le texte de Théon de Smyrne (fiche 19 à la page 489).

Un tableur ou une calculatrice scientifique.

Prérequis

Les deux activités de la section 1.

L'écriture d'une formule dans une « cellule » d'un tableur et la copie de cette formule dans les cellules voisines.

Comment s'y prendre ?

Dans la première activité, qui démarre à la page 427, les élèves ont été confrontés à deux valeurs approchées différentes de $\sqrt{2}$: les fractions $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$. Dans la deuxième, qui débute à la page 432, ils ont rencontré les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q-p}{p-q}$. Dans chacune de ces deux situations, on examine si l'une des valeurs approchées est « meilleure » que l'autre.

À partir des conclusions, les élèves découvrent un processus de recherche de valeurs approchées fractionnaires de plus en plus proches de $\sqrt{2}$. Ce processus est mis en relation avec le texte original de Théon.

2.1 Meilleures valeurs approchées ?

Dans la première activité, les fractions $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$ sont apparues comme valeurs approchées de $\sqrt{2}$. De ces deux valeurs, quelle est la meilleure ?

Pour estimer l'écart entre $\sqrt{2}$ et ces valeurs approchées, nous les élevons au carré.

On a $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144}$: cette valeur est supérieure de $\frac{1}{144}$ à 2.

On a $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$: cette valeur est inférieure de $\frac{1}{25}$ à 2.

Deux conclusions peuvent être tirées :

- d'une part l'approximation de $\sqrt{2}$ par $\frac{17}{12}$ est « meilleure » que celle par $\frac{7}{5}$ puisque $\frac{1}{144}$ est inférieur à $\frac{1}{25}$;
- d'autre part, $\sqrt{2}$ est quelque part « entre » ces deux valeurs approchées puisque le carré de $\frac{17}{12}$ dépasse 2 et que le carré de $\frac{7}{5}$ est inférieur à 2.

Dans la deuxième activité, les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q-p}{p-q}$ sont apparues comme valeurs approchées de $\sqrt{2}$. De ces deux valeurs, quelle est la meilleure ?

Dans ce cas également, nous élevons au carré les valeurs approchées et nous les comparons à 2. Comme nous ne savons pas si ces valeurs approchées sont inférieures ou supérieures à $\sqrt{2}$, nous introduisons des valeurs absolues.

D'une part :

$$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2\right| = \left|\frac{p^2 - 2q^2}{q^2}\right|,$$

et d'autre part :

$$\left|\left(\frac{2q-p}{p-q}\right)^2 - 2\right| = \left|\frac{4q^2 - 4pq + p^2 - 2p^2 + 4pq - 2q^2}{(p-q)^2}\right| = \left|\frac{2q^2 - p^2}{(p-q)^2}\right| = \left|\frac{p^2 - 2q^2}{(p-q)^2}\right|.$$

Nous savons que $p - q < q$ (voir page 434). Puisque p et q sont des naturels, on a également $(p-q)^2 < q^2$.

On en déduit aisément que

$$\left|\frac{p^2 - 2q^2}{q^2}\right| < \left|\frac{p^2 - 2q^2}{(p-q)^2}\right|$$

puisque les deux numérateurs sont égaux et que le dénominateur de la seconde fraction est plus petit que le dénominateur de la première.

La valeur approchée $\frac{2q-p}{p-q}$ obtenue après le pliage est « moins bonne » que la valeur $\frac{p}{q}$ initiale.

Observons que la comparaison de $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$ peut être vue comme un cas particulier de celle de $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q-p}{p-q}$. Si nous nous plaçons dans les hypothèses de la seconde activité, cela revient à dire que nous avions « choisi » $p = 17$ et $q = 12$. La fraction $\frac{7}{5}$ construite par pliage lors de la première activité peut être retrouvée par le calcul développé lors de la seconde activité puisque $2q - p = 24 - 17 = 7$ et $p - q = 17 - 12 = 5$.

Nous laisserons à la classe le choix de vérifier la « moins bonne qualité » de la seconde valeur approchée dans le cas particulier des valeurs numériques ou dans le cas général. Ce qu'il est important de constater ici est la perte de qualité de la valeur approchée lorsque l'on applique le processus décrit dans ces deux activités.

En « inversant » le processus, c'est-à-dire en passant d'une valeur approchée de type $\frac{2q-p}{p-q}$ à une valeur approchée de type $\frac{p}{q}$ et en poursuivant de la sorte, ne va-t-on pas engendrer des valeurs approchées de plus en plus proches de $\sqrt{2}$?

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{p}{q} & \xrightarrow{\text{pliage}} & \dfrac{2q-p}{p-q} \\ ? & \longleftarrow & \dfrac{x}{y} \end{array}$$

Si nous identifions $\frac{2q-p}{p-q}$ à une fraction $\frac{x}{y}$ connue, comment calculer la fraction $\frac{p}{q}$?

Nous posons $x = 2q - p$ et $y = p - q$ et obtenons le système de deux équations à deux inconnues p et q

$$\begin{cases} -p + 2q = x, \\ p - q = y. \end{cases}$$

En sommant ces deux équations, il vient $q = x + y$. En remplaçant cette valeur de q dans la seconde équation du système, il vient $p - (x + y) = y$ d'où l'on tire $p = x + 2y$.

Nous avons « inversé » le processus : si nous possédons une valeur approchée de $\sqrt{2}$ s'écrivant

$$\frac{x}{y},$$

alors une autre valeur approchée est donnée par la fraction

$$\frac{x + 2y}{x + y}.$$

Et nous savons que cette nouvelle valeur approchée $\frac{x+2y}{x+y}$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que la valeur approchée $\frac{x}{y}$. Nous sommes en présence d'un « algorithme » qui calcule des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

En utilisant l'algorithme qui vient d'être découvert, calculer quelques valeurs approchées successives de $\sqrt{2}$ au départ des valeurs $x = 7$ et $y = 5$ rencontrées lors de la première activité.

1. Les valeurs de départ $x = 7$ et $y = 5$ donnent de $\sqrt{2}$ la valeur approchée

$$\frac{7}{5} = 1,4.$$

2. Appliquons une première fois l'algorithme à partir des valeurs $x = 7$ et $y = 5$.
   Le numérateur de la nouvelle fraction est donné par

$$p = x + 2y = 7 + 2 \cdot 5 = 17$$

   et le dénominateur est donné par

$$q = x + y = 7 + 5 = 12.$$

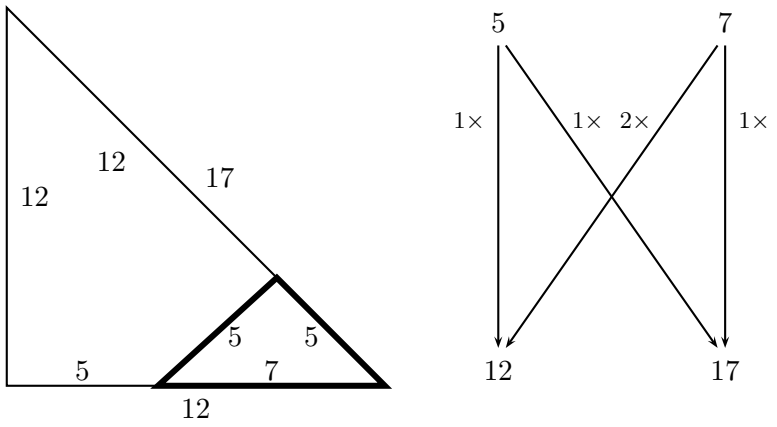


Fig. 12 : L'algorithme appliqué aux valeurs $x = 7$ *et* $y = 5$.

D'une part, ces valeurs $p = 17$ et $q = 12$ donnent de $\sqrt{2}$ la valeur approchée

$$\frac{17}{12} = 1,41667.$$

D'autre part, $p = 17$ et $q = 12$ deviennent respectivement $x = 17$ et $y = 12$ pour servir de point de départ à l'étape suivante.

3. À la seconde étape, partant de $x = 17$ et $y = 12$, le numérateur de la nouvelle fraction est donné par
$$p = x + 2y = 17 + 2 \cdot 12 = 41$$
et le dénominateur par
$$q = x + y = 17 + 12 = 29.$$

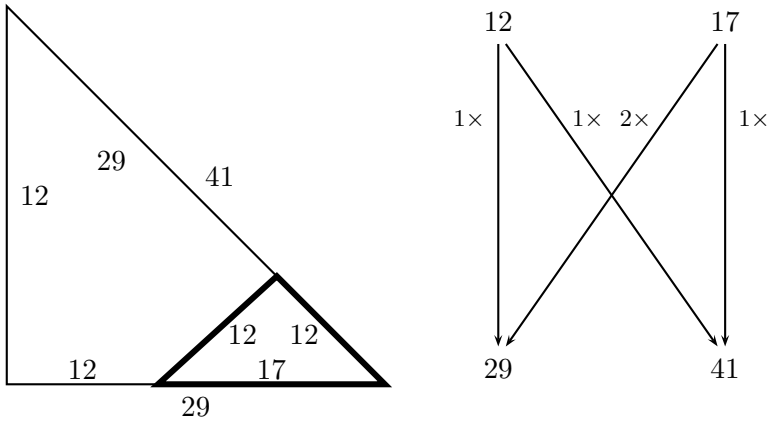


Fig. 13 : L'algorithme appliqué aux valeurs $x = 17$ et $y = 12$.

Ces valeurs $p = 41$ et $q = 29$ donnent de $\sqrt{2}$ la valeur approchée

$$\frac{41}{29} = 1,41379,$$

à leur tour, p et q deviennent les nouveaux x et y de l'étape suivante.

2.2 Le texte de Théon de Smyrne

Théon de Smyrne est un mathématicien qui vécut au deuxième siècle de notre ère : nous savons que de 127 à 132 après J.-C., il a effectué des observations astronomiques de Vénus et de Mercure rapportées par Ptolémée dans son *Almageste*[4].

Nous avons conservé de lui une sorte de manuel scolaire où il montre comment l'arithmétique, la géométrie, la stéréométrie[5] et l'astronomie sont entremêlées dans l'œuvre de Platon. Voici ce qu'il dit dans la préface de son livre *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de* Platon [135].

[4]Vers 150 après J.-C., l'astronome Ptolémée à écrit Μαθηματικης Συνταξεως βιβλια $\overline{\iota\gamma}$ (Collection de 13 livres de Mathématiques). L'œuvre a été appelée μεγιστος (très grande) par les commentateurs ultérieurs souhaitant distinguer celle-ci d'autres textes mineurs du même auteur. Les arabes ont combiné leur article ال (al) avec le superlatif grec pour créer le terme « Almageste ».

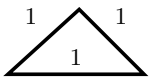
[5]Domaine constitué des applications pratiques de la géométrie à la mesure des volumes, comme par exemple la taille des pierres.

Tout le monde conviendra assurément qu'il n'est pas possible de comprendre ce que Platon a écrit sur les mathématiques, si l'on ne s'est pas adonné à leur étude. Lui-même a montré en beaucoup d'endroits que cette connaissance n'est pas inutile et sans fruit pour les autres sciences. Celui-là donc doit être estimé très heureux qui, en abordant les écrits de Platon, possède bien toute la géométrie, toute la musique et l'astronomie. Mais ce sont là des connaissances dont l'acquisition n'est ni rapide, ni facile ; elle exige, au contraire, un travail assidu dès la première jeunesse. Dans la crainte que ceux qui n'ont pas eu la possibilité de cultiver les mathématiques et qui désirent néanmoins connaître les écrits de Platon ne se voient forcés d'y renoncer, nous donnerons ici un sommaire et un abrégé des connaissances nécessaires et la tradition des théorèmes mathématiques les plus utiles sur l'arithmétique, la musique, la géométrie, la stéréométrie et l'astronomie, sciences sans lesquelles il est impossible d'être parfaitement heureux, comme il le dit, après avoir longuement démontré qu'on ne doit pas négliger les mathématiques.

Dans l'extrait de [135], chapitre XXXI, Théon introduit des ≪ nombres latéraux ≫ et des ≪ nombres diagonaux ≫. La lecture du texte montre que le ≪ nombre latéral ≫ peut être compris comme le ≪ côté ≫ d'un triangle rectangle isocèle dont le ≪ nombre diagonal ≫ représente l'hypoténuse. Si l'on considère un carré coupé en deux triangles rectangles isocèles par l'une de ses diagonales, on comprend mieux l'origine du qualificatif ≪ diagonal ≫ appliqué au côté de ce triangle particulier.

En notant y le côté et x l'hypoténuse, interpréter en termes modernes le texte de Théon.

Pour des raisons de commodité, nous donnons dans la colonne de gauche, le texte de Théon *et dans la colonne de droite, l'interprétation demandée.*

Nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.	
Supposons par exemple deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout, soit en puissance le côté et la diagonale ;	$y = 1$ est le côté, $x = 1$ est l'hypoténuse. 
ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois.	Le nouveau côté est $x + y$, la nouvelle hypoténuse est $x + 2y$.

Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit.

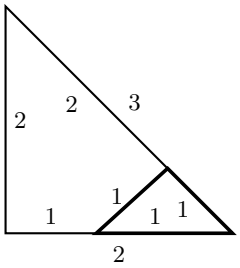
On a bien $x + 2y > x + y$.

Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité.

$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors deux unités ; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités ;

Maintenant $y = 2$ et $x = 3$.

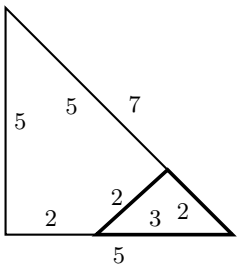


le carré construit sur le côté 2 est 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 4 - 9 = -1$.

De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3 : le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2 ; nous aurons 7 unités.

Maintenant $y = 5$ et $x = 7$.

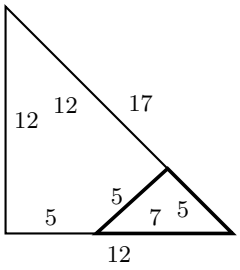


Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double 50 du carré 25.

$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 25 - 49 = 1$.

À nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités ; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17.

Maintenant $y = 12$ et $x = 17$.



Cette fois encore, le carré 289 est plus grand d'une unité que le double 288 du carré de 12.	$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 12^2 - 17^2 = -1$.
Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté[6], en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.	Si x_n représente l'hypoténuse et y_n le côté obtenus à l'étape n, alors, on a toujours $x_n^2 = 2y_n^2 \pm 1$.

Commentaires

Sur la valeur approchée $\frac{17}{12}$

Nous pouvons constater que les constructions successives proposées par Théon conduisent aux nombres $x = 17$ et $y = 12$. En remarquant que $2 \cdot 12^2 - 17^2 = -1$, l'auteur souligne que le double du carré de 12 n'est éloigné que d'une unité du carré de 17. En d'autres termes, 2 est proche de $\frac{17^2}{12^2}$ et en conséquence $\sqrt{2}$ est proche de $\frac{17}{12}$.

C'est en utilisant ces valeurs 12 et 17 qu'a été imaginée la première activité de pliage.

Sur la récurrence

Les valeurs du côté (1) et de l'hypoténuse (1) d'un premier triangle sont données au début du texte de Théon. Ces valeurs de départ sont souvent notées $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$: elles initialisent un processus de construction de proche en proche d'une suite de nombres. Cette initialisation forme l'amorçage de la récurrence.

Ensuite, le texte exprime chaque nouvelle valeur du côté et de l'hypoténuse en utilisant le côté et l'hypoténuse déjà connus à l'étape précédente. Les valeurs 3 et 2 sont obtenues en utilisant les valeurs 1 et 1, les valeurs 7 et 5 sont obtenues à partir de 3 et 2, et ainsi de suite...

Le processus de construction des « nouvelles » valeurs à partir des « anciennes » est le même à chaque étape. Si nous appelons n le numéro d'ordre d'une étape, x_n et y_n les valeurs construites à cette étape, x_{n-1} et y_{n-1} les valeurs déjà connues à l'étape $n-1$, Théon explique comment construire x_n et y_n en *fonction* de x_{n-1} et y_{n-1}. L'énoncé de ces *fonctions* forme le *pas récurrent* de la récurrence.

Lorsque les deux conditions sont correctement énoncées (initialisation et pas récurrent), il est possible de calculer les termes successifs d'une *suite* de nombres par l'utilisation d'une telle récurrence.

La construction de proche en proche des côtés et des hypoténuses de triangles rectangles isocèles est ici une double *récurrence*. En notant f_h et f_c les fonctions décrites par Théon pour construire respectivement la nouvelle hypoténuse et le nouveau côté, nous avons :

$$\begin{aligned} x_n &= f_h(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n &= f_c(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

[6] Ce dernier résultat énoncé par Théon sera démontré dans les prolongements de cette activité ; il n'est en effet d'aucune utilité pour la rédaction de l'algorithme décrit dans ce texte.

2.3 L'algorithme de Théon

Décrire l'algorithme de double récurrence de Théon.

Si x_n avec $n \in \mathbb{N}$, représente le terme général de la suite des numérateurs et si y_n avec $n \in \mathbb{N}$, représente le terme général de la suite des dénominateurs, alors

l'initialisation des récurrences est donné par

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 1$$

et pour tout n naturel strictement positif, les pas récurrents sont définis[7] par

$$x_n = x_n + 2y_{n-1}$$
$$y_n = x_n + y_{n-1}.$$

Les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ se calculent ensuite par

$$u_n = \frac{x_n}{y_n}.$$

En utilisant cette double récurrence, rechercher les premières valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

L'algorithme avec une calculatrice

Voici une transcription de l'algorithme de la double récurrence de Théon pour une calculatrice munie de trois mémoires appelées `A`, `B` et `C`.

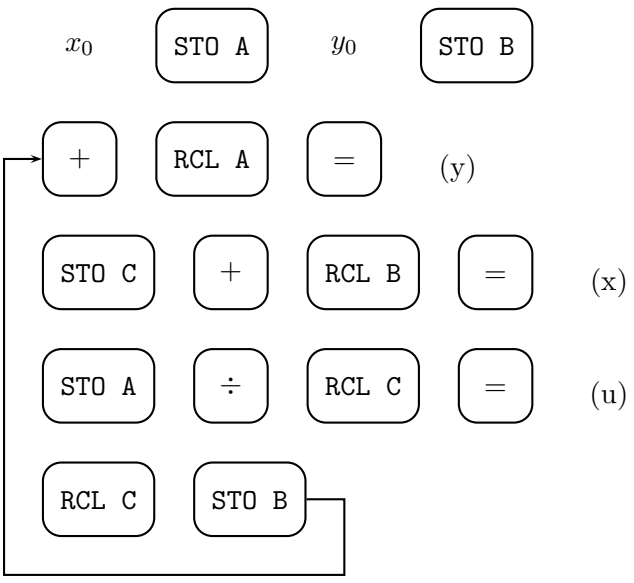


Fig. 14 : Double récurrence de l'algorithme de Théon.

[7] L'élève remarquera que ces formules définissant les pas récurrents sont – aux notations près – les mêmes que celles rencontrées dans l'approche empirique de la page 439.

La première ligne correspond à l'initialisation des deux récurrences : la mémoire `A` contiendra les valeurs successives des numérateurs x_n, la mémoire `B` contiendra les valeurs successives des dénominateurs y_n.

La deuxième ligne calcule un nouveau dénominateur ($y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$) : il apparaît à l'affichage en `(y)`.

La troisième ligne garde dans une mémoire `C` provisoire ce dénominateur et calcule un nouveau numérateur ($x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} = y_n + y_{n-1}$) : il apparaît à l'affichage en `(x)`.

La quatrième ligne prépare l'étape suivante en recopiant ce numérateur dans la mémoire `A` et calcule un nouveau quotient ($u = \frac{x}{y}$) : il apparaît à l'affichage en `(u)`.

La cinquième ligne prépare l'étape suivante en récupérant le nouveau dénominateur gardé provisoirement dans la mémoire `C` et en le recopiant dans la mémoire `B`. La flèche qui remonte de cette cinquième ligne au début de la seconde symbolise la boucle de l'algorithme.

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous. La quatrième ligne du tableau indique qu'à la troisième application de la récurrence, le numérateur vaut 17, le dénominateur 12 et que la fraction $\frac{17}{12}$ donne de $\sqrt{2}$ la valeur approchée $1,416666667$ avec 9 décimales.

Étape	Numérateur (x)	Dénominateur (y)	Valeurs approchées de $\sqrt{2}$ (u)
0	1	1	1
1	3	2	1,5
2	7	5	1,4
3	17	12	1,416666667
4	41	29	1,413793103
5	99	70	1,414285714
6	239	169	1,414201183
7	577	408	1,414215686
8	1 393	985	1,414213198
9	3 363	2 378	1,414213625
10	8 119	5 741	1,414213552
11	19 601	13 860	1,414213564
12	47 321	33 461	1,414213562
13	114 243	80 782	1,414213562
14	275 807	195 025	1,414213562
15	665 857	470 832	1,414213562

L'algorithme avec un tableur

On prépare un tableau. Les cellules de la colonne `A` contiennent le compteur d'étapes de 0 à 15. La cellule `B2` contient la valeur d'initialisation du numérateur $x_0 = 1$, la cellule `C2` contient la valeur d'initialisation du dénominateur $y_0 = 1$, la cellule `D2` contient le premier quotient $u_0 = 1$.

D2 = 1

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12			
15	13			
16	14			
17	15			

La cellule `B3` contient la formule de récurrence des numérateurs : $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$

B3 = =B2+2*C2

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3		
4	2			

La cellule `C3` contient la formule de récurrence des dénominateurs : $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$

C3 = =B2+C2

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3	2	
4	2			

La cellule `D3` contient la formule de définition du quotient : $u_n = \frac{x_n}{y_n}$

D3 = =B3/C3

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3	2	1,5
4	2			

Les cellules `B3`, `C3` et `D3` sont recopiées vers le bas.

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3	2	1,5
4	2	7	5	1,4
5	3	17	12	1,416666667
6	4	41	29	1,413793103
7	5	99	70	1,414285714
8	6	239	169	1,414201183
9	7	577	408	1,414215686
10	8	1393	985	1,414213198
11	9	3363	2378	1,414213625
12	10	8119	5741	1,414213552
13	11	19601	13860	1,414213564
14	12	47321	33461	1,414213562
15	13	114243	80782	1,414213562
16	14	275807	195025	1,414213562
17	15	665857	470832	1,414213562

Prolongement possible

Cette double récurrence peut-elle être ramenée à une seule ? En d'autres mots, peut-on trouver un lien direct de récurrence entre u_n et u_{n-1} ?

Dans la formule calculant u_n en fonction de x_n et y_n, ces dernières valeurs sont remplacées en utilisant la double récurrence :

$$u_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + 2y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}.$$

Puisque $u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$, on divise chaque terme du quotient précédent par y_{n-1}, ce qui donne

$$u_n = \frac{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{2y_{n-1}}{y_{n-1}}}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{y_{n-1}}{y_{n-1}}} = \frac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}.$$

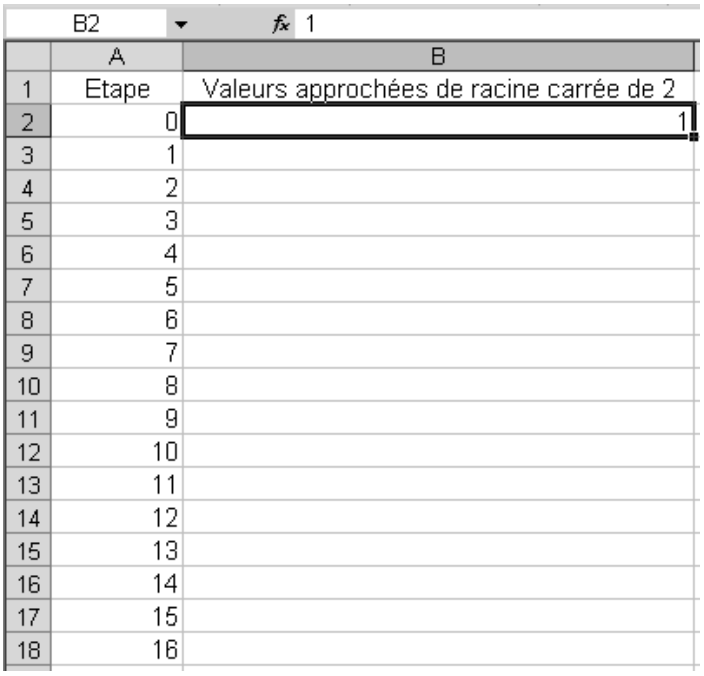
Si u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, représente le terme général de la suite des valeurs approchées de $\sqrt{2}$, alors l'algorithme de Théon s'exprime pour tout n naturel strictement positif, par la récurrence

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}$$

et la valeur d'initialisation de la récurrence

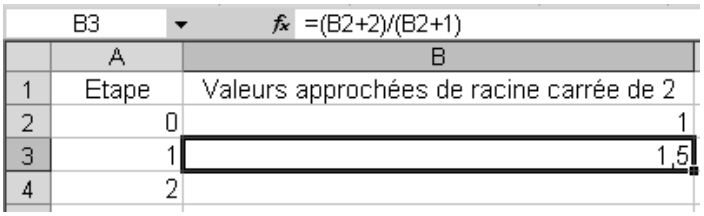
$$u_0 = 1.$$

Cette récurrence permet un autre type d'exploitation du tableur. Les cellules de la colonne `A` contiennent le compteur d'étapes (n). La cellule `B2` contient la valeur d'initialisation 1. La cellule `B3` contient la formule de récurrence $u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}$.



B2 | fx 1

	A	B
1	Etape	Valeurs approchées de racine carrée de 2
2	0	1
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	
14	12	
15	13	
16	14	
17	15	
18	16	



B3 | fx =(B2+2)/(B2+1)

	A	B
1	Etape	Valeurs approchées de racine carrée de 2
2	0	1
3	1	1,5
4	2	

La cellule `B3` est recopiée vers le bas et fournit les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ données par l'algorithme de Théon.

	A	B
1	Etape	Valeurs approchées de racine carrée de 2
2	0	1
3	1	1,5
4	2	1,4
5	3	1,416666666667
6	4	1,413793103448
7	5	1,414285714286
8	6	1,414201183432
9	7	1,414215686275
10	8	1,414213197970
11	9	1,414213624895
12	10	1,414213551646
13	11	1,414213564214
14	12	1,414213562057
15	13	1,414213562427
16	14	1,414213562364
17	15	1,414213562375
18	16	1,414213562373

Le texte de THÉON se terminait par l'affirmation que l'on a toujours $x_n^2 = 2y_n^2 \pm 1$ où x_n représente l'hypoténuse et y_n le côté obtenus à l'étape n. Démontrer ce résultat.

Les nombres x_n et y_n sont définis par deux relations de récurrence. On initialise d'abord

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 1, \end{aligned}$$

ensuite, pour tout n naturel strictement positif, on a

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1}. \end{aligned}$$

On regroupe dans un tableau les premières valeurs de x_n, y_n et $x_n^2 - 2y_n^2$ pour n égal à 0, 1, 2 et 3.

étape (n)	x_n	y_n	$x_n^2 - 2y_n^2$
0	1	1	$x_0^2 - 2y_0^2 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$
1	3	2	$x_1^2 - 2y_1^2 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$
2	7	5	$x_2^2 - 2y_2^2 = 7^2 - 2 \cdot 5^2 = 49 - 50 = -1$
3	17	12	$x_3^2 - 2y_3^2 = 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 288 = 1$

On remarque que lorsque le numéro n de l'étape est impair,

$$x_n^2 - 2y_n^2 \quad \text{vaut} \quad +1$$

et que lorsque le numéro n de l'étape est pair,

$$x_n^2 - 2y_n^2 \quad \text{vaut} \quad -1.$$

En conséquence, la thèse de THÉON revient à :

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^{n+1} \quad \text{pour tout } n \text{ naturel.}$$

Nous démontrons ce résultat par récurrence. Si $n = 0$, on a $x_n = y_n = 1$ et

$$x_0^2 - 2y_0^2 = 1 - 2 = -1 = (-1)^{n+1}.$$

Supposons le résultat démontré pour l'indice $n-1$, c'est-à-dire admettons qu'il est vrai que

$$x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2 = (-1)^{(n-1)+1} = (-1)^n.$$

Nous allons vérifier que, sous cette hypothèse (de récurrence), on a

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

Nous calculons

$$x_n^2 = (x_{n-1} + 2y_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + 4y_{n-1}^2$$

et

$$y_n^2 = (x_{n-1} + y_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}^2.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} x_n^2 - 2y_n^2 &= x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + 4y_{n-1}^2 - 2\left(x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}^2\right) \\ &= x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + 4y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}y_{n-1} - 2y_{n-1}^2 \\ &= -x_{n-1}^2 + 2y_{n-1}^2 \\ &= (-1)\left(x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2\right) \\ &= (-1)(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Le résultat de Théon est bien démontré par récurrence.

3 Racine approchée d'un nombre positif quelconque

Pour un nombre rationnel, le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale revient à effectuer une division que l'on prolonge éventuellement au-delà de la partie entière. Si, à un moment, un reste nul apparaît, le nombre rationnel est un nombre décimal limité, sinon c'est un nombre décimal illimité périodique. Dans le cas des nombres irrationnels, on pourra au mieux donner une valeur approchée obtenue par encadrements successifs. Si A n'est pas un carré parfait, l'activité va montrer l'existence de deux nombres rationnels g et d tel que $g < \sqrt{A} < d$. Ces rationnels g et d pourront être connus avec un nombre de décimales aussi important que l'on souhaite, pour autant qu'on utilise des instruments permettant de traiter de grandes quantités de décimales.

De quoi s'agit-il ?

Traduire en langage moderne un texte de Héron d'Alexandrie décrivant une stratégie conduisant à une valeur approchée d'une racine carrée.

Enjeux

Découvrir une méthode simple permettant d'approcher la racine carrée d'un nombre.

Calculer une valeur approchée et des encadrements de la racine carrée d'un nombre positif au moyen d'un algorithme.

Utiliser des moyens modernes de calcul (calculatrice et tableur).

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Le texte de Héron d'Alexandrie (fiche 20 à la page 490).

Un tableur ou une calculatrice scientifique.

Prérequis

Pouvoir écrire une formule dans une « cellule » d'un tableur et la recopier dans les cellules voisines.

3.1 Analyse d'un texte de Héron d'Alexandrie

Comment s'y prendre ? L'élève est invité à traduire le texte de Héron d'Alexandrie en notation moderne. Il découvre dans quelle mesure la stratégie suggérée par Héron permet de trouver l'encadrement de la racine carrée d'un nombre.

Introduction au texte

Ce texte est extrait d'un manuscrit [93], en grec, daté du XIe siècle. Il reprend les connaissances mathématiques et physiques de Héron d'Alexandrie, qui vécut probablement au premier siècle de notre ère. Sa principale œuvre mathématique *Les Métriques* traite du calcul des aires de diverses figures planes ainsi que du volume de certains solides. Nous y trouvons de larges indications sur la tradition grecque du calcul.

Au livre I, Héron s'intéresse à une méthode générale permettant de trouver l'aire d'un triangle lorsque l'on ne connaît pas la mesure des hauteurs, mais bien les longueurs des côtés. Le passage se compose de trois parties distinctes.

- Un exemple numérique comme c'était souvent la tradition dans les textes de l'époque. On y donne la « recette » pour calculer l'aire d'un triangle de côtés de longueurs 7, 8 et 9. Cette aire vaut $\sqrt{720}$. Cette recette est reprise ci-dessous.
- Comme 720 n'est pas un carré parfait, Héron donne un algorithme pour rechercher une valeur approchée de la racine carrée de 720. C'est ce passage qui nous intéresse dans l'activité.
- Le texte grec se poursuit par la démonstration rigoureuse de ce qui apparaissait comme une recette dans la première partie. La démonstration de cette formule d'aire est expliquée en prolongement possible de cette activité, à la page 462.

Voici tout d'abord la « recette » – qui aujourd'hui porte le nom de *formule de Héron* – permettant de trouver l'aire d'un triangle à partir des longueurs des côtés. Les mots entre <> ont été ajoutés dans la traduction française.

Ainsi, par exemple, que les côtés du triangle soient les unités : 7, 8, 9. Additionne le 7 et 8 et 9 : cela devient 24, prends la moitié de cela et cela donne 12, soustrais-en 7 et il reste 5 ; à nouveau enlève 8 de 12 : il reste 4 et encore 9 <de 12> : il reste 3. Fais 12 fois 5 cela devient 60, et 60 fois 4 : cela devient 240 et 240 fois 3 cela devient 720 : prend le côté de 720 et ce sera la superficie du triangle.

En écriture plus moderne, si l'on recherche l'aire d'un triangle de côtés $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$, il faut en calculer le demi-périmètre $p = 12$. Puis on calcule les trois valeurs $p - a = 5$, $p - b = 4$ et $p - c = 3$. L'aire du triangle est alors donnée par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}.$$

Pour terminer son calcul, Héron doit à présent chercher le côté d'un carré dont l'aire vaut 720.

Le texte

Comme les 720 n'ont pas un côté rationnel, nous prendrons la racine avec la différence la plus petite de la manière suivante : comme le carré s'approchant de 720 est 729 et qu'il a 27 pour racine, divise les 720 par 27 : il vient 26 et deux tiers ; ajoute les 27 : il vient 53 deux tiers. De ceci, <prends> la moitié : il vient $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. La racine de 720 sera donc au plus près les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Cependant, les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ <multipliés> par eux-mêmes, cela produit $720\frac{1}{36}$: de sorte que la différence est la fraction $\frac{1}{36}$ de l'unité. Et si nous voulons que la différence devienne une fraction plus petite que $\frac{1}{36}$, nous mettons à la place des 729 les 720 et $\frac{1}{36}$ maintenant trouvés, et après avoir effectué les mêmes <opérations>, nous trouverons la différence devenue beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

La première étape

Comment s'y prendre ?

Traduire la première étape de l'algorithme entièrement décrite par Héron.

Pour extraire la racine carrée de 720, Héron prend pour valeur approchée 27 dont le carré 729 surpasse 720. Il calcule ensuite la quantité $\frac{720}{27}$. Il suggère de faire la moyenne arithmétique de ce nombre et de 27, et trouve $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ que nous écririons de nos jours $26\frac{5}{6}$. En élevant au carré cette valeur, il trouve $720\frac{1}{36}$. Il conclut en remarquant qu'il a ainsi une différence de $\frac{1}{36}$.

Comment prouver que cette approche est correcte ?

Appelons r la racine que nous cherchons. La valeur approchée 27 de la racine choisie par Héron est une valeur qui majore r puisque $27^2 = 729$ est plus grand que 720.

Puisque $r > 0$, nous avons bien les inégalités :

$$\begin{aligned} 729 &> 720 \\ 729 &> r^2 \\ 27 &> r. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à la valeur $\frac{720}{27}$. Nous pouvons dire que

$$\begin{aligned} r &< 27 \\ \frac{r}{720} &< \frac{27}{720} \\ \frac{720}{r} &> \frac{720}{27}. \end{aligned}$$

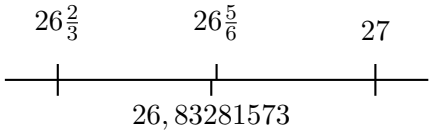
Par la définition même de r, nous avons évidemment $\dfrac{720}{r} = r$ et donc $r > \dfrac{720}{27}$.

Ainsi $\dfrac{720}{27} < r < 27$. Nous avons trouvé un premier encadrement de la racine : $\sqrt{720} \in \left[\dfrac{720}{27}, 27\right]$ ou sous une forme décimale limitée à 8 chiffres après la virgule : $\sqrt{720} \in [26,66666667; 27]$.

HÉRON dit que la moyenne m des valeurs 27 et $\frac{720}{27}$ qui forment cet encadrement est plus proche de $\sqrt{720}$ que ne l'est 27. Vérifier ceci numériquement.

On obtient successivement

$\frac{720}{27} = 26\frac{2}{3} = 26,66666667$
$\sqrt{720} \simeq 26,83281573$
$m = \frac{27+26\frac{2}{3}}{2} = 26\frac{5}{6} = 26,83333333.$



L'affirmation de HÉRON est indiscutablement vérifiée.

Nous venons de voir que dans ce cas particulier, la moyenne des valeurs qui forment l'encadrement de la racine cherchée est une meilleure valeur approchée que la borne droite de l'encadrement. Cette affirmation de HÉRON est-elle toujours vraie ?

Définissons g, la valeur approchée par défaut de la racine,
d, la valeur approchée par excès de la racine,
$m = \frac{g+d}{2}$, la moyenne de ces deux valeurs approchées,
r, la racine cherchée.

Vérifier que m est plus proche de r que ne l'était d peut se faire en prouvant que r est toujours entre g et m.

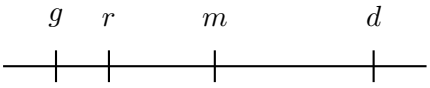


Fig. 15

HÉRON a construit $g = \frac{r^2}{d}$, nous en déduisons que $r^2 = gd$ ou encore que $r = \sqrt{gd}$. Ainsi dans la figure 15, r représente la *moyenne géométrique* et m est la *moyenne arithmétique* des deux valeurs approchées g et d.

Peut-on vérifier de manière générale que la moyenne géométrique de deux nombres distincts strictement positifs est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique ?

Une façon de le montrer est d'observer par exemple le carré de côté $g + d$ où nous avons inscrit quatre rectangles de côtés g et d. Un petit carré central est ainsi isolé.

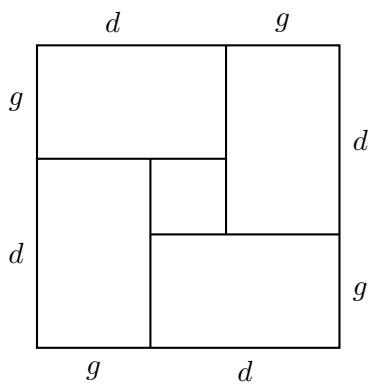


Fig. 16

On voit que l'aire du carré de côté $g+d$ est plus grande que l'aire des quatre rectangles. Donc on a successivement

$$\begin{aligned} (g+d)^2 &> 4gd \\ g+d &> 2\sqrt{gd} \\ \frac{g+d}{2} &> \sqrt{gd} \\ m &> r. \end{aligned}$$

L'affirmation de HÉRON suivant laquelle m est plus proche de r que ne l'était d se vérifie donc toujours.

La deuxième étape

Comment s'y prendre ?

Écrire la deuxième étape seulement suggérée dans le texte de HÉRON.

La dernière phrase du texte affirme qu'on obtient une valeur approchée meilleure encore en itérant le procédé pourvu que l'on remplace 729 par $720\frac{1}{36}$.

Refaire avec cette nouvelle valeur la procédure que HÉRON a décrite.

Comme $720\frac{1}{36}$ est le carré de $26\frac{5}{6}$, cette nouvelle valeur $26\frac{5}{6}$ joue le rôle d'une nouvelle « borne droite ». La nouvelle « borne gauche » vaut :

$$\frac{720}{26\frac{5}{6}} = \frac{720}{\frac{161}{6}} = \frac{720 \cdot 6}{161} = \frac{4\,320}{161}.$$

La moyenne des deux valeurs de ces nouvelles bornes est :

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6} + \frac{4\,320}{161}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{6} + \frac{4\,320}{161}\right) = \frac{25\,921 + 25\,920}{2 \cdot 966} = \frac{51\,841}{1\,932}.$$

Nous trouvons un deuxième encadrement de la racine :

$$\sqrt{720} \in \left[\frac{51\,841}{1\,932}; 26\frac{5}{6}\right]$$

ou sous une forme décimale limitée à 8 chiffres après la virgule :

$$\sqrt{720} \in [26,83281573; 26,83333333].$$

Nous pouvons remarquer que ce deuxième intervalle est inclus dans le premier :

$$[26,83281573; 26,83333333] \subset [26,66666667; 27].$$

Cet « emboîtement » des intervalles qui encadrent la valeur de $\sqrt{720}$ que l'on cherche suggère la stratégie proposée dans ce texte de HÉRON. Appliquer de nouveau la procédure qu'il a décrite conduira à un intervalle encadrant la racine. S'il était possible de montrer qu'à chaque nouvelle étape, l'encadrement calculé est « meilleur » que le précédent car il lui est toujours emboîté, nous serions certains d'obtenir des valeurs approchées de plus en plus précises de cette racine de 720.

Le premier intervalle d'encadrement de $\sqrt{720}$ montrait seulement que la partie entière de cette racine était 26. Le deuxième encadrement montre que la valeur approchée à deux décimales de la racine est 26,83.

Peut-on prouver qu'à chaque étape, le nouvel encadrement de la racine sera « meilleur » que le précédent au sens où il lui est forcément emboîté ? Est-ce toujours vrai ?

Éloignons-nous de l'exemple numérique de HÉRON pour vérifier ce résultat. Considérons un encadrement $[a, b]$ d'une racine $\sqrt{A}$ cherchée, où a et b sont des réels positifs obtenus par HÉRON lors d'une étape de son approximation. Nous savons que $A = ab$. Prenons une valeur d comprise dans l'intervalle $]a, b[$, avec $d > \sqrt{A}$ et construisons c par le fait que $cd = A$. Vérifions que c appartiendra forcément à l'intervalle $]a, b[$ avec $c < \sqrt{A}$ et qu'ainsi l'intervalle $[c, d]$ est emboîté dans l'intervalle $[a, b]$.

Nous posons $d = b - y$ avec $0 < y < b - a$ et $c = a + x$.

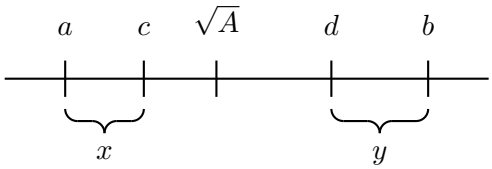


Fig. 17 : Imbrication des encadrements.

Pour répondre à la question précédente, il suffit de vérifier que $x > 0$. On obtient

$$ab = cd = (a + x)(b - y) = ab - ay + bx - xy,$$

ce qui implique que $ay - bx + xy = 0$. On en tire

$$x = \frac{ay}{b - y} = \frac{ay}{d}.$$

Puisque a, d et y sont strictement positifs, x est bien strictement positif.

En conséquence, l'application de l'algorithme de HÉRON conduit bien à des intervalles « emboîtés ». Non seulement, ce fait est vérifié, mais de plus, l'emboîtement a lieu quel que soit l'intervalle d'encadrement choisi au départ.

3.2 L'algorithme de Héron

Comment s'y prendre ?

Dégager l'algorithme suggéré par le texte de HÉRON.

