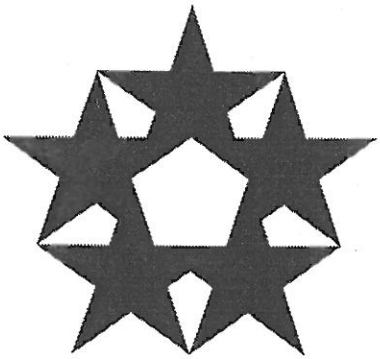
COLLECTION "DOCUMENTS DU CREM"

No 4 JANVIER 1997

Les nombres décimaux illimités

Paul van Praag, Université de Mons-Hainaut



CREM a.s.b.l.
Centre de Recherche
sur l'Enseignement
des Mathématiques

5 rue Emile Vandervelde
B-1400 Nivelles, Belgique

GEPEMA
Groupe d'Étude
sur les Premiers Enseignements
de la Mathématique
Université de Mons-Hainaut
15 avenue Maistriau
7000 Mons

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un accord de coopération entre le Groupe d'Étude sur les Premiers Enseignements de la Mathématique de l'Université de Mons-Hainaut *et le* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM a.s.b.l.). *Elle est publiée avec le soutien de la* Direction Générale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation de la Communauté Française de Belgique.

Table des matières

0. Introduction 3

1. Le plan, les translations, l'addition 5

2. L'ordre, la graduation, les nombres décimaux illimités 11

3. Les nombres réels et leur addition 16

4. Les homothéties et la multiplication 23

5. Le corps des nombres réels 27

6. Applications : calcul de $\sqrt{2}$ par la méthode de Simon Stévin – la plus petite borne supérieure 29

Appendice : Que sont les nombres réels? 31

A.1. Les mesures communes et la mathématique 31

A.2. Les nombres segments 35

A.3. Les nombres décimaux 40

A.4. Le continu, les fractions continues, les fractions continuées 44

Bibliographie et Bibliographie de l'Appendice 49

0. Introduction

1. Les buts de ce texte sont :

   (a) de décrire d'une façon précise l'addition et la multiplication des nombres décimaux illimités : étant donnés deux tels nombres, exprimer pour tout p la $p^{\text{ème}}$ décimale de leur somme et de leur produit (pour les difficultés dues au report, voir l'Appendice, p.43),

   (b) d'établir les propriétés usuelles de ces opérations.

   Ces questions font l'objet des § 3 et 5.

2. Le merveilleux ouvrage [11] d'Henri Lebesgue répond à ces questions. Lebesgue travaille sur la droite métrique usuelle. L'addition est obtenue par les translations de la droite (on fait glisser la droite sur elle-même), et la multiplication par les changements d'unités.

3. Le livre [1] d'Emil Artin popularisait une vision de la géométrie affine plane à laquelle il avait fort contribué. Se plaçant dans l'axiomatique d'Artin, Papy introduit dans [14], à l'intention des élèves du début de l'enseignement secondaire, les nombres réels sur leurs formes binaire et décimale. Leur addition est obtenue par les translations du plan affin, les homothéties du plan sont définies à partir des nombres réels et leur procurent la multiplication.

4. L'auteur de ces lignes est séduit par la démarche dans laquelle l'étude d'une droite utilise le travail dans un plan qui contient cette droite (mais Francis Buekenhout lui a fait comprendre l'importance d'une étude intrinsèque de la droite). Il s'est posé comme exercice la rédaction d'une théorie des nombres décimaux illimités aussi précise que celle de [11] et obtenue directement par la géométrie du plan affin.

5. Le lecteur idéal est déjà familiarisé avec ce plan affin "usuel" muni de sa structure d'ordre, de ses translations et de ses homothéties (définies géométriquement). Les rappels géométriques sous une forme axiomatique et dogmatique sont là pour fournir un exposé complet et bref (l'exposé pouvait être encore plus bref en postulant d'emblée les translations et les homothéties). Pour une approche non dogmatique, voir [2] et [3].

6. Mais il y a bien sûr d'autres façons d'aborder les nombres réels. Francis Buekenhout prépare ([5] et [6]) un inventaire de ces approches. Lorsqu'il est question d'enseignement primaire ou secondaire, je pense que personne ne propose aujourd'hui un traitement par les coupures de Dedekind ou les suites de Cauchy modulo les suites nulles : les nombres réels y apparaissent comme éléments d'un ensemble qui sont eux-mêmes des ensembles définis abstraitement et infinis. Une autre façon élémentaire de procéder est de définir directement les nombres décimaux illimités comme des suites de nombres entiers, de définir la borne supérieure par l'ordre lexicographique, puis l'addition et la multiplication par cette borne. C'est ainsi que procède

par exemple J. Lelong-Ferrand [12], qui prouve que ces nombres forment (à un isomorphisme près) le seul corps ordonné archimédien et complet. Un avantage de cette présentation est de ne demander qu'un bagage mathématique minimum (en fait : la suite des nombres entiers et la capacité de raisonner). Une justification du présent texte est que s'il est opportun d'enseigner les translations, les homothéties et l'ordre sur le plan[1], alors on a tous les éléments pour prouver à l'aide d'outils mathématiques importants et riches en images, les propriétés usuelles de ces nombres décimaux illimités. Je ne dis pas que cette présentation est recommandable (je n'ai d'ailleurs fait aucune expérience qui me permettrait de recommander quoi que ce soit), je veux seulement montrer qu'elle est possible. De plus, la possibilité de tout prouver n'implique pas le devoir de tout prouver. L'enseignant décide en fonction de son public et du temps dont il dispose de ce qu'il trouve utile d'affirmer, de rendre vraisemblable, ou de prouver. Ainsi, si la détermination de la p^e décimale de la somme et du produit n'est pas indispensable pour utiliser et même "comprendre" les nombres réels (voir la Remarque 7, page 28), il reste qu'il peut être utile de savoir que la question existe et admet une réponse.

7. J'ai mis en Appendice le texte d'allure historique d'un exposé fait en avril dernier à l'Université de Mons-Hainaut à des élèves de l'enseignement secondaire. Mais je conseille au lecteur intéressé par le sujet le bel article [8] dont j'ai pris connaissance en juillet à la réunion História e Educação Matemática, à Braga.

8. Cette présentation (des nombres décimaux illimités) fut exposée d'abord en mars 1995, à titre informatif, à mes amis du GEPEMA (le Groupe d'Etude des Premiers Enseignements de la Mathématique). Un peu plus tard, dans le contexte stimulant du travail entrepris par Nicolas Rouche pour réhabiliter les grandeurs dans l'enseignement secondaire, il y eut au CREM une discussion sur le rôle souhaité pour ces grandeurs pour aborder les nombres réels. Dans un texte polémique [16], j'écrivais qu'une approche par les grandeurs (au sens de Nicolas Rouche [15]) me semblait trop difficile, qu'elle pouvait tromper sur les rapports des nombres réels à la nature, et que s'il fallait parler de grandeurs dans ce contexte, alors une classe bien particulière de telles grandeurs s'impose (depuis quatre cent ans) : celle des segments d'une demi-droite du plan. Merci donc à Nicolas Rouche pour m'avoir pris au mot et me demander de présenter et de défendre au CREM, en février dernier, mon texte annoncé.

9. Un merci approprié à Francis Buekenhout qui est responsable de plusieurs améliorations par rapport à cette dernière version. Son nom apparaît plus d'une fois dans ce texte, c'est la trace de discussions où il m'apprit beaucoup. Mais je lui dois en outre ici une présentation plus cohérente, et qui fit disparaître une vraie faute mathématique, du traitement de l'ordre. Il n'est bien sûr pas responsable des erreurs qui pourraient subsister.

10. Merci aussi à Monsieur Luc Paquet pour une discussion enrichissante et à MM.

[1] et l'avis de l'auteur en tant que citoyen est que c'est opportun. On peut de plus commencer à familiariser très tôt les enfants avec ces notions [9]. Pour les plus grands, voir [2] et [3].

Stéphane Letor, Nicolas Rouche, Sébastien Toubeau et Jacques Van Santvoort pour leurs améliorations à la forme de ce texte.

11. Merci enfin à Lyane Bouchez qui a tapé avec son soin habituel cette version-ci, la précédente, et tant d'autres publications, ainsi qu'à mon épouse Martine Oppitz pour la réalisation des dessins.

1 Le plan, les translations, l'addition

1. On travaille dans un ensemble, appelé **plan**, dont les éléments sont appelés **points.** Des parties du plan appelées **droites** satisfont à l'axiome suivant :

Axiome 1. *Deux points distincts appartiennent à une et une seule droite.*

Si A et B sont des points distincts, on notera souvent AB la droite comprenant A et B. Deux droites distinctes sont **parallèles** si leur intersection est vide. On dit aussi qu'une droite est parallèle à elle-même. Si λ et λ' sont des droites parallèles, on écrit $\lambda \parallel \lambda'$. Si λ n'est pas parallèle à λ', on écrit $\lambda \nparallel \lambda'$.

Proposition 1. *Deux droites non parallèles se coupent en un et un seul point.*

Preuve. Si elles sont non parallèles, alors elles sont distinctes et, par définition, leur intersection n'est alors pas vide. Si cette intersection comprenait deux points distincts, l'axiome 1 impliquerait que les deux droites sont égales.

Axiome 2. *Si λ est une droite et P est un point, alors P appartient à une et une seule parallèle à λ.*

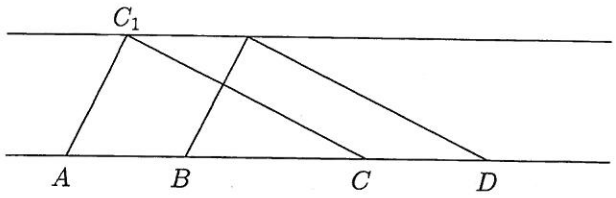
On vérifie que cet axiome implique que le parallélisme est une relation transitive du plan et donc une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées **directions.**

Tout ce que l'on a fait jusqu'à présent est cohérent si le plan est l'ensemble vide. Soyons donc plus exigeant :

2. **Axiome 3.** *Il existe trois points non alignés (c'est-à-dire n'appartenant pas à une même droite).*

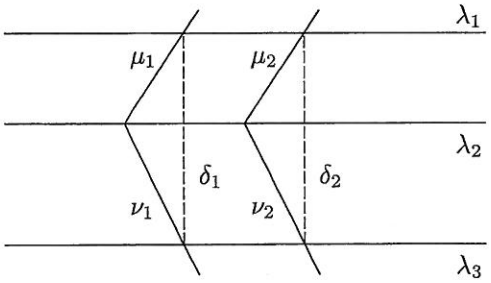
Définissons la notion la plus importante de la théorie : si A et B sont distincts et si $C \notin AB$, alors le quadruple (A, B, C, D) est un **parallélogramme** si et seulement si $AB \parallel CD$ et $AD \parallel BC$.

Par l'axiome 3, la construction suivante a un sens : soient A et B des points distincts et C un point n'appartenant pas à la droite AB. Par C on mène la droite λ parallèle à AB. Par B, on mène la parallèle λ' à AC. De $AB \nparallel AC$, on déduit que $\lambda \nparallel \lambda'$ et donc $\lambda \cap \lambda'$ est un singleton $\{D\}$. Le quadruple (A, B, D, C) est un parallélogramme. Donc, une fois le couple (A, B) fixé, à tout point $C \notin AB$, on associe un et un seul point D, également hors de la droite AB. On aurait une transformation du plan si on savait où envoyer un point quelconque de AB. Soit à présent $C \in AB$. Par l'axiome 3, soit $C_1 \notin AB$.
On fait ceci :

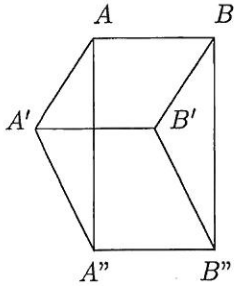


et à C on associe D. Cette construction fait intervenir C_1. Pour être certain qu'elle ne dépend que de A et B, on devrait être certain qu'en effectuant la même construction à partir d'un autre point $C_2 \notin AB$, on retombe sur D.
Pour être certain de cela, il faut le demander (sinon on a des contre-exemples) :

Axiome 4. *(axiome de Desargues pour le cas parallèle) : si λ_1, λ_2 et λ_3 sont des droites parallèles et distinctes et si $\mu_1 \parallel \mu_2$, $\nu_1 \parallel \nu_2$ sont comme ci-dessous, alors δ_1 et δ_2 comme ci-dessous sont parallèles.*

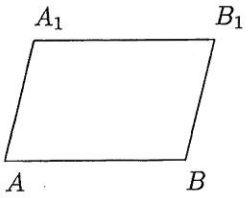


Cet axiome revient à

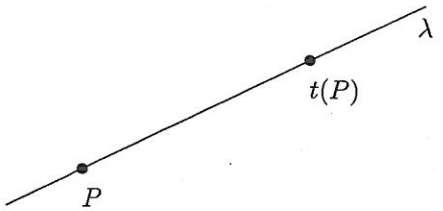


Si (A, B, B', A') et (A', B', B'', A'') sont des parallélogrammes, alors (A, B, B'', A'')

est aussi un parallélogramme. Grâce à l'axiome 4, l'association $C \to D$ décrite plus haut ne dépend pas du point C_1 choisi hors de AB. De plus, si l'on refait la construction à partir d'un couple (A_1, B_1) obtenu comme ceci



on obtient la même transformation du plan, notons-la t_{AB}. Cette transformation est donc définie par un point quelconque du plan et son image. C'est la **translation** du plan qui applique A sur B. On décrète que la transformation identique du plan, 1, est une **translation**. Soient t une translation $\neq 1$ et P un point



La direction comprenant λ ne dépend pas de P, elle ne dépend que de t. On dira que c'est la direction de t. On attribue à 1 toutes les directions. Si t_1 et t_2 ont la même direction, on écrit $t_1 \parallel t_2$. On vérifie la

Proposition 2. *Soit λ une droite. Les translations dont la direction comprend λ sont les permutations du plan qui*

(a) conservent globalement toute parallèle à λ

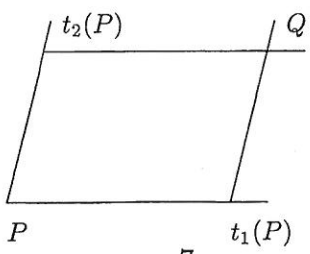
(b) appliquent toute droite λ_1 sur une droite parallèle à λ_1.

