Math & Manips

Des *manip*ulations pour favoriser la construction des apprentissages en *math*ématiques

Le dessin de couverture est de Rembrandt,
il suggère que, comme on apprend très tôt la marche en marchant,
c'est en faisant des mathématiques qu'on apprend à en faire,
et cela commence très tôt.

La Trame circulaire est de Starline (freepik.com), le fond bleu de Garry Killian (freepik.com), la photo de Christian Perner (Fulton Center, New-York).

La composition a été réalisée par Samuël Di Emidio du CREM asbl.

Cet ouvrage est vendu par le CREM au prix coûtant. S'il doit être expédié par la poste, les frais d'expédition et de port sont facturés en supplément.

Il en existe également une version couleur, disponible sur Internet, où elle peut être téléchargée gratuitement, en tout ou en partie, à l'adresse `http ://www.crem.be`

CREM a.s.b.l., décembre 2017
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Rue Émile Vandervelde 5
1400 Nivelles (Belgique)
Tél/Fax : 00 32 (0)67 21 25 27
info@crem.be

Imprimé en Belgique

Dépôt Légal : D/2017/7359/1 ISBN 978-2-930161-08-2

Cette publication est mise à disposition sous licence Creative Commons BY-NC-SA (Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions) 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez `http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/` ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

MATHÉMATIQUES DE LA PRIME ENFANCE À L'ÂGE ADULTE

Math & Manips

Des *manip*ulations pour favoriser la construction des apprentissages en *math*ématiques

Marie-France Guissard et Valérie Henry, coordinatrices

Cet ouvrage a été conçu
comme source d'idées et base de discussions.
Souhaitons que personne n'en fasse un dogme !

CREM

RÉGION WALLONNE

PRÉLIMINAIRES

Auteurs

Cet ouvrage est le fruit d'une recherche collective, jalonnée par de nombreuses et longues discussions. Les membres du groupe de recherche sont Marie-France Guissard, licenciée en sciences mathématiques, Valérie Henry, docteur en didactique des disciplines scientifiques, Pauline Lambrecht, licenciée en sciences mathématiques, Patricia Van Geet, régente en mathématiques, physique et sciences économiques, Sylvie Vansimpsen, régente en mathématiques et institutrice primaire, Isabelle Wettendorff, licenciée en sciences mathématiques.

Chaque chapitre a été particulièrement pris en charge par une ou plusieurs personnes :

Patricia Van Geet et Sylvie Vansimpsen pour les chapitres 1, 2 et 3,

Sylvie Vansimpsen pour le chapitre 4,

Patricia Van Geet pour le chapitre 5,

Pauline Lambrecht pour les chapitres 6 et 7,

Marie-France Guissard pour les chapitres 8 et 9, ce dernier en collaboration avec Isabelle Wettendorff.

La mise au point informatique de l'ensemble du texte a été réalisée par Marie-France Guissard.

La coordination de la recherche a été assurée par Marie-France Guissard et Valérie Henry.

Remerciements

Notre reconnaissance va à Nicolas Rouche qui a donné la première impulsion à cette recherche. Par les échanges et les confrontations d'idées que nous avons eus avec lui, il a changé notre conception de l'enseignement et notre pratique dans les classes. Il nous a appris à travailler ensemble et à donner le meilleur de nous-mêmes pour la réalisation d'une tâche collective.

Nous remercions vivement les personnes qui ont lu et commenté les différents textes de cet ouvrage. Il s'agit notamment des membres du Comité d'Accompagnement interne au CREM, en particulier Thérèse Gilbert, Christiane Hauchart et Guy Noël. Il va de soi cependant que la responsabilité finale de ce travail incombe à ses seuls auteurs. Nous remercions aussi tous les enseignants qui nous ont aimablement accueillis dans leurs classes pour nous permettre d'expérimenter des activités, ainsi que Sébastien Agie de Selsaten pour les travaux préparatoires accomplis au cours de son travail au CREM.

Commanditaires

Cet ouvrage a été réalisé dans le cadre des conventions DIFST 1080586, 1180679 et 1280773 financées par la Région wallonne, Service Public de Wallonie, Direction Générale Opérationnelle de l'Économie, de l'Emploi et de la Recherche (DGO 6), Département du Développement technologique.

Le CREM a contribué à ce projet en prenant notamment en charge le soutien logistique et en consacrant à plein temps deux chercheurs bénéficiant d'un poste APE subsidié par la Fédération Wallonie-Bruxelles.

Avant-propos

Depuis sa création en 1992, le CREM s'est attaché à identifier les difficultés d'apprentissage liées aux mathématiques et à développer des outils permettant aux enseignants de détecter ces difficultés et d'y remédier ([10] à [17]). Dans la majorité de ces ouvrages, la philosophie a consisté à dégager des fils conducteurs de la formation mathématique depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte. C'est dans ce même esprit que le CREM s'est engagé dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves.

Ces activités, appelées *Math & Manips*, sont destinées à améliorer l'apprentissage de certaines matières du cursus et ont été conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des manipulations.

1 Origine et motivation du projet

S'interroger sur l'origine du projet nous conduit tout d'abord à nous intéresser à la situation actuelle de l'enseignement des mathématiques en Fédération Wallonie-Bruxelles. Déjà en 1990, dans le préambule du rapport Danblon, on pouvait lire : « Les mathématiques sont mal perçues d'une partie du public même cultivé : elles sont trop souvent à la fois rejetées et objet de préjugés profonds. [...] Or une fraction importante de la population recule devant les tâches mathématiques les plus élémentaires (et parfois en tire vanité) : l'analphabétisme mathématique doit être combattu. Dans la mesure où [...] les activités des citoyens relèveront toujours plus de la réflexion que des automatismes, l'éducation mathématique doit viser la compréhension plus que les exécutions d'algorithmes. [...] L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte de sens et le repli de la forme sans contenu. [De plus,] le nombre des étudiants qui choisissent l'orientation mathématique dans les écoles normales et les universités a considérablement décru dans les dernières années. [...] Le phénomène de désaffection du métier d'enseignant n'est propre ni aux mathématiques, ni à la Belgique francophone : il touche les autres disciplines et d'autres pays, parmi lesquels la France, le Royaume-Uni et les États-Unis » [9].

C'est dans la double optique de rendre du sens à l'activité mathématique dans les classes et de diversifier les pratiques professionnelles des enseignants qu'une équipe du CREM a été amenée à examiner la question de l'introduction d'une composante expérimentale dans le cours de mathématiques et de la manière de la pratiquer à tous les niveaux de l'enseignement.

Si, dans l'enseignement des sciences, l'idée des laboratoires s'est imposée très tôt, il n'en a pas été de même pour les mathématiques. Et pourtant les incitations n'ont cessé depuis un siècle. En 1904, Émile Borel propose la mise en place de laboratoires de mathématiques lors d'une conférence à Paris. Lors de cette conférence, il cherche à montrer l'intérêt, le rôle et la nécessité

des exercices pratiques (de vrais exercices, expériences et manipulations de calculs numériques, de dessins géométriques, d'arpentage, de cosmographie ou de mécanique) qui permettent d'introduire « plus de vie et de sens du réel » dans l'enseignement des mathématiques. Au milieu du vingtième siècle, deux ouvrages significatifs sont publiés. L'un, rédigé par les membres du bureau de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques [19], étaye l'usage du matériel par la complémentarité de la perception et de l'action, par le nécessaire va-et-vient entre le concret et l'abstrait dans l'activité et enfin l'importance du recours à l'objet et à l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive. L'autre est publié par le Ministère de l'Instruction publique suite à une exposition présentée au troisième congrès de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques. En conclusion de ce document, il est fait état que le « matériel, structuré par une idée mathématique », aide à « proposer des situations qui attirent et stimulent les esprits » (C. Gattegno *in* [30]). En 1991, la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française insiste à nouveau sur cette problématique dans son ouvrage sur l'enseignement des mathématiques en Communauté française de Belgique [38].

2 Objectifs du projet

L'intérêt de cette recherche est de présenter aux enseignants l'apport d'une activité expérimentale dans le processus de construction des savoirs mathématiques et ainsi de susciter des réflexions sur les concepts mathématiques, l'analyse des outils et de leur usage stratégique, et de favoriser l'innovation pédagogique et de nouveaux comportements professionnels. Notre projet pour les élèves, via les *Math & Manips*, est de « développer leur désir de savoir et le plaisir de la connaissance » [2]. Dans le premier de ses rapports, le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques disait déjà : « Il faut entretenir et développer tout au long de la scolarité la soif de savoir et la joie de connaître qu'on voit s'éveiller chez les enfants dès l'âge de deux ou trois ans » [10]. Pour cela, nous gardons le même discours que celui tenu dans une autre recherche du CREM : « nous tentons de donner du sens aux activités mathématiques proposées et de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés » [14]. Le bénéfice attendu auprès des élèves est une meilleure perception des liens existant entre les savoirs rencontrés et une meilleure appréhension des concepts mathématiques.

Ce projet rencontre ainsi les objectifs et recommandations des documents qui servent de référence dans l'enseignement. Il vise plus particulièrement l'acquisition du bagage mathématique commun à tous les élèves. Ainsi, dans le décret définissant les missions prioritaires de l'Enseignement Fondamental et de l'Enseignement Secondaire [25], on trouve parmi les objectifs généraux :

> *amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ;* (article 6, 2°).

Dans ce même décret (article 8), la Communauté française veille à ce que chaque établissement :

> 1° *mette l'élève dans des situations qui l'incitent à mobiliser dans une même démarche des compétences transversales et disciplinaires y compris les savoirs et savoir-faire y afférents ;*
>
> 2° *privilégie les activités de découverte, de production et de création ;*
>
> 3° *articule théorie et pratique, permettant notamment la construction des concepts à partir de la pratique ;* [...]

Le document définissant les socles de compétences pour l'enseignement fondamental et le premier degré de l'enseignement secondaire [27] donne les recommandations suivantes qui guident nos travaux pour ces niveaux d'enseignement.

> *L'apprentissage des nombres et des opérations trouve un ancrage dans des contextes de grandeurs. La manipulation et l'utilisation d'étalons variés permettent des comparaisons et des opérations. La construction de formules pour les calculs de périmètres, d'aires et de volumes est amorcée par des activités de report de l'unité. La proportionnalité est travaillée à partir d'exemples de la vie quotidienne. On construit des tableaux et des graphiques qui montrent les relations entre les grandeurs.* [...]

Pour la fin du secondaire, les *Math & Manips* sont le point de départ pour des activités de modélisation et ladécouverte des fonctions de référence, suivant les recommandations des documents définissant les compétences terminales et savoirs requis en mathématiques ([26] et [29]).

> *L'étude des fonctions est un domaine privilégié pour apprendre à modéliser. Le recours aux calculatrices graphiques, aux ordinateurs ouvre des possibilités de conjecture, d'allègement des calculs et de validation.* [...] *L'accent est mis sur les fonctions de référence, la mise en relation des différentes notions et leur interprétation.* [...]

Cette recherche s'attache à étudier comment ces compétences peuvent être développées par des activités où les élèves construisent eux-mêmes leurs savoirs à partir d'expérimentations.

L'efficacité de l'enseignement des mathématiques repose en partie sur des aspects épistémologiques. Comme l'a écrit dans un de ses courriers Jack Lang [1], alors ministre français de l'Éducation Nationale en 2006, le rôle de l'aspect expérimental est de plus en plus reconnu dans la construction des savoirs mathématiques. Comme Nicolas Rouche aimait à le répéter, « agir aide à concevoir ».

Un autre but poursuivi est que les activités proposées partent des mathématiques quotidiennes des élèves. Nicolas Rouche mentionne à ce propos : « L'enseignement doit partir (mais pas camper) sur le terrain familier de l'élève et dans sa langue. [...] Ainsi, les élèves partent de leur terrain familier et aboutissent à une théorie. Entre les deux, la distance est grande : il y a ce qu'on appelle un seuil épistémologique » [5]. Cela constitue un objectif dans le développement des mathématiques : construire un concept au départ des notions plus ou moins présentes chez l'enfant.

Cette recherche rejoint la conception d'Émile Borel, qui souligne toute l'importance de la réflexion que doivent avoir les élèves par rapport à leurs réponses, cette réflexion pouvant être améliorée en donnant du sens aux énoncés. Ainsi, il dit : « On peut signaler bien des moyens qui pourraient être employés pour introduire plus de vie et de sens du réel dans notre enseignement mathématique ; il y a des essais à faire, pas tous en même temps au même endroit, mais ici ou là, suivant les circonstances, les dispositions des élèves, les ressources locales, les goûts du professeur. Par exemple, on peut demander à chaque élève d'apporter dans sa poche un mètre en ruban ; lui faire mesurer les deux côtés d'un rectangle (du tableau noir, d'une table, etc.), et lui faire calculer la diagonale, puis vérifier le résultat. On peut, de même, faire calculer expérimentalement le rapport de la circonférence au diamètre, le volume d'un vase de forme simple, etc. On habituera aussi les élèves à évaluer les longueurs et les angles à vue d'œil. Tous ces exercices contribueront à donner la notion plus exacte de l'importance qu'il faut attacher aux dernières décimales dans un calcul numérique, et à montrer combien il est absurde de rechercher dans le résultat une exactitude dépassant celle des données expérimentales. [...] En résumé, on doit rechercher toutes les occasions de faire mesurer à nos élèves des grandeurs concrètes : longueurs, temps, angles, vitesses, etc., de manière qu'ils appliquent le calcul à des réalités et

se rendent compte par eux-mêmes que les Mathématiques ne sont pas une pure abstraction » [6]. Au sujet du sens, dans un des dossiers de l'Institut National de Recherche Pédagogique, on peut lire qu'aux États-Unis : « les élèves doivent apprendre les mathématiques en leur donnant du sens, en construisant des connaissances nouvelles activement à partir de l'expérience et des connaissances antérieures » [21].

Les *Math & Manips* ont aussi pour but de stimuler les esprits, dans la même idée que ce texte de Gilles Laverdure : « [...] en maths, il n'y a pas que la rigueur et le raisonnement, mais aussi l'imagination et l'analogie. [...] faire des maths ce n'est pas toujours ce que l'on pense. Au-delà des manipulations de symboles, il existe cette capacité fondamentale à reconnaître le rôle des mathématiques dans notre environnement. Observons deux types d'élèves. Pour les élèves du premier type, les maths sont plus facilement accessibles par l'entremise de l'analogie, de situations provenant de leur vécu et grâce à des images mentales fortes. Ces élèves ne sont pas forcément bons en raisonnement. [...] Pour les élèves du second type, la capacité à visualiser et à faire preuve d'imagination ne vient pas facilement... Probablement parce que l'école les a rarement encouragés à être créatifs dans un domaine comme celui des maths [...] ils possèdent un type de pensée logique plutôt qu'analogique. En classe, [...] il est plutôt usuel de cibler la rigueur du raisonnement comme pierre d'assise de la pensée mathématique » [24].

Dans les *Math & Manips*, chaque élève devrait trouver l'occasion de se sentir à l'aise au cours de mathématiques mais également la possibilité de s'exprimer dans le langage et le registre qui lui convient, d'apporter sa participation à la construction d'un concept. C'est par le va-et-vient permanent entre les aspects expérimentaux et théoriques que le concept mathématique se construit, que le modèle mathématique s'élabore. Les aspects pratiques et théoriques se complètent, chacun d'eux est nécessaire à l'autre et lui donne du sens.

3 *Math & Manip* et laboratoire de mathématiques

Notre recherche s'inscrit dans un courant existant et bien représenté, notamment en France et en Italie, qui préconise le recours à des expériences pour introduire certains concepts mathématiques. Ces expériences sont généralement menées dans un local spécifique qui est donc tout naturellement appelé « laboratoire de mathématiques ». Par extension, le vocable désigne aussi les activités qui s'y déroulent.

Nous nous sommes cependant écartés de cette conception du laboratoire de mathématiques comme un lieu séparé, réservé aux expériences. Il nous semble que l'expérimentation et la modélisation qui en découle font partie intégrante de l'activité mathématique, et qu'il n'y a pas lieu de reléguer la phase expérimentale de la construction d'un savoir dans un endroit séparé, comme s'il s'agissait d'une activité annexe. Nous rejoignons ainsi les conceptions d'une équipe du GEM qui se demande : « le lieu privilégié pour le laboratoire de mathématiques ne serait-il pas le cours de mathématiques lui-même ? » [20]. Nous n'envisageons donc pas les laboratoires de mathématiques comme des lieux, ou comme des expériences qui se déroulent dans un endroit spécifique, mais plutôt comme des activités menées au sein même de la classe.

Une *Math & Manip* doit pouvoir être menée à bien par n'importe quel enseignant et ne devrait pas prendre trop de temps, les professeurs étant déjà contraints à suivre des programmes assez chargés. Le matériel utilisé doit pouvoir être soit acquis à moindres frais, soit fabriqué facilement avec des matériaux « bon marché ». À ce sujet, Émile Borel écrit : « Il [le laboratoire] ne doit pas coûter cher. Les appareils coûteux et encombrants n'y sont pas à leur place » [6]. Il fournit déjà

un début de réponse à ceux qui s'inquiéteraient du temps accordé à des activités de laboratoires en classe car, selon lui, « on gagnera largement le temps consacré aux exercices pratiques, car les élèves comprendront plus vite la théorie » [6]. Bien entendu, il faut quand même veiller à ne pas concevoir des activités trop longues.

Suite à une réunion de travail, N. Rouche a écrit qu'un caractère principal de la science expérimentale correspond à cette suite d'épisodes : « on a un savoir qui fait problème sur certains points, on se pose des questions, on fait des hypothèses sur les réponses possibles, *on travaille à concevoir une ou des expériences* qui permettent de trancher, puis on réalise ces expériences. En général, on repart avec de nouvelles questions » [37]. Ainsi, ce sont des activités qui, dans un premier temps, suscitent le questionnement chez les élèves (choses qui ne fonctionnent pas, qui ne sont pas claires), qui, dans un deuxième temps, aident à comprendre clairement la question de départ et qui, dans un troisième temps, amènent à des réponses, produites par les élèves avec l'aide de leur professeur, et qui ont un avenir mathématique en ce sens qu'elles pourraient être réinvesties dans le cursus. Les *Math & Manips* se situent soit comme action de découverte, soit comme renforcement des acquis, elles doivent intégrer pratique et théorie.

À l'instar de François Jaquet , nous sommes dès lors d'avis que « lorsqu'un atelier est inséré dans le parcours didactique, cette activité constitue une des étapes de la construction d'un concept ou d'une connaissance mathématique particulière [. . .] » [22]. De plus, l'efficacité d'une *Math & Manip* sera renforcée si elle est organisée comme une séquence cohérente d'activités s'appuyant (quand cela s'indique) sur divers matériels.

Pour conclure, nous appelons *Math & Manips* des activités où les élèves sont confrontés par le milieu à des phénomènes interpellants, et qui constituent une suite bien construite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité. Elle débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui doivent être traitées de diverses manières selon l'âge des élèves. Les informations recueillies sont décrites dans le langage courant, intégrées dans des tableaux de nombres, ou encore interprétées sous forme de graphiques.

Il reste encore à souligner que les *Math & Manips* constituent un outil pédagogique parmi d'autres et qu'il importe pour l'enseignant de diversifier les méthodes d'apprentissage proposées aux élèves, les expérimentations restant des activités épisodiques.

4 *Math & Manips* de la maternelle à 18 ans

Notre recherche envisage, comme les précédents travaux du CREM, la scolarité dans son ensemble, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit d'un travail qui se propose de dégager des fils conducteurs soulignant les phases successives de l'apprentissage des mathématiques, sur le plan des grandeurs, de la mesure, des représentations graphiques et des fonctions. Les *Math & Manips* s'inscrivent dans un contexte général de construction des savoirs par l'élève qui se décline différemment selon les étapes du cursus.

4.1 Dans l'enseignement fondamental

Dans les classes maternelles et primaires, les enseignants sont habitués à faire manipuler les élèves. Toutefois, certaines manipulations sont, plus que d'autres, susceptibles d'installer des

concepts mathématiques fondamentaux. Nous nous efforçons de proposer des activités où la nécessité de la manipulation est réellement motivée par le savoir visé, où l'expérimentation fournit la réponse à une question pertinente.

Notre but est de mettre en évidence pour les enseignants les compétences qui sont développées par chacune des *Math & Manips*, ainsi que les notions qu'elles installent, mais aussi de montrer en quoi elles contribuent à une meilleure compréhension de notions parfois abstraites. À ce niveau, les *Math & Manips* visent tout d'abord à construire de nombreux concepts dans le domaine des grandeurs et font ensuite percevoir la nécessité de certains outils, comme la notion d'étalon.

4.2 Dans l'enseignement secondaire

La transition de l'enseignement primaire vers l'école secondaire est problématique à de nombreux niveaux. En mathématiques, on observe un glissement des mathématiques concrètes issues du monde sensible vers une formalisation de plus en plus importante. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre en est un exemple frappant. Pour beaucoup d'élèves, ce cap est très difficile à franchir.

Notre projet vise à réintroduire dans les classes du secondaire un espace où les liens entre le concret et les modèles mathématiques émergent des manipulations physiques réalisées par les élèves et où ces modèles deviennent une nécessité pour traiter les problèmes posés plutôt qu'une donnée pré-existante.

Alors que dans les cours de sciences l'aspect expérimental a été réintroduit pour les élèves du degré supérieur du secondaire, au sein des laboratoires de physique, de chimie et de biologie, le cours de mathématiques a tendance à devenir de plus en plus abstrait au fur et à mesure de la progression dans le cursus. Certains professeurs vont même jusqu'à rejeter toute forme de manipulation, estimant que le cours de mathématiques est exclusivement le lieu de la construction théorique, des démarches abstraites. Cette façon de concevoir le cours de mathématiques convient parfaitement à certains élèves, précisément ceux à qui le cours de mathématiques ne pose aucun problème, qui voient clair tout de suite sans avoir besoin de recourir à l'expérience, qui conçoivent les mathématiques comme une construction purement intellectuelle, comme un jeu de l'esprit. Les professeurs de mathématiques ont souvent été de tels élèves, c'est pour cela que les mathématiques leur ont plu, qu'ils les ont étudiées facilement [1]. La tentation est grande d'imposer cette conception aux élèves. Mais pour nombre d'entre eux, ces mathématiques-là sont vides de sens et ces élèves risquent d'aborder leur vie d'adulte sans posséder le bagage mathématique minimum pour comprendre le monde qui les entoure. La réticence à aborder un texte illustré de graphiques, les erreurs d'interprétation dans les problèmes de pourcentages sont des exemples courants du rejet et de la méconnaissance des mathématiques de base.

Dans les *Math & Manips*, nous proposons des activités qui donnent du sens aux concepts qu'elles introduisent et aux outils qu'elles nécessitent, et par là même, nous tentons de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

[1] À ce sujet, Fletcher écrit : « Les mathématiciens étudient la mathématique parce qu'elle les fascine par sa magie. Mais quand les élèves de nos classes la rencontrent-ils, cette magie ? Au contraire, combien se trouve-t-il de personnes qui réussissent bien dans la vie et disent : "je n'ai jamais été bon en maths en classe, je détestais cette matière" sans éprouver la honte qui couvrirait leur front s'ils disaient : "je me moque pas mal de parler correctement" ou "je déteste les arts et la musique". La beauté des mathématiques ne les a jamais touchés, parce qu'ils identifient mathématiques et calculs numériques » [19].

5 Contenu

Le présent ouvrage, résultat de trois années de recherche, est divisé en quatre parties correspondant aux quatre tranches d'âge de l'école, dans un esprit de continuité, de l'école maternelle à la fin du secondaire.

Les *Math & Manips* rassemblées ci-après ont été conçues chacune pour des élèves d'une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Cependant, certaines activités, comme celles destinées à l'enseignement maternel, peuvent s'étaler sur des périodes plus ou moins longues car elles comprennent des séquences d'apprentissage adaptées à différents stades de la maturité.

D'autres activités peuvent convenir à différents moments de la scolarité, comme apprentissage ou comme remédiation. De même, l'ensemble des *Math & Manips* peut être adapté, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

La partie I présente des activités pour les élèves de l'école maternelle. Les séquences d'apprentissages qui y sont développées sont axées sur deux thèmes principaux : l'organisation spatiale et la géométrie. Elles sont déclinées en plusieurs ateliers de difficultés diverses qui permettent à l'enseignant de les moduler en fonction de l'âge et du niveau des enfants.

Le premier chapitre, intitulé *Repérage dans l'espace*, aborde, par des activités de codage et décodage de consignes orales ou imagées, des questions de topologie comme l'intérieur et l'extérieur, les itinéraires, les notions au-dessus et en dessous.

Par un travail sur des assemblages de cartes, des empreintes et des puzzles, le second chapitre, intitulé *Reconnaissance de formes*, amène les enfants à repérer des symétries dans des figures et à reconnaître, assembler et comparer des formes géométriques simples.

La partie II propose des activités destinées à l'enseignement primaire.

La séquence intitulée *Comparaison de grandeurs* fait l'objet du chapitre 3. Elle est destinée à des enfants du cycle 6-8 ans. Elle consiste à travailler dans un même contexte différentes grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans recours aux mesures.

La *Math & Manip* intitulée *Des étalons* et développée dans le chapitre 4 est destinée aux enfants du cycle 8-10 ans. Au cours d'une activité de comparaison de récipients dans un contexte ludique, les enfants sont amenés à vivre la nécessité de s'accorder sur un étalon commun, conventionnel ou non, dès que la comparaison directe de capacités devient impossible. Cette séquence d'apprentissage débouche sur des activités plus classiques où les relations entre les différentes unités de mesure sont étudiées.

Le chapitre 5, dernier chapitre de cette partie, présente deux séquences intitulées *Construction de la notion de volume* et *Boîtes parallélépipédiques* qui s'adressent à des élèves du cycle 10-12 ans de l'enseignement primaire. Elles peuvent convenir également aux élèves du premier degré différencié.

La première propose de nombreuses expériences qui favorisent la construction d'images mentales variées du volume, par remplissage d'objets creux et par immersion d'objets pleins. Cette activité prépare le terrain pour aborder la seconde séquence qui construit la formule du volume du parallélépipède rectangle, par remplissage de boîtes au moyen de cubes de différentes dimensions. Des expériences établissant des liens entre ces activités sont proposées en prolongements.

La partie III décrit deux séquences d'apprentissage destinées au premier degré de l'enseignement secondaire.

L'activité décrite dans le chapitre 6 concerne les *Agrandissements*. À partir de la construction d'agrandissements de figures sur papier pointé, la séquence s'intéresse à l'influence de la duplication de la longueur des côtés d'un polygone sur son aire. La mise en place de techniques efficaces de comparaison des aires, par pavages et découpages, conduit à la généralisation à d'autres facteurs entiers. Ce sujet est abordé par des activités qui peuvent être traitées soit par un travail papier-crayon, soit en utilisant le logiciel de géométrie dynamique gratuit *Apprenti Géomètre*. Cette séquence peut convenir aux élèves du premier degré différencié et est déjà accessible, au moins en partie, à des élèves de sixième primaire.

Dans la *Math & Manip* qui fait l'objet du chapitre 7 intitulé *Des cylindres*, l'expérience proposée aux élèves leur fait découvrir que le volume d'un cylindre ne se modifie pas de la même manière si on agit sur sa hauteur ou sur son diamètre. Les tableaux de nombres issus des relevés expérimentaux permettent d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. Les graphiques qui en découlent leur font rencontrer tout d'abord la fonction linéaire, puis une première approche de la fonction du second degré. L'accent est mis sur la confrontation des deux situations.

La partie IV décrit des activités destinées à des jeunes du secondaire supérieur.

Le chapitre 8 décrit tout d'abord deux activités très proches l'une de l'autre, intitulées *Volume du cône et fonction cubique* et *Volume du cône et fonctions réciproques*. Elles se basent sur une même expérience consistant à graduer un récipient conique de manière à faire apparaître le lien entre le volume versé dans le cône et la hauteur du niveau atteint par le liquide. Si on choisit de se limiter à la représentation du volume en fonction de la hauteur, l'activité sera plutôt destinée à des élèves auxquels on veut faire découvrir la fonction cubique à partir d'une situation concrète. Si au contraire on s'autorise à considérer à la fois la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur et celle qui donne la hauteur en fonction du volume, on introduit le concept de fonctions réciproques dans un contexte qui lui donne du sens.

Un neuvième chapitre, intitulé *Problèmes d'optimisation*, clôture cet ouvrage. Cette séquence propose quatre problèmes d'optimisation de difficultés croissantes dans un contexte géométrique. Pour chacun d'eux, une manipulation de courte durée vise à améliorer la perception des enjeux d'un tel type de problème. Il s'agit à chaque fois de construire un solide de volume maximum, à partir d'une feuille de papier, en tenant compte de certaines contraintes. Différents aspects de la modélisation sont abordés progressivement : choix des variables, expression des contraintes puis recherche de la valeur optimale à l'aide de différents outils comme des tableaux de valeurs et des graphiques de fonctions.

6 Fils conducteurs

L'introduction des concepts à partir de manipulations constitue le point de départ et l'essence même de cette recherche. Le fait d'entrer dans les activités par des expérimentations plonge d'emblée les élèves dans le monde sensible où les concepts sont abordés par le biais des grandeurs associées aux objets qu'ils manipulent. C'est par un long processus de maturation et de modélisations successives que se construisent peu à peu les concepts de longueur, aire, volume, ... et que le passage aux mesures donne ensuite accès aux relations numériques et fonctionnelles qui

les lient. Le travail sur les grandeurs et les processus de modélisation constituent de ce fait deux fils conducteurs qui sous-tendent l'ensemble de cet ouvrage.

6.1 Les grandeurs

Le thème des grandeurs est au cœur de chacune des séquences d'apprentissage proposées dans cet ouvrage. À chaque tranche d'âge correspond une étape de l'apprentissage des grandeurs, allant des images mentales, aux comparaisons, aux mesures, et jusqu'aux fonctions liant entre elles les mesures de différentes grandeurs.

Dans l'enseignement fondamental

Les comparaisons de longueurs et d'aires sont déjà sous-jacentes aux activités de puzzles destinées aux enfants les plus jeunes. Les *Math & Manips* destinées au début de l'école primaire abordent les longueurs, les masses, les capacités et les aires dans un contexte familier, et permettent un véritable travail sur les grandeurs sans qu'il soit question de mesures. Les concepts sont ancrés dans la réalité grâce aux manipulations.

Les mesures sont introduites progressivement, au moyen d'étalons familiers d'abord, d'étalons conventionnels ensuite. Les expérimentations pour les élèves de la fin du primaire construisent pas à pas la notion de volume, tout en explorant les liens entre différentes caractéristiques d'un objet comme la taille, la forme, la masse et le volume, ainsi que les liens entre volume et capacité. Ici encore les relations sont établies tout d'abord par des comparaisons sans mesures. Ensuite, l'élaboration de la formule du volume du parallélépipède rectangle établit les liens, numériques cette fois, entre les longueurs des arêtes et le volume.

Dans l'enseignement secondaire

Les *Math & Manips* destinées aux élèves du secondaire explorent les liens entre l'aire et les dimensions d'une figure, entre le volume et les dimensions d'un cylindre, d'un cône ou d'un parallélépipède rectangle. Le recours aux tableaux de nombres fait percevoir les liens numériques entre les mesures des grandeurs, tandis que la construction de représentations graphiques débouche sur la perception des liens fonctionnels entre ces mesures de grandeurs. Les fonctions de référence qui se dégagent de ces tableaux et graphiques, moyennant un processus de modélisation, prennent du sens grâce au contexte dans lequel elles apparaissent.

Cet ouvrage propose donc un réel parcours à travers l'apprentissage des mathématiques qui trouve son ancrage dans les grandeurs.

6.2 La démarche de modélisation

Dans l'enseignement fondamental

Dès l'école fondamentale, des processus de modélisation sont sous-jacents aux activités mathématiques. C'est en manipulant et comparant des objets comme des ficelles, des feuilles de papier, des boîtes et des solides que les enfants se construisent des images mentales qui leur permettent d'appréhender les notions de longueur, aire, volume, masse, ...

Lors du passage délicat des grandeurs à leurs mesures, une démarche similaire est à nouveau convoquée. Ainsi, l'association d'un ensemble d'objets du monde sensible (carton de lait, boîte de jus de fruits, bouteille d'eau) à leur capacité commune, le litre, nécessite un véritable travail d'abstraction de la part de l'élève. Il en est de même pour passer du petit cube en bois d'un centimètre d'arête à la mesure de son volume, le centimètre cube.

C'est par l'observation et la manipulation de nombreux triangles, carrés, polygones, cubes, ... dessinés ou en carton, que les enfants accèdent peu à peu aux objets abstraits correspondants. Au-delà, il importe que soit gardé le caractère réversible de ces processus de modélisation. En effet, c'est par un continuel va-et-vient entre le sensible et le conceptuel que l'élève peut adapter ses représentations et se créer des images mentales qui évolueront au fur et à mesure des situations qui lui seront proposées.

Dans l'enseignement secondaire

Au fil de l'enseignement, ainsi que dans la vie quotidienne, les élèves rencontrent de nombreux phénomènes linéaires. La « règle de trois » est si présente au niveau fondamental que les élèves n'imaginent pas utiliser d'autres règles que celles de la proportionnalité, ce qui les pousse à appliquer le modèle linéaire à tort et à travers. Cette pratique persiste bien au-delà de la scolarité. C'est pour cette raison que nous tenons à confronter les élèves à des situations variées et à leur faire prendre conscience que le modèle linéaire n'est qu'un modèle parmi d'autres. Un enjeu important est d'établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part, phénomènes non linéaires, tableaux de non-proportionnalité et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part. Nous espérons provoquer chez certains élèves de la curiosité par des manipulations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Une *Math & Manip* doit amener les élèves à se poser des questions et leur faire découvrir un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation.

Le contexte dans lequel les élèves évoluent lors de la réalisation d'une *Math & Manip* les amène tout naturellement à entrer dans des démarches où la modélisation prend tout son sens. En effet, notre volonté de confronter les conceptions des élèves avec le vécu expérimental puis d'en faire naître un modèle mathématique nous conduit à explorer différentes étapes d'un processus de modélisation telles que : conjecture, protocole, expérimentation, interprétation des résultats, construction d'un modèle, validation, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux, exploitation du modèle, ...

Ainsi s'est imposée la conviction que nous ne pouvions dissocier ces activités de cette composante *modélisation*. Notre but est de développer un intérêt pour aller plus loin dans l'apprentissage des mathématiques, en confrontant les élèves à la nécessité de disposer de modèles mathématiques variés.

7 Méthodologie de la recherche

Suivant les habitudes du CREM, les activités sont d'abord rédigées et documentées, en partenariat avec des enseignants du terrain. Elles sont ensuite expérimentées dans les classes de l'enseignement fondamental et secondaire et réajustées en fonction des observations et des réactions des acteurs : élèves et enseignants. Des retours de ces expérimentations sont intégrés dans les *Échos des classes*. Une analyse plus profonde de l'acquis des élèves lors de l'implémentation

des *Math & Manips* a été menée parallèlement pour le chapitre 7 [23].

L'originalité de la méthodologie sur laquelle s'appuie notre recherche réside dans le débat permanent entre enseignants de tous les niveaux : instituteurs, régents, licenciés, formateurs d'enseignants, chercheurs. Chacun des membres du groupe de recherche présente sa production, ciblée sur la tranche d'âge pour laquelle il est le plus compétent, et l'ensemble du groupe participe à la discussion. Il s'agit ainsi d'un travail qui a une portée longitudinale.

Dans la tradition du CREM, cet ouvrage, issu de la recherche, est destiné aux enseignants. Les documents directement utilisables dans les classes fournissent les informations nécessaires pour aborder les différents thèmes, décrivent des séquences d'apprentissage, donnent la liste du matériel nécessaire pour mener à bien les activités, contiennent des fiches de travail pour les élèves et décrivent des situations rencontrées dans les classes où les activités ont été testées.

Notre espoir est que les professeurs trouvent, dans les résultats de nos travaux, des outils qui leur permettent de garantir une formation mathématique authentique, d'éveiller l'intérêt des élèves et de construire avec eux des savoirs réellement utiles dans leur vie de citoyen, dans leurs études ultérieures et dans leur vie professionnelle.

8 Nos documents

8.1 Les compétences

De nombreuses compétences transversales décrites dans le document définissant les socles de compétences pour l'enseignement fondamental et le premier degré de l'enseignement secondaire [27] sont développées au cours des activités que nous proposons pour les élèves de cette tranche d'âge. Voici celles que nous avons relevées.

Analyser et comprendre un message

Se poser des questions.

Distinguer, sélectionner les informations utiles des autres ; percevoir l'absence d'une donnée nécessaire et la formuler.

Résoudre, raisonner et argumenter

Raccrocher la situation à des objets mathématiques connus.

Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, solides, instruments de mesure, . . .).

Utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.

Estimer le résultat, vérifier sa plausibilité.

Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres et avec une estimation préalable.

Présenter des stratégies qui conduisent à une solution.

Appliquer et généraliser

Évoquer et réactiver des connaissances, des démarches, des expériences en relation avec la situation.

Créer des liens entre des faits ou des situations.

Reconnaître des situations semblables ou dissemblables.

Se poser des questions pour étendre une propriété, une règle, une démarche à un domaine plus large.

Se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes.

Combiner plusieurs démarches en vue de résoudre une situation nouvelle.

Structurer et synthétiser

Procéder à des variations pour en analyser les effets sur la résolution ou le résultat et dégager la permanence de liens logiques.

Les compétences disciplinaires sont, quant à elles, détaillées dans les enjeux des *Math & Manips* dans lesquelles elles sont explicitement travaillées.

Pour les activités destinées au secondaire supérieur, nous nous référons au tout récent document définissant les compétences terminales et savoirs requis en mathématiques [29]. Pour chacune des *Math & Manips*, nous indiquons les compétences à développer et les stratégies transversales concernées.

8.2 Présentation type des *Math & Manips*

Les *Math & Manips* sont présentées selon un plan uniforme [2] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ?	Description, en quelques lignes, de l'activité proposée aux élèves.
Enjeux	Objectifs d'apprentissage et compétences visées. Les compétences indiquées en italique sont celles que l'on retrouve telles que dans les documents appelés « Référentiels » ([27] et [29]).
De quoi a-t-on besoin ?	Description du matériel requis, relevé des connaissances supposées chez les élèves et estimation du temps nécessaire.
Comment s'y prendre ?	Présentation détaillée du déroulement de l'activité, comportant des questions à poser aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, ainsi que les éléments de la théorie auxquels la situation doit aboutir.
Échos des classes	Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.
Prolongements possibles	Nouvelles situations-problèmes, souvent plus difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation formative, de poursuite du travail pour les élèves les plus intéressés.

[2] Ce plan est inspiré de E. C. Wittmann et G. Müller [39]. Nous l'avons mis au point à l'occasion d'une recherche précédente [12].