L'algorithme de HÉRON pour la recherche de la racine carrée positive du réel strictement positif A est l'un des premiers algorithmes dans l'histoire des mathématiques. Il se présente comme une « recette » de calcul d'une liste de valeurs $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de plus en plus proches de la racine cherchée. Sa définition en deux temps est à nouveau une *relation de récurrence*.

On y définit d'abord comment trouver a_1, la première valeur approchée de la racine ; c'est l'*initialisation* de la récurrence.

Ensuite, on explique comment la connaissance d'une valeur approchée quelconque a_i (celle qui dans la liste porte le numéro i) permet de trouver la suivante a_{i+1} (celle qui dans la liste porte le numéro $i + 1$) ; c'est le *pas récurrent*.

Ainsi, l'application répétitive de cette seconde définition construit successivement $a_2, a_3, \ldots$

Voici cet algorithme de HÉRON tel qu'il le décrit dans son texte.

L'initialisation de la récurrence pour chercher $\sqrt{720}$ s'est faite à partir d'une valeur $a_1 = 27$ car, nous a-t-il dit, 27 est tel que son carré 729 est le *premier* carré qui surpasse 720.

La valeur initiale de la récurrence (a_1) est le plus petit entier naturel dont le carré surpasse le réel A. On sait que $\sqrt{A} \in \left[\frac{A}{a_1}, a_1\right]$.

La deuxième valeur (a_2) est calculée par une première application de la relation de récurrence : $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$. On sait que $\sqrt{A} \in \left[\frac{A}{a_2}, a_2\right]$.

On poursuit la récurrence, et d'une manière générale

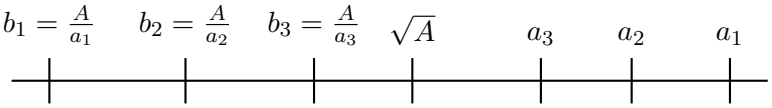
$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{A}{a_i}\right)$$

pour i un naturel quelconque plus grand que 1. On sait que $\sqrt{A} \in \left[\frac{A}{a_{i+1}}, a_{i+1}\right]$.

Les valeurs successives $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les *valeurs approchées par excès de* $\sqrt{A}$.

Les valeurs successives $b_1 = \frac{A}{a_1}, b_2 = \frac{A}{a_2}, b_3 = \frac{A}{a_3}, \ldots$ sont les *valeurs approchées par défaut de* $\sqrt{A}$.

Les intervalles $[b_1, a_1] \supset [b_2, a_2] \supset [b_3, a_3] \supset \cdots$ forment des *intervalles emboîtés encadrant* $\sqrt{A}$.



L'imbrication des intervalles d'encadrements de la racine $\sqrt{A}$ – que nous venons de démontrer – nous dit que *quel que soit le choix d'un premier intervalle* $[a, b]$*, l'algorithme de* HÉRON *conduit à un « meilleur » intervalle* $[c, d]$. Ceci reste vrai pour autant que b soit supérieur à $\sqrt{A}$.

Pour rendre un peu plus automatique la programmation de cet algorithme, il faudrait s'affranchir de l'obligation de choisir a_1 comme l'a fait HÉRON. Il n'y a pas vraiment de moyen simple pour trouver le plus petit entier naturel dont le carré surpasse un réel donné. Une suggestion qui peut venir à l'esprit est d'initialiser la récurrence avec $a_1 = \dfrac{A}{2}$.

> Contrôler si une telle valeur de a_1 vérifie la condition demandée par HÉRON, à savoir que $a_1 > \sqrt{A}$.

Comme A est positif, nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &> \sqrt{A} \\ A^2 &> 4A \\ A(A-4) &> 0. \end{aligned}$$

Puisque $A > 0$, cette dernière inéquation n'est vérifiée que si $A > 4$. Lorsque $0 < A < 4$, $\frac{A}{2} < \sqrt{A}$ et le choix de HÉRON comme condition de départ n'est pas rencontré.

Que faire lorsque A est compris entre zéro et quatre ? Doit-on changer d'initialisation ? L'algorithme reste-t-il valable ?

Nous pouvons vérifier que l'algorithme peut fonctionner avec cette valeur $a_1 = \frac{A}{2}$. Plus généralement, la question est de voir comment se comporte l'algorithme de HÉRON lorsque l'initialisation de la récurrence se fait avec une valeur inférieure à la racine carrée que nous cherchons.

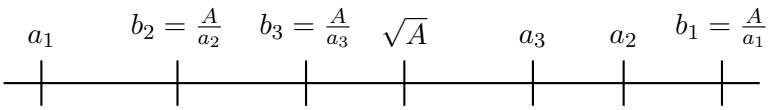
Si $g = a_1 < \sqrt{A}$, alors $d = b_1 = \frac{A}{a_1}$ et nous avons vu page 453 que la racine r cherchée se trouvait toujours entre la moyenne $m = \frac{a_1+b_1}{2}$ et la valeur de gauche g de l'intervalle. Cela signifie que l'on a successivement :

$$a_1 < \sqrt{A}, \quad b_1 = \frac{A}{a_1}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad \sqrt{A} \in [a_1, b_1]$$

$$a_2 > \sqrt{A}, \quad b_2 = \frac{A}{a_2}, \quad a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad \sqrt{A} \in [b_2, a_2]$$

$$a_3 > \sqrt{A}, \quad b_3 = \frac{A}{a_3}, \quad a_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}, \quad \sqrt{A} \in [b_3, a_3]$$

et ainsi de suite.



En conclusion, même si on initialise le processus avec une valeur a_1 inférieure à la racine cherchée, l'algorithme fournit les valeurs a_2, a_3 et toutes les suivantes par excès. On retrouve une suite d'intervalles emboîtés encadrant la racine. En pratique, $\frac{A}{2}$ est donc un bon point de départ quelle que soit la valeur de A.

Vérifier ce fait sur un exemple : $\sqrt{2}$.

Nous avons $A = 2$ et donc $a_1 = \frac{2}{2} = 1$, $a_1 < \sqrt{A}$

Les calculs sont effectués avec une calculatrice permettant l'affichage de 10 chiffres significatifs.

$a_1 = 1$	$b_1 = \frac{2}{1} = 2$	on a $\sqrt{2} \in [a_1, b_1]$
$a_2 = \frac{1+2}{2} = 1,5$	$b_2 = \frac{2}{1,5} = 1,333\,333\,333$	on a $\sqrt{2} \in [b_2, a_2]$
$a_3 = \frac{1,5+1,333\,333\,333}{2} = 1,416\,666\,667$	$b_3 = \frac{2}{1,416\,666\,667} = 1,411\,764\,706$	on a $\sqrt{2} \in [b_3, a_3]$
$a_4 = \frac{1,416\,666\,667+1,411\,764\,706}{2} = 1,414\,215\,686$	$b_4 = \frac{2}{1,414\,215\,686} = 1,414\,211\,438$	on a $\sqrt{2} \in [b_4, a_4]$
$a_5 = \frac{1,414\,215\,686+1,414\,211\,438}{2} = 1,414\,213\,562$	$b_5 = \frac{2}{1,414\,213\,562} = 1,414\,213\,562$	

Les deux valeurs affichées de b_5 et de a_5 sont égales, néanmoins l'emploi d'un matériel plus performant aurait ici également montré simplement que $\sqrt{2} \in [b_5, a_5]$. Nous remarquons que le premier intervalle d'encadrement de $\sqrt{2}$ est de type $[a_1, b_1]$. À partir du deuxième intervalle, on retrouve l'ordre des valeurs approchées prévues par le texte de HÉRON : $b_2 < \sqrt{2} < a_2, \ldots$

Le calcul, ici effectué en gardant neuf décimales après la virgule lors des calculs intermédiaires, montre que

$$|a_5 - b_5| < 10^{-9}$$

et donc que la valeur $1,414\,213\,562$ est une valeur approchée à neuf décimales de $\sqrt{2}$, obtenue après seulement cinq itérations.

Liaison avec l'algorithme de Théon

Il peut être intéressant de refaire l'exemple de l'extraction de la racine de 2 par la méthode de Héron en gardant à chaque étape des nombres fractionnaires plutôt que des décimaux. On obtient ainsi

$$\begin{array}{l|l}
a_1 = 1 & b_1 = \dfrac{2}{1} = 2 \\[2ex]
a_2 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} & b_2 = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} \\[2ex]
a_3 = \dfrac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{\frac{17}{6}}{2} = \dfrac{17}{12} & b_3 = \dfrac{2}{\frac{17}{12}} = \dfrac{24}{17} \\[2ex]
a_4 = \dfrac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \dfrac{\frac{577}{204}}{2} = \dfrac{577}{408} & b_4 = \dfrac{2}{\frac{577}{408}} = \dfrac{816}{577} \\[2ex]
a_5 = \dfrac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2} = \dfrac{\frac{332\,929+332\,928}{235\,416}}{2} = \dfrac{665\,857}{470\,832} & b_5 = \dfrac{2}{\frac{665\,857}{470\,832}} = \dfrac{941\,664}{665\,857}
\end{array}$$

En comparant avec le tableau de la page 445, nous remarquons que les valeurs approchées successives calculées par l'algorithme de Héron se retrouvent parmi les valeurs approchées calculées par l'algorithme de Théon. Par exemple, la troisième valeur chez Héron est égale à la troisième valeur chez Théon alors que la quatrième valeur chez Héron est égale à la septième valeur chez Théon. L'algorithme de Héron retrouve donc certaines des valeurs obtenues à l'activité 2, mais avec une meilleure « performance ». Le tableau ci-dessous suggère qu'à une étape i de l'algorithme de Héron correspond le résultat de l'étape $2^{i-1} - 1$ de l'algorithme de Théon.

Valeurs fractionnaires approchées de $\sqrt{2}$	Numéro de l'étape avec	
	l'algorithme de Héron	l'algorithme de Théon
1	1	0
$\frac{3}{2}$	2	1
$\frac{17}{12}$	3	3
$\frac{577}{408}$	4	7
$\frac{665\,857}{470\,832}$	5	15

Conclusion

L'algorithme peut être poursuivi tant que les possibilités de l'instrument de calcul ne le trahissent pas. Dans le cadre de l'utilisation de programmes automatisés, on pourrait arrêter le processus lorsque :

$|a_{i+1} - a_i|$ est inférieure à un nombre donné,

$|a_i^2 - A|$ est inférieure à un nombre donné,

$|a_i - \frac{A}{a_i}|$ est inférieure à un nombre donné.

3.3 Programmation de l'algorithme de Héron

Comment s'y prendre ?

Calculer quelques encadrements de la racine carrée de 720, au moyen de l'algorithme de Héron, sur une calculatrice, puis avec un tableur.

L'algorithme avec une calculatrice élémentaire

Nous avons vu que le caractère itératif de l'algorithme de Héron permet d'obtenir des encadrements successifs, jusqu'à saturation des possibilités d'affichage ou jusqu'à ce que soit atteinte une condition d'approximation fixée à l'avance (et compatible avec les possibilités techniques de la calculette). Le *programme* ci-dessous recherche les encadrements successifs de $\sqrt{A}$. Il peut être adapté à n'importe quelle machine qui possède une mémoire adressable directement et non par addition (touche de type `STO` et non pas `M+`). La grande flèche de droite à gauche symbolise l'idée de *boucle* (l'itération) du programme. En (G) apparaît une nouvelle borne gauche de l'encadrement de la racine $(b_1, b_2, b_3, \cdots)$; en (D) apparaît la borne droite de l'étape suivante $(a_2, a_3, a_4, \cdots)$.

La valeur a_1 initiale peut être choisie arbitrairement entre zéro et A, mais nous avons vu que $\frac{A}{2}$ est toujours un bon candidat.

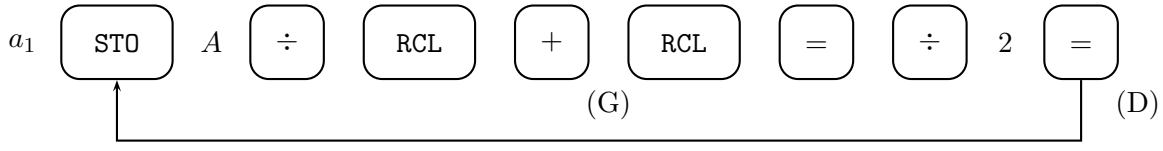


Fig. 18 : Algorithme de Héron.

Avant l'exécution de la boucle du programme, nous devons introduire la valeur initiale choisie pour a_1 (360) dans la mémoire A.

Les valeurs suivantes ((G) et (D)) vont apparaître lors des exécutions successives de la boucle du programme :

2,000000000 181,0000000	3,977900552 92,48895028	7,784713718 50,13683200	14,36039993 32,24876597
22,32643571 27,28760084	26,38561024 26,83660554	26,82902646 26,83281600	26,83281546 26,83281573
26,83281573 26,83281573			

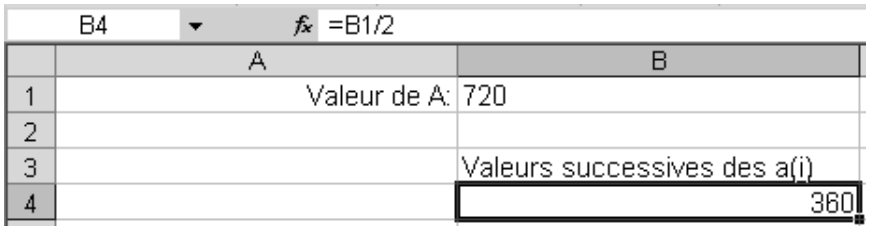
On peut remarquer que le nombre d'étapes nécessaire pour obtenir $\sqrt{720}$ avec une précision de 8 décimales semble plus grand que dans le cas exposé dans le texte de Héron. La raison en est le point de départ (a_1) relativement éloigné de la racine cherchée. Nous pouvons modifier légèrement le programme pour nous placer dans la situation du texte original en introduisant la valeur approchée par excès de la racine (27) dans la mémoire A avant l'exécution de la boucle du programme. Cette fois, nous trouvons les valeurs suivantes lors des exécutions successives de la boucle du programme :

26,66666667 26,83333333	26,83229814 26,83281573	26,83281573 26,83281573

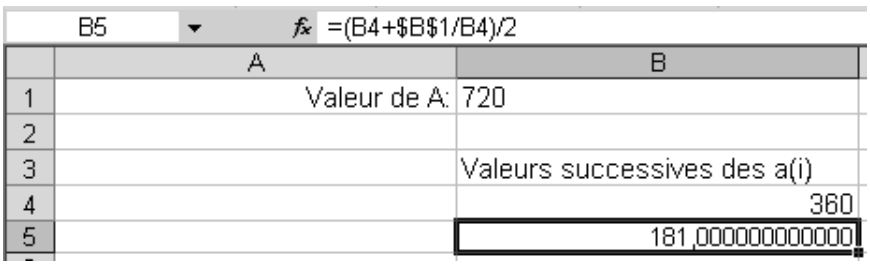
Il suffit cette fois de trois étapes pour atteindre la précision maximale de la calculatrice utilisée.

L'algorithme avec un tableur

La cellule `B1` du tableur contient la valeur du nombre A dont on recherche la racine carrée (ici : 720). La cellule `B4` contient la première valeur approchée $a_1 = \frac{A}{2}$. Dans le cas de la recherche de $\sqrt{720}$, cette case contiendra donc le nombre 360 qui initialise la récurrence.



Introduisons dans la cellule `B5` du tableur, la formule $a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{A}{a_i}\right)$ qui traduit la récurrence de l'algorithme de Héron. La validation de la formule fera apparaître le nombre 181 dans cette cellule.



La copie vers le bas du contenu de la cellule `B5` donnera les valeurs approchées successives de $\sqrt{720}$. Cette première version simple ne nous donne que les valeurs approchées *par excès* de la racine cherchée.

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3		Valeurs successives des a(i)
4		360
5		181,000000000000
6		92,488950276243
7		50,136831997236
8		32,248765966080
9		27,287600836978
10		26,836605537221
11		26,832815997592
12		26,832815729998
13		26,832815729998
14		26,832815729998

Comme dans l'exemple avec la calculatrice, il est possible avec un tableur de faire apparaître les encadrements successifs de la racine cherchée. Il nous faut dans ce cas y définir deux colonnes : la colonne `A` contenant les bornes de gauche b_i de l'intervalle et la colonne `B` contenant les bornes de droite a_i de l'intervalle. Les cellules `B1` et `B4` sont définies comme précédemment.

Maintenant, nous pouvons définir la colonne `A`. La cellule `A4` doit contenir la formule qui traduit dans le tableur la relation $b_i = \frac{A}{a_i}$ qui lie la borne gauche b_i à la borne droite a_i.

A4 f_x =$B$1/B4

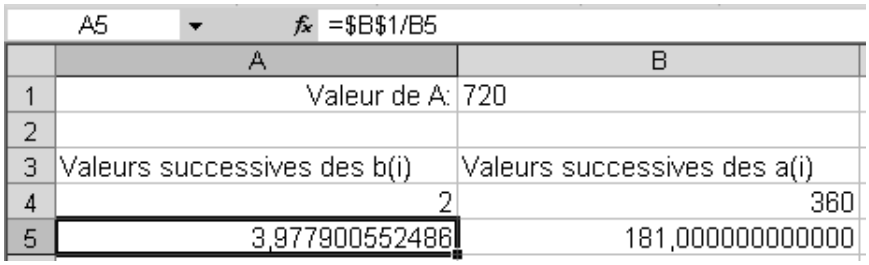
	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360

La cellule `B5` contient la formule $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ qui traduit dans ce cas la récurrence de l'algorithme de Héron.

B5 f_x =(B4+A4)/2

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360
5		181,000000000000

Nous devons recopier en `A5` le contenu de la cellule `A4`.



A5	=$B$1/B5	
	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360
5	3,977900552486	181,000000000000

La copie vers le bas des contenus des cellules `A5` et `B5` donnera les valeurs approchées successives encadrant la racine cherchée.

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360
5	3,977900552486	181,000000000000
6	7,784713718228	92,488950276243
7	14,360699934924	50,136831997236
8	22,326435707875	32,248765966080
9	26,385610237465	27,287600836978
10	26,829026457962	26,836605537221
11	26,832815462403	26,832815997592
12	26,832815729998	26,832815729998
13	26,832815729998	26,832815729998
14	26,832815729998	26,832815729998

Prolongement possible

L'algorithme de Héron pour la recherche d'une racine carrée est apparu à propos d'un problème d'aire de triangle. Cette aire s'exprimait par la racine carrée d'un nombre qui n'était pas un carré parfait ; d'où la recherche d'une valeur approchée de la racine carrée par la méthode qui vient d'être analysée.

La troisième partie du texte du *Codex* [93] reprend la démonstration que donne Héron de la formule de calcul d'aire qu'il vient d'utiliser dans le cas particulier du triangle dont les côtés sont de longueur 7, 8 et 9.

Cette formule est, d'une certaine manière, plus « naturelle » que celle, plus classique, utilisant la mesure de la base (B) et celle de la hauteur (H) d'un triangle. Cette dernière doit peut-être son succès à sa facilité à être (dé-)montrée ; l'aire d'un triangle de base B et de hauteur H apparaissant de manière assez naturelle comme la moitié de l'aire d'un parallélogramme de même base B et de même hauteur H.

Pensons à un géomètre prié de trouver l'aire d'un terrain triangulaire qui se trouve être une plantation extrêmement dense et désordonnée d'épicéas. Pour « mesurer » la longueur de la hauteur du triangle, il doit « partir » d'un sommet et espérer — en parcourant son terrain en ligne droite — rejoindre perpendiculairement le côté opposé au sommet. Il peut aussi choisir un point au hasard sur l'un des côtés du triangle, s'enfoncer dans le bois perpendiculairement à ce côté et rêver d'atteindre le sommet opposé ! On l'aura compris, il lui sera beaucoup plus simple d'arpenter les trois côtés du terrain et d'appliquer la formule de Héron.

La formule de l'aire d'un triangle

Soit un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c. Si l'on note $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre, l'aire du triangle est alors donnée par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

De quoi a-t-on besoin ?

La démonstration de Héron (fiche 21 page 491) est assez technique et utilise un certain nombre de résultats constituant des prérequis.

Prérequis

Tout cercle inscrit dans un triangle est tangent aux trois côtés et a pour centre le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle.

Les tangentes menées d'un point extérieur à un cercle, limitées à leur point de contact, ont même longueur.

La mesure de l'aire A d'un triangle de base b et de hauteur h vaut $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un côté de l'angle droit de même longueur, alors ils sont isométriques.

Tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont le diamètre est son hypoténuse.

Si deux triangles ont des angles homologues de même amplitude, alors ils sont semblables ; si deux triangles sont semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

Dans toute proportion, on a :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

La mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre les mesures des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Le texte de la démonstration

En préambule à la démonstration, Héron rappelle l'originalité de la formule : il souhaite trouver l'aire d'un triangle dont sont connues les longueurs des trois côtés sans utiliser la mesure d'une des hauteurs.

Et la démonstration géométrique de cette <méthode> est la suivante : les côtés d'un triangle étant donnés, trouver la superficie. Il est en effet possible qu'après avoir conduit une hauteur et sa grandeur étant déduite, l'on trouve la superficie du triangle, mais ce qu'il faut <ici>, c'est que la superficie soit déterminée sans la hauteur.

Vient ensuite la démonstration générale proposée par Héron. Nous l'avons présentée ici en deux colonnes. La colonne de gauche reprend notre traduction du grec en français non littéraire. Les

mots entre < > ont été ajoutés pour clarifier le sens en français. La colonne de droite explicite le texte dans une formulation plus contemporaine.

Que soit donné le triangle ABΓ et que soient données <les grandeurs> AB, BΓ <et> ΓA : trouver la superficie.

Quelle est l'aire d'un triangle ABΓ dont on donne les longueurs des côtés AB, BΓ et ΓA ?

Que soit inscrit dans le triangle le cercle ΔEZ, dont le centre sera H, et que soient menés AH, BH, ΓH, ΔH, EH, ZH.

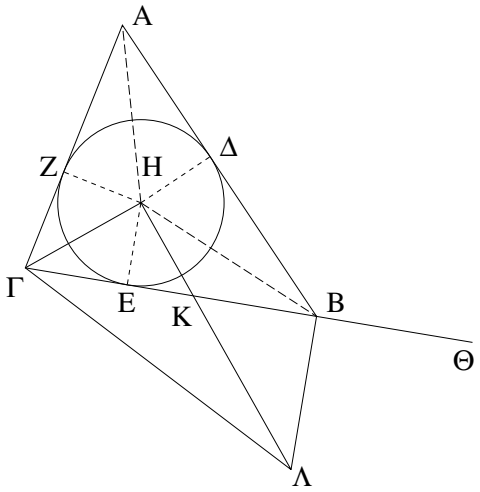


Fig. 19

Traçons le cercle inscrit au triangle ABΓ. Son centre est en H, intersection des bissectrices intérieures du triangle. Traçons :
– ΔH perpendiculaire à AB,
– EH perpendiculaire à BΓ,
– ZH perpendiculaire à ΓA.
Joignons H aux trois sommets du triangle : AH, BH, ΓH.

D'une part, <le rectangle> sous BΓ <et> EH est double du triangle BHΓ, d'autre part, <le rectangle> sous ΓA <et> ZH <est double> du triangle AΓH, et <le rectangle> sous AB <et> DH <est double> du triangle ABH.

BΓ est la base du triangle BHΓ et EH est la hauteur de ce même triangle. L'aire du triangle BHΓ est donc $\frac{\text{BΓ·EH}}{2}$. Le produit BΓ·EH vaut le double de l'aire du triangle BHΓ.
De même, ΓA·ZH vaut le double de l'aire du triangle AΓH et AB·ΔH vaut le double de l'aire du triangle ABH.

<Le rectangle> sous le périmètre du triangle ABΓ et la <grandeur> EH, c'est-à-dire le rayon du cercle ΔEZ, est double du triangle ABΓ.

La somme des aires des trois triangles BHΓ, AΓH et ABH est équivalente à l'aire du triangle ABΓ. Et puisque ΔH, EH et ZH sont trois rayons du cercle inscrit, on peut écrire :
2 aires de ABΓ = BΓ·EH + ΓA·ZH + AB·ΔH,
2 aires de ABΓ=(BΓ + ΓA + AB)·EH (1)
où BΓ + ΓA + AB est le périmètre du triangle ABΓ.

Que soit prolongée ΓB et que soit placé <sur ce prolongement> BΘ égale à AΔ. ΓBΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ parce que d'une part AΔ est égal à AZ, d'autre part ΔB <est égal> à BE et ZΓ <est égale> à ΓE.

On positionne sur le prolongement de ΓB le point Θ tel que BΘ=AΔ. Les triangles AHZ et AHΔ sont isométriques car ils sont rectangles, ont le côté AH commun et ZH = HΔ. AΔ est donc égal à AZ. Pour une même raison, ΔB = EB et ZΓ = ΓE.
En vertu de ces égalités, le demi-périmètre du triangle ABΓ = ΓE + EB + AΔ = ΓE + EB + BΘ = ΓΘ. (2)

Donc, <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est égal au triangle ABΓ.

En associant les égalités (1) et (2), on trouve que l'aire du triangle ABΓ = ΓΘ·EH.

Mais <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est la racine <du carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH ; <le carré> du triangle ABΓ sera donc égal au carré de ΘΓ <multiplié> par <le carré> de EH.

Puisque l'aire du triangle ABΓ = ΓΘ·EH, elle peut s'exprimer par $\sqrt{\Gamma\Theta^2 \cdot EH^2}$ (3).
Une autre manière de le dire est que le carré de l'aire vaut $\Gamma\Theta^2 \cdot EH^2$.

Que soit menée d'une part HΛ perpendiculairement à ΓH, d'autre part BΛ <perpendiculairement> à ΓB et que soit mené ΓΛ.

On construit HΛ perpendiculairement à ΓH et BΛ perpendiculairement à ΓB. On trace ΓΛ pour terminer le triangle ΓBΛ.

Si maintenant chacun <des angles> sous ΓHΛ <et> ΓBΛ est droit, alors le quadrilatère ΓHBΛ est <inscrit> dans un cercle ; donc, <les angles> sous ΓHB <et> ΓΛB sont égaux <ensemble> à deux droits.

Le triangle ΓHΛ est rectangle en H : il est donc inscrit dans le cercle de diamètre ΓΛ. Il en est de même pour le triangle ΓBΛ, rectangle en B qui est lui aussi inscrit dans le cercle de diamètre ΓΛ.
Les quatre points Γ, Λ, B et H sont donc cocycliques et la somme des angles opposés de ce quadrilatère convexe ΓHBΛ inscrit dans un cercle vaut 2 angles droits :
$\widehat{\Gamma HB} + \widehat{\Gamma\Lambda B} = 180°$. (4)

Et, d'autre part, <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> à deux droits parce que les angles autour de H sont coupés en deux par AH, BH <et> ΓH, et <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> aux angles sous AHΓ <et> ΔHB et, ensemble, ils sont égaux à quatre droits ; donc, <l'angle> sous AHΔ est égal à celui sous ΓΛB.

Considérons six des angles en $\widehat{H}$:
- $\widehat{\Gamma HE} = \widehat{\Gamma HZ}$ puisque les triangles EHΓ et ΓHZ sont isométriques,
- $\widehat{EHB} = \widehat{BH\Delta}$ puisque les triangles EHB et BHΔ sont isométriques,
- $\widehat{AH\Delta} = \widehat{ZHA}$ puisque les triangles AHΔ et AHZ sont isométriques.

$\widehat{\Gamma HE} + \widehat{EHB} + \widehat{AH\Delta} = \widehat{\Gamma HZ} + \widehat{BH\Delta} + \widehat{ZHA}$
$\widehat{\Gamma HB} + \widehat{HA\Delta} = \widehat{AH\Gamma} + \widehat{BH\Delta}$.
Puisque la somme de ces six angles vaut 360°, nous avons : $\widehat{\Gamma HB} + \widehat{HA\Delta} = 180°$. (5)
De (4) et (5), on tire que
$\widehat{\Gamma\Lambda B} = \widehat{\Delta HA}$. (6)

Et <l'angle> droit sous AΔH est égal à <l'angle> droit sous ΓBΛ ; le triangle AΔH est donc semblable au triangle ΓBΛ.

L'égalité (6) implique que les deux triangles rectangles ΓBΛ et AΔH sont semblables.

Comme BΓ <est> à BΛ, AΔ <est> à ΔH, c'est-à-dire BΘ <est> à EH et, alternativement, comme ΓB <est> à BΘ, BΛ <est> à EH,

Les côtés homologues de ces deux triangles sont proportionnels : $\frac{B\Gamma}{\Delta A} = \frac{B\Lambda}{\Delta H}$.
Le calcul des proportions permet d'échanger les termes moyens : $\frac{B\Gamma}{B\Lambda} = \frac{\Delta A}{\Delta H}$.
Et puisque $\Delta A = B\Theta$ par construction et que ΔH et EH sont deux rayons du cercle inscrit, on obtient : $\frac{B\Gamma}{B\Lambda} = \frac{B\Theta}{EH}$ et en échangeant à nouveaux les termes moyens, on obtient : $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{B\Lambda}{EH}$. (7)

c'est-à-dire BK <est> à KE, parce que BΛ est parallèle à EH,

Les deux triangles BΛK et EHK ont leurs côtés homologues parallèles : ils sont donc semblables et on a : $\frac{B\Lambda}{EH} = \frac{BK}{EK}$. (8)
De (7) et (8), on déduit : $\frac{B\Gamma}{B\Theta} = \frac{BK}{EK}$.

et en rassemblant, comme ΓΘ <est> à BΘ, de même BE <est> à EK ;

Une propriété du calcul des proportions conduit à : $\frac{B\Gamma+B\Theta}{B\Theta} = \frac{BK+KE}{EK}$ et donc à $\frac{\Gamma\Theta}{B\Theta} = \frac{BE}{EK}$.

de sorte que, comme <le carré> de ΓΘ <est> au <rectangle> sous ΓΘ <et> ΘB, ainsi le <rectangle> sous BE <et> EΓ <est> au <rectangle> sous ΓE <et> EK,

et en multipliant à gauche par $\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Theta}$ et à droite par $\frac{\Gamma E}{\Gamma E}$, on obtient : $\frac{\Gamma\Theta\cdot\Gamma\Theta}{B\Theta\cdot\Gamma\Theta} = \frac{BE\cdot\Gamma E}{EK\cdot\Gamma E}$.

c'est-à-dire au <carré> de EH ; <car> dans un <triangle> rectangle, la hauteur EH est abaissée de <l'angle> droit sur la base ;

Dans le triangle ΓKH rectangle en H par construction, HE est la hauteur issue du sommet de l'angle droit. Son pied partage l'hypoténuse en deux segments ΓE et EK et on sait que $EK\cdot\Gamma E = EH^2$. Donc : $\frac{\Gamma\Theta^2}{B\Theta\cdot\Gamma\Theta} = \frac{BE\cdot\Gamma E}{EH^2}$.

de sorte que <le carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH, produit dont la racine était la superficie du triangle ABΓ, sera égal <au rectangle> sous ΓΘ <et> ΘB <multiplié> par <le rectangle> sous ΓE <et> EB.

L'égalité du produit des moyens et des extrèmes dans cette dernière égalité donne :
$\Gamma\Theta^2 \cdot EH^2 = \Gamma\Theta \cdot \Theta B \cdot BE \cdot \Gamma E$. (9)
En comparant (3) et (9), on a bien montré que l'aire du triangle ABΓ vaut $\sqrt{\Gamma\Theta \cdot \Theta B \cdot BE \cdot \Gamma E}$.

Et chacune des <grandeurs> ΓΘ, ΘB, BE, ΓE est donnée ; en effet, d'une part ΓΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ,

Nous posons $AB = c$, $B\Gamma = a$, $\Gamma A = b$ et nous notons $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre. En (2) ci-dessus, nous avions déjà remarqué que ΓΘ vaut le demi-périmètre p.

d'autre part BΘ <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse ΓB,

$B\Theta = \Gamma\Theta - \Gamma B = p - a$.

et BE <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse AΓ, et la droite EΓ est l'excédent par lequel la moitié du périmètre dépasse AB, puisque, d'une part, EΓ est égale à ΓZ, d'autre part BΘ <est égale> à AZ puisqu'elle est aussi égale à AΔ.

$\mathrm{BE} = \Gamma\Theta - \Gamma\mathrm{E} - \mathrm{B}\Theta = p - \Gamma\mathrm{Z} - \mathrm{ZA} = p - \Gamma\mathrm{A} = p - b.$
$\Gamma\mathrm{E} = \Gamma\Theta - \mathrm{EB} - \mathrm{B}\Theta = p - \Delta\mathrm{B} - \mathrm{A}\Delta = p - \mathrm{AB} = p - c.$

La superficie du triangle ABΓ est donc ainsi donnée.

L'aire du triangle de côté de longueur a, b et c est

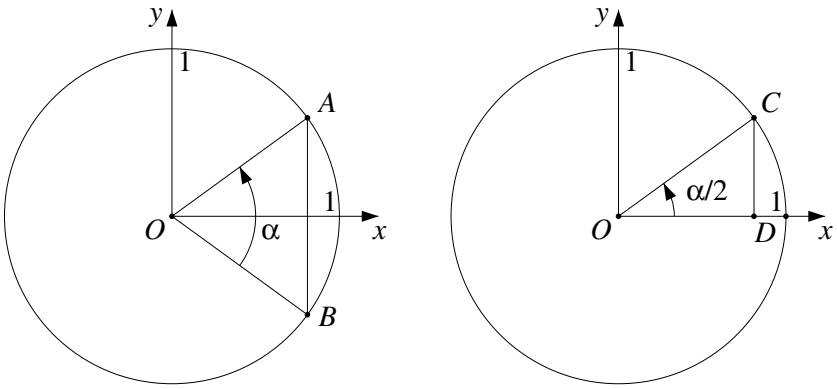
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Annexe III

Fiches à photocopier

Définition de la corde et du sinus d'un angle



Dans le repère orthonormé Oxy, on considère le cercle de centre O et de rayon 1. Les angles sont orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

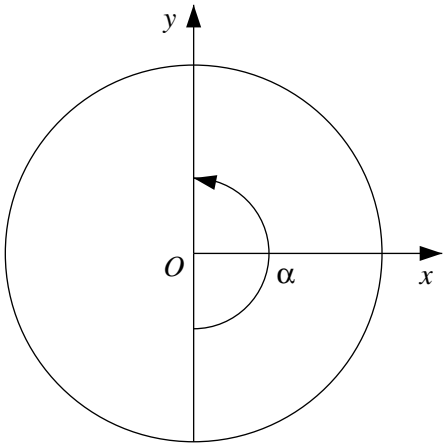
Observons d'abord le cercle de gauche de la figure et désignons par α l'angle $\widehat{BOA}$. Les anciens appelaient « corde de l'angle α » la mesure du segment $[AB]$. On note $\operatorname{crd}\alpha = |AB|$.

À cette notion de corde, les Arabes ont préféré celle de sinus, qui leur est venue de l'Inde et qui est fort voisine. Elle est illustrée sur le cercle de droite de la même figure. Les angles ont tous pour demi-droite origine l'axe des x du repère. On appelle « sinus de $\frac{\alpha}{2}$ » la mesure du segment $[CD]$. On note $\sin\frac{\alpha}{2} = |CD|$. On peut encore dire que, puisque tous les angles ont pour demi-droite origine Ox, le sinus est aussi l'ordonnée du point C dans le repère orthonormé Oxy.

Quelle relation y a t-il entre la corde de l'angle α et le sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ de la figure ci-dessus ?

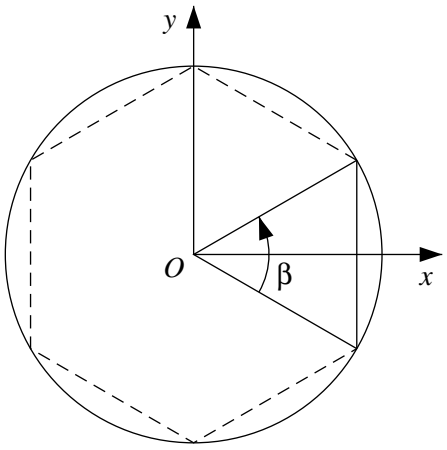
Cordes et sinus d'angles particuliers

Les deux cercles représentés ci-dessous sont de rayon 1.



1. Que vaut l'angle α ? $\alpha = \ldots\ldots$
2. Que vaut $\operatorname{crd}\alpha$? $\operatorname{crd}\alpha = \ldots\ldots$
3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier.

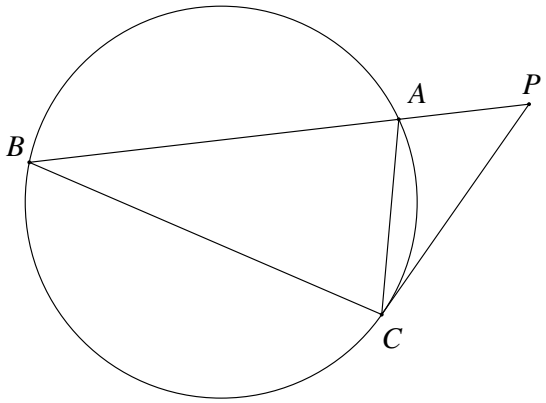
$\sin\ldots\ldots = \ldots\ldots$



1. Que vaut l'angle β ? $\beta = \ldots\ldots$
2. Que vaut $\operatorname{crd}\beta$? $\operatorname{crd}\beta = \ldots\ldots$
3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier.

$\sin\ldots\ldots = \ldots\ldots$

Puissance d'un point par rapport à un cercle
Cas particulier



Le point P est quelconque à l'extérieur du cercle.

La droite PAB est une sécante quelconque au cercle.

La droite PC est tangente au cercle.

Comparer les angles des triangles PCA et PBC.

Comment sont les triangles PCA et PBC ? En déduire une relation entre $\|PA\|$, $\|PB\|$ et $\|PC\|$.

Partage d'un segment en extrême et moyenne raison

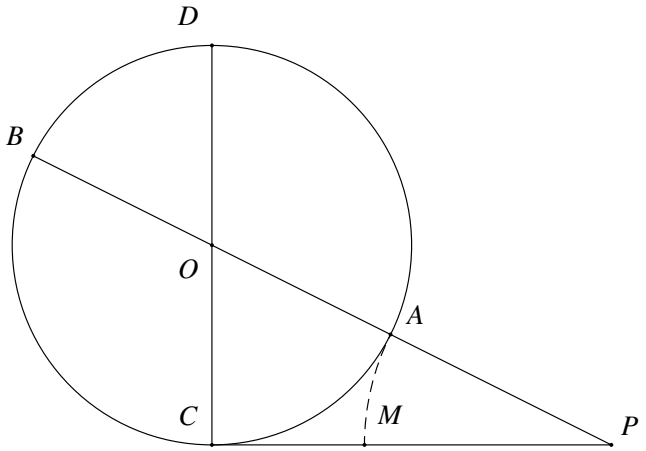
On considère un segment $[CP]$.

Par le point C, on trace la droite CD perpendiculaire à la droite CP et on place le point D de telle manière que $|CD| = |CP|$.On nomme O le milieu de $[CD]$.

On trace le cercle de centre O et de diamètre $[CD]$.

On trace la droite PO et on note A et B ses points d'intersection avec le cercle.

On construit le point M sur le segment $[CP]$, tel que $|PM| = |PA|$.



Sachant que $|PB| = |PA| + |AB|$ et que $|CD| = |AB| = |CP|$, établir que

$$|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|.$$

En déduire que $|PM|^2 = |PC| \times |MC|$.

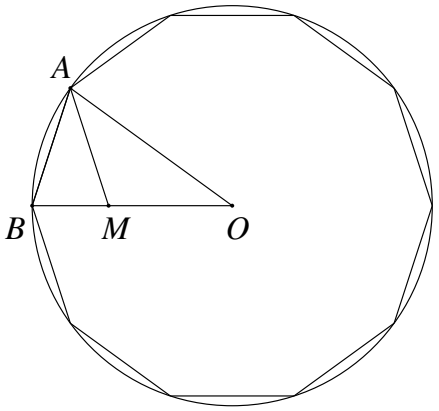
Si a représente la mesure du segment $[PC]$, calculer $|PM|$ en fonction de a.

Calculer le rapport $\dfrac{|PM|}{|MC|}$ dans lequel le point M partage le segment $[PC]$.

Le décagone régulier

Le segment $[AB]$ est un côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $[OA]$.

La droite AM est une bissectrice de l'angle en A du triangle ABO.



En calculant les mesures des angles des triangles MAB et AMO, justifier que ces triangles sont isocèles. On a alors $|AB| = |AM| = |OM|$.

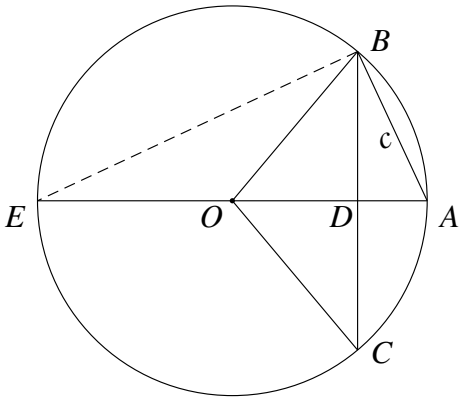
Justifier que les triangles isocèles AOB et BAM sont semblables.

En utilisant cette propriété et l'égalité trouvée précédemment, établir une relation entre les mesures des segments $[OB]$, $[OM]$ et $[MB]$.

En comparant cette relation avec celle obtenue dans l'activité de la fiche 4 entre les mesures des segments $[PC]$, $[PM]$ et $[MC]$, que peut-on en conclure pour le point M de la figure ci-dessus ?

En se référant encore à l'activité de la fiche 4, que vaut la mesure de la longueur du côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon r ?

Corde d'un angle double d'un angle donné



L'angle $\widehat{COB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{AOB}$.

La mesure de la corde $[AB]$ est notée c.

La mesure du rayon du cercle est notée r.

Le rayon $[AO]$ est prolongé jusqu'en E et on trace le triangle ABE.

Que vaut l'angle en B du triangle ABE ?

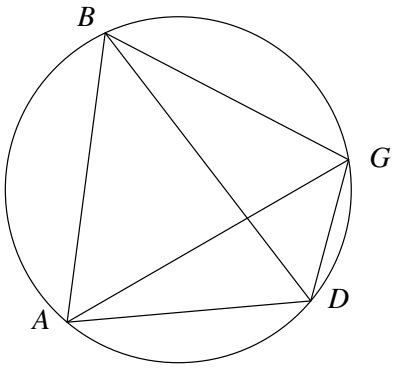
En calculant de deux manières le double de l'aire du triangle ABE, exprimer la mesure de la corde $[BC]$ en fonction de la mesure c de la corde $[AB]$.