On en déduit que les translations forment un groupe T pour la loi de composition $\circ$ (dorénavant on n'écrira plus ce $\circ$), et que pour toute droite λ, les translations dont la direction comprend λ forment un sous-groupe de ce groupe.

Proposition 3. *T est un groupe commutatif.*

Preuve. Soient $t_1, t_2 \in T$.

(a) Soit $t_1 \nparallel t_2$.
Soit P un point,



On vérifie (propriétés des parallèles et des translations) que $Q = t_2t_1(P) = t_1t_2(P)$. Or une translation est déterminée par l'image d'un point, donc $t_2t_1 = t_1t_2$.

(b) Soit $t_1 \parallel t_2$. Prenons alors $t_3 \in T$ avec $t_3 \nparallel t_1$ (une telle t_3 existe grâce aux axiomes 3 et 4). On a $t_1 \parallel t_1t_2$ (proposition 2), donc $t_3 \nparallel t_1t_2$. Il vient alors

$$\begin{aligned} t_3(t_1t_2) &= (t_1t_2)t_3 \quad \text{(par le (a))} \\ &= t_1(t_2t_3) \\ &= (t_2t_3)t_1 \quad (\text{car } t_1 \nparallel t_2t_3) \\ &= t_2(t_3t_1) \\ &= t_2(t_1t_3) \\ &= (t_2t_1)t_3 \\ &= t_3(t_2t_1) \quad , \end{aligned}$$

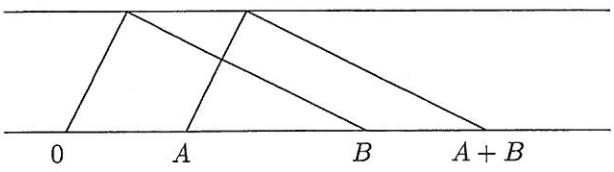
donc $t_1t_2 = t_2t_1$.

■

Corollaire 1. *Les translations d'une direction donnée forment un groupe commutatif.*

3. **L'addition.** Soit dès lors λ une droite fixée et 0 un point sur λ. Si $A \in \lambda$, on pose $t_A = t_{0A}$.
Si $A, B \in \lambda$, on pose

$$A + B = t_A(B) :$$



On a :

$$\begin{aligned} A + B &= t_At_B(0) \\ &= t_Bt_A(0) \\ &= t_B(A) \quad , \end{aligned}$$

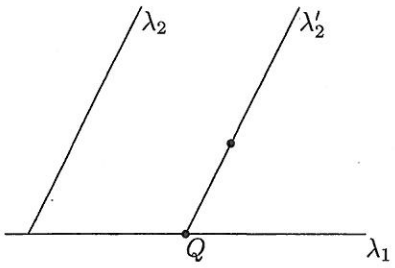
λ est un groupe commutatif pour la loi $+$.
Si $U \in \lambda$ et n un nombre entier positif, on pose :

$$nU = \underbrace{U + \cdots + U}_{n \text{ fois}}$$

$$\text{et} \quad (-n)U = -nU \quad ,$$

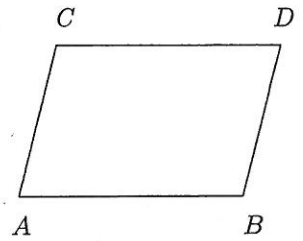
on pose aussi $oU = 0$ ($o \in \mathbb{N}$).
$\mathbb{Z}U$ est appelée la o-graduation de λ (déterminée par U). On vérifie que $m(nU) = (mn)U$.

4. **Les projections parallèles.** Soient λ_1 et λ_2 des droites non parallèles. Soient P un point et λ_2' la parallèle à λ_2 qui comprend P. λ_2' coupe λ_1 en Q. L'application $P \mapsto Q$ est la **projection** du plan sur λ **parallèlement** à λ_2

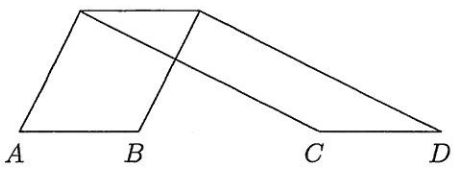


Soient (A, B) et (C, D) des couples de points. On dit que ces couples sont **équipollents** et on écrit $(A, B) \uparrow (C, D)$ si et seulement si ils définissent la même translation (c'est-à-dire ssi $t_{AB} = t_{CD}$). Donc $(A, B) \uparrow (C, D)$ ssi une des deux situations suivantes est satisfaite :

(a) $C \notin AB$ et (A, B) et (C, D) sont liés par un parallélogramme



(b) $C \in AB$ et (A, B) et (C, D) sont liés par deux parallélogrammes



Proposition 4. $(A,B) \uparrow (C,D)$ *ssi* $(A,C) \uparrow (B,D)$.

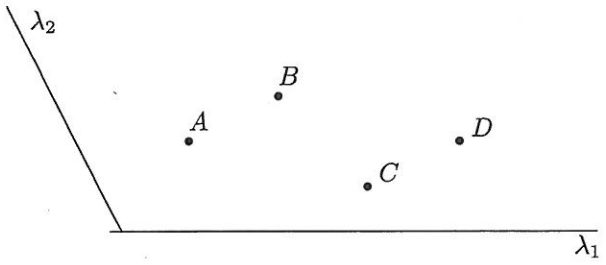
Preuve. Soit le cas (a). Dès lors $t_{AC}(A) = C$ et $t_{AC}(B) = D$. Soit le cas (b). Dès lors $t_{AC}(A) = C$ et

$$\begin{aligned} t_{AC}(B) &= t_{AC}t_{AB}(A) \\ &= t_{AB}t_{AC}(A) \quad \text{(commutativité de } T\text{)} \\ &= t_{AB}(C) \\ &= D \quad . \end{aligned}$$

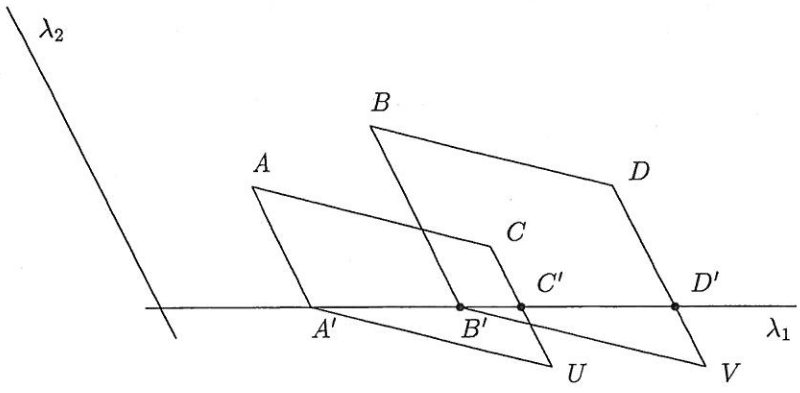
■

Corollaire 2. *Si* $\lambda_1 \nparallel \lambda_2$, p *est la projection du plan sur* λ_1 *parallèlement à* λ_2 *et* (A,B) *et* (C,D) *sont des couples équipollents, alors* $(p(A),p(B)) \uparrow (p(C),p(D))$.

Preuve. ([13]). Soit la situation suivante :



Soient $A' = p(A)$, etc. La proposition 4 implique que $(A,C) \uparrow (B,D)$. On construit alors U et V comme suit :



Donc, successivement :

$$\begin{array}{rcl} (A',U) & \uparrow & (B',V) \quad \text{(par construction)}, \\ (A',B') & \uparrow & (U,V) \\ A'B' & \parallel & UV \\ C'D' & \parallel & UV \\ (C',D') & \uparrow & (U,V) \uparrow (A',B') \quad . \end{array}$$

■

2 L'ordre, la graduation, les nombres décimaux illimités

1. Toutes les droites sont supposées munies de deux ordres totaux réciproques. Dès lors, on a la notion de **segment** : soit $<$ l'un des ordres sur λ et $A, B \in \lambda$.
Si $A \leqslant B$, le **segment** $[A,B]$ est $\{X \in \lambda \mid A \leqslant X \leqslant B\}$

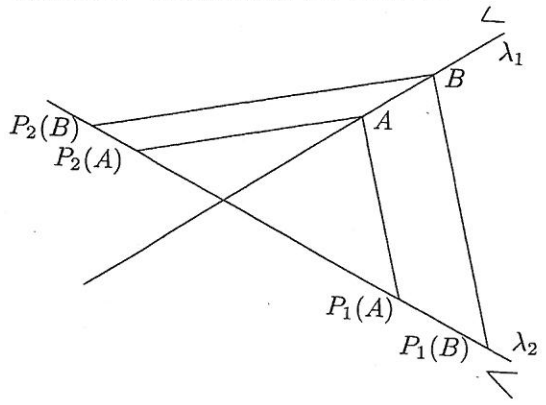
Axiome 6. ([2]). *Soient $\lambda_1, <$ et $\lambda_2, <$ des droites munies chacune d'un de leurs ordres, et p une projection parallèle de λ_1 sur λ_2.*
S'il existe $A, B \in \lambda_1$ tels que

$$A < B \quad et \quad p(A) < p(B) \quad ,$$

alors pour tous $X, Y \in \lambda_1$, on a :

$$si\ X < Y,\ alors \quad p(X) < p(Y) \quad .$$

Cet axiome dit donc que toute projection parallèle de λ_1 sur λ_2 soit "conserve" totalement, soit "renverse" totalement les ordres :



$$\begin{array}{lll} A < B & \text{et} & p_1(A) < p_1(B) \\ & & p_2(A) > p_2(B) \quad . \end{array}$$

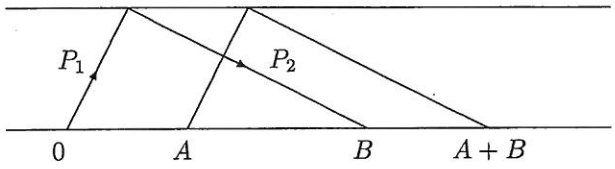
[2] L'axiome 5 apparaîtra plus loin.

Axiome 7. *Soient $\lambda_1, <$ et $\lambda_2, <$ parallèles. Si une projection parallèle de λ_1 sur λ_2 conserve l'ordre, alors toutes les projections parallèles de λ_1 sur λ_2 conservent l'ordre.*

Conséquence. Dans tous les cas, les segments sont envoyés sur des segments.

Remarque 1. On peut vérifier que cet axiome 7 exclu le plan comprenant exactement 4 points. Comme me l'a fait remarquer Francis BUEKENHOUT, on peut prouver que si le plan n'est pas le plan à 4 points, alors l'axiome 6 implique l'axiome 7. Voici un schéma de preuve qui se base sur la présentation d'E. Artin [1]: l'axiome 6 induit sur le corps k qu'Artin définit par la géométrie, une structure de corps faiblement ordonné ([1], p.41). Par le théorème 1.16 de [1], k est alors un corps ordonné. On en déduit l'axiome 7.

2. Soit la droite λ munie de 0, de $+$, et à présent d'un ordre $<$. Soient $A, B \in \lambda$



$$A + B = p_2 p_1(A) \quad .$$

Si p_1 renverse les ordres, p_2^{-1} aussi (axiome 7), donc p_2 aussi, donc $p_2 p_1$ conserve l'ordre sur λ. Donc si $X, Y \in \lambda$ avec $X < Y$, on a

$$p_2 p_1(X) < p_2 p_1(Y)$$

on a donc prouvé la

Proposition 5. *Pour tous $X, Y, B \in \lambda$, si $X < Y$, alors $X + B < Y + B$.*

Corollaire 3. *Si $A > 0$ et $B > 0$, alors $A + B > 0$.*

Preuve. $A > 0 \rightarrow A + B > 0 + B = B > 0$.

■

Corollaire 4. *Si $0 \neq U \in \lambda$ et si n est un entier positif, alors $nU \neq 0$.*

■

Corollaire 5. *Si*

$$A_1 \leqslant A \leqslant A_2 \tag{1}$$

et

$$B_1 \leqslant B \leqslant B_2 \quad , \tag{2}$$

alors

$$A_1 + B_1 \leqslant A + B \leqslant A_2 + B_2 \quad .$$

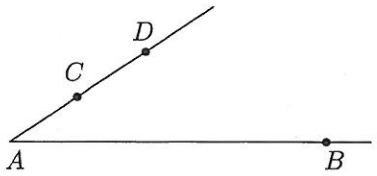
Preuve.