Vers où cela va-t-il ?	Questions mathématiques plus avancées auxquelles la situation en question prépare, de manière directe ou indirecte. Rapports que la situation en question entretient avec d'autres disciplines. Place de la situation dans la culture mathématique globale.

Les trois dernières rubriques sont facultatives, elles sont honorées chaque fois que c'est pertinent.

À la fin d'un chapitre, on peut encore trouver des *Commentaires*, éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves.

8.3 En pratique

Les activités présentées dans cet ouvrage ont été très largement testées et remaniées à plusieurs reprises, les fiches de travail qui s'y rapportent sont disponibles et proposées en annexe de chacune des parties. Les annexes comprennent deux types de documents. Les premiers sont destinés à l'enseignant : feuilles à photocopier pour la fabrication du matériel, description du matériel à rassembler, ou encore indications pratiques. Les second sont des fiches à photocopier pour les élèves : feuilles de travail, traces écrites des expérimentations et synthèses.

Rappelons que chaque enseignant qui souhaite mener une *Math & Manip* dans sa classe doit absolument la tester au préalable, pour s'assurer que le matériel dont les élèves disposeront est adéquat. C'est avec le matériel décrit en détails dans la rubrique *De quoi a-t-on besoin ?* que nos activités sont réalisées. Ce matériel a été choisi après de nombreuses expérimentations. Il est donc impératif de tester soigneusement une *Math & Manip*, surtout si elle est effectuée avec un matériel sensiblement différent du nôtre.

Première partie

Math & Manips à partir de 2 ans et demi

Préambule

Cette première partie présente, sous forme d'ateliers, des séquences d'apprentissage destinées aux élèves de l'école maternelle. Deux thèmes principaux y sont traités : l'organisation spatiale et la géométrie. Notons que ces deux thèmes sont évidemment l'objet de nombreuses séances de psychomotricité. Celles-ci sont indispensables au développement de l'enfant, lui permettent de prendre conscience de son corps et l'aident à structurer l'espace et le temps. C'est pourquoi de telles séances de psychomotricité sont absolument nécessaires avant la mise en œuvre des ateliers proposés.

Le premier chapitre intitulé *Repérage dans l'espace* aborde, par des activités de codage et décodage à partir de consignes orales ou imagées, des questions de topologie comme l'intérieur et l'extérieur, les itinéraires, les notions au-dessus et en dessous.

Le second chapitre, intitulé *Reconnaissance de formes*, s'intéresse à la symétrie et aux formes géométriques simples. Par un travail sur des assemblages de cartes, des empreintes et des puzzles, les activités proposées amènent les enfants à repérer des symétries dans des figures et à reconnaître, assembler et comparer des carrés, triangles, rectangles, disques, ...

Chaque séquence d'apprentissage, qui met en avant l'aspect mathématique des concepts abordés, est organisée en plusieurs ateliers de difficultés diverses qui visent des apprentissages différents. Cette présentation est conçue pour permettre à l'enseignant de moduler les activités en fonction de l'âge des enfants et de leur niveau. Chaque atelier se déroule avec un groupe de quatre ou cinq élèves, pendant que les autres élèves sont occupés à une tâche ne demandant pas l'attention de l'enseignant. Les ateliers proposés ne sont donc pas conçus pour être menés en parallèle.

Dans chaque manipulation, nous avons estimé essentiel de retrouver les caractéristiques suivantes :
- l'enfant est amené à faire des choix et à les justifier avant de manipuler ;
- les activités sollicitent différents modes de transmission de l'information (oral, visuel, gestuel, ...) et impliquent des transferts d'un mode à l'autre ;
- l'ensemble des manipulations s'appuie sur un matériel facilement réalisable et réutilisable à différents niveaux.

Les annexes contiennent le matériel spécifique à photocopier et éventuellement à découper, ainsi que les fiches qui sont destinées au cahier de l'élève et servent ainsi de traces écrites des activités menées en classe.

Chapitre 1

Repérage dans l'espace

De quoi s'agit-il ? Placer des cartes, des images ou des objets à l'intérieur, à l'extérieur, en dessous ou au-dessus d'un objet donné, à partir d'indications orales ou figurées.

Décrire l'emplacement de divers objets en utilisant le vocabulaire de position.

Déchiffrer et associer une consigne de position codée au dessin qui lui correspond.

Dessiner un itinéraire et l'associer à un itinéraire codé.

Enjeux Associer le vocabulaire spatial à l'action.

S'approprier certaines notions de topologie.

Se familiariser avec la notion d'ordre.

1 Intérieur et extérieur

Dans le langage courant, l'expression « à l'intérieur de » est souvent traduite par le terme « dans » ; de même l'expression « à l'extérieur de » est associée à « hors de ». Dans les ateliers proposés, l'enseignant veillera à exprimer chaque fois une même localisation de différentes manières.

Bien que la notion d'intérieur soit mieux perçue par les élèves de cet âge, souvent sollicités pour placer un objet à l'intérieur d'un autre, nous travaillons les deux notions simultanément tant elles nous semblent indissociables l'une de l'autre.

1.1 Des cercles et des poissons

De quoi s'agit-il ? Compléter un plateau de jeu à l'aide de cartes représentant les notions d'« intérieur » et d'« extérieur ». La distinction entre ces deux notions passe par l'association d'un mot au dessin correspondant.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel pour le groupe d'élèves

Quatre plateaux de jeu « Des cercles et des poissons » assemblés de manière à constituer un seul grand plateau composé de 24 cases (en annexe page 47).

Les cartes « intérieur » sur lesquelles un poisson se trouve à l'intérieur d'un cercle et des cartes « extérieur » sur lesquelles un poisson se trouve à l'extérieur d'un cercle (en annexe pages 48 et 49), imprimées sur feuilles de couleur cartonnées.

Le dé poissons « intérieur/extérieur » (développement en annexe page 50), dé dont trois faces représentent un poisson à l'intérieur d'un cercle et les trois autres faces un poisson à l'extérieur d'un cercle.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant dispose le grand plateau au centre de la table. Il place à côté, faces dessinées visibles, les cartes « intérieur » en un tas et les cartes « extérieur » en un autre tas. Il montre le dé aux élèves et donne la consigne suivante.

> Lance le dé, décris aux autres la position du poisson que tu vois sur la face du dé puis prends une carte « intérieur » ou « extérieur » selon ce que tu as décrit et place-la sur une case libre correspondante. Passe ensuite le dé à ton voisin.

Lorsque l'élève a lancé le dé et décrit la position du poisson, il prend une carte sur le tas correspondant et la pose sur le plateau de jeu de manière à ce qu'elle recouvre une case indiquant la même position. L'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils verbalisent leurs actions.

Si l'enfant se trompe, soit en prenant une mauvaise carte, soit en la plaçant à un mauvais endroit sur le plateau de jeu, l'enseignant lui explique son erreur. L'élève remet alors la carte où il l'a prise et recommence son tour. Lorsqu'un élève lance le dé et se rend compte que toutes les cases correspondantes sont déjà occupées, l'enseignant demande quelles sont les cartes qu'il faut prendre pour compléter le plateau de jeu.

Échos des classes

Lorsque les cartes sont imprimées sur papier blanc, les enfants ne distinguent pas facilement les cases occupées sur le plateau de jeu. C'est pourquoi nous conseillons de les imprimer sur du papier de couleur.

1.2 Dé codé

De quoi s'agit-il ?

Amener l'élève à décoder la symbolisation des mots intérieur et extérieur représentés sur les faces d'un dé et à illustrer la situation à l'aide d'un tampon encreur.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Un plateau de jeu « Poissons à l'intérieur et à l'extérieur » décoré de nombreux cercles (fiche 1, page 83).

Matériel pour le groupe d'élèves

Le dé codé « intérieur/extérieur » (développement en annexe page 51).

Un tampon encreur poisson.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chaque élève un plateau de jeu. Il dépose le tampon encreur et le dé sur la table. Il demande aux élèves de décrire, pour chaque face, la position du point par rapport à la forme géométrique qui s'y trouve. Il donne ensuite la consigne suivante.

> Lance le dé et, suivant le dessin affiché, estampille ta feuille à un endroit adéquat.

Avant d'agir, il est important que l'élève explique ce qu'il a lu sur le dé et indique l'endroit où il va estampiller sa feuille.

À la fin de l'activité, le plateau de jeu peut être placé dans le classeur de l'élève, laissant ainsi une trace du travail.

Cette activité peut être simplifiée en remplaçant, dans un premier temps, le dé codé par le dé poissons.

1.3 L'étang

De quoi s'agit-il ?

Amener les élèves à placer des cartes poissons à l'intérieur ou à l'extérieur d'un étang en suivant des consignes orales.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel pour le groupe d'élèves

La comptine de la fiche 2 (page 84).

Un dessin représentant un étang (un exemple se trouve sur la fiche synthèse page 85).

Douze cartes poissons à décorer par les enfants en fonction du nom qui leur est donné dans la comptine (page 52).

Comment s'y prendre ?

L'enseignant commence par lire l'histoire aux enfants. Ensuite, ils l'analysent ensemble pour découvrir tous les poissons qui s'y cachent et en créer une représentation.

Lorsque les poissons sont décorés, l'enseignant place sur la table le plateau de jeu représentant l'étang, annonce qu'il va relire lentement l'histoire et donne la consigne suivante.

> Quand tu entends parler d'un poisson qui se trouve dans l'eau, prends son image et place-la à l'intérieur de l'étang. Si l'histoire parle d'un poisson se trouvant hors de l'eau, place le poisson correspondant à l'extérieur de l'étang.

Les élèves associent, chacun à leur tour, le poisson décrit par la comptine à sa représentation. À chaque phrase, un enfant prend l'image du poisson correspondant et la place à un endroit adéquat sur le plateau de jeu. Les élèves associent ainsi une information auditive à une représentation imagée.

Quand un élève place un poisson, les autres élèves l'observent et corrigent si nécessaire. Il est intéressant de montrer aux élèves qu'une multitude d'endroits correspondent à chaque information.

Remarquons que certains élèves ne perçoivent pas la surface de l'étang à la seule vue de son contour. Cependant colorier l'intérieur de l'étang dénaturerait l'activité puisque l'intérieur serait alors simplement apparenté à une couleur.

Dans la vie quotidienne, certaines consignes ne demandent pas d'être entendues entièrement pour être correctement appliquées. Quand on dit à l'élève de ranger les jouets « dans le bac », il n'est pas forcément attentif au mot « dans » lorsqu'il applique la consigne. La comptine proposée est écrite de manière à ce que l'élève ne puisse anticiper l'emplacement du poisson.

Nous avons choisi de travailler avec une comptine mais l'atelier peut être mené avec une histoire, une chanson, ... ce qui permet d'ajouter d'autres éléments.

À la fin de l'activité, l'enseignant réalise une fiche synthèse à partir du travail effectué en classe. Un exemple se trouve à la page 85. Cette fiche synthèse, accompagnée du texte de la comptine, prendra place dans le cahier de l'élève.

2 Itinéraires

Le but de l'activité est de favoriser l'appropriation de la notion d'ordre. Les élèves l'exercent ici au travers de tracés et de codages d'itinéraires.

2.1 Tracer un itinéraire et le coder

De quoi s'agit-il ?

Tracer un itinéraire à partir d'une bandelette et reconstituer une bandelette pour un itinéraire donné.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

La fiche 4 avec les six éléments marins (page 86) et un crayon.

Une bandelette-chemin (en annexe pages 53 à 56).

Les cartes représentant les six éléments marins (en annexe page 57).

Comment s'y prendre ?

Après avoir distribué à chaque enfant la fiche 4, l'enseignant montre une bandelette aux élèves. Il leur demande de « tracer » avec le doigt, sur leur feuille, un chemin qui suit l'ordre des éléments marins tels qu'ils apparaissent sur la bandelette. Cette étape, destinée à vérifier que tous les enfants comprennent la consigne, se fait collectivement.

Ensuite, l'enseignant distribue à chaque élève une bandelette et un crayon puis donne la consigne suivante.

Trace l'itinéraire qui suit l'ordre des éléments marins de ta bandelette.

L'enseignant s'assure que chaque itinéraire tracé soit clair pour que le chemin puisse être lu facilement par un autre enfant dans la suite de l'activité.

Après avoir éventuellement rectifié les itinéraires, l'enseignant retourne les bandelettes pour cacher la face dessinée. Il distribue les six cartes des éléments marins à chaque élève et donne la consigne.

Change de place avec ton voisin. Observe le chemin tracé sur la feuille que tu as devant toi. Place ensuite les cartes, dans l'ordre des éléments rencontrés sur ce chemin en partant du poisson.

Lorsque chaque élève a réalisé l'exercice, l'enseignant demande à chacun de retourner la bandelette qui se trouve devant lui afin de vérifier l'ordre des éléments marins (figure 1). Remarquons qu'un chemin dont les éléments seraient placés dans l'ordre correct mais de droite à gauche (figure 2) sera validé par l'enseignant. Dans ce cas, la bandelette qui sert à la vérification sera tournée pour faciliter la comparaison comme l'illustre la figure 3.

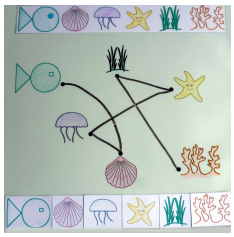


Fig. 1

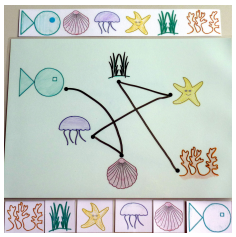


Fig. 2

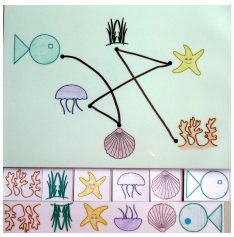


Fig. 3

À la fin de l'activité, chaque enfant place dans son cahier la feuille sur laquelle il a tracé un itinéraire et la bandelette correspondante. Par la suite, l'enseignant peut recommencer l'activité en utilisant par exemple des feuilles plastifiées et des feutres effaçables.

Échos des classes

Certains enfants placent les cartes sans tenir compte du chemin tracé mais uniquement de l'ordre dans lequel les dessins apparaissent sur la feuille en le lisant de gauche à droite (figure 4). L'enseignant veillera à rectifier si la vérification par la bandelette n'est pas suffisante.

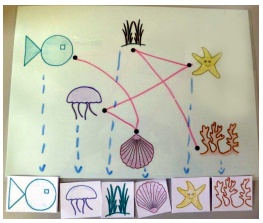


Fig. 4

2.2 Associer une bandelette à un itinéraire

De quoi s'agit-il ?

Retrouver parmi un ensemble de bandelettes celle qui correspond à un itinéraire tracé.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Trois bandelettes-chemin différentes (en annexe pages 53 à 56).

La fiche 4 avec les six éléments marins (page 86) sur laquelle l'enseignant a tracé préalablement un itinéraire correspondant à une des trois bandelettes. Les itinéraires seront différents pour chaque élève.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chaque élève la feuille qui lui est destinée ainsi que les trois bandelettes.

> Parmi les trois bandelettes que tu as devant toi, retrouve celle qui correspond à ton itinéraire sachant qu'il débute au poisson.

Une fois l'activité réalisée et corrigée par l'enseignant, les élèves remettent la bandelette avec les deux autres. Ils changent ensuite de place afin de refaire l'exercice avec un chemin différent, les chemins n'étant pas tous du même niveau de difficulté.

Échos des classes

À ce stade les élèves sont capables d'identifier parmi un ensemble de bandelettes celle qui correspond à un itinéraire. Par contre, face à une bandelette donnée, il leur est difficile de décider si elle correspond ou non au chemin tracé.

3 Au-dessus et en dessous

Dans les séances de psychomotricité, les élèves du maternel sont souvent invités à se placer « sur », « sous », ou « au-dessus », « en dessous » d'éléments divers. Dans les activités décrites ci-après, on amène les élèves à utiliser ces repères spatiaux dans d'autres contextes, en plaçant un objet dans une position relative par rapport à d'autres. Les notions « au-dessus » et « en dessous » sont introduites simultanément.

3.1 L'arche

De quoi s'agit-il ?

Placer une carte au-dessus ou en dessous d'un objet en fonction du code lu sur un dé.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel pour le groupe d'élèves

Plusieurs exemplaires des cartes représentant les six éléments marins (en annexe page 57).

Le dé « au-dessus/en dessous » (développement en annexe page 58).

Un objet représentant une arche sous-marine sur et sous lequel il est possible de placer des cartes (un exemple se trouve en annexe page 59). Cet objet peut être construit avec les élèves.

Comment s'y prendre ?

Dans un premier temps, l'activité se déroule sans dé. L'enseignant pose l'arche sous-marine au milieu de la table, il met les cartes des éléments marins en un tas et donne la consigne suivante.

> Prends une carte et place-la au-dessus ou en dessous de l'arche suivant ce que je te dis.

L'élève prend une carte du tas. L'enseignant indique si la carte doit être placée « au-dessus » ou « en dessous » de l'arche. L'élève dépose sa carte en exprimant son action qui est alors validée collectivement.

Après un premier tour de table, l'enseignant poursuit en intégrant le dé « au-dessus/en dessous ». Il commence par identifier, avec les élèves, les différentes faces. Sur deux d'entre elles, un poisson se trouve au-dessus d'une ligne, sur deux autres faces, le poisson est dessiné en dessous de la ligne. Quant aux deux dernières faces, elles sont neutres, seul le poisson est représenté, laissant l'élève choisir « au-dessus » ou « en dessous ». Il est important de préciser aux élèves qu'il s'agit de décrire la position du poisson par rapport à la ligne et non l'inverse. L'enseignant donne la consigne suivante.

> Prends une carte « éléments marins » puis lance le dé. En fonction du dessin lu sur la face du dé, dépose ta carte au-dessus ou en dessous de l'arche, tout en décrivant ton action. Si la face du dé ne donne aucune indication, choisis l'endroit où tu souhaites la placer en annonçant ce choix aux autres élèves.

Les élèves jouent à tour de rôle. En fonction de la carte tirée et de la face du dé, l'explication de l'élève pourrait ressembler à : *j'ai pris le corail et je le mets au-dessus de l'arche* ou encore *je place la méduse en dessous de l'arche.*

L'enseignant peut décider qu'un élève lance le dé et le décode tandis que le suivant place la carte au bon endroit. Si le nombre d'élèves dans le groupe est un nombre pair, il faut veiller à inverser les rôles à chaque tour.

Notre objectif étant d'apprendre aux élèves à distinguer des positions et non pas à maîtriser du vocabulaire, dans les explications qu'ils fournissent, nous avons choisi de ne pas insister sur la différence entre « sur » et « au-dessus de » ni entre « sous » et « en dessous de ».

Échos des classes

Des élèves, ayant vu « sous » d'après le dé, placent leur carte sous le tas de cartes sous l'arche. Ce comportement inattendu n'entrave pas l'activité.

Chez les petits, certains ne s'exprimant pas encore de manière compréhensible, ils se contentent de prendre une carte et de la placer au bon endroit. Néanmoins, il est important que l'enseignant incite l'élève à verbaliser l'action réalisée.

Des élèves disent « en dessus » et « au-dessous ». C'est alors l'action liée à la parole qui permet de voir si la notion est comprise ou non par rapport à l'indication du dé.

C'est un plaisir pour les élèves de choisir la position grâce à la face du dé qui le permet.

3.2 Construction de tours

De quoi s'agit-il ?

Construire des tours composées de trois blocs de couleurs différentes, à partir d'informations comportant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » et « entre ».

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Trois blocs de jeu de construction de couleurs différentes. Dans notre exemple, nous utilisons un bloc bleu, un rouge et un vert.

Comment s'y prendre ?

Les notions « sur » et « sous » sont travaillées d'abord séparément puis simultanément.

L'enseignant donne à chaque élève un bloc de chaque couleur. Il donne une première consigne.

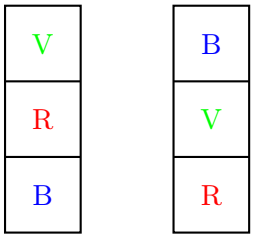
> Construis une tour à l'aide de ces trois blocs et dépose-la devant toi.

Cette première consigne a pour seul objectif de vérifier que la notion de tour correspond pour tous à un empilage vertical des trois blocs. La consigne est ensuite précisée.

> Construis une tour de trois blocs dans laquelle le bloc vert se trouve sur le bloc rouge.

Chaque élève construit une tour puis la dépose sur la table. L'enseignant vérifie avec les élèves que l'information donnée a bien été respectée.

Deux tours différentes peuvent apparaître : une tour « bleu-rouge-vert » et une tour « rouge-vert-bleu ». Si l'une de ces tours n'est pas représentée, l'enseignant la construit et la dépose à côté des autres tours. Les élèves constatent que deux « modèles » sont possibles et devraient prendre conscience qu'une instruction supplémentaire est nécessaire pour que toutes les tours soient identiques.



L'enseignant précise alors sa consigne.

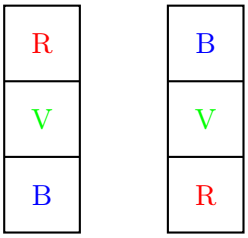
> Construis une tour dans laquelle le bloc vert est sur le bloc rouge et où le bloc rouge est sur le bloc bleu.

Une fois les tours construites et les constructions vérifiées, l'enseignant donne une nouvelle consigne en modifiant l'ordre des couleurs. D'autres constructions sont ensuite proposées en utilisant uniquement le mot « sous ». Pour chaque construction, l'enseignant peut donner la première partie de la consigne et attendre que les élèves la réalisent avant de donner la seconde partie de la phrase.

Par après, l'enseignant donne des consignes comportant les deux notions simultanément comme *construis une tour dans laquelle le bloc bleu est sur le bloc vert et sous le bloc rouge*. Un élève pourrait dire que, dans ce cas précis, le bloc bleu est « entre » les blocs rouge et vert. Cette remarque fait le lien avec la consigne suivante.

> Construis une tour où le bloc vert se trouve entre le bloc rouge et le bleu.

Les élèves déposent leur tour sur la table afin de les comparer. Deux modèles de tours répondent aux informations données à savoir bleu-vert-rouge et rouge-vert-bleu. L'enseignant amène les élèves à comprendre qu'une information complémentaire est nécessaire à la construction de tours identiques. Sa consigne devient alors la suivante.



> Construis une tour où le bloc vert se trouve entre le bloc rouge et le bleu, et où le bloc vert est sous le bloc bleu.

Chaque élève modifie sa tour s'il le juge nécessaire, en fonction de l'information supplémentaire entendue. Sur la table, toutes les tours devraient être identiques.

Échos des classes

Les élèves s'attachent toujours à construire leur tour en déposant les blocs sur leur base. Ainsi pour la dernière consigne, lorsque leur tour ne respecte pas la deuxième contrainte, ils reconstruisent la tour plutôt que de la retourner.

3.3 Description de tours

De quoi s'agit-il ?

Décrire des tours composées de trois blocs de couleurs différentes, en donnant des informations comportant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » et « entre ».

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Les trois blocs de couleurs différentes.

Comment s'y prendre ?

Les élèves se munissent de leurs trois blocs. L'enseignant propose à un élève « architecte » de construire, à l'abri du regard des autres, une tour de trois blocs. Puis il lui donne la consigne suivante.

> Décris ta tour en utilisant les mots « sur », « sous », « entre » pour que tes copains puissent construire chacun une tour identique à la tienne.

Des informations redondantes ou contradictoires pourraient être formulées. Une information redondante comme *le bloc rouge est sur le bloc vert* suivie de *le bloc vert est sous le bloc rouge* ne permet pas d'avancer dans la construction. Des informations contradictoires telles que *le bloc rouge est sur le bloc vert* et *le bloc vert est sur le bloc rouge* rendent la construction impossible.

L'enseignant sera attentif à ce que l'élève exprime toujours la position d'un bloc par rapport à un autre ou par rapport à la table. Dire *le bloc rouge est au-dessus* n'est pas complet, même si l'on comprend bien que, pour l'élève, cela veut dire que le bloc rouge est au sommet de la tour.

Lorsque tous les enfants ont construit leur tour, toutes les tours sont déposées sur la table. Les vérifications et corrections peuvent alors s'effectuer. L'activité est ensuite répétée plusieurs fois pour que chaque élève puisse prendre le rôle de l'architecte.

Échos des classes Malgré la précision de la consigne, certains élèves décrivent spontanément leur tour avec des phrases telles que *il y a d'abord le bloc vert, puis le rouge et puis le bleu.* L'enseignant rappelle alors que la tour doit être décrite en utilisant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » ou « entre ».

3.4 Description de tours avec contrainte

De quoi s'agit-il ? Décrire des tours de trois blocs en utilisant exclusivement certains mots pour indiquer les positions relatives des blocs.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Les trois blocs de couleurs différentes.

Matériel pour le groupe d'élèves

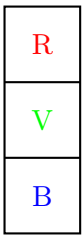
Le dé « au-dessus/en dessous » (développement en annexe page 58).

Comment s'y prendre ? L'enseignant demande à un élève de construire une tour de trois blocs à l'abri du regard des autres. Il demande à un autre élève de lancer le dé « au-dessus/en dessous » puis donne à l'élève architecte la consigne suivante.

> Si le poisson est au-dessus de la ligne, utilise uniquement les mots « sur » ou « au-dessus » pour décrire ta tour.
> Si le poisson est en dessous de la ligne, utilise uniquement le mot « sous » ou « en dessous ».
> Si la face du dé n'indique pas de position pour le poisson, les mots « sur » (ou « au-dessus ») et « sous » (ou « en dessous ») doivent être utilisés dans tes informations.

L'élève architecte donne des renseignements aux autres élèves en respectant les informations données par les faces du dé afin que chacun d'eux construise une tour identique à la sienne. Les indications peuvent être données en plusieurs phrases avec un temps d'arrêt marqué entre les informations. Un exemple est décrit ci-dessous.

- La face du dé indique « sur » : le bloc rouge est sur le bloc vert et le bloc vert est sur le bloc bleu.
- La face du dé indique « sous » : le bloc vert est sous le bloc rouge et le bloc bleu est sous le bloc vert.
- La face du dé n'indique pas de position : le bloc vert est sous le bloc rouge et sur le bloc bleu.



Lorsque chaque élève a construit sa tour et l'a déposée sur la table, la tour cachée est dévoilée et on procède à la vérification. On répète l'activité pour que chaque élève ait l'occasion de prendre le rôle de l'architecte.

Chapitre 2

Reconnaissance de formes

De quoi s'agit-il ?

Assembler des cartes pour créer des figures ayant une symétrie axiale.

Associer une face plane d'une boîte à son empreinte.

Paver des carrés à l'aide de rectangles, carrés et triangles rectangles de différentes dimensions.

Enjeux

Reconnaître des figures qui présentent une symétrie d'axe vertical.

Retrouver l'image d'une figure par symétrie axiale.

Identifier différentes formes géométriques par l'analyse informelle de leurs caractéristiques.

Reconnaître l'équivalence de surfaces obtenues par différents assemblages de formes.

1 Symétrie

De quoi s'agit-il ?

Reconstituer des figures géométriques en respectant une symétrie axiale.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel pour le groupe d'élèves

Les 32 cartes « solo » et les 64 cartes « duo » en annexe pages 60 à 65.

Comment s'y prendre ?

À partir d'un jeu de cartes « solo » d'une seule couleur, l'enseignant reconstitue sur la table toutes les paires symétriques telles que présentées dans l'annexe. Il laisse aux élèves un temps d'observation et puis leur pose la question suivante.

> Pourquoi ai-je placé à chaque fois les cartes par deux de cette manière ?

L'objectif est de permettre aux élèves de se familiariser avec les cartes symétriques. L'enseignant propose aux enfants de parler de « cartes amies » pour désigner les paires symétriques.

Devant les élèves, l'enseignant reprend une carte de chaque paire et reconstitue des paires dont certaines sont symétriques et d'autres pas. Il demande d'indiquer les paires symétriques et de justifier pourquoi les autres ne le sont pas ; il récupère au fur et à mesure les paires non symétriques. Ensuite, après avoir reconstitué les paires symétriques, il prend une carte de chaque paire, parfois celle de gauche, parfois celle de droite. Il mélange les cartes collectées et les dispose en une pile devant les élèves puis donne la consigne.

> Prends la première carte de la pile et place-la à côté de sa carte amie pour reconstituer les formes que nous venons de découvrir.

Les élèves réalisent un assemblage chacun à leur tour. Les figures 5 à 8 illustrent quatre façons d'assembler des cartes de manière symétrique. Seule la première satisfait pleinement la consigne donnée car, telle qu'elle a été présentée, l'activité privilégie les figures d'un seul tenant.

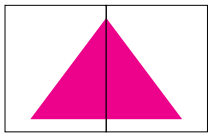


Fig. 5

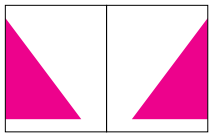


Fig. 6

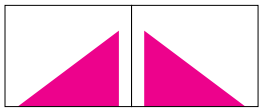


Fig. 7

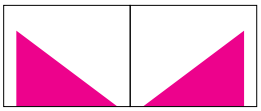


Fig. 8

Une fois qu'ils sont capables de reconstituer des paires symétriques, l'enseignant intègre les huit paires de cartes « solo » de l'autre couleur. Il dispose sur la table une carte de chacune des seize paires et empile les cartes restantes. Il donne alors la consigne suivante.

> Prends la première carte de la pile et place-la à côté de sa carte amie pour reconstituer des formes d'une seule couleur.

L'enseignant peut réaliser la même activité plusieurs fois tout au long de l'année en la complexifiant grâce aux cartes « duo » d'une couleur et de deux couleurs.

Échos des classes La perception de la symétrie d'une figure est déjà très présente intuitivement chez les élèves. Ils arrivent d'emblée à reconnaître des paires symétriques et des paires qui ne le sont pas. La difficulté de l'activité réside principalement dans l'identification de la carte amie.

2 Empreintes

Avant de commencer l'activité, l'enseignant explique ce qu'est une empreinte. Il peut en faire la démonstration en enduisant de peinture une face plane d'une boîte et en l'appliquant sur une feuille de papier. Par la suite, il montre qu'on peut obtenir le même effet en contournant cette face de la boîte et en coloriant l'intérieur de la forme ainsi tracée. Ce sont les surfaces ainsi obtenues que nous appellons « empreintes » dans cette activité.

Nous travaillons uniquement avec les empreintes de faces planes, l'objet ne peut ainsi ni glisser ni rouler lorsqu'on trace le contour d'une face. Par exemple, les seules empreintes d'un cylindre

prises en considération seront des disques. Remarquons que des empreintes assez différentes, non planes, sont obtenues en enfonçant des objets dans du sable par exemple. Ces dernières ne font pas l'objet de cette activité.

De quoi s'agit-il ?

Identifier des formes géométriques via des empreintes de faces planes de solides.

Reconnaître un carré, un triangle, un rectangle, un disque.

Associer chacune de ces figures à une face plane d'un solide et ce, quelle que soit sa position et la longueur de ses côtés.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel pour le groupe d'élèves

Un ensemble de boîtes, au moins deux boîtes de plus que le nombre d'élèves du groupe, et si possible deux boîtes différentes ayant une empreinte commune. Par exemple : prismes droits à bases triangulaires, à bases hexagonales ou octogonales, à bases carrées, pyramides, boîtes cylindriques, boîtes à base ovale. Un échantillon de dix boîtes permet de nombreuses comparaisons intéressantes (exemple en annexe page 59).

Des feuilles blanches, des feutres, des crayons de couleur.

Les empreintes différentes des faces de toutes les boîtes, dessinées sur des grandes feuilles, les différentes empreintes d'une même boîte ne se trouvant pas toutes sur la même feuille.

Quatre formes de papier fort de couleurs différentes : un carré, un rectangle, un triangle équilatéral et un disque. Des gommettes de même couleur que ces formes.

2.1 Empreintes libres

De quoi s'agit-il ?

Faire découvrir aux élèves différentes formes obtenues par des empreintes de boîtes.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant dépose les boîtes en vrac sur la table, afin qu'elles ne soient pas toutes présentées dans une position habituelle. Il choisit une boîte et réalise sur une feuille l'empreinte d'une de ses faces en la contournant à l'aide d'un feutre et en coloriant l'intérieur de son tracé. Il insiste sur le fait que l'empreinte d'une face correspond à toute la surface colorée et non à son contour. L'enseignant distribue quelques feuilles et un feutre à chaque élève puis donne la consigne suivante.

Choisis une boîte et dessine des empreintes.

Les élèves devraient dessiner plusieurs empreintes en plaçant leur boîte de différentes manières sur leur feuille. Par exemple, une boîte en forme de prisme droit à bases triangulaires peut donner des empreintes triangulaires et des empreintes rectangulaires. Si nécessaire, l'enseignant encourage l'élève à dessiner plus qu'une seule empreinte, dans la mesure du possible, sans pour autant lui demander de les dessiner toutes.

Si un élève dessine deux empreintes identiques, c'est l'occasion de faire remarquer que les faces correspondantes de la boîte sont identiques. Cette première manipulation a pour but de familiariser l'élève avec la notion d'empreinte et non de trouver toutes les empreintes possibles d'une même boîte.

2.2 Association

De quoi s'agit-il ? Associer des faces planes de boîtes à des formes géométriques à partir de leurs empreintes.

Comment s'y prendre ? L'enseignant place sur la table les grandes feuilles sur lesquelles sont dessinées les empreintes de toutes les faces des boîtes présentées aux élèves. Il donne la consigne suivante.

> Choisis une boîte puis retrouve ses différentes empreintes.

À tour de rôle, chaque élève choisit une boîte, regarde une de ses faces et cherche l'empreinte qui lui correspond. Il dépose alors la boîte sur cette empreinte. Si l'association est correcte, la boîte se positionne exactement sur l'empreinte. La vérification est faite par le groupe puis l'élève poursuit en choisissant une autre face de la même boîte. Lorsque l'élève, aidé par le groupe, a trouvé toutes les empreintes possibles de sa boîte, la boîte est retirée de la table.

La démarche inverse est travaillée ensuite. L'enseignant montre une empreinte dessinée et donne la consigne.

> Montre la face d'une boîte qui correspond à cette empreinte et vérifie ton choix.

L'élève choisit une boîte et montre une face du solide qui correspond à l'empreinte. L'élève vérifie son choix en déposant la face de la boîte choisie sur l'empreinte. La boîte est ensuite remise avec les autres boîtes. Puis, c'est l'élève qui a trouvé une boîte correcte qui désigne une empreinte pour le suivant.

Si l'échantillon de boîtes le permet, l'enseignant peut faire trouver aux élèves deux boîtes ayant une face qui donne la même empreinte. Ces deux faces sont alors identiques, on peut les « coller » l'une contre l'autre.

2.3 Ressemblance

De quoi s'agit-il ? Associer la face d'une boîte à une figure géométrique, quelles que soient ses dimensions.

Comment s'y prendre ? L'enseignant dispose sur la table les différentes boîtes, les gommettes et les quatre formes de couleur représentant un carré, un triangle, un rectangle et un disque, puis donne les consignes suivantes.

Choisis une boîte et montre une de ses faces. Si possible, identifie cette face à l'une des figures géométriques proposées. Prends une gommette de même couleur que la figure et applique-la sur la face indiquée.

Chacun à son tour, un élève montre une face et repère la figure correspondante parmi les formes se trouvant sur la table. De ce fait, il apprend à observer la forme d'une figure indépendamment de ses mesures, et indépendamment du solide. Lorsqu'il a placé une gommette sur une face identifiée, il replace la boîte sur la table. Si l'élève montre une face plane qui ne correspond à aucune figure de référence, il ne met pas de gommette et explique pourquoi. L'élève suivant choisit une face, sur la même boîte ou sur une autre, et fait le même exercice.

Deux faces avec des gommettes de même couleur sont associées à une même figure, mais ne sont pas pour autant superposables. Une boîte parallélépipédique ayant six gommettes de la même couleur sera soit un cube (composé de faces carrées identiques) soit un parallélépipède rectangle (composé de paires de rectangles identiques).

Notons pour l'enseignant que, si les faces carrées ou circulaires sont bien semblables[1] à la figure de référence, il n'en est pas de même pour les rectangles qui, eux, peuvent être très différents : il y a des rectangles « très allongés » et des rectangles « presque carrés ». Il est important de montrer aux élèves que les faces rectangulaires d'une même boîte peuvent être très différentes bien qu'elles soient identifiées par une gommette de même couleur.

L'activité peut également se faire en sens inverse à savoir, choisir une figure géométrique et chercher une face de boîte qui lui correspond.

Échos des classes

Lorsque les élèves participent à deux activités successivement, ils reprennent systématiquement la boîte choisie lors de la première activité pour réaliser la deuxième. L'enseignant peut intervenir en encourageant chacun à prendre une boîte différente.

Si les empreintes dessinées sur papier par l'enseignant ne sont pas coloriées, elles sont perçues par les élèves comme un contour et non une surface et donc plus difficilement associées à une face.

3 Puzzles

Les activités sont menées à partir de cartes représentant des poissons et de formes géométriques qui permettent de les paver.

Les poissons ont des corps carrés, placés tantôt sur un côté, tantôt sur une pointe. On parlera de cartes « poisson-côté » lorsque le carré est placé de manière à ce que les bords du corps soient parallèles aux bords de la carte, et de cartes « poisson-pointe » lorsque le carré est placé sur sa pointe.

Nous avons choisi de paver deux carrés identiques mais placés différemment sur une carte car les pavages qui en résultent montrent par exemple aux élèves qu'un rectangle n'est pas toujours positionné verticalement ou horizontalement. Le fait que l'élève soit confronté, dès son jeune âge,

[1] Deux figures sont semblables si l'une est l'agrandissement ou le rétrécissement de l'autre. Les angles correspondants sont alors égaux et le rapport des longueurs correspondantes est constant. Par exemple, un dessin à l'échelle est semblable à l'original.

à l'image d'un carré sur pointe, l'amène à le reconnaître quelle que soit sa position et à ne pas confondre, plus tard, un carré sur pointe et un losange.

Les assemblages possibles sont les mêmes pour les deux types de cartes. Cependant, les pièces fournies à l'élève pour paver un poisson-côté ou un poisson-pointe sont choisies pour l'obliger à placer certaines pièces dans des positions qui ne lui sont pas familières.

Pour chaque type de cartes on distingue :
- des cartes « contour » qui reprennent uniquement le contour du poisson ;
- des cartes « pièces » sur lesquelles les contours des pièces et un œil sont dessinés ;
- des cartes « œil » sur lesquelles seul l'œil du poisson est dessiné.

Ces différentes cartes sont illustrées en figure 9. Le matériel est conçu de telle sorte que la queue du poisson soit un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse[2] est de même mesure que la longueur des côtés du carré qui forme le corps. Ce n'est pas toujours en plaçant l'angle droit d'un triangle dans un coin du carré que l'on trouve une solution.