En utilisant une calculatrice, en déduire la mesure du côté du pentagone régulier à partir de celle du décagone régulier.

Le théorème dit de Ptolémée (1)

On trace un cercle, dans lequel on inscrit un quadrilatère quelconque $ABGD$.

On trace également les deux diagonales de ce quadrilatère, à savoir AG et BD.

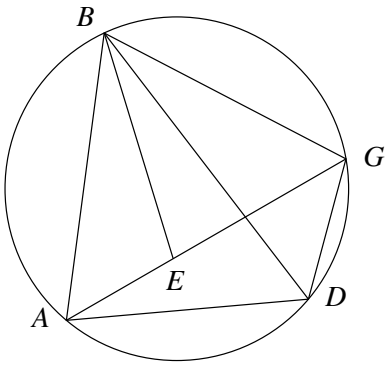


Le théorème s'énonce

Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des mesures des diagonales est égal à la somme des produits des mesures des côtés opposés.

$$|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| = |BD| \times |AG|.$$

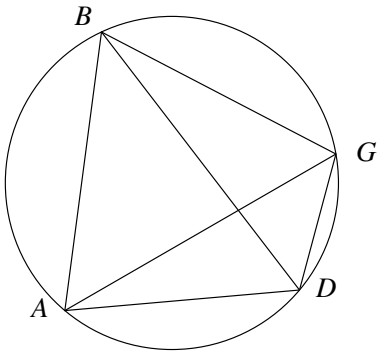
Pour faire sa démonstration, Ptolémée construit alors la droite BE, telle que $\widehat{ABE} = \widehat{DBG}$.

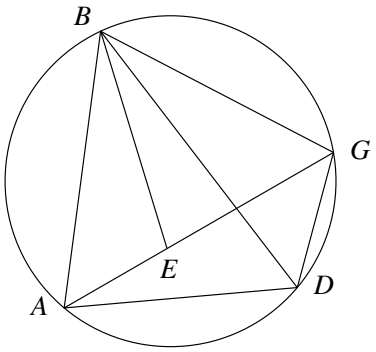


Le théorème dit de Ptolémée (2)

On trace un cercle, dans lequel on inscrit un quadrilatère quelconque $ABGD$.

On trace également les deux diagonales de ce quadrilatère, à savoir AG et BD.





Ptolémée construit alors la droite BE, telle que $\widehat{ABE} = \widehat{DBG}$.

Comparer les angles des triangles ABE et DBG.

Comment sont les deux triangles ABE et DBG ?

En déduire une relation entre $|AE|$, $|AB|$, $|BD|$ et $|DG|$.

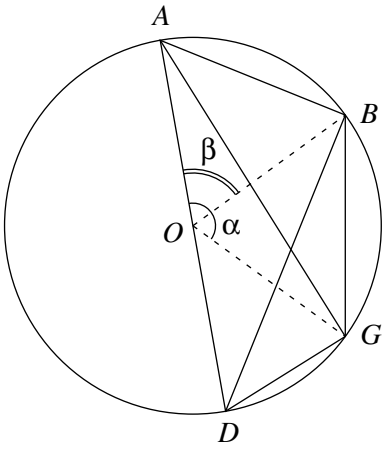
Comparer les angles des triangles ABD et EBG.

Comment sont les deux triangles ABD et EBG ?

En déduire une relation entre $|AD|$, $|BD|$, $|BG|$ et $|GE|$.

En utilisant les deux relations trouvées plus haut, que vaut $|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD|$?

Corde de la différence de deux angles



On considère le quadrilatère $ABGD$ inscrit dans un demi-cercle de centre O. L'un de ses côtés AD est un diamètre du cercle.

On note α l'angle $\widehat{GOA}$ et β, l'angle $\widehat{BOA}$.

Exprimer les mesures des côtés et des diagonales du quadrilatère comme cordes d'angles faisant intervenir α et/ou β.

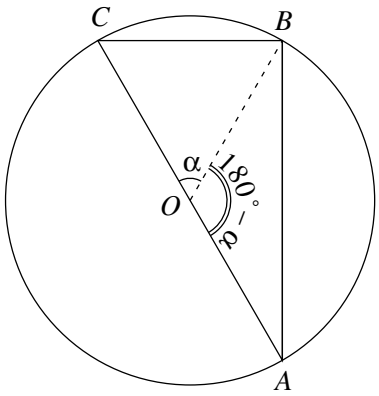
$|AB| =$ $|AG| =$ $|AD| =$

$|BG| =$ $|BD| =$ $|GD| =$

Appliquer le théorème de Ptolémée au quadrilatère $ABGD$.

En déduire $\text{crd}\,(\alpha - \beta)$ en fonction des autres cordes.

Corde de l'angle supplémentaire



La droite AC est un diamètre du cercle de centre O.

Le point B est un point de la circonférence distinct de A et de C.

Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires. On les note respectivement α et $180^\circ - \alpha$.

Calculer $\operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)$ en fonction de $\operatorname{crd}\alpha$.

En utilisant cette relation conjointement avec celle de la fiche précédente, calculer $\operatorname{crd} 12^\circ$ à partir de $\operatorname{crd} 72^\circ$ et $\operatorname{crd} 60^\circ$. En déduire la valeur de $\sin 6^\circ$.

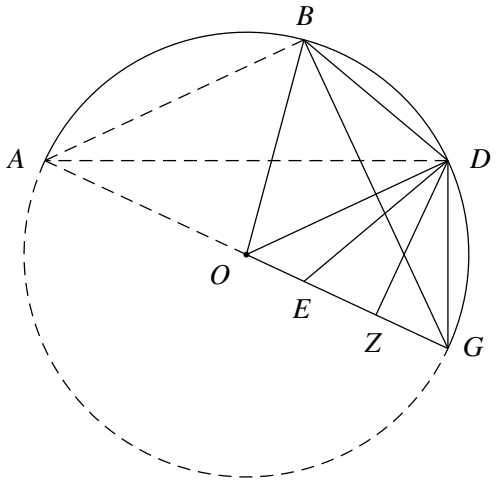
Corde de l'angle moitié d'un angle donné

On considère le demi-cercle ABG.

L'angle $\widehat{GOB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{GOD}$, ce qui s'exprime encore, $|BD| = |DG|$.

On trace DZ perpendiculaire à AG.

Sur AG, on porte le segment $[AE]$ tel que $|AE| = |AB|$.



Montrer que $|BD| = |DE|$, en exhibant deux triangles égaux dont ils sont un des côtés.

Puisque $|BD| = |DG|$, par hypothèse, justifier que Z est au milieu de $[EG]$.

En déduire que

$$|ZG| = \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right).$$

Montrer que les triangles ADG et DZG sont semblables et en déduire que

$$|DG|^2 = |AG| \times |ZG| = |AG| \times \frac{1}{2}\left(|AG| - |AB|\right).$$

La corde $|BG|$ est celle d'un certain angle que nous appelons α ($|BG| = \operatorname{crd}\alpha$). Avec cette notation, transcrire la dernière égalité en terme de cordes.

Extrait du texte d'al-Ḫwārizmī

Démonstration du cas

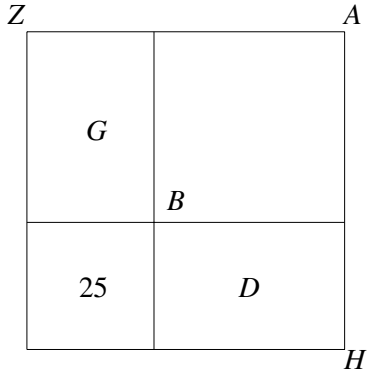
« *un māl*[1] *et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams*[2]*.* »

La figure pour expliquer ceci est une surface <carrée> dont les côtés sont inconnus. Elle représente le *māl* qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la figure[3] $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines ; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [...]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le *māl*. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs[4] de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines[5], et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle[6] de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq[7], et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.

Nous savons donc que la première surface est le *māl*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le *māl*, et c'est sa racine. Et le *māl* est neuf. Voici sa figure.



[1] Le terme *māl* signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau... Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. Nous notons x^2 cette quantité et x sa racine.

[2] L'unité de monnaie a coutume de désigner ce que nous appelons le terme indépendant.

[3] Les carrés et les rectangles sont désignés par les extrémités d'une diagonale. La barre au-dessus de AB permet de distinguer le nom d'une figure d'un mot.

[4] L'emploi du mot « flanc » et non « côté » est une trace du vocabulaire de la géométrie d'arpentage, d'origine babylonienne et indienne.

[5] Cette remarque permet de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

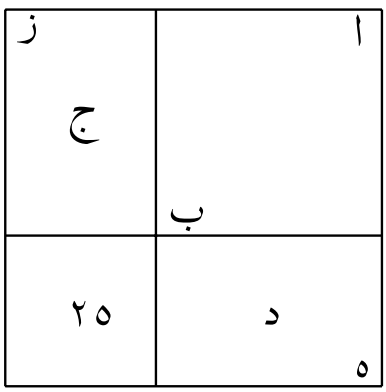
[6] Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

[7] On voit apparaître ici une rupture avec la tradition grecque. Euclide aurait dit « le carré de côté cinq ». Cette forme d'arithmétisation trouve également sa source dans la géométrie du mesurage.

Extrait du texte d'al-Ḫwārizmī
en langue arabe

فاما علة مال و عشرة اجذار يعدل تسعة و ثلثين درهما

فصورة ذلك سطح مربع مجهول الاضلاع وهو المال الذي تريد ان تعرفه و تعرف جذره وهو اب وكل ضلع من اضلاعه فهو جذره وكل ضلع من اضلاعه اذا ضربته في عدد من الاعداد فما بلغت الاعداد فهي اعداد جذور * [...]
وله ايضا صورة اخري تودي الي هذا وهي سطح اب وهو المال فاردنا ان نزيد عليه مثل عشرة اجذاره فنصفنا العشرة فصارت خمسة فصيرناها سطحين علي جنبتي سطح اب وهما سطحا ج د فصار طول كل سطح منهما خمسة اذرع وهو نصف العشرة الاجذار وعرضه مثل ضلع سطح اب فبقيت لنا مربعة من زوايا سطح اب وهي خمسة في خمسة وهي نصف العشرة الاجذار التي زدناها علي جنبتي السطح الاول فعلمنا ان السطح الاول هو المال وان السطحين الذين علي جنبتيه هما عشرة اجذار فذلك كله تسعة و ثلثون و بقي الي تمام السطح الاعظم مربعة خمسة في خمسة فذلك خمسة و عشرون فزدناها علي تسعة و ثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح زه فبلغ ذلك كله اربعة و ستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره والمال تسعة وهذه صورته



Comparaison des méthodes

*Résolution actuelle – Résolution d'*AL-ḤWĀRIZMĪ

AL-ḤWĀRIZMĪ classe les équations de degré inférieur ou égal à 2 en six types dont trois sont des équations trinômes, puis il les réduit à leur forme normale, où le coefficient de x vaut 1. Il établit ensuite les algorithmes de résolution des différents cas. Il obtient des formules équivalentes aux expressions reprises dans le tableau ci-contre :

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(3)	$x^2 + q = px$	$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Voici une liste d'équations :

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x^2 - x + 7 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad 4x^2 - 8x + 3 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$

Pour chacune de ces équations :

résoudre l'équation par la formule générale,

écrire l'équation sous la forme normale d'AL-ḤWĀRIZMĪ, identifier à quel type elle appartient et la résoudre par la formule adéquate,

reprendre les résultats dans un tableau qui permette une comparaison aisée.

Résolution actuelle		Résolution d'AL-ḤWĀRIZMĪ		
équation	solution	équation	type	solution
$x^2 + x - 2 = 0$				
$x^2 - 2x - 3 = 0$				
$x^2 - 2x + 1 = 0$				
$x^2 - 5x + 6 = 0$				
$x^2 - x + 7 = 0$				
$4x^2 - 8x + 3 = 0$				
$x^2 + 5x + 6 = 0$				
$x^2 + 2x + 1 = 0$				

Un problème mésopotamien

Problème 1 de la tablette BM 13 901

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45′.

Tu poseras 1 l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30′. Tu croiseras 30′ et 30′ : 15′. Tu ajouteras 15′ à 45′ : 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30′, que tu as croisé, de 1 : 30′, le côté du carré.

Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45′			
Tu poseras 1 l'unité			
Tu fractionneras en 2			
Tu croiseras 30′ et 30′			
Tu ajouteras 15′ à 45′			
C'est le carré de 1			
Tu soustrairas 30′, que tu as croisé, de 1			
Le côté du carré			

Un autre problème mésopotamien

Problème 6 de la tablette BM 13 901

J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$.

Tu poseras 1 l'unité. Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$. Tu croiseras $20'$, sa moitié et $20'$: $6'\,40''$. Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35'$: $41'\,40''$. C'est le carré de $50'$. Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50'$: $30'$, le côté du carré.

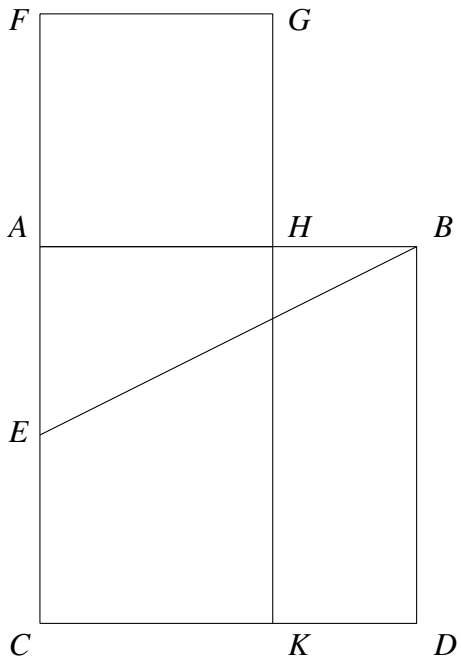
Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$			
Tu poseras 1 l'unité			
Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$			
La moitié est $20'$			
Tu croiseras $20'$ et $20'$			
Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35'$			
C'est le carré de $50'$			
Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50'$			
Le côté du carré			

Un problème géométrique chez Euclide

Euclide – Les Éléments, Livre II, proposition 11

11

Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.



Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En effet, que le carré $ABCD$ soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

nom	lettre arabe	translitération	prononciation
’alif	ا	**ā**	**a long**
bā’	ب	**b**	**b**
tā’	ت	**t**	**t**
thā’	ث	**t̲**	**th (think)**
ǧīm	ج	**ǧ**	**j**
ḥā’	ح	**ḥ**	**h (home)**
ẖā’	خ	**ẖ**	**jota ou kh (loch)**
dāl	د	**d**	**d**
ḏāl	ذ	**ḏ**	**th (that)**
rā’	ر	**r**	**r roulé**
zāy	ز	**z**	**z**
sīn	س	**s**	**s**
šīn	ش	**š**	**sh (show)**
ṣād	ص	**ṣ**	**ss (ness)**
ḍād	ض	**ḍ**	**z, dh ou dd**
ṭā’	ط	**ṭ**	**t dur, emph.**
ẓā’	ظ	**ẓ**	**z, dh ou dd emph.**
‘ayn	ع	**‘**	**hiatus guttural**
ġayn	غ	**ġ**	**r grasseyé**
fā’	ف	**f**	**f**
qāf	ق	**q**	**q ou k guttural**
kāf	ك	**k**	**k**
lām	ل	**l**	**l**
mīm	م	**m**	**m**
nūn	ن	**n**	**n**
hā’	ه	**h**	**h non aspiré**
wāw	و	**w**	**w ou o ou ‘ou’ long**
yā’	ي	**y ou ī**	**y ou i long**
hamza	أ	**’**	**attaque vocalique**

Texte de Théon de Smyrne

Nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons par exemple deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout, soit en puissance le côté et la diagonale ; ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois. Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit.

Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité.

Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors deux unités ; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités ; le carré construit sur le côté 2 est 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3 : le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2 ; nous aurons 7 unités. Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double 50 du carré 25.

À nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités ; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17. Cette fois encore, le carré 289 est plus grand d'une unité que le double 288 du carré de 12.

Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.

Texte de Héron d'Alexandrie (1)

La formule

Ainsi, par exemple, que les côtés du triangle soient les unités : 7, 8, 9. Additionne le 7 et 8 et 9 : cela devient 24, prends la moitié de cela et cela donne 12, soustrais-en 7 et il reste 5 ; à nouveau enlève 8 de 12 : il reste 4 et encore 9 <de 12> : il reste 3. Fais 12 fois 5 cela devient 60, et 60 fois 4 : cela devient 240 et 240 fois 3 cela devient 720 : prend le côté de 720 et ce sera la superficie du triangle.

L'algorithme

Comme les 720 n'ont pas un côté rationnel, nous prendrons la racine avec la différence la plus petite de la manière suivante : comme le carré s'approchant de 720 est 729 et qu'il a 27 pour racine, divise les 720 par 27 : il vient 26 et deux tiers ; ajoute les 27 : il vient 53 deux tiers. De ceci, <prends> la moitié : il vient $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. La racine de 720 sera donc au plus près les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Cependant, les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ <multipliés> par eux-mêmes, cela produit $720\frac{1}{36}$: de sorte que la différence est la fraction $\frac{1}{36}$ de l'unité. Et si nous voulons que la différence devienne une fraction plus petite que $\frac{1}{36}$, nous mettons à la place des 729 les 720 et $\frac{1}{36}$ maintenant trouvés, et après avoir effectué les mêmes <opérations>, nous trouverons la différence devenue beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

Texte de Héron d'Alexandrie (2)

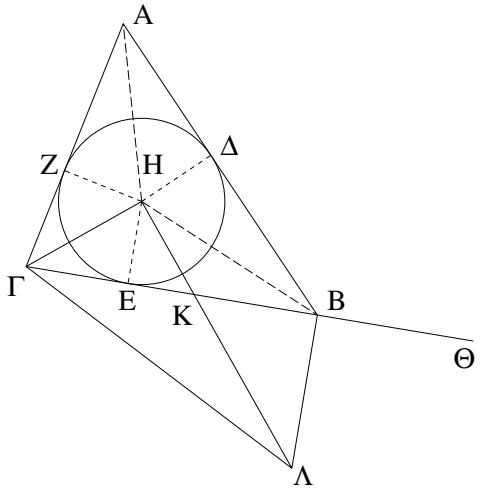
Démonstration de la formule

Que soit donné le triangle ABΓ et que soient données <les grandeurs> AB, BΓ <et> ΓA : trouver la superficie.

Que soit inscrit dans le triangle le cercle ΔEZ, dont le centre sera H, et que soient menés AH, BH, ΓH, ΔH, EH, ZH.

D'une part, <le rectangle> sous BΓ <et> EH est double du triangle BHΓ, d'autre part, <le rectangle> sous ΓA <et> ZH <est double> du triangle AΓH, et <le rectangle> sous AB <et> DH <est double> du triangle ABH.

<Le rectangle> sous le périmètre du triangle ABΓ et la <grandeur> EH, c'est-à-dire le rayon du cercle ΔEZ, est double du triangle ABΓ.



Que soit prolongée ΓB et que soit placé <sur ce prolongement> BΘ égale à AΔ. ΓBΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ parce que d'une part AΔ est égal à AZ, d'autre part ΔB <est égal> à BE et ZΓ <est égale> à ΓE. Donc, <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est égal au triangle ABΓ.

Mais <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est la racine <du carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH ; <le carré> du triangle ABΓ sera donc égal au carré de ΘΓ <multiplié> par <le carré> de EH.

Que soit menée d'une part HΛ perpendiculairement à ΓH, d'autre part BΛ <perpendiculairement> à ΓB et que soit mené ΓΛ.

Si maintenant chacun <des angles> sous ΓHΛ <et> ΓBΛ est droit, alors le quadrilatère ΓHBΛ est <inscrit> dans un cercle ; donc, <les angles> sous ΓHB <et> ΓΛB sont égaux <ensemble> à deux droits.

Et, d'autre part, <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> à deux droits parce que les angles autour de H sont coupés en deux par AH, BH <et> ΓH, et <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> aux angles sous AHΓ <et> ΔHB et, ensemble, ils sont égaux à quatre droits ; donc, <l'angle> sous AHΔ est égal à celui sous ΓΛB.

Et <l'angle> droit sous AΔH est égal à <l'angle> droit sous ΓBΛ ; le triangle AΔH est donc semblable au triangle ΓBΛ.

Comme BΓ <est> à BΛ, AΔ <est> à ΔH, c'est-à-dire BΘ <est> à EH et, alternativement, comme ΓB <est> à BΘ, BΛ <est> à EH, c'est-à-dire BK <est> à KE, parce que BΛ est parallèle à EH, et en rassemblant, comme ΓΘ <est> à BΘ, de même BE <est> à EK ; de sorte que, comme <le carré> de ΓΘ <est> au <rectangle> sous ΓΘ <et> ΘB, ainsi le <rectangle> sous BE <et> EΓ <est> au <rectangle> sous ΓE <et> EK, c'est-à-dire au <carré> de EH ; <car> dans un <triangle> rectangle, la hauteur EH est abaissée de <l'angle> droit sur la base ; de sorte que <le carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH, produit dont la racine était la superficie du triangle ABΓ, sera égal <au rectangle> sous ΓΘ <et> ΘB <multiplié> par <le rectangle> sous ΓE <et> EB.

Et chacune des <grandeurs> ΓΘ, ΘB, BE, ΓE est donnée ; en effet, d'une part ΓΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ, d'autre part BΘ <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse ΓB, et BE <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse AΓ, et la droite EΓ est l'excédent par lequel la moitié du périmètre dépasse AB, puisque, d'une part, EΓ est égale à ΓZ, d'autre part BΘ <est égale> à AZ puisqu'elle est aussi égale à AΔ.

La superficie du triangle ABΓ est donc ainsi donnée.

Quatrième partie

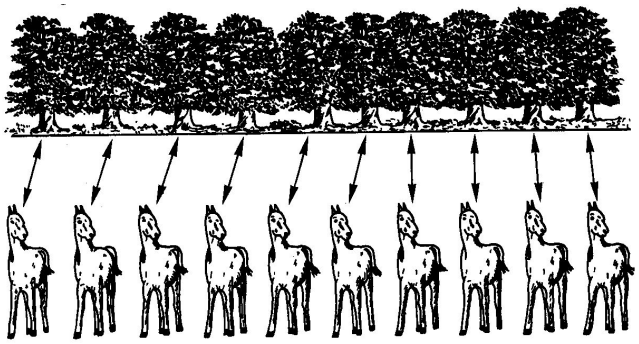
Aspects historiques et épistémologiques

Chapitre 15

Les origines de la numération

De tout temps, l'homme a ressenti le besoin de dénombrer, comme en rendent compte les témoignages fournis par les ethnologues et les découvertes archéologiques.

Bien des étapes et des tâtonnements ont été nécessaires pour affiner les techniques de dénombrement. Le premier procédé de l'histoire utilisé pour garder la trace d'une quantité a été la correspondance unité à unité permettant d'apparier concrètement les éléments d'une première collection d'êtres ou d'objets à ceux d'une deuxième.

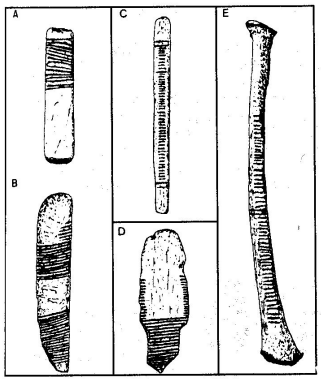


Très tôt, les hommes ont eu besoin d'un moyen de conserver le nombre, c'est-à-dire d'une numération.

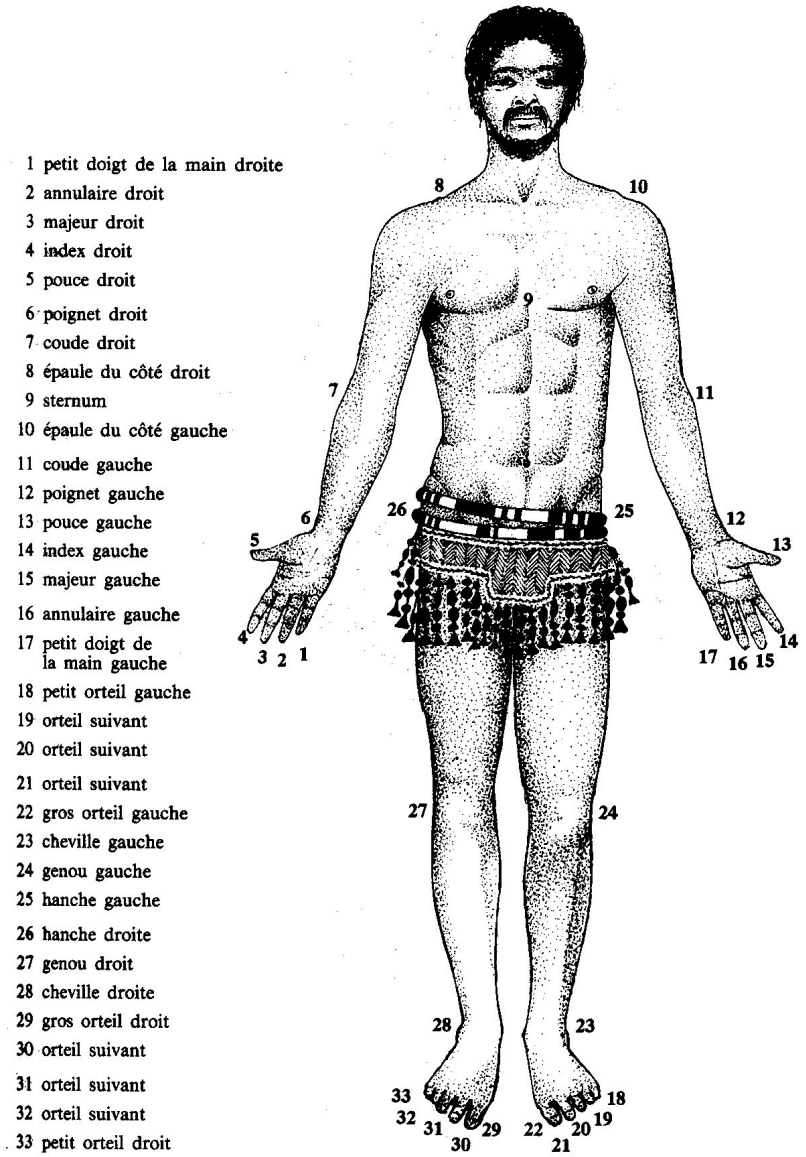


C'est ainsi que les hommes ont commencé à « compter » leurs troupeaux de moutons. Une hypothèse est qu'ils ont utilisé, entre autres, une bourse et des cailloux dont le nombre correspondait aux têtes de bétail du berger. Pour vérifier si tous les moutons étaient bien présents, il leur suffisait de placer dans la bourse un caillou par mouton. La figure ci-contre représente une bourse en pierre destinée à recevoir les cailloux symbolisant l'état d'un troupeau de moutons en Mésopotamie.

Une autre hypothèse de système de correspondance est la pratique de l'entaille sur des os ou sur du bois. Le berger s'assied à l'entrée d'une caverne et y fait pénétrer les animaux un par un. À l'aide d'un silex, il creuse une entaille dans un os à chaque fois qu'un mouton passe devant lui. Les jours suivants, il peut vérifier si tous ses moutons sont présents en déplaçant un doigt sur les encoches. La figure ci-contre représente des os entaillés du Paléolithique supérieur (voir aussi à la page 514).



Ces deux systèmes permettaient de retenir le nombre.



Plus tard, les hommes ont employé les différentes parties de leur corps. Ce système était encore utilisé au milieu du siècle dernier dans certaines populations comme les Papous de Nouvelle-Guinée ou certains insulaires du détroit de Torres (bras de mer reliant l'Océan Indien au Pacifique, entre l'Australie et la Nouvelle-Guinée). Voici à titre indicatif la correspondance numérique employée par ces derniers. Chaque partie du corps correspond à un nombre bien déterminé. Le système représenté permettait de dénombrer de un à trente-trois. Dans ce cas, le nombre 33 est représenté par la trente-troisième partie du corps (en l'occurrence le petit orteil droit), alors qu'il fallait trente-trois cailloux ou encoches dans les deux systèmes abordés auparavant.

J.-P. Collette relève que l'univers des nombres possède un triple système de représentation (visuel, oral et écrit) qui fonde respectivement les numérations figurées, parlées et écrites.

Les numérations figurées sont des systèmes qui proviennent directement de la correspondance unité à unité où chaque nombre est représenté par un élément concret.

Les numérations parlées sont des systèmes dans lesquels l'expression de la plupart des grands nombres est formée à partir des noms des nombres plus petits, comme par exemple « trois cent quatre-vingt-cinq ».

Les numérations écrites sont un langage à part entière. La représentation des nombres ne peut se faire que par la mise au point d'un système de symboles et de règles.

Il existe trois grands types de numérations écrites.

- Les numérations additives : l'addition est la seule opération utilisée. Un nombre est formé en juxtaposant des symboles ; sa valeur étant égale à la somme des valeurs de ces symboles. Ainsi sont faites les numérations égyptienne, romaine et grecque alphabétique.
- Les numérations hybrides : l'addition et la multiplication sont utilisées. L'addition comme précédemment et la multiplication en juxtaposant deux nombres.

  Exemple : deux cents, c'est deux suivi de cent.

  Telle est la numération chinoise.
- Les numérations de position : la place occupée par le chiffre par rapport aux autres lui confère sa valeur. Seuls les nombres inférieurs à la base doivent être désignés par des symboles spécifiques. La numération maya est de ce type. Notre système actuel de numération qui découle directement du système indo-arabe est également typique de la numération de position.

Dans les deux premiers types de numération, il faudra à mesure qu'on avance dans les nombres, ajouter de nouveaux symboles pour pouvoir les représenter.

Les activités du chapitre 3 consistent en une comparaison de différentes numérations écrites.

Commentaire

La représentation de la bourse est issue de Guitel [79] ; les autres figures proviennent de Ifrah [95].

Chapitre 16

Le monde « arabe » : quelques pages de son histoire

Avertissement

Ce chapitre peut *a priori* sembler un peu long ; certains peut-être ne verront pas son utilité dans une recherche sur l'enseignement des mathématiques. Et pourtant...

Voici quelques objectifs glanés au fil de nos lectures des textes officiels, objectifs auxquels nous adhérons totalement. Dans le *Décret définissant les missions prioritaires de l'Enseignement Fondamental et de l'Enseignement Secondaire*, on lit que la Communauté française s'engage à adapter la définition des programmes et leur projet pédagogique à *la transmission de l'héritage culturel dans tous ses aspects et à la découverte d'autres cultures, qui, ensemble, donnent des signes de reconnaissance et contribuent à tisser le lien social* (article 9, 7°). À la page 8 de la brochure *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques – Humanités générales et technologiques* [2], on trouve qu'*une formation mathématique peut contribuer à faire connaître les apports de toutes les cultures au développement des mathématiques...* Dans les *Compétences terminales et savoirs communs – Humanités professionnelles et techniques* [4], on lit que ces humanités *assurent une formation humaniste*, notamment *en aidant les élèves à se situer dans le temps et l'espace* (page 8) et *en aidant les élèves à s'ouvrir à la diversité sociale et culturelle...* (page 15).

Le présent chapitre est essentiellement destiné à l'enseignant qui, par la lecture d'une quinzaine de pages, peut avoir une première idée, mais une idée correcte, de ce qui s'est passé dans le monde arabe à une époque qui va nous intéresser particulièrement en ce qui concerne l'algèbre. Si tout enseignant a une certaine connaissance de l'histoire et de la culture occidentales, il n'en va pas de même en ce qui concerne l'Orient. Pas mal d'idées fausses ont été et sont encore véhiculées et il n'est pas toujours facile de faire le tri. Bien sûr, on peut toujours se documenter, mais cela demande du temps, de la patience, de l'esprit critique, beaucoup de travail en plus de la préparation des cours de mathématiques eux-mêmes. Notre but est donc d'aider un peu ces enseignants qui, pour motiver leurs élèves, seront peut-être tentés, à un certain moment de leur carrière, d'introduire un concept par le biais de l'histoire.

L'important n'est pas de raconter des histoires aux élèves mais bien de leur faire ressentir le côté profondément humain des mathématiques qui, au départ, ont un côté éminemment pratique ; elles sont au service de l'homme et l'aident à se tirer d'affaire dans ses problèmes de tous les jours.

Ensuite, lorsqu'une civilisation atteint un certain degré de développement, les problèmes traités deviennent de plus en plus complexes ; on débouche même alors sur une phase de spécialisation où des érudits et des chercheurs créent des mathématiques « savantes ». Pour arriver à faire passer de tels messages chez les élèves, il faut parfois pouvoir se plonger quelque peu dans le contexte où les événements se sont déroulés.

Il n'est pas facile d'imaginer comment, à partir de la naissance d'une nouvelle religion, un empire a pu se constituer et arriver aussi rapidement à un état de développement tel que les activités philosophique et scientifique deviennent comparables à ce qu'on avait connu dans les civilisations grecque antique et hellénistique[1]. Le sens de l'expression « mathématiques arabes » n'est pas, comme nous le verrons, une chose évidente à comprendre. Affirmer que l'algèbre a été inventée par les Arabes est à la fois naïf et très restrictif. Il y a tout un environnement géographique, social, culturel, ... dont il faut tenir compte. Nous espérons que les quelques développements qui suivent répondront, du moins en partie, aux besoins des enseignants qui se lanceront dans cette « aventure » culturelle.

Nous avons introduit, dans le texte, certains mots ou noms propres significatifs, en écriture arabe, essentiellement à l'attention des collègues et élèves arabophones qui lisent et écrivent cette langue. Qu'on y voie aussi un « symbole » de notre volonté de rapprocher deux grandes cultures. En ce qui concerne la translitération de ces mots arabes, nous avons choisi un « alphabet phonétique » le plus indépendant possible de la langue dans laquelle se fait cette translitération, en l'occurrence ici, le français. Par exemple, pour la lettre arabe ش, nous avons choisi la translitération š, qui a l'avantage d'être universelle. En fait, c'est le « ch » français ou le « sh » anglais ou... Pour la même raison, nous avons translitéré la lettre خ en ẖ plutôt que kh et la lettre ج en ǧ plutôt que j. La fiche 18 à la page 488 reprend complètement l'alphabet phonétique utilisé. Il est conseilllé de se munir d'une photocopie de cette fiche afin de rendre plus aisée la lecture des éléments d'histoire qui suivent.

Les sources de ceux-ci sont de deux types, d'une part, une formation intitulée « Introduction à la civilisation et à la science arabo-musulmane[2] » et un cours fait durant l'année académique 2002-2003 par le Professeur Ahmed Djebbar[3] aux universités de Mons et Bruxelles et d'autre part, une série d'articles ou d'ouvrages dont *Quelques étapes de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes* [15], *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* [22], *Une histoire de la science arabe* [60], *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident* [61], *Histoire des peuples musulmans* [62], *A History of the Arab Peoples* [88], *The Arabs in History* [104], *Histoire des sciences arabes* [120], *Ce que la culture doit aux Arabes d'Espagne* [139], *Les mathématiques arabes (VIIIe – XVe siècles)* [142].

Un tableau chronologique reprenant les faits les plus marquants se trouve à la page 511.

[1] La civilisation hellénistique se développe en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C). Cette civilisation n'est pas limitée au seul « territoire grec ».

[2] Cette formation a été organisée durant plusieurs années par la Formation en Cours de Carrière, conjointement avec des professeurs de l'Université Libre de Bruxelles.

[3] A. Djebbar est professeur entre autres d'histoire des mathématiques à l'Université de Lille 1.

1 L'Arabie avant l'Islam

L'histoire ancienne des peuples de la péninsule arabique reste très obscure. Comme peu de textes arabes sont antérieurs au IVe siècle de notre ère, il faut se référer à des documents étrangers. La littérature assyro-babylonienne du IXe siècle avant J.-C. mentionne les Arabes sous le nom *Urbi* ou *Aribi*. La première utilisation du mot *al-'arab* (العرب) par les Arabes apparaît sur d'anciennes inscriptions de l'Arabie du Sud, vestiges de la civilisation florissante du Yémen – l'*Arabia Felix* de l'Antiquité. Le mot en question signifie bédouin, c'est-à-dire nomade.

Quant à l'étymologie du terme *Sarrasin*, au moins deux interprétations tout à fait différentes coexistent. Pour certains auteurs, le mot est d'origine grecque ; l'appellation *scénites* viendrait du grec *skênè* (*σκηνή*) signifiant « tente ». Cette dénomination se serait alors transformée en *Sarakênoi* (*Σαρακηνοί*) ou *Sar(r)aceni* en latin. Pour d'autres auteurs, le vocable viendrait de l'arabe *al-šarqiy* (الشرقيّ), qui signifie habitant de l'est.

La péninsule arabique, d'une superficie d'environ trois millions de kilomètres carrés, est limitée au nord par les territoires actuels de Jordanie et d'Iraq, à l'est par le golfe Persique, au sud par le golfe d'Aden et à l'ouest par la mer Rouge. Jusqu'au début du septième siècle, on peut en gros la diviser en deux grandes régions : le nord et le sud.



Les populations habitant ces deux grandes parties sont assez différentes : elles ne parlent pas la même langue ; l'écriture, la culture ne sont pas les mêmes.

Dans le sud au climat plus favorable que celui du nord, l'agriculture se développe et les tribus se sédentarisent rapidement. Ces peuples ont de nombreux contacts maritimes avec l'Éthiopie, l'Égypte et les régions du golfe Persique. Certaines villes yéménites sont de véritables cités-états puissantes et stables ; il s'agit là d'une structure socio-politique très contrastée par rapport à l'organisation du nord du pays.

Dans le nord, le plateau central est aride : ni fleuves, ni rivières, mais de nombreux *āwdiya*[4]. On trouve également des Arabes sédentaires le long des côtes, dans les oasis de l'est et de l'ouest. À l'époque préislamique, l'un des plus grands centres sédentaires de l'Arabie est La Mecque ou *Makka* (مكّة). Juifs et chrétiens s'établissent dans différentes parties du pays, notamment à *Yaṯrib*[5] (يثرب) et y répandent les cultures araméennes[6] et hellénistiques, ainsi que leurs religions monothéistes et les idées morales qu'elles véhiculent.

Les autres Arabes du nord vivent en tribus nomades. Ils ont des contacts avec la civilisation hellénistique, les mondes romain, indien, juif et chrétien. Ils parlent une langue sémitique[7] très structurée et possèdent une certaine unité de mœurs et des traditions orales communes.

On voit donc que l'Arabie n'est pas totalement isolée du reste du monde. Au contraire, elle est très tôt une zone de transit entre le monde méditerranéen et le lointain Orient.

L'organisation politique des tribus de bédouins est assez rudimentaire, comparée à l'organisation socio-politique d'un centre comme La Mecque, par exemple. À la tête de la tribu, on trouve le *Sayyid* ou *Šaiḫ* (سيّد ou شيخ) – souvent translitéré *cheikh* –, chef élu par les anciens de la tribu et qui est rarement plus que le premier parmi ses pairs. Il suit – en tentant parfois d'influencer – plus qu'il ne guide l'opinion tribale. Il ne peut punir ni imposer ses droits ; c'est une espèce d'arbitre. Il reçoit des avis d'un conseil d'anciens appelé *Majlis* (مجلس), qui est constitué par les chefs des familles et représentants des clans de la tribu. La vie est réglée par les coutumes, la tradition ou *sunna* (سنّة).

Au nord, à certaines époques, on voit aussi se former, tout comme au sud, des royaumes autour de villes prospères, comme le royaume nabatéen[8] de Pétra (premier siècle avant Jésus-Christ), qui sera finalement annexé par les Romains en 106 après J.-C. pour devenir la province d'Arabie. Ce royaume englobait le sud de la Palestine, la Transjordanie, le sud-ouest de la Syrie et le nord de la péninsule arabique. Cette civilisation était arabe dans sa langue, araméenne dans son écriture, sémitique[9] dans sa religion et gréco-romaine en ce qui concernait l'art et l'architecture.

On peut encore citer le royaume de Palmyre qui se crée en Syrie à partir d'une petite ville d'oasis[10]. Il atteint son apogée dès le deuxième siècle après Jésus-Christ en devenant une importante étape sur la route des caravanes reliant la Syrie occidentale et la Méditerranée à la vallée de l'Euphrate. On y parle l'araméen, le grec et le latin. La civilisation raffinée qui s'y développe est une agréable fusion des styles grecs, romains et orientaux. Ses derniers « souverains » seront

[4]Forme plurielle du mot *wādī* (وادي) souvent translitéré *oued* et qui signifie ravine, cours d'eau temporaire qui peut rouler de grandes quantités d'eau et de boue, lors d'orages par exemple.

[5]Cette ville sera plus tard rebaptisée Médine.

[6]Les Araméens, initialement établis en Mésopotamie, vont s'installer progressivement en Syrie entre le onzième et le septième siècle avant notre ère.

[7]L'arabe, l'hébreu, l'éthiopien, le babylonien, ... sont des exemples de langues sémitiques. Une de leurs caractéristiques est que la plupart des mots sont formés autour de racines souvent trilitères (formées de trois consonnes). Ainsi, par exemple, les trois consonnes k, t et b induisent l'idée d'écriture. Le vocable « kataba » veut dire « il a écrit », « kātib » signifie « scribe », « kitāb », « livre », « maktab », « bureau » et « miktab », « instrument pour écrire », ...

[8]Les Nabatéens sont en fait une population nomade de chameliers et de pasteurs, venant du sud de l'Arabie. Ils sont remontés au quatrième siècle avant Jésus-Christ vers le nord et se sont installés dans des régions au sud de la Mer Morte.

[9]La plupart des historiens des religions entendent par là, non seulement les religions monothéistes, mais aussi celles qui leur sont proches et qui étaient pratiquées à Tyr, Sidon, Pétra, en Mésopotamie, ... Le culte d'Ashtart, par exemple, en fait partie, contrairement au bouddhisme, au védisme, au brahmanisme, ...

[10]La population de l'oasis de Palmyre était essentiellement araméenne.

Odeinat II, puis à sa mort, son épouse, la fameuse reine Zénobie.

À la chute de ce royaume en 272 après Jésus-Christ[11], ce sont les rois lakhmides qui prennent la domination du désert. Le fondateur de ce royaume fait de Ḥira (حرة), au nord-est de la péninsule, sa capitale. Les Lakhmides sont originaires de l'Arabie du sud ; ils émigrent vers le nord, vers la Syrie, la Palestine et l'Iraq. Jusqu'à leur disparition en 602 après J.-C, ils vont être continuellement en guerre avec les Ghassanides qui occupent, eux, le nord-ouest de la péninsule. Ils seront au service des Sassanides de Perse en apportant leur soutien contre Byzance, l'ennemie commune. Les Arabes de Ḥira parlent l'arabe mais écrivent en langue syriaque. C'est de Ḥira que beaucoup d'éléments culturels et religieux vont pénétrer en Arabie.