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &\leqslant A + B_1 && \text{(par (1))} \\ &= B_1 + A && \text{(commutativité de +)} \\ &\leqslant B + A && \text{(par (2))} \\ &= A + B && \text{(commutativité)} \\ &\leqslant A_2 + B && \text{(par (1))} \\ &= B + A_2 && \text{(commutativité)} \\ &\leqslant B_2 + A_2 && \text{(par (2))} \end{aligned}$$

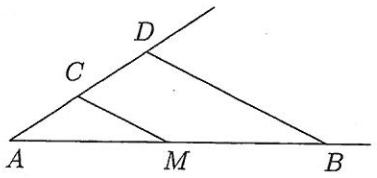
Corollaire 5. *Si* $0 \leqslant A \leqslant B \leqslant C$, *alors* $0 \leqslant B - A \leqslant C$.

Preuve. Exercice.

3. **Le milieu.** Soient A et B des points distincts. On fait ceci :



où $(A, C) \uparrow (C, D)$. Le corollaire 4 implique que $D \neq A$.
Maintenant



Le corollaire 2 implique que $(A, M) \uparrow (M, B)$. M est appelé le point milieu de A et de B.

4. **La graduation.** Soit λ munie de 0 et de +. Soient $A \in \lambda$ et X le milieu de 0 et de A. Donc $X + X = A : 2X = A$, on écrira

$$X = \frac{1}{2}\, A \quad .$$

De même, on définit $\frac{1}{n}\, A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, et $m\left(\frac{1}{n}\, A\right) = \frac{1}{n}(mA)$ que l'on notera $\frac{m}{n}\, A$. Si $0 \neq U \in \lambda$, alors $\frac{\mathbb{Z}}{10^\ell}\, U$ est appelée la ℓ-graduation de λ (déterminée par U). La graduation de λ déterminée par U est $\bigcup\limits_{\ell} \left(\frac{\mathbb{Z}}{10^\ell}\, U\right)$.

5. **L'axiome d'Archimède. Les nombres décimaux illimités.** Nous allons maintenant faire en sorte que si $U \neq 0$, alors la o-graduation de λ déterminée par U "concerne" tous les points de λ :

Axiome 8. *(Axiome d'Archimède). Pour tout $V \in \lambda$ avec $V > 0$ et pour tout $A \in \lambda$, il existe un entier positif n pour lequel $A < nV$.*

On suppose dès à présent que $U > 0$.
Dès lors tout point de λ appartient à au moins un segment $[zU, (z+1)U]$ où $z \in \mathbb{Z}$. Il appartient à deux tels segments si et seulement si il se trouve sur la o-graduation. Nous utiliserons souvent la conséquence immédiate suivante de l'axiome 8 :

Proposition 6. *Soit $0 \leqslant V \in \lambda$. S'il existe $X \in \lambda$ pour lequel $nV \leqslant X$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $V = 0$.*

Soient maintenant $A \in \lambda$ et $z \in \mathbb{Z}$ pour lequel $A \in [zU, (z+1)U]$. On regarde alors les sous-segments de ce dernier segment définis par la 1-graduation de λ. Au moins un de ces sous-segments comprend A :

$$\left(z + \frac{n_1}{10}\right) U \leqslant A \leqslant \left(z + \frac{n_1 + 1}{10}\right) U$$

où $n_1 \in \{0, \ldots, 9\}$, etc. : pour tout p on a un nombre décimal limité $z, n_1 \ldots n_p$ pour lequel

$$(z, n_1 \ldots n_p)\, U \leqslant A \leqslant \left(z, n_1 \ldots n_p + \frac{1}{10^p}\right) U \quad . \tag{3}$$

A donne donc lieu à l'écriture

$$z, n_1 n_2 \ldots$$

où $z \in \mathbb{Z}$ et les $n_i \in \{0, \ldots, 9\}$. C'est un **(nombre) décimal (illimité)**. On remarque que certains A donnent lieu à deux décimaux illimités : soit A sur la o-graduation : $A = a_0 U$ où $a_0 \in \mathbb{Z}$. On a

$$(a_0 - 1)\, U \leqslant A \leqslant a_0 U \tag{4}$$

et aussi

$$a_0 U \leqslant A \leqslant (a_0 + 1)\, U \quad . \tag{5}$$

A partir de (4), on obtient le décimal

$$(a_0 - 1)\, , 999 \ldots \quad ,$$

et à partir de (5) :

$$a_0, 000 \ldots$$

La même remarque peut être faite pour tous les points de la graduation : soit $A = a_0, a_1 \ldots a_p U$ où $a_p \neq 0$, on obtient :

$$a_0, a_1 \ldots a_p 000 \ldots$$

et

$$a_0, a_1 \ldots (a_p - 1)999 \ldots$$

Les points de λ qui n'appartiennent pas à la graduation ne donnent lieu qu'à un seul décimal.

Proposition 7. *Tout nombre décimal illimité provient d'au plus un point de λ.*

Preuve. Soient $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ un décimal et $A \leqslant B$ des points qui donnent lieu à a. Donc pour tout p:

$$(a_0, a_1 \ldots a_p)\, U \leqslant A \leqslant B \leqslant \left(a_0, a_1 \ldots a_p + \frac{1}{10^p}\right) U \quad ,$$

donc

$$0 \leqslant A - (a_0, a_1 \ldots a_p)\, U \leqslant B - (a_0, a_1 \ldots a_p)\, U \leqslant \frac{1}{10^p} U \quad ,$$

donc (corollaire 5):

$$0 \leqslant B - A \leqslant \frac{1}{10^p} U \quad ,$$

donc

$$0 \leqslant 10^p (B - A) \leqslant U \quad . \tag{6}$$

Cette double inégalité doit être satisfaite pour tout p, la proposition 6 implique alors $A = B$.

■

Cette preuve prouve aussi ceci: soient P_ℓ et Q_ℓ des points qui déterminent des segments non nuls et emboîtés, c'est-à-dire:
pour tout ℓ:

$$P_\ell \leqslant P_{\ell+1} < Q_{\ell+1} \leqslant Q_\ell \quad .$$

Si pour tout ℓ,

$$Q_\ell - P_\ell < \frac{1}{10^\ell} U \quad ,$$

alors intersection $\bigcap_\ell [P_\ell, Q_\ell]$ est au plus un singleton.
Nous nous servirons de l'énoncé suivant à peine un peu plus général.

Proposition 8. *Soient n un nombre entier et P_ℓ, Q_ℓ des points qui déterminent des segments emboîtés. Si pour tout ℓ:*

$$Q_\ell - P_\ell < \frac{n}{10^\ell} U \quad ,$$

alors l'intersection $\bigcap_\ell [P_\ell, Q_\ell]$ est au plus un singleton.

Preuve. Voir la preuve de la proposition 7, où (6) devient:

$$0 \leqslant 10^p (B - A) \leqslant nU \quad .$$

Résumons-nous : 0 et $U > 0$ étant fixés sur λ, tout point de λ donne lieu à un ou deux décimaux illimités. Si un décimal illimité provient d'un point de λ, il ne provient que d'un seul.

A présent : quels sont les décimaux illimités qui proviennent d'un point de λ?

6. Soit $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ un décimal illimité.
Cherchons donc un point A pour lequel pour tout ℓ

$$A \in \bigcap_{\ell} \left[(a_0, a_1 \ldots a_\ell)\, U, \left(a_0, a_1 \ldots a_\ell + \frac{1}{10^\ell} \right) U \right] \quad . \tag{7}$$

Nous savons que le second membre de cette appartenance comprend au plus un élément, mais a priori rien n'implique qu'il ne soit pas vide. On construit facilement un exemple de plan satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3, 4, 6, 7 et 8 et où le second membre de (7) peut être vide. Si l'on veut donc que ce second membre ne soit pas vide, il faut le demander :

Axiome 9. *(Axiome de continuité). L'intersection d'une chaîne de segments emboîtés $[P_i, Q_i]$ où les $P_i, Q_i \in \lambda$ n'est pas vide.*

A présent tout décimal illimité représente un et un seul point de λ.

3 Les nombres réels et leur addition

1. Munissons l'ensemble des décimaux illimités de la relation ρ définie comme suit :

   (a) pour tout $z \in \mathbb{Z}$, le couple

   $$(z, 99\ldots, (z+1), 00\ldots)$$

   est dans la relation,

   (b) pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $n_1, \ldots, n_\ell \in \{0, \ldots, 9\}$ et $n_\ell \neq 0$,

   $$(z, n_1 \ldots (n_\ell - 1)\, 99\ldots \quad , \quad z, n_1 \ldots n_\ell 00\ldots) \in \rho$$

   (c) les autres éléments de ρ sont les couples (x, x) où x n'est pas d'une des formes de (a) et (b).

Cette relation est une relation d'équivalence dont les classes s'appellent **nombres réels**. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Un **(nombre) décimal canonique** est un nombre décimal qui ne se termine pas par une suite de 9. Tout nombre réel possède donc un et un seul représentant (par la relation ρ) qui est un décimal canonique, c'est son **représentant canonique.**
Dès lors, quelle que soit la droite du plan, l'ordre choisi sur cette droite, les points 0 et $U > 0$ choisis sur cette droite, deux décimaux illimités sont liés par la relation

ρ si et seulement si ils représentent le même point de cette droite. Les cas (a) et (b) correspondent aux points de la graduation déterminée par U. Le nombre réel déterminé par le point $A \in \lambda$ est appelé l'**abscisse** de A (dans le repère $(0, U)$).
Les décimaux canoniques sont en bijection avec les points de toute droite, donc $\mathbb{R}$ aussi. On va transporter sur $\mathbb{R}$ les structures d'ordre, d'addition et de multiplication de λ. Ces structures sur $\mathbb{R}$ seront indépendantes de la droite choisie, de l'ordre choisi sur cette droite et des points 0 et U choisis.

Remarque 2. A première vue il aurait été plus agréable de pouvoir identifier tout point d'une droite à un et un seul décimal illimité. C'est ce que fait [Lebesgue] qui n'admet que les décimaux canoniques. Pour cela, dans notre cadre nous aurions pu procéder ainsi :

(a) par l'axiome 8, pour tout $A \in \lambda$, il existe un z **unique** dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$zU \leqslant A < (z+1)U \quad ,$$

(b) il existe des n_i bien déterminés tels que pour tout ρ

$$(z, n_1 \ldots n_p)\, U \leqslant A < \left(z, n_1 \ldots n_p + \frac{1}{10^p}\right) U \quad .$$

En procédant ainsi, les points de la graduation ne donnent lieu qu'aux décimaux canoniques. (Mais nous n'aurions pas échappé aux segments fermés : dans la théorie qui suit l'axiome 9 est indispensable et cet axiome est mis en défaut par les segments semi-ouverts :

$$\bigcap_{\ell} \left[(0, 9 \ldots 9)U \quad ,, \quad \left(0, 9 \ldots 9 + \frac{1}{10^\ell}\right) U\right[= \emptyset) \quad .$$

2. L'ordre sur les décimaux canoniques

Lemme. *Si $A < B$ sont des points de λ, alors il existe G sur la graduation pour lequel*

$$A < G < B \quad .$$

Preuve. Sinon, soit $a_0, a_1 a_2 \ldots$ le représentant canonique de l'abscisse de A. Pour tout ℓ

$$(a_0, a_1 \ldots a_\ell)\, U \leqslant A < \left(a_0, a_1 \ldots a_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U \quad .$$

Puisque pour aucun ℓ on n'aurait

$$A < \left(a_0, a_1 \ldots a_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U < B \quad ,$$

on a donc

$$(a_0, a_1 \ldots a_\ell)\, U \leqslant A < B \leqslant \left(a_0, a_1 \ldots a_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U$$

quel que soit ℓ, ce qui contredit l'axiome d'Archimède.