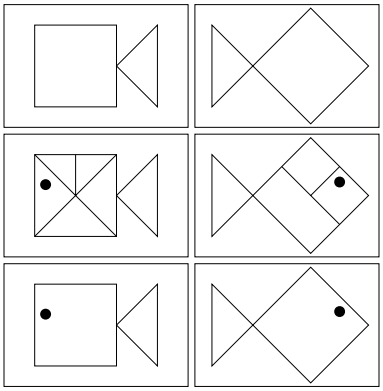


Fig. 9

Le but de cette activité est d'observer les différentes caractéristiques des figures et de les comparer par superposition afin que l'assemblage des pièces des puzzles ne se fasse pas uniquement par essais et erreurs.

3.1 Puzzle poisson-contour

De quoi s'agit-il ? Paver des cartes poissons, à partir de pièces géométriques données.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Les cartes « contour » de la page 66 : trois cartes « poisson-côté » et trois cartes « poisson-pointe ».

Les pièces de la page 74 réparties dans deux enveloppes : l'une pour le type poisson-côté contenant les trois grands triangles verts, quatre triangles moyens bleus, trois carrés rouges et quatre petits triangles jaunes ; l'autre pour le type poisson-pointe contenant les trois rectangles orange, six triangles moyens bleus, un carré rouge et quatre petits triangles jaunes.

Pour rationaliser la confection du matériel, l'enseignant qui le souhaite pourra reproduire les différentes pièces nécessaires pour un groupe de cinq élèves[3] en imprimant sur feuilles de couleur les gabarits fournis en annexe pages 76 à 81. Les pièces avec œil qui s'y trouvent seront utilisées pour les autres puzzles.

[2] L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.
[3] Il y a sur certaines feuilles quelques pièces excédentaires qui peuvent servir en cas de perte.

Comment s'y prendre ?

L'activité se déroule en deux temps. Dans un premier temps, chaque élève reçoit trois cartes poisson-côté et les pièces géométriques de l'enveloppe correspondante. Le nombre de pièces permet de recouvrir exactement les trois poissons. L'enseignant invite les élèves à observer les pièces qu'ils ont reçues dans l'enveloppe. L'observation de ces figures permet de voir que chacune d'elles possède au moins un angle droit et que certaines ont des côtés de même longueur.

L'enseignant donne la consigne suivante.

> Recouvre entièrement les trois poissons en utilisant les formes que tu as reçues.

L'enseignant précise aux élèves que les pièces ne peuvent ni se superposer ni sortir du contour du poisson comme à la figure 10 et que, de ce fait, il est parfois nécessaire de modifier l'emplacement des pièces comme à la figure 11. Le dépassement du contour ne sera peut-être pas perceptible par tous les élèves d'autant plus que certaines pièces sont petites. L'enseignant y sera donc attentif.

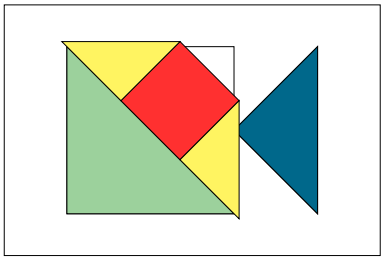


Fig. 10

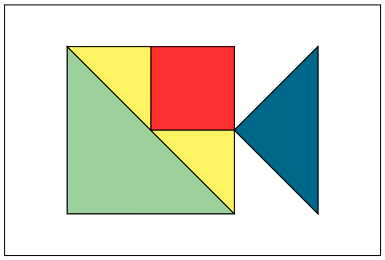


Fig. 11

Le remplissage s'effectue librement et les combinaisons de pièces sont multiples. La queue, par exemple, peut être constituée d'un triangle moyen bleu ou de deux petits triangles jaunes.

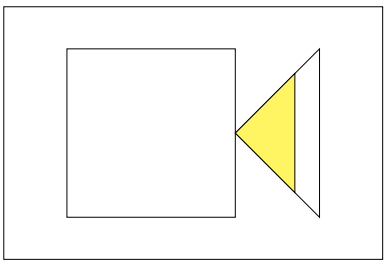


Fig. 12

Si un élève n'a plus de triangle bleu pour recouvrir la queue, mais qu'il lui reste des petits triangles jaunes, le premier réflexe est de superposer l'angle droit du petit triangle jaune sur l'angle droit de la queue du poisson (figure 12). Dans ce cas, il n'est pas possible de terminer le recouvrement.

Les pièces géométriques sont conçues de manière à ce que l'élève puisse assembler deux petits triangles jaunes pour former un triangle moyen bleu ou un carré rouge, comme l'illustrent les figures 13 et 14.

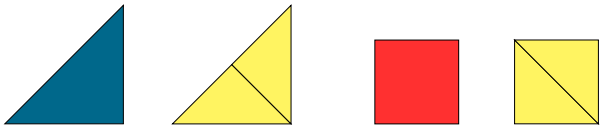


Fig. 13

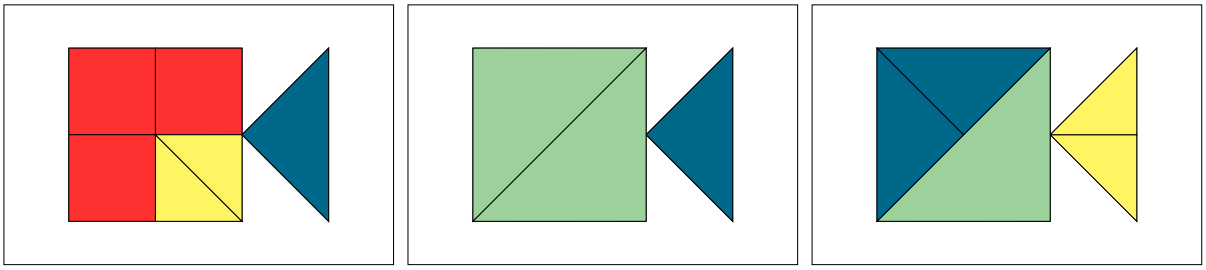


Fig. 14

Certains élèves se retrouveront peut-être dans une situation semblable à celle de la figure 15, laquelle nécessite l'exploitation des équivalences pour réarranger les pièces au sein du dernier poisson, comme le montre la figure 16.

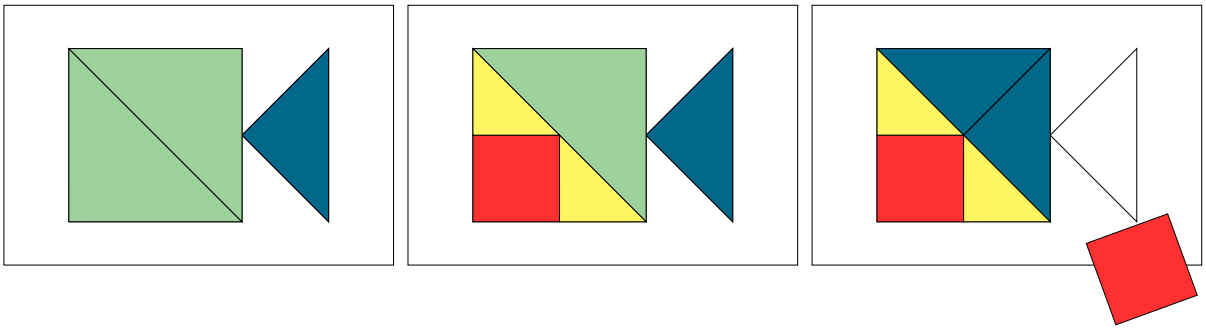


Fig. 15

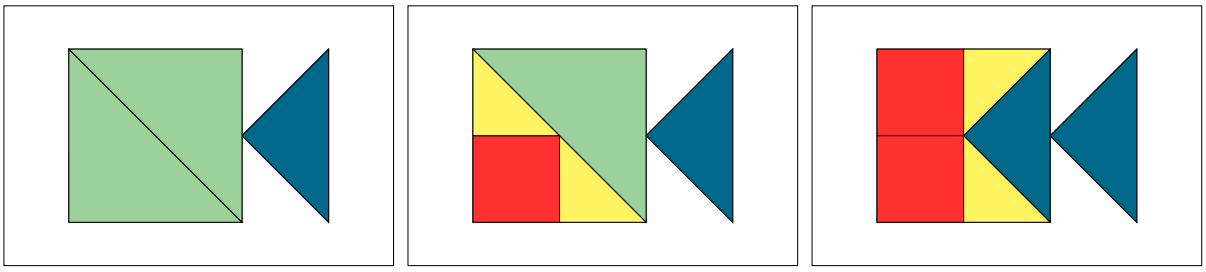


Fig. 16

Il peut aussi arriver qu'un élève ne puisse pas terminer l'exercice car les pièces qui lui restent ne lui permettent pas de paver entièrement le dernier poisson, comme dans la figure 17. Il est important que l'enseignant s'accorde avec l'élève sur l'impossibilité de terminer le travail en conservant les puzzles déjà finalisés. Il encourage alors l'élève à débloquer la situation en échangeant des pièces avec les poissons déjà complétés, ce qui implique une déconstruction partielle du travail déjà accompli. Dans notre exemple en figure 17, une solution consiste à rassembler deux grands triangles verts dans le corps d'un même poisson et les trois carrés rouges avec deux petits triangles jaunes dans le corps d'un autre. On obtient ainsi les puzzles de la figure 18.

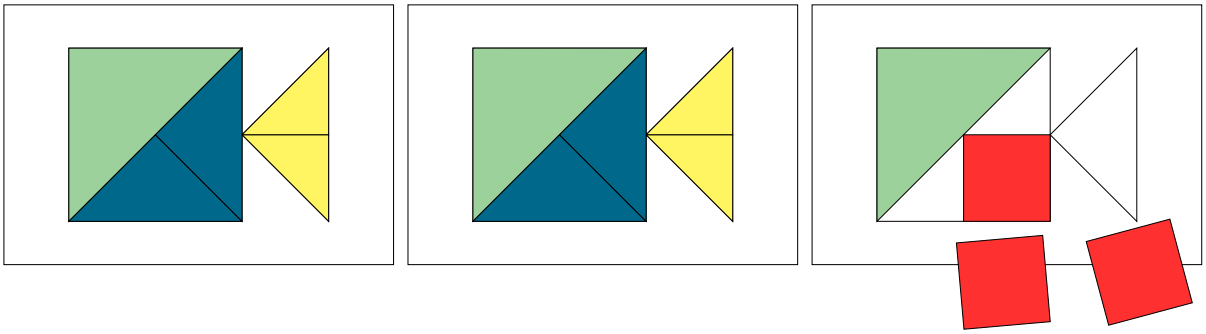


Fig. 17

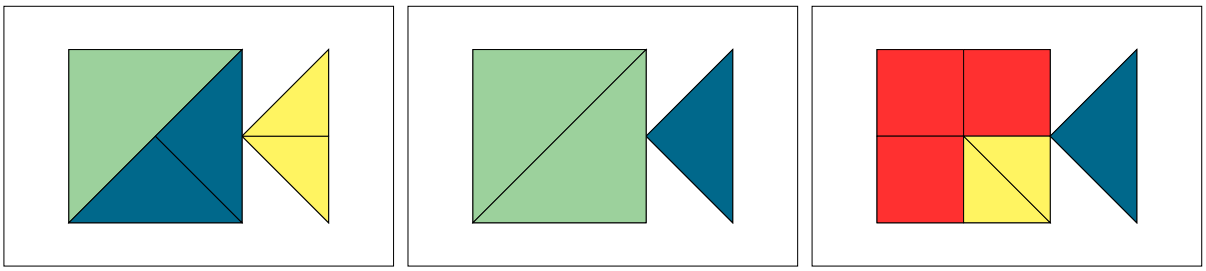


Fig. 18

Lorsque tous les poissons ont été pavés, chaque enfant garde les cartes poisson-côté, range toutes ses pièces dans l'enveloppe et la rend à l'enseignant. Ce dernier distribue à chaque élève trois cartes poisson-pointe. Il observe avec eux les ressemblances et différences entre les deux types de cartes puis ramasse les cartes poisson-côté.

Il distribue les enveloppes correspondant aux cartes poisson-pointe et donne une consigne identique à la précédente.

Recouvre entièrement les trois poissons en utilisant les formes que tu as reçues.

Comme pour les cartes poisson-côté, plusieurs assemblages sont possibles, un échange de pièces est parfois un passage obligé pour paver les trois poissons et la nécessité d'assembler de petits triangles jaunes peut apparaître plusieurs fois (voir figures 19 et 20).

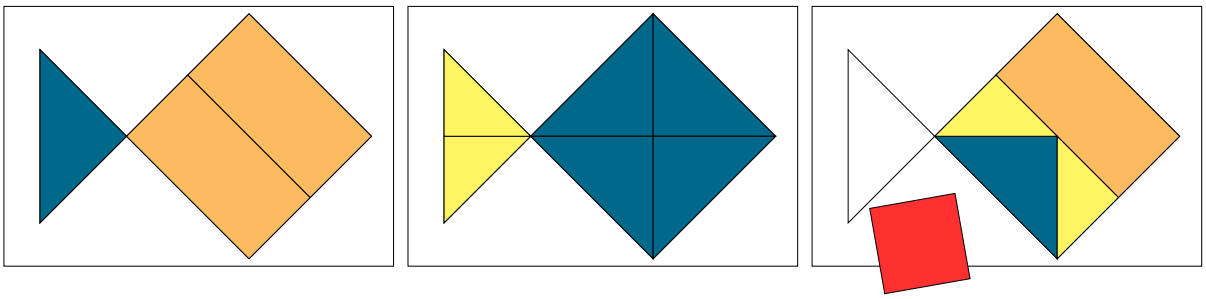


Fig. 19

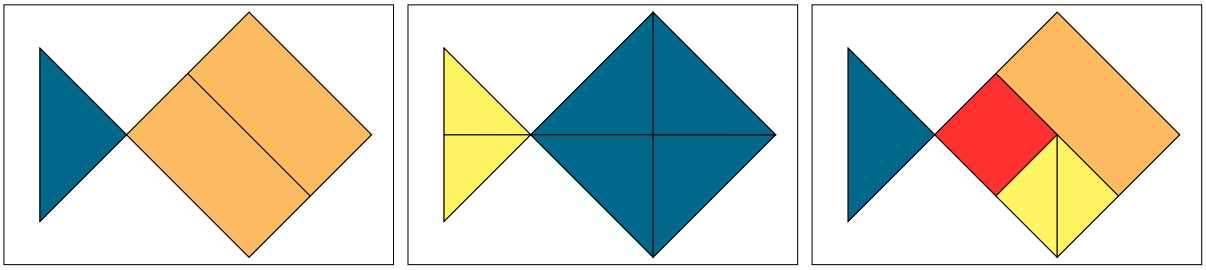


Fig. 20

Échos des classes

Certains élèves laissent des espaces non recouverts et ce, malgré la consigne qui précise de recouvrir entièrement chaque poisson.

Tous les élèves n'utilisent pas la même stratégie pour construire les poissons. Certains commencent par placer toutes les queues, d'autres recouvrent un poisson à la fois, d'autres encore placent des pièces sur chaque poisson sans logique apparente.

Dans la majorité des cas, les élèves placent d'abord les grandes pièces – rectangles orange ou grands triangles verts – et placent les angles droits des pièces dans les coins du carré qui représente le corps du poisson.

Lorsqu'un élève a placé les trois grands triangles verts, dont deux sur un même poisson, une remarque souvent émise est qu'*il manque des pièces*, qui sous-entend qu'il n'y a plus de grand triangle vert pour couvrir entièrement un deuxième poisson, ce qui le mène à chercher parmi les pièces qui lui restent de quoi remplacer la pièce manquante.

3.2 Puzzle poisson-pièces

De quoi s'agit-il ?

Couvrir le puzzle du poisson en respectant les pièces dessinées et l'emplacement de l'œil.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Les douze cartes « pièces » : six « poisson-côté » et six « poisson-pointe », des pages 68 à 73.

Les pièces géométriques de la page 75. Il s'agit des mêmes pièces que celles du Puzzle poisson-contour, mais certaines ont un œil (trois grands triangles verts dont deux modèles différents avec œil, trois rectangles orange dont un avec œil, dix triangles moyens bleus dont un avec œil, quatre carrés rouges dont deux avec œil et huit petits triangles jaunes).

Pour la facilité de la distribution des pièces, elles peuvent avoir été groupées préalablement dans une enveloppe pour chaque élève.

Pour les enseignants qui souhaitent imprimer les pièces avec œil sur feuilles de couleur, les gabarits sont en annexe pages 79 à 82.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue les six cartes poisson-côté et les pièces géométriques. Chaque enfant étale devant lui les cartes reçues et toutes les pièces. L'enseignant veillera à ce que chaque élève dispose d'un espace suffisant. Il fait remarquer la présence d'un œil sur une face de certaines pièces et insiste pour que l'œil soit toujours apparent.

> Recouvre tous les poissons avec les formes, en respectant le dessin proposé.

Respecter ce qui est dessiné c'est tenir compte de l'emplacement de l'œil et des pièces pour chaque poisson. Le fait de proposer des poissons subdivisés donne aux élèves des images de configurations qu'ils n'ont peut-être pas rencontrées lors de l'activité Puzzle poisson-contour et les oblige à développer des stratégies qu'ils n'auraient peut-être pas utilisées. En outre, le Puzzle poisson-pièces fournit des pistes qui seront exploitables pour réaliser les puzzles suivants, notamment pour disposer judicieusement les pièces avec œil.

La même activité est ensuite proposée avec les six cartes poisson-pointe.

3.3 Puzzle poisson-œil

De quoi s'agit-il ?

Paver des cartes poissons sans subdivisions préalables, à partir de pièces données, en tenant compte de la position de l'œil.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Six cartes « œil » : trois « poisson-côté » et trois « poisson-pointe » (modèles en page 67).

Les pièces géométriques sont les mêmes que celles en page 75 du Puzzle poisson-pièces (trois grands triangles verts dont un de chaque modèle avec œil, trois rectangles orange dont un avec œil, dix triangles moyens bleus dont un avec œil, quatre carrés rouges dont deux avec œil et huit petits triangles jaunes).

Comme pour les puzzles précédents, ces pièces peuvent être rassemblées dans une enveloppe pour chaque élève.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève étale devant lui les six cartes. La position des cartes sur la table n'a pas d'importance : le poisson peut regarder à droite ou à gauche, son œil peut être situé vers le haut ou vers le bas, ... L'enseignant donne alors la consigne suivante.

> Recouvre tous les poissons avec les formes reçues en plaçant l'œil correctement.

Plusieurs manières de reconstituer les poissons sont envisageables. Soit l'élève commence par les pièces comportant un œil et recouvre l'œil des six poissons avant de poursuivre. Soit il complète un poisson à la fois, ou encore, il reconstitue les poissons de manière plus aléatoire en plaçant des pièces sur plusieurs poissons en même temps.

L'emplacement de l'œil, sur les deux grands triangles verts, n'est pas le même. Ces deux pièces se placent donc de manières différentes (figure 21).

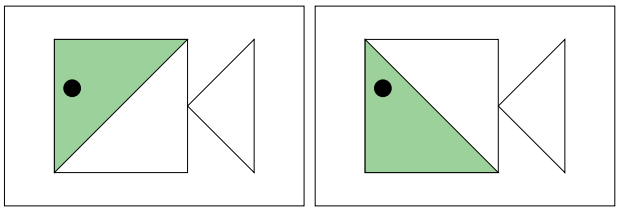


Fig. 21

Comme avec le Puzzle poisson-contour, un élève peut se trouver dans une situation où, pour paver le dernier poisson, il doit déconstruire un puzzle déjà complété pour achever l'exercice. La figure 22 en est une illustration.

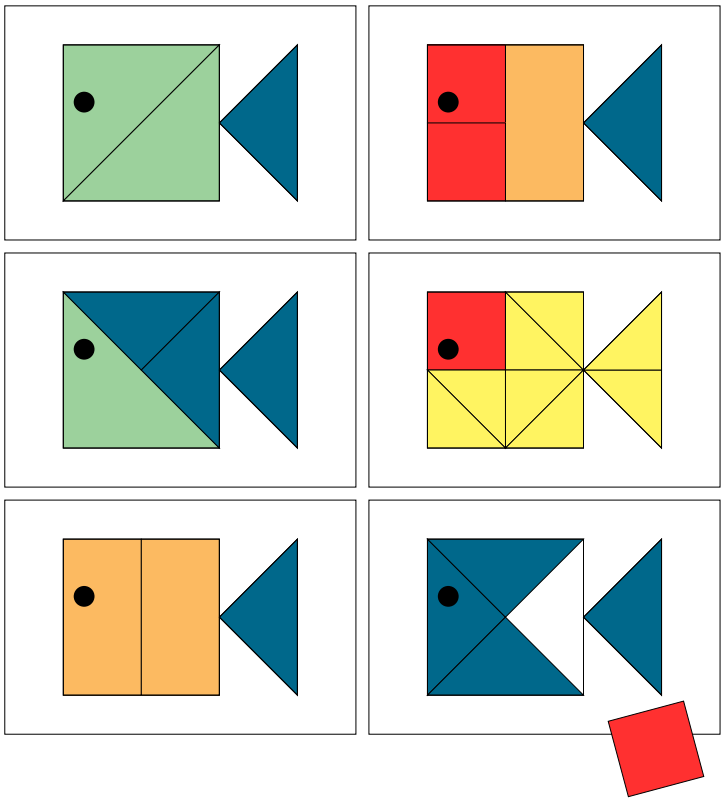


Fig. 22

Échos des classes

Ne tenir compte que de l'emplacement de l'œil n'est pas suffisant. Un élève peut placer une pièce qui respecte bien la position de l'œil mais qui ne permet pas de poursuivre comme l'illustre la figure 23.

Il arrive qu'un élève place une pièce « œil » au mauvais endroit sans s'en apercevoir car, une fois la pièce posée, l'œil du poisson n'est plus visible. Il suffit alors, à l'enseignant, de faire glisser légèrement la pièce pour faire la vérification (figure 24).

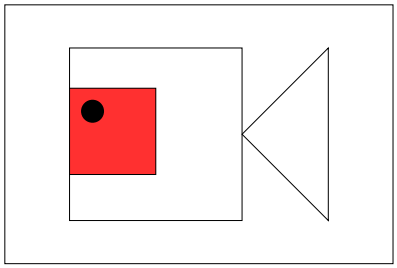


Fig. 23

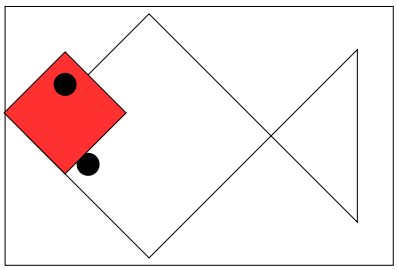


Fig. 24

3.4 Puzzle avec contrainte

De quoi s'agit-il ?

Compléter le puzzle du poisson en respectant une contrainte sur le nombre de pièces ou les couleurs.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel par élève

Une carte contour de « poisson-côté » ou « poisson-pointe » de la page 66.

Une enveloppe contenant les pièces géométriques sans œil du Puzzle poisson-contour en page 74 dont on a retiré un carré rouge (les trois grands triangles verts, les trois rectangles orange, dix triangles moyens bleus, trois carrés rouges et huit petits triangles jaunes).

Première partie

Comment s'y prendre ?

L'enseignant forme des groupes de deux élèves et distribue à chaque groupe une carte contour de chaque type et une enveloppe. Les consignes se succèdent et chaque groupe d'élèves les enchaîne en repartant des pavages obtenus à l'étape précédente et validés par l'enseignant.

La première consigne est la suivante.

> Recouvrez vos poissons avec le moins de pièces possibles.

Les élèves sont amenés à découvrir, par la manipulation, qu'en utilisant de grandes pièces, ils en utiliseront moins. Commencer par placer un triangle vert ou un rectangle orange est donc une bonne stratégie.

L'intérêt de cette activité est aussi de travailler les équivalences et la comparaison des surfaces (sans la nommer). Si un pavage du corps du poisson contient deux triangles moyens bleus, il est aussi possible d'obtenir un pavage en remplaçant ces deux triangles par un grand triangle vert, moyennant parfois une réorganisation des pièces.

Un poisson peut être pavé avec seulement trois pièces : deux grands triangles verts et un triangle moyen bleu ou deux rectangles orange et un triangle moyen bleu (figure 25). La composition de l'enveloppe implique que les deux assemblages apparaissent.

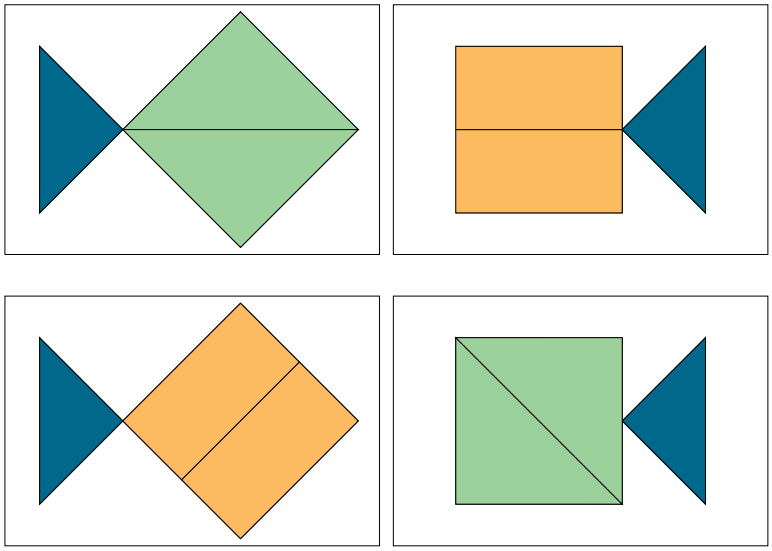


Fig. 25

Après avoir vérifié les puzzles de chaque groupe, l'enseignant pose la question suivante.

> Pouvez-vous recouvrir vos poissons avec quatre pièces en n'en remplaçant qu'une dans chaque puzzle ?

Comme l'objectif est d'exploiter l'équivalence des surfaces de certaines pièces ou de certains assemblages, l'enfant est convié à réfléchir à une façon de répondre à la question à partir de ce qu'il a déjà pour obtenir un puzzle avec une pièce de plus. L'enseignant veille à ce que les élèves n'échangent qu'une seule pièce par poisson.

Si le niveau des élèves le permet, il poursuit avec la consigne suivante.

> Essayez de recouvrir vos poissons avec cinq pièces en n'en remplaçant qu'une dans chaque poisson.

La stratégie développée par les élèves au point précédent devra éventuellement être adaptée en fonction des pièces encore disponibles. Par exemple, l'enfant qui aura remplacé un rectangle orange par deux carrés rouges ne pourra le faire qu'une seule fois car il ne disposera plus que d'un seul carré rouge.

Deuxième partie

Comment s'y prendre ?

Dans cette deuxième partie, chaque élève travaille individuellement. Il reçoit une carte poisson et une enveloppe. L'enseignant pose la question suivante.

Recouvre ton poisson avec le maximum de pièces. Combien t'en faudra-t-il ?

L'élève recouvre son poisson en commençant par les plus petites pièces s'il a compris que plus les pièces sont petites, plus elles seront nombreuses. Il place alors un maximum de petits triangles jaunes. Quand il n'en a plus, il cherche autre chose. En fonction de la position de ses triangles, il doit ajouter un carré rouge ou un triangle moyen bleu comme l'illustre la figure 26, en réorganisant éventuellement ses pièces.

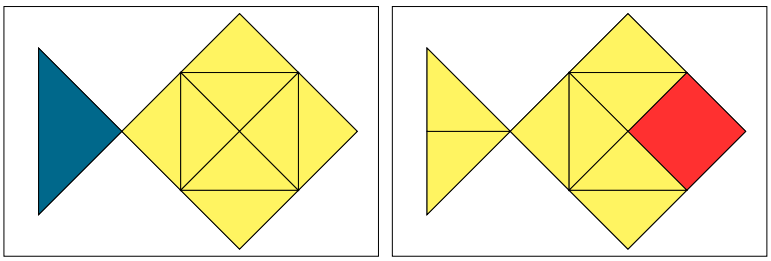


Fig. 26

L'élève peut aussi recouvrir le poisson de manière aléatoire puis échanger, peut-être à plusieurs reprises, une grande pièce avec deux plus petites.

L'enseignant termine avec la consigne suivante.

Recouvre ton poisson avec le maximum de couleurs différentes.

L'élève devrait se munir d'une pièce de chaque couleur, soit cinq pièces. En plaçant le triangle vert, il réalise qu'il ne lui est plus possible de placer le rectangle orange et inversement. Une de ces deux pièces ne pourra donc pas être placée et le poisson sera ainsi recouvert par des pièces de quatre couleurs différentes au maximum comme le montre la figure 27.

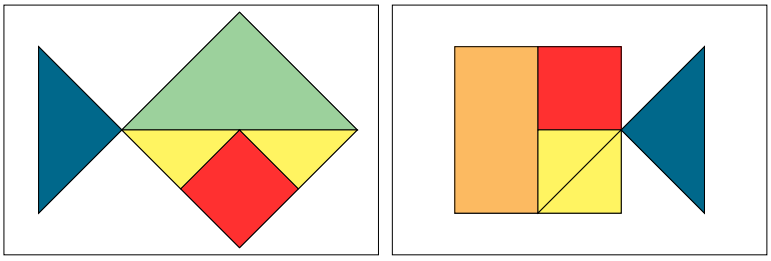


Fig. 27

Échos des classes

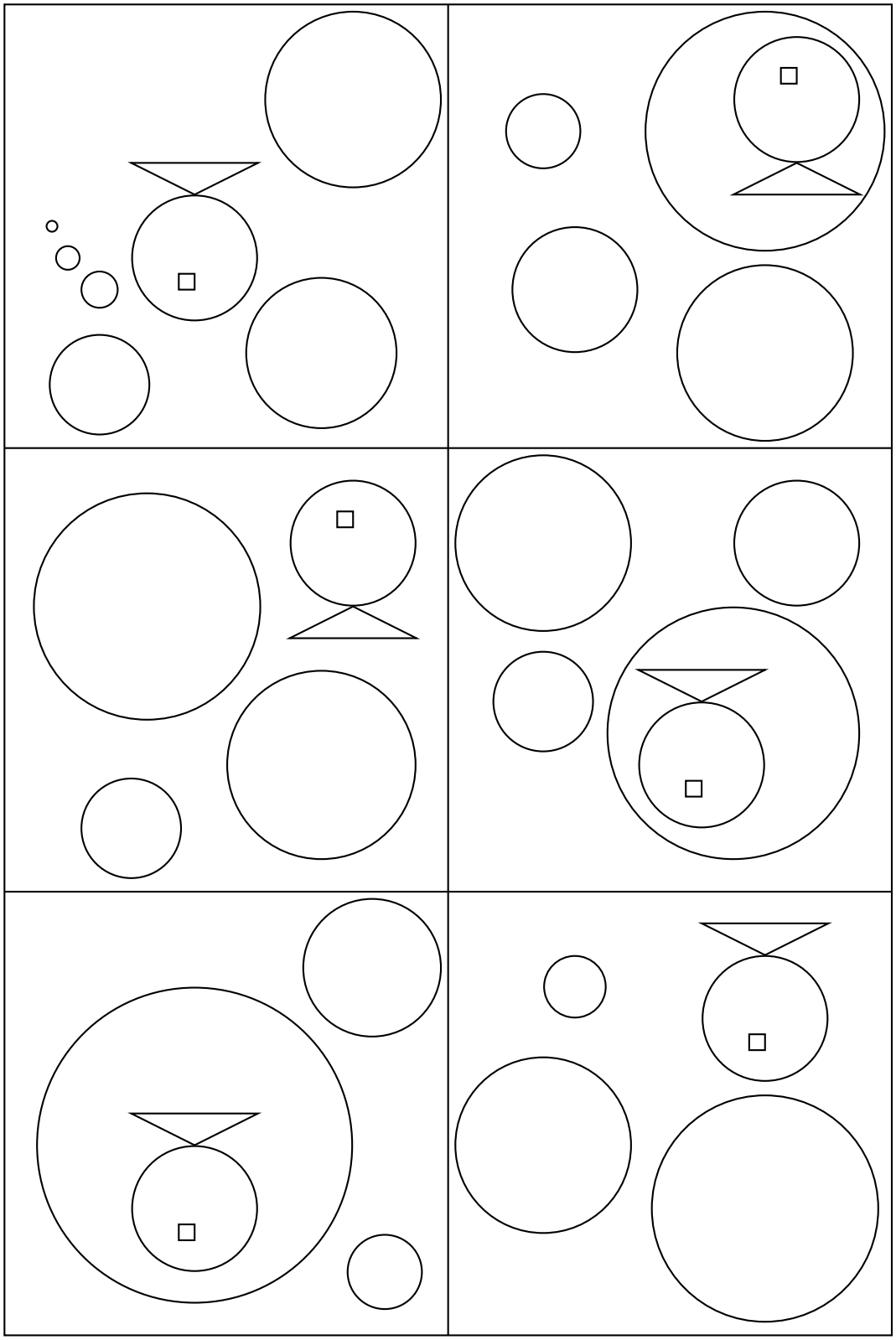
Régulièrement, les enfants expriment qu'il ont besoin des pièces les plus grandes pour paver un poisson avec un minimum de pièces et des pièces les plus petites pour le paver avec un maximum de pièces.

Des enfants souhaitent garder les poissons qu'ils ont composés. L'enseignant peut proposer un coloriage qui reproduirait les compositions ou prendre quelques photos.