Nous avons vu que, par-ci par-là, des nomades sédentarisés installent des villes avec un système de société mieux organisé que le tribalisme bédouin, et que l'une des plus importantes est La Mecque, dans le Ḥiğāz (الحجاز) – région de la péninsule arabique, le long de la mer Rouge.

Le pouvoir des notables de La Mecque n'est certes pas comparable à celui des souverains de Byzance, par exemple ; cependant il y aura des tentatives, de la part des Byzantins et du roi d'Abyssinie, visant à détourner, à leur profit, les routes commerciales passant par La Mecque.

C'est dans cette ville qu'un temple de forme cubique, abritant diverses divinités et connu sous le nom de *Ka'ba* (كعبة) est considéré par les Arabes comme « la Maison de Dieu », en arabe *Bayt Allah* (بيت الله). Des gens originaires de différentes tribus et régions y viennent en pélerinage. Chaque secte ou doctrine, même le christianisme, par exemple, y est représentée par des statues, figures ou images. Ces sont des ancêtres du Prophète, les *Banī Hāšim* (بني هاشم) de la tribu des *Qurayš* (قريش) qui avaient l'honneur d'assurer la garde de la *Ka'ba*.

2 L'avènement de l'Islam

Selon la tradition, *Muḥammad* (محمّد) serait né à La Mecque vers 570. Son père meurt avant sa naissance ; il perd sa mère à l'âge de six ans et est élevé par son grand-père qui décède deux ans plus tard. Il est alors pris en charge par son oncle *Abū Tālib* (ابو تالب) qui l'emmène en voyage en Syrie, à l'âge de douze ans, accompagnant une caravane commerciale. Il rentre à La Mecque et, à vingt-cinq ans, il retourne en Syrie en accompagnant une autre caravane qui fait commerce au nom de *Ḫadīğa* (خديجة), une riche veuve qu'il épouse à son retour.

C'est vers l'âge de quarante ans – soit vers 610 –, dit-on, qu'il reçoit le premier appel de l'archange Gabriel. Il se met à prôner la soumission à *Allah*, Dieu unique, grand justicier qui récompensera les hommes d'après leurs actions. Plusieurs personnes de son entourage immédiat adhèrent tout de suite à la nouvelle religion : la première des femmes est son épouse *Ḫadiğa*, le premier des jeunes, son cousin *'Alī* (علي), le premier des hommes, *Zayd Ibn Ḥariṯa* (زيد بن حرثى), son esclave affranchi. *Muḥammad* tente d'écarter ses contemporains de l'idolâtrie pratiquée par la classe dominante. Si ses premiers prêches sont considérés comme inoffensifs par l'oligarchie en place, ils finissent par inquiéter car trop de fidèles convertis viennent des classes les plus défavorisées. De plus, un changement de religion à La Mecque risque de faire perdre à la cité son statut de ville de pélerinage et donc de passage obligé. La situation devient délicate et *Muḥammad* conseille à ses compagnons d'émigrer en Abyssinie, afin d'échapper aux coups

[11] Les prétentions croissantes de Zénobie finissent par irriter l'empereur Aurélien.

des opposants. Lui-même continue à prêcher, de préférence lors des saisons de pélerinage. C'est ainsi qu'il convertit à l'Islam des pélerins de la ville de Yaṯrib, qui, de retour chez eux, commencent également à prêcher la nouvelle religion, qui a plus de succès qu'à La Mecque. Aussi, les convertis de Yaṯrib sont-ils qualifiés de *al-anṣār* (الانصار), c'est-à-dire ceux qui aident, les partisans. Dans l'oasis de Yaṯrib, la situation est très différente. On rencontre des réfugiés juifs et l'organisation politique est beaucoup plus rudimentaire qu'à La Mecque. Les premiers convertis mecquois du Prophète finissent par émigrer dans cette ville et seront connus sous le nom de *al-muhāğirūn* (المهاجرون), les émigrés. En 622, *Muḥammad* rejoint lui-aussi cette même cité, accompagné de son ami *Abū Bakr* (ابو بكر). C'est *l'hiğra* (الهجرة) ou *hégire*, l'émigration. Pour l'occasion, les partisans rebaptisent la ville *Madīna al-Nabī* (مدينة النبيّ), la Ville du Prophète, Médine. Le 16 juillet 622 de l'ère chrétienne correspond au 1er *Moḥarram*[12] (محرّم) de l'an 1 du calendrier musulman.

Muḥammad fait construire à Médine la première mosquée de l'Islam. Grâce à l'appui tant des *Muhāğirūn* que des *Anṣār*, il jette les fondations d'un nouvel état, l'état islamique. Plusieurs fois les Mecquois vont tenter d'envahir Médine, mais la conclusion sera la prise de La Mecque par les musulmans en l'an 8 de l'hégire. L'islamisation de l'Arabie va être favorisée par l'arrivée de tribus bédouines venant de diverses régions de la péninsule et qui rallient Médine pour déclarer leur adhésion à l'Islam.

Après la prise de La Mecque, le Prophète s'installe à Médine. En l'an 10 de l'hégire, lors d'un dernier pélérinage, *haǧǧat al-wadā'* (حجّة الوداع) c'est-à-dire le pélerinage de l'adieu, il annonce à la communauté de ses fidèles qu'il a terminé sa mission puisqu'il a transmis le message qui lui avait été révélé. Il rentre alors à Médine où il tombe assez rapidement malade. Avant de mourir, il désigne *Abū Bakr* pour le remplacer comme guide des mulsulmans lors de la prière.

3 Les califes orthodoxes

En confiant à *Abū Bakr* la responsabilité de guide des musulmans, *Muḥammad* ne l'a en fait pas désigné comme un véritable successeur, c'est-à-dire quelqu'un qui remplirait, comme lui, les rôles de législateur, chef de la communauté religieuse et commandant de l'armée. Ainsi, le tout nouvel état musulman se trouve très tôt confronté à un énorme problème, celui du choix du successeur, en arabe *ḫālīfa* (خاليفة), calife.

Plusieurs tendances vont évidemment s'affronter. Les *Muhāğirūn* défendent l'idée qu'ils sont de la tribu du Prophète et qu'ils ont été les premiers à recevoir la révélation. Les *Anṣār* prétendent que s'ils n'avaient pas donné asile au Prophète et à ses compagnons, la nouvelle religion ne se serait pas aussi bien implantée. Enfin, un peu plus tard apparaissent les Légitimistes, en arabe, *al-aṣḥāb al-naṣṣ w'al-ta'īn* (الاصحاب النصّ و التعيّن), ce qui signifie littéralement, les maîtres du texte exact et de la désignation (à un poste). Pour ces derniers, Allah ne peut confier l'avenir de la communauté des fidèles aux aléas d'une élection et il a donc sans doute choisi un successeur. Ils pensent que la personne la plus apte à assumer cette lourde responsabilité est *'Alī*, cousin paternel de *Muḥammad*, époux de sa fille *Fāṭma* (فاطمة) et l'un des premiers croyants. Enfin, un autre parti tente de faire valoir ses droits, celui des *Qurayš*, la tribu du

[12] Premier mois de l'année musulmane.

Prophète, dont la branche *Umayya* (أميّة) possède pouvoir, richesse et ruse.

Ce sont les *Muhāğirūn* qui réussissent finalement à imposer leur point de vue. Ainsi, le premier calife est *Abū Bakr*, compagnon et ami le plus proche du Prophète. En fait il est le premier de ce qu'on appelle les <quatre> califes orthodoxes ou *al-ẖulāfa' al-rašidūn* (الخلفاء الرشدون) ; son califat ne durera que deux ans, de 632 à 634 et sera troublé par *al-ridda* (الرّدّة), littéralement le refus, qu'on appelle encore guerre de sécession. La cause en est l'opposition à l'obligation religieuse du paiement de la *zakāt* (زكاة)[13], menée par les tribus les plus éloignées des centres de La Mecque et Médine, qui considèrent que cette *zakāt* était un contrat entre eux et le Prophète. Puisque ce dernier est mort, le contrat n'existe plus. Toutefois, *Abū Bakr* réussit à unifier le pays sous un seul gouvernement central.

Les trois autres « califes orthodoxes » sont *'Umar Ibn al-Ḫaṭāb* (عمر بن الخطاب), calife de 634 à 644, *'Uṯman Ibn 'Affān* (عثمن بن عفّان), de la maison *Umayya* (644 – 656) et enfin, *'Alī Ibn Abī* Ṭālib (عليّ بن ابي طالب), calife de 656 à 661. C'est l'époux de *Fāṭma*, la fille du Prophète.

L'expansion arabe au Proche et Moyen-Orient peut s'expliquer par différents facteurs. Nous ne ferons que les citer ici sans les analyser en profondeur.

L'un des premiers événements marquants est l'anéantissement du puissant empire romain par les invasions germaniques.

Un autre facteur est l'affaiblissement et le déclin des empires byzantin et perse, conséquences des guerres continuelles qu'ils se livrent. Tant dans un camp que dans l'autre, ces luttes obligent le pouvoir à lever de lourds impôts, situation qui diminue la loyauté des sujets.

L'extrême rigueur avec laquelle les autorités religieuses de Byzance ont combattu l'église nestorienne de Syrie ou l'église copte[14] d'Égypte, par exemple, ne permet guère de gagner la sympathie des populations en place.

Ces deux réalités de terrain permettent de comprendre pourquoi ces populations ont pu voir en l'envahisseur arabe une alternative peut-être plus favorable à leurs conditions de vie.

À cette liste non exhaustive, loin de là, il faut encore ajouter la haute qualité militaire des généraux arabes à la tête des armées. Leurs campagnes seront comparées à celles d'Alexandre le Grand, d'Hannibal et de Napoléon. De plus, les soldats arabes sont résistants ; ils sont issus, du moins en grosse partie, du peuple saharien accoutumé à survivre dans des conditions très dures durant de longues périodes, maîtrisant la cavalerie et la méharée.

Sous le califat de *'Umar*, l'armée musulmane remporte une première victoire sur la Perse à

[13] La *zakāt* est une aumône, un don. Le mot vient de *al-zakā'* (الزكاء) qui signifie la pureté. Celui qui possède des biens doit en donner une partie aux plus démunis. Cela purifie son âme de l'avarice et de l'avidité. C'est une prescription coranique ; par exemple, on trouve dans la deuxième sourate *al-baqarah* (البقرة) – ce qui signifie la vache –, au verset 43 : « Et accomplissez la ṣalāt, et acquittez la zakāt… ». *Al-ṣalāt* (الصلاة) signifie la prière ; *zakāt* et *ṣalāt* sont deux des cinq piliers de l'Islam.

[14] Outre la division entre église catholique romaine et église orthodoxe d'Orient, il apparaît d'autres tendances qui diffèrent selon l'interprétation de la nature du Christ : deux natures – divine et humaine – (Concile de Chalcédoine, 451), une seule nature composée de deux natures (doctrine des Monophysites qui est notamment celle de l'église copte d'Égypte). Un patriarche de Constantinople, Nestorius, chef de l'église nestorienne, défend l'idée que la parole de Dieu habite dans l'homme Jésus depuis sa conception…

al-Qadisiyya en 637, puis à Jalula et enfin, en 642, à Nahavend. Cette même année voit la conquête de l'Iraq, de l'ancienne Mésopotamie et de la Perse occidentale et centrale. Se succèdent alors l'invasion de la Syrie, la chute de Jérusalem, la conquête de l'Égypte. En Syrie, *'Umar* nomme gouverneur *Mu'āwiyah Ibn Abī Sufiān* (معاويّه بن ابي سفيان) de la famille *Umayya*. En Égypte, c'est le calife *'Uṯman* qui désigne *'Abdallah Ibn Sa'd Ibn Abī Sarh* (عبدالله بن سعد بن ابي سره) comme gouverneur. Ce dernier crée la première flotte arabe avec l'aide de *Mu'āwiyah*. Ils deviennent ainsi les premiers amiraux arabes. Par la suite, les deux flottes, égyptienne et syrienne attaquent Byzance. Chypre, l'île de Rhodes... sont prises. Une partie de l'*Ifrīqīa* (إفريقيا), l'actuelle Tunisie tombe elle aussi aux mains des Arabes.

Le calife *'Uṯman* a tendance à nommer trop de membres de sa famille à des postes importants dans l'empire. On le presse d'abdiquer, ce qu'il refuse de faire. Il finit assassiné. Si à la mort de *'Umar*, le choix de son successeur *'Uṯman* n'avait guère posé de problème, cette fois, ce n'est pas pareil : la communauté musulmane reste divisée. Après bien des difficultés, c'est finalement *'Alī* qui est nommé calife dans la mosquée de Médine, le 24 juin 656. Il transporte immédiatement la capitale de Médine à *al-Kūfa* (الكوفة) en Iraq et révoque les gouverneurs de province nommés par son prédécesseur. Le gouverneur de Syrie, *Mu'āwiyah*, qui est de la même famille *Umayya* que le calife assassiné, appelle à la vengeance en excitant le peuple. L'affrontement a lieu le 28 juillet 657 sur la rive ouest de l'Euphrate ; les Iraquiens sont conduits par *'Alī* et les Syriens, par *Mu'āwiyah*. L'armée de *'Alī* est sur le point de remporter la victoire lorsqu'un allié de *Mu'āwiyah* a recours à une ruse : des copies du Coran attachées à des lances sont interprétées par tous comme un appel à l'arbitrage du Coran...

Que s'est-il passé alors ? Les témoignages sont contradictoires. Il est difficile de croire qu'un calife ait pu s'abaisser devant un gouverneur... Évidemment, il a sans doute perdu des partisans... Le 24 janvier 661, *'Alī* est assassiné près de Kūfa par un membre d'une ancienne secte de dissidents en Islam. L'endroit, situé à quelque 160 km au sud de *Baġdād* (بغداد), et aujourd'hui appelé *al-Naǧaf* (النجف), est un lieu de pélerinage.

4 Le califat umayyade

Mu'āwiyah se trouve au centre du conflit pour le pouvoir. Il fonde le deuxième califat, celui des *Umayyades*, du nom de sa famille. Il est nommé calife en 661 à Jérusalem et transporte la capitale de l'empire à Damas.

Entretemps, l'Iraq déclare *al-Ḥasan* (الحسن), successeur de son père *'Alī* assassiné. Mais *al-Ḥasan* abdique en faveur de *Mu'āwiyah* et se retire à Médine. Son frère *al-Ḥusayn* (الحسين) revendique le califat. À l'invitation des Iraquiens, qui l'avaient proclamé calife après la mort de son père et l'abdication de son frère, il se rend à Kūfa avec sa famille et quelques partisans. Il est massacré le 10 octobre 680 par l'armée *umayyade*. Ce jour correspond au 10 du mois de *Moḥarram* de l'année 61 de l'hégire et reste pour les *Chī'ites*[15], en arabe, *Šīa'īy* (الشيعيّ),

[15]C'est l'une des grandes subdivisions de l'Islam, celle des dissidents, des partisans de *'Alī* qui contestaient *Abū Bakr* comme successeur du Prophète. Une autre grande subdivision est la branche sunnite à laquelle se rattachent notamment les califats umayyade et abbasside. Ce vocable vient du mot arabe *sunna* qui signifie tradition et a ici le sens de « ensemble des pratiques et préceptes du Prophète ».

littéralement les dissidents, le jour de la commémoration du martyre de *al-Ḥusayn*.

Le califat des *Umayyades* est marqué par une politique pragmatique, matérielle et profane. Ruse, machination politique et terreur en sont les principales caractéristiques.

C'est *Mu'āwiyah*, calife de 661 à 680, qui introduit, dans l'Islam, le principe de succession par hérédité, lorsqu'il nomme son fils *Yazīd* (يزيد) comme son successeur. Le califat de *Yazīd* ne dure que trois années. Les *Umayyades* sont ainsi la première dynastie en Islam.

À la fin du septième siècle, début du huitième, sous le califat de *'Abd al-Mālik* (عبد لمالك) qui s'étale de 685 à 705, puis de son fils *al-Walīd* (الوليد), de 705 à 715, l'empire islamique, avec Damas comme capitale, est arrivé au sommet de son expansion. Il s'étend des côtes de l'océan Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus et aux frontières de la Chine avec aussi le Ḫwārizm[16], la Transoxiane[17], l'Afrique du Nord et l'Espagne. La conquête de l'Espagne se fait à partir de l'Afrique du Nord. En 711, un lieutenant berbère, du nom de *Ṭāriq Ibn Ziyād* (طارق بن زيّاد) fait une expédition de reconnaissance dans la péninsule ibérique ; il traverse la Méditerranée en un lieu qui s'appelle désormais Gibraltar. L'étymologie en est effectivement *ǧabal al-Ṭāriq* (جبل الطارق), littéralement, la « montagne de Ṭāriq ». Les armées islamiques – c'est un fait très connu – ne seront arrêtées qu'en 732 par Charles Martel, quelque part entre Tours et Poitiers.



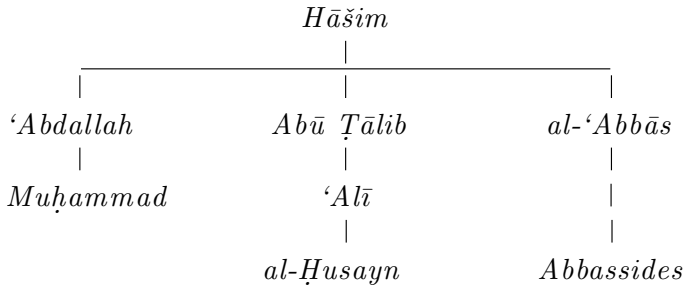
On assiste à l'arabisation des administrations publiques, ce qu'on a appelé *al-dīwān* (الديوان). Les premières monnaies arabes, le service postal apparaissent aussi. On voit également la construction de nombreux édifices privés et publics et la naissance de nouvelles villes, comme *al-Ramla* (الرملة), œuvre du calife *Sulaymān* (سليمان) (715 – 717), qui y fait bâtir la Mosquée Blanche.

[16] Région située au sud de la mer d'Aral ; elle correspond aujourd'hui au Turkmenistan et à l'Uzbekistan.

[17] La Transoxiane était la région d'Asie centrale au nord-est de l'Oxus ; Samarqand en fut la ville principale. Le fleuve Oxus est l'actuel Amou-Daria.

ʻAbd al-Mālik érige à Jérusalem la Coupole du Rocher et la grande mosquée *al-Masǧid al-Aqṣā* (المسجد الاقصى). Quant à *al-Walīd*, il fait agrandir la Mosquée de La Mecque, celle de Damas, reconstruire celle de Médine et ériger des écoles et des hôpitaux.

Mais l'ancienne rivalité entre les tribus arabes du sud et du nord refait surface. Le problème de la succession au pouvoir déstabilise le régime : il y a en effet conflit entre la règle établie par *Muʻāwiyah*, selon laquelle le calife désigne son fils, et la très ancienne règle tribale des Arabes, qui veut que le successeur soit le plus âgé de la famille. Les *Chīʻites*, majoritaires en Iraq, par opposition au pouvoir sunnite en place en Syrie, n'ont pas pardonné les meurtres de *ʻAlī* et de *al-Ḥusayn*. Enfin, les descendants de *al-ʻAbbās* (العبّاس), l'oncle du Prophète se sont toujours considérés comme successeurs légitimes, puisqu'ils sont de la famille de *Hāšim*.



D'autre part, les peuples islamisés ne sont pas traités comme les Arabes de souche ; ils sont par exemple soumis à des taxes desquelles les musulmans eux, sont exonérés. Il y a ainsi un certain mécontentement au sein de la population, spécialement dans la province du *Ḫurāsān* en Perse. Les partisans de la cause *abbasside* iront les rejoindre, de même que les *Chīʻites*.

On le voit, de nombreuses conditions sont réunies pour entraîner la chute du califat *umayyade* en l'an 750, après nonante années et quatorze califes, dont le dernier fut *Marwān II* (مروان الثاني).

5 Le califat abbasside et la transmission du savoir

Le premier calife *abbasside* est *Abū al-ʻAbbās* (ابو العبّاس), qui aura le pouvoir de 750 à 754. Dans son discours d'intronisation, il se donne lui-même le surnom de *al-Saffāḥ* (السفّاح), littéralement « qui a soif de sang ». La dynastie qu'il fonde va être celle qui connaîtra la plus longue durée, de 750 à 1258, date de la (première) prise de *Baġdād*, par les Mongols.

Les *Abbassides* se lancent dans une campagne d'extermination des *Umayyades*. Le seul rescapé du massacre sera *ʻAbd al-Raḥmān Muʻāwiyah* (عبد الرحمان معاويّه) qui fondera une dynastie *umayyade* en Espagne.

La capitale de l'empire est retransférée en Iraq, dans la ville de *al-Kūfa*, aux frontières de la Perse. Le calife est protégé par des troupes du *Ḫurāsān*, qui l'ont aidé à prendre le pouvoir et les Perses obtiennent des postes importants dans le gouvernement. Le pouvoir devient plus cosmopolite et l'aristocratie arabe, florissante sous le califat précédent, est remplacée par une hiérarchie d'officiers et de fonctionnaires de toutes races et de toutes nationalités.

Les califes *abbassides*, contrairement à leurs prédécesseurs, vont s'occuper de religion ; le calife guide la prière en portant le manteau du Prophète. Il s'entoure de conseillers en théologie et loi canonique. L'idée des *Abbassides* est de garder le pouvoir jusqu'à la fin du monde, ultime instant où ils le remettraient à Jésus-Christ, le Messie. La propagation de ce genre d'affirmations les a sans doute aidés à régner longtemps car beaucoup sont persuadés que, lorsque le pouvoir *abbasside* disparaîtra, l'ordre du monde sera totalement désintégré...

Lorsque *al-Saffāḥ* meurt en 754, c'est son frère *al-Mansūr* (المنسور) qui lui succède, de 754 à 775. On peut dire que c'est véritablement le fondateur de la dynastie car les trente-cinq califes qui viendront après lui sont tous ses descendants. En 762, il fonde *Baġdād* – ce qui signifie « cité de la paix » – sur la rive ouest du Tigre. Quelques années plus tard, il en fera la capitale de l'empire. C'est à cette époque que l'influence persane commence à se faire sentir, tant à la cour que dans la vie de tous les jours. On la ressent dans le gouvernement et l'administration, dans les costumes, accessoires, ustensiles, dans la cuisine, ... Seules la religion et la langue de l'administration et de la culture ne subiront pas cette influence. La religion restera l'Islam, et la langue, l'arabe.

Le vaste mouvement de transmission du savoir scientifique et philosophique commence à *Baġdād* : les Arabes vont traduire dans leur langue et assimiler toute la culture des pays conquis.

Ǧirǧis Ibn Baḫtayšū (جرجس بن بختيشو), médecin nestorien persan, traduit pour le calife des œuvres de médecins grecs. *Ǧirǧis Ibn Baḫtayšū* est directeur de l'école de médecine de *Jundayšapur* ; il meurt vers 771. C'est encore pour *al-Mansūr* que AL-FAZĀRĪ (الفزاري) traduit du sanskrit le premier traité d'astronomie mathématique introduit dans la littérature scientifique arabe. Son titre arabe est le *Zīǧ al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Grand Zīǧ du Sind hind*, encore connu sous le nom de *Siddhānta*. Le terme *Zīǧ* est d'origine persane ; il signifie « fil à coudre », « corde », « fil à plomb ». Par extension, il veut encore dire « trame » d'un tissu, ce qui fait penser aux lignes et colonnes d'une table astronomique. Mais c'est plus qu'une simple table ; on y trouve aussi des techniques pour convertir les dates d'un calendrier dans un autre, des prédictions météorologiques basées sur l'observation des astres et des étoiles, ...

Il y aura trente-sept califes *abbassides* ; les plus importants sont les dix premiers et nous nous limiterons, parmi ceux-ci, à ne citer que ceux qui ont eu une influence marquante dans le domaine des sciences et plus particulièrement, des mathématiques.

Le cinquième calife est *Hārūn ar-Rašīd* (هارون الرشيد), celui des *Mille et Une Nuits*, celui aussi qui a entretenu des relations diplomatiques suivies avec Charlemagne. Son califat s'étend de 786 à 809. Il reprend les campagnes contre Byzance et ses armées obtiennent de très importantes victoires.

Mais ce n'est pas qu'un guerrier. Il introduit en Iraq l'usage du papier qui était connu en Chine. Il continue à encourager le mouvement de transmission des connaissances scientifiques et philosophiques en langue arabe déjà amorcé du temps de *al-Mansūr* ; il favorise ainsi la culture qui est bien sûr influencée par des éléments étrangers : indiens, persans, syriaques, grecs et hellénistiques.

Un peu plus tard, le calife *al-Ma'mūn* (المأمون) va régner de 813 à 833. C'est un mutazilite, ce qui signifie qu'il appartient à une école de pensée en Islam, qui défend l'idée que le texte religieux doit être en accord avec la raison. Il va promouvoir et protéger les sciences. Il envoie

des missions à Byzance pour ramener des manuscrits grecs de philosophie et de science, afin de les faire traduire en arabe. À *Baġdād*, il fonde la *Bayt al-ḥikma* (بيت الحكمة), c'est-à-dire la Maison de la Sagesse, véritable académie de traduction à laquelle il attache une bibliothèque. Il fonde également le premier observatoire en pays d'Islam.

Pendant près de deux siècles, les traductions vont se faire sans relâche : Euclide, Archimède, Apollonius, Ptolémée, Diophante, ... – pour ne citer que les mathématiciens – soit d'après des originaux grecs, soit d'après des traductions syriaques. À cela, il faut ajouter les connaissances venues de l'Inde, les traditions du Ḫwārizm, de la Perse et de la Mésopotamie.

Les mots ≪ techniques ≫ de la philosophie ou de la science grecques n'ont évidemment pas leurs correspondants dans la langue arabe des débuts de l'Islam. C'est entre autres grâce aux traducteurs que cette langue va évoluer vers l'arabe classique, qui deviendra la langue scientifique, celle des savants en Orient, tout comme la langue latine le fut chez nous. Certains mots ont été empruntés au grec et arabisés sans plus évoluer par la suite ; c'est le cas par exemple du vocable *al-ğaġrāfya* (الجغرافية), la géographie. D'autres ont été remplacés plus tard, dans une phase d'enrichissement de la langue. C'est le cas de *al-ğyūmaṭrya* (الجيومطرية) qui a d'abord désigné la géométrie. Actuellement, cette science s'appelle *al-handasa* (الهندسة), déformation du mot persan *Indāza* voulant dire ≪ mesure ≫. Les *Éléments* d'Euclide seront traduits de nombreuses fois. En langue arabe, il y aura trois titres selon l'époque de la traduction : *al-usṭuqssāt* (الاسطقسّات), arabisation du grec *στοιχεία*, éléments ; on voit ensuite apparaître *al-ārkān* (الاركان), qui signifie piliers (au sens propre) et enfin *al-uṣūl* (الاصول), qui veut dire piliers, principes. On assiste ainsi réellement à la mise en place d'une langue culturelle et scientifique. Parfois, dans un écrit sur la botanique, par exemple, le traducteur est confronté à un problème d'identification de différents végétaux. Il est obligé d'aller voir sur place de quoi il s'agit. Ératosthène a mesuré le méridien terrestre qu'il a exprimé en ≪ stades ≫ grecs, mais que représente cette unité pour un habitant de l'empire arabe ? Il faut refaire une mesure...

Cette période de traductions et d'assimilation sera suivie d'une période tout aussi intense de créations. C'est dans ce contexte que sont nées notamment ce que nous appelons les ≪ mathématiques arabes ≫, c'est-à-dire les mathématiques qui se sont développées dans les pays qui ont été conquis par les peuples musulmans après l'avènement de l'Islam. Ces mathématiques ont été pratiquées par des savants qui parlaient l'arabe et qui habitaient ces contrées, ou qui ont transité par ces contrées. Leurs pays d'origine sont très variés (Perse, Égypte, Afrique du nord, Espagne, ...) tout autant que leurs religions (musulmans, chrétiens, juifs[18], adeptes du zoroastrisme[19]...) En fait, comme le dit si bien Djebbar [60], ≪ En pays d'Islam, les hommes de science venaient de tous les horizons et ils n'avaient, pour la plupart, aucun lien avec les théologiens ou les religieux au sens large. ≫

L'année 1258 marque la fin de l'empire *abbasside*, fin qui peut s'expliquer par plusieurs causes. Parmi les facteurs externes, il faut mentionner l'invasion mongole au Proche-Orient. Les causes internes sont essentiellement liées au manque d'homogénéité de l'empire : arabes – non-arabes, arabes musulmans – arabes non-musulmans, arabes du nord – arabes du sud...

Ensuite, il y aura les invasions ottomanes et en 1492, la reconquête de l'Espagne par les chré-

[18] Juifs et chrétiens sont appelés, par les musulmans, les ≪ gens du livre ≫. Le mot grec *βίβλος* signifie livre.

[19] Le zoroastrisme est une religion qui est apparue en Perse environ neuf siècles avant Jésus-Christ. Ses adeptes sont adorateurs de la lumière et du feu.

tiens... La fin de l'histoire rapportée ici va peut-être paraître brutale, mais il n'est pas possible, dans le cadre de cette recherche mathématique, d'aller plus avant. Nous avons pris le parti de tenter de faire un peu comprendre ce qui a permis le développement des sciences arabes, au moins jusqu'à l'époque où a vécu un mathématicien qui va nous occuper dans le cadre de l'art de l'algèbre, *al-ṣanā'a al-ǧabr w'al-muqābala* (الصناعة الجبر ولمقابلة), comme disent les mathématiciens ≪ arabes ≫.

6 Épilogue

L'historien des sciences, d'origine gantoise, Georges Sarton (1884-1956), auteur de l'ouvrage *Introduction to the History of Science*, a écrit ≪ Il est puéril d'affirmer que la science commença en Grèce : le "miracle" grec fut préparé par des millénaires de travail en Égypte, en Mésopotamie et peut-être dans d'autres régions. La science grecque fut moins une invention qu'une renaissance[20] ≫. Les recherches récentes sur les sources de la science grecque font apparaître de nombreux éléments d'origine égyptienne ou babylonienne. On peut dire que c'est la première transmission de savoirs de l'Orient vers l'Occident. Sarton écrit encore ≪ si l'histoire de la science antique est composée sans qu'on apporte au lecteur une connaissance suffisante de la science orientale, cette histoire n'est pas incomplète, elle est falsifiée ≫.

Nous avons évoqué, dans les pages qui précèdent, la deuxième phase de transmission du savoir. Elle s'est déroulée entre le septième et le neuvième siècle : le monde islamique s'approprie la science grecque.

Dans la troisième phase, du onzième au quatorzième siècle, c'est la science islamique qui passe au monde latin. La science indienne ou chinoise n'a généralement pas influencé directement le monde occidental ; elle l'a fait par l'intermédiaire de la science arabe. Le mouvement de traduction de l'arabe vers le latin s'amorce réellement avec Constantin l'Africain au XIe siècle et atteint son apogée au XIIe siècle avec notamment Gérard de Crémone, Jean de Séville, Robert de Chester, Adélard de Bath, Platon de Tivoli, Michael Scott (XIIIe siècle), ... Les principaux centres de transmission du savoir de l'Orient à l'Occident sont l'Espagne, et particulièrement Tolède, le sud de l'Italie et la Sicile. C'est seulement à la Renaissance que l'Occident se dégage petit à petit de l'influence orientale.

On peut affirmer que l'appétit avec lequel l'Occident s'est approprié la science arabe est comparable à celui avec lequel ces derniers avaient reçu la science grecque et les apports chinois et indiens.

[20] Sarton veut dire par là que la science grecque n'est pas issue du néant, qu'elle s'est développée à partir d'un fond de connaissances bien répandues au Proche et au Moyen-Orient. Bien sûr, la science grecque a été créative ; en mathématiques, par exemple, Eudoxe, Euclide et bien d'autres ont introduit une nouveauté radicale : le rationalisme axiomatique.

Les faits marquants

Période	Événements	Territoire	Autorité
Avant 622		Péninsule arabique avec deux grandes régions : nord et sud de cultures différentes.	Tribalisme plus ou moins bien organisé, petites autocraties, royautés...
622 - 632	**622** : Hégire marquant le début de l'ère musulmane. **629** : prise de La Mecque. **632** : mort de *Muḥammad*	Péninsule arabique.	*Muḥammad* législateur, chef de la communauté religieuse et commandant des armées.
632 - 661	Début de l'expansion de l'empire.	Péninsule arabique plus Iraq, Mésopotamie, Perse, Syrie, Égypte.	Les quatre califes orthodoxes : *Abū Bakr* (632 - 634), *ʿUmar* (634-644), *ʿUṯman* (644 - 656) et *ʿAlī* (656 - 661).
661 - 750	**661** : assassinat de *ʿAlī*. L'empire continue à s'étendre. Sa capitale est Damas. Politique matérielle et profane. Arabisation des administrations publiques (*al-dīwān*).	De l'océan Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus, la frontière de la Chine plus le Ḫwārizm, la Transoxiane, l'Afrique du nord et l'Espagne.	Première dynastie de califes : les Umayyades.
750 - 1258	Le calife *al-Mansūr* (754 - 775) fonde la ville de Baġdād et en fait la capitale. Le mouvement de traduction s'accentue. *al-Maʾmūn* (813 - 833) fonde la Maison de la Sagesse où travaille AL-ḪWĀRIZMĪ.		Deuxième dynastie de califes : les Abbassides.
Après 1258	**1258** : prise de Baġdād par les Mongols. Déclin de l'empire déjà amorcé plus tôt. Invasions ottomanes.		

Chapitre 17

L'art de l'algèbre

Préambule

Même si on se limite au « sens classique[1] », les érudits et les mathématiciens semblent très partagés sur le sens qu'ils donnent au mot « algèbre ». Dans le *Petit Larousse*, édition 2003, on peut lire « Branche des mathématiques qui, dans sa partie classique, se consacre à la résolution d'équations par des formules explicites, ... ». Dans le *Mathematics Dictionary* [96], on apprend que l'algèbre est une généralisation de l'arithmétique. Dans le *Dictionnaire des mathématiques* [28], on trouve : « Issue du calcul pratique sur les nombres et de recherches d'arithmétique élémentaire, l'algèbre s'est d'abord dégagée de ses origines en se développant dans deux directions : remplacement des nombres par des lettres et passage du calcul des formules à la résolution d'équations (c'est-à-dire de formules contenant des nombres inconnus) ». Stella Baruk, dans son *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* [18], signale que le mot date de 1554 et qu'il est issu du latin médiéval *algebra*, venant lui-même de l'arabe. Elle écrit encore « L'algèbre est l'art ou la science de résoudre des problèmes en généralisant les méthodes de l'arithmétique par l'emploi de lettres qui représentent des grandeurs ou des nombres inconnus et permettent d'établir des formules ». N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee ont édité un ouvrage intitulé *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching* [19]. Dans leur introduction, ils font allusion à diverses approches de cette discipline :

> règles pour transformer et résoudre des équations ;
>
> résolutions de problèmes spécifiques ou de classes de problèmes ;
>
> généralisation de lois gouvernant des nombres ;
>
> introduction (plus récente) des concepts de variable et fonction ;
>
> étude des structures algébriques[2].

Pour notre part, tout comme Jacques Sesiano [129], nous dirons simplement que, au sens classique, l'algèbre est « l'art » qui s'occupe de trouver des solutions d'équations et de systèmes d'équations. S'il faut vraiment qu'il y ait des lettres pour pouvoir parler d'algèbre, alors pourquoi de nombreux auteurs, faisant autorité, s'accordent-ils à dire que les Babyloniens faisaient de l'algèbre deux millénaires avant Jésus-Christ ? Il y a confusion entre ce qu'est en fait l'algèbre

[1] Au sens moderne, l'algèbre est aussi l'étude des structures, telles que groupes, ...

[2] Cette approche de la discipline a fortement marqué le curriculum scolaire à partir de la fin des années soixante, sous l'influence des mathématiques modernes.

et... ce qu'elle est devenue de nos jours après la lente élaboration d'un symbolisme simplificateur[3]. Comme le dit fort bien G. G. Joseph, dans son ouvrage *The Crest of the Peacock, Non-European Roots of Mathematics* [98], « It is taking too narrow a view to equate the term "algebra" just with symbolic algebra[4]. »

Il nous semble de loin préférable de qualifier l'algèbre au moyen d'attributs qui nous renseignent soit sur l'époque soit sur la manière de la pratiquer. Ainsi, on parle d'*algèbre rhétorique* qui est un mode de résolution d'équations ou de systèmes sans aucun symbolisme, par utilisation d'une langue écrite ou parlée, qu'elle soit savante ou vernaculaire. On peut considérer que cette manière de procéder a perduré plus ou moins jusqu'au milieu du quinzième siècle. C'est à ce moment qu'on voit naître les premiers symbolismes, comme par exemple, en Italie, p̃ pour *plus* (latin) ou *più* (italien) et m̃ pour *minus* ou *meno*. L'algèbre, ainsi enrichie de ces premières tentatives de symbolisme, est souvent qualifiée d'*algèbre syncopée*. Il convient toutefois de signaler que, chez Diophante – qu'on situe généralement vers 250 après J.-C. –, on rencontre un certain symbolisme algébrique, pour l'inconnue et ses puissances, pour les signes « moins », « égal », ... Mais il faut ajouter qu'on ignore totalement la part de Diophante dans ce symbolisme qui va complètement disparaître après lui, et ce, jusqu'au XVe siècle.

L'algèbre qui s'enseigne de nos jours est bien sûr de l'*algèbre symbolique*. Le développement de ce symbolisme ne s'est pas opéré qu'en Italie. Il semble clair que le signe « + » nous vient d'Allemagne (XVe siècle) ; c'est une abréviation d'écriture de la conjonction « et ». C'est d'Allemagne aussi que vient l'usage de $\sqrt{\ }$ pour la racine ; on suppose qu'il s'agit d'une déformation de la lettre « r ». Le signe d'égalité est né en même temps à Bologne et en Angleterre au milieu du XVIe siècle. Robert Recorde, dans son *Whetstone of Witte* (Londres, 1557), justifie l'emploi de deux parallèles pour exprimer l'égalité, *bicause noe 2 thynges can be moare equalle*[5]. Le lecteur intéressé par plus de détails sur le développement du symbolisme algébrique consultera F. Cajori, *A History of Mathematical Notations* [34].

Si l'on s'intéresse au livre II des *Éléments* d'Euclide, on y trouve également une forme d'algèbre. L'interprétation de ce livre est d'ailleurs fort discutée. Certains historiens des mathématiques n'hésitent pas à parler d'*algèbre géométrique*, en ce sens que les solutions de certaines classes d'équations particulières[6] sont obtenues par des manipulations géométriques. Ainsi, par exemple, la proposition 11 de ce livre II, d'un point de vue algébrique moderne, revient à résoudre l'équation du second degré $x^2 = a(a - x)$, comme on peut le voir à la page 421.

Dès qu'on pratique une discipline scientifique, même à un niveau relativement modeste, le problème qui se pose très souvent et très concrètement, est de trouver des solutions d'équations ou de ce qui peut être considéré dans les productions anciennes comme l'équivalent de nos équations. C'est une situation à laquelle l'humanité a été très tôt confrontée. Ainsi, l'algèbre est une discipline fort ancienne. Nous allons examiner quelque peu comment se pratiquait l'algèbre à diverses époques et en différents lieux.

[3] *A priori*, la commodité de l'expression algébrique actuelle n'apparaît pas toujours clairement aux élèves.
[4] C'est une vue trop étroite que de prendre le mot « algèbre » seulement dans le sens d'algèbre symbolique.
[5] Parce que 2 choses ne peuvent être plus égales.
[6] Notons cependant que les questions posées par Euclide sont de nature géométrique.

1 Les origines des mathématiques

G. G. Joseph [98], pour le citer encore, affirme « It is taking an unnecessarily restrictive view of the history of mathematics to confine our study to written evidence[7]. » Les mathématiques, en effet, sont nées d'un besoin de compter et de retenir des nombres. On rencontre très tôt, dans les sociétés humaines qui ne possèdent pas l'écriture, des formes de comptage ou d'appariement d'une collection d'objets avec un ensemble de « marques au sens large », telles que pierres, nœuds sur une corde ou encoches sur un morceau de bois ou d'os (voir à ce propos le chapitre 15). L'Institut Royal des Sciences Naturelles de Belgique possède un témoignage de ces « proto-mathématiques » : *le bâton d'Ishango*, qui a plus ou moins vingt mille ans. C'est le géologue belge Jean de Heinzelin de Braucourt (1920 - 1998) – professeur aux universités de Bruxelles et de Gand – qui l'a exhumé d'un endroit appelé Ishango, qui se trouve sur les bords du lac Edward, l'une des plus lointaines sources du Nil, aux confins de l'Uganda et de l'ex-Congo belge, à quinze kilomètres seulement de l'Équateur.

Des preuves archéologiques montrent l'existence évidente de transmissions d'« outils agricoles ishango » vers le nord, jusqu'aux frontières de l'Égypte. D'autres témoignages écrits viennent conforter cette origine africaine profonde – en fait, éthiopienne – du peuple égyptien. C'est peut-être une explication du caractère très ancien des mathématiques égyptiennes.

2 L'Égypte

On le sait, l'Égypte est avec la Mésopotamie, l'Inde et la Chine, le berceau d'une des grandes civilisations qui se développent le long des vallées d'Afrique et d'Asie, il y a quelque cinq mille ans. Que s'y est-il passé ?

Sans doute la découverte progressive de « bonnes » méthodes pour contrôler inondations, irrigation et drainage a-t-elle contribué à améliorer la production agricole, ce qui constitue un premier pas vers une sédentarisation. Entre 3500 et 3000 avant Jésus-Christ, les communautés agricoles qui vivent le long des rives du Nil font peu à peu bloc pour former deux royaumes, la Haute et la Basse-Égypte. Une légende raconte que, vers 3100, un certain *Min*, qui vient de Nubie – une partie de l'actuel Soudan –, fonde une longue lignée de Pharaons, en fait trente-deux dynasties, qui vont régner sur une société stable mais assez isolée durant trois mille ans.