■

Soient $a = a_0, a_1 \ldots$ et $b = b_0, b_1 \ldots$ des décimaux canoniques, et A et B les points dont a et b sont les abscisses.
Soit $A < B$. Par le lemme, il existe G sur la graduation pour lequel $A < G < B$.
D'où des cas :

(a) il existe un tel G dans la o-graduation. Mais

$$a_0 U \leqslant A < (a_0 + 1)\, U \quad ,$$

donc

$$(a_0 + 1)\, U \leqslant G < B < (b_0 + 1)\, U \quad ,$$

donc

$$a_0 U < b_0 U$$

et

$$a_0 < b_0 \quad .$$

(b) il n'existe pas de G dans la o-graduation (et donc $B \leqslant (a_0 + 1)\, U$), mais il existe un G dans la 1-graduation. On a

$$a_0 U \leqslant A < G < (a_0 + 1)\, U \quad ,$$

donc

$$a_0 U < G < (a_0 + 1)\, U$$

et

$$G = \left(a_0 + \frac{g_1}{10}\right) U \quad \text{où} \quad g_1 \in \{1, \ldots, 8\} \quad .$$

Deux sous-cas :

i. $B = (a_0 + 1)\, U$, l'expression canonique de B est $(a_0 + 1)\,, 00 \ldots$ et donc $b_0 = a_0 + 1$, donc $a_0 < b_0$.

ii. $B < (a_0 + 1)\, U$, et alors

$$a_0 U < B < (a_0 + 1)\, U \quad .$$

Mais b_0 est l'entier tel que

$$b_0 U \leqslant B < (b_0 + 1)\, U \quad ,$$

donc $b_0 = a_0$. Donc,

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) U \leqslant A < \left(a_0 + \frac{g_1}{10}\right) U < B < \left(b_0 + \frac{b_1 + 1}{10}\right) U = \left(a_0 + \frac{b_1 + 1}{10}\right) U.$$

Il vient successivement :

$$\begin{aligned} & a_0 + \frac{a_1}{10} < a_0 + \frac{g_1}{10} < a_0 + \frac{b_1 + 1}{10} \quad , \\ & a_1 < g_1 < b_1 + 1 \quad , \\ & a_1 + 1 \leqslant g_1 < b_1 + 1 \quad , \\ & a_1 < b_1 \quad . \end{aligned}$$

On peut continuer, d'où $A < B$ si et seulement si

$$\begin{array}{ll} & a_0 < b_0 \\ \text{ou} & a_0 = b_0 \quad \text{et} \quad a_1 < b_1 \\ \text{ou} & a_0 = b_0\,,\ a_1 = b_1 \quad \text{et} \quad a_2 < b_2 \quad , \\ \text{etc.} & \end{array}$$

C'est l'**ordre lexicographique** sur les décimaux canoniques (ordre que l'on aurait bien sûr pu définir directement sans passer par l'ordre sur λ).
Si on identifie, ce que l'on fera dorénavant, le décimal limité $a_0, a_1 \ldots a_p$ au décimal illimité canonique $a_0, a_1 \ldots a_p 00 \ldots$, l'ordre lexicographique colle parfaitement avec l'ordre naturel sur les nombres décimaux illimités. Par l'ordre sur les décimaux canoniques, on a un ordre sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3. Si nous ne nous étions pas limités aux décimaux canoniques, nous aurions eu un problème : puisque l'on veut

$$1,00\ldots = 0,99\ldots \quad ,$$

on aimerait pouvoir écrire

$$1,00\ldots \leqslant 0,99\ldots \quad ,$$

or $1 > 0$.

3. **Les valeurs approchées.**
Soit $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ le représentant canonique du nombre réel r. La notation

$$r\,|_p = a\,|_p = a_0, a_1 \ldots a_p$$

est bien définie. $a\,|_p$ est la **valeur approchée par défaut** de r à $\frac{1}{10^p}$ près, $a\,|_p + \frac{1}{10^p}$ la **valeur approchée par excès** de r à $\frac{1}{10^p}$ près. Si $A \in \lambda$ possède a pour abscisse, alors $a\,|_p$ est l'unique élément gU de la p-graduation tel que

$$gU \leqslant A < \left(g + \frac{1}{10^p}\right) U \quad .$$

L'ordre sur les nombres réels permet d'écrire $r\,|_p \leqslant r$.

Remarque 4. Les p premières décimales de a sont les p décimales de $a\,|_p$ et ne sont pas nécessairement les p décimales de $a\,|_p + \frac{1}{10^p}$. Mais a_p est la $p^{\text{ième}}$ décimale de $a\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}$ pour ℓ assez grand (puisque a est un décimal canonique, il existe $\ell > p$ pour lequel $a_\ell \neq 9$).
Nous verrons plus loin l'utilisation par Lebesgue de cette remarque.

4. **L'addition.** Soient $a = a_0, a_1 \ldots$ et $b = b_0, b_1 \ldots$ les représentants canoniques des nombres réels r et s, et A et B les points de λ dont r et s sont les abscisses. Soit c le

représentant canonique de l'abscisse de $A+B$. **Nous allons déterminer** c. Nous avons pour tout ℓ :

$$a\,|_\ell\, U \leqslant A < \left(a\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U \tag{8}$$

et

$$b\,|_\ell\, U \leqslant B < \left(b\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U \tag{9}$$

Le corollaire 4 implique :

$$(a\,|_\ell + b\,|_\ell)\, U \leqslant A+B < \left(a\,|_\ell + b\,|_\ell + \frac{2}{10^\ell}\right) U \quad , \tag{10}$$

donc

$$A+B \in \bigcap_\ell \left[(a\,|_\ell + b\,|_\ell)\, U\,,\, \left(a\,|_\ell + b\,|_\ell + \frac{2}{10^\ell}\right) U\right] \quad .$$

Par la proposition 8, cette intersection est un singleton : $\{A+B\}$.
Soit p

(a) Supposons que

ou bien $\quad a_{p+1} + b_{p+1} < 9$
ou bien $\quad a_{p+1} + b_{p+1} = 9 = \cdots = a_\ell + b_\ell \quad$ et $\quad a_{\ell+1} + b_{\ell+1} < 9$

Dès lors, par (8) et (9) :

$$\begin{aligned} A+B < \left(a\,|_{\ell+1} + b\,|_{\ell+1} + \frac{2}{10^{\ell+1}}\right) U &= \left(a\,|_\ell + b\,|_\ell + \frac{a_{\ell+1} + b_{\ell+1} + 2}{10^{\ell+1}}\right) U \\ &\leqslant \left(a\,|_\ell + b\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U \quad , \end{aligned}$$

qui, combiné avec (10) donne

$$(a\,|_\ell + b\,|_\ell)\, U \leqslant A+B < \left(a\,|_\ell + b\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) U \quad .$$

Donc

$$\begin{aligned} c\,|_\ell &= a\,|_\ell + b\,|_\ell \quad , \\ c_p &= (c\,|_\ell)_p = a_p + b_p \pmod{10} \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

(b) Supposons que

ou bien $\quad a_{p+1} + b_{p+1} > 9$
ou bien $\quad a_{p+1} + b_{p+1} = 9 = \cdots = a_\ell + b_\ell$
$\qquad\qquad$ et $\quad a_{\ell+1} + b_{\ell+1} > 9$

On a :

$$A+B<\left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{a_{\ell+1}+b_{\ell+1}+2}{10^{\ell+1}}\right)U \;\leqslant\; \left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{20}{10^{\ell+1}}\right)U$$
$$= \left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{2}{10^\ell}\right)U. \quad (12)$$

Mais

$$\begin{aligned}\left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{1}{10^\ell}\right)U &= \left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{10}{10^{\ell+1}}\right)U\\ &\leqslant \left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{a_{\ell+1}+b_{\ell+1}}{10^{\ell+1}}\right)U\\ &= \left(a\,|_{\ell+1}+b\,|_{\ell+1}\right)U\\ &\leqslant A+B\quad .\end{aligned} \quad (13)$$

De (12) et (13), on déduit

$$\left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{1}{10^\ell}\right)U\leqslant A+B<\left(\left(a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{1}{10^\ell}\right)+\frac{1}{10^\ell}\right)U\quad ,$$

donc

$$c\,|_\ell = a\,|_\ell+b\,|_\ell+\frac{1}{10^\ell}$$

et

$$c_p=(c\,|_\ell)_p=a_p+b_p+1 \qquad (\text{mod } 10) \quad (14)$$

(c) Supposons que pour tout $\ell>p$: $a_\ell+b_\ell=9$.
Soit $\ell>p$ et regardons $a\,|_\ell+b\,|_\ell$:

$$\begin{array}{rcccc} & a_0,a_1\ldots a_p & a_{p+1} & \cdots & a_\ell\\ + & b_0,b_1\ldots b_p & b_{p+1} & \cdots & b_\ell\\ \hline & & 9 & \cdots & 9\end{array}$$

$$\begin{aligned}a\,|_\ell+b\,|_\ell &= a\,|_p+b\,|_p+\frac{\overbrace{9\ldots9}^{\ell-p}}{10^\ell}\\ &= a\,|_p+b\,|_p+\frac{1}{10^p}-\frac{1}{10^\ell}\quad ,\end{aligned} \quad (15)$$

donc (par (10) et (15)),

$$\begin{aligned}(a\,|_\ell+b\,|_\ell)\,U\leqslant A+B &< \left(a\,|_p+b\,|_p+\frac{1}{10^p}-\frac{1}{10^\ell}+\frac{2}{10^\ell}\right)U\\ &= \left(a\,|_p+b\,|_p+\frac{1}{10^p}+\frac{1}{10^\ell}\right)U\quad ,\end{aligned}$$

donc $A+B$ est dans l'intersection des segments

$$\left[\left(a\mid_p + b\mid_p + \frac{1}{10^p}\right)U - \frac{1}{10^\ell}U \quad , \quad \left(a\mid_p + b\mid_p + \frac{1}{10^p}\right)U + \frac{1}{10^\ell}U\right]$$

dont la "longueur" est $\frac{2}{10^\ell}$. Par la proposition 8 cette intersection est un singleton. Or $\left(a\mid_p + b\mid_p + \frac{1}{10^p}\right)U$ appartient à cette intersection, donc

$$A+B = \left(a\mid_p + b\mid_p + \frac{1}{10^p}\right)U \quad ,$$

et

$$c_p = a_p + b_p + 1 \pmod{10} \quad . \tag{16}$$

Donc c est déterminé par les égalités (11), (14) et (16) sous leurs hypothèses respectives.

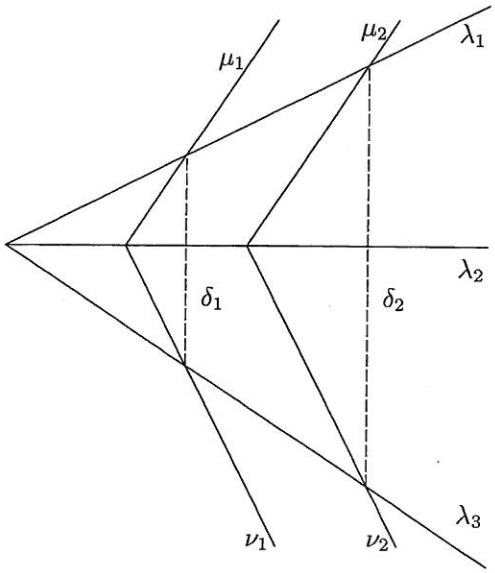
Nous sommes partis des décimaux a et b, nous avons construit $A+B$ en utilisant λ, un ordre choisi sur λ, $0 \in \lambda$ et $U > 0$. Mais les seconds membres de (11), (14) et (16) ne dépendent nullement de λ, de l'ordre choisi, etc.. **Ces égalités permettent de définir la somme de deux nombres réels uniquement à partir des décimales des représentants canoniques de ces nombres.** Par la géométrie, nous avons érigé λ en un groupe commutatif ordonné, archimédien et complet. Donc $\mathbb{R}$ muni de l'ordre lexicographique et de l'addition définie par les égalités (11), (14) et (16) est également un tel groupe, ce que nous aurions eu difficile à établir directement à partir de ces égalités.

Remarque 5. Lorsque les égalités (11) et (14) sont satisfaites, la $p^{\text{ième}}$ décimale du représentant canonique c de $r+s$ est la $p^{\text{ième}}$ décimale de $r\mid_\ell + s\mid_\ell$ pour ℓ assez grand. Mais ce n'est pas le cas lorsque l'égalité (11) est satisfaite (exemple : $0,333\ldots + 0,666\ldots$). Alors, comme au moins Lebesgue l'a remarqué, on obtient une situation uniforme en considérant uniquement les valeurs par excès. En utilisant la remarque 3, on prouve que c_p est dans tous les cas la $p^{\text{ième}}$ décimale de $\left(a\mid_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) + \left(b\mid_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right)$ pour ℓ assez grand et précisable. Et puisque chez Lebesgue, les nombres réels sont les décimaux canoniques, l'addition est définie par une règle unique.

4 Les homothéties et la multiplication

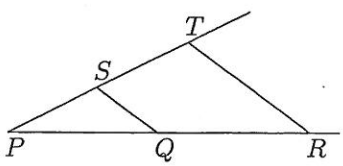
1. Reprenons la situation telle qu'elle était à la fin de 2. Nous avons les axiomes 1, 2, 3 et 4.

Axiome 5. *(Axiome de Desargues pour le cas concourant). Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont des droites concourantes et si $\mu_1 \parallel \mu_2$, $\nu_1 \parallel \nu_2$ sont comme ci-dessous, alors δ_1 et δ_2 comme ci-dessous sont parallèles.*

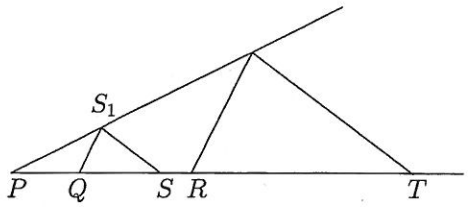


L'axiome 4 qui nous a permis de définir les translations donnait un rôle particulier aux parallélogrammes. Ici ce sont certains trapèzes qui apparaissent. La symétrie qui existait entre les couples de côtés opposés des parallélogrammes n'existe plus ici. On devine alors que ce que l'on fera par l'axiome 5 pourra être très différent de ce que l'on a fait avec l'axiome 4.
Soient P, Q et R des points alignés avec $P \neq Q$.
On va construire une application $S \mapsto T$.

(a) Soit $S \notin PQ$



(b) Soit $S \in PQ$, on prend $S_1 \notin PQ$



L'axiome 5 garantit que l'application $h : S \mapsto T$ ne dépend pas de S_1 (dans le cas (b)). Elle ne dépend que de P, Q et R. On pose $h(P) = P$. Soient à présent Q_1 un point quelconque distinct de P et $R_1 = h(Q_1)$, l'axiome 5 garantit aussi que, par le même procédé, l'application obtenue est h. C'est l'**homothétie** qui fixe P et qui applique Q sur R. Si $R = P$, alors l'homothétie envoie tout point sur P, l'homothétie est dite dégénérée. Les homothéties non dégénérées sont les permutations du plan caractérisées par la

Proposition 9. *Soit P un point. Les homothéties non dégénérées fixant P sont les permutations du plan qui*

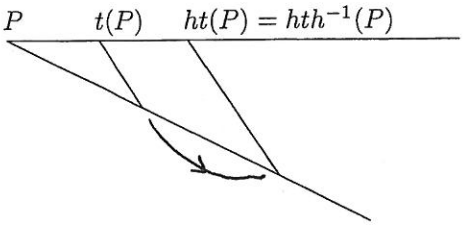
(a) fixent P,

(b) appliquent toute droite λ_1 sur une droite parallèle à λ_1.