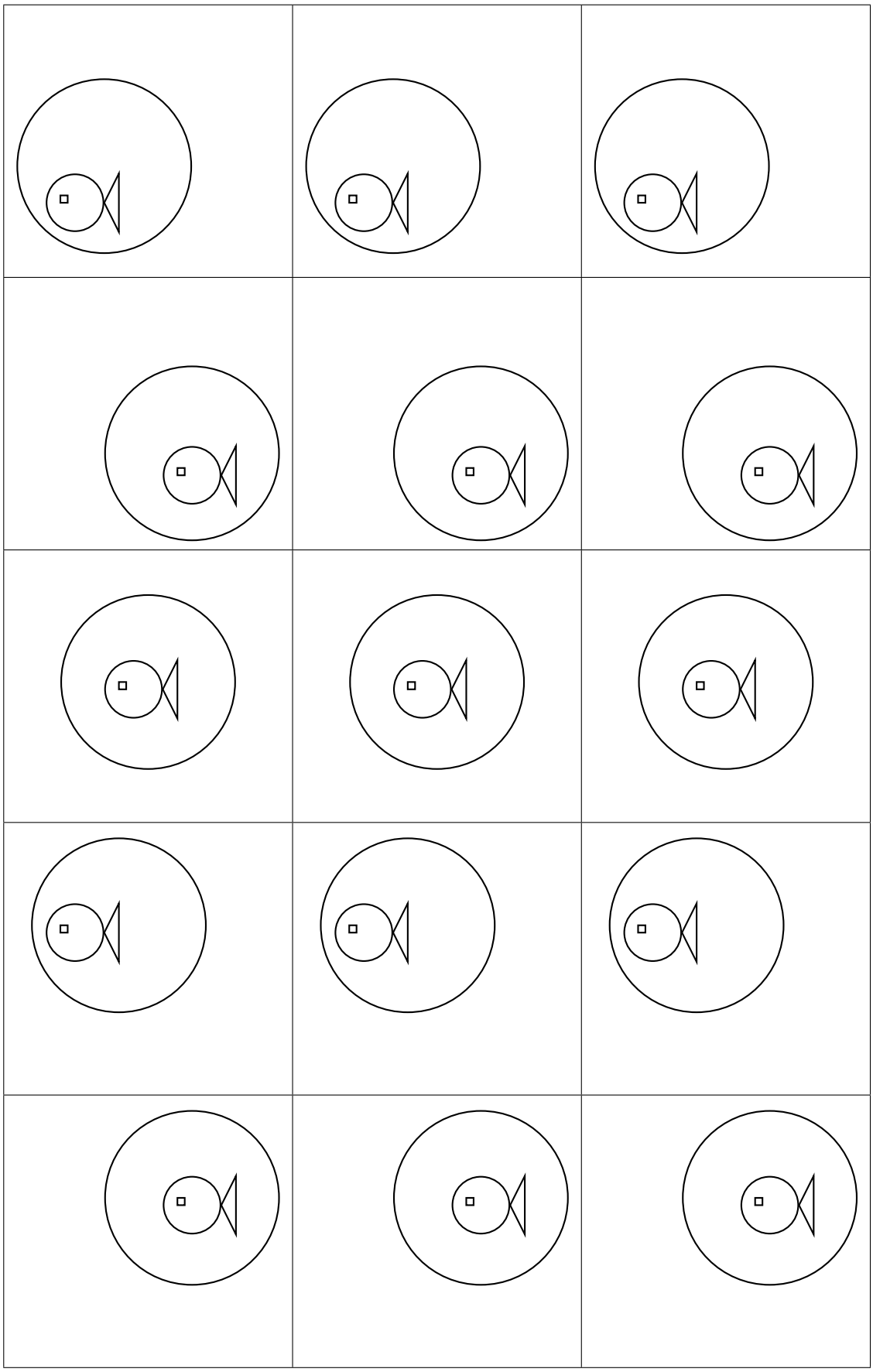
Annexe I

Matériel
Fiches à photocopier

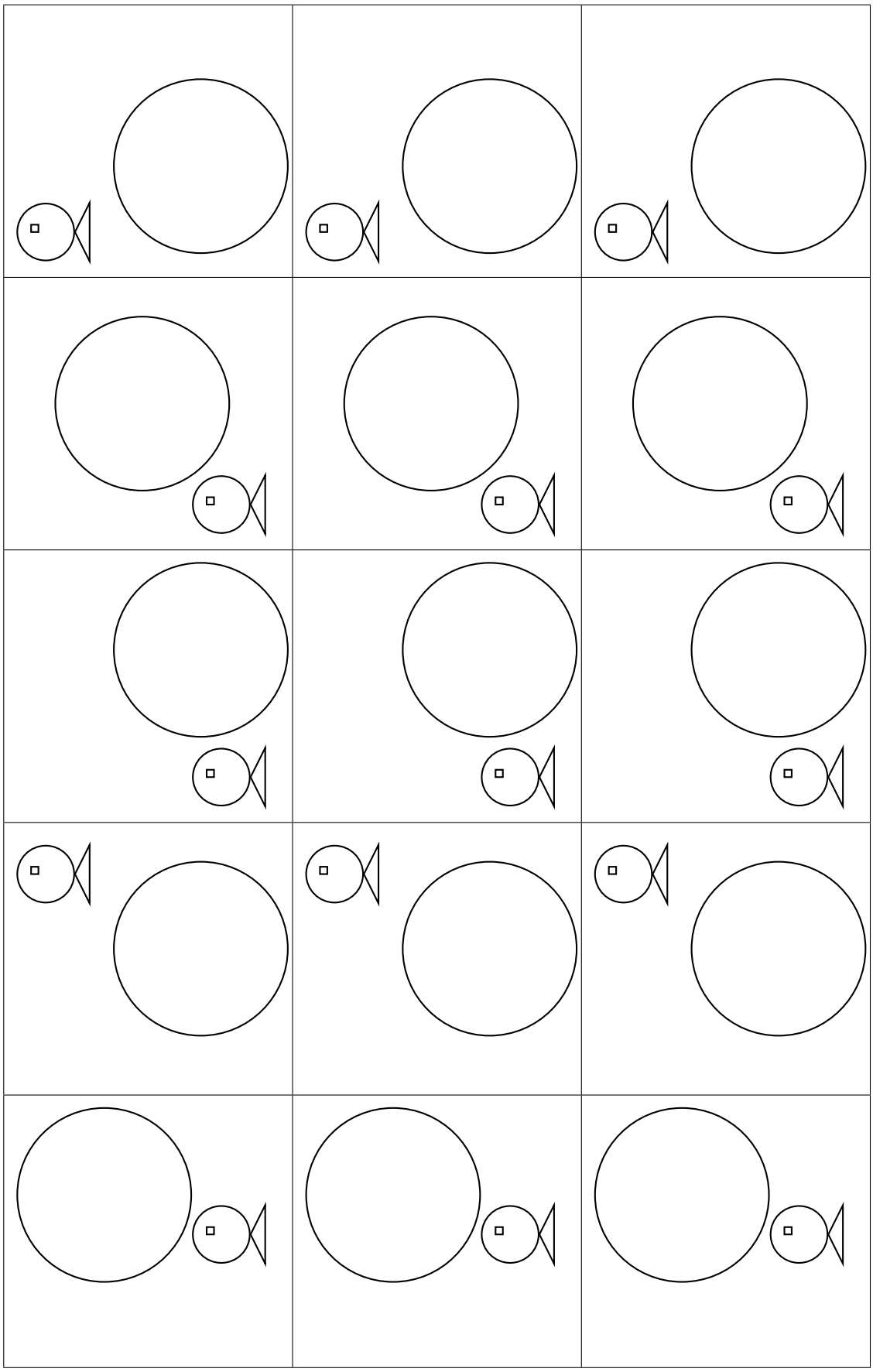
Des cercles et des poissons



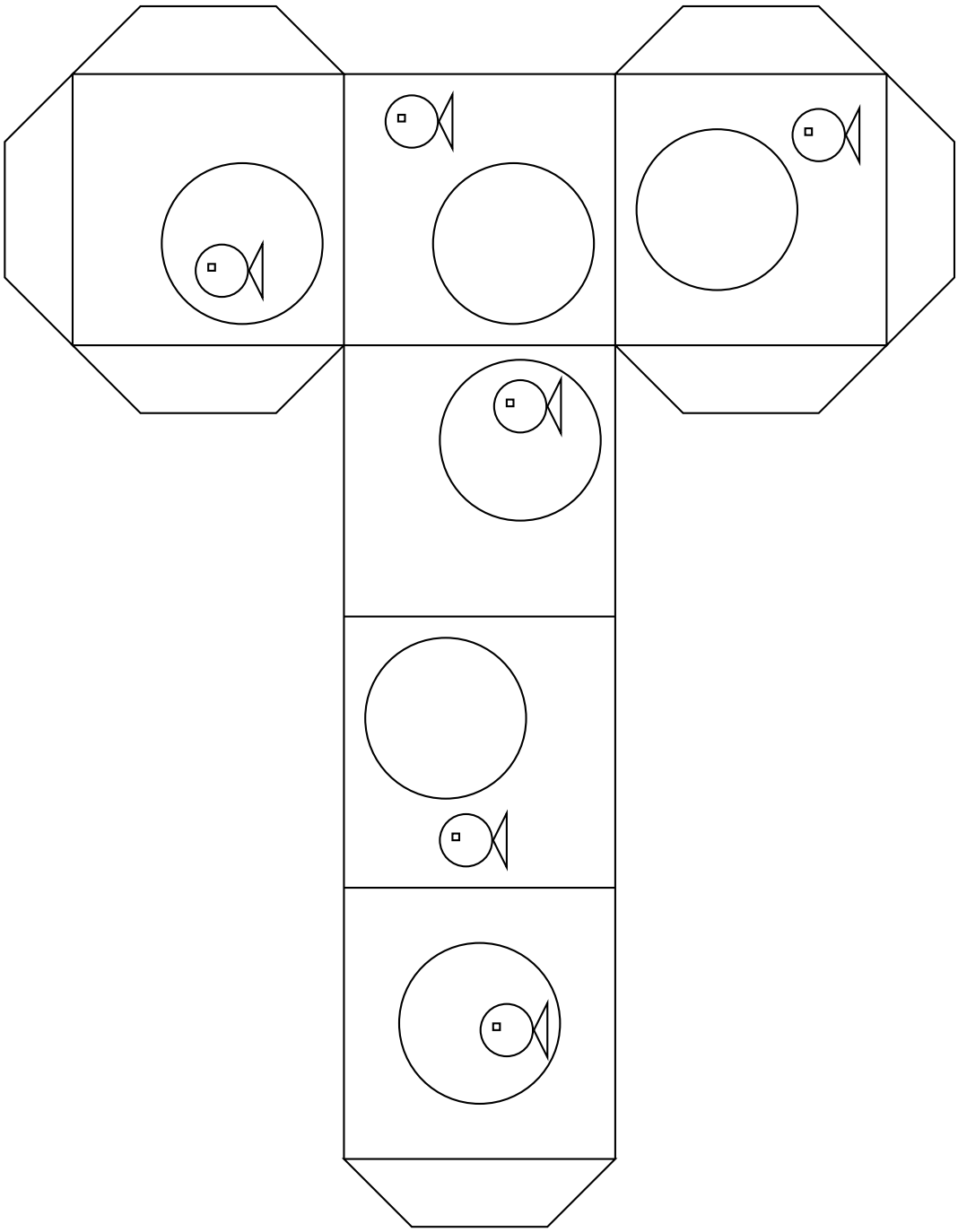
Cartes de jeu « intérieur »



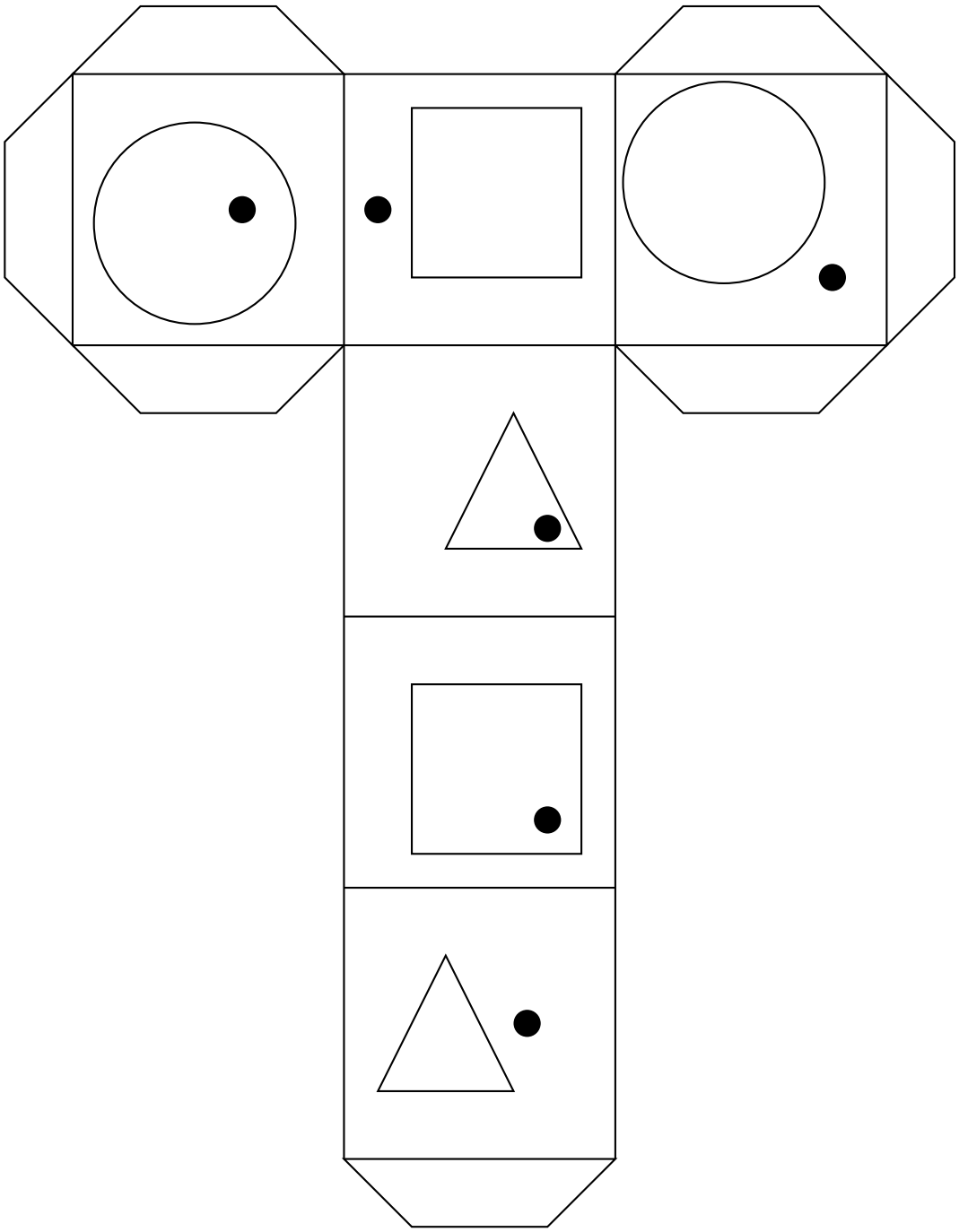
Cartes de jeu « extérieur »



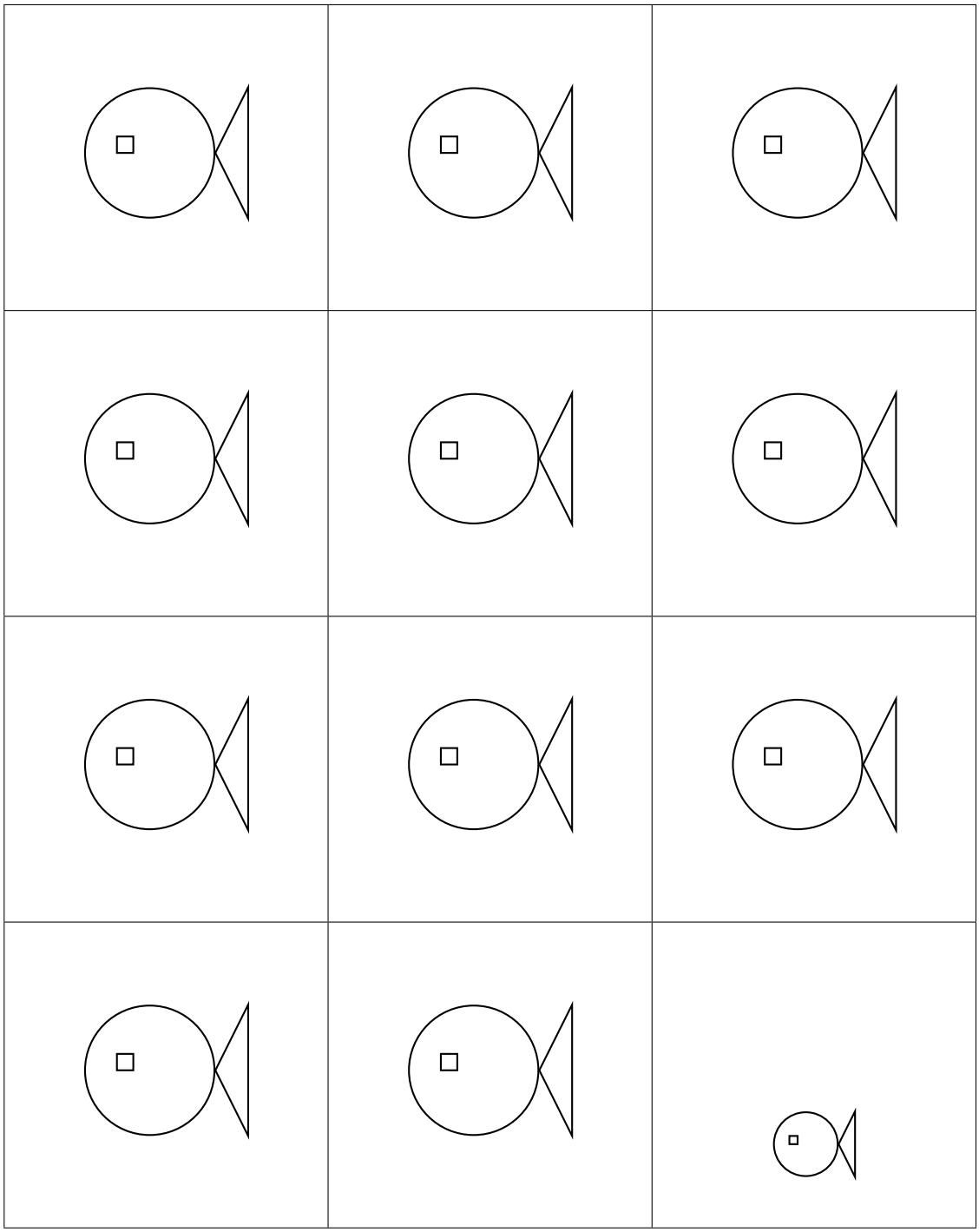
Dé poissons « intérieur/extérieur »



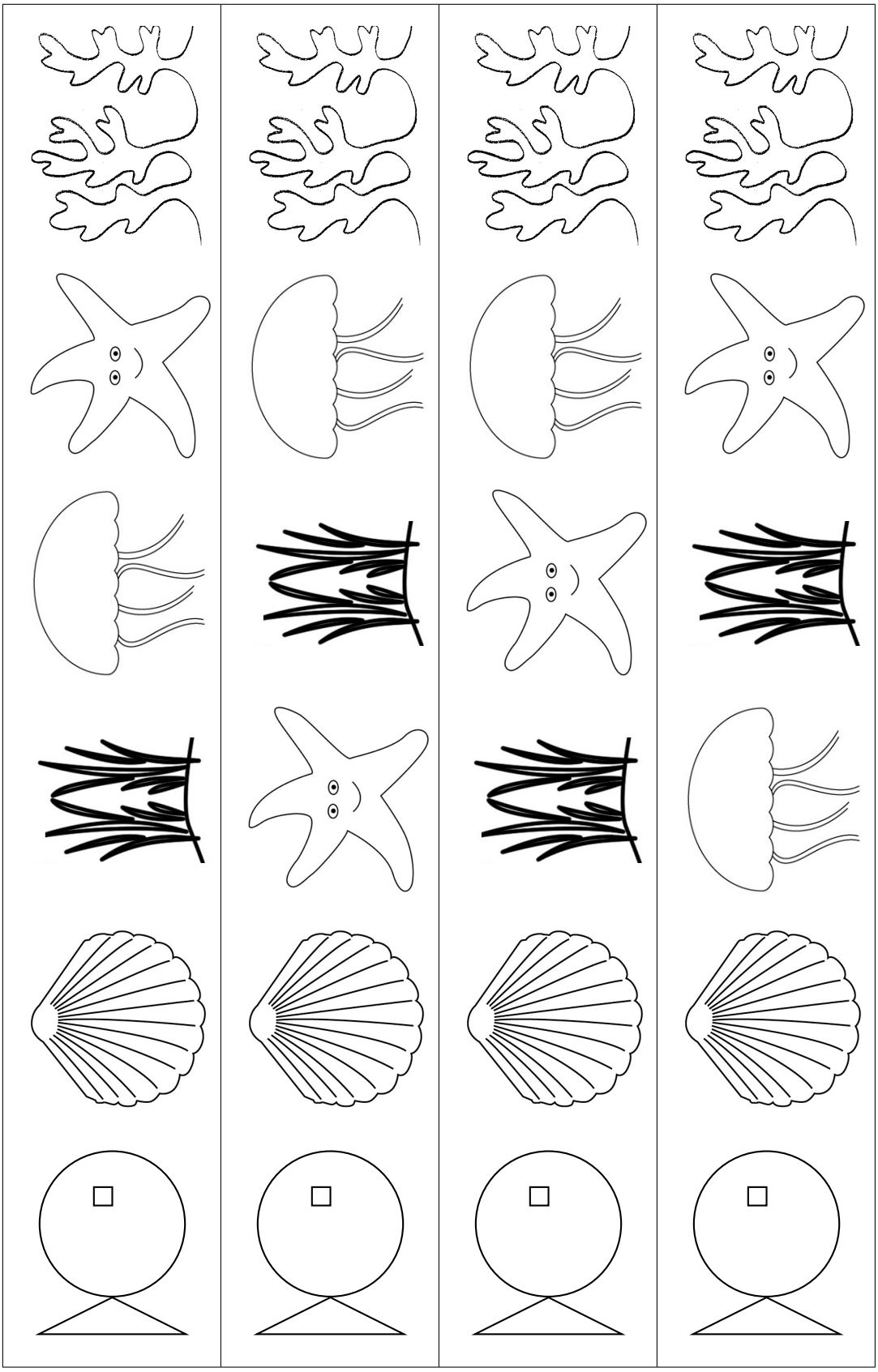
Dé codé « intérieur/extérieur »



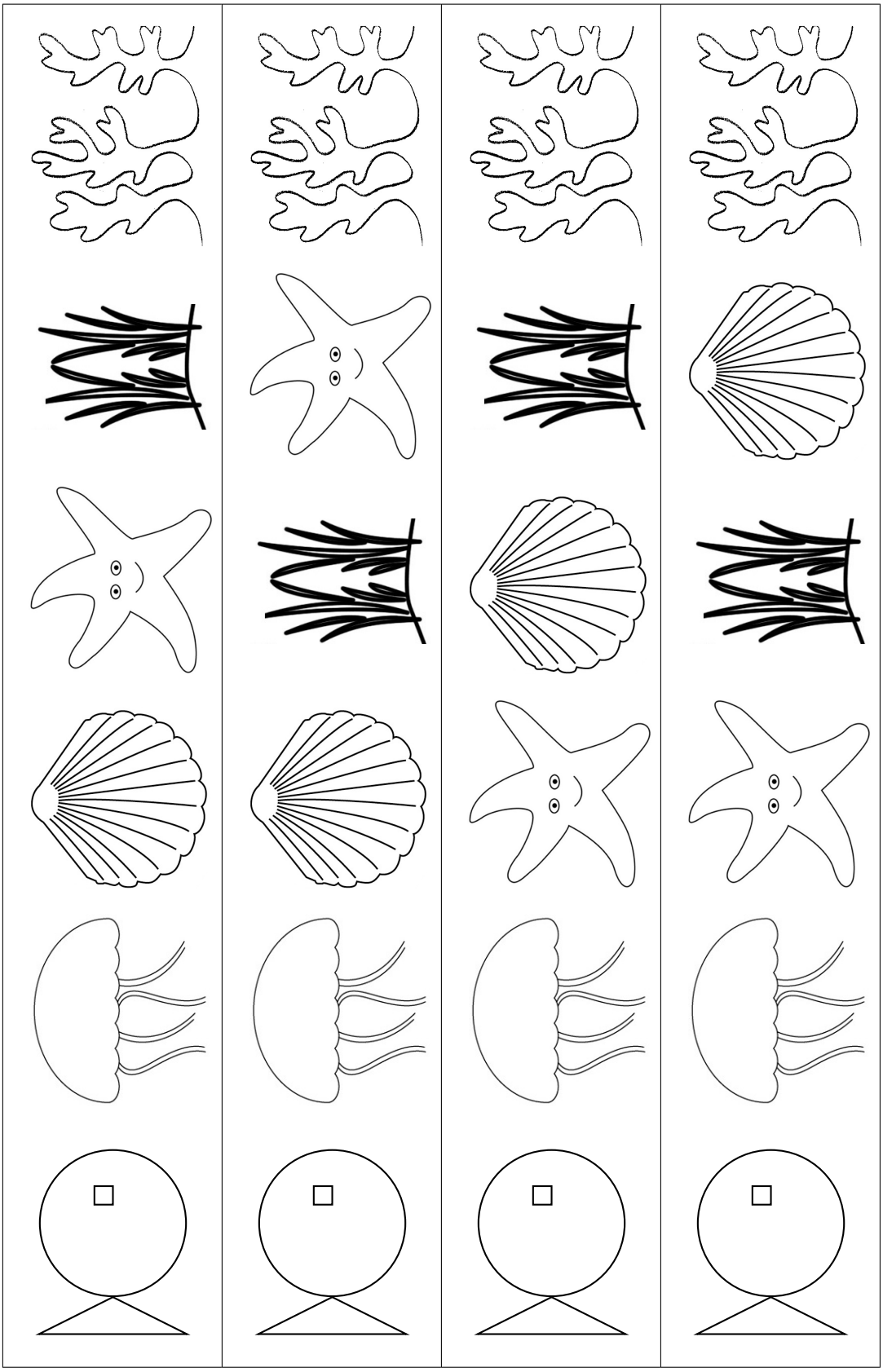
Cartes poissons à décorer



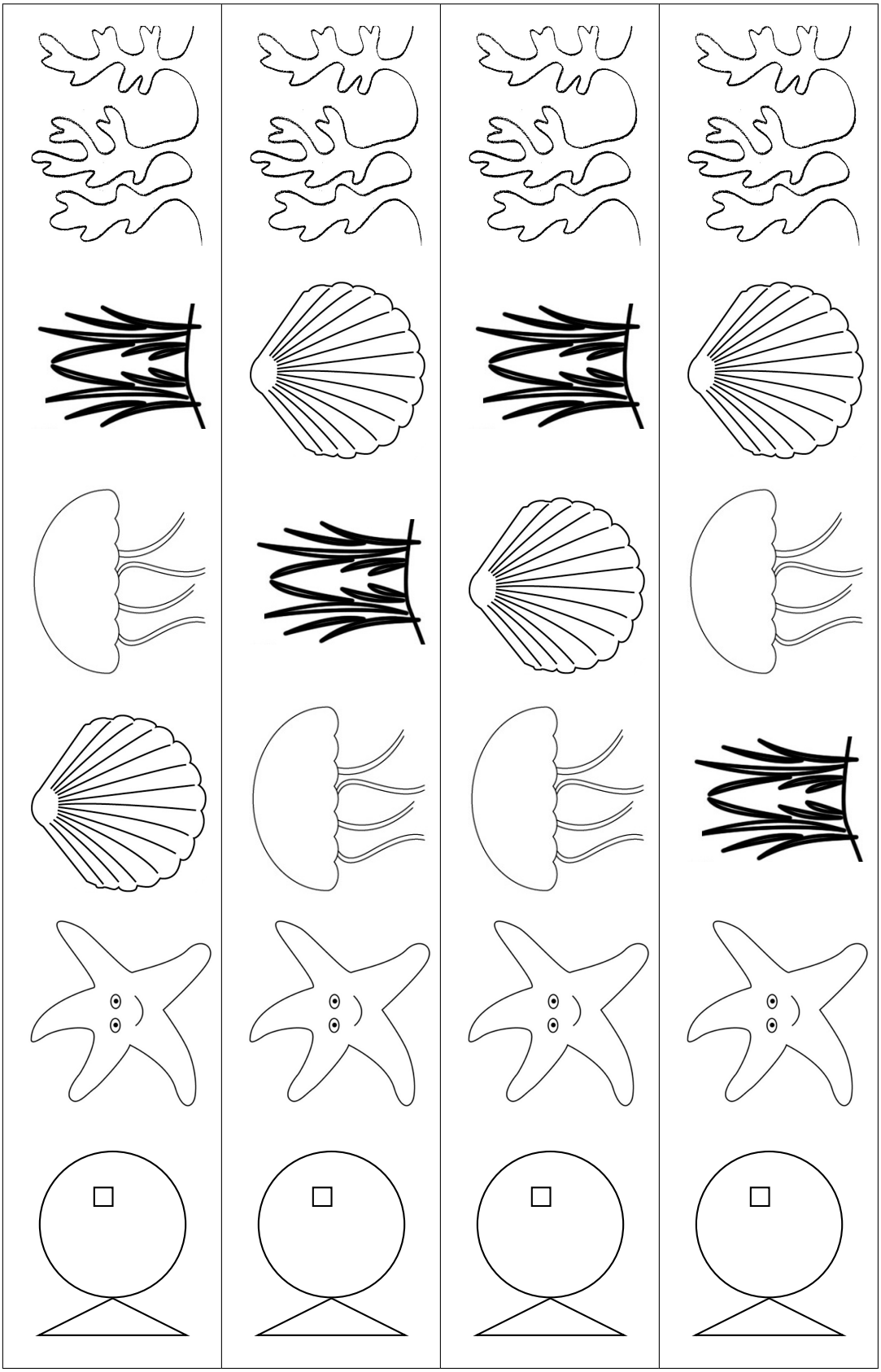
Bandelettes-chemin (1)



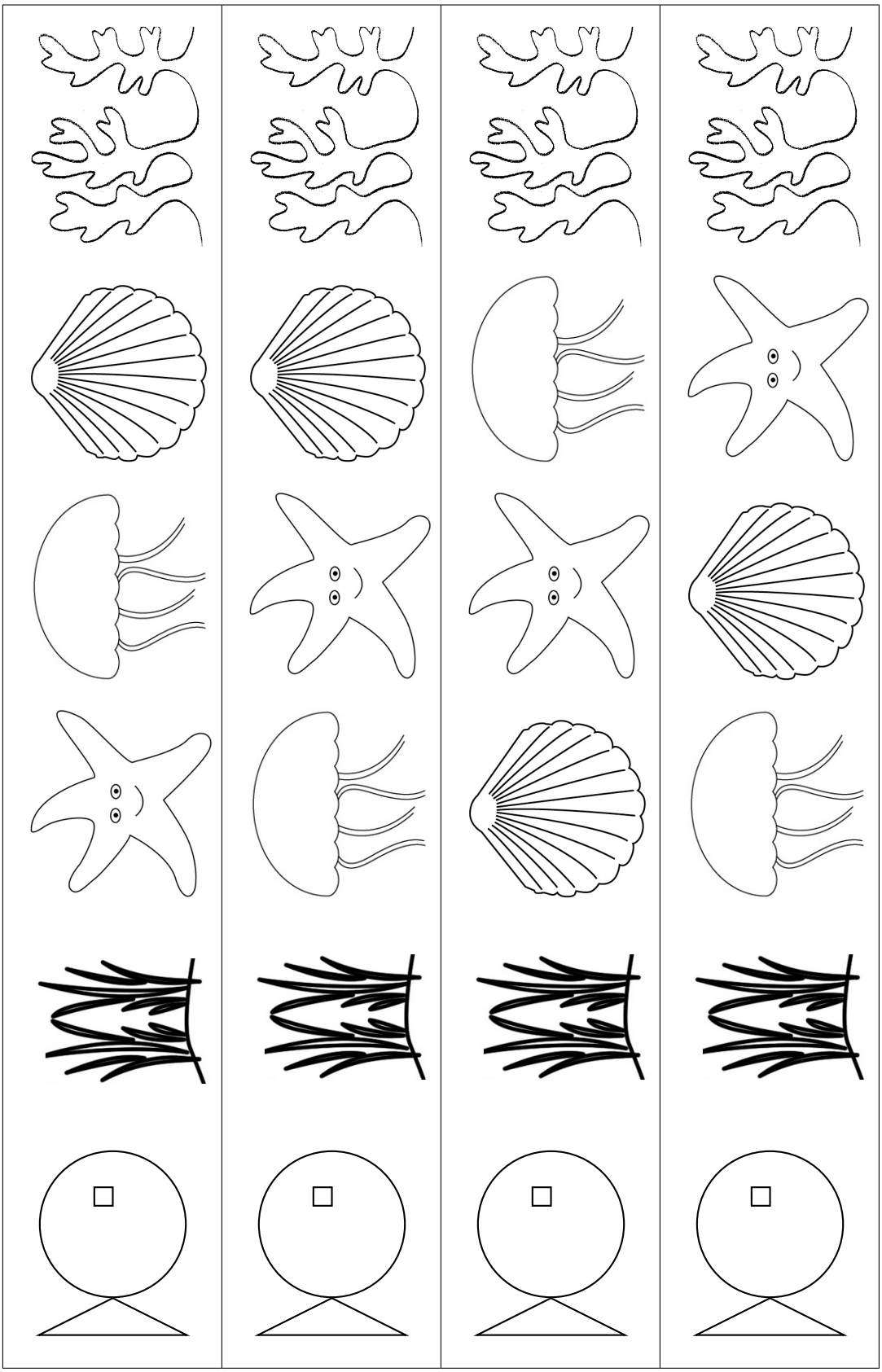
Bandelettes-chemin (2)



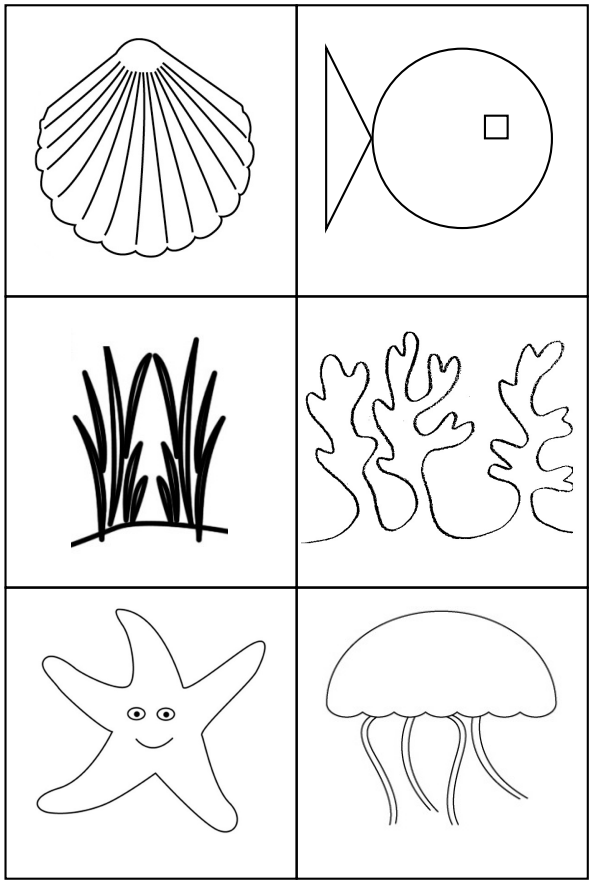
Bandelettes-chemin (3)



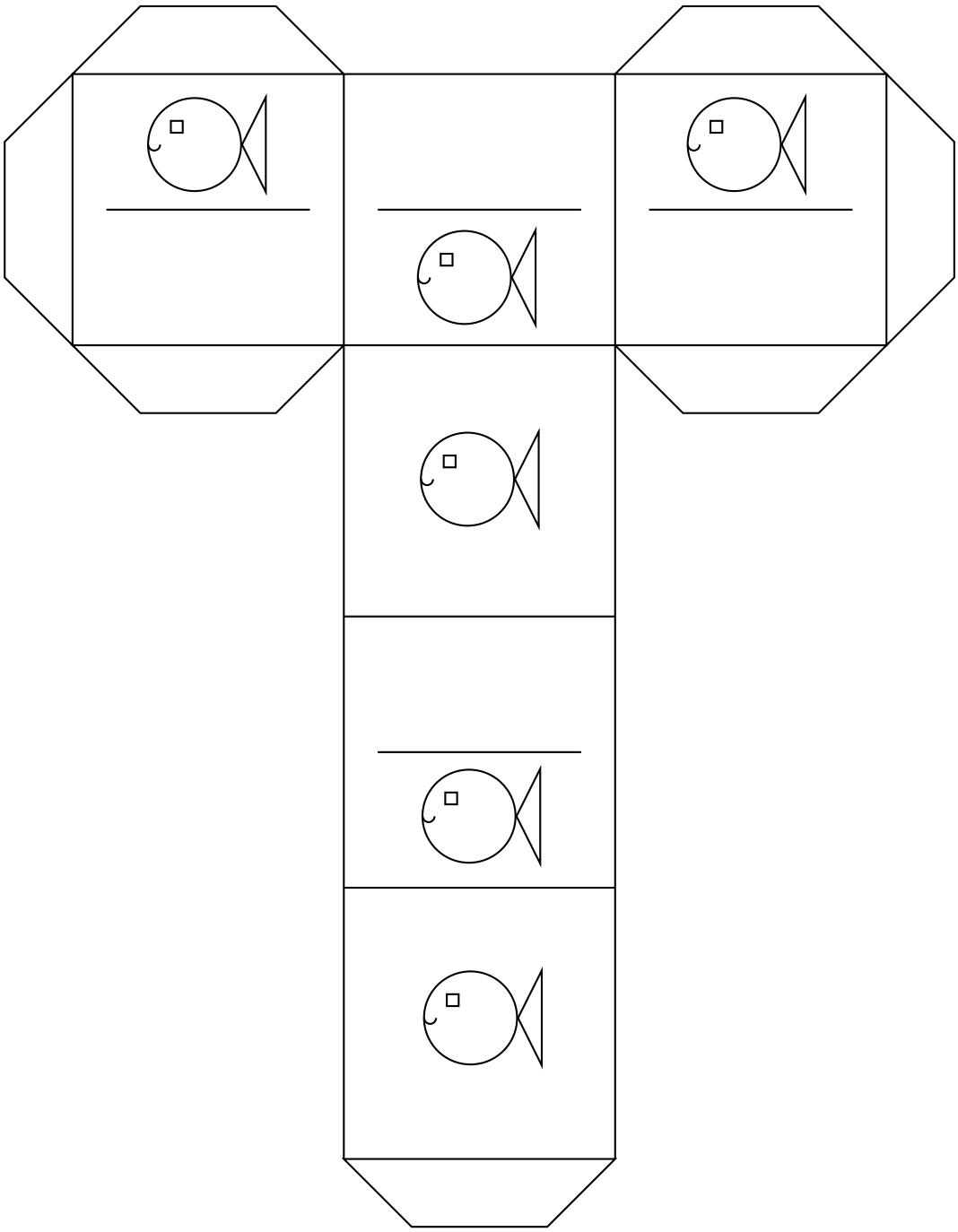
Bandelettes-chemin (4)



Éléments marins



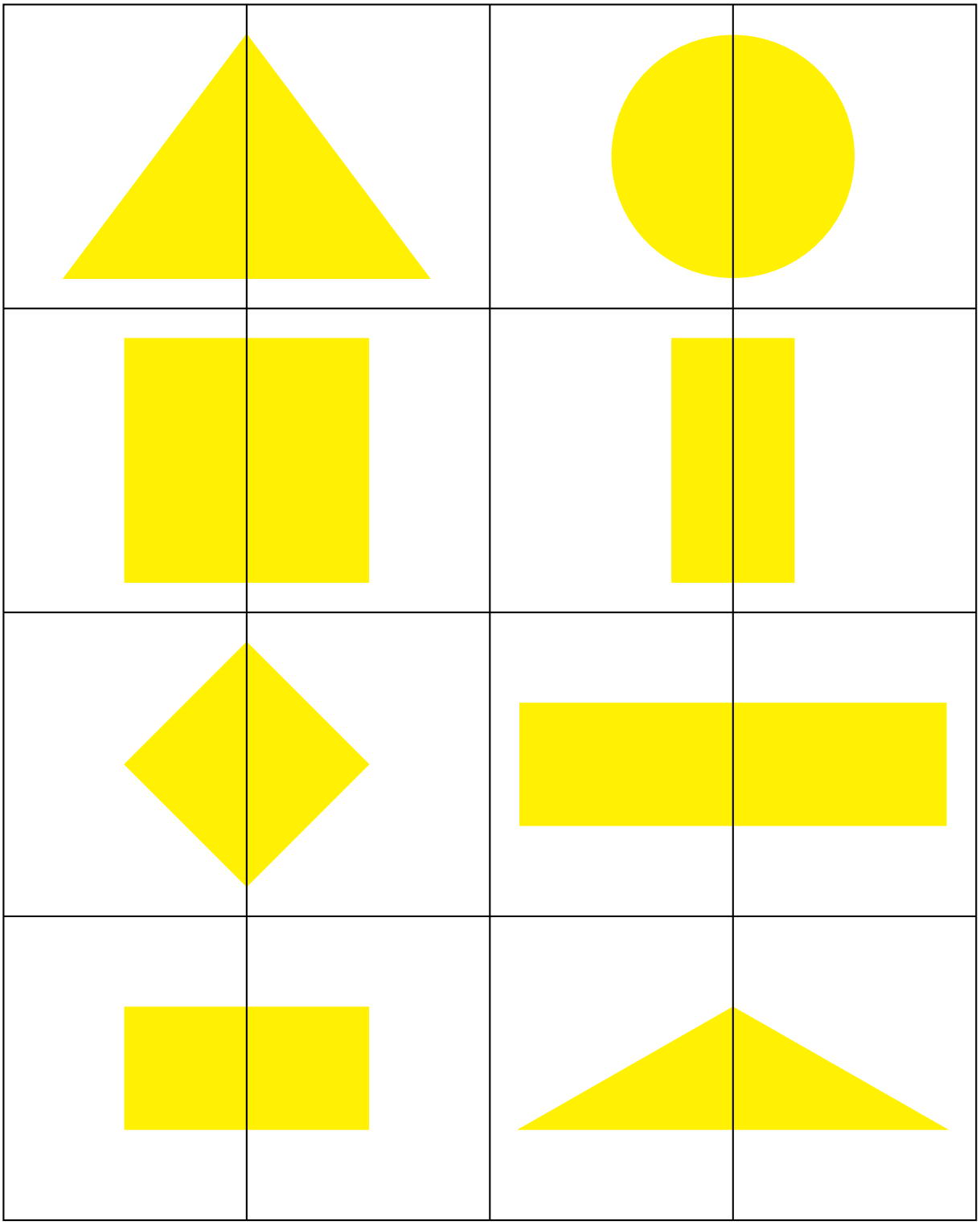
Dé « au-dessus/en dessous »