C'est notamment dans ce pays que se développent les premières mathématiques écrites. L'historien Hérodote (Ve siècle av. J.-C.), dans le livre II – qui s'appelle *Euterpe* – de ses *Histoires* [83][92], nous dit que ce fut *Min* le premier roi d'Égypte qui a fait élever la digue pour créer Memphis. Plus loin, il nous raconte encore que *Sesostris*[8] a partagé le pays entre tous les Égyptiens en donnant à chacun une égale parcelle de terre, pour laquelle il exigeait une taxe annuelle. Tout homme dont la propriété subirait des dommages par le débordement du fleuve irait les déclarer devant le roi, qui enverrait des inspecteurs pour mesurer l'étendue de la perte, de manière qu'à l'avenir, chacun ne paie qu'une taxe proportionnelle à la dimension à laquelle sa propriété a été estimée. Et l'historien ajoute, qu'à son avis, c'est à partir de là que la géométrie fut inventée et passa ensuite en Grèce. Il poursuit en signalant que la connaissance du cadran solaire, du gnomon, et des douze divisions du jour est arrivée en Grèce venant de Babylone.

[7] C'est avoir un point de vue inutilement restrictif sur l'histoire des mathématiques que de confiner notre étude à des documents écrits.

[8] Il s'agit du pharaon *Ramses II*, env. 1300 av. J.-C.

Certes, au départ, il s'agit bien de géométrie, d'arpentage... Mais lorsqu'il faut calculer la nouvelle taxe à payer, on tombe évidemment sur ce que nous appelons une règle de trois, qui va évoluer vers une forme d'algèbre.

Au fur et à mesure du développement de la civilisation égyptienne, le « calcul d'inconnues » trouve d'autres applications, notamment dans les pratiques financières et commerciales. Ce n'est cependant pas en algèbre que la culture mathématique égyptienne culmine – et nous allons tenter d'en comprendre quelque peu le pourquoi –, mais plutôt dans la construction des pyramides.

Il nous reste très peu de témoignages mathématiques de l'Égypte ancienne. La raison en est évidente : le support d'écriture utilisé par le scribe, le papyrus, est très fragile. Les documents les plus importants sont le *papyrus Rhind* et le *papyrus de Kahun*, tous deux conservés au British Museum, ainsi que le *papyrus de Berlin* et le *papyrus de Moscou*.

Le scribe égyptien Ahmes, par exemple, qui a recopié le *papyrus Rhind* vers le milieu du seizième siècle avant Jésus-Christ, utilise, comme tous ses « collègues scribes égyptiens », un système de numération décimal non positionnel. Ce système n'est pas plus commode que la numération romaine, par exemple, pour effectuer des multiplications ou des divisions. Aussi, le scribe opère-t-il la multiplication par duplications successives. Quant à la division, il la ramène à une multiplication (également par duplications). Pour diviser a par b, il préfère se poser la question de savoir par quoi il doit multiplier b pour obtenir a.

Les difficultés qu'entraîne l'utilisation d'un tel système n'ont pas permis aux Égyptiens de développer de bons algorithmes de résolution d'équations ou de systèmes, qui d'ailleurs sont presque tous du premier degré. La méthode de recherche de la valeur des inconnues repose sur le principe de fausse position, qui s'enseignait encore dans nos classes primaires au début du vingtième siècle. C'est une technique qui s'appuie sur la théorie des proportions. Une activité sur cette manière de résoudre des équations est proposée dans la publication du CREM, *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur* [48].

On trouve encore l'une ou l'autre équation ou système du deuxième degré dans les papyrus de Berlin et Kahun, mais ce sont des problèmes triviaux. En notation moderne, ces exemples s'écrivent

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 100 \\ 4x-3y &= 0, \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} xy &= a \\ x &= by. \end{cases}$$

3 La Mésopotamie

La Mésopotamie est la vaste région située entre les vallées du Tigre et de l'Euphrate ; elle recouvre des territoires des états actuels de la Syrie et de l'Iraq. C'est là que se sont succédés pendant près de 3 000 ans les civilisations sumérienne, babylonienne et assyrienne. L'écriture cunéiforme[9] y est inventée vers 3200 avant J.-C. par les Sumériens. Vers 2000 avant J.-C., le pays est conquis par les Akkadiens, peuple sémitique qui conservera la culture et l'écriture des Sumériens et établira des lexiques sumériens-akkadiens sans lesquels nous n'aurions sans doute pas eu accès à leurs écrits. Les premières dynasties babyloniennes et assyriennes s'installent à cette époque, et la cité de Babylone ne cessera d'être le principal pôle culturel de la région jusqu'au début de l'ère chrétienne.

C'est un pays où se développent aussi les premières mathématiques écrites, plus ou moins à

[9] Du latin *cuneus*, qui signifie « coin », pour fendre ou pour caler. L'empreinte laissée par le stylet du scribe mésopotamien dans l'argile évoque la forme d'un coin.

la même époque qu'en Égypte. La plupart des textes mathématiques qui nous sont parvenus datent de la période paléo-babylonienne, qu'on situe de 1800 à 1600 avant J.-C.[10] Ils sont écrits en cunéiforme sur des tablettes d'argile ; la langue utilisée est l'akkadien. Les autres écrits mathématiques, moins nombreux, ont été composés durant les trois derniers siècles avant Jésus-Christ, à l'époque séleucide. Il faut encore ajouter qu'on ne sait rien de la genèse des textes de la période paléo-babylonienne.

On peut estimer le nombre de tablettes présentes dans les musées à environ un million, dont une très faible proportion a un rapport avec les mathématiques. Les « tablettes mathématiques » sont de deux types : des tables et des textes de problèmes, parmi lesquels des résolutions d'équations quadratiques, révélant ainsi une certaine forme d'algèbre. Les problèmes étudiés ont leur source dans la vie économique – commerce, poids et mesures, impôts et intérêts, superficie et production – et dans l'activité astronomique – calendrier et astrologie.

Les Sumériens avaient adopté un système de numération sexagésimal et positionnel, que les Babyloniens vont perpétuer dans leurs écrits scientifiques. L'explication du choix de la base soixante est très controversée. La plupart des arguments avancés, comme par exemple le fait que soixante possède de nombreux diviseurs, ou d'autres, liés à l'astronomie, ... ne sont guère convaincants car ce sont toujours des arguments *a posteriori*.

Le Mésopotamien dispose ainsi d'un système de numération positionnel, mélange de base 60 et 10, plus performant que le système égyptien et va donc développer des méthodes de résolutions d'équations. En fait, il résout les équations du deuxième degré par une procédure analogue à la nôtre[11]. Mais, il ne se sert pas de lettres et décrit avec des mots les opérations à effectuer, dans le style « Prends tel nombre, multiplie-le par tel autre... » C'est un exemple type d'algèbre rhétorique (voir aux pages 417 et 419). Il faut cependant remarquer que, sur l'ensemble de toutes les tablettes d'argile recensées à ce jour, on ne trouve jamais de résolution d'une classe de problèmes, mais toujours de problèmes particuliers.

Certains historiens reconnaissent, chez les Mésopotamiens, des traces d'algèbre syncopée. En fait, la géométrie, souvent sous-jacente dans les problèmes traités, a provoqué l'apparition de certains termes pour désigner des quantités inconnues. Le mot *ush* (longueur) s'utilise pour noter l'inconnue x, *lagab* (carré) désigne x^2. Dans les systèmes, le terme *sag* (largeur) représente y et *sukud* (hauteur), z. Enfin, le produit xy est appelé *asha* (aire) et xyz, *sahar* (volume).

Le système positionnel mésopotamien possède plusieurs faiblesses. L'une d'elle est l'absence d'un symbole pour le zéro, qui rend parfois ambiguë la lecture du nombre. En effet, si une place est non occupée, on laisse un blanc mais... de quelle dimension ? Une autre faiblesse est de ne pas posséder de symbole pour séparer la partie entière d'un nombre de sa partie fractionnaire, ce qui induit également une ambiguïté. D'autre part, les Mésopotamiens font un usage intensif de tables : multiplications, carrés, cubes, inverses, racines carrées, ... Les raisons sont diverses. L'une d'elles est que les multiplications ne sont guère aisées en base 60. En effet, pour multiplier mentalement en base 10, il est nécessaire de connaître « par cœur » 36 produits (en éliminant les multiplications banales par 0 et par 1 et en faisant usage de la commutativité) ; par contre, la base 60 exige, elle, la connaissance de 1 711 produits ! Quant aux tables d'inverses, elles sont rendues nécessaires par le fait que la division est traitée comme une multiplication par l'inverse du diviseur.

Pour terminer, signalons encore que les observations réalisées par les astronomes babyloniens

[10] *Hammurabi*, dont le code constitue la plus ancienne collection de lois connue, a régné de 1792 à 1750 av. J.-C.
[11] Il faut rester conscient du fait que le Mésopotamien ne connaît pas les nombres négatifs.

pendant des siècles, ont été recueillies et utilisées par les Grecs, qui ont renoncé à convertir cette masse d'informations dans un système décimal de numération. Ainsi, PTOLÉMÉE, qui travaillait à Alexandrie de 127 à 141 après J.-C., les mentionne dans son *Almageste*. Plus tard, l'astronomie grecque sera transmise à l'Europe par l'intermédiaire de la civilisation arabo-musulmane. C'est ainsi que nous retrouvons la trace du système babylonien dans la division sexagésimale des degrés et des heures.

Les quelques faits esquissés ci-dessus ont essentiellement pour source *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics)* [98], *The Exact Sciences in Antiquity* [111], *Une introduction à l'histoire de l'algèbre* [129] et *Introduction aux mathématiques babyloniennes* [131].

4 L'empire arabe

4.1 Introduction

Le chapitre 16 brosse un rapide survol des événements qui ont favorisé la naissance et la rapide expansion de l'empire arabe et met en exergue quelques faits marquants qui s'y sont déroulés.

Le principe de numération décimale positionnelle et les chiffres que nous utilisons de nos jours nous ont été transmis par les Arabes, vers la fin du Xe siècle, notamment à l'occasion des croisades. Mais cette apparition est, au début, très timide : la numération romaine sera encore longtemps utilisée par la suite. C'est à tort que nous appelons ces chiffres « arabes » car les Arabes eux-mêmes n'en ont jamais revendiqué la paternité ; ils parlent au contraire de « calcul indien » et de « figures indiennes ». L'expression « chiffres indo-arabes » est ainsi plus appropriée. De nos jours, il y a deux formes de chiffres indo-arabes, ceux d'Occident et ceux d'Orient. Ce sont deux déformations des « figures indiennes » d'origine ; il n'est d'ailleurs pas difficile de leur trouver certaines ressemblances :

Occident	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Orient	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Le premier ouvrage arabe que nous connaissons, dans lequel ce système et les opérations de calcul qui s'y rapportent sont décrits, est le *kitāb al-ḥisāb al-hindī* (الكتاب الحساب الهندي) c'est-à-dire le *Livre du calcul indien*. Son auteur est MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḪWĀRIZMĪ (محمّد بن موسى الخوارزمي), littéralement Muḥammad, fils de Moïse, qui vient du Ḫwārizm[12]. Cette région est située au sud de la mer d'Aral, comme on peut le voir sur la carte à la page 506. Le « surnom de provenance », *al-Ḫwārizmī* va donner naissance au mot latin *algorismus*, titre des traités produits par les compilateurs d'Europe qui ont traduit en latin les ouvrages écrits en langue arabe. Une déformation de ce terme aboutit au mot français « algorithme ». AL-ḪWĀRIZMĪ a vécu plus ou moins entre les années 780 et 850 de notre ère. Il travaille à Baġdād, à la Maison de la Sagesse fondée par le calife abbasside al-Ma'mūn, qui règne de 813 à 833.

Le *Livre du calcul indien* ne nous est parvenu que dans une traduction latine peut-être commencée au XIIe siècle, mais le seul manuscrit connu à ce jour date du XIIIe siècle. Il est conservé

[12] Certains historiens des mathématiques pensent qu'il est né dans une région de l'Iraq actuel, et que ses ancêtres sont originaires du Ḫwārizm.

à la bibliothèque de l'Université de Cambridge [6]. Il ne semble pas être une traduction fidèle de l'arabe ; on y trouve des erreurs, il y a des « blancs »... Il commence par les mots *Dixit Algorismi*, c'est-à-dire « Algorismi a dit... » et se termine au milieu d'un exemple sur la multiplication des fractions.

4.2 Le contenu du « traité d'*al-ğabr* »

Avant d'écrire le traité d'arithmétique en question, AL-ḪWĀRIZMĪ a composé un opuscule intitulé الكتاب المختصر في حساب الجبر و المقابلة, *al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr w-al-muqābala*, ce qui signifie le *Livre abrégé sur le calcul par le ğabr et la muqābala*[13] [5].

Dans sa préface, l'auteur fait la traditionnelle louange à *Allah*. Il a également une pensée émue pour tous ceux qui sont maintenant morts et qui ont consacré une partie de leur vie à écrire des ouvrages de science. Il remercie l'Imam al-Ma'mūn, protecteur de la science, Commandeur de la Foi, qui l'a encouragé à écrire ce petit ouvrage sur le *Calcul par la restauration et la comparaison* ; c'est cette dédicace qui permet de dater le livre d'avant l'année 833, année qui marque la fin du califat d'al-Ma'mūn. La préface se termine par l'énoncé du contenu de l'opuscule, à savoir tout ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique, ce dont on a besoin dans les cas d'héritages, de legs, de partages, d'actions en justice, de commerce, dans les relations entre les hommes, la mesure des terres, le creusement de canaux, le calcul géométrique et d'autres choses variées... Ce texte a été établi et traduit en anglais par F. ROSEN[14] [5]. Le texte arabe de cette version bilingue comporte cent vingt-deux pages ; cette préface y occupe les deux premières pages.

Ensuite, AL-ḪWĀRIZMĪ présente un bref rappel du système décimal et fait observer que les nombres qui sont requis dans le calcul par la restauration et la comparaison, sont de trois types, à savoir des racines, des *māl(s)* et des nombres simples, qui n'ont aucun lien avec la racine ou le *māl*[15]. Tout nombre, dit-il, appartenant à l'une de ces trois classes peut être égal à un nombre d'une autre classe ; on peut dire, par exemple « des carrés sont égaux à des racines » ou « des carrés sont égaux à des nombres » ou « des racines sont égales à des nombres ». Dans notre formalisme moderne, ce sont les trois cas $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, où a, b et c sont bien sûr strictement positifs[16]. L'auteur indique alors comment agir dans ces trois cas relativement simples, en ramenant à l'unité le coefficient du carré ou de la racine. À la page 5, il signale que les trois types, à savoir, racines, carrés et nombres, peuvent se combiner entre eux et que cela fait apparaître trois espèces composées qui sont « des carrés et des racines sont égaux à des nombres », « des carrés et des nombres sont égaux à des racines », « des racines et des nombres sont égaux à des carrés ». En formalisant, cela donne $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$,

[13] Nous verrons plus loin qu'il s'agit de deux opérations mathématiques, que l'on peut traduire par les mots *restauration* et *comparaison*.

[14] Comme il a été dit au chapitre 13, ROSEN a établi le texte arabe à partir du seul manuscrit disponible à son époque ; il s'agit du manuscrit de la *Bodleian collection* à Oxford. Il est contenu dans le volume numéroté CMXVIII. *Hunt.* 214, *fol.*, et porte la date de la transcription A.H. 743 (1342 après J.-C.). A.H. 743 signifie année 743 de l'hégire.

[15] Le mot arabe *māl* (مال) signifie bien, argent, richesse, capital, fortune, troupeau... Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. Dans le texte qui suit, nous dirons désormais « carré ».

[16] Ce n'est qu'au XVIIe siècle que les quantités négatives acquerront – et au prix de quelles difficultés ! – le statut de nombres. Zéro n'est pas un nombre, mais seulement un symbole. Par conséquent, 0 ne peut être racine d'une équation. Ainsi l'équation $5x^2 = 10x$ devient $x^2 = 2x$ qui a comme unique racine $x = 2$.

$bx + c = ax^2$, où a, b et c sont strictement positifs[17]. Pour chacune de ces formes, AL-ḤWĀRIZMĪ traite un ou plusieurs exemples ; il explique l'algorithme à utiliser sur l'exemple puis l'énonce de manière générale, dans le genre « prends la moitié du nombre des racines, multiplie-la par elle-même, ... » Lorsque le cas s'y prête, il discute le nombre de racines (positives, évidemment) selon le signe de ce que nous avons coutume d'appeler Δ. Finalement, il démontre chacun des algorithmes par des arguments géométriques. Un des cas est développé et commenté à la page 408 du présent ouvrage ; c'est une manière d'introduire dans les classes la résolution de l'équation du deuxième degré. Nous sommes ainsi arrivés à la page 15 de l'ouvrage et la « théorie » est terminée... Pendant plus de cinq siècles, on enseignera les équations dans le même ordre que celui du traité d'AL-ḤWĀRIZMĪ, et en se référant aux mêmes exemples, devenus des paradigmes. On les trouve notamment dans le *Liber abaci* de FIBONACCI, dont la première édition [70] remonte à 1202 ou la *Summa* de 1494 de Luca PACIOLI [114].

De la page 15 à la page 24, l'auteur enseigne à faire les multiplications que nous écririons aujourd'hui $(10-x)(10+x)$, $(x\pm a)(y\pm b)$, ... à additionner, soustraire et diviser des expressions avec des radicaux carrés.

De la page 25 à la page 48, on trouve toute une série de problèmes qui débouchent sur des équations à résoudre. Nombreux sont ceux dont l'énoncé commence par « j'ai divisé dix en deux parties et... » et on manipule ces deux parties : on les multiplie entre elles, on les ajoute ou soustrait, ce qui donne un certain résultat. Évidemment, à partir de là, il faut retrouver les parties.

Les pages 48 à 50 traitent rapidement des transactions commerciales, qui ne sont jamais que des problèmes de proportionnalité entre quatre nombres : une quantité de référence, un prix, une quantité à acquérir et le total à payer. Trois de ces nombres sont connus et il faut déterminer le quatrième.

Les pages 50 à 64 de l'ouvrage s'intéressent à la géométrie ; on y trouve des formules d'aires et de volumes, mais aussi des problèmes issus de la tradition d'arpentage, comme « Une terre triangulaire a, sur chacun de ses deux flancs[18], dix coudées, et sur la base, douze ; quelle doit être la longueur du côté d'un carré qu'on construirait à l'intérieur du triangle ? » Il faut bien entendu que deux des sommets du carré soient sur la base et chacun des deux autres, sur un des deux « flancs ». Dans la résolution, AL-ḤWĀRIZMĪ appelle شيء (*šaī'*) le côté du carré.

Ce terme sera traduit en latin par *res*, en italien par *cosa*, en français par *chose*. Il désigne l'inconnue que nous notons aujourd'hui x.

De la page 65 à la page 98, l'auteur résout des problèmes de partage de legs et l'ouvrage se termine par un chapitre sur le calcul des retours. L'idée de ces « retours » est de protéger les héritiers et les parents proches, en limitant le pouvoir d'un testateur malade, qui lègue des biens ou émancipe un esclave. Le calcul des retours permet de fixer le montant que vont récupérer les proches en cas de décès relativement immédiat dudit testateur.

Voilà donc le contenu un peu inattendu de l'opuscule que de nombreux historiens des mathématiques s'accordent à considérer comme le « texte fondateur » de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application.

[17] Le cas $ax^2 + bx + c = 0$ n'apparaît pas, car une somme de quantités strictement positives ne peut pas être égale à « rien ». Il faut bien être conscient que c'est parce qu'il ne dispose pas des nombres négatifs qu'AL-ḤWĀRIZMĪ se trouve devant trois cas distincts. Le mathématicien Simon STEVIN, dans ses *Livres d'arithmétiques* [130], affirme, contrairement à STIFEL et CARDAN, qu'on peut résoudre les trois cas avec une seule règle en utilisant des quantités négatives. Il ne considère toutefois pas les racines négatives de l'équation comme solutions.

[18] Ce sont les termes utilisés par AL-ḤWĀRIZMĪ, termes issus du langage des corporations.

4.3 L'algèbre comme « science constituée »

Quel a été le rôle exact d'AL-ḤWĀRIZMĪ, qu'a-t-il vraiment inventé ? Quelles sont ses sources ? Nous allons tenter de donner un début de réponse à ces questions. Mais pour cela, il faut examiner quelque peu la situation à cette époque.

Il existe une algèbre chinoise ; on la trouve notamment dans *Les neuf chapitres sur l'art du calcul* ; ce traité date du premier siècle après J.-C., et il a été commenté au troisième siècle par LIU HUI. Il a été récemment réédité [99] ; on y trouve des résolutions de systèmes par des méthodes tout à fait comparables aux triangulations de matrices ! Il n'y a pas trace de cela chez les Arabes au IXe siècle. L'algèbre chinoise n'est donc pas une source plausible.

Une influence euclidienne semble être également à rejeter, car on ne trouve pas de références précises aux propositions des *Éléments* d'EUCLIDE qui pourraient étayer les raisonnements.

La tradition indienne est très riche en algèbre, en particulier chez deux auteurs antérieurs à AL-ḤWĀRIZMĪ, à savoir ĀRYABHAṬA (né en 476 apr. J.-C.) et BRAHMAGUPTA (né en 598 apr. J.-C.). Mais les Arabes ne signalent jamais l'influence indienne en algèbre, or, on l'a vu, ils en parlent pour les chiffres par exemple, ou pour l'astronomie. Une hypothèse émise par A. DJEBBAR est la suivante : si les Arabes, qui ont eu de nombreux contacts avec l'Inde, ne parlent pas des méthodes indiennes, c'est que celles-ci ne les ont pas étonnés, et cela parce qu'ils connaissaient déjà les procédures qui existaient dans le « Croissant fertile », dans la tradition babylonienne...

Le rôle d'AL-ḤWĀRIZMĪ a été de rassembler toutes les procédures de calcul qui s'utilisaient dans ces contrées et d'« abréger » tout cela, d'où le titre de son opuscule. On l'a vu, les Mésopotamiens ne résolvaient pas des classes de problèmes, mais des énoncés au coup par coup. AL-ḤWĀRIZMĪ, lui, va réduire tous les problèmes (de degré au plus 2) à six classes, par l'utilisation de deux opérations. La première est *al-ğabr* – qui a donné naissance au vocable algèbre. Ce mot vient de la racine trilitère *ğbr*, qui donne l'idée de « restaurer, réparer, redresser » ; nous dirons donc *restauration*. La seconde opération est *al-muqābala* ; le *mu* est un préfixe passif, quant à la racine *qbl*, elle donne l'idée d'*opposition*, de *comparaison*, d'où l'expression *calcul par la restauration et la comparaison*.

Par exemple, soit l'équation que nous écririons $4x^2 - 9x + 5 = 3x^2 + 2x + 4$. AL-ḤWĀRIZMĪ dirait « quatre *māl* diminués de neuf *ğiḏr* et augmentés de cinq *dirhams*[19] sont égaux à trois *māl* augmentés de deux *ğiḏr* et de quatre *dirhams* ». Nous allons faire agir la première opération, *al-ğabr*, pour restaurer les quantités soustraites. Cela peut se faire en ajoutant, en langage moderne, $9x$ au deux membres. Il vient alors $4x^2 + 5 = 3x^2 + 11x + 4$. S'il y a d'autres quantités soustraites à restaurer, on procède de la même manière[20]. Ensuite, on utilise la deuxième opération, *al-muqābala*. On compare l'espèce des *māl* et on enlève $3x^2$ de chaque membre (il faut n'avoir que des nombres positifs). Il vient $x^2 + 5 = 11x + 4$. On compare enfin l'espèce des *dirhams* et on ôte 4 de chaque côté, ce qui donne $x^2 + 1 = 11x$ qui est bien une des six formes canoniques, la cinquième, en l'occurrence.

Signalons encore qu'il existait une autre méthode – qu'AL-ḤWĀRIZMĪ ne mentionne pas dans son traité – pour résoudre des équations ou systèmes linéaires, appelée méthode de fausse position

[19] L'unité de monnaie a coutume de désigner ce que nous appelons le terme indépendant.

[20] Dans un article non encore paru, intitulé *The Vocabulary of Early Arabic Algebra*, Jeffrey A. OAKS de l'université d'Indianapolis, donne une nouvelle interprétation de l'utilisation du mot *al-ğabr*. Il considère l'équation $10x - x^2 = 21$ et explique qu'on ne restaure pas x^2, mais bien $10x$; car $10x - x^2$ est un « $10x$ » diminué et il doit donc être restauré en ajoutant x^2. OAKS n'est pas le seul à défendre cette interprétation.

(simple ou double). Les Arabes l'utilisent mais ne disent pas qu'ils l'ont inventée. Elle existe aussi chez les Indiens et les Chinois. Cette méthode va perdurer jusqu'au XVIe siècle chez les Arabes et jusqu'au XXe chez nous. Son intérêt est qu'elle permet de ne pas manipuler trop vite des fractions dans le processus de résolution du problème. Le lecteur intéressé peut consulter, à ce sujet, une publication précédente du CREM [48] où le procédé est présenté et discuté.

4.4 L'algèbre après AL-ḪWĀRIZMĪ

Nous l'avons déjà dit, si AL-ḪWĀRIZMĪ a démontré certains procédés de calcul par la géométrie, il ne cite pas explicitement de propositions puisées dans *Les Éléments* d'EUCLIDE. Le grand mathématicien sabéen[21] ṮĀBIT IBN QURRA (ثابت بن قرّ), mort en 901, introduit, lui, la géométrie euclidienne dans l'algèbre ; il connaît fort bien le texte d'EUCLIDE, puisqu'il en est un des nombreux traducteurs.

Un peu plus tard, l'égyptien ABŪ KĀMIL (ابو كامل), mort en 930, va faire une tentative pour se dégager de la géométrie ; il ne tient plus compte de l'homogénéité dans la manipulation des grandeurs : parfois le carré de l'inconnue est représenté par un segment. Deux de ses ouvrages nous sont parvenus, *Le livre complet en algèbre* et *Les choses rares en algèbre*.

Le monde musulman va connaître bien d'autres grands algébristes que nous ne mentionnerons pas ici. Disons encore toutefois que IBN AL-BANNĀ (بن البنّا), mort en 1321, donne lui, des démonstrations, sans se référer du tout à la géométrie, mais plutôt à la tradition du calcul mental.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que d'équations de degré au plus deux. Des tentatives vont être réalisées pour résoudre des équations du troisième degré.

4.5 'Umar ibn Ibrāhīm AL-ḪAYYĀM et les équations du troisième degré

'Umar ibn Ibrāhīm AL-ḪAYYĀM (عمر بن ابراهيم الخيّامى) est né vers 1048 à *Nayšabūr*[22] dans le *Ḫurāsān*, une partie de l'Iran actuel. C'est dans cette même ville qu'il mourra en 1131, après avoir beaucoup voyagé.

On connaît peu de choses sur sa vie. Il avait une double formation de mathématicien et de philosophe. Pour cette dernière discipline, il était élève de بهمنيار (BAHMANYĀR), lui-même disciple direct de الرءيس ابن سينا, c'est-à-dire le Maître IBN SĪNĀ, plus connu sous le nom d'AVICENNE.

L'historien بن الاثير (IBN AL-AṮĪR) nous rapporte, qu'en l'année 467 de l'hégire (1074-1075), AL-ḪAYYĀM était à *Isfahan*, dans l'équipe des astronomes au service du Sultan seldjoukide[23] ملكشاه (MALIKŠĀH) et de son vizir نظام الملك (NIẒĀM AL-MULK). MALIKŠĀH souhaitait une réforme du calendrier.

---

[21] Le Saba' (سبأ) est un ancien royaume préislamique du sud-ouest de l'Arabie, correspondant à l'actuel Yémen.

[22] On l'écrit souvent Nichāpur.

[23] Les Seldjoukides sont membres d'une tribu d'origine turque qui a émigré du Turkestan vers le Proche-Orient et a établi son pouvoir sur l'Asie Mineure du milieu du XIe à la fin du XIIIe siècle. C'est la première dynastie turque dans l'Orient méditerranéen.

'Umar AL-ḪAYYĀM a écrit de nombreux ouvrages scientifiques et philosophiques, dont la paternité ne laisse aucun doute. Nous ne nous intéresserons ici qu'à son *Traité d'algèbre et d'al-muqābala*.

Après la traditionnelle louange à Allah, on peut y lire

> Une des théories mathématiques dont on a besoin dans la partie des sciences philosophiques connue sous le nom des sciences mathématiques, c'est l'art de l'algèbre, lequel a pour but la détermination des inconnues, soit numériques, soit géométriques. Il se rencontre dans cette science des problèmes, dépendant de certaines espèces très difficiles de théorèmes préliminaires, dans la solution desquelles ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupés. Quant aux anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrages qui en traitent ; peut-être, après en avoir cherché la solution et après les avoir étudiés, n'en avaient-ils pas pénétré les difficultés ; ou peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen ; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue. Quant aux modernes, c'est الماهاني (AL-MĀHĀNĪ) qui parmi eux conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par ARCHIMÈDE dans la quatrième proposition du second livre de son traité *De la sphère et du cylindre* ; or il fut conduit à une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres, qu'il ne réussit pas à résoudre, après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On déclara donc que cette résolution était impossible, jusqu'à ce que parût ابو جعفر الخازن (ABŪ ĞA'FAR AL-ḪĀZIN), qui résolut l'équation à l'aide des sections coniques. Après lui tous les géomètres avaient besoin d'un certain nombre des espèces[24] des susdits théorèmes, et l'un en résolut une, et l'autre une autre. Mais aucun d'eux n'a rien émis sur l'énumération de ces espèces, ni sur l'exposition des cas de chaque espèce, ni sur leurs démonstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, que je ne manquerai pas de faire remarquer. Moi, au contraire, je n'ai jamais cessé de désirer vivement de faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi que de distinguer parmi les cas de chaque espèce, les possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur des démonstrations ; car je savais combien est urgent le besoin de ces théorèmes dans les difficultés des problèmes. [...]

Afin de situer quelque peu ces événements dans le temps, signalons que AL-MĀHĀNĪ est mort en 880, et ABŪ ĞA'FAR AL-ḪĀZIN, plus ou moins vers 970. Peu de temps après, إبن الهيثم (IBN AL-HAYṬAM) – mort vers 1039 –, connu sous le nom d'ALHAZEN en Occident, résout le problème d'ARCHIMÈDE à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole. AL-ḪAYYĀM, lui, classe toutes les équations de degré inférieur ou égal à trois en vingt-cinq espèces et donne, pour chacune d'elles, la solution générale. Il signale clairement les espèces qui ne peuvent se traiter que par intersection de courbes coniques. Il ne parviendra cependant pas à donner une formule de résolution des équations du troisième degré.

[24] C'est-à-dire d'autres cas d'équations de degré 3.

5 L'algèbre en Occident

Les travaux des mathématiciens arabes ont été connus en Europe occidentale, notamment par l'intermédiaire de l'Espagne et du sud de l'Italie.

On voit se développer en Occident des tentatives pour trouver une formule de résolution de l'équation du troisième degré, par exemple chez Paolo Gerardi (1328), chez Dardi de Pise, à la fin du XIVe siècle et chez Luca Pacioli à la fin du XVe siècle.

C'est vers 1510 que Scipione dal Ferro (1465–1528), qui enseigne à l'Université de Bologne dès 1496, découvre la formule qui permet de résoudre l'équation $x^3 + px = q$, où p et q sont bien sûr positifs. Un peu avant sa mort, il confie cette formule à son élève Antonio Maria Fior.

À l'époque, en Italie, l'obtention d'une « chaire » à l'université dépendait de concours ou « tournois », en l'occurrence ici mathématiques. Fior, en possession de la formule de son maître, imagine donc, afin d'assurer sa « carrière académique », de défier un mathématicien qui avait déjà une certaine renommée et qui par là, était un rival sérieux. Ce mathématicien s'appelait Nicolò Fontana, surnommé Tartaglia (env. 1500–1557). Fior lui propose trente problèmes dont six débouchent sur une équation du type $x^3 + px = q$.

Piqué au vif, se consacrant à fond à la recherche des solutions demandées, Tartaglia finit par trouver, le 12 février 1535, c'est-à-dire huit jours avant l'échéance fixée, non seulement les réponses aux problèmes posés par Fior, mais en plus, une extension de la formule de résolution au cas $x^3 = px + q$, ignoré par Fior. Ceci met définitivement fin aux prétentions de ce dernier. Mais, malheureusement pour lui, Tartaglia va rencontrer Girolamo Cardano (1501–1576).

Cardan est en fait un personnage fort bizarre : médecin, mécanicien, mathématicien, joueur, astrologue – il a même tenté de dresser l'horoscope de Jésus. Fâcheuse idée sous l'Inquisition, qui le fait incarcérer en 1570. Sa réputation scientifique lui permet cependant de se retrouver quelques mois plus tard à Rome, avec une pension papale !

Cardan, ayant appris que Tartaglia connaît les formules de résolution des cas $x^3 + px = q$ et $x^3 = px + q$, le prie de les lui communiquer. Après un premier refus, Tartaglia est finalement contraint, par certaines circonstances, à confier les formules à Cardan qui promet de les garder secrètes. Il les publiera cependant en 1545, dans son *Ars Magna* [35], en citant quand même le nom de Tartaglia. Cela mettra cependant fin aux « bonnes » relations entre les deux compères !

Ainsi, au chapitre onze de l'*Ars magna*, qui s'intitule *Sur le cube et la première puissance égale au nombre*, Cardan écrit :

« Il y a bien près de trente ans que Scipio Ferro de Bologne a découvert la règle et l'a transmise à Antonio Maria Fior de Venise, dont la compétition avec Niccolò Tartaglia de Brescia a donné à Niccolò l'occasion de la découvrir. Lui [Tartaglia] me l'a donnée en réponse à mes demandes instantes, mais sans la démonstration. Armé de cette aide, j'ai recherché sa démonstration sous <différentes> formes. Ce fut très difficile. Ma version de celle-ci suit... »

Cardan, aidé de son élève Ludovico Ferrari (1522–1565) va poursuivre les recherches et aboutir à une autre formule, cette fois pour résoudre l'équation du quatrième degré.

Et au-delà du quatrième degré ? Les succès dont nous venons de rendre compte ont incité les mathématiciens à rechercher des formules permettant de résoudre des équations de degré 5 ou plus. En fait, il est toujours possible de résoudre une équation de degré 2, 3 ou 4 en se ramenant, par un changement de variable, à une équation de degré moindre. Une idée assez naturelle est

donc d'essayer d'appliquer cette même méthode aux équations de degrés 5, 6, ... Très vite, on s'aperçoit que pour résoudre de telles équations, les calculs intermédiaires semblent toujours faire appel à une équation de degré supérieur à celui de l'équation de départ.

L'Italien P. Ruffini (1755–1822) démontre, de manière imparfaite, qu'on ne peut résoudre, à l'aide d'une formule générale, n'importe quelle équation de degré supérieur à 4.

N. Abel (1802–1829), de nationalité norvégienne, pense avoir trouvé une solution générale de l'équation du cinquième degré. Mais il y a une erreur dans son raisonnement, erreur qu'il finit par déceler et qui le conduit à démontrer l'impossibilité de trouver une formule algébrique donnant la solution générale de n'importe quelle équation du cinquième degré.

C'est finalement Évariste Galois (1811–1832) qui, partant d'une idée de Lagrange, finit par régler définitivement le problème en démontrant qu'il n'existe pas de formule algébrique donnant la solution générale de n'importe quelle équation de degré n, où $n > 4$. Ce faisant, il introduit la théorie des groupes. C'est à partir de ce moment que l'algèbre va progressivement s'intéresser à l'étude des structures (groupes, anneaux, corps, ...)

Nous dirons un dernier mot sur l'équation du troisième degré, qui a en quelque sorte poussé les mathématiciens à donner un statut aux nombres imaginaires.

Dans la résolution de l'équation du troisième degré, au moyen de la formule dite de Cardan, il apparaissait parfois une racine carrée d'un nombre négatif, ce qui posait évidemment problème à l'époque. Ainsi, par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 = 51x + 104$ (écrite ici en notation moderne), dont une solution est $x = 8$, il vient l'équation auxiliaire $u^2 - 104u + 17^3 = 0$. On constate que le degré de cette dernière équation n'est plus que 2 ! On calcule son discriminant qui vaut $-2\,209$, ce qui conduit aux solutions (toujours en notation moderne) $u_1 = 52 + 47\sqrt{-1}$, $u_2 = 52 - 47\sqrt{-1}$. La formule de Tartaglia-Cardan nous enseigne alors qu'une solution de l'équation du troisième degré est $\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} = 4 + \sqrt{-1} + 4 - \sqrt{-1} = 8$. En fermant les yeux au bon moment, tout va pour le mieux ! C'est Raphaël Bombelli (1526–1572) qui le premier, donnera une définition des opérations (addition, soustraction, multiplication) sur ces quantités « imaginaires », sous une forme proche de celle que nous connaissons. Dans son *Algèbre* datée de 1572, on trouve la comptine suivante :

Più via più di meno fa più di meno,
Meno via più di meno fa meno di meno,
Più via meno di meno fa meno di meno,
Meno via meno di meno fa più di meno,
Più di meno via più fa meno,
Più di meno via meno di meno fa più,
Meno di meno via più di meno fa più,
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Le lecteur n'aura sans doute pas trop de mal à continuer la traduction : $(+) \cdot (+i) = +i$, $(-) \cdot (+i) = -i$, ...

Chapitre 18

L'évolution de la pensée géométrique, des problèmes d'arpentage à l'étude des espaces

Préambule

Ce chapitre n'a nullement l'intention d'esquisser une histoire – même modeste – de la géométrie. Il veut simplement poser quelques jalons qui permettent d'appréhender plus aisément cet aspect des mathématiques et de mieux s'imprégner de l'évolution de la pensée géométrique. Ces jalons vont marquer une période qui s'étend des premiers essais de représentation de l'espace, des problèmes d'arpentage, en passant par les différents apports des mondes grec et hellénistique, jusqu'à la géométrie qui se pratique aujourd'hui, géométrie qui étudie non plus les figures de l'espace mais les espaces eux-mêmes et leur structure, par le biais de la théorie des groupes.

1 Les débuts de la géométrie

On trouve, par exemple à Lascaux, dans le sud de la France, et à Altamira, dans le nord de l'Espagne, des centaines de peintures remarquables datant d'environ quinze mille années. Le bon niveau artistique de ces peintures rupestres témoigne d'une certaine compréhension de l'espace et des formes ; il ne s'agit pas encore vraiment de géométrie, mais plutôt de protogéométrie, une première étape dans la représentation non abstraite des grandeurs, de l'espace et du temps.

Les mathématiques et en particulier la géométrie qui nous sont familières, sont fort probablement le résultat d'un besoin, besoin sans doute créé par des sociétés qui évoluent vers une vie sédentaire. L'homme va, petit à petit, acquérir des biens qu'il voudra gérer, pratiquer l'agriculture qui nécessitera le creusement de canaux ou la construction de digues, ... C'est ce phénomène qui se produit dans les civilisations qui se sont développées dans les vallées de l'Indus et du Gange, du Tigre et de l'Euphrate et du Nil.

Rappelons un extrait du livre II des *Histoires* [92] [83] de l'historien grec HÉRODOTE, qui a vécu au Ve siècle av. J.-C., extrait que nous avons déjà évoqué dans le chapitre 17.

> Ce fut *Min*[1] qui a fait élever la digue pour créer Memphis.
> [...]
> *Sesostris*[2] a partagé le pays entre tous les Égyptiens en donnant à chacun une égale parcelle de terre, pour laquelle il exigeait une taxe annuelle. Tout homme dont la propriété subirait des dommages par le débordement du fleuve irait le déclarer devant le roi, qui enverrait des inspecteurs pour mesurer l'étendue de la perte, de manière qu'à l'avenir, chacun ne paie qu'une taxe proportionnelle à la dimension à laquelle sa terre a été estimée.
> [...]
> C'est à partir de là que la géométrie[3] fut inventée et passa ensuite en Grèce.

Outre ces problèmes d'arpentage, les Égyptiens vont développer d'autres aspects de la géométrie et acquérir ainsi les connaissances nécessaires pour bâtir des pyramides et des temples à l'architecture complexe.

En Mésopotamie, on trouve également très tôt des traces d'une activité géométrique. Plusieurs tablettes d'argile témoignent de la connaissance de ce que nous appelons le théorème de Pythagore. Nous donnons une description complète de la tablette YBC 7289[4] dans le chapitre 20.

En Inde, la construction des temples et des autels sacrificiels engendrera aussi une réflexion géométrique peu connue en Occident, mais pourtant bien réelle.

2 La géométrie dans le monde grec

Les sources concernant les débuts des mathématiques grecques sont rares. Néanmoins, les historiens s'accordent à dire que Thalès de Milet (Θαλῆς), ionien, né en 624 av. J.-C., fut l'un des fondateurs de la science grecque et de la philosophie. Il a voyagé de nombreuses années en Égypte et était familier de l'astronomie et des mathématiques de la vallée du Nil. Sur la base de connaissances égyptiennes empiriques, il a initié la géométrie abstraite. On lui attribue divers résultats géométriques, même s'il ne reste de lui aucun écrit.

On dit d'un de ses élèves, Anaximandre de Milet (Ἀναξίμανδρος), né vers 610 et mort vers 545, qu'il a introduit l'usage du gnomon. On lui attribue un abrégé de géométrie.

Pythagore de Samos (Πυθαγόρας) a vécu dans les années 530 av. J.-C. et est mort à Métaponte vers 497. Selon Iamblique, il aurait lui aussi visité l'Égypte et y serait resté assez longtemps pour assimiler les coutumes, l'astrologie et la géométrie égyptiennes. Plus tard, il serait retourné à Samos où son enseignement, inspiré de celui des Égyptiens, trop abstrait et symbolique, n'aurait pas été accepté. Il serait alors parti pour Crotone, dans le sud de l'Italie où il aurait fondé une espèce de « secte » qui se développera en école scientifique.

[1] Une légende raconte que *Min*, originaire de Nubie, est venu vers 3100 av. J.-C. en Égypte, où il va fonder une lignée de pharaons, en fait, trente-deux dynasties.

[2] Plus connu sous le nom de *Ramses II* (environ 1300 av. J.-C.).

[3] Le vocable géométrie vient des mots grecs γαῖα (terre) et μέτρον (mesure), qui ont donné γεωμετρία, signifiant arpentage, mesure de la terre.

[4] Il s'agit de la tablette répertoriée 7289 dans la *Yale Babylonian Collection*.

Il est très difficile de distinguer ses propres théories de celles de son école. On lui attribue de nombreuses découvertes géométriques, bien qu'il ne reste de lui aucun écrit. Les premiers pythagoriciens ont attaché une grande importance aux mathématiques et les ont élevées au rang de science. Ils sont considérés comme les fondateurs de la théorie des nombres, de l'étude mathématique de l'acoustique et de la musique. Ils se sont intéressés aux constructions à la règle et au compas et à la résolution de problèmes algébriques par des moyens géométriques. Ils connaissaient l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du pentagone.