On en déduit que les homothéties non dégénérées fixant P forment un groupe pour la loi de composition.

Corollaire 6. *Si t est une translation et h une homothétie non dégénérée qui fixe le point P, alors hth^{-1} est la translation qui applique P sur $h(t(P))$.*

Preuve. Si $t = 1$, il n'y a rien à prouver. Soient $t \neq 1$ et λ une droite de la direction de t. Par la proposition 9, $h^{-1}(\lambda)$ est une droite de cette direction et $hth^{-1}(\lambda)$ aussi. Si λ_1 est une droite quelconque, les propositions 2 et 9 impliquent que $hth^{-1}(\lambda_1)$ est une droite parallèle à λ_1. Donc (proposition 2) hth^{-1} est une translation. Celle-ci est définie par l'image d'un point. On vérifie que $hth^{-1}(P) = h(t(P))$.



■

2. **La multiplication sur λ.** Reprenant la droite λ de 2.3 et fixons sur elle un point $\mathbf{1} \neq 0$. Si $A \in \lambda$, on note h_A l'homothétie du plan qui fixe 0 et qui applique $\mathbf{1}$ sur A. Si $A, B \in \lambda$, on pose

$$A \cdot B = h_A(B) \quad .$$

h_A est non dégénérée ssi $A \neq 0$. Dès lors $\lambda - \{0\}$ est un groupe pour cette loi $\cdot$.

Proposition 10. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Preuve ([2], p.159).

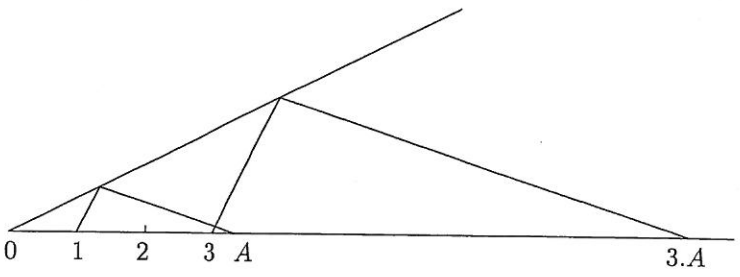
$$\begin{aligned} A \cdot (B+C) &= h_A(B+C) \\ &= h_A t_B(C) \\ &= t_{A \cdot B} h_A(C) \quad \text{(corollaire 6)} \\ &= A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

■

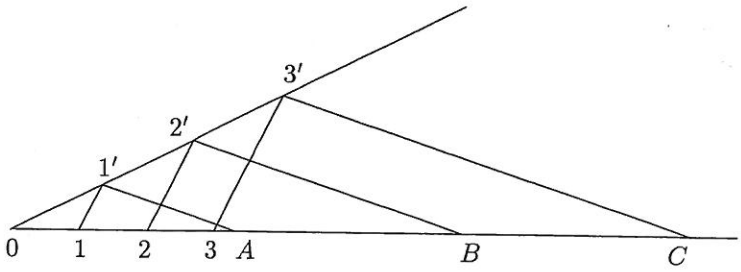
Corollaire 7. $A \cdot (n\mathbf{1}) = nA$.

Proposition 11. *Les points de la graduation de λ définie par 1 commutent (pour la multiplication) avec tous les éléments de λ.*

Preuve. Grâce au corollaire 7, il suffit de prouver que pour tout n : $(n\mathbf{1}) \cdot A = nA$.
Notons $n\mathbf{1} = \mathbf{n}$.
Montrons cela pour $n = 3$:



mais



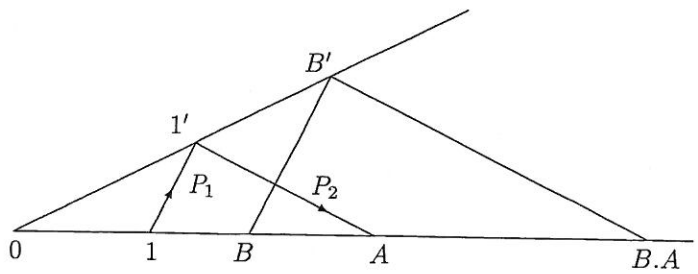
$$(0,\mathbf{1}) \uparrow (1,\mathbf{2}) \uparrow (2,\mathbf{3}) \quad \text{(construction de 3)}$$
$$(0,\mathbf{1}') \uparrow (\mathbf{1}',\mathbf{2}') \uparrow (\mathbf{2}',\mathbf{3}') \quad \text{(corollaire 2)}$$
$$(0,A) \uparrow (A,B) \uparrow (B,C) \quad \text{(idem)}$$

donc $C = 3A$. Mais $C = \mathbf{3} \cdot A$ par la configuration précédente.

■

Remarque 6. On a utilisé pour cette preuve les propositions 2 et 9 qui présentent les translations et les homothéties comme des transformations du plan conservant certaines propriétés. Dans l'esprit de l'introduction le lecteur sera déjà familiarisé avec cette façon (bénéfique) de voir les choses. Mais on peut procéder autrement et prouver la proposition 11 uniquement par des configurations découlant des axiomes 4 et 5 (voir par exemple [10]).

3. On admet à présent les axiomes de 1 à 9. On prend la droite λ munie de 0, d'un ordre, de $U > 0$ et on prend $\mathbf{1} = U$. Dorénavant la graduation de λ sera donc la graduation définie par **1**. La droite est donc munie de deux lois $+$ et $\cdot$. **Par les propositions 10 et 11, la restriction de ces lois aux points de la graduation coïncide avec l'addition et la multiplication sur les nombres décimaux limités.** (17)
Pour étudier l'interaction entre l'ordre et la multiplication, on procède comme en 2.2 :



$$B \cdot A = p_2 p_1(B) \quad .$$

Soit $A > 0$. Si p_1 renverse l'ordre, alors $0 > 1'$. Puisque $p_2(1') = A$, p_2 renverse aussi l'ordre, donc p_2p_1 conserve l'ordre de λ. Si p_1 conserve l'ordre, alors p_2 aussi et p_2p_1 conserve encore l'ordre sur λ. Donc, dans tous les cas, sous l'hypothèse $A > 0$, p_2p_1 conserve l'ordre de λ.

Proposition 12. *Si $A > 0$ et $B > C$, alors $BA > CA$.*

Preuve. $p_2p_1(B) > p_2p_1(C)$.

■

Corollaire 8. *Si $A > 0$ et $B > 0$, alors $B \cdot A > 0$.*

Corollaire 9. *Si les A_i et les B_i appartiennent à la graduation, et si $0 < A_1 \leqslant A \leqslant A_2$, $B_1 \leqslant B \leqslant B_2$, et $B > 0$, alors*

$$A_1 \cdot B_1 \leqslant AB \leqslant A_2 \cdot B_2 \quad .$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
A_1 \cdot B_1 &= B_1 \cdot A_1 && \text{(proposition 11)} \\
&\leqslant B \cdot A_1 && \text{(proposition 12, } A_1 > 0\text{)} \\
&= A_1 B && \text{(proposition 11)} \\
&\leqslant A \cdot B \\
&\leqslant A_2 B (B > 0) \\
&= B \cdot A_2 \\
&\leqslant B_2 \cdot A_2 \\
&= A_2 \cdot B_2 \quad .
\end{aligned}$$

■

5 Le corps des nombres réels

Soient $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ et $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ des décimaux canoniques et A et B les points de λ dont a et b sont les abscisses. On va supposer que a et b sont positifs. On ne causera aucun trouble en identifiant pour des raisons typographiques le nombre décimal limité g avec le point $g\mathbf{1}$ de la graduation. Donc,

$$0 < a\,|_\ell \leqslant A < a\,|_\ell + \tfrac{1}{10^\ell} \qquad (8')$$

$$0 < b\,|_\ell \leqslant B < b\,|_\ell + \tfrac{1}{10^\ell} \qquad (9')$$

Le corollaire 9 implique

$$0 < a\mid_\ell b\mid_\ell \leqslant A\cdot B < \left(a\mid_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right)\left(b\mid_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right) \quad .$$

Le dernier membre vaut

$$a\mid_\ell b\mid_\ell + \frac{10^\ell\,(a\mid_\ell + b\mid_\ell) + 1}{10^{2\ell}} \quad ,$$

mais

$$a\mid_\ell + b\mid_\ell \leqslant a_0 + 1 + b_0 + 1 \leqslant 10^m$$

pour un certain m. Donc

$$\frac{10^\ell\,(a\mid_\ell + b\mid_\ell) + 1}{10^{2\ell}} \leqslant \frac{10^{\ell+m} + 1}{10^{2\ell}} < \frac{10^{\ell+m+1}}{10^{2\ell}} = \frac{10^{m+1}}{10^\ell} \quad .$$

Donc

$$a\mid_\ell b\mid_\ell \leqslant AB < a\mid_\ell b\mid_\ell + \frac{10^{m+1}}{10^\ell} \tag{18}$$

et

$$A\cdot B \in \bigcap_\ell \left[a\mid_\ell b\mid_\ell, a\mid_\ell b\mid_\ell + \frac{10^{m+1}}{10^\ell}\right] \quad . \tag{19}$$

Par la proposition 8, le second membre est le singleton $\{A\cdot B\}$.
Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\{B\cdot A\} &= \bigcap_\ell \left[b\mid_\ell a\mid_\ell, b\mid_\ell a\mid_\ell + \frac{10^{m+1}}{10^\ell}\right] \\
&= \bigcap_\ell \left[a\mid_\ell b\mid_\ell, a\mid_\ell b\mid_\ell + \frac{10^{m+1}}{10^\ell}\right] \quad \text{(car (17))} \\
&= \{A\cdot B\} \quad .
\end{aligned} \tag{20}$$

On a donc prouvé que la multiplication sur λ est commutative. On prouve, par le même argument, qu'elle distribue l'addition.
Soit c le représentant canonique de l'abscisse de $A\cdot B$.
En se fatiguant un peu plus que pour l'addition, on utilise (18) pour déterminer c_p en fonction des a_p et des b_p (et [Lebesgue] trouve la $p^{\text{ième}}$ décimale du produit de deux décimaux canoniques comme $p^{\text{ième}}$ décimale du produit des valeurs par excès à $\frac{1}{10^\ell}$ près, pour ℓ assez grand et précisable, de a et de b).

Remarque 7. Pour prouver (20), la conclusion ci-dessous et les applications qui suivent, on utilise des inégalités portant sur les nombres réels et leurs valeurs approchées, et non la détermination de la p^e décimale de la somme et du produit.

Conclusion. Les nombres réels sont à présent munis d'une structure de corps commutatif ordonné, archimédien et complet.

6 Applications

1. **Calcul de $\sqrt{2}$ par la méthode de Simon STEVIN.** (Voir Appendice, p.43, note 2).

   (a) $1^2 < 2 < 2^2$. Soit $a_0 = 1$,

   (b) soit alors a_1 le plus petit entier dans $\{0, \ldots, 9\}$ pour lequel

   $$\left(1 + \frac{a_1 + 1}{10}\right)^2 > 2 \quad ,$$

   donc

   $$\left(1 + \frac{a_1}{10}\right)^2 < 2 < \left(1 + \frac{a_1 + 1}{10}\right)^2 \quad ,$$

   le calcul de a_1 est faisable : $a_1 = 4$.

   Puis, pour tout ℓ, $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ étant connus, on définit a_ℓ comme le plus petit entier $x \in \{0, \ldots, 9\}$ tel que

   $$\left(1 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{\ell-1}}{10^{\ell-1}} + \frac{x+1}{10^\ell}\right)^2 > 2 \quad .$$

   Les segments

   $$\left[1, 4a_2 \ldots a_\ell \quad , \quad 1, 4a_2 \ldots a_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right]$$

   définissent par leur intersection un nombre réel α.
   On va prouver que $\alpha^2 = 2$. On a

   $$(\alpha\,|_\ell)^2 < 2 < \left(\alpha\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right)^2 \quad \text{(par définition de } \alpha)$$

   Mais

   $$\begin{aligned} \left(\alpha\,|_\ell + \frac{1}{10^\ell}\right)^2 &= \alpha\,|_\ell{}^2 + \frac{2 \cdot 10^\ell \cdot \alpha\,|_\ell + 1}{10^{2\ell}} \\ &< \alpha\,|_\ell{}^2 + \frac{1}{10^{\ell-2}} \quad (\text{car } \alpha\,|_\ell < 2) \quad . \end{aligned}$$

   Donc

   $$\{2\} = \bigcap_\ell \left[\alpha\,|_\ell{}^2, \alpha\,|_\ell{}^2 + \frac{100}{10^\ell}\right]$$

   par application de la proposition 8.
   Mais le second membre vaut $\{\alpha^2\}$ en vertu de (19).