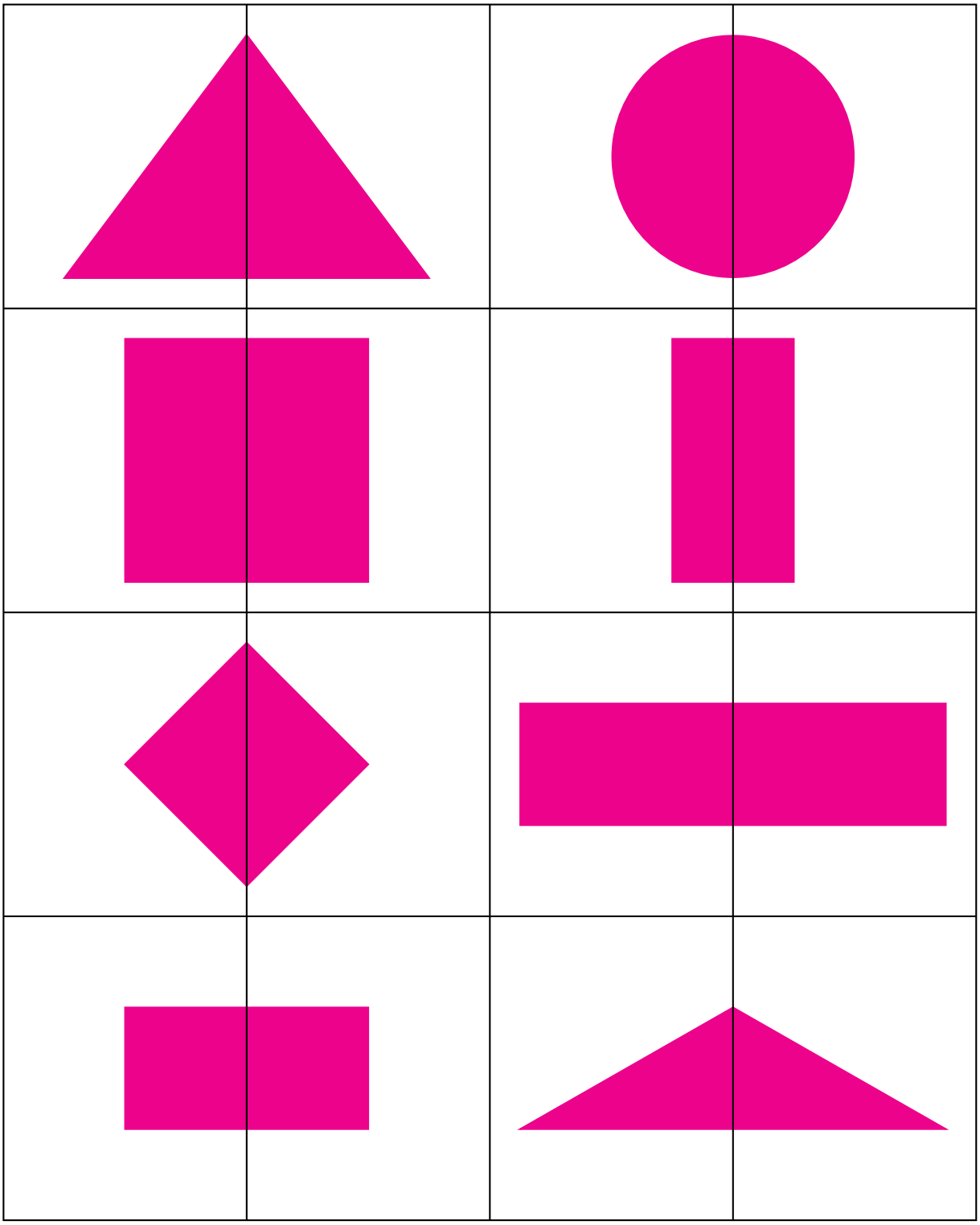
Arche sous-marine

Échantillon de boîtes

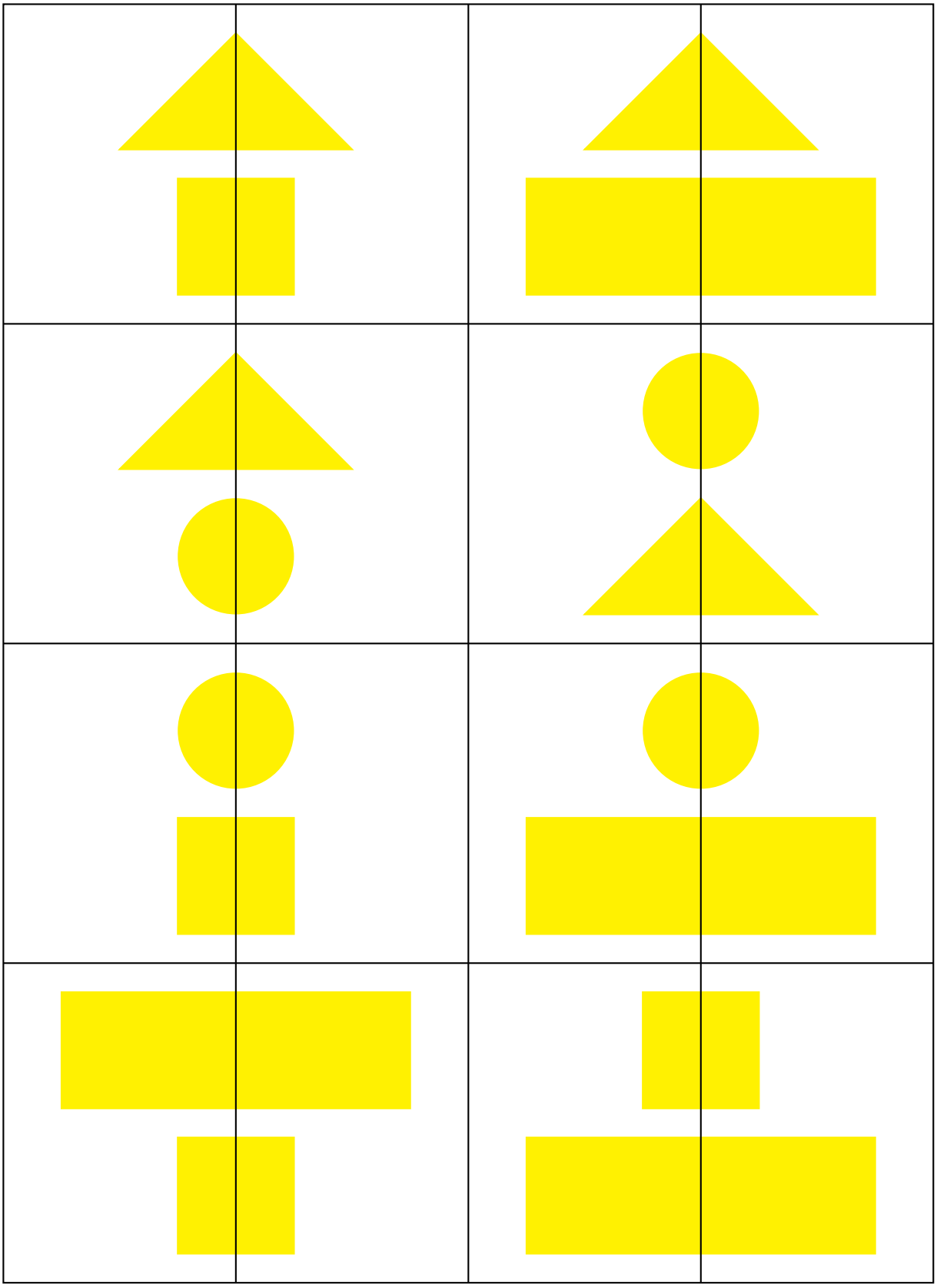
Cartes « solo » (1)



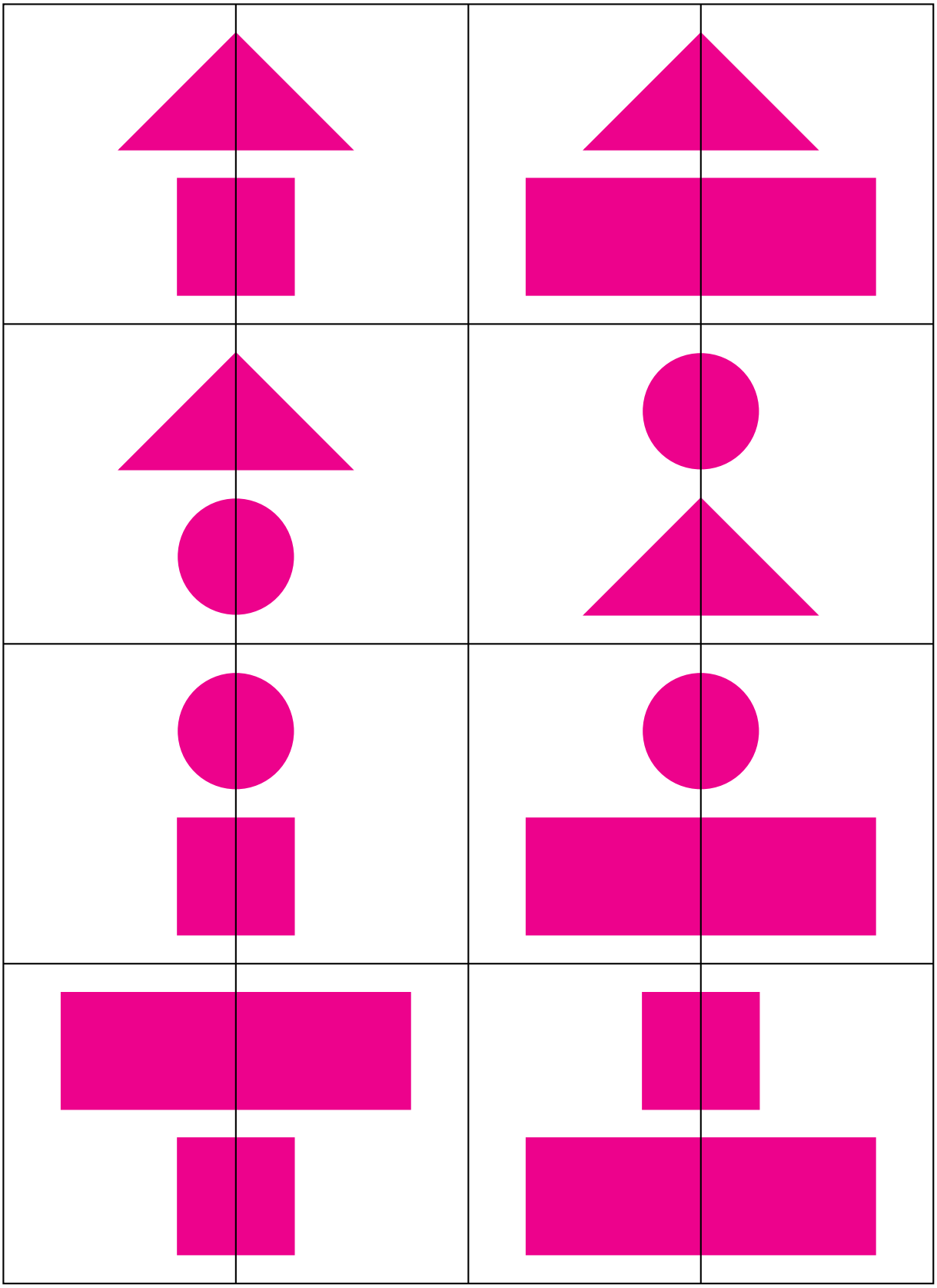
Cartes « solo » (2)



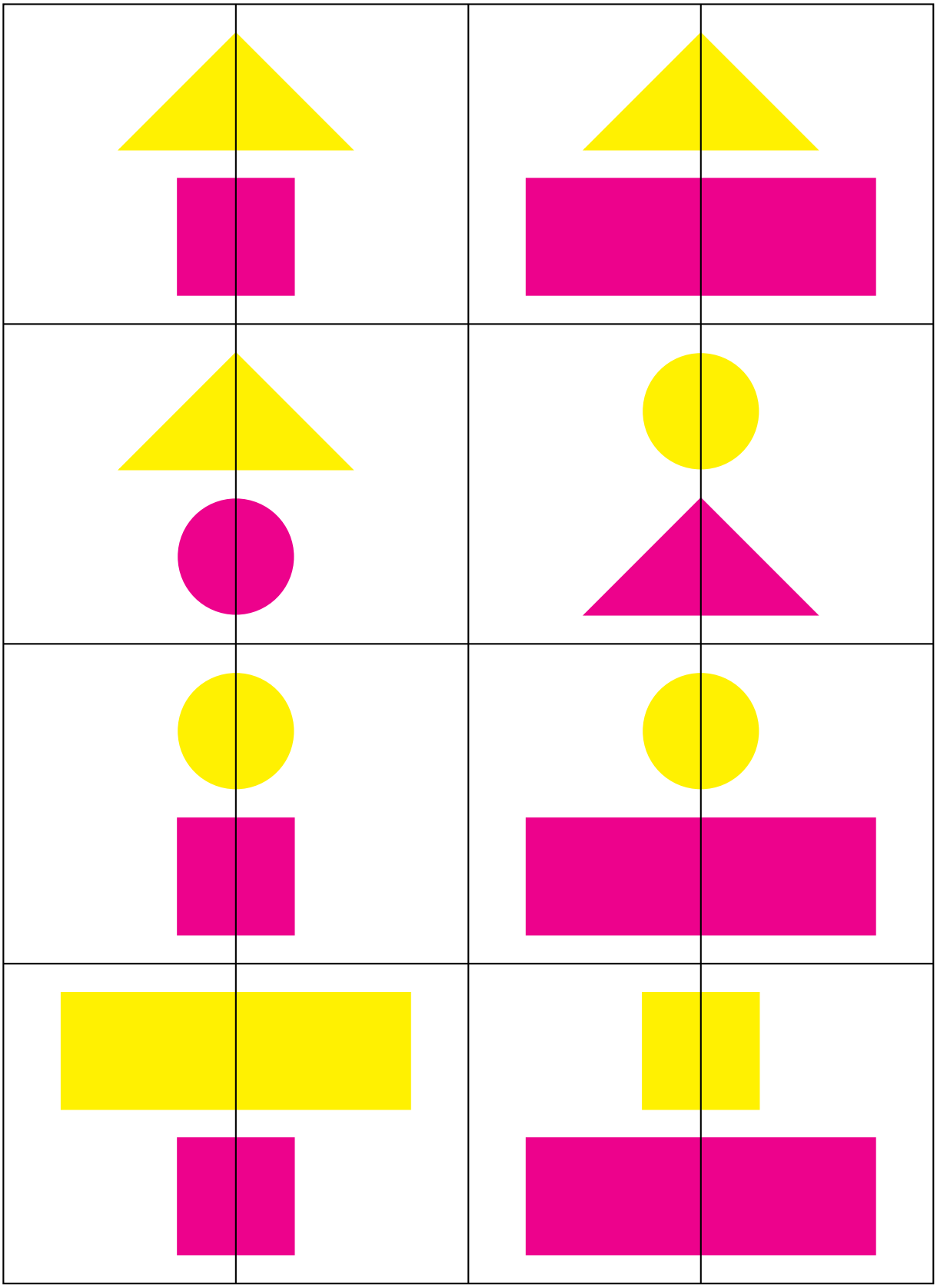
Cartes « duo » (1)



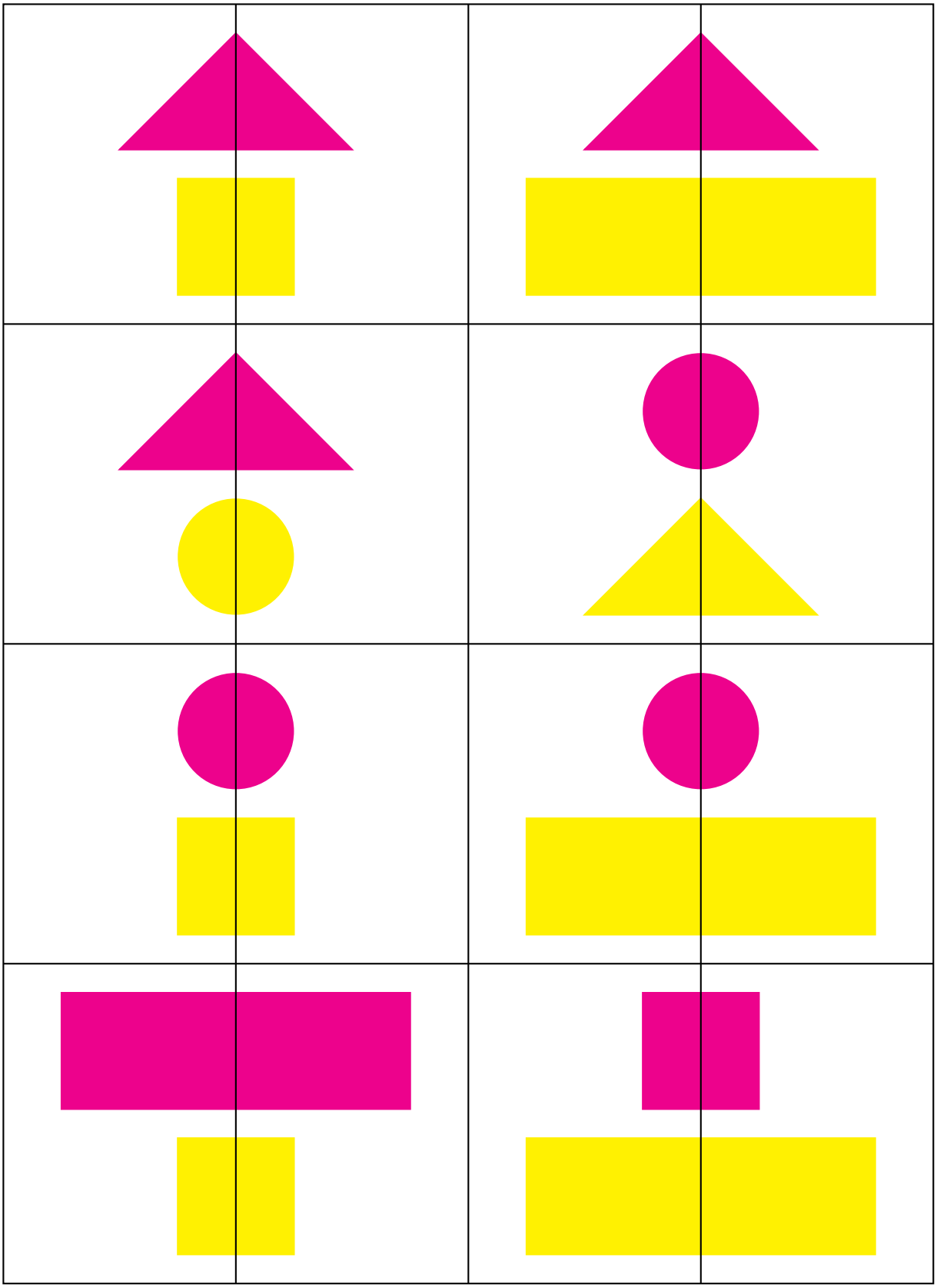
Cartes « duo » (2)



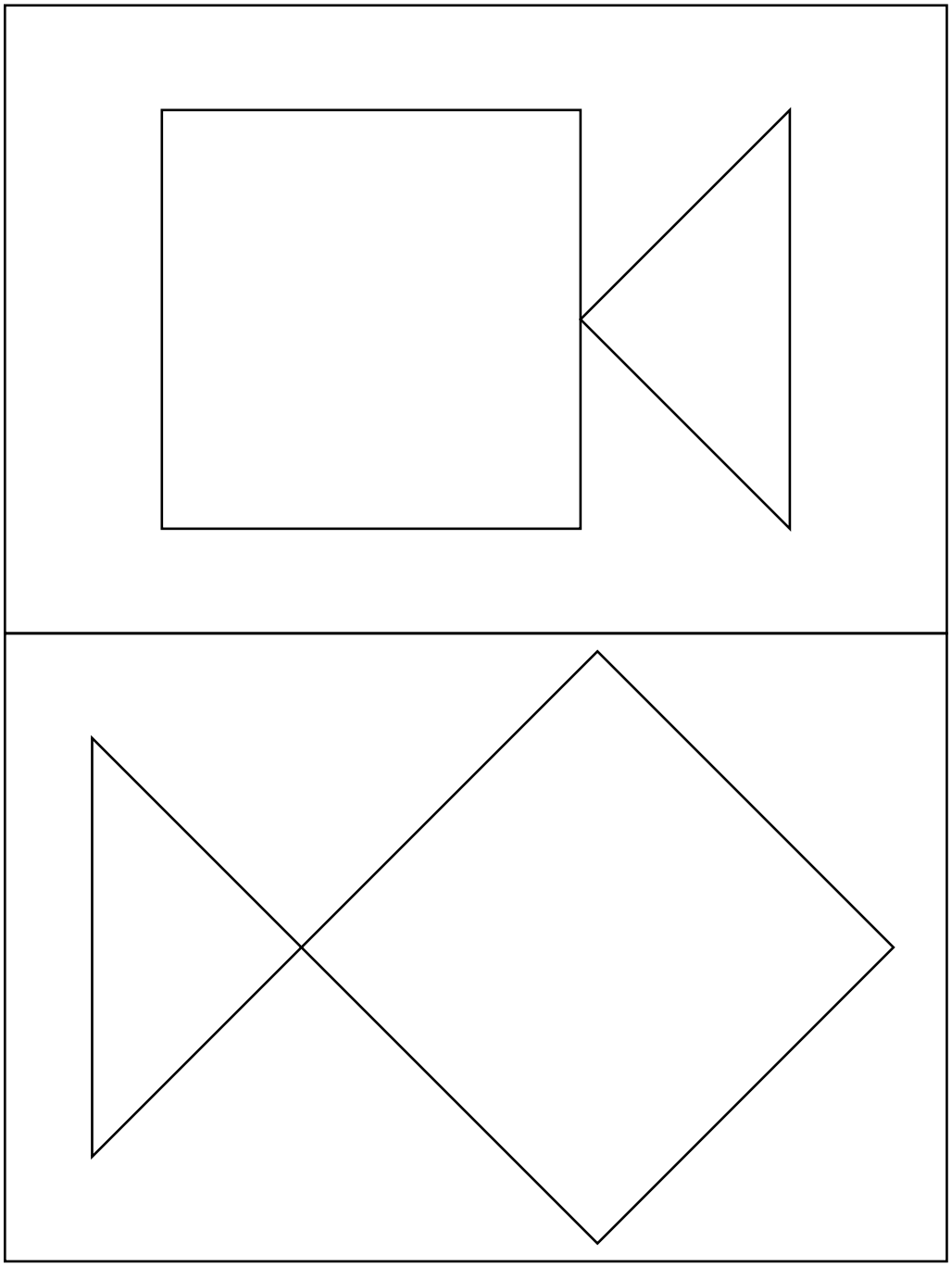
Cartes « duo » (3)



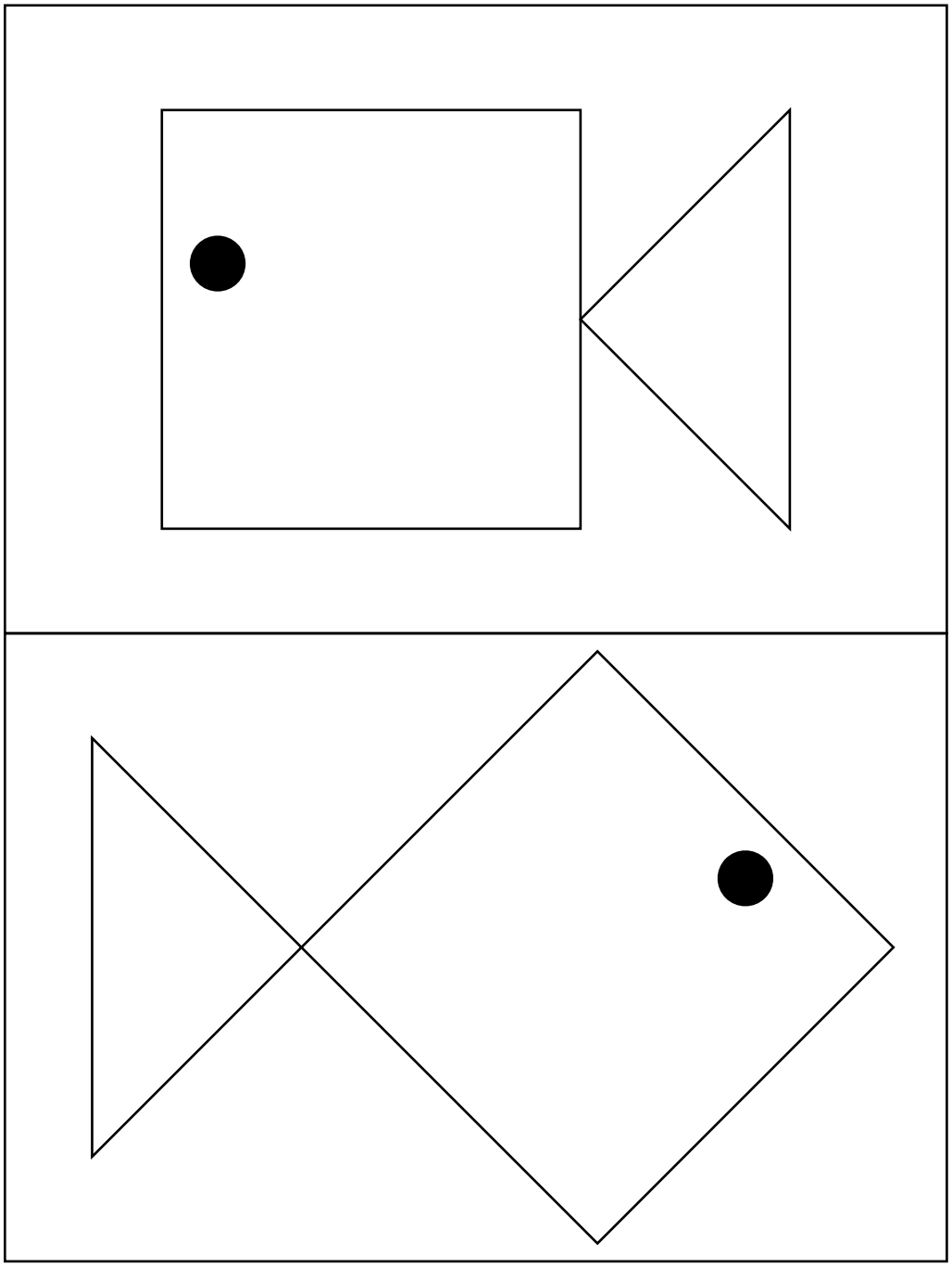
Cartes « duo » (4)



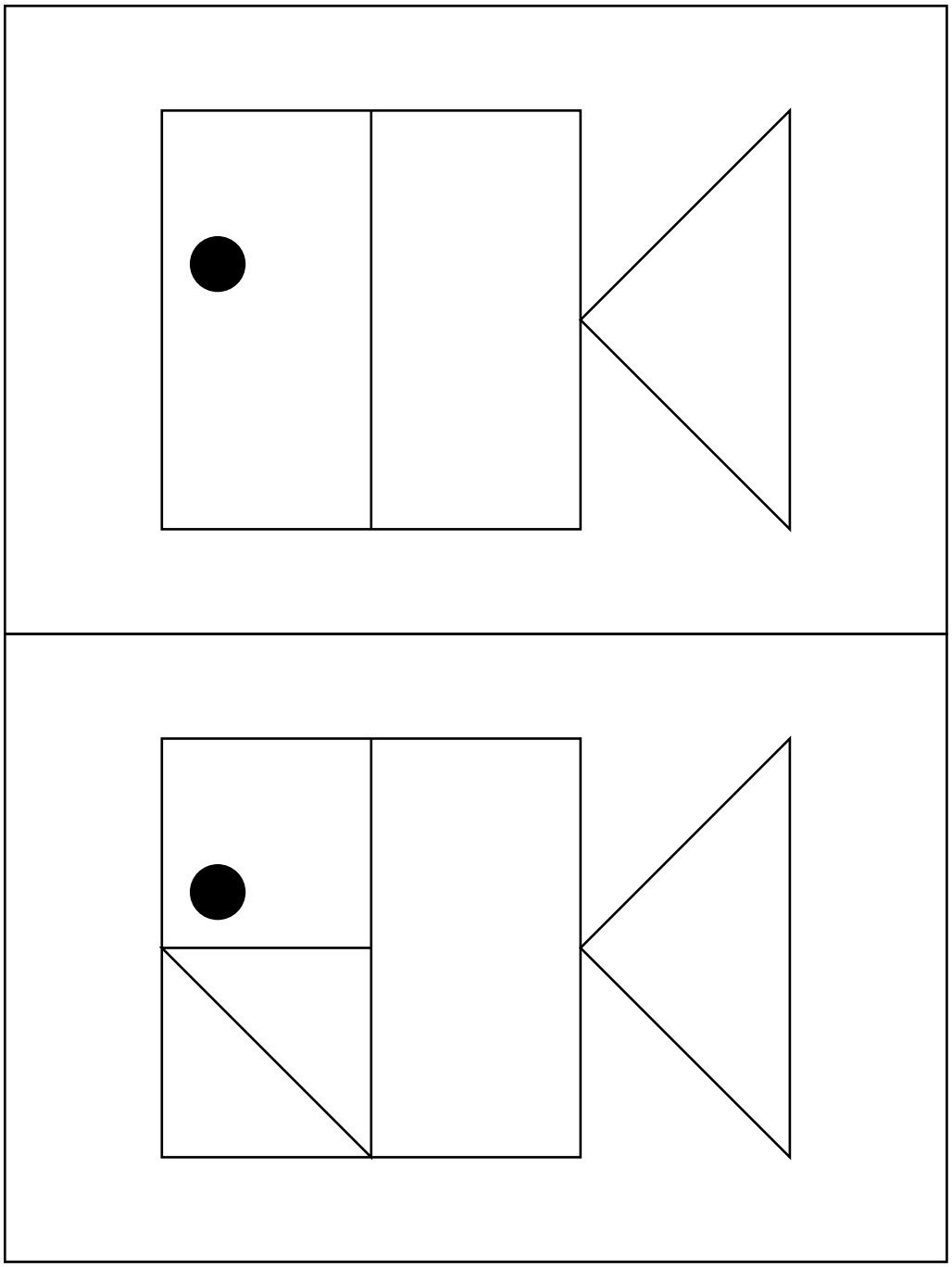
Cartes « contour »



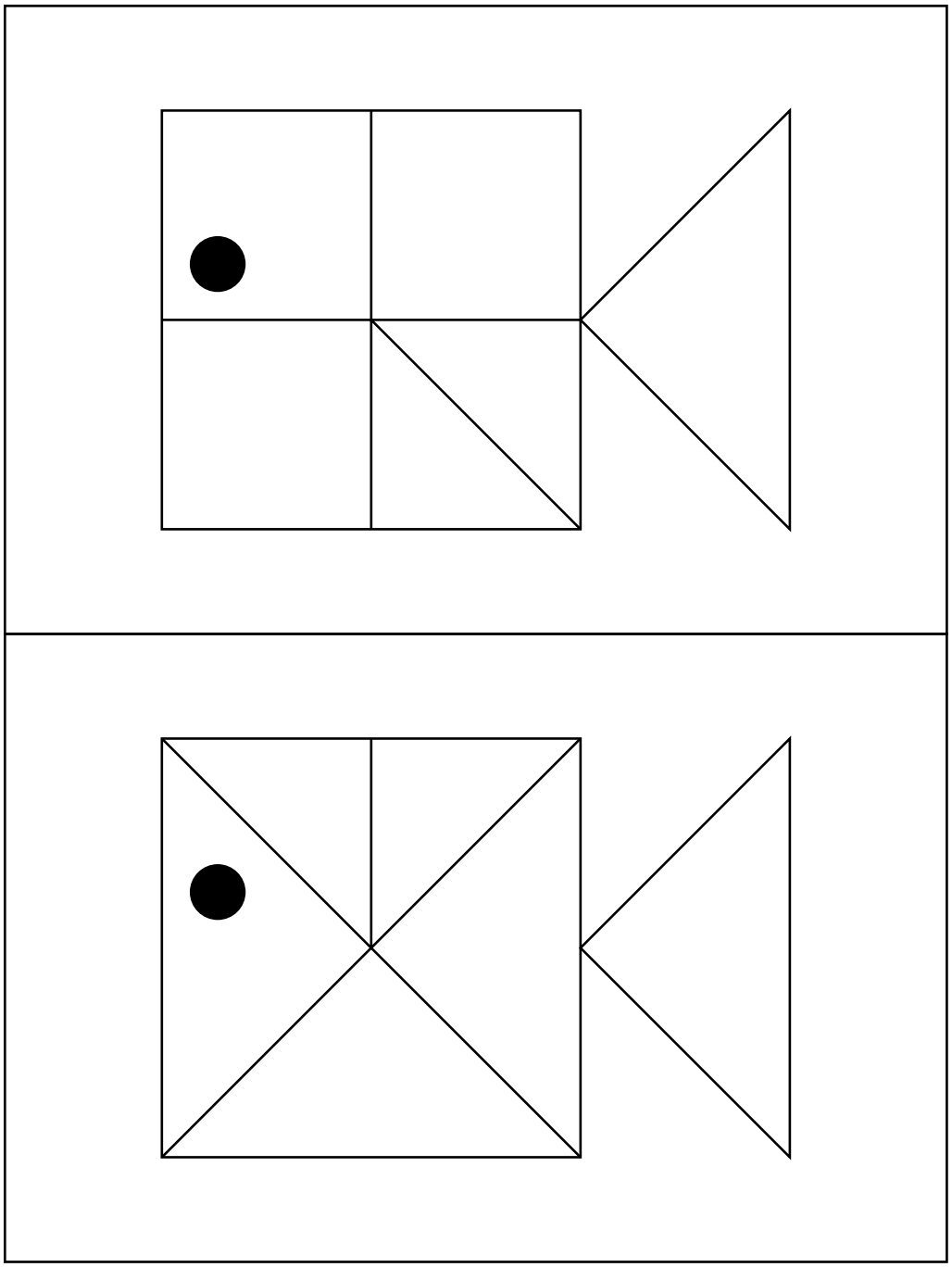
Cartes « œil »



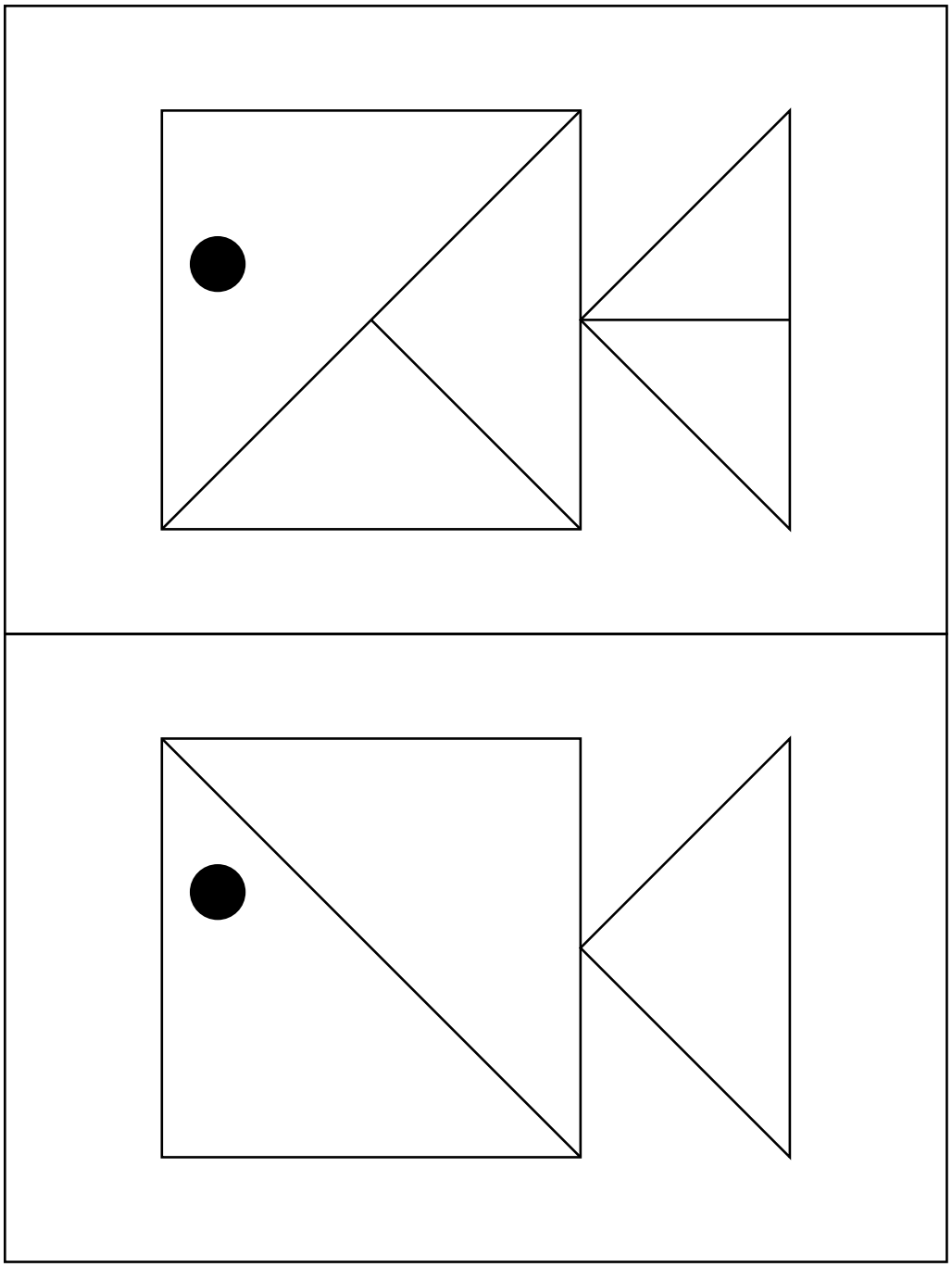
Cartes « pièces » poisson-côté (1)