C'est à la même époque qu'Eupalinos de Megara (Εὐπαλῖνος), ingénieur grec qui travaillait à Samos, a construit l'aqueduc dont on a retrouvé les ruines en 1882. Il s'agit d'un tunnel d'environ mille mètres de long, un mètre septante-cinq de haut et de large, qui a été creusé à partir de chacune de ses deux extrémités. Une « stratégie » avait été développée pour assurer la rencontre des deux équipes au milieu de la colline.

Platon (Πλάτων), né vers 428 et mort à Athènes vers 348, est un disciple de Socrate. Philosophe et mathématicien, il a fondé l'*Académie* dont la fameuse devise était « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ». Il prônait la valeur éducative des mathématiques et a introduit des définitions rigoureuses pour la ligne droite, la surface plane, le solide, ... Il a commencé l'étude de ce que nous appelons, de nos jours, le nombre d'or et a établi de nouvelles règles pour trouver des nombres carrés qui sont la somme de deux carrés.

Aristote (Ἀριστοτέλης), né en 384 et mort vers 322, est disciple de Platon et devient le précepteur d'Alexandre. Il fonde le *Lycée* d'Athènes vers 335 (école péripatéticienne). Il fut l'un des très grands philosophes et scientifiques de son temps ; il a préparé la systématisation de la géométrie par des investigations de ses aspects les plus fondamentaux et philosophiques – en particulier, par l'introduction de meilleures définitions – et par des discussions de concepts de continuité et d'infinité.

Euclide (Εὐκλείδης) a vécu à Alexandrie, probablement sous Ptolémée I, roi d'Égypte, entre les années 323 et 285. Mathématicien et physicien, il a sans doute étudié à l'*Académie*. Il a collecté et systématisé le corpus entier des mathématiques connues en son temps (et pas seulement la géométrie) dans les treize livres des *Éléments* (στοιχεῖα), qui sont restés, jusqu'à nos jours, la base de l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Son œuvre n'est pas qu'une compilation, mais une synthèse, au plus haut niveau, dans l'élaboration de laquelle il a fait preuve d'un très grand génie. Elle est basée sur une idée fondamentale, qui est l'une des plus importantes en mathématiques : la méthode hypothético-déductive. Toutes les propriétés géométriques et les théorèmes connus doivent être déduits à partir d'un ensemble de vérités initiales évidentes par elles-mêmes, appelées *postulats*, par le biais de lois logiques de raisonnement. Le nombre de postulats doit être le plus petit possible. La géométrie d'Euclide est basée sur cinq « notions communes » et cinq postulats. Les nombreuses tentatives infructueuses pour démontrer le cinquième postulat (celui des parallèles) à partir des précédents, d'une part, et le développement des géométries non euclidiennes, d'autre part, rendent hommage à sa clairvoyance.

3 Les géométries non euclidiennes et le programme d'Erlangen

L'œuvre d'Euclide figure parmi celles qui ont réellement marqué les mathématiques. En matière de géométrie, elle reste une référence. Chez les savants du monde arabe, c'est le traité qui sera le plus souvent traduit. Comme on l'a déjà dit, de nombreux mathématiciens, même de tout

grands, vont s'attaquer au cinquième postulat, persuadés de pouvoir le déduire des précédents, mais sans succès... et pour cause !

Au XVIIe siècle, grâce aux travaux de René Descartes et Pierre de Fermat, la géométrie s'« algébrise ». Qualifiée d'analytique, elle résout des problèmes de géométrie en utilisant des procédés de type algébrique ; elle est bien adaptée au traitement de certaines catégories de questions. L'un des grands inconvénients cependant réside dans le fait qu'il est souvent pratiquement impossible de saisir le sens géométrique des expressions algébriques utilisées. Dès 1679, Leibniz recherchait un nouveau type de calcul qui opérerait directement sur les figures afin de pallier cet inconvénient. L'entreprise fut longue, puisque les vecteurs n'apparaîtront que dans la seconde moitié du XIXe siècle.

C'est encore au XIXe siècle, que des changements très importants se profilent, non seulement en géométrie, mais au sein même de toute la mathématique.

Les règles de la perspective en peinture, apparues au début du XVe siècle en Italie (Alberti, Piero della Francesca), ont intéressé des mathématiciens comme Pascal et Desargues. Les bases de la géométrie projective sont dès lors jetées. L'habitude de voir, de contempler des peintures ou des dessins respectant les règles de la perspective à point de fuite, ont sans doute engendré un certain penchant à considérer comme identiques la figure primitive et toutes les images qui peuvent s'en déduire par projection, à énoncer certaines propriétés ne dépendant pas des modifications apportées par la projection, ... C'est ainsi que s'installe la géométrie projective, qui obtient son statut de « corps de doctrine » grâce à Poncelet (1822).

Parallèlement, et suite aux travaux de Lambert et Gauss, entre autres, Lobatchevski (à partir de 1829) et Bolyai (en 1832) imaginent une géométrie où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits[5] et montrent qu'elle est logiquement cohérente. La première géométrie non euclidienne est née.

En 1854, Riemann élabore une géométrie où la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits[6]. Il semble que ce soit Beltrami qui, en 1868, a le premier mis en évidence la nature commune des géométries de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann. Et c'est Klein, pense-t-on, qui a le premier remarqué la nature projective des géométries non euclidiennes de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann, ainsi que de la géométrie euclidienne, en établissant qu'il s'agit de trois cas particuliers d'un modèle plus général imaginé par Cayley.

Dans cette géométrie en mutation, il faut encore citer bien d'autres grands mathématiciens, parmi lesquels Chasles, Grassmann, Staudt, Helmholtz, Jordan, Lie, sans oublier Galois, le « père » de la théorie des groupes, ...

On ne se focalise plus sur l'étude des figures de l'espace, mais plutôt sur l'étude de l'espace lui-même ; la notion de dimension va se généraliser à plus de trois, notamment grâce aux travaux de Cayley.

C'est tout cet ensemble de faits qui constitue la genèse de ce qu'on a appelé *Le programme d'Erlangen* [102], dont le titre complet est *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Il s'agit d'une dissertation présentée en 1872, par le mathématicien allemand Felix Klein, alors âgé de 23 ans, lors de la rentrée académique à l'université d'Erlangen.

[5] Signalons que ceci est encore équivalent à « Par un point extérieur à une droite donnée, on peut mener une infinité de parallèles à cette droite ».

[6] Comme dans le cas des triangles sphériques sur une sphère.

Klein défend l'idée d'un principe général qui permet d'engendrer non seulement la géométrie euclidienne et la géométrie projective, mais encore, les autres géométries (non euclidiennes) auxquelles, dit-il, il faut accorder les mêmes droits. Les notions essentielles sur lesquelles il se base sont, d'une part, celle de *groupe de transformations de l'espace*, issue des travaux de Galois (1830), et, d'autre part, celle d'*invariant*, introduite par Cayley et Sylvester dans les années 1850-1860.

Klein en arrive ainsi à caractériser une géométrie par un groupe de transformations de l'espace. Le problème qu'il propose d'étudier est le suivant,

> Étant donnés une multiplicité, c'est-à-dire un ensemble de points, et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.

Selon le groupe de transformations qui agit sur la multiplicité, on obtient les géométries euclidienne, projective, de Bolyai-Lobatchevski, de Riemann, ...

On voit donc apparaître le rôle fondamental de la notion de groupe. Klein inaugure ainsi la domination que la théorie des groupes va petit à petit exercer sur l'ensemble de toutes les mathématiques ainsi que la fusion de plus en plus étroite des concepts issus de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse, qui constitue l'une des principales caractéristiques de la mathématique d'aujourd'hui.

Retenons que la mutation profonde, qui s'exerce au XIXe siècle, est que la géométrie n'est plus considérée comme science des figures de l'espace, mais bien comme la science qui étudie les espaces (par le biais de leur groupe de transformations).

Chapitre 19

Le développement de la trigonométrie

Préambule

Selon Edward S. Kennedy[1] [100] [101], la trigonométrie, sans doute plus que toute autre branche des mathématiques, s'est développée grâce à un va-et-vient continuel et fertile. Il s'agit en fait d'une offre et d'une demande – offre de théories mathématiques et de techniques utilisables en toutes circonstances et demande pressante d'une science appliquée, l'astronomie. La relation trigonométrie – astronomie fut tellement intime que, jusqu'au treizième siècle, les deux sujets ne formeront qu'une seule entité.

Kennedy perçoit le même type d'interactions diverses entre théorie et application au sein même de la trigonométrie, si bien que, pour lui, l'histoire de la trigonométrie exhibe, en elle-même, la croissance embryonnaire de trois divisions classiques des mathématiques : l'algèbre, l'analyse et la géométrie.

Les débuts du développement de la trigonométrie se perdent dans la nuit des temps ; on peut considérer qu'au départ, elle a produit les premières suites numériques faisant correspondre une longueur d'ombre à un moment de la journée. Ces concepts, qui ont vu le jour dans des contrées à l'est de la Méditerranée, ont été rapportés par des gens écrivant en grec et se sont bien implantés dans des régions plus occidentales au deuxième siècle de notre ère. Nous verrons que le pôle de l'activité va alors se déplacer en Inde – la fonction ≪ corde ≫ y sera remplacée par plusieurs espèces de fonctions ≪ sinus ≫ – et de là, il retournera en partie vers son lieu d'origine. Entre le neuvième et le quinzième siècle, dans la région s'étendant de la Syrie à l'Asie centrale, la nouvelle fonction sinus et les vieilles fonctions ombres vont être tabulées en sexagésimal. C'est de ce développement qu'émerge vraiment la trigonométrie, en ce sens que l'objet d'étude devient le triangle sphérique ou plan, ses côtés et ses angles. Lorsque le centre d'activité de l'astronomie se déplace en Europe, il en va de même de la nouvelle trigonométrie et les scientifiques européens poursuivent le travail de leurs prédécesseurs orientaux, à savoir le calcul de tables et la découverte de relations fonctionnelles entre les éléments du triangle.

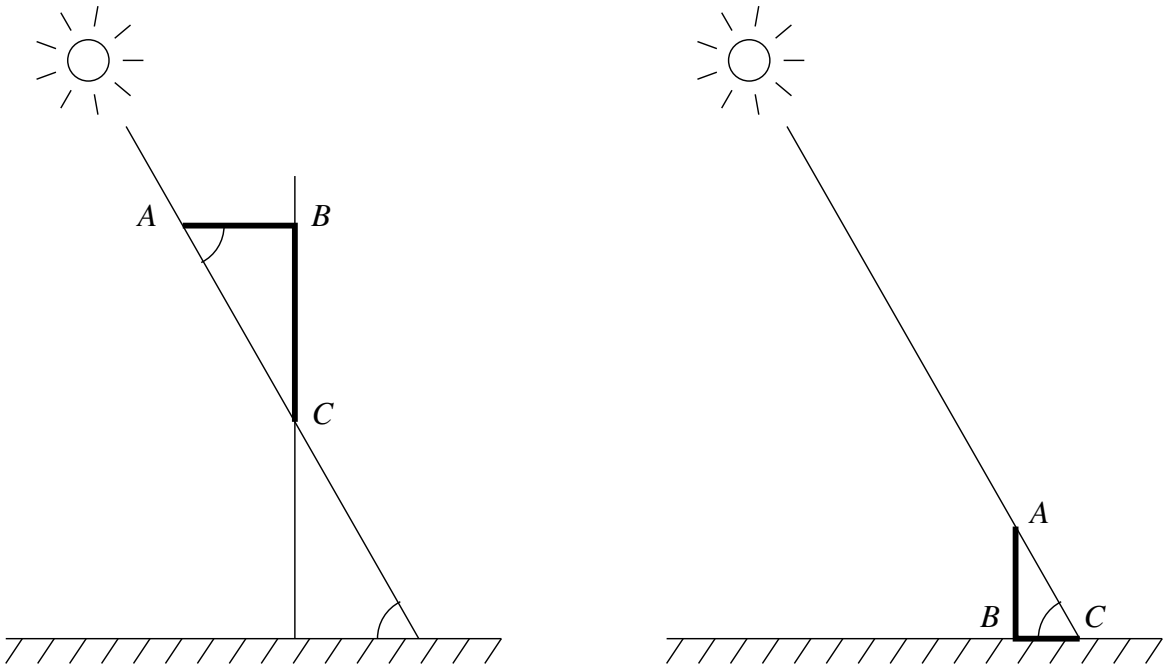
L'invention du calcul infinitésimal, qui n'arrive que plus tard, précipite la fin rapide de la trigonométrie – considérée comme branche indépendante des mathématiques. Avec la naissance et l'exploitation des nombres complexes, la plus grande partie de la théorie est engloutie dans l'analyse. À la fin du dix-huitième siècle, Léonard Euler et d'autres mathématiciens présentent

[1] Edward S. Kennedy est professeur émérite de l'Université américaine de Bayrūt ; il est considéré comme l'un des tout grands spécialistes de l'histoire de l'astronomie en pays d'Islam.

tous les théorèmes de la trigonométrie comme corollaires de la théorie des fonctions complexes. La trigonométrie ne conserve son identité séparée que comme sujet scolaire et comme utilitaire particulièrement apprécié des arpenteurs et navigateurs.

1 Les balbutiements

Très tôt, on trouve les ancêtres légitimes des fonctions « tangente » et « cotangente ». Il s'agit en fait de la mesure de l'ombre d'un bâton ou *gnomon*.



Si le gnomon AB est fixé horizontalement sur un mur vertical, alors son ombre BC (sur le mur) est la tangente de l'angle de visée du soleil, si on prend la longueur du bâton AB pour unité. Dans ces mêmes conditions, si le gnomon est fixé verticalement dans le sol, son ombre BC (sur le sol) est la cotangente de l'angle de visée du soleil.

Otto Neugebauer et Richard Parker signalent, par exemple, l'existence d'une table dont on peut voir une transcription « en notation moderne » ci-contre. Il s'agit d'une inscription datant du treizième siècle avant Jésus-Christ, découverte à Abydos, en Haute-Égypte. On trouve des documents du même type en Perse, en Inde, en Chine, en Mésopotamie, en Grèce, ... à différentes époques de l'histoire. Ces schémas sont bien sûr naïfs – les longueurs des « heures » qu'ils indiquent sont inégales, la longueur des ombres varie avec la latitude géographique et avec les saisons – mais ils sont cependant les témoins que l'homme utilise explicitement la notion de fonction au moins depuis trois mille ans.

Fin de l'heure	Ombre
2	30
3	18
4	9
5	3
Midi	0

Dans le long cheminement qui mène à la trigonométrie, l'outil de base ne sera pourtant pas l'ombre du gnomon qui débouche plus tard sur la notion de tangente, mais plutôt la fonction « corde », qui s'apparente, comme on le verra, à notre sinus. Son calcul est facilité par un

bon système de numération positionnel ; depuis le deuxième millénaire avant Jésus-Christ, les Mésopotamiens ont développé un tel type de système, qui mélange les bases dix et soixante.

Comme on va le voir, le développement de la trigonométrie est intimement lié aux besoins de l'astronomie, qui fut l'un des sujets d'étude de prédilection en Mésopotamie. C'est là que de nombreuses tables d'observations astronomiques ont été dressées en utilisant le système sexagésimal. On peut raisonnablement conjecturer que ce sont les Grecs de l'époque hellénistique[2] qui, les premiers, ont calculé des « rapports trigonométriques » mais ils ne disposaient que d'un mauvais système littéral de numération. Ils ont donc effectué les calculs en sexagésimal.

2 D'Aristarque à Ptolémée

Aristarque de Samos (Ἀρίσταρχος) vivait à l'époque d'Euclide (Εὐκλείδης), époque que l'on peut vraisemblablement situer sous Ptolémée I, roi d'Égypte[3] de 323 à 285. Il est astronome et mathématicien. Selon Th. Heath [80] et G. Sarton [125], on peut, sans nul doute, le considérer comme le premier à défendre l'hypothèse héliocentrique. Il a écrit *Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*, traité intéressant du point de vue mathématique car il y calcule des rapports qui sont en fait des rapports trigonométriques.

L'astronome, mathématicien, géographe Hipparque (῾Ίππαρχος) exerce l'essentiel de son activité à Rhodes et à Alexandrie, entre les années 160 et 125 av. J.-C. Selon Sarton, il a probablement inventé ou utilisé la projection stéréographique ainsi que certains instruments habituellement attribués à Ptolémée. Il est en tout cas le premier observateur grec à diviser en 360 degrés les cercles des instruments qu'il utilise[4]. Il réalise un grand nombre d'observations astronomiques très précises, ce qui lui permet de construire le premier globe céleste. Malheureusement il est très conservateur et c'est essentiellement à cause de lui que le système géocentrique continuera à être le plus utilisé. Hipparque peut être considéré comme le fondateur de la trigonométrie, tant sphérique que plane ; il établit une table de la fonction « corde[5] », ce qui pourrait impliquer qu'il connaissait le théorème dit de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, ou... une proposition équivalente. Il critique la géographie d'Ératosthène (῾Ερατοσθένης) et tente de fixer astronomiquement les positions des lieux sur le globe terrestre par leurs latitudes et longitudes, longitudes qu'il détermine par l'observation des éclipses.

C'est à Rome, vers 98 – à l'époque de Pline l'Ancien –, que le mathématicien, astronome, physicien grec Menelaos d'Alexandrie (Μενέλαος) réalise des observations. Il a écrit six livres (perdus) sur le calcul des cordes et trois sur les sphériques, qui nous sont parvenus dans des traductions arabes, hébraïques et latines. Ces livres sur les sphériques sont en fait un traité de trigonométrie sphérique ; il est le premier à libérer la trigonométrie de la stéréométrie et de l'astronomie. C'est dans le livre III que l'on trouve le célèbre théorème dit de Menelaos, relatif

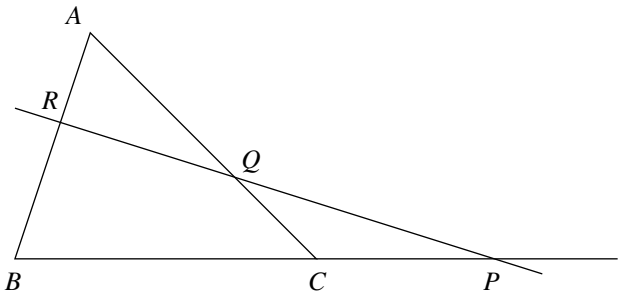
[2] Rappelons que cette civilisation s'est développée en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C.) et qu'elle n'était pas limitée au seul territoire grec.

[3] Ptolémée I est le fondateur de la dynastie des Lagides, seize souverains grecs qui vont régner sur l'Égypte après la mort d'Alexandre le Grand jusqu'en 30 av. J.-C. Il ne faut pas les confondre avec le mathématicien, astronome Claude Ptolémée, mort en 161 de notre ère.

[4] Une histoire du calendrier n'a pas sa place ici. Nous tenons néanmoins à signaler que la quantité « 360 » est liée aux premières formes de calendrier, comme le babylonien, entre autres, qui comportait douze mois de trente jours ; et on ajustait en fin d'année... C'est sans doute là qu'il faut chercher l'explication de l'utilisation du système sexagésimal.

[5] La fonction « corde d'un angle α » vaut en fait le double du sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$.

aussi bien aux triangles sphériques qu'aux triangles plans.



C'est une relation entre six quantités, d'où son nom aussi de *regula sex quantitatum*. Avec les notations de la figure ci-contre, ce théorème peut s'énoncer, en trigonométrie plane :
les points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{|BP|}{|PC|}\cdot\frac{|CQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AR|}{|RB|}=1.$$

Nous connaissons le traité par plusieurs traductions en arabe qui s'étaleront du neuvième jusqu'à la fin du treizième siècle ; nous en mentionnerons une plus loin. Dans la deuxième moitié du douzième siècle, le texte arabe est traduit en latin par Gérard de Crémone et, environ un siècle plus tard, en hébreu par Jacob ben Machir ibn Tibbon.

Claude Ptolémée (Πτολεμαῖος), dont le nom est sans doute le plus connu parmi ceux qui jalonnent l'histoire de la trigonométrie, est né en Égypte et exerce son activité à Alexandrie durant le deuxième quart du deuxième siècle de notre ère. Il meurt en 161. Il est astronome, mathématicien, géographe, physicien, « chronologiste ». Son influence – presque comparable à celle d'Aristote – est marquante jusqu'au seizième siècle. Il possède une tournure d'esprit euclidienne et, quoique trois siècles les séparent, on le croirait proche collaborateur d'Hipparque, ce dont il se prévaut la plupart du temps. Son œuvre principale porte le titre de *Traité de mathématiques*, en grec, *ἡ μαθηματικὴ σύνταζις* ou *μεγάλη σύνταζις τῆς ἀστρονομίας*, dont la contraction des deux premiers mots a donné, en passant par une traduction en arabe, *Almageste*. Cette encyclopédie de l'astronomie, dont pratiquement tout le contenu est basé sur les travaux d'Hipparque, fait autorité jusqu'en 1543[6]. Les observations personnelles de Ptolémée s'étalent de 127 à 151, mais selon Sarton, il n'était pas un observateur très fin ; sa contribution principale semble avoir été sa théorie très élaborée des planètes et la découverte d'une deuxième inégalité dans le mouvement périodique de la lune, qu'on appelle de nos jours *évection*. Son système est purement géocentrique ; l'élaboration de la trigonométrie – le remplacement de diagrammes par des calculs – consacre l'astronomie comme discipline mathématique. Le catalogue d'étoiles de Ptolémée en répertorie 1 028 et est probablement fort proche de celui d'Hipparque, mais ce dernier étant perdu, c'est celui de Ptolémée qui constitue la plus ancienne description précise du ciel, en fait la seule jusqu'au quinzième siècle ; en cela, il est d'une valeur inestimable.

L'*Almageste* contient un très bel exposé des trigonométries plane et sphérique ; en outre, Ptolémée y explique comment construire une table de cordes, et il en fournit une allant de $\frac{1}{2}^\circ$ à 180°, par pas de $\frac{1}{2}^\circ$. Le théorème dit de Ptolémée, sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, fournit une formule équivalente[7] à celle qui donne $\sin(a \pm b)$.

Signalons encore que Ptolémée a tenté de démontrer le cinquième postulat d'Euclide et que son *Traité de géographie*, *γηωγραφικὴ ὑφήγησις* vient en second sur le plan de l'importance de ses œuvres. Il a influencé les progrès de la géographie presque aussi profondément et longtemps que ne l'a fait l'*Almageste* pour les mathématiques et l'astronomie.

[6] L'année 1543 est ici prise symboliquement ; c'est celle de la mort du fondateur de l'astronomie moderne, Nicolas Copernic. En 1530, il avait achevé sa grande œuvre *De Revolutionibus*, dans laquelle il affirmait que la terre tournait autour de son axe en un jour et faisait le tour du soleil en un an.

[7] Ce théorème peut s'énoncer : dans tout quadrilatère inscriptible, la somme des produits des mesures des côtés opposés est égale au produit des mesures des diagonales.

3 La trigonométrie dans le monde indien

Les *siddhānta*, véritables traités théoriques par opposition à des ouvrages de nature plus pratique comme les *karaṇas*[8] et les tables, sont probablement les plus anciens travaux scientifiques indiens d'astronomie. On en cite souvent cinq, qu'il est impossible de dater avec précision. Il y a cependant assez de différences entre eux pour étayer l'hypothèse qu'ils furent écrits à des époques différentes. SARTON pense qu'on peut plus ou moins dater ces *siddhānta* à partir de la première moitié du cinquième siècle de notre ère.

Seul le premier, le *Sūrya-Siddhānta*, nous est parvenu dans sa forme originale ; on y trouve de nombreuses traces de l'influence grecque, mais on ignore encore par quel canal l'astronomie grecque a pu arriver en Inde. Divisé en quatorze chapitres, il est écrit en *ślokas*[9].

Selon AL-BĪRŪNĪ (البيروني), mathématicien, astronome arabe mort en 1048, il aurait été écrit par LĀṬA, mais il se peut que ce dernier n'ait rédigé que des commentaires sur le *Sūrya-Siddhānta*, comme il l'aurait fait à propos de deux autres *siddhānta*, selon des témoignages de l'époque. Les vers qui introduisent le texte affirment que celui-ci fut écrit par SŪRYA, le Dieu Soleil, à *Romaka* (Rome ?, Alexandrie ?). Les principales théories astronomiques qu'on y trouve sont grecques même si l'auteur a tenté d'y préserver les vieux usages indiens, tout en demeurant cohérent autant que possible.

La caractéristique la plus marquante du traité est l'utilisation du *ǧyā*[10] c'est-à-dire du sinus à la place de la corde. On y rencontre également une des premières mentions du sinus verse[11].

Un autre texte, le *Pauliśa-Siddhānta*, peut être considéré comme un des fondements de la trigonométrie indienne. Il introduit la notion de sinus et contient une table de vingt-quatre sinus et sinus verses par pas de $3^\circ\ 45'$. Au départ, le sinus de $3^\circ\ 45'$ est supposé égal à son arc, appelé *kramaǧyā* et les autres valeurs de la table sont calculées grâce à une formule de récurrence.

C'est au mathématicien et astronome indien ĀRYABHAṬA, né à *Kusumapura* près de *Pāṭaliputra*, l'actuelle Patna, vers 476, que l'on doit le traité intitulé *Āryabhaṭīya* ou *Laghv-Āryabhaṭīya*, qui représente une sorte de systématisation des résultats contenus dans les *siddhānta*. Il date de l'année 3600 de *Kaliyuga*, ce qui correspond à l'an 499 de notre ère. Il est écrit en vers et divisé en quatre parties :

Daśagītikāsūtra, système d'écriture des nombres ;

Gaṇitapāda, traité mathématique en 33 stances ;

Kālakriyāpāda, éléments de chronologie astronomique ;

Golapāda, considérations qui concernent les sphères célestes.

Cet ouvrage comporte plusieurs formules concernant les suites arithmétiques, mais également

[8] Les *karaṇas* sont plutôt des manuels d'astronomie pratique qui n'ont pas la prétention d'un véritable traité.

[9] Les *ślokas* sont des vers, souvent écrits en sanskrit. On y trouve généralement une connotation religieuse et une prière dédiée à une déesse ou un dieu particuliers.

[10] Lorsque les traducteurs arabes ont rencontré ce mot *ǧyā*, ils l'ont translittéré dans leur alphabet, ce qui donna lieu a une « mauvaise » interprétation. Le mot arabe جيب, *ǧaīb*, signifiant entre autres « cavité », en était fort proche du point de vue de l'écriture. Si on ajoute à cela que la langue arabe ne note pas nécessairement la vocalisation brève, on trouve l'explication du fait que le vocable mathématique « sinus » traduction latine du mot arabe *ǧaīb* désigne également la cavité nasale, par exemple.

[11] Le sinus verse d'un angle vaut 1 moins le cosinus de cet angle.

une valeur très précise de π – à savoir $3\,\frac{177}{1250} = 3,1416$ – ainsi que des tables de sinus et de sinus verses. Les concepts astronomiques sont du même type que dans le *Sūrya-Siddhānta*, excepté le fait qu'Āryabhaṭa enseigne que la rotation journalière du ciel n'est qu'apparente ; elle est due à la rotation de la terre autour de son axe. Cette hypothèse, très osée, ne sera pas admise par des astronomes indiens postérieurs comme par exemple, Brahmagupta au septième siècle.

4 La trigonométrie dans le monde musulman

Il existait, dans le monde arabe, avant l'Islam, une « astronomie populaire » qui englobait la connaissance des saisons, quelques phénomènes météorologiques, les positions des étoiles fixes, ... Jusqu'au IXe siècle et même au Xe, ces rudiments, qui ne reposaient sur aucun calcul mais seulement sur l'accumulation des expériences, étaient consignés dans ce qu'on appelait des *Livres des saisons* ou *kutub al-āwina* (كتب الاونة).

L'avènement de l'Islam exige des réponses rapides aux besoins liés à la pratique du culte : connaissance des moments des cinq prières quotidiennes, détermination de la direction de La Mecque ou *qiblā* (القبلة) et fixation du début et de la fin du *ramaḍān* (رمضان). On voit apparaître deux nouveaux types d'ouvrages, d'une part les *kutub al-mawāqīt* (كتب المواقيت) ou livres de détermination des temps (détermination basée sur la technique du gnomon le jour et sur le déplacement de la lune durant la nuit), d'autre part, les *Dalā'il al-qiblā* (دلائل القبلة) ou indicateurs de la direction de La Mecque (techniques fondées sur les levers et couchers astronomiques). En ce qui concerne le *ramaḍān*, le problème est tellement complexe que pendant longtemps, on se contentera d'observer, depuis une élévation (montagne, tertre, ...) et à l'œil nu, l'apparition du croissant de lune.

La religion n'est cependant pas le seul moteur du développement de l'astronomie. Les humains en général, *a fortiori* ceux qui occupent un poste important dans la société, ont toujours éprouvé un « certain besoin » d'avoir des renseignements sur leur avenir ; cela explique le succès que connaît l'astrologie. On peut vraiment considérer que l'astrologie a été un facteur de développement de l'astronomie, en ce sens que l'astrologie astronomique repose effectivement sur le principe énonçant que le monde sublunaire et tous les êtres vivants qui le composent sont soumis aux effets des mouvements des astres.

Un troisième facteur est sans doute le besoin qu'éprouve l'homme de comprendre le monde dans lequel il vit et, par conséquent, de tenter de rechercher les lois qui régissent l'univers, le mouvement des corps célestes, ...

On possède des témoignages du fait que les premiers astronomes de l'Islam ont eu connaissance, bien avant que ne démarre la période de traduction[12], de certains aspects de l'astronomie babylonienne, grecque ou indienne, notamment par le biais de spécialistes syriaques. L'un des très célèbres est, par exemple, l'évêque nestorien Severus Sebokht, originaire de Nisibe mais qui travaille au cloître de Kenešra dans la haute vallée de l'Euphrate ; en 661, année de la prise du pouvoir par les Umayyades, il écrit un *Traité des constellations*.

Un siècle plus tard, la découverte plus en profondeur de la science indienne va pousser les savants de Baġdād à s'intéresser de très près à l'astronomie. Voici ce qu'on peut lire, dans le

[12] Voir à ce sujet le chapitre 16, à la page 498.

Dictionnaire des savants, de Abū-l-Ḥasan al-Qifṭī (ابو الحسن القفطي) qui a vécu de 1172 à 1288.

En l'année 156 de l'hégire[13], il arriva de l'Inde à Baġdād un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. Cet homme possédait la méthode du *Sind hind* (سندهند)[14], relative aux mouvements des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les éclipses, ainsi que le lever des signes du zodiaque. Il avait composé un abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince nommé Figar[15]. Dans cet écrit, les *Kardaga*[16] étaient calculées par minutes. Le calife[17] ordonne qu'on traduise le traité indien en arabe, afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. Le soin de la traduction fut confié à Muḥammad, fils de Ibrāhīm al-Fazārī (محمّد بن ابراهيم الفزاري), le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez les astronomes, sous le titre de *Grand Sind hind*[18].

On sait, par les astronomes eux-mêmes et non pas par les historiens, que l'astronomie indienne contenait des outils trigonométriques, comme la notion de sinus, que les Arabes vont préférer à celle de corde utilisée par les Grecs. On y trouve également de petites tables fournissant les valeurs des sinus et sinus verses pour des angles donnés, ainsi que des algorithmes de calcul de certains paramètres permettant la constitution de tables astronomiques et des procédés de mesure pour déterminer, par exemple, le méridien en un lieu.

Par contre, les biobibliographes fournissent des informations très pointues sur le contenu, les traductions, ... de l'ensemble des connaissances astronomiques qui viennent du monde grec. Par exemple, il est rapporté que l'*Almageste* de Ptolémée a d'abord été traduit du syriaque en arabe, dès le huitième siècle, par al-Ḥasan ibn Qurayš (الحسن بن قريث). À la fin de ce même siècle, Yaḥya ibn Ḫālid al-Barmakī (يحيى بن خالد البرمكي) ordonne d'en faire une traduction à partir d'un texte grec, mais ce sont finalement deux autres traductions qui vont nous parvenir, l'une de al-Haǧǧāǧ ibn Maṭar (الحجّاج بن مطر), mort en 830 et l'autre de Isḥāq ibn Ḥunayn (اسحاق بن حنين), mort en 910. Cette dernière sera revue par Ṯābit ibn Qurra (ثابت بن قرّ), mort en 901. Les *Sphériques* de Menelaos seront également traduites par Isḥāq ibn Ḥunayn sous le titre *al-aškāl al-kuriya* (الاثكال الكرية), ce qui signifie littéralement *la forme des globes*.

[13] Cela correspond à l'année 773 de notre ère chrétienne.

[14] C'est le terme utilisé par les Arabes pour le mot indien *siddhānta*.

[15] Ce nom est peut-être une déformation arabe du patronyme du souverain indien *Vyagramuḫa*, sous le règne duquel *Brahmagupta* a composé son *siddhānta*.

[16] Il s'agit vraisemblablement de l'*arthağya* indien ou ligne des sinus.

[17] Ce calife est *al-Mansūr* (المنسور), deuxième de la dynastie des abbassides.

[18] On dit aussi *Zīǧ al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Zīǧ du Grand Sind hind*. La question de savoir lequel des *siddhānta* fut ainsi traduit est encore sans réponse.

Connu pour un célèbre « traité d'algèbre » (cf. chapitre 17, section 4), Abū ʿAbd Allāh Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī (ابو عبد الله محمّد بن موسى الخوارزمي), qui vivait au début du neuvième siècle, a établi des tables astronomiques et des tables trigonométriques. Elles ont été revues, durant la seconde moitié du dixième siècle, par Maslama al-Maǧrīṭī (مسلم المجريطي) et traduites en latin, dès 1126 par Adelard de Bath. Elles figurent parmi les premières tables de l'empire musulman ; elles contiennent non seulement la fonction « sinus », mais aussi la fonction « tangente ». Cette notion de tangente, qui est en fait l'ombre d'un gnomon fixé horizontalement sur un mur vertical, semble avoir été introduite par Ḥabaš al-Ḥāsib (حبش الحاسب), qui a fait des observations entre 825 et 835. al-Ḫwārizmī a probablement participé aux travaux de mesure du méridien terrestre, ordonnés par le calife *al-Ma'mūn* (المأمون), et a amélioré la géographie de Ptolémée, tant en ce qui concerne le texte que les cartes.

al-Battānī (البتّاني), né avant 858 et mort en 929, mérite également d'être cité. Son nom a été latinisé en Albate(g)nius. Son œuvre principale est un traité d'astronomie avec des tables, traduit en latin sous les titres *De scientia stellarum* et *De numeris stellarum et motibus*. Cet ouvrage a influencé notre astronomie jusqu'à la Renaissance. al-Battānī a déterminé, avec une grande précision, de nombreux coefficients astronomiques tels que la précession ou l'inclinaison de l'écliptique, ... Le troisième chapitre de son astronomie est consacré à la trigonométrie. Il utilise surtout les sinus qu'il préfère aux cordes grecques. Il travaille également avec les fonctions ombres, *umbra extensa* et *umbra versa*, ombre d'un gnomon vertical sur le sol et ombre d'un gnomon horizontal sur un mur vertical, ce qui correspond, on l'a déjà dit, à notre cotangente et à notre tangente. Il connaissait la relation entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, relation que nous exprimons de nos jours par la formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Un autre grand nom parmi les savants du monde musulman est Abū-l-Wafāʾ (الو الوفاء), l'un des derniers traducteurs arabes et commentateurs des œuvres grecques. Il est né en 940 et a travaillé à Baġdād, où il est mort vers 998. Outre ses apports en géométrie, en arithmétique, en astronomie, il développe très fort la trigonométrie. Il donne une nouvelle méthode pour construire des tables de sinus, détermine, par exemple, la valeur de $\sin 30'$ avec huit décimales correctes et calcule une table de tangentes. Il connaît des formules de trigonométrie équivalentes à celles que nous enseignons encore sur le sinus d'une somme ou d'une différence ou sur les sinus et cosinus des angles doubles...

D'origine égyptienne, Ibn Yūnus (ابن يونس), qui est mort au Caire en 1009, a aussi apporté une contribution considérable à la trigonométrie. Il résout de nombreux problèmes d'astronomie sphérique au moyen de projections orthogonales et introduit certaines formules indispensables avant l'invention des logarithmes, telles que, par exemple, l'équivalent de $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Au XIe siècle, un pas important est franchi avec l'obtention d'un théorème qui va permettre de se passer de celui de Menelaos. Ce dernier est en effet d'un emploi très lourd lors des calculs, puisqu'il fait intervenir six quantités. Grâce au *théorème des sinus*, le nombre de quantités va se réduire à quatre. Dans le monde musulman, il porte le nom de *al-šakal al-muġnī* (الشكل المغني), littéralement, la *forme qui dispense* (de l'utilisation du théorème de Menelaos). En trigonométrie plane, si A, B, C sont les trois angles d'un triangle dont les côtés

respectivement opposés sont désignés par a, b et c, on a[19]

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\,.$$

La découverte de cette relation a provoqué une polémique à propos de la paternité du résultat. Ce fait nous est rapporté par AL-BĪRŪNĪ dans son ouvrage *al-kitāb maqālīd 'ilm al-haiy'a* (الكتاب مقاليد علم الهيئة), qu'on peut traduire par *le livre des propos sur la science de l'astronomie*. Cet épisode nous permet de découvrir un réseau d'échanges scientifiques et une coopération à distance. Parmi les chercheurs qui ont permis d'arriver à ce résultat, on peut citer ABŪ-L-WAFĀ' et IBN YŪNUS pour le centre de l'empire, AL-BĪRŪNĪ, pour l'Asie centrale et ĞĀBIR IBN AFLAH (جابر بن افله) pour l'Espagne.

Il est impossible de donner une liste exhaustive des hommes de science qui se sont occupés d'astronomie – et, par là-même, de trigonométrie – dans les pays du monde arabe, tant cette activité a connu de succès. Nous dirons encore que, dès le dixième siècle, de nombreuses relations étaient établies entre les six nombres trigonométriques classiques, qui tous étaient tabulés. Il faut se rendre compte que ces relations ne constituaient pas un jeu de l'esprit, mais étaient utilisées essentiellement pour simplifier les calculs.

5 La trigonométrie dans le monde occidental

Les résultats obtenus en astronomie et en trigonométrie vont pénétrer le monde occidental par le même biais que les autres sciences. C'est ce que nous avons appelé la troisième phase de transmission des savoirs à la fin du chapitre 16. Les savants européens vont poursuivre le travail déjà bien entamé par leurs collègues orientaux. Nous nous contenterons de citer quelques faits importants.

À la Renaissance, des mathématiciens allemands élaborent des tables trigonométriques d'une très grande précision, que l'on paie très cher, étant donné la masse de calculs à effectuer, sans instrument performant. CAJORI [33] n'hésite pas à affirmer, même si c'est un peu caricatural, que l'invention des logarithmes a doublé la vie des astronomes en diminuant leur labeur. Les logarithmes ont été inventés par l'écossais John NAPIER[20], Baron de Merchiston, qui a vécu de 1550 à 1617. L'anglais Henry BRIGGS (1556-1631), admirateur de NAPIER, suggère quelques améliorations qui sont approuvées par ce dernier, ce qui donnera lieu à l'appellation *logarithme de Briggs*. En 1624, BRIGGS publie son *Arithmetica logarithmica*, qui contient les logarithmes à 14 places décimales des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Le trou est comblé par le Hollandais Adriaan VLACQ (1600 ?-1667), qui a passé dix ans à Londres comme libraire et éditeur.

La première publication des logarithmes de Briggs des fonctions trigonométriques est réalisée en 1620 par Edmund GUNTER (1581-1626), un collègue londonien de BRIGGS.

Il y aurait encore beaucoup de choses à dire sur l'histoire de la trigonométrie, mais nous pensons que ce qui précède brosse un tableau assez significatif de l'évolution de cette branche des mathématiques. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à la bibliographie.

[19] En trigonométrie sphérique, on a $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$, où les côtés a, b et c sont des arcs de grand cercle.

[20] Ce surnom apparaît avec de nombreuses orthographes ; il est fort probable qu'à l'époque, il s'écrivait NEPER.

Chapitre 20

Le défi de l'irrationalité

1 Logistique et arithmétique

Les mathématiques ont d'abord été une manipulation de nombres : ceux-ci permettaient le dénombrement de collections finies, mais ils intervenaient également pour exprimer la mesure de grandeurs géométriques comme la longueur, l'aire, le volume ou l'amplitude d'angles. Ce rôle attribué aux nombres se retrouve aussi bien au Proche-Orient qu'en Grèce, et pour ce que l'on en sait, en Inde.

Les Babyloniens en particulier ont fait un effort pour poser et résoudre des problèmes de géométrie au moyen de segments rationnels et de proportions numériques. La seule distinction qui est faite est celle entre nombres qui s'expriment exactement (en base 60) et nombres « qui n'existent pas » et qui sont remplacés par une valeur approchée, sans donner aucune explication (voir [46]).

Les Grecs distinguaient la partie noble des activités numériques sous le nom d'« arithmétique » et la partie pratique sous celui de « logistique ». Cette partie maintenait actifs les procédés numériques d'approximations déjà connus des Babyloniens et des Égyptiens. Un système d'écriture des nombres sous forme décimale basé sur l'usage de l'alphabet grec est connu, mais il ne permet pas un calcul aisé ; aussi de nombreuses opérations continuent à être exécutées en utilisant le système babylonien d'écriture des fractions (voir [52]).

Dès le Ve siècle av. J.-C., l'école philosophique regroupée autour de Pythagore[1] appuie ses principes sur l'expérience des mathématiciens eux-mêmes, et notamment sur l'usage des proportions numériques dans la résolution de nombreux problèmes.

Le pythagorisme explicitait pour le mathématicien le sens de son travail, à savoir la connaissance par le nombre de la réalité des choses. Le pythagorisme a intégré la mathématique à la « philosophie », c'est-à-dire, en l'occurrence, à une doctrine de la nature, pour qui $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ *(mathéma)* ne signifie autre chose que la connaissance immédiate de cette nature par les nombres.



[1] Pythagore de Samos, né dans la première moitié du VIe siècle av. J.-C. à Samos, petite île en face de Milet où il étudie à l'école fondée par Thalès. Il visite Alexandrie avec son père commerçant. En 529 av. J.-C., il fonde une école à Crotone en Italie du Sud. On y pratique la philosophie, les mathématiques, les sciences naturelles, la musique et des rites secrets. Il meurt à Métaponte, chassé de sa ville par une révolte contre sa « secte ».