   ■

2. **La plus petite borne supérieure.** Soit X un ensemble non vide de nombres réels, borné supérieurement. On peut donc supposer qu'ils sont tous bornés par un entier n. Identifions les nombres réels à leurs représentants canoniques. Soit $x_0^\star$ le

plus grand entier qui soit la partie entière d'un élément de X. Parmi les éléments de X qui ont $x_0^\star$ comme partie entière, soit $x_1^\star$ la plus grande de leurs premières décimales (il y a donc des éléments de X dont l'écriture canonique commence par $x_0^\star$, $x_1^\star$), etc. On "construit" donc un nombre réel $x^\star = x_0^\star, x_1^\star x_2^\star \ldots$.
Soit $x = x_0, x_1 x_2 \ldots \in X$. Donc $x_0 \leqslant x_0^\star$. Si $x_0 = x_0^\star$, alors $x_1 \leqslant x_1^\star$, etc.
Donc $x \leqslant x^\star$. Donc $x^\star$ est une borne supérieure pour X. Soit maintenant $y = y_0, y_1 y_2 \ldots \in \mathbb{R}$ avec $y < x^\star$. Dès lors

$$\begin{array}{rll} \text{ou bien} & y_0 < x_0^\star & \text{(et alors il existe } x \in X \text{ pour lequel } y < x\text{)}, \\ \text{ou bien} & y_0 = x_0^\star \text{ et } y_1 < x_1^\star & \text{(et alors il existe encore } x \in X \text{ avec } y < x\text{)}, \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

Donc y ne peut être une borne supérieure pour X.
On dit que $x^\star$ est **la plus petite borne supérieure** de X et on écrit $x^\star = \sup X$.

Exemple. Si X est l'ensemble des décimaux limités $1, 4a_2 \ldots a_p$ définis en 1, alors $\sup X = \alpha$.

On peut commencer l'analyse mathématique.

Bibliographie : voir page 49.

Le 11 décembre 1996.

Appendice

Que sont les nombres réels?

Paul van Praag

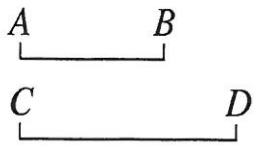
d'après un exposé fait le 4 avril 1996 à la Journée de Mathématique et de Sciences de l'UMH

La conception que se font les mathématiciens de la notion de nombre est toujours significative du niveau théorique de leurs mathématiques et elle détermine les limites de leur pratique arithmético-algébrique.

Amy Dahan-Dalmedico – Jeanne Peiffer [1]

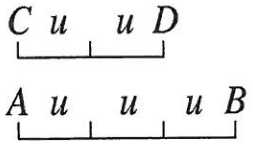
1. Les mesures communes et la mathématique

1.1 Voici une question abordée dans l'Antiquité : soient AB et CD les segments de droite suivants :



comment les comparer? On peut toujours dire que CD est plus grand que AB.

Plus finement, on peut faire ceci



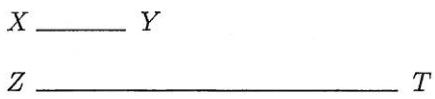
Pour ces segments bien choisis on a trouvé un petit segment u pour lequel

$$\begin{aligned} AB &= 2u \\ CD &= 3u \end{aligned}$$

On peut alors dire que AB est à CD comme le nombre entier 2 est au nombre entier 3, ce qu'aujourd'hui nous avons envie d'écrire

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \quad .$$

1.2 Au moins en Grèce on a probablement travaillé longtemps comme si, lorsque l'on se donne deux segments quelconques,

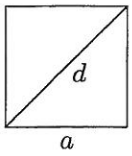


on peut toujours trouver un segment u, appelé **mesure commune** aux segments XY et ZT, et des nombres entiers m et n pour lesquels

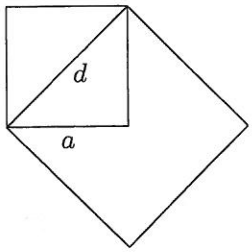
$$\begin{aligned} XY &= mu \\ ZT &= nu \quad . \end{aligned}$$

A priori cette affirmation n'a rien d'aberrant : on pourrait se dire que si un segment u ne convient pas, probablement un plus petit conviendra. Un fait majeur de l'histoire de l'humanité est la découverte qu'en général il n'existe pas de tels m, n, u. Des preuves en sont bien connues, donnons-en tout de même une.

1.2.1. Tout d'abord un résultat sur les aires : soient un carré dont un côté est noté a, et soit d l'une de ses diagonales



Construisons un carré dont d est un côté :



Proposition. *Le carré construit sur d égale le double du carré construit sur a.*

Remarque. Cet énoncé n'a pour le moment rien à voir avec une expression telle que $d^2 = 2a^2$, expression dépourvue de sens dans les mathématiques de Pythagore, Platon, Euclide. La signification de cet énoncé apparaît dans cette

Preuve. (Platon [2]). Le carré sur d, considéré comme un morceau du "plan", est "égal" à quatre moitiés du carré construit sur a et donc à deux carrés construits sur a.

■

On a donc travaillé sur des puzzles.

1.2.2. Théorème 0 (Euclide). *Il n'existe pas de mesure commune à une diagonale d'un carré et l'un des côtés de ce carré.*

Preuve. Supposons que ce théorème soit faux, et soient u un segment, et m et n des nombres entiers pour lesquels $a = mu$ et $d = nu$ (a et d étant comme en **1.2.1** respectivement un côté et une diagonale du carré).

1) On peut supposer que m et n sont premiers entre eux : sinon, soient $m = sm_1$ et $n = sn_1$ où m_1 et n_1 sont premiers entre eux. Dès lors

$$a = (sm_1)u = m_1(su)$$

$$\text{et} \qquad d \;=\; (sn_1)u = n_1(su) \quad ,$$

et su est une mesure commune à a et à d.

2) par la proposition, le carré construit sur ν égale deux fois le carré construit sur mu, donc

$$\begin{array}{rl} & n^2 \text{ carrés sur } u \\ \text{égalent} & 2m^2 \text{ carrés sur } u, \\ \text{donc} & n^2 = 2m^2 \end{array}$$

3) donc n^2 est un nombre pair, donc n est pair : $n = 2n'$, donc $4n'^2 = n^2 = 2m^2$, donc $2n'^2 = m^2$, donc m^2 est pair, donc m est pair, ce qui contredit le fait que m et n sont premiers entre eux.

■

Remarque. Dans la preuve d'Euclide ([3], Livre X, prop. CXVII) l'égalité $n^2 = 2m^2$ est déduite du "théorème de Pythagore" (chez Euclide ([3], Livre I, prop. XLVII) "le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle égale la somme des carrés construits sur les autres cotés") prouvé également par des puzzles.

1.3 Pourquoi ce théorème est-il un fait majeur de l'histoire de l'humanité? Considérons par exemple le théorème de Pythagore portant soit sur des carrés, parties du plan (chez Euclide) soit sur des nombres entiers ou des fractions (chez les Babyloniens). Ce résultat, apparu donc dans plusieurs civilisations, est vérifiable sur de nombreux exemples; si on l'a abondamment vérifié, on peut être convaincu de sa véracité.
Le théorème d'Euclide ci-dessus est d'une autre nature : on ne sait rien vérifier du tout : si un segment u ne convient pas, peut-être qu'un plus petit pourrait convenir, et l'expérience manuelle ne permet pas d'aller très loin. D'autre part, au moins dans la Grèce de Platon et d'Euclide, les objets mathématiques avaient un statut particulier : ils n'appartiennent pas à notre monde puisqu'ils ne sont pas périssables, mais ils ne sont pas non plus une divinité, ils sont entre la divinité et nous.
Le segment u que nous recherchions, s'il "existait", n'existerait en tout cas pas dans notre monde.
Le théorème d'Euclide établit que même dans le monde des Idées, le segment u n'existe pas.
Et pour établir l'inexistence de quelque chose dans un autre monde que le nôtre,

nos expériences manuelles ne servent à rien. Pour établir une telle inexistence les Grecs ont inventé la démonstration. Qui dit démonstration, dit tout d'abord préciser sur quoi l'on se base: les axiomes, les postulats, et puis préciser les types d'arguments que l'on estime valables, les modes de raisonnement que l'on trouve légitimes. C'est-à-dire les mathématiques telles que nous les connaissons. Des historiens des mathématiques estiment que cette preuve de la non existence du segment u est peut-être la première preuve mathématique, l'occasion qui conduisit à la création des mathématiques pratiquées comme une science. Avec ces mathématiques, ils allèrent très loin (voir 2.2).

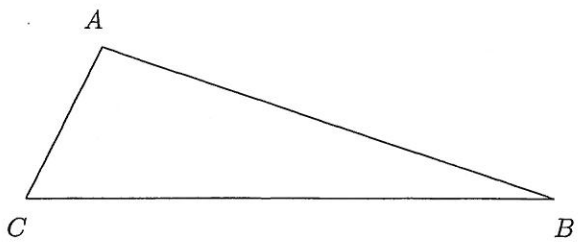
1.4 La preuve du théorème 0 contient celle du

Théorème 1. *Il n'existe pas de fraction (de nombres entiers) dont le carré vaut 2.*

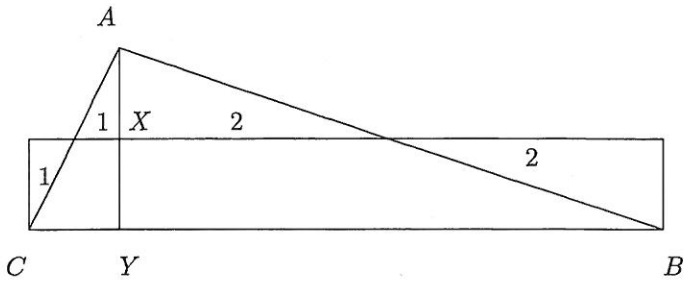
2. Les nombres–segments

2.1 Il n'y a donc pas toujours de mesure commune à deux segments, mais des Grecs (dont probablement Eudoxe) ont créé un concept qui permet de pouvoir toujours parler du rapport $\frac{XY}{ZT}$ où XY et ZT sont des segments de droite quelconques, et plus généralement du rapport de deux "grandeurs de même espèce".
Ce concept de rapport de grandeurs est susceptible d'un calcul et redonne les fractions $\frac{m}{n}$ dans la situation de 1.1.
Il se base sur les nombres entiers et est extrêmement subtil. [1], p.159.

2.2 Ce concept fournit un cadre pour énoncer et prouver des théorèmes difficiles sur les aires et les volumes, pour lesquels la méthode des puzzles était inopérante : ainsi par exemple l'"aire" du cercle, le "volume" de la pyramide et de la sphère. La preuve d'Euclide sur le volume de la pyramide a suscité des interrogations jusqu'à notre époque : l'aire du triangle est traitée chez Euclide d'une façon analogue à celle-ci : soit le triangle suivant



On fabrique un puzzle :



où $AX = XY$. Par la théorie des cas d'égalité des triangles, les triangles 1 sont égaux, les triangles 2 aussi. Donc le triangle ABC est "égal" au rectangle de même base BC et dont la hauteur est la moitié de la hauteur du triangle.

Un traitement analogue pour les pyramides nécessite chez Euclide des délicates preuves par l'absurde dans le cadre de la théorie des grandeurs (la méthode d'exhaustion [1], pp.170 et suivantes).

Dans cette méthode, Euclide utilise des procédés équivalents à des démarches infinies et qui ne seront clarifiées qu'en même temps que les fondements de l'analyse mathématique. Il utilise aussi sans le justifier un résultat (l'existence de la quatrième proportionnelle) dont le statut ne sera clarifié qu'à la fin du 19ème siècle, simultanément à celui de nombre réel (Dedekind). D'où la question qui a tourmenté des mathématiciens jusqu'à Gauss au siècle dernier et Hilbert en 1900 : pourquoi ce qui fonctionne à deux dimensions (les puzzles) ne fonctionne pas à trois dimensions? Des explications ont été fournies ce siècle-ci. [6].

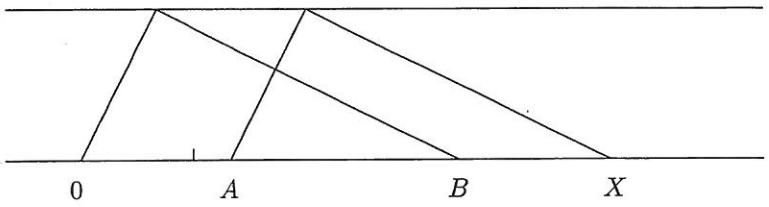
2.3 Ce concept de rapport de grandeurs a subi de longues évolutions. Voici un de ses achèvements dans l'Europe du début du 17ème siècle, tel qu'on peut en lire l'essence, rédigée d'une façon limpide chez Descartes qui semble être le premier à avoir utilisé le terme "réel" pour qualifier les nouveaux nombres [7] (pour des précisions, et entre autres le grand développement de la théorie dans le monde arabe, voir [1], pp.83 et suivantes). Mentionnons tout de même le grand apport pour ce qui suit du brugeois Simon Stevin. (Traicte des incommensurables grandeurs. Avec une Appendice de l'explication du Dixieme livre d'Euclide. Descript par SIMON STEVIN de Bruges [8], IIb, pp. 725 et suivantes).