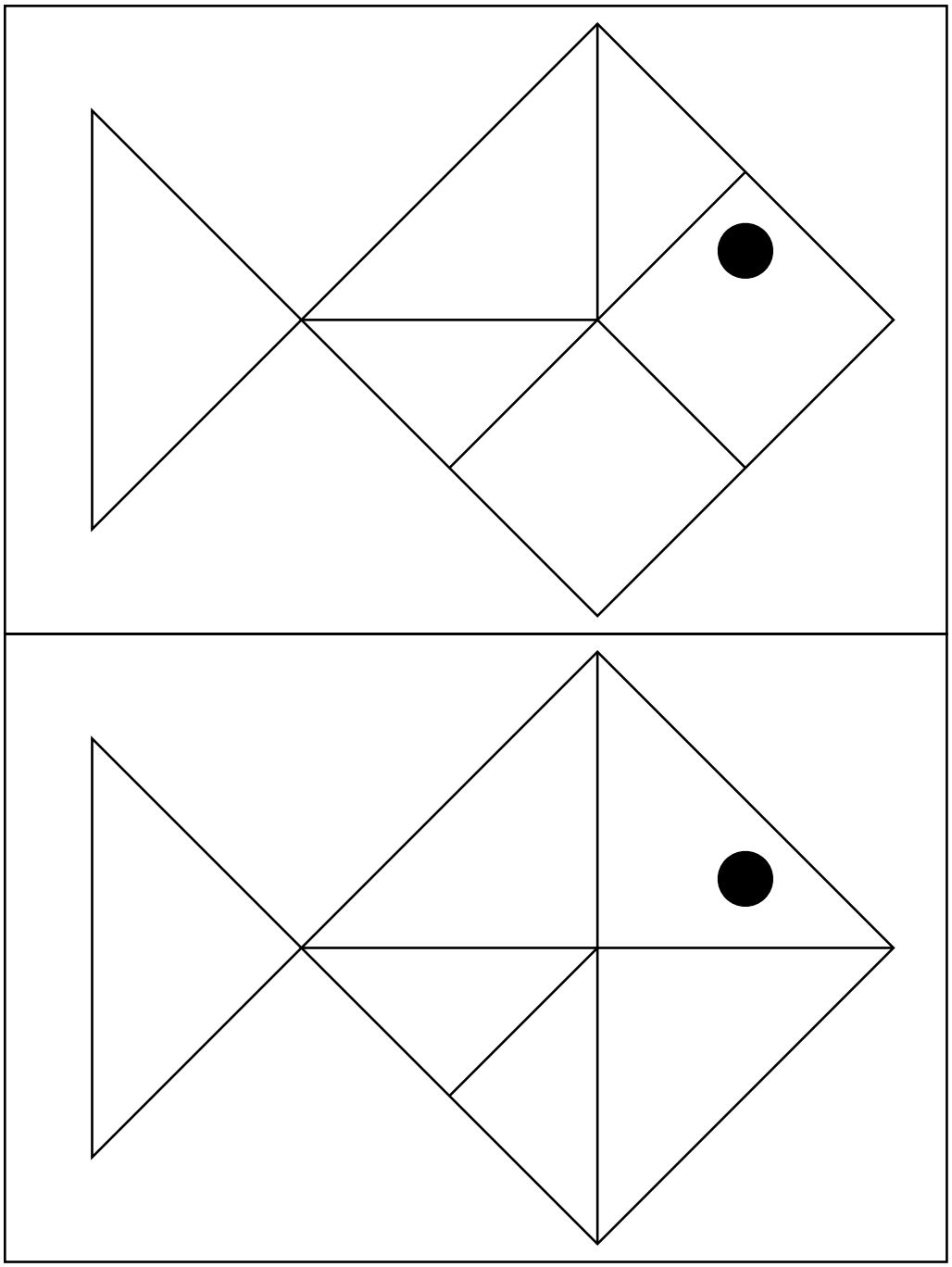
Cartes « pièces » poisson-côté (2)



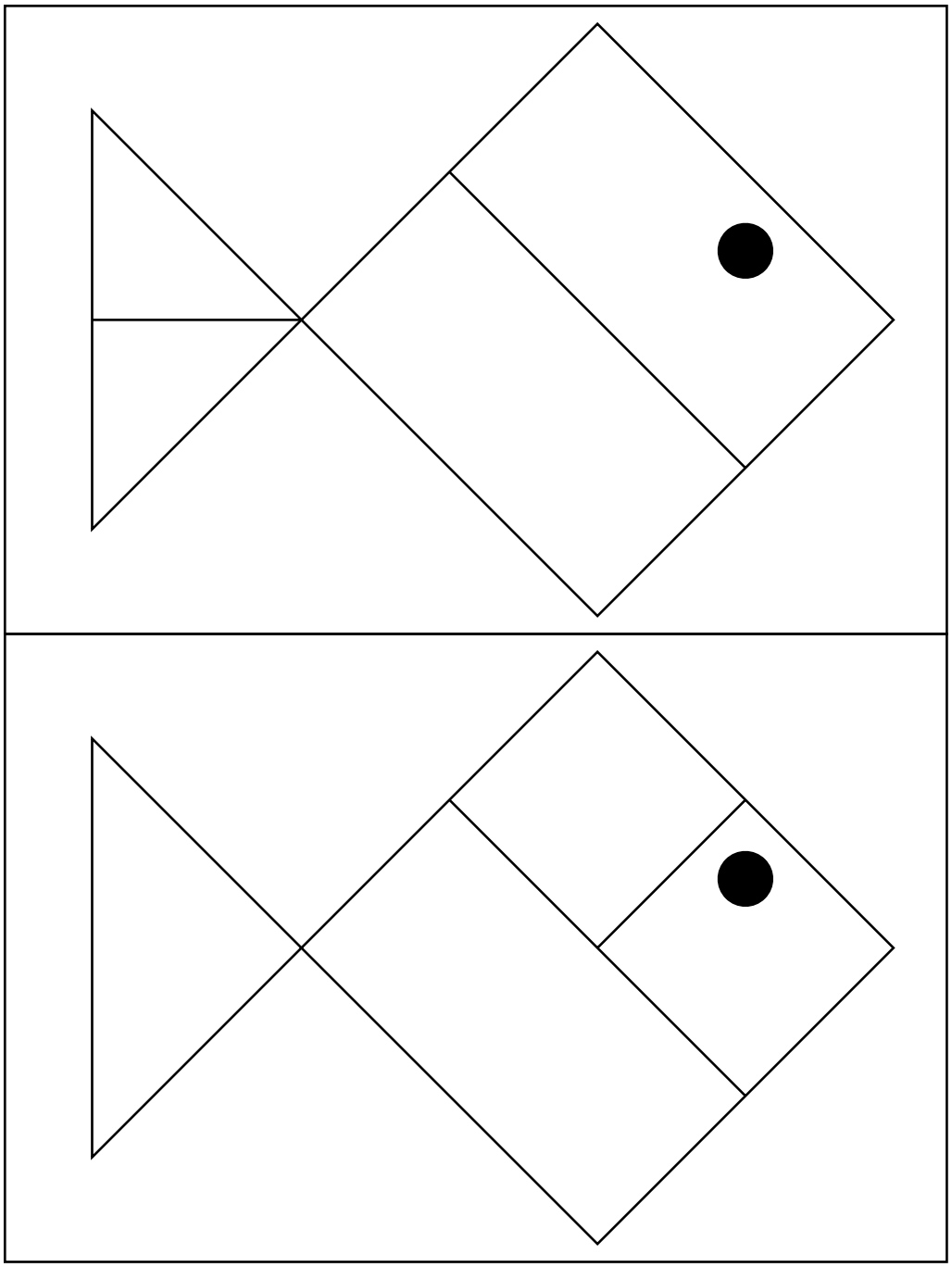
Cartes « pièces » poisson-côté (3)



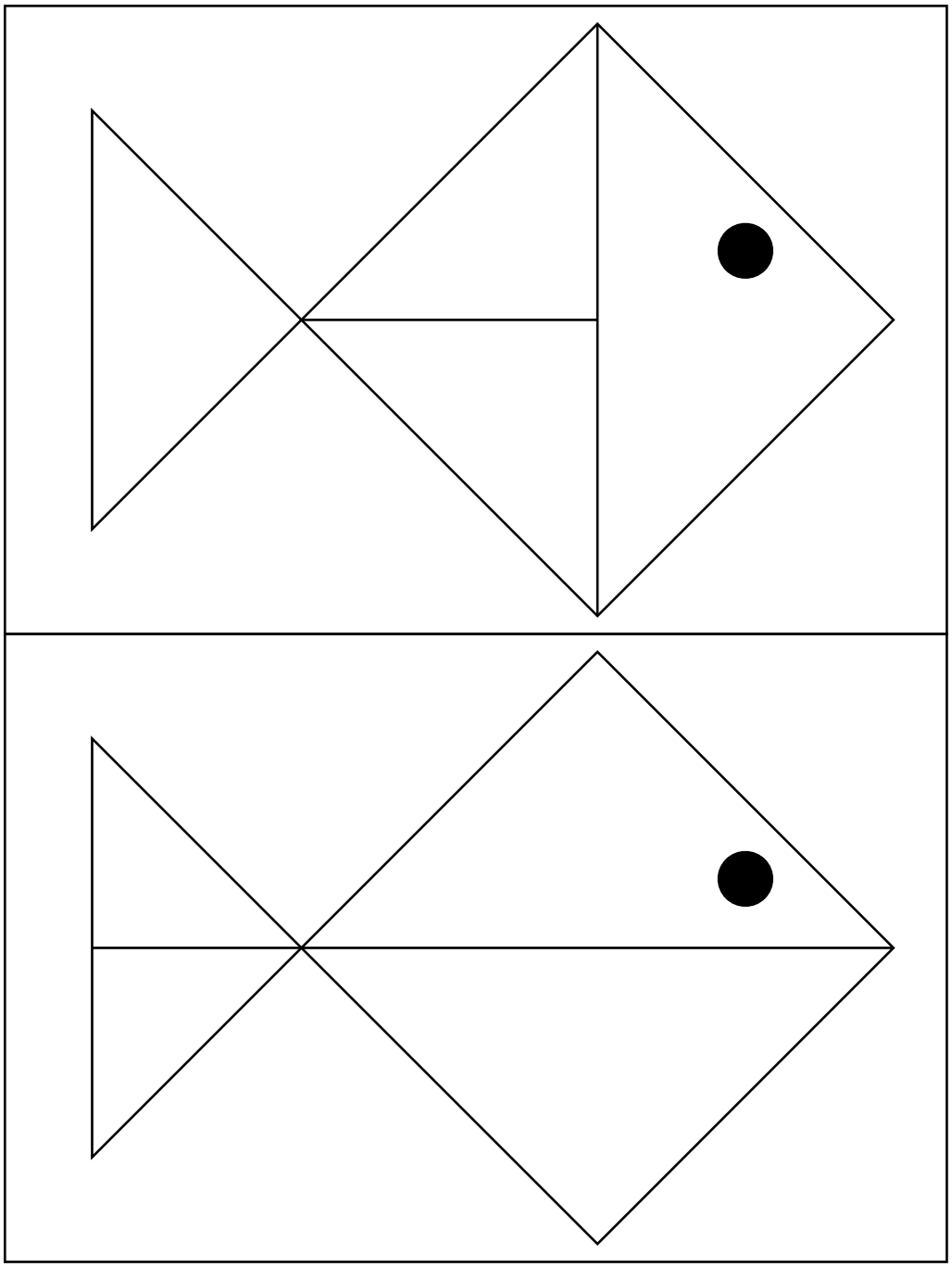
Cartes « pièces » poisson-pointe (1)



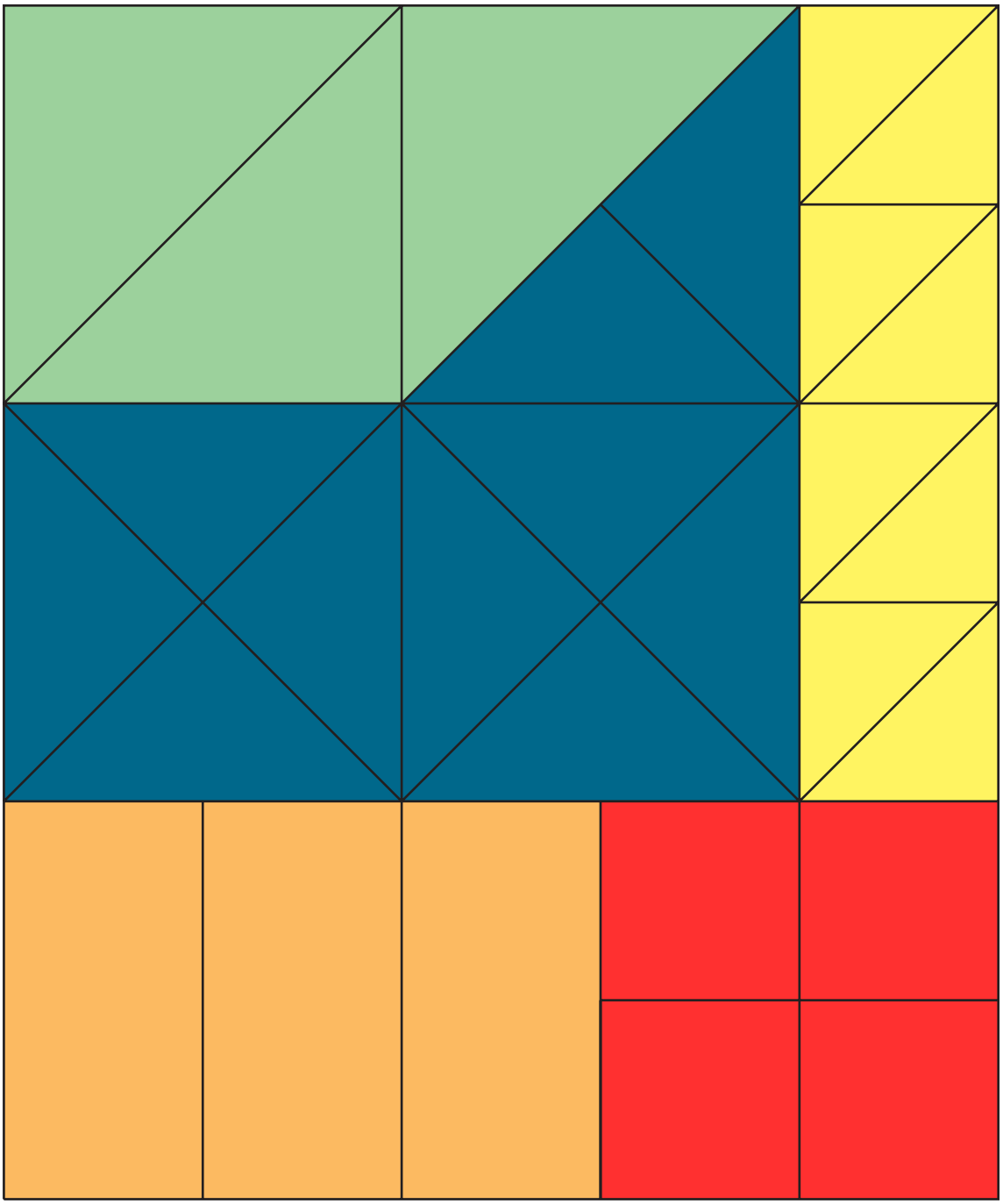
Cartes « pièces » poisson-pointe (2)



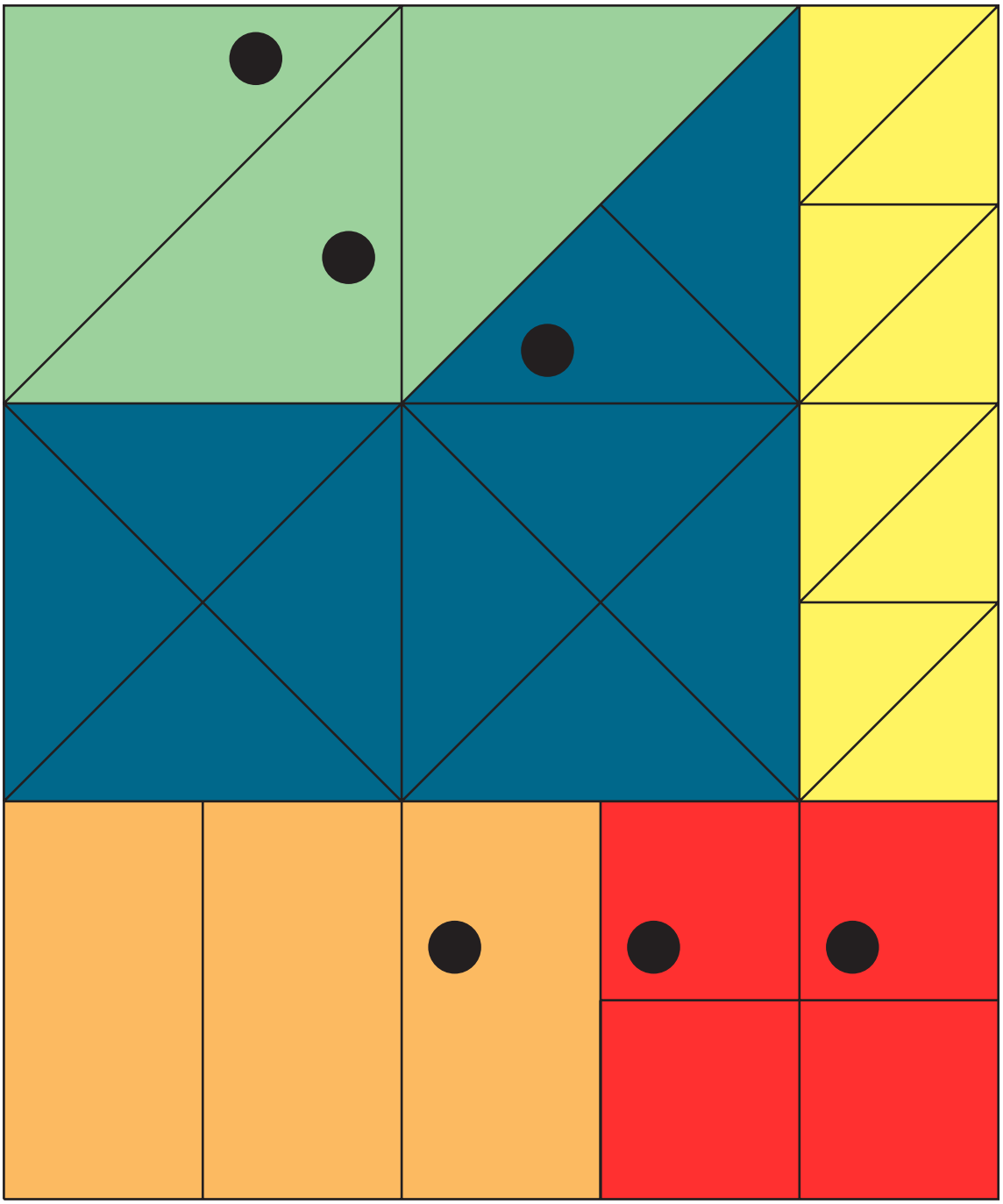
Cartes « pièces » poisson-pointe (3)



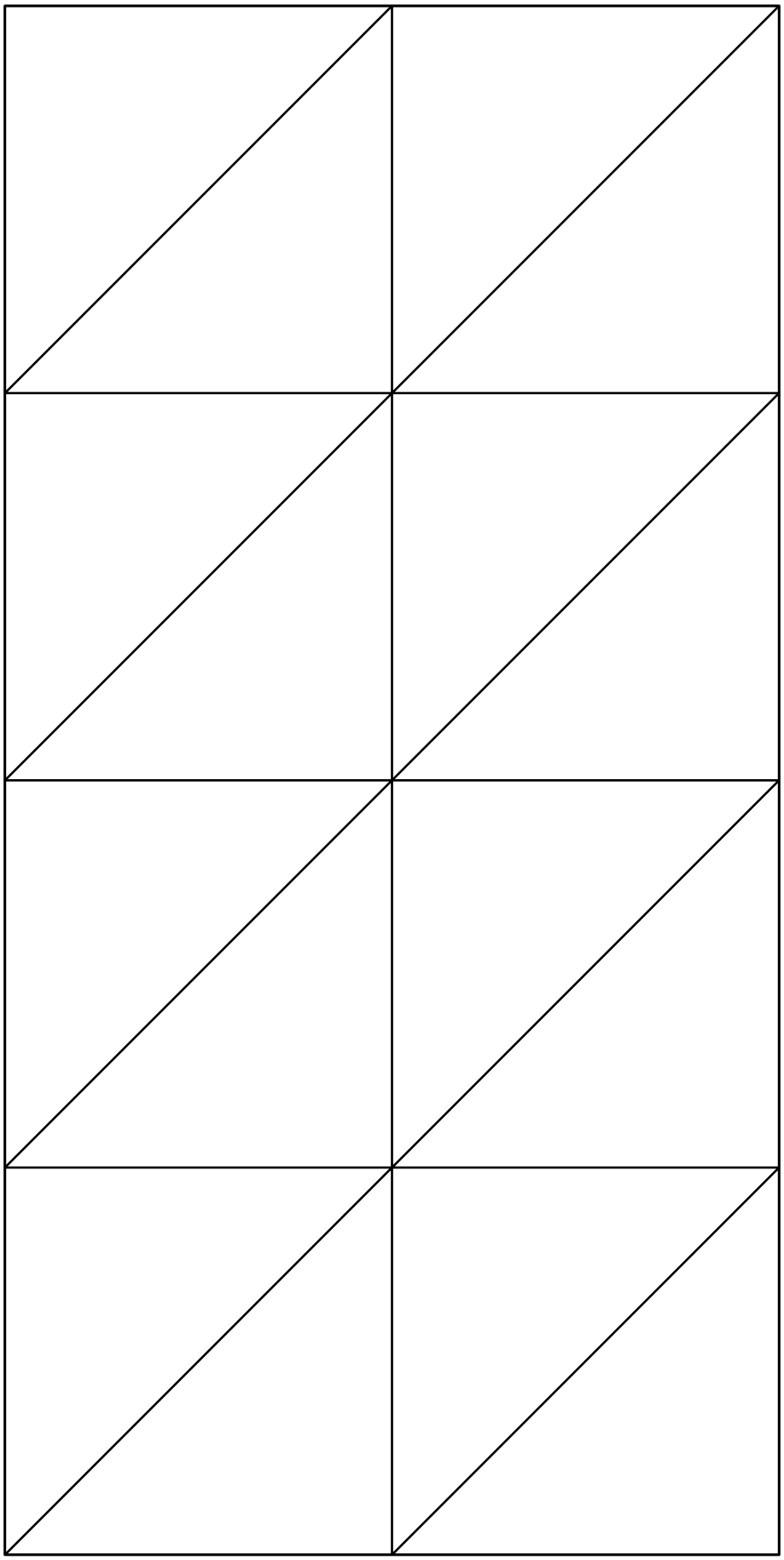
Pièces des puzzles poisson-contour et avec contraintes



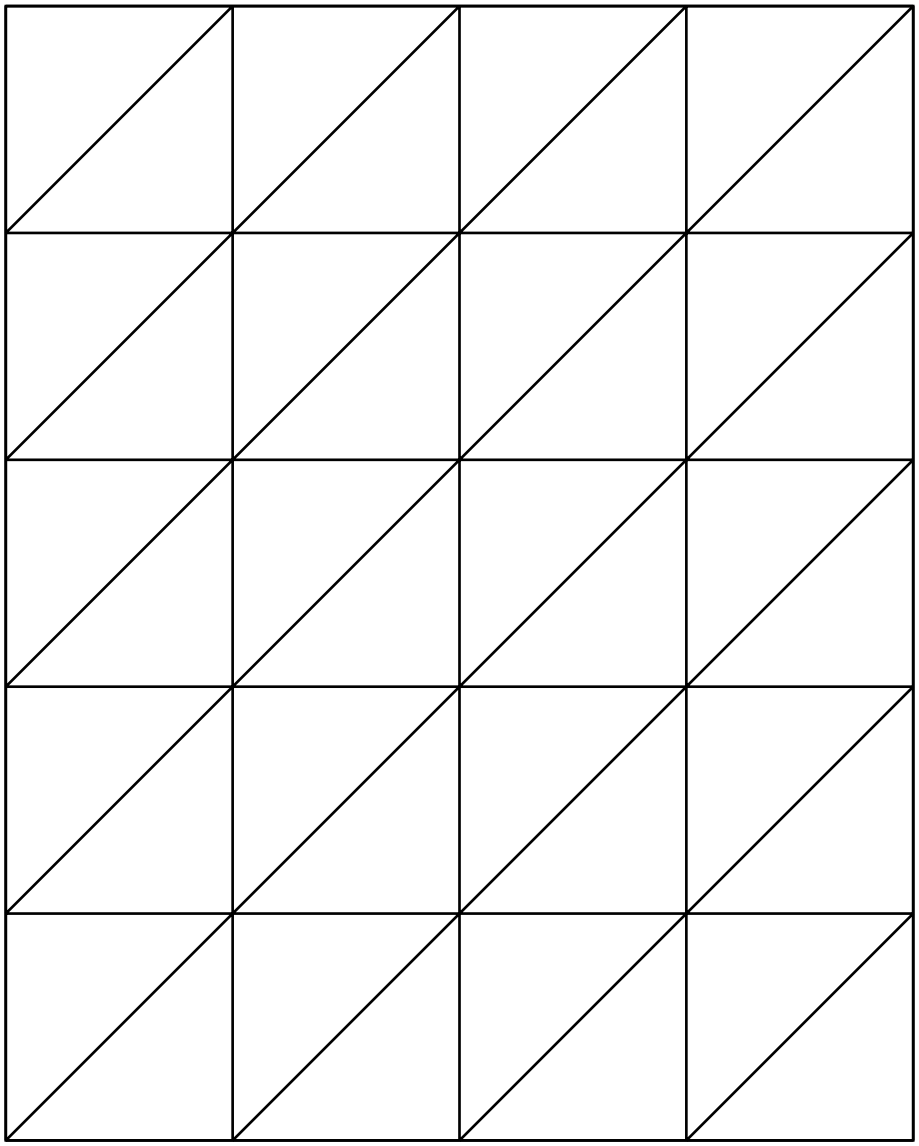
Pièces des puzzles poisson-pièces et poisson-œil



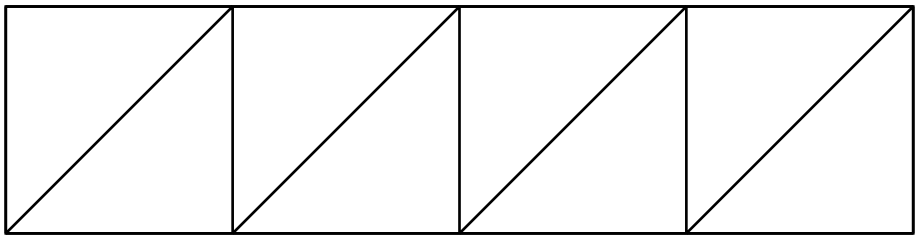
Puzzles - Grands triangles verts



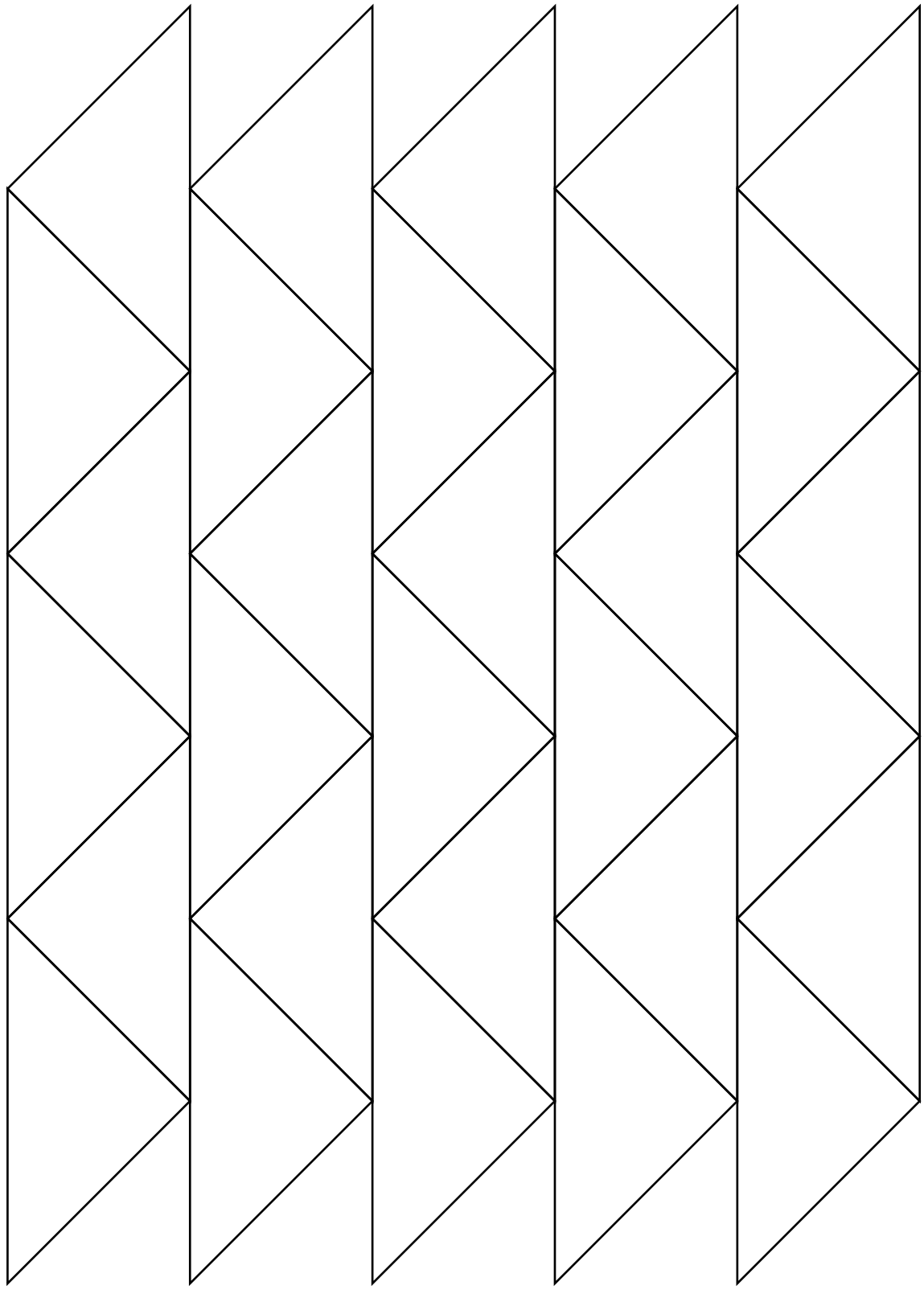
Puzzles - Petits triangles jaunes



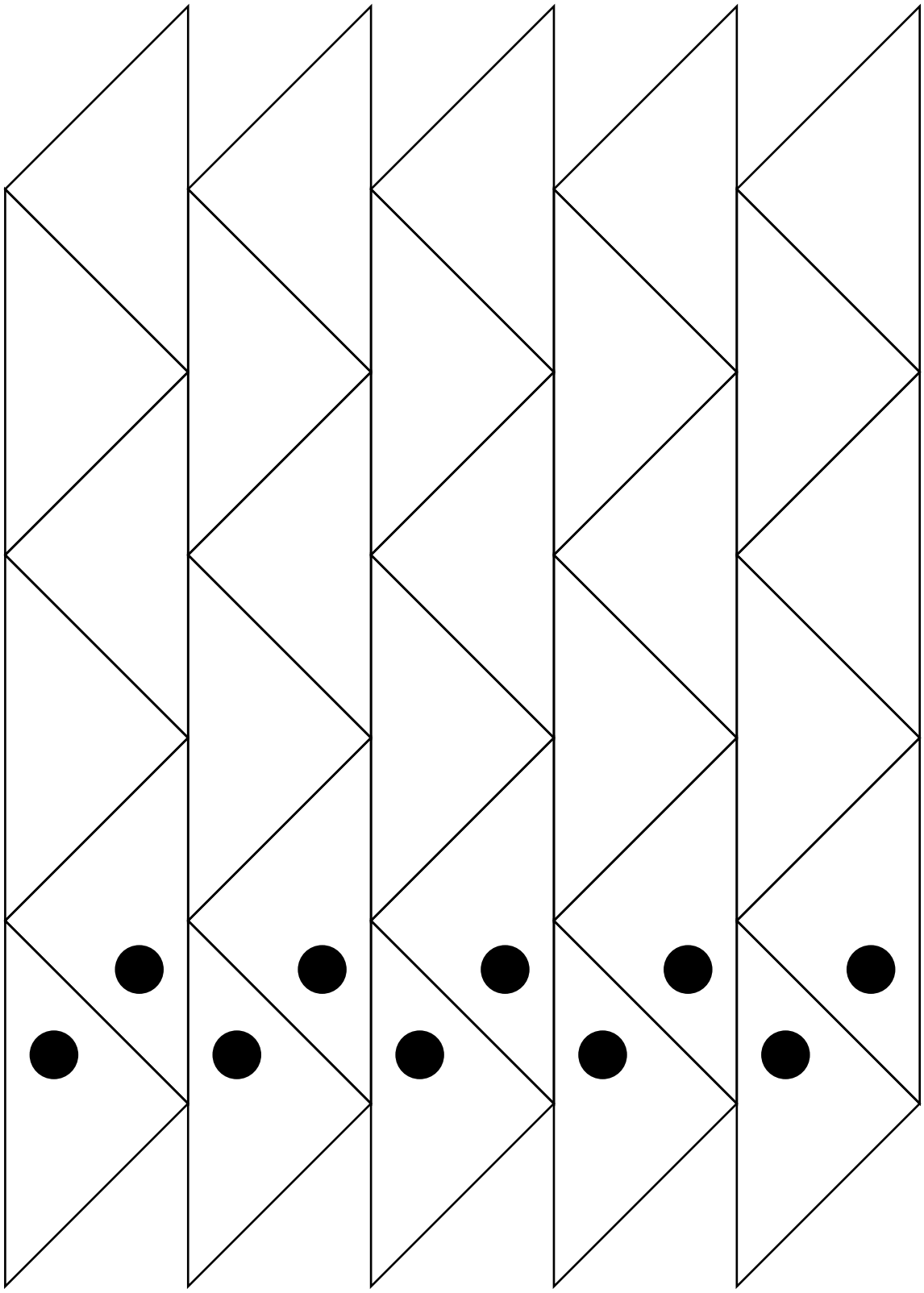
Petits triangles jaunes de réserve



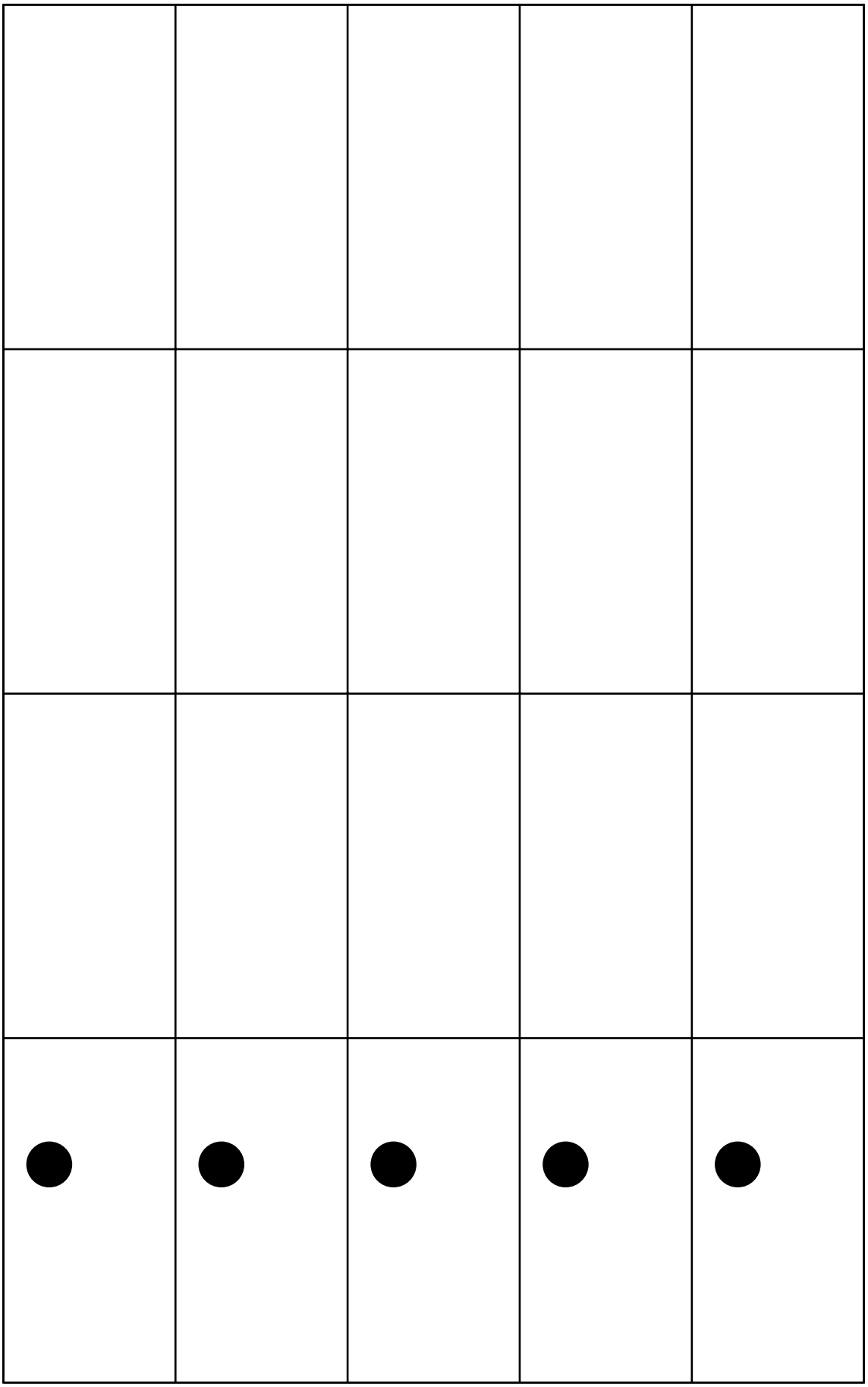
Puzzles - Triangles moyens bleus



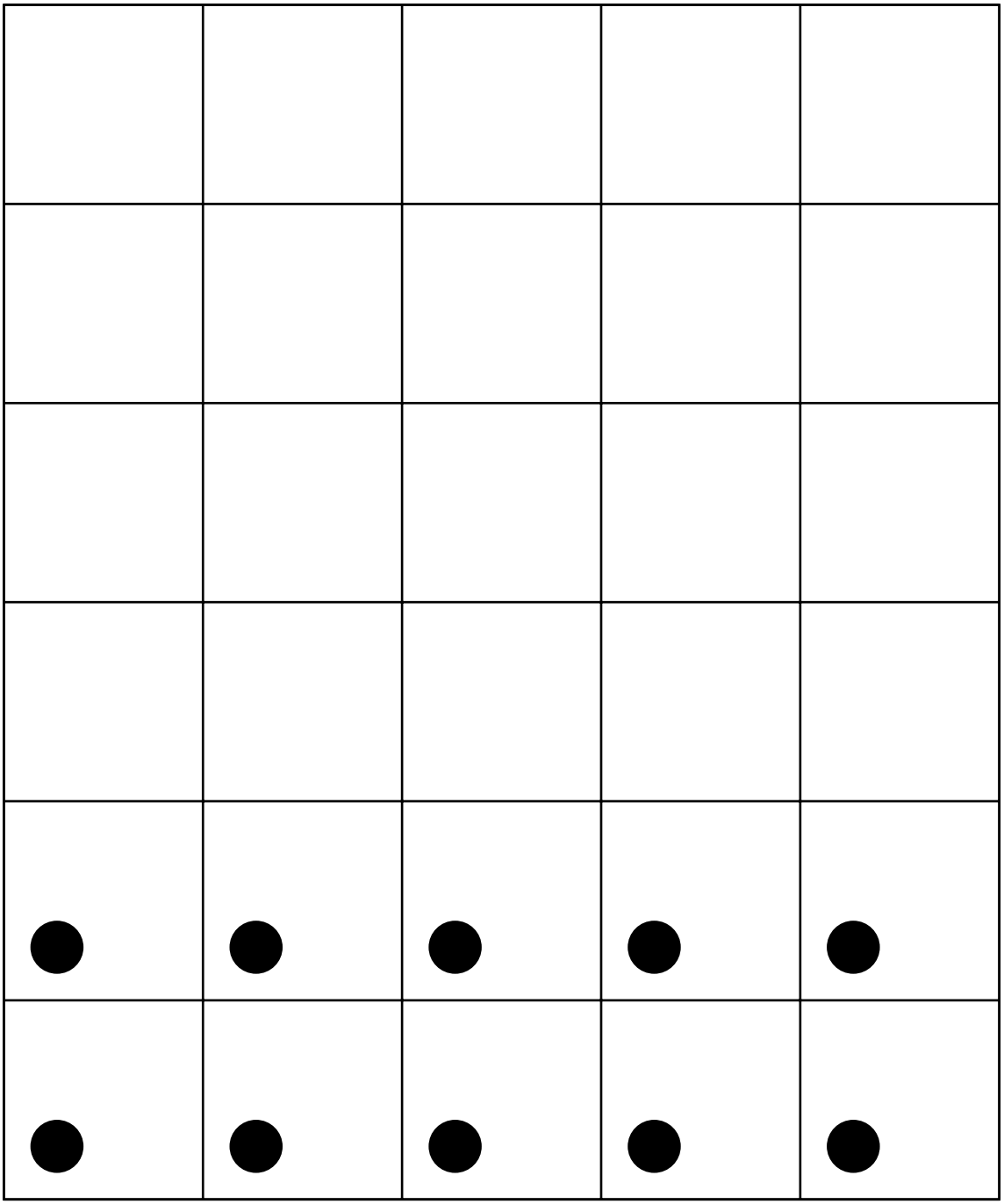
Puzzles - Triangles moyens bleus avec et sans œil