L'indifférenciation régnant encore entre physique et mathématique explique et même légitime le fait que ce soit dans une doctrine de la nature qu'apparaisse le « fondement ». Le principe des choses est le nombre entier, et par suite, la connaissance des rapports des nombres est suffisante pour celle des grandeurs physiques, c'est-à-dire « géométriques » (voir [37]).

On possède peu de données historiques sur l'origine et les causes de la recherche de démonstrations rigoureuses. Tout au plus, peut-on replacer cette quête dans le contexte de civilisation qui confère à l'argumentation dans la vie publique grecque, un rôle qu'elle ne tenait sans doute pas dans les civilisations de l'Orient.

Les « logisticiens » mettaient en évidence les difficultés particulières à effectuer certaines opérations, assorties toutefois de l'espoir d'y parvenir par quelque ingénieux procédé, ou bien en poursuivant assez longtemps un processus opératoire dont les résultats partiels seraient sans cesse meilleurs.

En émettant des doutes quant à la vraie nature de la difficulté éprouvée, c'est-à-dire quant à la cause de l'impuissance opératoire,

> est-ce une difficulté relative et temporaire, que la maladresse dans le choix d'un procédé ou l'arrêt prématuré des calculs, bref des raisons subjectives, n'ont pas permis de surmonter ?
>
> est-ce au contraire une impossibilité objective, tenant à la « nature des choses », et dans ce cas comment s'en assurer ?

les « arithméticiens » orientaient la recherche vers l'établissement de la preuve de cette impossibilité objective (voir [37]).

L'éclosion de cette science positive, détachée mais intégrant les collections de résultats empiriques des civilisations antérieures, conduira certes à une mathématique plus abstraite, mais surtout déductive. À une période de découvertes sporadiques va succéder une ère d'inventions systématiques. Celles-ci ont débouché sur la rédaction de textes démonstratifs et déductifs caractérisés par une charpente logique et par un choix judicieux des « notions premières » qui servent de fondements.

Les *Éléments* d'Euclide[2], étaient de loin les plus complets et les plus achevés, aussi bien sur le plan de la méthode que de la forme. Considérés comme un modèle de rigueur, ils constituent l'apogée de la création mathématique en Grèce classique et ont exercé une influence durable sur le développement des mathématiques ultérieures (voir [52]).

2 Grandeurs et nombres.

Une grandeur en mesure une autre de même nature si la seconde est obtenue en juxtaposant un nombre entier de fois la première. L'égalité de deux grandeurs est perçue comme la possibilité de les faire coïncider. Dans ce contexte, le nombre reste une « pluralité d'unités » dans une opération de comptage.

[2]Euclide d'Alexandrie a écrit les *Éléments* en treize livres. Il vécu vers 300 av. J.-C. (voir [110]). Ces textes regroupent tous les résultats antérieurs tout en ajoutant des recherches originales : Proclus affirme au Ve siècle après J.-C. qu'en rassemblant les *Éléments*, Euclide « en a coordonné beaucoup d'Eudoxe, perfectionné beaucoup de Théétète et qu'il a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montrés d'une manière relâchée » (voir [52]).

Fig. 1

La grandeur de gauche mesure la grandeur de droite ; le nombre lié à cette mesure est 5.

Deux grandeurs sont *commensurables* lorsque leur rapport (*ratio*) se ramène à un rapport de deux nombres entiers : ainsi la notion de nombre englobe aussi celle de fraction (voir [46]). La similitude de deux figures s'exprime alors directement par l'existence d'un rapport unique et bien défini entre segments homologues.

Fig. 2

Le rapport de la grandeur de gauche à la grandeur de droite s'exprime par la fraction $\frac{2}{5}$.

Certaines grandeurs ne peuvent pas s'exprimer par rapport à une autre par l'usage d'une fraction de nombres : c'est par exemple le cas de la diagonale d'un carré par rapport à son côté (figure 3), ou encore la diagonale d'un pentagone par rapport à son côté (figure 4). Il faut donc adjoindre au système d'opérateurs dont on disposait pour les grandeurs, à savoir les entiers et les rapports $\frac{m}{n}$, un opérateur nouveau, qui n'est plus un rapport numérique, mais une « raison » entre grandeurs.

On dit que de telles grandeurs sont *incommensurables* entre elles, que leur raison est *inexprimable* par une fraction, qu'elle est *irrationnelle*[3].

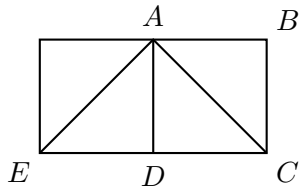


Fig. 3

Les triangles AEC et BAC sont tous deux rectangles isocèles : ils sont semblables et pourtant le rapport des grandeurs AC et AB est inexprimable par une fraction. La « raison » vaut $\sqrt{2}$.

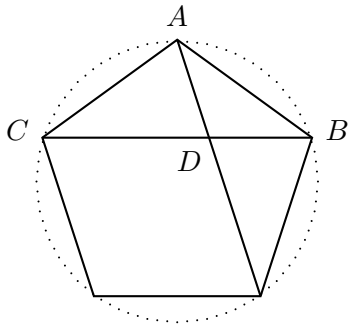


Fig. 4

Soit un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle. Les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ ont même amplitude (car ce sont des angles inscrits égaux à 36°). Les triangles isocèles ABC et DAB sont semblables. Le rapport des grandeurs BC et AB est inexprimable par une fraction. La « raison » vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour la théorie subtile du *rapport* exposée dans les *Éléments*, ce sont des grandeurs géométriques qui sont *irrationnelles* (d'où le féminin). Il ne s'agit pas de « nombres » irrationnels, ce qui n'a pas de sens pour les mathématiques grecques où le vocable nombre désigne toujours

[3]Il existe trois mots grecs pour ces trois notions qui sont conceptuellement différentes, mais qui dans le cadre de cette étude peuvent être considérées comme synonymes.

un nombre entier pendant la période classique puis un nombre entier ou fractionnaire à partir de la période hellénistique (voir [46]).

3 Légende ?

Un des grands triomphes de la mathématique grecque fut la découverte et le traitement des grandeurs irrationnelles. L'histoire de cette découverte ne nous est parvenue que par des textes postérieurs de près de sept siècles à l'époque de Pythagore.

Iamblichus (ou Iamblique) né vers 250 à Chalcis au Liban et mort vers 330 a écrit une *Vie de Pythagore*. Il situe cette découverte des irrationnelles non pas pour la diagonale du carré, mais pour le partage d'un segment en extrême et moyenne raison.

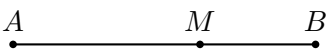


Fig. 5

Soit $AB = 1$. On cherche M pour que $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$.
La « raison » vaut $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Pappus d'Alexandrie, qui vécut à la fin du IIIe siècle après J.-C. a écrit une *Collection mathématique* en huit livres ; il situe la découverte des irrationnelles dans la secte pythagoricienne à propos de la diagonale du carré, et l'attribue à Hyppasius[4].

Proclus Diadochus, né en 411 à Constantinople et mort en 485 à Athènes, dans ses *Commentaires sur* Euclide, attribue la découverte à Pythagore.

Les textes de Platon et Aristote plus proches des pythagoriciens la situent dans la secte pythagoricienne et parlent de la diagonale du carré (voir la duplication du carré à partir d'un texte extrait du *Ménon* de Platon, page 182).

Ce qui a frappé les contemporains, ce qui est nouveau et distingue la « raison » de la « ratio », c'est que cette propriété d'incommensurabilité des segments ne peut en aucune manière être constatée sur le dessin, la conviction de sa véracité ne pourra donc se faire que par une preuve, une démonstration. De plus, il y a incommensurabilité des segments (le rapport de la diagonale au côté du carré est $\sqrt{2}$), mais pas des surfaces (le rapport du carré construit sur la diagonale au carré construit sur le côté est 2). Comme le dit Caveing [37],

> Ce qui allait se révéler dans la découverte de l'irrationalité, c'était la richesse insoupçonnée du champ opératoire ainsi naïvement soumis d'abord à la loi « discontinue » du nombre. Du fait de la divisibilité indéfinie de la grandeur et de la possibilité d'inexistence d'une partie aliquote commune, le domaine des opérations effectuables grâce au rapport d'entiers ne pouvait plus être posé comme coextensif à celui des opérations requises par la mesure des grandeurs. Ainsi la fonction opératoire du nombre se détachait-elle d'une essence circonscrite étroitement par tradition à la « pluralité d'indivisibles ».

La découverte de l'incommensurabilité de certaines longueurs entre elles fut-elle, dès lors, un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement comme le pense Paul Tan-

[4] Hyppase de Métaponte, né vers 500 av. J.-C., aurait découvert les irrationnelles en considérant des pentagones emboités. D'après Jamblique, c'est lui le disciple de Pythagore qui aurait péri noyé, puni des dieux pour avoir révélé au monde l'existence des grandeurs irrationnelles.

nery (voir [132]) ? Constitués en mouvement que nous qualifierions aujourd'hui de mouvement sectaire – basé sur l'adoration du principe ultime « Tout est nombre » (sous-entendus, entiers ou fractionnaires) –, il a dû être difficile aux adeptes pythagoriciens de remettre en cause leurs conceptions.

Pourtant, l'effort de reconstruction de l'édifice d'Euclide sera rapidement mené à bien par Eudoxe de Cnide, qui vécut entre 400 et 350 av. J.-C. Comptemporain de Platon, échangeant des idées sur plusieurs sujets dans une atmosphère de respect mutuel (voir [44]), c'est lui qui formulera la définition 5 du livre V des *Éléments* d'Euclide au sujet de l'égalité des rapports.

> Des grandeurs sont dans le même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, quand, de tout équimultiple de la première et de la troisième quel qu'il soit, et de tout équimultiple de la deuxième à la quatrième quel qu'il soit, les premiers équimultiples sont excédents, sont égaux, ou sont plus petits que les derniers équimultiples considérés en ordre correspondant.

Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si, étant donné m et n entiers, toutes les fois que $ma < nb$, alors $mc < nd$, ou si $ma = nb$, alors $mc = nd$, ou si $ma > nb$, alors $mc > nd$. Cette définition offre l'avantage d'être applicable, non seulement aux nombres, aux grandeurs commensurables ou non, mais également à des grandeurs géométriques distinctes comme par exemple un rapport de volume de sphères égal à un rapport de cube de segments (voir [44]).

Chez des philosophes comme Platon et Aristote, l'étonnement initial devant le fait de l'irrationalité avait déjà fait place à une certaine admiration devant la difficulté vaincue.

À la lecture d'Hippocrate de Chio[5], auteur du seul document mathématique actuellement disponible sur la mathématique du Ve siècle, Freundenthal n'y trouve aucun indice de crise (voir [71]). Hippocrate ne considère que des rapports très particuliers et peut se passer d'une théorie générale des proportions et de la similitude ; il connaît les lignes incommensurables et les considère comme indirectement commensurables par la médiation des aires des carrés construits sur elles. L'existence connue de l'irrationalité n'empêche pas le géomètre de poursuivre ses recherches.

4 La numérisation des rapports

Une première trace de la numérisation des rapports se rencontre dans une définition de l'égalité de deux rapports, due à 'Umar al-Ḥayyām, qui a beaucoup étudié Euclide (voir [46]).

[5] Hippocrate de Chio qui vécut vers 430 av.J.-C., s'est rendu célèbre en réalisant la quadrature de certaines lunules. On lui doit la première quadrature d'une surface curviligne effectuée rigoureusement dans l'histoire des mathématiques (voir [44]). Plusieurs fois, il compare des segments de cercles semblables dont il sait que le rapport de leur aire est le même que le rapport des carrés de leurs cordes. Il montre ainsi que le rapport de l'aire de deux cercles s'énonce avec des nombres entiers p et q si les diamètres sont en « raison » $\sqrt{p}/\sqrt{q}$. Les deux diamètres sont pour lui « potentiellement commensurables ». Nous avons gardé un fragment original de son œuvre qu'il nous est possible de comparer avec des commentaires et versions ultérieures. Il est également le premier à avoir écrit des *Éléments*, malheureusement perdus.

> Étant données quatre grandeurs telles que la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien telle que la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien telle que la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique.

Exprimé en notations modernes, les égalités de rapports suivantes

$$\begin{aligned} a = b \quad &\text{et} \quad c = d; \\ a = \frac{b}{n} \quad &\text{et} \quad c = \frac{d}{n}; \\ a = \frac{mb}{n} \quad &\text{et} \quad c = \frac{md}{n}; \end{aligned}$$

permettent de conclure que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La naissance d'une nouvelle conception du nombre embrassant à la fois tous les nombres réels positifs ne peut être repérée qu'au début du Xe siècle dans l'emploi d'un même mot العدد (al-a'dad), signifiant nombre, pour les nombres rationnels العدد المنطق (al-a'dad al-manṭiqa, *nombre logique*) et les nombres irrationnels العدد اصمّا (al-a'dad aṣammā, *nombre sourd*). Le projet d'Al-Karağī[6] et d'Al-Samaw'al[7] d'étendre les opérations d'arithmétique, y compris les extractions de racines carrées aux quantités algébriques irrationnelles, conduira à un élargissement du champ du calcul qui concernera à la fois nombres et grandeurs. Ce point de vue entraînera d'ailleurs une réinterprétation des *Éléments* (voir [52]).

La première construction historique des nombres réels sera proposée en 1858 par Richard Dedekind[8]. Il suppose bien fondée l'arithmétique des nombres rationnels et rien d'autre. Il montre que l'on peut constater dans les nombres rationnels des phénomènes qui peuvent être employés à compléter ce domaine par une création unique de nombres irrationnels : le phénomène dont il parle est la *coupure*.

En se laissant guider par l'intuition géométrique qu'un point intérieur à un segment divise celui-ci en deux parties, Dedekind appelle coupure C_1, C_2 des rationnels, toute partition des rationnels en deux classes C_1 et C_2 non vides, disjointes et telles que tout nombre de la première C_1 est strictement inférieur à tout nombre de la seconde C_2.

Si d'aventure, il existe un plus grand élément dans C_1 ou un plus petit élément dans C_2, alors la coupure définit un nombre rationnel. Ainsi la coupure C_1, C_2 où C_1 est l'ensemble des rationnels

[6] Al-Karağī, mathématicien de la fin du Xe siècle, né en Iran actuel, écrit *Le livre suffisant sur la science de l'arithmétique*. On y découvre entre autre la loi de formation du triangle de Pascal.

[7] Élève du précédent, ce juif marocain est un médecin réputé et un mathématicien de premier plan. Son *Livre lumineux sur l'arithmétique*, écrit à l'age de dix-neuf ans, témoigne d'une grande familiarité avec les nombres réels, qu'il écrit au moyen des chiffres indiens. Il étudie les fractions décimales et l'extraction de racines n-ièmes.

[8] Richard Dedekind, mathématicien allemand (Brunswick, 1831 – Brunswick, 1916), propose une construction axiomatique des naturels, précise la structure des rationnels et comble le fossé entre la géométrie grecque et les nombres irrationnels permettant enfin de parler de *droite numérique*. On lui doit également le symbole $\mathbb{Z}$ pour les entiers relatifs et la structure de corps (Zahlkörper).

inférieurs ou égal à 3, et C_2 est l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à 3 définit rigoureusement le rationnel 3.

Il existe des coupures qui n'ont pas cette propriété, c'est-à-dire où C_1 n'a pas de plus grand élément et C_2 n' a pas de plus petit élément. Prenons comme exemple la coupure définie par C_1 qui représente l'ensemble comprenant tous les rationnels négatifs et les rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2, et C_2 tous les autres rationnels. Un plus grand élément x dans C_1 signifierait que $x^2 = 2$, ce qui est impossible avec x rationnel. Cette coupure C_1, C_2 crée donc un nouveau nombre irrationnel a tel que $a^2 = 2$.

À une coupure correspond donc exactement un réel, qu'il soit rationnel ou irrationnel. DEDEKIND montre ensuite que ses coupures vérifient toutes les propriétés que l'on est en droit d'attendre des réels pour l'ordre, l'addition et la multiplication[9] (voir [52]).

5 Calculs approchés de $\sqrt{2}$

5.1 Tablette mésopotamienne

Il existe dans la collection des antiquités babyloniennes de l'Université de Yale une petite tablette circulaire[10] d'à peine 7 cm de diamètre. Elle représente un carré et ses diagonales où trois séries de nombres sont gravés. La gravure se faisait par pression plus ou moins prononcée d'un roseau taillé dans un pain d'argile malléable. Les encoches avaient la forme de coins (*cuneus* en latin) semblables à des *clous* ou des *chevrons* ; d'où le nom de *cunéiforme* donné à ce type d'écriture. Une fois le texte écrit, l'argile était chauffée et prenait la consistance d'une brique, ce qui garantissait une certaine pérennité de l'information.

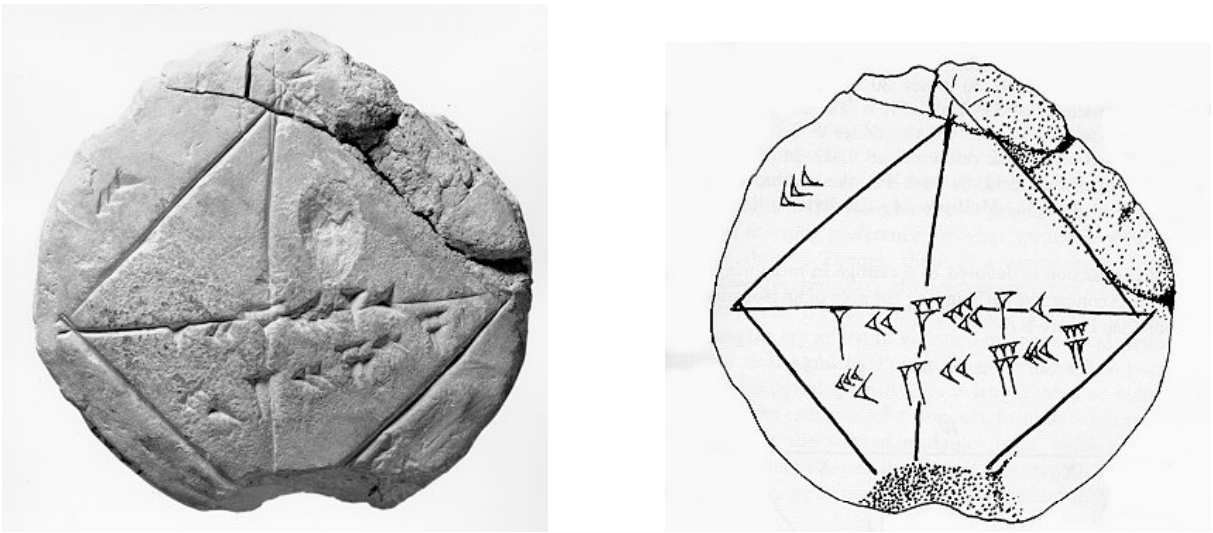


Fig. 6 : YBC7289

[9] En termes de la mathématique des structures, les coupures forment avec l'addition et la multiplication un corps commutatif totalement ordonné.

[10] Yale Babylonian Collection, YBC7289, datée de la première dynastie babylonienne, entre 1728-1530 av.J.-C.

L'interprétation des signes mathématiques est assez simple si l'on connaît les quelques règles qui régissent leur écriture[11]. Tête en haut et le corps fortement marqué, le *clou* représente l'unité.



Fig. 7 : Représentation de 1 en cunéiforme.

Ces marques, regroupées par série de trois, sont utilisées pour indiquer les unités, de 1 à 9. Seuls les clous de la série du bas gardent une grande empreinte du corps. Voici par exemple la représentation du nombre 4.



Fig. 8 : Représentation de 4 en cunéiforme.

Tête vers la gauche sans marque du corps, le *chevron* représente la dizaine. Ces chevrons sont utilisés par leur éventuelle répétition pour marquer les dizaines de 10 à 50.



Fig. 9 : Représentation de 10 en cunéiforme.

On juxtapose les symboles et on additionne leurs valeurs. Par exemple 24 se représente par deux chevrons (20) et quatre clous (4).

La base du système de numération est 60, mais le système sert aussi bien à la représentation des entiers qu'à celle des fractions ayant pour dénominateur une puissance de 60 (voir [27]) ; un bloc de deux chevrons et quatre clous suivi un peu plus loin d'un bloc de 5 chevrons et 1 clou s'interprétera soit par le nombre $24 \times 60 + 51$, soit par le nombre $24 + \frac{51}{60}$, car il n'y a pas de signe équivalent à notre virgule pour départager les deux cas. On se trouve donc obligé de recourir à la vraisemblance et au contexte pour comprendre de quels nombres il s'agit (voir [115]).

Examinons de plus près les trois nombres gravés sur la tablette mésopotamienne. Interprétons tout d'abord le nombre écrit près du côté supérieur gauche du carré. Composé de 3 chevrons, ce nombre ne peut être égal qu'à 30.



Fig. 10 : Représentation de 30 en cunéiforme.

Déchiffrons à présent le nombre inscrit au travers de la diagonale du carré. Nous lisons successivement de gauche à droite :

[11] Plusieurs manières de positionner les différents signes les uns par rapport aux autres ont été constatées sur différentes tablettes. Pour plus de détails, voir [79].

– 1 clou ;
– un bloc constitué de 2 chevrons et de 4 clous ;
– un bloc constitué de 5 chevrons et de 1 clou ;
– 1 chevron.



Fig. 11 : Le nombre inscrit au travers de la diagonale.

Plusieurs valeurs sont possibles :

– soit $1 \times 60^3 + 24 \times 60^2 + 51 \times 60^1 + 10 \times 60^0 = 305\,470$;

– soit $1 \times 60^2 + 24 \times 60^1 + 51 \times 60^0 + 10 \times 60^{-1} = 5\,091,166\,667$;

– soit $1 \times 60^1 + 24 \times 60^0 + 51 \times 60^{-1} + 10 \times 60^{-2} = 84,852\,778$;

– soit $1 \times 60^0 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3} = 1,414\,212\,963$.

Cette petite tablette « aide-mémoire » fournit donc dans un contexte de carré et de ses diagonales, une excellente approximation de $\sqrt{2}$, puisque l'erreur relative n'est que de $4 \cdot 10^{-7}$. Une telle précision ne peut provenir d'une mesure physique effectuée sur une figure même très soignée. Il faut donc en conclure que le scribe était conscient du fait que ce nombre avait pour carré 2, et qu'il disposait d'une technique de calcul des racines.

Gilles Godefroid [76] pense qu'une méthode proche de celle connue sous le nom d'algorithme de Héron[12] pouvait avoir été utilisée par les babyloniens. La voici :

Considérons a proche de $\sqrt{2}$: dans ce cas

$$2 = a^2 + h$$

avec h assez petit. Si nous considérons la somme de ces deux termes comme le début d'un carré, nous avons

$$\left(a + \frac{h}{2a}\right)^2 = a^2 + h + \frac{h^2}{4a^2}.$$

Et puisque h est petit, on a

$$\left(a + \frac{h}{2a}\right)^2 \simeq a^2 + h$$

et donc

$$\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + h} \simeq a + \frac{h}{2a}.$$

On remarque ensuite que

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + h}{a}\right) = a + \frac{h}{2a}$$

[12] Voir chapitre 14, page 451.

ce qui nous conduit à l'approximation

$$\sqrt{2} \simeq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

En partant de $a = 1$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{3}{2}$ qui s'écrit dans la notation babylonienne $1 + \frac{30}{60}$.

En partant de $a = \frac{3}{2}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{17}{12}$ qui s'écrit dans la notation babylonienne $1 + \frac{25}{60}$.

En partant de $a = \frac{17}{12}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{577}{408}$ dont l'écriture dans la notation babylonienne commence par $1 + \frac{24}{60}$.

En partant de $a = \frac{577}{408}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{665\,857}{470\,832}$ dont l'écriture dans la notation babylonienne commence par $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

Revenons à notre tablette : le troisième nombre comporte les blocs 42, 25 et 35.



Fig. 12 : Le nombre inscrit sous la diagonale.

Effectuons le produit, en base 60, de 30 (la mesure du côté du carré) par $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$. On trouve successivement :

$30 \times 1 = 30$

$30 \times \frac{24}{60} = \frac{720}{60} = 12$

$30 \times \frac{51}{60^2} = \frac{1\,530}{60^2} = \frac{25\times 60+30}{60^2} = \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2}$

$30 \times \frac{10}{60^3} = \frac{300}{60^3} = \frac{5}{60^2}$

$30 \times \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right) = 30 + 12 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2} + \frac{5}{60^2} = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$

Le troisième nombre doit donc se lire $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42,426\,388$ et représente, avec une erreur relative de $4 \cdot 10^{-7}$, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 30.

Le grand spécialiste du déchiffrement des tablettes babyloniennes, O. Neugebauer (voir [113]), pense également que l'extraction avec une telle précision de la racine carrée de deux se faisait par la méthode qui vient d'être indiquée. Il soutient que les Mésopotamiens semblent avoir eu d'extraordinaires capacités à manipuler les nombres de toutes sortes de manières, manipulations dont ils consignaient soigneusement les résultats. Si la tablette YBC 7289 montre incontestablement que le scribe savait que la diagonale d'un carré de côté c est égale à $c\sqrt{2}$, elle ne permet pas de conclure à la connaissance du théorème de Pythagore dans le cas général. Que l'aire de la surface carrée $(AEFC)$ construite sur la diagonale (AC) d'un autre carré $(ABCD)$ est égale au double de l'aire de la surface de celui-ci, est immédiatement visible sur la figure 13.

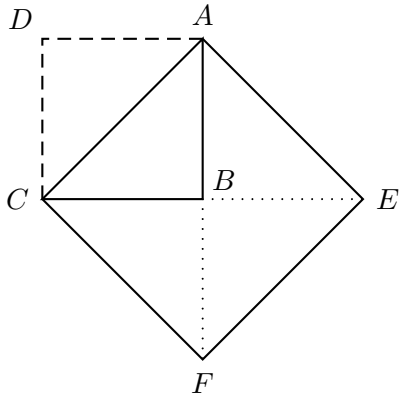


Fig. 13

5.2 Les Śulbasutras

Vers le IIIe millénaire av. J.-C., des Aryens, originaires des steppes d'Eurasie, envahissent l'Inde et parviennent à dominer le peuple hindou. Ils installent en Inde du Nord une riche civilisation qui va développer une littérature savante écrite en sanscrit. Entre 1500 et 500 avant J.-C., les textes sacrés de l'hindouisme vont être rédigés et compilés dans une œuvre monumentale : la *Véda*[13]. Ce terme qui signifie « science, savoir » recouvre de nombreux recueils disparates destinés aux « fonctionnaires » du culte.

Les prescriptions et les connaissances requises pour construire les temples sont regroupées dans des *Sutras* (ensemble de règles rituelles). Les *Śulbasutras* (littéralement : règles des cordes, celles qu'emploient les géomètres pour mesurer) sont une section des Sutras consacrée à certaines règles mathématiques régissant la construction et la forme des autels sacrificiels. Ces « sacrifices » étaient des offrandes constituées de récoltes ou de bétail : les nombreux dieux hindous pouvaient ainsi mieux veiller à la marche correcte du monde.

Nous disposons de quatre textes complets d'auteurs différents : Baudhayana et Apastamba, antérieurs au Ve siècle av. J.-C., Manava et Katyayana, antérieurs au IIIe siècle av. J.-C. Malgré la similitude entre les problèmes étudiés par Euclide et les problèmes abordés dans les *Śulbasutras*, ces derniers restent peu connus[14]. Ils présentent pourtant l'originalité d'être de simples annexes d'un rituel long et compliqué. Ils étaient tellement peu perçus comme textes mathématiques que l'on trouve difficilement leur influence chez les auteurs indiens postérieurs présentant une mathématique plus structurée comme Āryabhaṭa[15] et Brahmagupta[16].

Dans ses *Śulbasutras*[17], Baudhayana explique comment construire un carré d'aire double d'un carré donné, ce qui conduit à une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (voir [98] et [57]). Il suggère

[13] Ce terme donnera son nom à cette période historique de l'histoire indienne : la période de l'Inde *védique*.

[14] La première traduction anglaise de G. Thibaut date de 1877 à 1882 et ne se trouve que dans de rares bibliothèques spécialisées. Une nouvelle traduction a été publiée en 1983 par S. N. Sen et A. K. Bag, *The Śulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava*, New Dehli, Indian National Science Academy.

[15] Āryabhaṭa, vivait à Patna sur le Gange ; il a écrit en 499 après J.-C. un petit livre descriptif des règles de calcul usuelles en astronomie, sommaire des connaissances de l'époque. Il utilise l'écriture décimale et se sert d'un « trou » qui joue le rôle du zéro.

[16] Brahmagupta, vivait à Ujjain dans le centre de l'Inde ; dans son recueil *Le système révisé de Brahma* écrit en 628, quelques chapitres sont consacrés aux mathématiques. Il étudie les équations, parle d'inconnues, et considère zéro comme un nombre à part entière. C'est aussi à lui que l'on doit le plus ancien essai connu pour trouver la solution d'une équation à l'aide de fractions continuées (voir [42]).

[17] Baudhayana, *Śulbasutra*, I, 62.

qu'on augmente le côté du carré d'un tiers et cela de son quart diminué du trente-quatrième de lui-même.

Concrètement, cela revient à transformer un carré de côté 1 pour en faire un gnomon que l'on adjoint à un autre carré de côté 1 pour obtenir un carré dont l'aire sera 2. Le côté de ce nouveau carré devrait être $\sqrt{2}$ si la construction était exacte. L'auteur suggère de prendre comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la valeur

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{3}\right)$$

c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}.$$

Le découpage du carré de côté 1 et la construction du gnomon, donnée par Joseph [98] permettent de justifier cette valeur approchée[18].

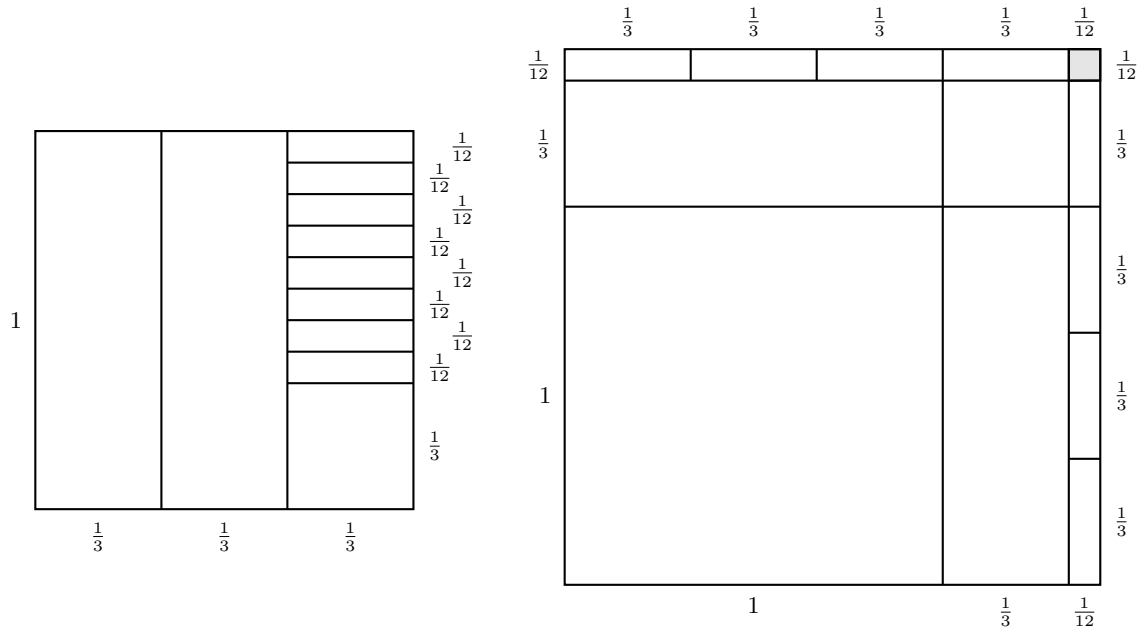


Fig. 14 : Découpage du carré et constitution du gnomon.

Un carré d'aire unité est découpé en deux grands rectangles d'aire un tiers, un carré d'aire un neuvième et huits petits rectangles d'aire un trente-sixième. Ces onze « pièces » sont assemblées pour former un gnomon autour d'un autre carré d'aire unité (figure 14). Ce gnomon est malheureusement incomplet, car un petit carré de côté un douzième n'est pas couvert en haut à droite de l'assemblage.

Le grand carré de droite, de côté $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ est d'aire légèrement plus grande que 2, exactement $2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2$.

[18]Par ailleurs, on ne connaît pas avec certitude la justification indienne sur laquelle les spécialistes ne sont pas d'accord.

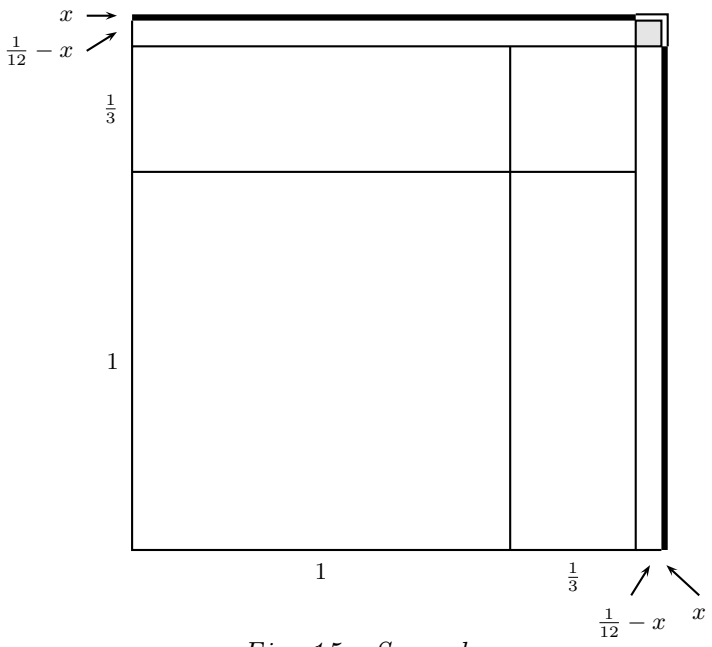


Fig. 15 : Second gnomon

On va enlever sur deux côtés du carré, un second gnomon très fin dont l'aire compensera en partie ce petit carré de côté $\frac{1}{12}$.

Les aires de chacun des rectangles très fins et allongés valent $\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot x$. Le côté du petit carré ombré intérieur au carré de côté $\frac{1}{12}$ obtenu avec le premier gnomon ne vaut plus que $\frac{1}{12} - x$. La largeur x des rectangles effilés (en haut et à droite sur la figure 15) sera choisie pour que les aires se compensent exactement.

Pour trouver la valeur de x, on résout

$$\begin{aligned} 2\left(1 + \frac{1}{3}\right)x &= \left(\frac{1}{12} - x\right)^2, \\ 2\frac{4}{3}x &= \frac{1}{144} - \frac{1}{6}x + x^2. \end{aligned}$$

En négligeant x^2 qui est petit, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{6}\right)x &= \frac{1}{144}, \\ \frac{17}{6}x &= \frac{1}{144}, \\ x &= \frac{1}{12 \cdot 34}. \end{aligned}$$

Ce découpage justifie la formule d'approximation donnée par la *Śulbasutra*. Le côté du carré après enlèvement des rectangles effilés est donc bien de

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}.$$

Le terme x^2 qui a été négligé donne une indication de l'erreur absolue qui est commise dans cette valeur approchée de $\sqrt{2}$. Elle est de l'ordre de $\left(\frac{1}{12 \cdot 34}\right)^2 \approx 6 \times 10^{-6}$. L'erreur relative est de l'ordre de 1×10^{-6}.

6 Le pair et l'impair chez Aristote.

Aristote dit que si la diagonale était commensurable avec le côté, alors un même nombre serait pair et impair. On suppose que la diagonale et le côté sont commensurables, et que l'unité de longueur est contenue m fois dans la diagonale et n fois dans le côté, les entiers m et n n'étant pas tous les deux pairs car sinon on utiliserait une unité double. D'après le théorème de Pythagore, on a $m^2 = 2n^2$, ce qui montre que m^2 est pair et donc que m est pair. En posant $m = 2p$ et en reportant dans l'égalité, on obtient en simplifiant par 2 l'égalité $2p^2 = n^2$ qui montre que n est pair et ceci est en contradiction avec l'hypothèse que m et n ne sont pas tous les deux pairs. Cette démonstration n'utilise que des connaissances arithmétiques des pythagoriciens.

7 Fractions continuées.

Si le terme *continued fraction* n'est introduit pour la première fois que par John Wallis[19] en 1655, le concept en est beaucoup plus ancien. On en relève de premières traces chez Āryabhaṭa en 499, Brahmagupta en 628 et chez Raffaele Bombelli[20] vers 1560 (voir [32]). La *fraction continuée* est un outil mathématique assez remarquable qui a eu beaucoup de succès avant l'apparition des calculatrices.

Une expression telle que

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

est une *fraction continuée* : elle se représente plus simplement par

$$< q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots > .$$

Les nombres q_1, q_2, q_3, q_4, ... sont les *quotients incomplets* ou *partiels* de la fraction continuée. Si la suite des quotients incomplets est interrompue après q_n, on obtient la *réduite*

$$< q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_n > .$$

La fraction continuée est dans ce cas *limitée*, sinon elle est *illimitée*. En instituant la théorie des fractions continuées, Euler a montré que tout réel peut s'écrire sous forme d'une fraction continuée : aux rationnels correspondent des fractions continuées limitées ; aux irrationnels correspondent des fractions continuées illimitées. Si l'irrationnel est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers, alors la fraction continuée est *périodique* (voir [53]).

La suite des *réduites*

$$\begin{aligned} &< q_1 > \\ &< q_1, q_2 > \\ &< q_1, q_2, q_3 > \\ &\cdots \end{aligned}$$

[19] John Wallis, (Ashford, 1616 –Oxford, 1703). Connu pour son *Tractatus de sectionibus conicis*, un important traité d'analytique des coniques où est formulée pour la première fois la définition algébrique des coniques. Il s'intéressa également à l'analyse infinitésimale et rencontra les fractions continuées en cherchant des valeurs approchées de π.

[20] Cet ingénieur de talent, (Bologne, 1526 – Rome, 1573) publie une *Algèbre* où il solutionne l'équation du troisième degré en utilisant les nombres imaginaires.

de la fraction continuée correspondant à un nombre irrationnel converge vers ce nombre irrationnel.

Voyons comment Bombelli aborde la recherche de $\sqrt{2}$. Il écrit que :

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1).$$

Il remarque ensuite que

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1.$$

Ainsi, il peut écrire

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

En remplaçant à son tour $\sqrt{2}$ au dénominateur du terme de droite par sa valeur, à savoir $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, il trouve

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}},$$

et, en continuant de la même manière

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}.$$

L'écriture de $\sqrt{2}$ sous forme de *fraction continuée* est

$$\sqrt{2} =< 1, 2, 2, 2, \ldots > .$$

La suite des *réduites* est

$< 1 > = 1,$

$< 1, 2 > = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$

$< 1, 2, 2 > = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5},$

$< 1, 2, 2, 2 > = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12},$

...

D'une manière générale, pour n un nombre naturel au moins égal à 1, si une réduite s'écrit $u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$, on constate que la réduite suivante $u_n = \frac{x_n}{y_n}$ se calcule par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{y_{n-1}+x_{n-1}}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{y_{n-1}}{y_{n-1} + x_{n-1}} = \frac{y_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1}}{y_{n-1} + x_{n-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \end{aligned}$$

et on retrouve les équations de récurrence de l'algorithme de Théon (voir page 444).

8 L'algorithme (graphique) de Newton

Dans son traité *Tractatus de latitudinibus formarum* (Traité de la latitude des formes) publié vers 1350, Nicole Oresme[21] expose pour la première fois une méthode de représentation graphique des variations d'une grandeur, par exemple l'évolution de la chaleur d'un corps en fonction du temps qui s'écoule. Cette discipline (l'analyse), qui interprète de manière nouvelle pour l'époque la physique et la géométrie, va à son tour s'intéresser à l'irrationalité.

Newton développe en 1671, dans sa *Méthode des fluxions* [112], un algorithme général de recherche d'une valeur approchée d'un zéro d'une fonction, algorithme toujours utilisé de nos jours. Appliqué à une fonction particulière, les valeurs fournies par cet algorithme reproduisent de manière inattendue les résultats connus de Héron.

L'algorithme s'applique à une fonction réelle continue, deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$, qui admet un et un seul zéro z dans l'intervalle $]a, b[$ (ce qui est le cas de la plupart des fonctions polynômes et fonctions usuelles). Si en b par exemple, le produit $f(b) \cdot f''(b)$ est positif, la tangente à la courbe au point d'abscisse b rencontre l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_1 compris entre z et b. En réitérant le procédé à partir de l'intervalle $[a, a_1]$, on définit une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de valeurs qui s'approchent de plus en plus de celle de z (voir [28]).

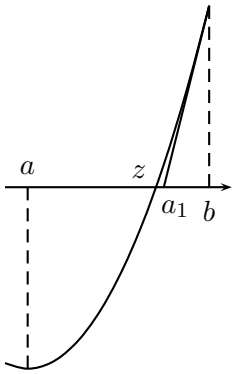


Fig. 16 : La méthode de Newton

La figure 16 montre comment on trouve a_1, la première valeur approchée du zéro z de la fonction : c'est le résultat d'une première itération de l'algorithme de Newton pour laquelle on construit la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse b.

Soit la valeur approchée a_i obtenue après i itérations de l'algorithme de Newton ; voyons comment est calculé a_{i+1} ($i \in \mathbb{N}_\circ$). Le point du graphe d'abscisse a_i est $(a_i, f(a_i))$. L'équation de la tangente au graphe en ce point est donnée par

$$y - f(a_i) = f'(a_i)(x - a_i).$$

Cette tangente coupe l'axe horizontal en un point d'abscisse a_{i+1} qui vérifie

$$-f(a_i) = f'(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

[21] Nicole Oresme (Allemagne sur Orne, 1348 – Lisieux, 1382) est un des grands penseurs du XIVe siècle. Grand-maître au Collège de Navarre en 1356, secrétaire et conseiller du Roi Charles V, évêque de Lisieux en 1378, il s'est intéressé à l'astronomie, aux mathématiques, à la théologie et à l'économie politique. Il a produit des versions latines et françaises de ses œuvres, donnant ainsi une impulsion certaine au développement de la langue française comme outil intellectuel.

ou encore

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)}.$$

C'est l'équation de récurrence de l'algorithme de NEWTON.