Nous travaillons dans un plan. Dans ce plan, on se fixe une droite, et sur cette droite un segment OU. Les objets que nous allons considérer sont les segments OA (que

l'on pensera comparés à OU)

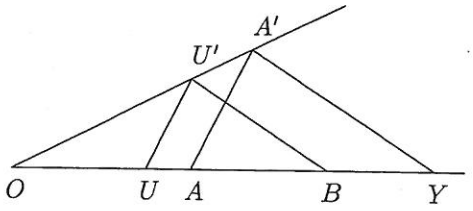
On additionne et on multiplie ces segments comme ceci :

- pour l'addition, on transporte convenablement l'un des segments, par exemple :



$$OA + OB = OX \quad \text{(on n'a pas utilisé } U\text{)}$$

- pour la multiplication, Descartes utilise le théorème dit de Thalès :

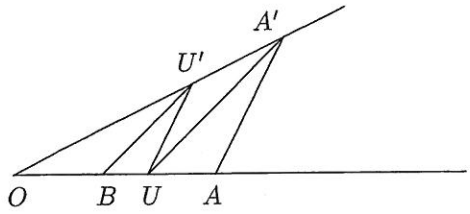


(On peut penser aujourd'hui à l'homothétie du plan qui fixe 0 et qui applique U sur A. Cette homothétie applique alors U' sur A' et B sur Y).

$$OA \times OB = OY.$$

Dans cette théorie, les "nombres" sont ces segments OA, munis des opérations $+$ et $\times$. Montrons ce qu'elle nous apporte. Tout d'abord remarquons l'existence des inverses : si A est un point distinct de 0, il existe un segment OB pour lequel

$OA \times OB = OU$:



(On a pris U', puis AA' parallèle à UU', on a joint A' et U et on a pris $U'B$ parallèle à $A'U$). On peut alors écrire

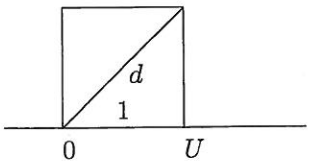
$$OB = OA^{-1} \quad ,$$

et poser

$$\frac{OC}{OD} = OC \times OD^{-1}$$

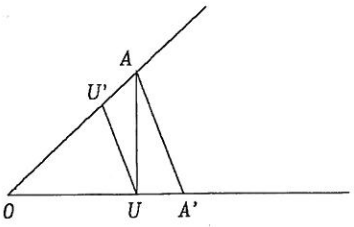
pour deux segments quelconques OC et OD.
On a une notion de rapport de segments $\frac{OC}{OD}$, qui ici est aussi un segment, et pour laquelle on vérifie qu'elle redonne les fractions d'entiers $\frac{m}{n}$ dans la situation de **1.1.**

Par ce calcul sur les segments, le *carré de la diagonale* (et non plus le *carré construit sur la diagonale*) égale le double du carré du côté :



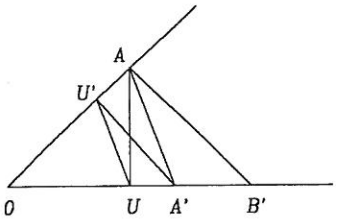
Théorème 2. $d^2 = 2$.

Preuve. (Ce n'est pas celle de Descartes)



On a pris $OU' = OU$ et $OA' = OA$.

Maintenant,



où AB est parallèle à $U'A'$. Par définition de la multiplication,

$$\begin{aligned} OB &= OA' \times OA' \\ &= OA \times OA \\ &= d^2 \quad . \end{aligned}$$

On va montrer que

$$OB = 2OU = 2 \quad .$$

Le trapèze $UA'AU'$ est isocèle, donc

$$\begin{aligned} A'U' &= AU \\ &= OU \quad \text{(côtés d'un carré)} \\ &= OU' \quad \text{(construction de } U') \quad . \end{aligned}$$

Donc le triangle $OA'U'$ est isocèle, donc le triangle OBA est isocèle, donc $OU = UB$, donc

$$OB = 2OU = 2$$

■

Regardons le chemin parcouru : nous avions comme nombres, les nombres entiers et les fractions d'entiers. L'entier 2 n'était le carré d'aucun de ces nombres. A présent, nous avons des nouveaux nombres, les segments (dont les entiers et les fractions sont des cas particuliers) munis d'une addition et d'une multiplication dont l'addition et la multiplication des entiers et des fractions sont des cas particuliers. Parmi ces nouveaux nombres, il en existe un dont le carré est 2.

2.4 Mais cette construction n'a bien sûr pas pour unique but de donner un sens à $\sqrt{2}$. Non seulement, elle fournit une notion de rapport de grandeurs avec un calcul, mais ce sont ces nombres-là que Descartes et Fermat utilisent comme coordonnées d'un point dans un plan, et qui leur permettent d'associer des

relations algébriques et des courbes. C'est ainsi qu'à la circonférence et à la droite, ils associent les relations $x^2 + y^2 = R^2$ et $y = ax + b$. Cette théorie a pu être écrite simplement parce que l'on avait non seulement introduit les nombres négatifs et le calcul sur ces nombres, mais aussi parce qu'on avait construit un calcul sur les lettres. Ces lettres pouvaient représenter des nombres entiers, des fractions, ou ces nouveaux nombres que sont les segments (d'une droite, un segment unité étant fixé). Le calcul sur ces lettres (et pas seulement l'utilisation des lettres), l'algèbre de Viète, permet entre autres de remplacer par un raisonnement unique une litanie parfois très longue d'exemples concrets.

3. Les nombres décimaux

3.1 **Les nombres décimaux limités.** La théorie était au point dans le monde arabe au 15ème siècle (Al Kashi, dont j'ai appris l'existence par Monsieur Michel Ballieu. Voir [1], p.100 et une bibliographie p.119). En Europe occidentale, la théorie est au point en 1585 (De Thiende de Simon Stevin et sa traduction en français par Stevin lui-même : La Disme ([8], [9]) et son usage s'étend peu de temps après grâce à une notation qui permet d'en tirer des bénéfices, ainsi qu'aux premiers bénéfices : les logarithmes [10].

Les fractions décimales sont les fractions dont le dénominateur est une puissance de 10. Si deux telles fractions sont données, on peut supposer, quitte à ajouter des zéros au numérateur de l'une d'entre elles, qu'elles ont même dénominateur : ainsi

$$\begin{aligned} \frac{321}{10^2} &= \frac{3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1}{10^2} \\ &= \frac{3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10 + 0 \times 1}{10^3} \\ &= \frac{3210}{10^3} \quad . \end{aligned}$$

Ce qui a joué est que le dénominateur est une puissance de la base dans laquelle est écrite le numérateur. Dès lors, pour comparer deux fractions décimales, on peut supposer (sous la même réserve) qu'elles sont écrites $\frac{a}{10^\ell}$ et $\frac{b}{10^\ell}$, et il suffit de comparer les numérateurs a et b écrits en numération décimale, ce qui est immédiat (contrairement à la situation générale). De même, on additionne et multiplie des fractions décimales comme, après avoir éventuellement ajouté des zéros, on additionne et multiplie leurs numérateurs. Toutes les fractions ne sont pas décimales, par exemple $\frac{1}{3}$ (sinon $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^\ell}$, donc $3a = 10^\ell$ et 3 divise 10^ℓ dont les seuls diviseurs premiers sont 2 et 5). Mais toute fraction peut être approchée d'une fraction décimale d'aussi près que l'on veut, ainsi :

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \text{quelque chose d'inférieur à } \frac{1}{10}$$

$$= \frac{33}{10^2} + \text{quelque chose d'inférieur à } \frac{1}{10^2}$$
$$= \text{etc.} \qquad (1)$$

Donc, comme l'écrivait Simon Stevin dans La Disme, ces fractions décimales sont suffisantes aux comptes des hommes.

Tout ceci justifie l'introduction d'une notation qui privilégie les numérateurs des fractions décimales : on pose

$$\frac{321}{10^2} = 3,21 \quad .$$

Ces nouveaux symboles $a_0, a_1 \ldots a_\ell$ où a_0 est un nombre entier et les $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ si $i > 0$ sont les **nombres décimaux limités**. Leur calcul se décrit complètement en termes de nombres entiers et de la virgule (c'est-à-dire que l'on peut définir ce calcul sans parler de fraction). Il y a un algorithme pour comparer, additionner et multiplier ces nombres, et **une remarque importante pour la suite est que pour ces deux dernières opérations, on va de droite à gauche.**

3.2 Les nombres décimaux illimités

3.2.1. La suite d'égalités (1) donne l'envie d'écrire $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$. De même, par l'algorithme usuel de la division des nombres entiers, toute fraction donne lieu à une expression $a_0, a_1 a_2 \ldots$ où a_0 est un entier et les autres $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$.

De même la démarche suivante : reprenons la droite de 2.3, où deux points O et U sont fixés et soit A un point :

Admettons qu'en ajoutant le segment OU à lui-même et en répétant suffisamment l'opération, on finisse par atteindre A :

On a donc ajouté $(a_0 - 1)$ fois à lui-même le segment OU, et A se trouve dans le segment $[a_0 U, (a_0 + 1)\, U]$. Partageons à présent ce dernier segment en dix segments

$$\left[a_0 U, \left(a_0 + \frac{1}{10}\right) U\right], \ldots \left[\left(a_0 + \frac{9}{10}\right) U, (a_0 + 1)\, U\right] \quad .$$

L'un au moins de ces dix segments comprend A, soit

$$A \in \left[\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) U \quad , \quad \left(a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}\right) U\right] \quad ,$$

où $a_1 \in \{0, \ldots, 9\}$. On partage ce dernier segment en dix et on trouve au moins un $a_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ pour lequel

$$A \in \left[\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\right) U \quad , \quad \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}\right) U\right] \quad ,$$

ou, en notation décimale :

$$A \in [a_0, a_1 a_2 U \quad , \quad (a_0, a_1 a_2 + 0,01)\, U] \quad .$$

Pour tout p apparaîtra un nombre décimal limité $a_0, a_1 \ldots a_p$ (qui "contient" les précédents) et on aura donc envie d'associer à A (ou au segment OA), l'expression

$$a_0, a_1 a_2 \ldots$$

A certains segments, on associe deux telles écritures : en considérant que $U \in [0, U]$, on est amené à l'expression $0,99\ldots$; en considérant que $U \in [U, 2U]$, on est amené à l'expression $1,00\ldots$

Ces expressions, les **décimaux illimités** proviennent d'une façon de comparer les segments OA et OU. Elles contiennent comme cas particuliers les expressions décimales fournies par les fractions. Elles sont donc en tant que telles des objets légitimes d'étude et des candidates à porter le titre de "nombres".

3.2.2. Mais les définir directement comme suites de nombres entiers, puis définir sur ces suites l'addition et la multiplication que l'on attend, présente des difficultés que l'on n'a pas rencontré chez les nombres décimaux limités. Tout d'abord il faudra identifier les expressions telles que $0,99\ldots$ et $1,00\ldots$. Mais plus redoutables sont les difficultés posées par les opérations. Voyons par exemple l'addition. Pour additionner des nombres décimaux limités, on les écrit convenablement l'un au-dessus de l'autre et on les additionne comme s'il s'agissait de nombres entiers, donc en allant de droite à gauche. Pour des décimaux illimités, cette procédure n'a plus de sens. La somme de deux décimaux illimités devant être un décimal illimité, connaître cette

somme signifie donc connaître pour chaque p la p-ième décimale de cette somme. Considérons la situation suivante: soient $a = 1,230156\ldots$ et $b = 0,769843\ldots$

$$\begin{array}{r} 1{,}230156\ldots \\ +\ \ 0{,}769843\ldots \\ \hline \\ , \end{array} \quad .$$

Quel nombre faut-il mettre à gauche de la virgule du résultat? On se dit que s'il existe $p > 6$ pour lequel $a_p + b_p < 9$ (où a_p et b_p sont les p-ième décimales respectives de a et de b) et $a_\ell + b_\ell = 9$ si $\ell < p$, alors ces décimales n'induiront pas de report et (en devinant un peu ce qu'il faut faire) on écrira 1 devant la virgule. S'il existe p pour lequel $a_p + b_p > 9$ et $a_\ell + b_\ell = 9$ si $\ell < p$, on mettra 2. Et si pour tout p on a $a_p + b_p = 9$, ce sera cohérent avec ce qui précède de mettre aussi 2 devant la virgule. Mais, si pour tout p on a $a_p + b_p = 9$ comment le savoir? Pour le savoir, il faudrait voir l'infini. Il devient donc difficile de proposer un algorithme usuel, et une définition propre va demander que l'on se fatigue. Cette question est traitée dans le merveilleux livre "Sur la mesure des grandeurs" d'Henri Lebesgue [11] (voir aussi [12]). Il y montre comment trouver la p-ième décimale de la somme et du produit de deux nombres décimaux illimités, les nombres réels[1]. Il en déduit les propriétés de ces nombres qui les caractérisent et que l'on résume dans notre jargon actuel en disant qu'ils forment un corps commutatif ordonné archimédien et complet. Comme l'indique le titre du livre, son thème est la mesure des grandeurs, en fait: les longueurs, les aires et les volumes. On y prouve par exemple le théorème non évident: un carré unité étant fixé dans le plan, l'aire d'un rectangle est le produit de la longueur de "sa base" par celle de "sa hauteur", chacune des longueurs étant calculée par rapport au côté du carré. Pour que ce résultat ait un sens, il faut savoir ce qu'est l'aire d'un rectangle, la longueur d'un segment, et le produit de deux nombres réels.

2.3. Voyons ce que nous apportent ces nouveaux nombres pour le problème de la diagonale du carré. Nous allons construire par un procédé du à Simon Stevin[2] un

[1] Contrairement à l'usage en vigueur aujourd'hui d'identifier les expressions telles que 0,99...et 1,00..., Lebesgue refuse les décimaux qui se terminent par une suite de 9.