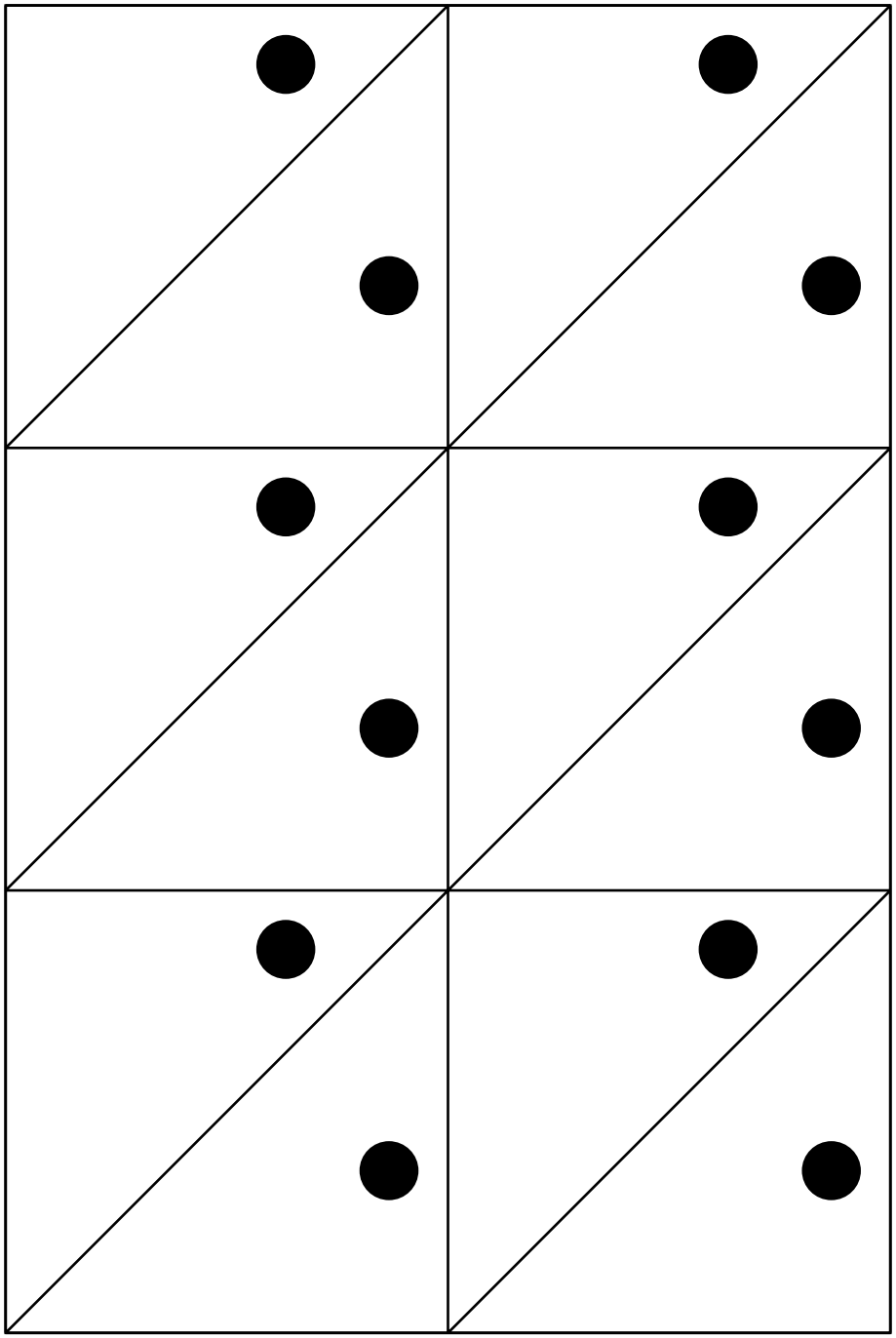
Puzzles - Rectangles orange avec et sans œil



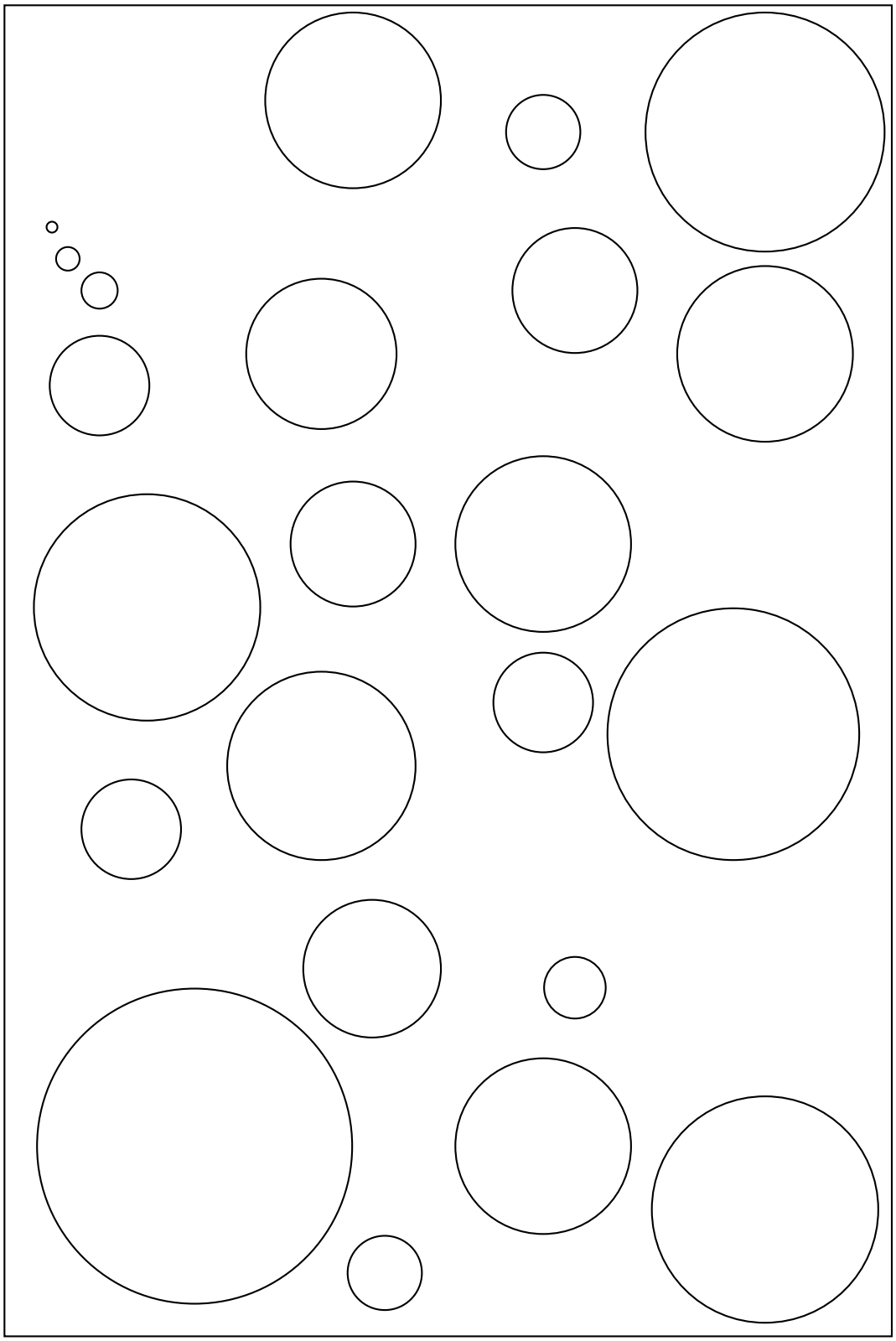
Puzzles - Carrés rouges avec et sans œil



Puzzles - Grands triangles verts avec œil



Poissons à l'intérieur et à l'extérieur



La famille poisson

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Mais lors de grands vents
Pires qu'un ouragan
Poisson en or, tu restes dehors
Poisson d'argent, tu es dedans
Poisson rieur, à l'extérieur
Poisson pleureur, à l'intérieur

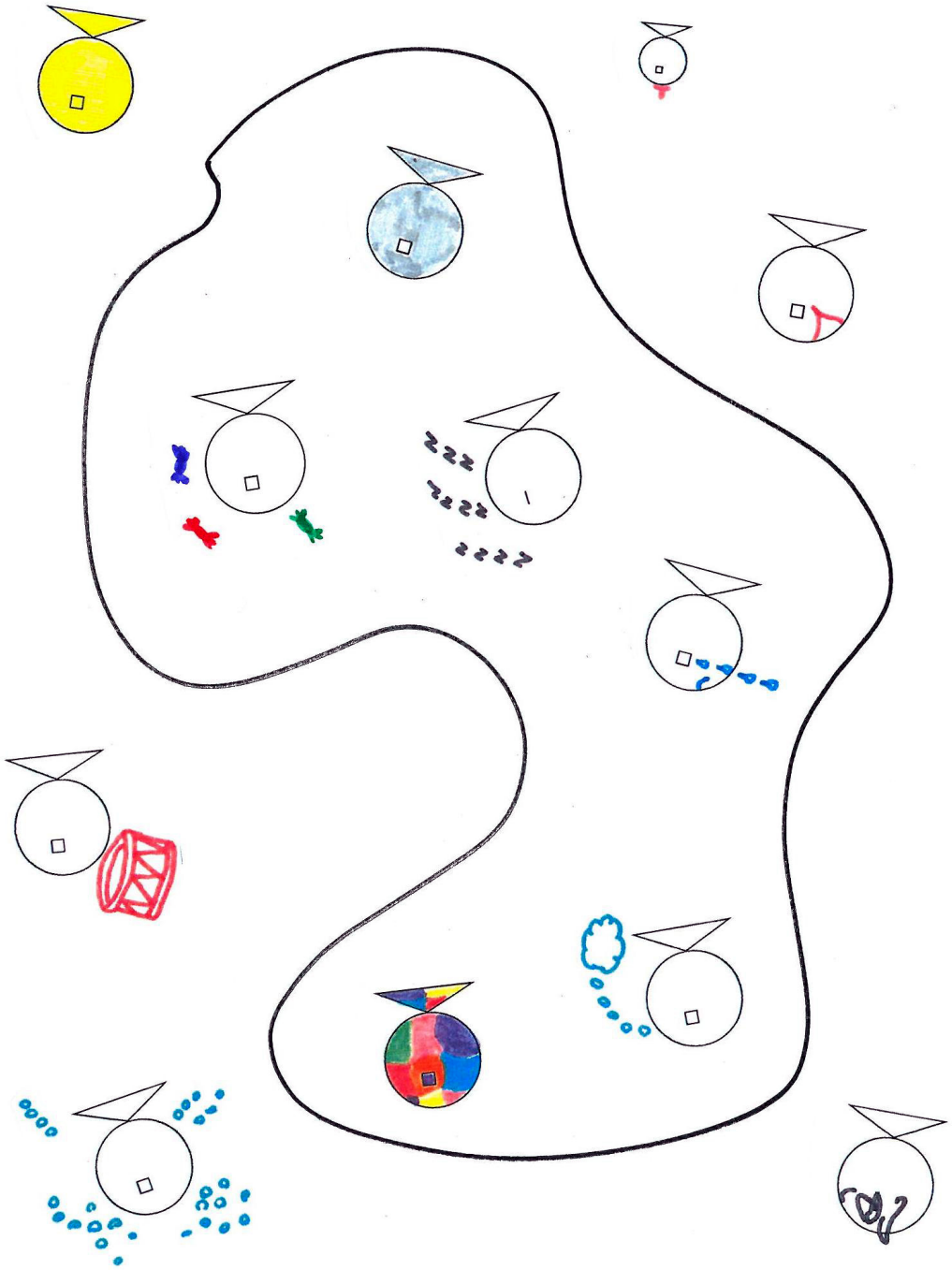
La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

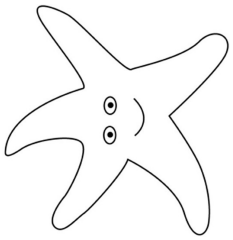
Lors de grands beaux temps
C'est l'chambardement
Poisson gourmand, tu restes dedans
Poisson junior, tu vas dehors
Poisson râleur, à l'extérieur
Poisson rêveur, à l'intérieur

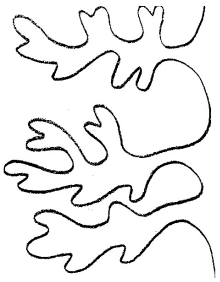
La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

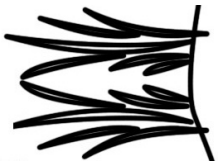
Lors de brises légères
Quand le jour se lève
Poisson tambour-major, tu vas dehors
Poisson pétillant, hors de l'étang
Poisson dormeur, à l'intérieur
Poisson couleur, à l'intérieur

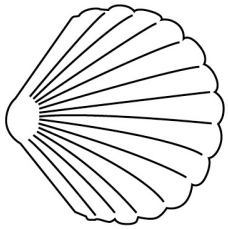
Poissons à l'intérieur et poissons à l'extérieur

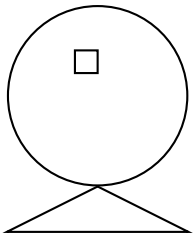


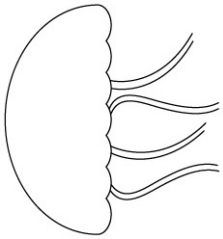












Deuxième partie

Math & Manips à partir de 5 ans

Préambule

Les *Math & Manips* présentées dans cette deuxième partie sont destinées aux élèves de l'enseignement primaire, elles sont rassemblées en trois chapitres destinés respectivement au cycle 6-8 ans, au cycle 8-10 ans et au cycle 10-12 ans. Elles sont dévolues à un travail sur les grandeurs. Il nous a paru important de proposer des activités où les enfants manipulent des objets pour comparer des longueurs, des masses, des aires, des capacités, des volumes, sans passer d'emblée aux mesures, se livrant ainsi à un véritable travail sur les grandeurs et non sur des nombres.

La séquence *Comparaison de grandeurs*, qui fait l'objet du chapitre 3, a pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison de différentes grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) sans recours aux mesures.

La comparaison des capacités est au cœur du chapitre 4 intitulé *Des étalons*. Au début de la séquence d'apprentissage, les enfants sont amenés à vivre, dans un contexte ludique, la nécessité de s'accorder sur un étalon commun, conventionnel ou non, dès que la comparaison directe de capacités devient impossible. Cette expérience débouche sur des activités plus classiques où les relations entre les différentes unités de mesure sont étudiées.

C'est la notion de volume qui occupe le chapitre 5, destiné aux élèves de la fin du primaire.

La première section *Construction de la notion de volume* est destinée à aider les enfants à s'approprier cette notion, tant pour les solides creux que pour les solides pleins. Diverses images mentales sont construites à travers de nombreuses expériences : remplissage de boîtes de formes variées, immersion de solides de masses et formes diverses, ...

Cette séquence prépare la suivante intitulée *Boîtes parallélépipédiques*. La formule du volume du parallélépipède rectangle y est construite pas à pas grâce à des activités de remplissage de boîtes au moyen de cubes de différentes dimensions. La boîte cubique n'est pas étudiée en premier, elle apparaît comme cas particulier de la boîte parallélépipédique qui présente à nos yeux l'avantage de mieux faire ressortir le rôle de chacune des dimensions. Des unités conventionnelles de volume, le cm^3 et le dm^3, sont introduites dans ce contexte, et des expériences mettent en évidence les liens entre les unités de volume et celles de capacité.

Chapitre 3

Comparaison de grandeurs

1 Conservation de la capacité

Cette activité préliminaire très importante, qui peut se faire dans les semaines précédentes, est destinée à vérifier si le principe de conservation de la capacité est acquis par tous les élèves. Cet acquis indispensable à la bonne tenue du travail sur les capacités est donc nécessaire pour la cohérence de l'ensemble de la séquence sur la comparaison de grandeurs.

De quoi s'agit-il ?

Verser des quantités de liquide identiques dans des verres différents et comparer.

Enjeu

Vérifier l'acquisition du principe de conservation de la capacité.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Un quart d'heure.

Matériel pour la classe

Autant de petits cartons de jus identiques de 20 cl que d'élèves.

Autant de verres translucides qu'il y a d'élèves dans la classe. Ces verres doivent avoir une capacité supérieure à celle du carton de jus et être de formes et de tailles variées [1].

Quelques verres translucides identiques, de capacité supérieure à 20 cl.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue un verre à chaque élève. On sélectionne des verres de différents modèles : des hauts avec une petite base (type long drink), des moins hauts bombés ou évasés, ... L'enseignant amène les petits jus et rassemble les élèves autour de lui. Il verse l'entièreté d'un petit carton de jus dans le verre de chaque élève et pose la question suivante avant que les élèves ne commencent à boire.

L'un de vous a-t-il plus à boire que les autres ?

[1] L'enseignant peut demander aux élèves d'apporter chacun un verre. Il faut cependant s'attendre à ce que les élèves amènent des verres ayant une capacité inférieure à 20 cl, verres qu'il faudra exclure. L'enseignant devra donc amener des verres supplémentaires, notamment pour varier les formes.

Si les élèves comprennent qu'ils ont tous reçu la même quantité de jus, compte tenu du fait que les petits cartons de jus versés dans chaque verre sont identiques, cela signifie que le principe de conservation de la capacité est acquis. L'enseignant entame alors les activités de la section 2.

Si des élèves répondent que certains ont reçu plus à boire que d'autres parce qu'ils se focalisent sur la hauteur atteinte par le jus dans le verre par exemple, l'enseignant fait la manipulation suivante : il donne à ces élèves des gobelets translucides identiques et y transvase le contenu des verres. Les élèves pourront se convaincre que les verres contiennent la même quantité de jus.

Dans le cas où une bonne partie des élèves n'a pas acquis la notion de conservation de la capacité, nous suggérons à l'enseignant des activités à mener avec la classe, permettant de l'acquérir. Par exemple :
- un transvasement d'eau, de sable fin, ... d'un pot A dans un pot B et du pot B vers le pot A ;
- le transvasement du contenu de deux pots identiques vers deux pots de formes différentes et inversement.

À travers ces activités, l'enseignant vérifie si les élèves ont compris que la quantité initiale d'eau, de sable, ... n'a pas changé lors des transvasements. Il répète l'opération avec des récipients de différentes formes.

2 Longueurs, capacités et masses

Dans le premier cycle de l'enseignement primaire, il est fréquent que chaque classe ait sa mascotte. Il s'agit le plus souvent d'une peluche. La préparation d'un goûter pour fêter les sept ans de la mascotte de la classe sert de fil conducteur pour l'ensemble des activités de comparaison (sections 2 et 3).

De quoi s'agit-il ?

Comparer des longueurs, des capacités et des masses sans mesurer, dans un contexte familier, celui de la préparation d'un goûter d'anniversaire.

Enjeux

Prendre conscience que la seule intuition visuelle ne suffit pas toujours pour établir une comparaison avec certitude.

Mettre en place des procédures efficaces pour établir ces comparaisons sans unité de référence.

Compétences disciplinaires

Les grandeurs

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Trois moules à gâteau de formes et de capacités différentes. L'idéal est qu'un moule ait un volume visiblement plus petit que les deux autres. Divers éléments du matériel avec lequel nous avons travaillé, notamment les moules à gâteau, sont illustrés en annexe page 133.

Quatre boîtes d'emballage identiques, opaques, de style ballotins.

Un sachet de quatre cents grammes de petites pastilles en chocolat ou environ deux cents bonbons du même type.

Une balance à plateaux.

Un torchon et un seau rempli d'eau.

Le gabarit du marque verre en annexe page 134.

Les affichettes de synthèse en annexe pages 135 (longueur et capacité) et 136 (masse).

Matériel par groupe d'élèves

Trois ou quatre bougies très fines de même diamètre et de longueurs différentes. Nous proposons d'utiliser des bougies de type Mikado, bougies très fines que l'on peut raccourcir aisément à l'aide d'une paire de ciseaux.

2.1 Bougies d'anniversaire

Sur le gâteau d'anniversaire, on disposera sept bougies, qu'on souhaite les plus longues possible.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant prépare sept lots identiques de trois ou quatre bougies de longueurs différentes (figure 28) en veillant à ce que les bougies les plus longues ne soient pas toutes de la même couleur. Il répartit les élèves en sept groupes et donne la consigne suivante.

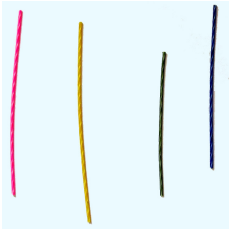


Fig. 28

Choisissez la bougie la plus longue de votre lot et apportez-la.

Pour comparer les longueurs des bougies, plusieurs stratégies sont possibles. L'une d'elles consiste à former un fagot avec les bougies et à le tenir verticalement pour voir quelle bougie dépasse. Une autre consiste à déposer les bougies à plat sur le banc. Dans ce cas, les élèves doivent veiller à en aligner les bases ou les sommets afin de déterminer la bougie la plus longue.

Il est possible aussi que chaque élève s'empare d'une bougie et la compare avec celle de son voisin. Dans ce cas, plusieurs comparaisons par paires doivent être effectuées.

Un élève de chaque groupe apporte à l'enseignant la bougie choisie.

Comme les lots de bougies sont identiques, les sept bougies choisies auront la même longueur si le travail a été réalisé correctement. L'enseignant demande à un élève de le vérifier et d'en faire part oralement à la classe.

Le but de l'activité est de constater qu'une comparaison entre des longueurs peut se faire aisément pour autant qu'il s'agisse de segments de droites. Dans ce cas, la perception visuelle peut suffire.

L'activité terminée, l'enseignant fait nommer la grandeur travaillée par les élèves en proposant, par exemple, la phrase suivante : « Nous avons comparé les *longueurs* des bougies pour trouver la bougie la plus longue ». Nous suggérons à l'enseignant de mettre au tableau une affichette

semblable à celle de l'annexe de la page 135 reprenant le mot « longueur » ainsi qu'une illustration des bougies utilisées, la plus longue étant entourée.

2.2 Moules à gâteau

Après avoir choisi les bougies, on souhaite préparer un gâteau aussi gros que possible.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant mène l'activité devant toute la classe afin de dégager une méthode efficace de comparaison des capacités. Il rassemble les élèves autour de lui, montre les trois moules à gâteau, le moule le plus haut n'ayant pas la plus grande capacité, et leur demande de les observer.

Un moule a la forme d'une couronne, l'autre a les parois alvéolées et le troisième est circulaire sans particularité (figure 29). Il pose la question suivante.

Fig. 29

> Comment s'y prendre pour trouver le moule à gâteau pouvant contenir le plus de pâte ?

L'enseignant accorde un temps de réflexion aux élèves puis écoute leurs propositions et leurs justifications. Une première impression visuelle peut inciter les élèves à dire que le moule en forme de couronne a une contenance plus petite que le moule circulaire. Cette impression est confirmée en plaçant le moule en forme de couronne à l'intérieur de l'autre qui le contient entièrement.

D'autres comparaisons relatives à la forme des moules ne sont pas significatives dans notre exemple vu que la base du moule alvéolé est plus étroite et qu'il est évasé.

Pour comparer la capacité des deux moules restants, nous proposons d'utiliser de l'eau. Certains enseignants préfèreront utiliser du sable, du sel, du riz brisé ou de la farine mais des tassements successifs de ces matières faussent la comparaison. L'eau nous semble donc plus appropriée. De plus, sa surface est toujours horizontale.

L'enseignant demande comment on pourrait utiliser l'eau pour comparer les moules. Les élèves peuvent proposer de remplir d'eau les deux moules et ne savoir que faire ensuite. S'ils proposent de tranvaser leur contenu dans deux récipients identiques, l'enseignant demande de faire la comparaison sans récipients supplémentaires. Lorsque les élèves suggèrent de remplir d'eau un premier moule puis de transvaser son contenu dans le second, plusieurs situations peuvent être rencontrées.

Les élèves sont amenés à se rendre compte que :
- s'il n'est pas possible de verser toute la quantité d'eau du premier moule dans le second, cela signifie que le premier moule a une capacité supérieure au second ;
- si, ayant versé toute l'eau du premier moule dans le second, ce dernier n'est pas rempli, cela signifie que le second moule a une capacité supérieure au premier ;
- si l'eau contenue dans le premier moule remplit exactement le second, les deux moules ont la même capacité.

Nous suggérons à l'enseignant de réaliser également le transvasement réciproque. En effet, certains élèves comprennent mieux qu'un premier moule a une plus grande capacité lorsqu'ils voient que l'eau déborde du second lors du transvasement mais d'autres élèves ont besoin de voir qu'un

moule n'est pas rempli entièrement, « qu'il y a encore de la place », pour comprendre qu'il est le moule de plus grande capacité.

Il se peut que deux des moules choisis aient la même capacité. S'il s'agit de ceux qui ont la plus grande capacité, les élèves choisissent arbitrairement un des deux pour mettre la pâte à gâteau.

L'activité terminée, l'enseignant fait nommer par les élèves la grandeur travaillée en proposant, par exemple, la phrase suivante : « Nous avons comparé la *capacité* des moules à gâteau pour trouver le moule pouvant contenir le plus de pâte ». Une affichette comme celle de l'annexe de la page 135, reprenant le mot « capacité » ainsi qu'une illustration des moules utilisés, est mise au tableau et le moule de plus grande capacité y est entouré.

2.3 Bonbons

Pour cette activité, l'enseignant prépare quatre boîtes de bonbons de masses différentes. Les élèves auront à choisir la boîte la plus lourde.

Pour préparer les boîtes, pour une classe de 22 élèves par exemple, on place 66 bonbons dans une première boîte, 51 dans une deuxième, 48 dans une troisième et 15 dans une quatrième. Une différence de trois bonbons suffit pour faire pencher une balance à plateaux. Mettre dans une des boîtes une quantité de bonbons significativement moindre permet aux élèves une comparaison de masse sans balance, uniquement en soupesant ou en secouant.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant explique la situation à toute la classe. Il a acheté un grand sachet de pastilles en chocolat de toutes les couleurs pour décorer le gâteau. Avec le reste, il a rempli quatre boîtes opaques identiques (figure 30).

Fig. 30

La première est destinée à ses enfants, la deuxième aux membres de son club de sport, la troisième aux enfants du mouvement de jeunesse dont il s'occupe et la quatrième aux élèves de sa classe, le reste du paquet de bonbons servira à la décoration du gâteau d'anniversaire. Dans chaque cas, il a compté trois bonbons par personne. Il a fermé chaque boîte à l'aide d'un ruban de couleur différente pour les différencier.

Malheureusement, il a omis d'indiquer sur les boîtes le nom de leur destinataire, mais il sait que le groupe d'enfants le plus nombreux est celui des élèves de sa classe. Dans une des boîtes, il aura donc placé autant de bonbons que trois fois le nombre d'élèves, les autres boîtes contenant des quantités moindres.

L'enseignant mène l'activité avec un groupe de quatre à cinq élèves. Pendant ce temps, les autres élèves de la classe confectionnent un marque-verre qui sera utilisé pour le goûter (en annexe page 134), ou tout autre bricolage. L'enseignant présente aux élèves du groupe avec lequel il travaille les quatre boîtes et pose la question suivante.

> Comme c'est dans votre classe que le groupe d'enfants est le plus nombreux, comment trouver la boîte que je vous ai préparée sans en ouvrir aucune ?

Les élèves doivent prendre conscience que la boîte qui leur est destinée est la boîte la plus lourde. Chaque groupe, tour à tour avec l'enseignant, s'attellera à trouver une méthode permettant de

déterminer la boîte ayant la plus grande masse[2]. Une première estimation peut se faire soit en secouant les différentes boîtes pour « entendre » si elles contiennent beaucoup ou peu de bonbons soit en les soupesant. Ces deux méthodes permettront sans doute d'éliminer la boîte la plus légère. Pour poursuivre la recherche, la nécessité d'un instrument de comparaison se fait sentir. Si la proposition ne vient pas de la part des élèves, l'enseignant propose l'emploi de la balance à plateaux, non pas afin de peser les boîtes mais pour comparer leurs masses.

Les élèves placent le ballotin qui contient, d'après eux, le plus grand nombre de bonbons sur un plateau de la balance et un autre ballotin sur le second plateau. Ils doivent se rendre compte que la boîte la plus lourde, celle contenant le plus de bonbons, fait pencher la balance de son côté[3]. Les élèves recommencent l'opération en laissant sur un plateau de la balance la boîte la plus lourde des deux et en mettant sur l'autre plateau la troisième boîte. Lorsque tous les élèves du groupe se sont accordés sur la boîte la plus lourde, ils retiennent la couleur du ruban de la boîte choisie.

Ensuite, l'enseignant effectue le même travail avec les autres groupes d'élèves. Lorsque les différents groupes ont pratiqué l'activité, l'enseignant vérifie avec les enfants que tous les groupes ont choisi la même boîte. Il ouvre ensuite la boîte et distribue trois bonbons à chaque enfant. Il ne doit pas rester de bonbons (hormis ceux destinés aux élèves absents).

L'activité terminée, l'enseignant fait nommer la grandeur travaillée par les élèves en proposant, par exemple, la phrase suivante : « Nous avons comparé les *masses* des différentes boîtes pour trouver la boîte la plus lourde ». Nous suggérons à nouveau de mettre au tableau une affichette semblable à celle de l'annexe de la page 136 reprenant le mot « masse » ainsi qu'une illustration de la balance représentant la situation.

3 Capacités, longueurs et aires

Il est intéressant de marquer une pause d'un ou deux jours après la première partie afin de laisser aux élèves le temps de s'approprier les notions découvertes jusque-là avant d'aborder la suite. Pour les activités qui suivent, l'enseignant partage sa classe en groupes de quatre ou cinq élèves.

De quoi s'agit-il ? Comparer des longueurs, des capacités et des aires sans mesurer, dans un contexte familier.

Enjeux Prendre conscience que la seule intuition visuelle ne suffit pas toujours pour établir une comparaison avec certitude.

Réexploiter ou mettre en place des procédures efficaces pour établir ces comparaisons sans unité de référence.

Compétences disciplinaires

Les grandeurs

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

[2]La différence entre « poids » et « masse » n'est pas expliquée à des élèves de cet âge. Nous avons choisi d'utiliser le mot masse pour nous exprimer correctement.

[3]Si le fait que la balance penche du côté le plus chargé n'est pas clair pour les élèves, nous proposons à l'enseignant de se référer à une activité d'une précédente recherche du CREM [13], pages 18 et 19.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Cinq à six torchons et un seau rempli d'eau.

Les affichettes de synthèse en annexe pages 136 (capacité) et 137 (longueur et aire).

Matériel par groupe d'élèves

Quatre gobelets [4] de tailles et de volumes différents, le plus haut n'étant pas celui qui a la plus grande capacité, un des quatre gobelets doit pouvoir être placé entièrement dans l'un des trois autres.

Une bassine.

Un ruban d'emballage enroulé en spirale, un ruban torsadé avec une paire de ciseaux et un ruban tendu. Ces rubans sont de longueurs différentes, supérieures à 2 mètres. Les lots des différents groupes ne sont pas identiques.

Deux serviettes de table en papier, carrées, l'une de 33 cm de côté, l'autre de 20 cm de côté.

Un set de table en papier [5] (43 cm × 30 cm).

3.1 Gobelets

La dégustation du gâteau d'anniversaire de la mascotte sera accompagnée d'un verre de grenadine dont on va déterminer le modèle. L'objectif de cette activité est que les élèves réexploitent de manière autonome les procédures mises en place au moment de la comparaison des moules à gâteaux.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant répartit les élèves en groupes puis donne à chacun d'eux quatre gobelets différents (figure 31), une bassine d'eau, et pose la question.

Fig. 31

> D'après vous, quel gobelet choisir pour avoir le plus de grenadine à boire ?

Avant la phase de manipulation, une estimation est demandée aux élèves. À première vue, un gobelet semble avoir une capacité nettement moindre que les trois autres. L'enseignant demande de justifier la mise à l'écart de ce gobelet. Celle-ci résulte du fait qu'il peut être placé entièrement à l'intérieur d'au moins un autre gobelet.

La comparaison se poursuit entre les trois autres gobelets. Les élèves comparent les gobelets deux par deux par transvasement d'eau, comme ils l'ont découvert auparavant dans l'activité

[4] Nous appelons gobelet tout récipient en plastique pouvant être utilisé pour boire.

[5] Les dimensions des sets de table ne sont pas standard. Pour notre activité, il est impératif que la largeur soit comprise entre 30 cm et 32 cm.

des moules à gâteau. Si la question se pose de savoir jusqu'où remplir chaque gobelet, l'enseignant précise que chaque gobelet est rempli à ras-bord, même si l'on sait que le jour du goûter, les gobelets ne seront pas remplis de grenadine de cette façon. L'enseignant peut aussi envisager de tracer sur tous les gobelets une ligne à 0,5 cm du bord et demander aux élèves de les remplir jusqu'à cette hauteur. Dans la pratique, il nous semble que cette manipulation exige une précision dont les élèves de cet âge ne sont pas encore capables.

Quand ils ont comparé la capacité de deux gobelets et trouvé celui des deux qui a la plus grande capacité, les élèves comparent celui-ci avec un troisième gobelet.

Une fois le choix correct effectué, l'enseignant reprend les différentes étapes à suivre pour déterminer le récipient de plus grande capacité :
- observer si la perception visuelle permet de donner une information significative sur la capacité d'un récipient ;
- comparer la capacité de deux récipients et en déduire celui qui a la plus grande capacité ;
- comparer ce dernier avec le troisième récipient.

L'activité terminée, l'enseignant fait nommer la grandeur travaillée par les élèves en proposant, par exemple, la phrase suivante : « Nous avons comparé les *capacités* des gobelets pour trouver celui qui pouvait contenir le plus de liquide ». Une affichette reprenant le mot « capacité » ainsi qu'une illustration des gobelets utilisés (comme celle en annexe page 136) est mise au tableau. On y entoure le gobelet de plus grande capacité.

Échos des classes

Lors de la phase d'estimation, la plupart des élèves pensent que le gobelet le plus haut a une plus grande contenance. Les transvasements d'eau dans les différents gobelets sont plus que nécessaires.

3.2 Rubans d'emballage

L'enseignant cuisinera le gâteau dans le moule choisi par les élèves et l'amènera dans une boîte, fermée par un ruban d'emballage. L'activité consiste à choisir le ruban le plus long pour pouvoir faire un beau nœud.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant raconte aux élèves qu'il a trouvé des rubans de longueurs différentes dans un tiroir : des rubans enroulés, d'autres rubans torsadés et d'autres encore déroulés (figure 32).

Il partage les rubans entre les différents groupes en veillant à ce que chaque groupe soit en possession d'un ruban de chaque type (enroulé, torsadé et tendu) et pose la question suivante.

Fig. 32

> Pour fermer la boîte contenant le gâteau, je souhaite utiliser le plus long ruban. Comment s'y prendre pour le trouver ?

Comme pour l'activité des bougies, il s'agit de comparer des longueurs. Dans un premier temps, chaque groupe recevra un lot de rubans dont il extraira le plus long. Ensuite, avec le groupe classe, ils détermineront le plus long ruban de cet ensemble.

Avant toute manipulation par les élèves, l'enseignant leur demande s'ils peuvent choisir le ruban de leur lot qui leur paraît le plus long. Certains diront qu'ils ne peuvent pas décider, les autres

désignent le ruban de leur choix. L'enseignant émet des doutes quant à la pertinence de cette estimation, une vérification est nécessaire. Pour comparer les rubans, les élèves doivent penser à les déplier, les tendre et aligner une de leurs extrémités. Si nécessaire, l'enseignant évoquera la situation des bougies.

Deux méthodes sont possibles : soit les élèves les comparent deux par deux, soit ils comparent tous les rubans en même temps. Dans ce cas, un élève tient les extrémités et les autres tendent chacun un ou plusieurs rubans.

Une fois le choix effectué dans chaque groupe, les rubans sélectionnés sont comparés entre eux pour trouver le plus long de tous.

L'enseignant termine l'activité en faisant nommer aux élèves la grandeur travaillée, déjà rencontrée dans une précédente activité. Nous suggérons à l'enseignant de mettre au tableau une affichette semblable à celle de l'annexe de la page 137 reprenant le mot « longueur » ainsi qu'une illustration des rubans utilisés, le plus long étant entouré.

Précisons, pour l'enseignant, que les rubans sélectionnés par les groupes d'élèves ne sont pas nécessairement les quatre plus longs de l'ensemble de tous les rubans.

3.3 Serviettes carrées ou set de table ?

Afin de donner un air de fête à la classe et pour ne pas salir l'espace de travail pendant le goûter, l'enseignant propose aux enfants de couvrir les bancs.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant demande aux élèves de faire un choix entre deux serviettes de table de forme carrée de dimensions différentes (dans notre exemple, une serviette à fleurs et une serviette mauve plus petite) et un set de table (figure 33).

L'enseignant dépose sur le banc de chaque groupe d'élèves, un exemplaire de chaque serviette dépliée ainsi qu'un set de table et pose la question suivante.

Fig. 33

> Avant de manger du gâteau, je voudrais protéger vos bancs. Quelle pièce couvre la plus grande surface : le set de table, la serviette à fleurs ou la serviette mauve ?