Puisque $\sqrt{2}$ est le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ pour laquelle $f'(x) = 2x$, on peut écrire l'équation de récurrence de l'algorithme de NEWTON dans ce cas particulier. On peut écrire

$$a_{i+1} = a_i - \frac{a_i^2 - 2}{2a_i} = \frac{2a_i^2 - a_i^2 + 2}{2a_i} = \frac{a_i^2 + 2}{2a_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2 + 2}{a_i}\right) = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{2}{a_i}\right).$$

On retrouve exactement la récurrence donnée page 456 par l'algorithme de HÉRON (voir [76]).

9 L'algorithme (numérique) de NEWTON

Cette méthode[22], également due à NEWTON, est un algorithme qui détermine successivement les chiffres de la racine d'un nombre en partant de ceux d'ordre le plus élevé.

Le nombre de chiffres de la racine carrée a d'un nombre naturel non nul A comporte autant de chiffres qu'il y a de tranches de deux chiffres dans le nombre A donné, la dernière tranche à gauche pouvant être incomplète.

En effet, si a s'écrit avec n chiffres, on a

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n.$$

Puisque $a \geqslant 1$, on a également

$$10^{2n-2} \leqslant a^2 < 10^{2n},$$

ce qui montre que a^2 s'écrit avec $2n-1$ ou $2n$ chiffres[23].

Ayant fait cette remarque, NEWTON suppose qu'à une étape du processus, d est déjà déterminé et que l'on cherche le plus grand u possible pour que

$$A = (10d + u)^2 + R,$$

où R est le reste le plus petit possible ($R \geqslant 0$). Ceci sera vérifié si, en remplaçant dans la relation précédente u par $u+1$, on obtient une valeur de R négative. On a

$$(10d + (u+1))^2 = 100d^2 + 2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + 2 \cdot 10 \cdot d + u^2 + 2u + 1$$

et

$$(10d + u)^2 = 100d^2 + 2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + u^2.$$

Il faut donc que $R < 2 \cdot 10 \cdot d + 2u + 1$, ou encore $R \leqslant 2(10d + u)$.

En retranchant $100d^2$ de A, il vient $2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + u^2 + R$, donc pour trouver R, il faut encore retrancher $(2 \cdot 10d + u) \cdot u$ pour la plus grande valeur de u possible telle que $R \leqslant 2(10d + u)$.

[22] Cette technique était enseignée chez nous jusqu'à l'apparition des calculatrices au début des années 1970 (voir [82]).

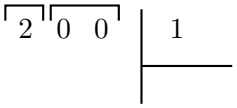
[23] Le nombre 14 s'écrit avec deux chiffres et son carré 196, avec trois ; 85 s'écrit avec deux chiffres et son carré 7 225, avec quatre.

Examinons cette technique pour calculer la racine carrée approchée de $A = 200$. La racine carrée approchée a de ce nombre s'écrit avec deux chiffres. Puisque le nombre de la tranche incomplète de gauche (2) est compris entre le carré 1 de 1 et le carré 4 de 2, on peut affirmer que le premier chiffre (d) de a est un 1. On calcule $A - 100d^2 = 200 - 100 = 100$. Testons maintenant successivement les valeurs de u pour trouver celle qui vérifie la condition sur R.

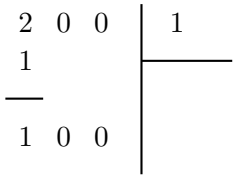
u	$2 \cdot 10 \cdot d + u$	$(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$	R	$R \leqslant 2 \cdot 10 \cdot d + u$
0	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 0 = 20$	$20 \cdot 0 = 0$	$100 - 0 = 100$	$100 \leqslant 20$? NON
1	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 1 = 21$	$21 \cdot 1 = 21$	$100 - 21 = 79$	$79 \leqslant 21$? NON
2	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 = 22$	$22 \cdot 2 = 44$	$100 - 44 = 56$	$56 \leqslant 22$? NON
3	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 3 = 23$	$23 \cdot 3 = 69$	$100 - 69 = 31$	$31 \leqslant 23$? NON
4	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 4 = 24$	$24 \cdot 4 = 96$	$100 - 96 = 4$	$4 \leqslant 24$? OUI

Le deuxième chiffre (u) est donc 4 et on a $200 = 14^2 + 4$. La racine carrée approchée de 200 est 14, d'où l'on déduit que la racine carrée approchée de 2,00 est 1,4.

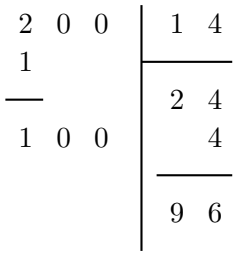
Newton a également proposé une « présentation » des calculs sous une forme qui rappelle celle de la division écrite. Avec un peu de pratique, les différents essais pour u ne doivent pas tous être notés puisque seul le dernier est utile.



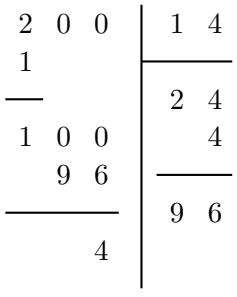
Le nombre 200 (A) dont on cherche la racine carrée est écrit à la position qu'occupe le dividende dans une division ; les chiffres successifs de la racine carrée s'écriront à la position occupée par le diviseur ; les différentes valeurs des produits $(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ seront testées à l'endroit traditionnel du quotient.
On partage le nombre 200 en tranches de deux chiffres en commençant par la droite : la tranche de gauche se compose du seul chiffre 2.



Le plus grand nombre carré inférieur à 2 est 1 ; on écrit ce premier chiffre d de la racine carrée de 200 en haut à droite de la potence. On effectue ensuite $A - 100d^2$ à gauche de la potence.



On teste les différentes valeurs de u possibles pour que le calcul $(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ donne un reste qui vérifie la condition $R \leqslant 2(10d + u)$. On sait ici que $u = 4$ convient. On recopie ensuite le deuxième chiffre de la racine en haut à droite de la potence.



On effectue $A - 100d^2 - (2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ à gauche de la potence pour trouver le reste R.
L'opération peut être poursuivie en « abaissant » une nouvelle tranche de deux zéros ce qui donnera une valeur approchée de la racine carrée de 20 000.

On peut poursuivre l'algorithme pour rechercher les 5 premiers chiffres significatifs de $\sqrt{2}$.

2 0 0 0 0 0 0 0 0	1 4 1 4 2			
1				
1 0 0	2 4	2 8 1	2 8 2 4	2 8 2 8 2
9 6	4	1	4	2
4 0 0	9 6	2 8 1	1 1 2 9 6	5 6 5 6 4
2 8 1				
1 1 9 0 0				
1 1 2 9 6				
6 0 4 0 0				
5 6 5 6 4				
3 8 3 6				

On a :

$$200\,000\,000 = 14\,142^2 + 3836$$

ou encore

$$2 = 1,4141^2 + 0,000\,038\,36.$$

Bibliographie

[1] M. Adams, 1989. Beyond Symmetry in Middle African Design. *African Arts*, XXIII(1) : 34–43.

[2] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, 1999. *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques.* Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[3] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, 1999. *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[4] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, 2000. *Compétences terminales et savoirs communs. Humanités professionnelles et techniques.* Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[5] al-Ḫwārizmī, sans date. *The Algebra of Mohammed ben Musa.* G. Olms, Hildesheim. Ed. and translated by F. Rosen. Rééd. 1986.

[6] al-Ḫwārizmī, sans date. *Dixit Algorismi.* Manuscrit Ii.vi.5, Bibliothèque de l'Université de Cambridge. Trad. latine du XIIIe siècle.

[7] M. Anno, 1982. *Dix petits amis déménagent.* École des Loisirs, Paris.

[8] M. Annoye (GEM), 1990. *Des polygones pour construire la géométrie.* CIACO, Louvain-la-Neuve.

[9] Anonyme, 1973. Nous avons construit des machines à compter (numération n° 13). In *Libres recherches et créations mathématiques.* Éditions de l'école moderne française, Cannes.

[10] B. Ansell, L. Baker, et I. Harris, 1994. *Mathematics with Polydron.* Polydron International Ltd, U.K. Reedited in 1997.

[11] G. Auriault, D. Gaud, M. Marot, et C. Robin, 1986. *Symétrie orthogonale en 6e.* IREM, Poitiers.

[12] C.-G. Bachet de Méziriac, 1612. *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.* Blanchard, Paris. Cinquième édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne, 1993.

[13] E. Ballart et R. Capdevilla, 1992. *J'apprends à compter.* Casterman, Bruxelles.

[14] M. Ballieu, mai-juin 1997. Comment procédaient-ils ? *Mathématiques et Pédagogie*, 112 : 5–30.

[15] M. Ballieu, mars-avril 2001. Quelques ≪ étapes ≫ de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes. *Mathématiques et Pédagogie*, 131 : 5–24.

[16] M. Ballieu et J.-M. Delire, 1995. Approche des notions de nombres rationnels et irrationnels à partir de textes grecs et latin. In *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, pages 460–480. IREM de Montpellier. Actes de la première université d'été européenne.

[17] É. Barbin et J.-P. Le Goff, éditeurs, 2000. *Si le nombre m'était conté*. Ellipses. IREM de Basse-Normandie.

[18] S. Baruk, 1992. *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*. Seuil, Paris.

[19] N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee, éditeurs, 1996. *Approaches to algebra, Perpectives for Research and Teaching*. Kluwer, Dordrecht.

[20] A. Berger, M. Fischer, M. Hoffmann, M. Jüttemeier, G. N. Müller, et E. C. Wittmann, 1995. *Das Zahlenbuch, Mathematik im 1 Schuljahr*. Nordrhein-Westfalen, Leipzig.

[21] A. Berger, M. Fischer, M. Hoffmann, M. Jüttemeier, G. N. Müller, et E. C. Wittmann, 1995. *Das Zahlenbuch, Mathematik im 2 Schuljahr*. Nordrhein-Westfalen, Leipzig.

[22] J. L. Berggren, 1986. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. Springer, Berlin.

[23] A. J. Bishop, 1988. *Mathematical Enculturation*. Kluwer, Dordrecht.

[24] J. Bouchereau et S. Laigre, 1978. *Il était une fois... les nombres*. IREM de Basse-Normandie (section d'Alençon).

[25] F. Boule, 1994. *Jeux de calcul, cycle des apprentissages fondamentaux*. Armand Colin, Paris.

[26] F. Boule, 1994. *La construction des nombres*. Armand Colin, Paris.

[27] J. Bouveresse, J. Itard, et E. Sallé, 1977. *Histoire des mathématiques*. Larousse, Paris.

[28] A. Bouvier, M. George, et F. Le Lionnais, 1979. *Dictionnaire des mathématiques*. P. U. F., Paris.

[29] R. Brague, 1978. *Le restant. Supplément aux commentaires du Ménon de Platon*. Vrin, Paris.

[30] R. Brissiaud, 1989. *Comment les enfants apprennent à calculer*. Retz, Paris. Réédition 2003, amplifiée de plus ou moins quatre-vingt pages.

[31] E. M. Bruins et M. Rutten, 1961. *Textes mathématiques de Suse*. Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris. Tome XXXIV des Mémoires de la Mission Archéologique en Iran : Mission de Susiane.

[32] C.-P. Bruter, 2000. La construction des nombres. In *Histoire et épistémologie*. Ellipses, Paris.

[33] F. Cajori, 1893. *History of Mathematics*. Chelsea, New York. Rééd. 1991.

[34] F. Cajori, 1929. *A History of Mathematical Notations*. Dover, New York. Rééd. 1993.

[35] G. Cardano, 1545. *Ars Magna or the Rules of Algebra*. Dover, New York. Rééd. 1993.

[36] M. Caveing, 1994. *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*. Presses Universitaires de Lille.

[37] M. Caveing, 1997. *La figure et le nombre, Recherches sur les premières mathématiques des Grecs.* Presses Universitaires du Septentrion, Paris.

[38] F. Cerquetti-Aberkane et C.. Berdonneau, 1994. *Enseigner les mathématiques à la maternelle.* Hachette Éducation, Paris.

[39] C. Chaimeux, 1998. *Un, deux, trois, c'est à moi.* Albin-Michel, Paris.

[40] L. Champdavoine, 1985. *La mathématique par les jeux, petite et moyenne section.* Nathan, Paris.

[41] L. Champdavoine, 1986. *La mathématique par les jeux, grande section et C.P.* Nathan, Paris.

[42] G. Charrière, 1995. *L'algèbre mode d'emploi.* Fournitures et éditions scolaires du canton du Vaud.

[43] M. Chastellain et F. Jaquet, 2001. *Mathématiques. Méthodologie et commentaires (5e année).* COROME, Neuchâtel.

[44] J.-P. Collette, 1973. *Histoire de mathématiques* (tome I). Renouveau pédagogique.

[45] E. Cousquer, 05/06/2003. *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels.* Laboratoire Lamia, IUFM de Lille.
`http://www.lille.iufm.fr/labo/entreerlabo2.html`

[46] E. Cousquer, mai 1994. De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels. In *La mémoire des nombres.* IREM de Basse-Normandie. Actes du Xe colloque inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques.

[47] CREM, 2001b. *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans.* Lismont, L. et Rouche, N. coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[48] CREM, 2002. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* Rouche, N. coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[49] J. N. Crossley et A. S. Henry, 1990. Thus Spake al-Khwārizmī : A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5. *Historia Mathematica*, 17 : 103–131.

[50] C. Culus et C. Persoens, mars 1995. Les transformations dans le secondaire inférieur. Document pédagogique, UREM, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine CP216, Bld Triomphe, B1050 Bruxelles.

[51] B. Da Costa, N. Pannetier, J. Engelhardt, J.-F. Jamart, C. Madridakis, A.-M. Daumont, et M. Bourbion, 1991. *Les transformations.* IREM Paris-Nord, Villetaneuse. 2e édition.

[52] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, 1986. *Une histoire des mathématiques (Routes et dédales).* Seuil, Paris.

[53] D. Daumas, juillet 1995. Activités en classe à partir de textes historiques sur l'irrationalité : de Pythagore à Théon de Smyrne. In *Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques.* IREM de Besançon. Actes de la VIe Université d'été sur l'histoire des Mathématiques.

[54] C. De Block-Docq, 1992. *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'âge de douze ans.* Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.

[55] IREM de Grenoble, 2002. *Grand N, Spécial maternelle, approche du nombre.* IREM, Grenoble. Tome 1.

[56] A. Deledicq, mai 1993. Le monde des symétries. In *Collection Maths pour tous.* ACL-Éditions, Paris, 50 rue des Écoles, 75005 Paris.

[57] J.-M. Delire, 1993. Un chapitre du baudhayana sulbasutra. Mémoire de licence, Université Libre de Bruxelles, Faculté de Philologie et Histoire Orientales.

[58] A. Djebbar, 1988a. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe d'orient. In *Actes de l'Université d'été,* IREM de Toulouse, pages 259–286.

[59] A. Djebbar, 1988b. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'occident musulman. In *Actes du Premier Colloque Maghrébin d'Alger,* Maison du Livre, Alger, pages 99–123.

[60] A. Djebbar, 2001. *Une histoire de la science arabe.* Seuil, Paris.

[61] H. Elkhadem, 1997. *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident.* Les Cahiers du CeDoP, Histoire des sciences et de la civilisation arabes. Centre de documentation pédagogique de l'Université Libre de Bruxelles, avenue Jeanne 44, 1050 Bruxelles.

[62] H. Elkhadem, 2002. *Histoire des peuples musulmans.* Presses Universitaires de Bruxelles. Syllabus de cours, Fac. Philo-Lettres, ULB.

[63] ERMEL, 1991. *Apprentissages numériques,* (5 vol.). Hatier, Paris.

[64] ERMEL, 1997. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Hatier, Paris.

[65] M. C. Escher, 1990. *Visions of Symmetry.* W. H. Freeman and Co., New York.

[66] Euclide, sans date. *Elementa, in Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version* (2 vol). Hubert L.L. Busard and Menso Folkert coordinateurs, Birkhaüser, Basel, 1992.

[67] Euclide, sans date. *Les Éléments,* volume 1. Introduction générale et Livres I à IV. Presses Universitaires de France, Paris. Introduction générale par Maurice Caveing et traduction et commentaires du texte de Heiberg par Bernard Vitrac, 1990.

[68] Euclide, sans date. *The Thirteen Books of the Elements.* Dover, New York. Transl. by Sir Thomas L. Heath. Rééd. 1956.

[69] J. Fauvel et J. van Maanen, éditeurs, 2000. *History in Mathematics Education, The ICMI Study.* Kluwer, Dordrecht.

[70] L. Fibonacci, sans date. *Liber abaci.* Manuscrit *Conversi Soppressi C.1.* n° 2616 *codice Magliabechiano (Badia Fiorentina)*, Biblioteca Nazionale, Firenze.

[71] H. Freudenthal, 1966. Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'Antiquité ? *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XVIII(1) :43–55.

[72] H. Freudenthal, 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel, Dordrecht.

[73] A. Gagnebin, N. Guignard, et F. Jaquet, 1998. *Apprentissage et enseignement des mathématiques, Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire.* Commission Romande des Moyens d'enseignement, Lausanne.

[74] P. Gerdes, 1996. *Femmes et géométrie en Afrique Australe.* L'Harmattan, Paris.

[75] Th. Gilbert et N. Rouche, 2001. *La notion d'infini. L'infini mathématique entre mystère et raison.* Ellipses, Paris.

[76] G. Godefroy, 1997. *L'aventure des nombres.* O. Jacob, Paris.

[77] Grunbaum et Shephard, 1989. *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman and Co., New York.

[78] D. Guedj, 1996. *L'empire des nombres.* Gallimard, Paris.

[79] G. Guitel, 1975. *Histoire comparée des numérations écrites.* Flammarion, Paris.

[80] T. Heath, 1913. *Aristarchus of Samos, The Ancient Copernicus.* Dover, New York. Rééd. 1981.

[81] Y. Hellegouarch, nov.-déc. 1989. Les sept groupes de frises. *Quadrature*, 1 : 11–17.

[82] V. Herbiet et J. Horwart, 1955. *Précis d'arithmétique.* Wesmael-Charlier, Namur.

[83] Herodotus, sans date. *The Histories.* Penguin Books, London. Transl. by A. de Sélincourt, revised by J. Marincola. Rééd. 2003.

[84] S. Hildebrandt et A. Tromba, 1985. *Mathématiques et formes optimales.* Éd. française de Scientific American, Paris. Réédition 1986.

[85] P. Hilton et J. Pedersen, 1983. *Fear no more, An adult Approach to Mathematics.* Addison-Wesley, USA.

[86] M.L. Hocquenghem, C. Missenard, D. Missenard, F. Monnet, A.-M. Serfati, et G. Tartary, 1980. *Histoire des mathématiques pour les collèges.* CEDIC, Paris. IREM Univ. Paris 7.

[87] A. Holme, 2002. *Geometry, Our Cultural Heritage.* Springer, Berlin.

[88] A. Hourani, 1991. *A History of the Arab Peoples.* The Belknap Press of Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts.

[89] J. Høyrup, 1992. « Algèbre d'Al-ğabr » et « algèbre d'arpentage » au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne. In F. Mawet et Ph. Talon, éditeurs, *D'Imhotep à Copernic, Actes du colloque international, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989*, pages 23–38. Peeters, Leuven.

[90] J. Høyrup, 2002. *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin.* Springer, New York.

[91] C. Huchet, 1981. *Vingt-deux ours.* École des Loisirs, Paris.

[92] Hérodote, sans date. *Herodoti Helicarnassei libri novem.* Document électronique, Gallica, bibliothèque numérique de la BNF, notice n° FRBNF37263728. Histoires d'Hérodote, version latine de 1494, traduction de L. Valla.

[93] Héron d'Alexandrie, sans date. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia - vol III - Rationes Dimetiendi et Commentatio Dioptrica.* Leipzig, 1903. Édition grecque du *Codex Constantinopolitanus palatii veteris n° 1* par H. Schöne, folio 70^v et 71^r, chapitre 8.

[94] Icosaweb, 30/03/2004. *Les corps platoniciens.* `http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/icosaweb/geomjava/polyedre/platon.htm`.

[95] G. Ifrah, 1981. *Histoire universelle des chiffres,* (2 vol.). Laffont, Paris.

[96] G. James et R. C. James, éditeurs, 1949. *Mathematics Dictionary.* Van Nostrand, New York.

[97] D. L. Johnson, 2001. *Symmetries.* Springer, London. Reedited in 2003.

[98] G. G. Joseph, 1994. *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics).* Penguin Books, London.

[99] S. Kangshen, J. N. Crossley, et A. W.-C. Lun, 1999. *The Nine Chapters on the Mathematical Art.* Oxford University Press.

[100] E. S. Kennedy, 1969. *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, chapitre The History of Trigonometry, pages 333–359. NCTM, Thirty first Yearbook.

[101] E. S. Kennedy, 1983. *Studies in the Islamic Exact Sciences.* American University, Beirut. Edited by D. A. King and M. H. Kennedy.

[102] F. Klein, 1872. *Le programme d'Erlangen (Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes).* Jacques Gabay, Paris. Rééd. 1991.

[103] D. Leclercq (coordinateur), 2003. *Mise au point d'outils didactiques pour le cours d'éducation par la technologie.* Rapport de la recherche 090/SG, téléchargeable sur le site `http://www.enseignement.be`

[104] B. Lewis, 1993. *The Arabs in History.* Oxford University Press.

[105] G. Libri, 1838-1841. *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (vol. 1). G. Olms, Hildesheim. Rééd. 1967.

[106] N. Mahammed, 1995. *Sur la résolution des équations algébriques.* IREM de Lille.

[107] G. E. Martin, 1982. *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry.* Springer, New York.

[108] J.-C. Martzloff, 1997. *A History of Chinese Mathematics.* Springer, Berlin. Édition revue et augmentée de son *Histoire des Mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1987.

[109] G. N. Müller et E. C. Wittmann, 1997. *Spiegeln mit dem Spiegelbuch.* Klett, Düsseldorf.

[110] J. Navez, mars-avril 2002. Les Éléments. *Mathématiques et Pédagogie*, 136 :73–81.

[111] O. Neugebauer, 1969. *The Exact Sciences in Antiquity.* Dover, New York.

[112] I. Newton, 1671. *La méthode des fluxions et des suites infinies.* Blanchard, Paris. Traduit par M. de Buffon en 1740. Rééd. 1994.

[113] Neugebauer O. et Sachs A., éditeurs, 1945. *Mathematical Cuneiform Texts.* American Oriental Society, New Haven, Connecticut.

[114] L. Pacioli, 1494. *Summa de Aritmetica.* Édition fac-similé du cinq centième anniversaire, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma. Rééd. 1994.

[115] A. Pichot, 1991. *La naissance de la Science,* volume 1*, Mésopotamie, Égypte.* Gallimard, Paris.

[116] M-H. Place et C. Fontaine-Riquier, 1997. *Les chiffres de Balthazar.* Col. Aide-moi à faire seul, Hatier, Paris.

[117] Platon, sans date. *Œuvres complètes,* tome III-2*, Gorgias - Ménon.* Belles Lettres, Paris. Rééd. 1972, texte établi et traduit par A. Croiset, avec la collaboration de L. Bodin.

[118] Platon, sans date. *Œuvres complètes,* tome X*, Timée - Critias.* Belles Lettres, Paris. Rééd. 1985, texte établi et traduit par A. Rivaud.

[119] C. Ptolémée, 2e siècle. *Composition mathématique (Almageste).* Henri Grand, Paris. Rééd. 1813, texte établi et traduit par M. Halma, diffusion A. Blanchard.

[120] R. Rashed, (sous la direction de), 1997. *Histoire des sciences arabes,* (3 vol.). Seuil, Paris.

[121] M. Rees, 1988. *Dix dans un lit.* Nathan, Paris.

[122] X. Roegiers, 2000. *Les mathématiques à l'école primaire.* De Boeck, Bruxelles. Tome 2.

[123] A. Rosenstiehl, 1979. *Chiffres en friche.* Larousse, Paris.

[124] N. Rouche, 1982. *L'archipel des isométries.* Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), Louvain-la-Neuve.

[125] G. Sarton, 1927. *Introduction to the History of Science* (Vol. 1). Krieger, Florida. Rééd. 1975.

[126] E. A. Schneider, 1985. Ndebele Mural Art. *African Arts*, XVIII(3) : 60–83.

[127] B. Sénéchal, 1979. *Groupes et géométries.* Hermann, Paris.

[128] J. Sesiano, 1992. Aperçu de l'histoire de l'équation du deuxième degré. *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne*, (81) : 271–298.

[129] J. Sesiano, 1999. *Une introduction à l'histoire de l'algèbre.* Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

[130] S. Stevin, 1585. Les livres d'arithmétique (I et II). In D. J. Struik, éditeur, *The Principal Works of Simon Stevin, Mathematics*, volume II B. C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam. Edited in 1958.

[131] Ph. Talon, 1992. Introduction aux mathématiques babyloniennes. In F. Mawet et Ph. Talon, éditeurs, *D'Imhotep à Copernic. Actes du colloque international, Université Libre de Bruxelles*, pages 23–38. Peeters, Leuven.

[132] P. Tannery, 1884. *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide.* Bordeaux.

[133] P. Tannery, 1912. *Mémoires scientifiques* (tome 1). J. Gabay, Paris. Rééd. 1995.

[134] F. Thureau-Dangin, 1938. *Textes mathématiques babyloniens.* Brill, Leyde.

[135] Théon de Smyrne, sans date. *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon.* Hachette, Paris, 1892. Édition et traduction de J. Dupuis d'après le manuscrit 307, Biblioteca San Marco, Venezia.

[136] R. Tossut, 1978. Initiation aux isométries planes par le dessin. Mémoire de licence, Université Catholique de Louvain.

[137] B. L. Van Der Waerden, 1954. *Science Awakening.* P. Noordhoff, Groningen. Traduction anglaise de *Ontwakende wetenschap*, 1950.

[138] P. Van Praag, 1997. *Les nombres décimaux illimités.* CREM, Nivelles.

[139] J. Vernet, 1985. *Ce que la culture doit aux Arabes d'Espagne.* Sindbad, Actes Sud. Traduit de l'espagnol par G. Martinez-Gros. Titre original : *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*, 1978.

[140] Erich Ch. Wittmann et Gerhard Müller, 1990 et 1994. *Handbuch produktiver Rechenübungen,* 2 vol. Ernst Klett, Stuttgart.

[141] F. Woepcke, février-mars et avril 1855. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ. *Journal asiatique*, 5 de la série 5 : 218–256, 309–359.

[142] A. P. Youschkevitch, 1976. *Les mathématiques arabes (VIIIe–XVe siècles).* Vrin, Paris.

[143] G. Zimmermann, 1985. *Activités mathématiques, le développement cognitif de l'enfant.* Nathan, Paris.

[144] G. Zimmermann, 1986. *Activités mathématiques, les apprentissages préscolaires.* Nathan, Paris.

Index

Noms de personnes

Abel, 524
Abū Bakr, 503, 504, 511
Abū ǧa'far al-Ḫāzin, 522
Abū Kāmil, 521
Abū-l-Wafā', 193, 537, 538
al-Barmakī, 536
al-Battānī, 537
al-Bīrūnī, 534, 538
al-Fazārī, 508, 536
al-Haǧǧāǧ ibn Maṭar, 536
al-Ḥasan ibn Qurayš, 536
al-Ḫayyām, 521, 543
al-Ḫwārizmī, 7, 407, 408, 413, 511, 517, 518, 520, 537
Al-Karaǧī, 544
al-Maǧrīṭī, 537
al-Māhānī, 522
al-Ma'mūn, 508, 511, 517, 518, 537
al-Mansūr, 508, 511, 536
Al-Samaw'al, 544
Albate(g)nius, voir al-Battānī
Alcuin, 3
Alhazen, voir Ibn al-Hayṯam
'Alī, 502, 504, 511
Anaximandre de Milet, 526
Apastamba, 549
Apollonius, 420, 509
Archimède, 3, 59, 67, 420, 436, 509, 522
Aristarque de Samos, 532
Aristote, 527, 533, 542, 552
Āryabhaṭa, 520, 534, 549, 552
Avicenne, voir Ibn Sīnā

Bachet de Méziriac, 3, 162
Baudhayana, 549
Bolyai, 528
Bombelli, 524, 552
Brahmagupta, 520, 535, 549, 552
Briggs, 538

Cardano, 523
Cayley, 528
Copernic, 533

dal Ferro, 523
Dardi de Pise, 523
Dedekind, 544
Desargues, 528
Descartes, 528
Diophante d'Alexandrie, 3, 420, 509, 513

Ératosthène, 420, 509, 532
Euclide, 420, 509, 527
Eudoxe de Cnide, 540, 543
Euler, 3, 552
Eupalinos de Megara, 527
Eutocius, 59

Fermat, 3, 436, 528
Ferrari, 523
Fibonacci, 3, 7, 519
Fior, 523
Fontana, voir Tartaglia

Ǧābir ibn Aflah, 538
Galois, 524, 528
Gerardi, 523
Gunter, 538

Ḥabaš al-Ḥāsib, 537
Hamilton, 3
Hārūn ar-Rašīd, 508
Hérodote, 514, 525
Héron d'Alexandrie, 427, 436, 451
Hipparque, 532
Hippocrate de Chio, 543
Hyppase de Métaponte, 542

Iamblique, 526, 542
Ibn al-Bannā, 3, 176, 521
Ibn al-Hayṯam, 522
Ibn Sīnā, 521

Ibn Yūnus, 537, 538
Isḥāq ibn Ḥunayn, 536

Katyayana, 549
Klein, 528

Lagrange, 524
Leibniz, 528
Liu Hui, 182, 520
Lobatchevski, 528

Mahomet, voir *Muḥammad*
Manava, 549
Menelaos d'Alexandrie, 532, 536, 537
Muḥammad, 502, 511

Napier, 538
Neper, voir Napier
Newton, 554

Oresme, 554

Pacioli, 3, 423, 519, 523
Pappus d'Alexandrie, 420, 542
Pascal, 528
Platon, 181, 263, 440, 527, 542
Poncelet, 528
Proclus, 540, 542
Ptolémée, 7, 385, 386, 388, 420, 440, 509, 517, 533
Pythagore de Samos, 526, 539, 542

Riemann, 528
Ruffini, 524

Socrate, 182, 527
Sylvester, 529

Ṯābit ibn Qurra, 521, 536
Tartaglia, 523
Thalès de Milet, 526, 539
Théétète, 540
Théon de Smyrne, 427, 436, 440

ʿUmar, 504, 511
ʿUṯman, 504, 511

Vlacq, 538

Wallis, 552

Sujets

algèbre, 7, 158, 163, 407–424, 512–524
  chinoise, 520
  géométrique, 513
  indienne, 520
  rhétorique, 513
  symbolique, 513
  syncopée, 513
algorithme, 408, 411
  de Héron, 6, 388, 452, 455, 458, 547
  de Newton, 554, 555
  de Théon, 6, 437, 444, 458, 554
Almageste, 7, 386, 440, 517, 533, 536
alphabet phonétique, 499
angle, 385–406
anthyphérèse, 436
Apprenti Géomètre, 8, 88, 89, 254, 267, 279
Arabie, 500
arithmétique, 539
arpentage, 525
art, 1, 3
  africain, 3, 75
  hispano-musulman, 3, 267
associativité, 158, 304, 306
astrologie, 535
astronomie, 7, 530, 535
axe de symétrie, 82, 86, 89, 285, 286, 296

bande numérique, 18
bédouin, 501
binôme conjugué, 177
boulier, 5, 39–54
  chinois *(suan-pan)*, 39
  japonais *(soroban)*, 40
  russe *(stchioty)*, 41

Cabri-Géomètre, 267, 279
calculatrice, 5, 176, 208, 235, 395, 444, 459
calife
  abbasside, 507, 511
  orthodoxe, 503, 504, 511
  umayyade, 505, 511
calife, 503
carré, 168–194
  diagonale, 182, 425, 541
  différence de deux, 194
  duplication, 182, 425
  médiane, 184

somme de deux, 188
centre de symétrie, 290, 296, 300
chevron, 545
chiffre, 153–167
clou, 545
composition, 304, 306
composée, 275
compteur numérique, 5, 32
comptine numérique, 20
compétence, 1, 8
corde, 385, 386, 388, 394, 399–401, 530
cosinus, 385, 537
cotangente, 531, 537
cube, 262, 264
culture mathématique, 1
cunéiforme, 515, 545
curvimètre, 33

décagone régulier, 392
construction, 393
découpage, 6, 86, 178, 181, 425
démonstration par l'absurde, 431
déplacement, 275
descente infinie, 436
diagramme
circulaire, 198, 208
rectangulaire, 202, 208
distributivité, 158, 160, 173, 179
diviseur, 153–158
dodécaèdre, 259, 264

égalité, 27
Égypte, 514, 525, 531
Éléments d'Euclide, 181, 391, 407, 410, 420, 436, 509, 513, 520, 521, 540
encadrement, 452
ensemble de référence, 206, 230
équation, 407–424, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 523
Excel, 198, 203, 249, 445, 460
extrême et moyenne raison, 390

figure
finie, 278
illimitée, 269
infinie, 278
invariante, 279
formalisation, 160, 163
formule de Héron, 451, 462
fraction, 436
fraction continuée, 552
frise, 3, 6, 265–316
classement, 6, 298
de type C, 289
de type CHV, 290
de type CV, 292
de type G, 287
de type H, 285
de type T, 284
de type V, 286
groupe, 303

géocentrique, 532
géométrie, 3, 6, 525–529
analytique, 528
euclidienne, 527
non euclidienne, 527
projective, 528
gnomon, 171, 179, 531, 535, 537, 550
graphe fléché, 217
Grèce, 526, 531
groupe, 6, 304, 306, 524, 528
de transformations, 529
générateur, 307

hégire, 503, 511
héliocentrique, 532
histoire, 1, 2

icosaèdre, 261, 264
identité, 304
ikghuptu, 76, 87
Inde, 182, 525, 531
infini, 280
Internet, 227, 232
invariant, 280, 283, 304, 529
inverse, 305, 306
irrationalité, 6, 432, 436
Islam, 502
isométrie, 265–316

litema, voir *tema*
livre à compter, 21
logarithme, 538
logistique, 539

Maison de la Sagesse, 509, 511, 517
mathématiques

arabes, 509, 517
du citoyen, 1, 2
Ménon, 5, 181
Mésopotamie, 495, 515, 526, 531
miroir, 82
monde arabe, 535
monde grec, voir Grèce
motif de base, 268, 270
mouvement, 266, 274, 278
moyenne
arithmétique, 453
géométrique, 453
multiple, 153–158
myriade, 67

neutre, 305, 306
nœud, 244, 246, 253
nombre, 11, 32, 153–180
carré, 171
comparer, 16
compter, 11, 495
diagonal, 441
dénombrer, 11, 495
figuré, 171
irrationnel, 436
latéral, 441
logique, 544
ordonner, 18
rationnel, 428, 436
reconnaître, 43
relatif, 173
représenter, 43
rompu, 436
réel, 436
sourd, 544
nombre d'or, 392, 423
nombre de référence, 200, 208
numération, 32, 55–74, 495
additive, 497
chinoise, 69
de position, 1, 5, 6, 68, 73, 153, 163, 497, 516, 532
décimale, 56, 68, 73
figurée, 497
grecque, 59, 64, 66, 388
hybride, 497
indo-arabe, 73, 517
maya, 71
parlée, 497
romaine, 58, 63, 66
sexagésimale, 388, 417, 516, 530
égyptienne, 57, 62, 65

octaèdre, 261, 264
odomètre, 33
opération, 47
addition, 47
multiplication, 154
soustraction, 51

papier calque, 81
papyrus, 515
passage de rang, 5, 32, 36
pavage, 3, 6, 240, 242
construction, 244, 253
régulier, 245
semi-régulier, 252, 256
pentagone régulier, 385, 388, 389, 541
construction, 396
pliage, 6, 86, 427, 432
podomètre, 33
Polydron, 258
polygone régulier, 243
angle intérieur, 247, 250
somme des angles, 248, 251
polyèdre
construction, 258
platonicien, 6, 257
régulier, 257, 264
pourcentage, 5, 196–239
additionner, 202
calculer, 214, 228
comparer, 197, 204, 229
cumuler, 239
majorer, 215, 221, 228
minorer, 217, 221, 228
problème, 1
produit remarquable, 7, 168
programme d'Erlangen, 527
puissance d'un point, 389
puzzle, 6, 77

qiblā, 535

ramaḍān, 535
rapport, 199, 228
ratio, 436, 541

récréation mathématique, 1, 3
récurrence, 443, 444, 447, 455
règle de trois, 229
réglette de Brissiaud, 5, 22
retournement, 275
rotation, 76, 82, 275, 280
    d'un demi-tour, 273, 274, 280

sémitique, 501
Siddhānta, 508, 534
Sind hind, 508, 536
sinus, 385, 386, 397, 530, 534, 537
situation-problème, 4, 7
Sotho, 75, 77, 88
soustraction réciproque, 436
stratégie de comptage, 259, 261
structure, 6, 304
suite décroissante, 435, 436
Śulbasūtra, 191, 549
symbolisation, 175
symbolisme, 1, 6, 158
symétrie, 6, 75
    axiale, 76, 82, 86, 88, 311
    centrale, 273, 274, 280, 289, 290, 292, 311, 314, 315
    d'axe horizontal, 273, 274, 280, 285, 290, 308
    d'axe vertical, 273, 274, 280, 286, 290, 292, 309, 315
    glissée, 286, 287, 292, 297, 301, 312, 315

table, 385, 530
    astronomique, 532, 536, 537
    de cordes, 385, 396, 532, 533
    trigonométrique, 386, 534, 537, 538
tableau, 198
tableau de proportionnalité, 213, 229, 231
tablette mésopotamienne, 191, 416, 516, 545
tableur, voir Excel
tangente, 531, 537
taux, 223, 227, 230
tema, 75, 77, 88
tétraèdre, 261, 264
théorème de Ptolémée, 397, 399
théorème de Pythagore, 5, 181, 190, 391, 395, 428, 526
théorème des sinus, 537
Timée, 263
traitement de données, 196, 227
transformation identique, 304
translation, 76, 82, 269, 274, 280, 281, 284, 307
translitération, 499
triangles semblables, 390, 393, 398, 402
trigonométrie, 7, 385, 530–538
    plane, 532, 533
    sphérique, 532, 533

valeur approchée, 425–462

Zīǧ, 508
zéro, 19, 70

Table des matières

Avant-propos **1**

1 Culture mathématique, mathématiques du citoyen 1
2 Spécificités de la recherche 4
3 Les thèmes abordés 5
4 Présentation type des situations-problèmes 7
5 *Apprenti Géomètre* 8

I Culture mathématique à partir de 5 ans **9**

1 La construction des nombres **11**

1 Dénombrer et compter 11
2 Comparer des nombres 16
3 Ordonner des nombres 18
4 Les réglettes de type Brissiaud 22

2 Le passage de rang. **32**

1 Les machines à compter 32
2 Les bouliers 39

3 À la découverte de notre numération **55**

1 Comparaison de systèmes de numération 56
2 Enrichissement de la comparaison 68

4 Rencontre avec les symétries dans l'art africain **75**

1 Les enfants face à la « symétrie » 77
2 Chercher des axes de symétrie... 82
3 Réalisation de *litema* 88

Fiches à photocopier **91**

II Culture mathématique à partir de 12 ans **151**

5 Mathémagiques **153**

1 Multiples et diviseurs de nombres composés de 0 et de 1 153

2 Des problèmes magiques expliqués par l'algèbre 158

3 Des problèmes magiques expliqués par la numération de position et l'algèbre . . 163

6 Produits remarquables **168**

1 Carré d'une somme 168

2 Binômes conjugués 177

7 Découpages géométriques **181**

1 La relation de Pythagore 181

2 La différence de deux carrés 194

8 À la découverte des pourcentages. **196**

1 Et si on apprenait à comparer ! 197

2 Peut-on additionner des pourcentages ? 202

3 Et si on utilisait la touche % d'une calculatrice ! 208

4 Des tableaux de proportionnalité aux calculs de pourcentages 213

5 Des graphes fléchés pour résoudre des problèmes 217

9 Pourcentages et traitement de données **227**

1 Le taux de boisement 227

2 Économies d'énergie 237

10 Des pavages aux polyèdres **240**

1 À la découverte des pavages 240

2 Paver le plan à l'aide de polygones réguliers 243

3 Les polyèdres platoniciens 257

11 Frises ornementales et groupes **265**

1 Créer des frises 266

2 Découvrir les types de frises 278

3 Classer des frises 298

4 Les sept groupes de frises 303

Fiches à photocopier **317**

III Culture mathématique à partir de 15 ans **383**

12 Construire une table à la manière de Ptolémée **385**
1 L'*Almageste* de Ptolémée 386
2 Construction du pentagone régulier 389
3 Élaboration d'une table de cordes 396

13 Les équations du deuxième degré **407**
1 À la découverte d'une formule 407
2 L'algèbre d'avant « al-ğabr » 415

14 La diagonale du carré **425**
1 La racine de deux est-elle une fraction ? 427
2 Valeurs approchées de $\sqrt{2}$ 437
3 Racine approchée d'un nombre positif quelconque 450

Fiches à photocopier **469**

IV Aspects historiques et épistémologiques **493**

15 Les origines de la numération **495**

16 Le monde « arabe » : quelques pages de son histoire **498**
1 L'Arabie avant l'Islam 500
2 L'avènement de l'Islam 502
3 Les califes orthodoxes 503
4 Le califat umayyade 505
5 Le califat abbasside et la transmission du savoir 507
6 Épilogue 510

17 L'art de l'algèbre **512**
1 Les origines des mathématiques 514
2 L'Égypte 514
3 La Mésopotamie 515
4 L'empire arabe 517
5 L'algèbre en Occident 523

18 L'évolution de la pensée géométrique **525**

1 Les débuts de la géométrie 525
2 La géométrie dans le monde grec 526
3 Les géométries non euclidiennes et le programme d'Erlangen 527

19 Le développement de la trigonométrie 530
1 Les balbutiements 531
2 D'Aristarque à Ptolémée 532
3 La trigonométrie dans le monde indien 534
4 La trigonométrie dans le monde musulman 535
5 La trigonométrie dans le monde occidental 538

20 Le défi de l'irrationalité 539
1 Logistique et arithmétique 539
2 Grandeurs et nombres. 540
3 Légende ? 542
4 La numérisation des rapports 543
5 Calculs approchés de $\sqrt{2}$ 545
6 Le pair et l'impair chez Aristote. 552
7 Fractions continuées. 552
8 L'algorithme (graphique) de Newton 554
9 L'algorithme (numérique) de Newton 555

Bibliographie 559

Index 567