[2] Dans un texte de 1594, "L'Appendice Algebraique" dont le seul exemplaire connu brûla dans l'incendie de 1914 de la bibliothèque de l'Université Catholique de Louvain. L'exemplaire avait été découvert en 1859 par un mathématicien de cette Université, P.I. Gilbert, et heureusement recopié, en 1911, par l'historien belge, le père jésuite H. Bosmans. Un résumé avait été publié au dix-septième siècle en Hollande dans une édition d'œuvres de Stevin ([8], II.B).

nombre réel α tel que $\alpha^2 = 2$. On a :

$$1^2 < 2 < 2^2 \quad .$$

Stevin se comporte comme si, sachant que le carré de quelque chose (dont on ignore la nature) est compris entre 1 et 4, alors ce quelque chose est compris entre 1 et 2. Il partage alors le "segment" [1 , 2] en dix "segments"[3]

$$[1 \quad , \quad 1,1] \ , \ [1,1 \quad , \quad 1,2] \ , \ldots , \ [1,9 \quad , \quad 2]$$

Le quelque chose doit se trouver dans un de ces dix segments. On vérifie (en prenant les carrés des extrémités, il y a au plus dix vérifications à faire) que le quelque chose doit être compris entre 1,4 et 1,5 (car $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$), puis entre 1,41 et 1,42, etc. On a donc un algorithme qui donne des nombres décimaux limités dont le carré est aussi proche que l'on veut de 2. Mais à présent nous avons un nombre décimal illimité, un nombre réel α, pour lequel on peut prouver grâce à la multiplication définie par exemple dans [11], le

Théorème 3. $\alpha^2 = 2$.

Nos nouveaux nombres, les nombres réels, construits à l'aide des nombres entiers, sont donc des objets satisfaisants dans le contexte des interrogations de 1 et 2. Mais ils permettent aussi l'analyse mathématique grâce à laquelle (parmi bien d'autres choses) on calcule des longueurs, aires et volumes qu'il était exclu de calculer par les méthodes des Grecs. Cette dernière phrase vaut pour le courant principal de la mathématique d'aujourd'hui. Sur la nature exacte des nombres sur lesquels travaillaient Newton et Leibnitz, voir par exemple [1]. Sur une approche nouvelle, l'analyse non standard qui introduit des nombres infiniment petits et infiniment grands, voir par exemple [13].

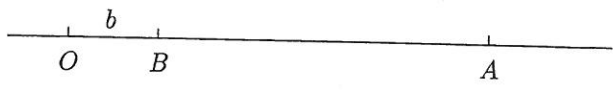
4. Le continu, les fractions continues, les fractions continuées

4.1 Le chapitre 3 est un aboutissement d'une longue histoire où s'entremêlent et s'opposent les notions clefs des mathématiques que sont les nombres entiers et les grandeurs continues. Jusqu'à la découverte des géométries non euclidiennes la géométrie

[3]Dans l'Appendice Algébraïque, Stevin n'utilise pas ses notations décimales de La Disme. D'ailleurs, il ne les utilise nulle part hors de ce dernier texte.

semblait le domaine le plus "sûr" de la pensée. Dans la seconde moitié du siècle dernier, c'est chez les nombres entiers que l'on a cherché un fondement solide aux mathématiques et qu'est apparue le souhait de les définir : les définir tous ainsi que leurs opérations, et prouver leurs propriétés usuelles telles que "quels que soient les nombres a, b et c l'égalité suivante est vraie : $a+(b+c) = (a+b)+c$". C'est à peu près simultanément que l'on répondait à ces questions et que l'on définissait les nombres réels à l'aide des nombres entiers (et de leurs fractions). Dedekind définissait les nombres réels comme certains couples d'ensembles de fractions, les coupures[4] Mais le plaisir qu'il eut de cette découverte était du principalement au fait que cette notion de coupure lui permettait d'énoncer la première caractérisation mathématique de ce qu'est une grandeur continue. En mathématique, il y avait les grandeurs discrètes et les grandeurs continues. Pour ces dernières, citons encore STÉVIN : "Item comme a une continue eau correspond une continue humidité, ainsi à une continue grandeur correspond un continu nombre" ([8], II.B, p.502).
L'analyse mathématique de Newton à Dedekind est basée sur le concept de grandeur continue. Par ses coupures, ce dernier donne aux grandeurs continues un vrai statut mathématique en les définissant par les nombres entiers.

4.2 Les nombres décimaux illimités représentent donc des "grandeurs continues" par des nombres entiers. Mais il y a d'autres façons de représenter ces grandeurs par des nombres entiers. Voici une méthode connue des Grecs sous le nom d'anthyphérèse ou d'antanérèse ([2], [16]) : soient $a = OA$ et $b = OB$:



Admettons toujours qu'en reportant suffisamment de fois (par exemple $n+1$ fois)

[4]Notion équivalente à celle de "rapport de grandeur" évoquée et non précisée en 2.1, et mathématiquement équivalente à celle de nombre décimal illimité évoquée en 3.2. On trouvera un exposé d'une théorie des coupures dans [15], pp.3-13.).

OB, on dépasse A:

$$a = nb + r \tag{2}$$

où $b > r$ (on devine ce que veut dire $b > r$),

puis

$$b = n_1 r + r_1 \tag{3}$$

où n_1 est un nombre entier et $r > r_1$,

$$r = n_2 r_1 + r_2 \tag{4}$$

où n_2 est un nombre entier et $r_1 > r_2$,

etc... On reconnaît notre "algorithme d'Euclide". On voit donc apparaître une suite de nombres entiers $n, n_1, n_2, \ldots$ dont on se dit qu'elle va caractériser le "rapport" du segment a au segment b, le "rapport" $\frac{a}{b}$.

Voyons l'intérêt de cette notion et manipulons les égalités (2), (3) et (4) sans trop de scrupules: (2) devient

$$\frac{a}{b} = n + \frac{r}{b} \quad , \tag{5}$$

(3) devient

$$\frac{b}{r} = n_1 + \frac{r_1}{r}$$

et

$$\frac{r}{b} = \frac{1}{n_1 + \frac{r_1}{r}} \quad ,$$

dès lors (5) devient

$$\frac{a}{b} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{r_1}{r}} \tag{6}$$

Par (4), (6) devient

$$\frac{a}{b} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{r_2}{r_1}}} \quad ,$$

on continue et on écrit

$$\frac{a}{b} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \cdots}}$$

Le second membre est ce que l'on appelle une fraction continue ou une fraction continuée. Une notation pour ce second membre est

$$n; n_1, n_2, \ldots \tag{7}$$

Ce procédé permet donc aussi de représenter les points d'une droite par des suites de nombres entiers. On se dit que cette présentation doit montrer quelque chose de plus profond que celle par les nombres décimaux puisque cette dernière attache une importance au nombre 10, certainement à cause de nos 10 doigts.[5]

Voici un autre avantage :

4.3 Nous avons commencé l'exposé par $\sqrt{2}$, terminons-le par $\sqrt{2}$. Tout d'abord, $1 + \sqrt{2}$ est solution de l'équation

$$X^2 = 2X + 1$$

Divisons les deux membres de cette équation par X :

$$X = 2 + \frac{1}{X}$$

[5] Une hypothèse fascinante et controversée a été avancée selon laquelle à côté de la théorie des rapports de grandeurs qui nous est connue par les Eléments d'Euclide et qui est attribuée à Eudoxe, en existait une autre basée sur l'anthyphérèse, équivalente à la représentation des rapports de grandeurs par des expressions (7) et qui pouvait conduire à la théorie d'Eudoxe. Voir par exemple [2] et [16]. Une phrase d'Aristote joue un grand rôle dans cette hypothèse. En voici une traduction du mathématicien et historien français Edmond Mazet qui fit en 1993 un cours inspirant sur les Eléments d'Euclide à ALTAÏ R (le Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques de l'ULB) et à l'UMH :

ARISTOTE, *Topiques* VIII, 3, 158^b29-159^a1.

"En mathématiques aussi il y a des choses qui pourraient sembler n'être pas faciles à démontrer faute d'une définition, par exemple que la [droite] qui coupe le plan [=le parallélogramme] parallèlement au côté, divise semblablement la ligne et la surface. Mais une fois que la définition a été énoncée, l'assertion devient immédiatement évidente; en effet les surfaces et les lignes ont la même antanérèse : c'est là la définition de l'égalité de rapports."

$$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{X}}$$
$$= \text{etc.}$$

On a donc envie d'écrire

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\cdots}} \quad ,$$

d'où le

Théorème 4.

$$\sqrt{2} = 1; 2, 2, 2, \ldots \tag{8}$$

■

L'expression décimale de $\sqrt{2}$ est 1,41421356... et l'on n'a aucune idée d'une loi qui donnerait une certaine structure ou régularité à la suite de ces décimales. Alors que manifestement (8) montre une harmonie à $\sqrt{2}$.

4.4 Alors, puisque ces fractions continuées

(a) fournissent une représentation des grandeurs continues par des suites de nombres entiers indépendantes de notre usage de la numération décimale,

(b) montrent une structure à des nombres pour laquelle l'expression décimale ne montre que du chaos,

pourquoi n'est-ce pas ce concept et la notation (7) qui se sont imposées?

Une réponse: malgré les difficultés énoncées en 3.2.2, la somme et le produit des nombres décimaux illimités sont en harmonie avec la somme et le produit des nombres décimaux limités rappelés en 3.1.

A la fraction continuée

$$n; n_1, n_2, \ldots = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2+\cdots}}$$

on peut bien sûr associer les fractions

$$n; n_1, n_2, \ldots, n_p = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2+\cdots+\frac{1}{n_p}}}$$

Le lecteur qui essayera de trouver un algorithme pour la p-ième "décimale" de la somme et du produit de deux telles expressions aura une réponse à la question.

Bibliographie

[1] E. ARTIN, *Algèbre Géométrique*, Gauthier-Villars, 1962.

[2] F. BUEKENHOUT, H. MEUNIER, M. TALLIER, *Vivre la Mathématique 1*, Didier Hatier, 1980.

[3] F. BUEKENHOUT, H. MEUNIER, M. TALLIER, *Vivre la Mathématique 2*, Didier Hatier, 1981.

[4] F. BUEKENHOUT, *Ensembles totalement ordonnés ou les nombres sans opérations*, manuscrit UREM-ULB, 25 octobre 1996.

[5] F. BUEKENHOUT, *Diverses facettes des nombres réels-Bibliographie (de $\mathbb{R}$)*, manuscrit UREM-ULB, 15 novembre 1996.

[6] F. BUEKENHOUT, *Approches des nombres réels*, manuscrit, novembre 1996.

[7] F. BUEKENHOUT, *Inventaire de diverses approches des nombres réels*, manuscrit, 3 mai 1996.

[8] E. COUSQUER, *De la Théorie des Proportions à la Théorie des Nombres réels*, IREM de Lille, Janvier 1995.

[9] M. DEMAL, *Une nouvelle géométrie pour les enfants de 6 à 12 ans*, à paraître.

[10] E. ENGELER, *Foundations of Mathematics*, Springer-Verlag, 1983.

[11] H. LEBESGUE, *Sur la mesure des grandeurs*, Gauthier-Villars, 1956.

[12] J. LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, PUF, 1985.

[13] PAPY, *Mathématique Moderne 1*, Marcel Didier, 1964.

[14] PAPY, *Mathématique Moderne 2*, Marcel Didier, 1965.

[15] N. ROUCHE, *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, 1992.

[16] P. VAN PRAAG, *Nombres réels, grandeurs, et géométrie plane*, manuscrit, 15 septembre 1995.

Bibliographie de l'Appendice

[1] A. Daham-Dalmedico/J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Seuil 1986. [Ouvrage bref, lumineux, riche et bon marché].

[2] A. Szabó, *Les débuts des mathématiques grecques*, Vrin, 1969.

[3] *Les œuvres d'Euclide*, trad. par F. Peyrard, Blanchard 1966.

[4] D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200-1800, Princeton University Press, 1986.

[5] J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu.* Epistemologie et Histoire, Cedic/Fernand Nathan, 1978.

[6] Y. Felix, *Equidécomposition des polyèdres, le troisième problème de Hilbert*, Mathematique et Pédagogie, n° 90, pp.57-67, 1993.

[7] R. Descartes, *La Géométrie*, On a le choix d'une édition en cette année René Descartes.

[8] *The Principal Works of Simon Stevin*, Vol.II Mathematics (en deux tomes: IIA et IIB), C.V. Swets and Zeitlinger, 1958.

[9] D. Depau, *Simon Stevin*, Collection Nationale, Office de publicité, 1942.
[On trouve ce livre par-ici par-là mais il faudrait le rééditer].

[10] P. Dedron-J. Itard, *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1959.

[11] H. Lebesgue, *Sur la mesure des grandeurs*, Gauthier-Villars, 1980.

[12] P. van Praag, *Les nombres décimaux illimités*, à paraître.

[13] M. Boffa et A. Pétry, *Des naturels non standards à l'analyse non standard, une introduction*, Mathématique et Pédagogie, n° 94, pp.39-54, 1993.

[14] R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers (I. continuity and irrational numbers, II. the nature and meaning of numbers)*, Dover, 1963.

[15] W. Rudin, *Principles of mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, 1964.

[16] D.H. Fowler, *The mathematics of Plato's Academy – A New Reconstruction*, Clarendon Press, 1987.