Un premier coup d'oeil leur permet de voir que la serviette mauve prend nettement moins de place que la serviette à fleurs, elle est mise à l'écart.

Les élèves déposent la serviette à fleurs à côté du set de table. Pour les comparer, ils doivent penser à les superposer bord à bord. La superposition du set de table et de la serviette à fleurs montre que la serviette est un peu plus large et que le set de table est plus long que la serviette.

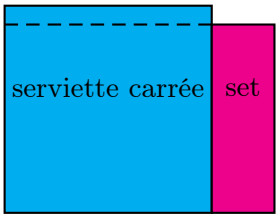


Fig. 34

Les élèves comparent à vue les morceaux qui dépassent de chaque côté et observent que le morceau de serviette qui dépasse du set occupe une plus petite place que le morceau de set qui dépasse de la serviette (figure 34).

Ils concluent que le set de table est l'élément qui a la plus grande aire et recouvre la plus grande surface du banc.

Vu l'âge des enfants, nous avons intentionnellement choisi d'éviter les découpages et misé sur une comparaison « à vue ». C'est pourquoi, il faut être très attentif aux dimensions du set de table.

L'activité terminée, l'enseignant fait nommer la grandeur travaillée par les élèves en proposant, par exemple, la phrase suivante : « Nous avons comparé *l'aire* du set de table et des serviettes carrées pour trouver l'élément recouvrant la plus grande surface de notre banc ». Une dernière affichette (comme celle en annexe page 137) est mise au tableau. Elle reprend le mot « aire » ainsi qu'une illustration du matériel utilisé, l'élément de plus grande aire y est entouré.

Échos des classes

Comme indiqué plus haut, nous déconseillons le découpage du set et des serviettes car, pour une partie des élèves, les morceaux découpés ne font plus partie de la serviette ou du set. Ce constat se retrouve davantage quand l'activité est menée en début de première année. Cependant, si la proposition vient des élèves, elle peut être suivie.

Certains élèves disent, en plaçant aussi les morceaux découpés sur la table : « ça décore aussi la table ». Cela veut peut-être dire, avec leurs mots, que les morceaux font bien partie de la serviette ou du set. Dès lors, il importe que l'enseignant amène les élèves à expliciter leur conclusion en fonction des découpages et assemblages réalisés. On peut en effet espérer que les élèves qui ont proposé le découpage ont bien acquis la conservation de l'aire.

3.4 Synthèse

Après ces manipulations, une synthèse est nécessaire, comprenant à la fois les démarches effectuées par les élèves et des éléments plus théoriques. Elle complète la synthèse orale effectuée après chaque manipulation au moyen des affichettes proposées aux pages 135 à 137.

Les élèves pourraient dessiner eux-mêmes ce qu'ils ont découvert tout au long de la *Math & Manip*, en tenant compte du matériel utilisé par l'enseignant et des réflexions émises en classe.

3.5 Le goûter d'anniversaire

Au cours des jours qui suivent, la classe fête l'anniversaire de la mascotte. Les élèves dressent la table en couvrant leurs bancs d'un set de table en papier. Ils déballent le gâteau dont la boîte est tenue fermée par le plus long ruban puis décorent, à l'aide des bonbons, le gâteau préparé dans le moule ayant la plus grande capacité. Ils piquent les sept plus longues bougies. Ils remplissent de grenadine les gobelets de plus grande capacité, en n'omettant pas de les identifier par leur marque-verre.

Ils chantent « Joyeux Anniversaire ! », le plus fort qu'ils peuvent.

Chapitre 4

Des étalons

1 Comparaison directe de deux capacités

De quoi s'agit-il ?

Comparer directement les capacités de deux récipients.

Enjeux

Prendre conscience que la seule intuition visuelle ne suffit pas toujours pour établir une comparaison de capacités.

Mettre en place des procédures efficaces pour établir ces comparaisons sans unité de référence.

Compétences disciplinaires **Les grandeurs**

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

De 20 à 30 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Une paire de récipients de volumes différents et de formes telles qu'on ne puisse préjuger du récipient qui a le volume le plus grand. Ces récipients sont vides et dépouillés de toute indication liée à leur capacité. Un exemple de paire de récipients se trouve en annexe page 138.

Un seau d'eau, un entonnoir et des torchons.

Un petit récipient, par exemple un gobelet, qui permet de remplir facilement des récipients.

Matériel pour la classe

Des gommettes de deux couleurs.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant forme des groupes de quatre à cinq élèves. Pour chaque groupe, il a disposé sur une table un seau d'eau, un torchon, la paire de récipients à comparer sur lesquels il colle préalablement des gommettes de couleur afin de faciliter l'explication (une couleur différente pour chacun des deux récipients), un gobelet qui permet de remplir facilement les deux récipients à comparer et un entonnoir. Il fait découvrir aux élèves ce matériel et pose ensuite les questions suivantes.

Selon vous, quel récipient a la plus grande capacité ? Pourquoi ?

L'enseignant demande aux élèves de réfléchir individuellement et récolte les avis avant toute manipulation. Parmi les justifications avancées par les élèves, certaines conceptions, éventuellement fausses, pourraient émerger (le récipient le plus haut a la plus grande capacité, le récipient le plus large a la plus grande capacité, ...). Les récipients doivent être choisis de manière à provoquer des avis contradictoires qui donneront tout son sens à l'activité de vérification qui suit.

Pour établir la réponse avec certitude, vérifiez quel récipient a la plus grande capacité.

On impose aux élèves de réaliser les manipulations au-dessus du seau. Ils devraient penser à remplir à ras bord un des récipients, puis transvaser son contenu dans l'autre récipient. Si le second récipient n'est pas complètement rempli, alors il a la capacité la plus grande. Par contre, si ce même récipient déborde ou s'il reste de l'eau dans le premier récipient, c'est le premier qui a la plus grande capacité.

Cette démarche pour comparer les capacités des deux récipients a peut-être déjà été mise en place au cours du cycle 6-8 ans. Dans ce cas, les élèves devront se remémorer une procédure déjà connue ; sinon, ils devront la découvrir.

L'enseignant conclut par une brève synthèse orale en reprenant le but de l'activité et la stratégie mise en œuvre (un exemple de synthèse est proposé page 140).

Échos des classes

Il peut arriver que des élèves fassent la demande de deux récipients transparents identiques. Ils proposent d'associer à chacun des récipients à comparer un de ces deux récipients identiques, d'y verser le contenu des récipients de départ, de comparer les niveaux atteints par l'eau dans ces récipients identiques et d'en déduire quel récipient de départ a la plus grande capacité. Cette démarche est correcte, mais il faudra faire prendre conscience aux élèves que cette manière de procéder n'est pas la plus efficace. Elle nécessite des récipients supplémentaires dont on ne dispose pas forcément et augmente le nombre de tranvasements. Le but de l'activité est de faire découvrir la méthode la plus directe.

Certains élèves comparent les récipients remplis en les soupesant. L'enseignant doit leur faire remarquer le manque de précision lié à cette méthode de comparaison et, éventuellement, l'erreur due aux masses différentes des récipients vides.

2 Étalons non conventionnels

De quoi s'agit-il ?

Comparer indirectement deux capacités avec des étalons familiers.

Enjeux

Amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un étalon.

Compétences disciplinaires **Les grandeurs**

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers [...] *et en exprimer le résultat (*[...]*, capacités,* [...]*).*

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Un seau d'eau, un entonnoir et des torchons.

Un crayon et un bloc-note.

Matériel pour la classe

Deux récipients de grande taille pouvant tenir le rôle des amphores, chacun d'eux placé dans une caisse en plastique. Leurs capacités doivent être différentes mais assez voisines. On exclut les récipients de forme parallélépipédique pour éviter que les élèves n'utilisent une formule pour calculer le volume.

Un symbole des pays dans lesquels ont été découvertes les amphores (exemples en annexe pages 138 et 139).

Deux valisettes comprenant le même matériel (une tasse blanche, un bol rouge, ...). Un exemple de contenu se trouve en annexe page 141.

Les fiches de vocabulaire, en annexe pages 145 et 146.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant aménage deux zones de part et d'autre de la classe, suffisamment distantes pour simuler l'éloignement géographique. Il dispose dans chacune un bloc-note, un seau rempli d'eau, des torchons, une des deux « amphores » ainsi que le symbole du pays dans lequel l'amphore a été découverte. Il prend les valisettes, rassemble les élèves autour de lui et leur raconte l'histoire dans l'encadré ci-après, destinée à les placer dans une situation où la comparaison directe des récipients n'est plus possible.

Tout en racontant l'histoire, l'enseignant peut utiliser les fiches de vocabulaire afin de définir certains mots nouveaux pour les élèves. Lorsqu'il leur explique qu'ils vont partir avec leur malle, il ouvre les deux valisettes afin de faire remarquer qu'elles contiennent bien le même matériel.

Vous êtes deux équipes d'archéologues. Avant de partir en expédition, vous avez fait vos malles ensemble et vous emportez exactement le même matériel de travail. Une équipe part sur un site de fouilles en Grèce, une autre en Égypte. Au cours des fouilles, les équipes se donnent des nouvelles. Il se fait qu'elles ont trouvé toutes les deux une amphore. Chaque groupe estime avoir découvert l'amphore de plus grande capacité. Malheureusement, ces amphores sont trop fragiles pour être transportées de sorte qu'il n'est pas possible de les comparer directement. Afin de déterminer l'amphore de plus grande capacité, vous pouvez utiliser le matériel de votre malle et échanger des informations écrites. Vous êtes également en contact avec un expert belge auquel vous devez envoyer un rapport mentionnant les résultats de la comparaison et leur justification.

Une fois l'histoire achevée, il partage la classe en deux groupes, remet à chaque équipe une valisette et envoie les élèves vers la destination qui leur a été attribuée. Chacune des équipes trouve dans ce lieu le récipient représentant l'amphore découverte, ainsi qu'une réserve d'eau.

L'enseignant annonce qu'il fera circuler entre les équipes les blocs-notes à utiliser pour écrire les messages et qu'il joue également le rôle de l'expert qui attestera que le rapport est scientifiquement correct ou non. Il est parfois nécessaire de rappeler l'objectif à atteindre que les élèves oublient en cours de manipulations. L'enseignant doit également superviser les messages qui circulent entre les deux équipes afin qu'ils soient clairs.

En sortant le matériel de la valisette, chaque groupe est confronté au choix d'un objet approprié à la mesure de la capacité de son amphore. Certains objets sont très petits (bouchon, cuillère, etc.), ce qui rend fastidieux le remplissage de l'amphore. D'autres sont plus grands (boîte de conserve, tasse, etc.), ce qui manque de précision mais permet néanmoins de mesurer par encadrement. De plus, des objets inadaptés à la mesure de capacité ont été placés, avec pour possible effet de focaliser l'attention des élèves sur la hauteur, la largeur, la longueur, ... de l'amphore. Notons que certains groupes pourraient se servir d'étalons variés, plus grands et plus petits (bol et pot à cure-dents, etc.) afin d'amener plus de précision.

Plusieurs situations peuvent se présenter.

- Les deux équipes se mettent d'accord sur un étalon, à un moment donné, sans intervention de l'enseignant. Pour celles-ci, l'activité est presque terminée. Il ne leur reste plus qu'à mesurer la capacité de leur amphore et à comparer leurs mesures pour établir l'amphore de capacité la plus grande.
- Les deux équipes ne pensent pas à s'accorder sur un étalon. Deux cas de figures sont alors possibles :
  - les équipes ont utilisé des récipients différents comme étalon. Quand elles rendent leur rapport, l'expert le désapprouve, quels que soient les résultats, en raison de l'inadéquation de la démarche ;
  - les équipes ont pris le même récipient comme étalon, par hasard. L'expert envoie alors un message annonçant par exemple : « Une troisième amphore a été découverte en Espagne par une équipe disposant du même matériel que vous. L'équipe dit qu'elle a une capacité de 21 bols rouges [1]. Est-elle de plus grande capacité ? ».

Les équipes doivent, dans tous les cas, prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un récipient commun. Il reste aux élèves à procéder, une nouvelle fois si nécessaire, à la mesure de la

[1] L'étalon utilisé par l'équipe d'archéologues en Espagne doit être différent de celui utilisé par les deux équipes mais se trouver dans leur valisette. Le nombre mentionné doit être compatible avec les valeurs obtenues par les élèves pour les deux amphores.

capacité de leur amphore avec cet étalon. Les mesures ainsi obtenues sont finalement comparées et cela débouche sur la détermination de l'amphore de plus grande capacité.

À la fin de cette expérience, le matériel est laissé en place, avec les amphores de chaque groupe remplies, pour l'activité suivante.

Échos des classes

Les élèves ont tendance à se précipiter pour remplir leur amphore avec tous les récipients fournis dans la valisette. Lorsqu'ils doivent donner la capacité de leur amphore, ils ne savent généralement plus combien de récipients de chaque sorte ils ont utilisés. Parfois un élève propose de n'utiliser qu'un seul récipient pour remplir l'amphore. Les élèves discutent alors, dans leur groupe, pour choisir le récipient qu'ils vont utiliser. Si les élèves s'éloignent inutilement de la situation, l'enseignant intervient rapidement.

Comme prévu, les élèves ne pensent généralement pas à utiliser le même récipient dans les deux groupes. Il faut attendre qu'ils confrontent leurs résultats, incomparables (étant donné les différences de choix des récipients), pour qu'ils pensent à utiliser un même récipient comme étalon. Le but de l'activité est alors atteint.

3 Étalons conventionnels : le litre et ses sous-multiples

De quoi s'agit-il ?

Comparer des capacités avec des étalons conventionnels.

Enjeux

Utiliser un étalon pour sérier des capacités.

Reconnaître des égalités de capacités lorsqu'elles sont exprimées dans des unités différentes.

Compétences disciplinaires **Les grandeurs**

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...]*, capacités,* [...]*).*

Connaître le sens des préfixes [...], *déci.*, [...], *centi., milli.*

Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Deux périodes de 50 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Un seau vide, un entonnoir et des torchons.

Un gobelet qui permet de remplir facilement des récipients.

Matériel pour la classe

Les deux récipients de grande taille qui ont joué le rôle des amphores dans l'activité qui précède.

Deux récipients gradués dont les graduations sont claires et où apparaissent les mêmes sous-multiples du litre.

Une série de récipients de formes et de tailles variées portant une indication de capacité. Des exemples sont proposés en annexe page 142.

Les fiches à distribuer à chaque élève, en annexe pages 147 et 148.

Prérequis

Il est important que les élèves aient déjà travaillé la multiplication et la division par dix avec des nombres entiers.

3.1 Et si on comparait avec un autre étalon ?

Comment s'y prendre ?

Cette activité est à faire directement après la précédente, le matériel (les valisettes et les amphores) est donc déjà en place. L'enseignant poursuit l'histoire.

> Une autre amphore a été découverte en Turquie. Les archéologues turcs ont mesuré la capacité de cette amphore avec leur propre matériel. L'amphore contient 33 verres.
> Classez les amphores de Turquie, de Grèce et d'Égypte selon leur capacité.

Notons que le verre utilisé comme étalon par l'équipe de Turquie ne doit pas se trouver dans les valisettes et que les élèves ne peuvent donc pas imaginer sa taille. Ils doivent se rendre compte qu'il est difficile de trouver exactement les mêmes récipients d'un pays à l'autre. Une discussion s'engage avec le groupe classe autour des étalons familiers. La question d'un étalon commun universel devrait se poser. Au terme de cette discussion, l'enseignant peut formuler la réflexion suivante.

> Avant, comme nous l'avons fait, on mesurait avec toutes sortes d'objets de la vie courante qui servaient d'étalons. Avec quel étalon, très répandu, mesurons-nous les capacités actuellement ?

Cette question est destinée à amener les élèves à évoquer le litre ou l'un de ses sous-multiples.

Il est possible de s'interroger sur l'origine du litre. Cela peut être l'occasion d'établir des liens avec les cours de français, d'histoire, de géographie, ... Cette interdisciplinarité peut être travaillée au travers de recherches documentaires ou du petit bout d'histoire suivant, à adapter par l'enseignant.

> Autrefois, il existait beaucoup d'étalons pour mesurer les capacités. Parfois des étalons portant le même nom pouvaient représenter des capacités différentes. Ainsi, la pinte – unité utilisée pour évaluer des marchandises liquides – n'était pas la même partout. En mesurant les pintes de l'époque, nous pouvons constater que celle de Termonde correspond aujourd'hui à 0,5715 litre et celle de Louvain à 0,7485 litre.

> C'est notamment pour faire face à ces inégalités entre étalons portant le même nom qu'à l'époque de la Révolution française on adopta un système de mesures commun pour tout le territoire français, système qui s'est peu à peu étendu à la majeure partie de l'Europe et puis au monde. C'est ainsi que le litre devint l'étalon conventionnel pour les mesures de capacité.

Lorsqu'il s'agit d'amener le litre et ses sous-multiples comme étalons de référence, l'enseignant explique aux élèves que l'on quitte l'histoire des archéologues et que l'on revient en classe à l'époque actuelle. Il peut notamment utiliser la situation de choix entre deux bouteilles de limonade dans un supermarché afin d'amener le nom des mesures de capacité. De cette manière les élèves évoquent rapidement le litre en expliquant qu'il faut lire les étiquettes.

3.2 Et si on classait les amphores ?

Comment s'y prendre ?

Maintenant que le litre a été évoqué comme unité de référence, l'enseignant reforme les deux équipes des sites de Grèce et d'Égypte. Celles-ci regagnent leur espace d'expérimentation où elles retrouvent leur amphore remplie d'eau et un seau vide pour recueillir l'eau. L'enseignant distribue les récipients gradués (il peut utiliser la fiche de vocabulaire page 147) et reprend l'histoire.

> Communiquant avec l'équipe de Turquie, vous apprenez que leur amphore a une capacité de $3\,\ell$ et $750\,m\ell$. Mesurez votre amphore à l'aide du récipient gradué et, ensuite, classez les trois amphores de celle qui a la plus grande capacité à celle qui a la plus petite.

L'enseignant doit choisir la capacité de l'amphore turque de telle sorte que la partie entière de sa mesure – en litres – coïncide avec celle d'au moins une des amphores de Grèce et d'Égypte. La partie décimale, quant à elle, doit être choisie en fonction des sous-unités apparaissant parfois implicitement dans les graduations des récipients utilisés.

Pour mesurer la capacité de leur amphore, les élèves doivent la vider à l'aide du récipient gradué distribué. L'amphore étant remplie à ras bord, les élèves risquent de la faire déborder en y insérant le pot. Ils peuvent alors utiliser un plus petit récipient, comme un gobelet, afin de limiter les débordements éventuels. Ils veillent à remplir à chaque fois le récipient gradué jusqu'à une de ses graduations afin de pouvoir additionner les mesures des quantités qu'ils retirent de l'amphore. Une autre solution est de verser, dans le seau vide, l'eau contenue dans l'amphore et de la remplir, à nouveau, avec l'eau recueillie en suivant le même principe. Dans les deux cas, il reste aux élèves à additionner toutes les mesures des volumes transvasés pour connaître la capacité de leur amphore.

Remarquons qu'il faut éviter que les élèves jettent l'eau contenue dans l'amphore avant de commencer à mesurer car ils se trouveraient alors face à une difficulté supplémentaire. En effet, s'ils remplissent l'amphore litre après litre, il arrivera un moment où ils ne pourront plus verser l'entièreté de leur récipient gradué dans l'amphore et il y aura un reste dans le récipient gradué. Par exemple, s'il reste $650\,m\ell$ dans le récipient gradué, les élèves doivent en déduire que $350\,m\ell$ ont été versés dans l'amphore.

Au terme de leur travail, les équipes de Grèce et d'Égypte devraient trouver un nombre entier de

litres et un reste pouvant être exprimé avec un ou plusieurs sous-multiples du litre. L'enseignant note les résultats du classement au tableau.

À ce stade de l'activité, il est important de formuler une synthèse avec les élèves rappelant les points découverts. L'enseignant peut utiliser l'exemple se trouvant en annexe page 140.

Échos des classes

Lorsqu'on demande aux élèves comment mesurer l'amphore, certains d'entre eux proposent de mesurer l'étalon utilisé pour remplir l'amphore et de multiplier cette capacité par le nombre de fois qu'ils ont vidé cet étalon dans l'amphore. Cette façon de procéder est correcte mais il convient de souligner le manque de précision lié aux erreurs cumulées lors des manipulations que cette méthode pourrait engendrer.

3.3 Et si on classait des récipients ?

Comment s'y prendre ?

Le travail qui suit est réalisé avec l'ensemble de la classe. Après avoir disposé sur la table des récipients avec indication de capacité (une série de récipients est proposée en exemple à l'annexe page 142), l'enseignant démarre le classement avec trois récipients ayant des capacités différentes. Par exemple, un premier groupe est créé avec un récipient d'une capacité de $750\,m\ell$, un deuxième avec un récipient d'une capacité de $1\,\ell$ et un troisième avec un récipient d'une capacité de $2\,\ell$. Il donne la consigne suivante aux élèves.

> Rassemblez les récipients par groupes de même capacité.

L'enseignant invite les élèves, un à un, à choisir un récipient et à le placer dans un groupe existant ou à créer un nouveau groupe. Une fois qu'un élève a placé le récipient choisi, l'enseignant interroge les autres élèves en leur demandant s'ils sont d'accord avec le classement effectué. Si dans un premier temps les élèves classent dans des groupes différents des récipients de $20\,c\ell$ et de $200\,m\ell$, par exemple, il faut les laisser faire, l'enseignant y reviendra par la suite.

Dans les récipients proposés, il est intéressant de retrouver des canettes de même forme et de même capacité mais celles-ci notées avec des unités différentes. Il peut également y avoir des récipients sur lesquels la capacité est inscrite de plusieurs manières. Des situations de ce genre font prendre conscience aux élèves des égalités de certaines capacités et les incitent éventuellement à corriger leur classement. Il est intéressant de faire remarquer que des récipients de formes très différentes peuvent avoir la même capacité. Si des élèves ne sont pas convaincus, ils peuvent vérifier par manipulations mais il se peut que certains récipients étiquetés de même capacité n'aient pas la même contenance quand ils sont remplis entièrement. L'enseignant peut alors expliquer aux élèves que dans le commerce les récipients ne sont jamais remplis à ras bord.

L'enseignant doit être attentif au choix des récipients. Nous déconseillons de choisir des récipients où la capacité n'est pas exprimée par un nombre entier avec des élèves qui n'ont pas encore travaillé les nombres décimaux.

Une fois le classement correct achevé l'enseignant rassemble les résultats dans un tableau. La fiche 4 permet de recopier les indications de capacité des récipients. Voici un exemple de ce que les élèves pourraient obtenir en plaçant dans une même colonne les mesures de capacité d'un

même groupe de récipients.

Litre					$1\,\ell$			$2\,\ell$
Décilitre								
Centilitre		$33\,c\ell$	$75\,c\ell$	$20\,c\ell$	$100\,c\ell$	$25\,c\ell$	$50\,c\ell$	$200\,c\ell$
Millilitre	$50\,m\ell$	$330\,m\ell$	$750\,m\ell$	$200\,m\ell$	$1000\,m\ell$	$250\,m\ell$	$500\,m\ell$	

C'est l'occasion de découvrir avec les élèves la signification du préfixe des unités de mesure travaillées. Suite à cela, les élèves peuvent essayer de compléter le reste du tableau, avec le décilitre notamment, qu'ils n'ont pas eu l'occasion de rencontrer sur les récipients. En effet, nous n'avons pas trouvé dans le commerce de récipients étiquetés en décilitres.

S'il le souhaite, l'enseignant demande de classer les groupes de récipients par ordre croissant en fonction de leur capacité.

Échos des classes

Si les trois récipients de départ sont « mal choisis », les élèves peuvent ne pas bien comprendre la consigne. Par exemple, si on propose de former les trois premiers groupes à partir d'un récipent de 2 ℓ, un de $33\,c\ell$ et un dernier de $250\,m\ell$, les élèves pourraient continuer le classement sur base des unités de mesure notées sur les récipients et non en fonction de leur capacité.

De manière générale, les élèves ne classent pas spontanément le récipient de $50\,c\ell$ avec ceux de $500\,m\ell$. Dans un premier temps, même le récipient marqué $1000\,m\ell$ n'est pas identifié comme un récipient de $1\,\ell$. Deux canettes de même capacité et de même apparence avec des indications différentes ($330\,m\ell$ et $33\,c\ell$) suscitent généralement le débat sur l'équivalence ou non de leur contenance. Les élèves s'aperçoivent ainsi qu'une même capacité peut être notée de différentes façons. Suite à cela, ils regroupent d'autres récipients qu'ils n'avaient pas classés ensemble auparavant.

Certains élèves veulent cependant classer les récipients de $2\,\ell$ et $200\,c\ell$ dans le groupe qui contient ceux de $200\,m\ell$ et $20\,c\ell$. En regroupant les récipients, ils s'aperçoivent immédiatement que ceux-ci ne peuvent être de même capacité.

La plupart des élèves ne se fient pas à l'apparence des récipients, ils relisent toutes les étiquettes afin de classer le récipient choisi. Quelques uns comparent leur récipient à vue avec les récipients déjà classés afin d'estimer le groupe dans lequel ils pourraient le placer. C'est pourquoi il est important de prévoir un récipient de capacité beaucoup plus petite (dans notre cas il s'agit d'une bouteille de shampooing de $50\,m\ell$) ou beaucoup plus grande afin de pouvoir expliquer qu'il n'est pas toujours obligatoire de comparer avec toutes les capacités mais qu'il suffit parfois de juger à vue si d'autres récipients ont la même capacité ou si ce n'est pas du tout le cas.

Prolongements possibles

Après l'ensemble des manipulations, l'étude des relations entre les différentes unités de mesure peut se poursuivre par l'utilisation de l'abaque ou tout autre exercice de changement d'unité. L'enseignant peut, par exemple, demander aux élèves de rassembler des étiquettes reprenant différentes mesures de capacité trouvées dans les publicités et de les trier, voire d'en faire un jeu de cartes afin de jouer à la bataille.

Lors du classement des canettes, l'enseignant peut amener la canette où la capacité est indiquée en nombre décimal, à savoir une canette de $0{,}33\,\ell$. Puisqu'il s'agit du même récipient que deux autres canettes de $330\,m\ell$ et $33\,c\ell$ déjà classées (même forme et mêmes dimensions), les élèves peuvent aisément classer la nouvelle canette de $0{,}33\,\ell$ dans le même groupe que les précédentes. Ils complètent le tableau en y indiquant $0{,}33\,\ell$. Ceci les amène à l'égalité $330\,m\ell = 33\,c\ell = 0{,}33\,\ell$. L'égalité découverte permet à l'enseignant de travailler les nombres décimaux.

Après avoir complété le tableau de classement des récipients où les élèves ont vu que 1 litre est égal à 10 décilitres, l'enseignant peut faire apparaître qu'un décilitre vaut en fait $\frac{1}{10}$ de litre et poursuivre le travail sur les fractions.

Chapitre 5

Notion de Volume

Préambule

La mise au point d'une séquence d'apprentissage sur le volume du parallélépipède rectangle et les expérimentations menées en classe dans ce cadre nous ont fait comprendre à quel point la notion de volume était délicate à circonscrire avec les élèves et, dans un même temps, combien il était nécessaire de poser des bases solides pour la compréhension de ce concept. L'impossibilité d'une définition rigoureuse et complète, à ce stade de l'enseignement, nous a amenés à mettre en place, dans cette séquence, une série d'expériences qui confrontent les pré-conceptions des élèves à la réalité de la situation et conduisent à la création d'images mentales diverses dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, les notions de volume d'un objet plein, que l'on peut immerger, ou d'un objet creux, que l'on peut remplir, nous ont semblé fondamentales.

Pour trouver le volume d'un objet creux, on peut le remplir de riz, de sable, d'eau par exemple. Notre choix s'est porté sur des objets dont les parois sont suffisamment fines pour être négligeables car nous n'avons pas souhaité travailler la distinction entre volume intérieur et volume extérieur d'un objet. Si cet objet est de forme parallélépipédique, le remplir de cubes permet une approche du calcul du volume qui, par la suite, amènera une formule.

Lorsque l'objet est plein, rechercher son volume par remplissage est impossible. Dans ce cas, on considère le volume comme la place qu'occupe l'objet dans l'espace. Il est cependant plus facile de trouver la place que prend un objet lorsqu'il est immergé dans un liquide car, contrairement à l'air, le déplacement du liquide est visible et mesurable.

Pour terminer le chapitre, nous proposons quelques expériences destinées à tisser des liens entre les différentes approches, notamment entre la démarche expérimentale et le calcul théorique.

1 Construction de la notion de volume

De quoi s'agit-il ? Construire la notion de volume par remplissage d'objets creux et immersion d'objets pleins.

Enjeux Favoriser la construction d'images mentales de la notion de volume.

Comprendre que des objets de formes et de masses différentes peuvent avoir le même volume.

Compétences disciplinaires

Les grandeurs

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une à deux périodes de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Une boîte cylindrique et une boîte parallélépipédique de même volume [1], pouvant être remplies.

Un kilogramme de brisure de riz.

Une boule de pétanque en acier et environ 500 g de pâte à modeler, de préférence de deux couleurs, afin de former deux boules de même volume que la boule de pétanque.

Un récipient transparent, non gradué, pouvant contenir de l'eau et dans lequel les formes en pâte à modeler peuvent être immergées. Un bassin dans lequel on peut placer ce récipient. Un torchon.

Du ruban adhésif mat et un marqueur pour écrire dessus.

Un cube ou autre objet creux de forme parallélépipédique qu'on peut ouvrir et fermer hermétiquement, qui peut être lesté. Des pièces de monnaie pour le lester.

Les fiches 5 à 8 des pages 149 à 152 (la partie inférieure de la fiche 5 est prévue pour le prolongement de la page 130).

1.1 Comparaison de boîtes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant montre aux élèves les deux boîtes de même volume mais de formes très différentes. Pour notre exemple, nous avons choisi une boîte de conserve de forme cylindrique et avons construit une boîte de forme parallélépipédique de même volume (figure 35).

Fig. 35

L'enseignant met du riz à la disposition des élèves puis donne la consigne suivante.

> Sans utiliser de matériel supplémentaire, comparez la quantité de riz que peut contenir chaque boîte remplie à ras bord.

[1] Nous avons choisi une boîte de conserve de 11,3 cm de hauteur et de 9,8 cm de diamètre, soit un volume égal à 852 cm^3. Puis nous avons construit, en papier cartonné, une boîte parallélépipédique dont le produit des trois dimensions est proche de 852 cm^3, à savoir $L = 17$ cm, $\ell = 10$ cm et $H = 5$ cm.

Avant toute manipulation, l'enseignant demande aux élèves de donner leur idée sur le résultat de cette comparaison. Les avis seront probablement partagés car la perception visuelle ne permet pas d'affirmer qu'une boîte peut contenir plus ou moins de riz que l'autre. Certains élèves pourraient se baser sur des propriétés de l'objet telles la hauteur, la largeur, ... La première estimation a justement pour objectif de faire émerger ces premières conceptions.

Après cette étape d'estimation, les élèves s'engagent dans une démarche de comparaison. Puisque nous excluons le recours à du matériel supplémentaire, la solution la plus évidente consiste à remplir à ras bord un premier récipient de riz et à transvaser ensuite son contenu dans le second. Ce dernier se trouvant également rempli à ras bord, on peut conclure que les deux boîtes contiennent la même quantité de riz. On dira qu'elles ont même volume. L'enseignant confronte les idées de départ des élèves avec le résultat obtenu après l'expérience.

Cette expérience permet d'associer le volume d'un objet creux à la quantité de matière qu'il peut contenir et de montrer aux élèves que *des objets de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

Échec des élèves Lorsque les élèves comparent la quantité de riz que contient chaque boîte, il arrive que des élèves remplissent les deux boîtes puis réalisent que ces remplissages ne permettent pas de comparaison sans autre matériel.

1.2 Comparaison d'objets pleins

Cette séquence vise à multiplier les expériences pour analyser les liens entre la taille, la forme et la masse d'un objet avec son volume. Le but est de mettre en place petit à petit les images mentales qui construisent la notion de volume.

Objets identiques

Comment s'y prendre ?

L'enseignant présente aux élèves deux boules [2] en pâte à modeler qui ne diffèrent que par la couleur (figure 36).

L'enseignant explique aux élèves que, comme ces objets ne peuvent être remplis, on compare leur volume en les immergeant dans l'eau. Il pose la question suivante.

> Lorsque je les immerge tour à tour, laquelle de ces deux boules déplace le plus d'eau ?

Fig. 36

Les boules étant identiques, les élèves devraient penser qu'elles déplacent la même quantité d'eau.

L'objectif ici est surtout de mettre en place la procédure expérimentale qui exige de faire exactement la même expérience avec chacune des deux boules, ce qui implique de retirer la première avant de plonger la seconde.

[2] Pour la suite de l'activité, il est impératif que ces deux boules soient de même volume que la boule de pétanque choisie pour l'expérience de la page 116.

Si on plonge la deuxième boule sans retirer la première, chaque boule déplace la même quantité d'eau, mais les différences de niveau provoquées par ce déplacement dépendent de la forme du récipient.

L'enseignant met à la disposition des élèves un récipient contenant de l'eau. Sur la paroi de ce récipient, il colle un morceau d'adhésif transparent sur lequel seront notés par un trait les différents niveaux d'eau. Il sollicite un élève pour mener l'expérience devant la classe. L'élève note d'un trait le niveau initial de l'eau. Il immerge ensuite la première boule et note d'un second trait le niveau atteint par l'eau. La différence entre les deux traits permet de voir la quantité d'eau déplacée. L'élève retire la première boule et immerge la seconde. Les déplacements d'eau provoqués par chaque boule et les différences de niveau qu'ils engendrent sont identiques.

L'expérience confirme que deux boules identiques déplacent la même quantité d'eau, résultat auquel s'attendaient les élèves. La quantité d'eau déplacée correspond à leur volume.

De cette expérience, on dégage une première approche de la notion de volume : *deux objets identiques déplacent la même quantité d'eau. Ils ont le même volume.*

Échos des classes

Des élèves ont mis la deuxième boule dans le récipient en y laissant la première. L'écart occasionné par l'immersion de la deuxième boule est le même que celui produit par l'immersion de la première boule car nous utilisons un récipient de forme parallélépipédique. Généralement dans le cas d'un récipient quelconque, cette propriété n'est pas vérifiée. Comme le but ici n'est pas d'attirer l'attention sur cette propriété propre à la forme du récipient, nous privilégions le processus décrit plus haut pour toute la suite des expérimentations.

Objets de tailles différentes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant présente aux élèves deux boules de pâte à modeler de tailles visiblement différentes (figure 37) et donne la consigne suivante.

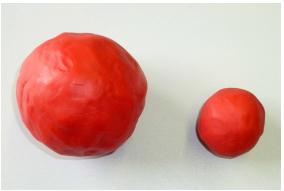


Fig. 37

> Comparez les déplacements d'eau lors de l'immersion de chacune de ces deux boules.

Les élèves voient qu'une boule prend plus de place que l'autre et prévoient spontanément que les déplacements d'eau ne seront pas égaux et que la boule la plus grosse déplacera plus d'eau.

L'enseignant demande à un élève de réaliser l'expérience devant la classe. L'élève note le niveau initial de l'eau, immerge une boule et note le niveau atteint. Il sort la boule de l'eau et recommence la même opération avec la seconde boule en pâte à modeler.

Cette expérience précise que le déplacement d'eau varie quand le volume varie. Elle complète la première approche de la notion de volume et permet de dégager que *la quantité d'eau déplacée correspond au volume de l'objet. Plus le volume de l'objet est important, plus la quantité d'eau déplacée est importante.*

Objets de formes différentes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant présente aux élèves les deux boules identiques en pâte à modeler de la figure 36. Il garde une boule et transforme la seconde en un objet de forme très différente, par exemple un « colombin » (figure 38).

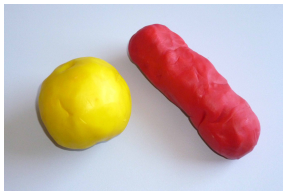


Fig. 38

L'enseignant relève avec les élèves les caractéristiques de l'objet déformé : il est plus long (ou plus haut) mais plus fin, il contient la même quantité de pâte à modeler, ... Il donne la consigne suivante.

> Comparez les déplacements d'eau provoqués par l'immersion de la boule et du colombin.

L'enseignant demande aux élèves de formuler leur estimation avant l'expérimentation. Ensuite, la boule est immergée et, comme précédemment, deux traits sont notés permettant de visualiser le déplacement de l'eau (figure 39). Après avoir retiré la boule de l'eau, on immerge le colombin (figure 40) et on constate que le déplacement d'eau est le même.

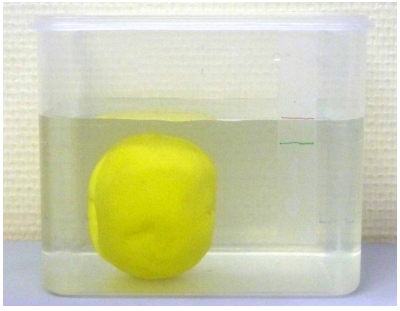


Fig. 39

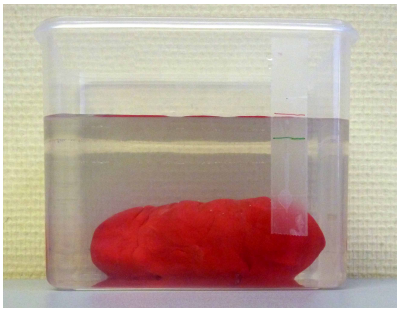


Fig. 40

L'enseignant rappelle que, lorsque les déplacements d'eau de deux objets immergés tour à tour sont identiques, on dit que ces deux objets ont le même volume. Cette expérience montre que *lorsqu'on modifie la forme d'un objet plein, il garde le même volume.*

Il peut s'avérer nécessaire de recommencer l'expérience en modifiant la forme du colombin pour le transformer en « donut » ou en plusieurs petites boules disjointes. C'est l'acquisition de la conservation du volume qui est contrôlée au cours de cette expérience.

Échos des classes

Les élèves qui pensent, au préalable, que les déplacements d'eau seront différents le justifient en expliquant par exemple qu'un objet long et fin ou haut et mince prend davantage de place qu'une boule. Ceux qui pensent que le niveau de l'eau va rester le même expliquent qu'on n'a ni ajouté ni enlevé de pâte à modeler.

Objets de masses différentes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant propose une nouvelle expérience. Il présente deux boules de même forme et de même diamètre, mais de masses très différentes. Dans notre exemple, nous avons choisi une boule de pétanque en acier et une boule en pâte à modeler (figure 41). Il pose la question suivante.

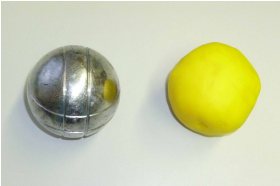


Fig. 41

Laquelle de ces deux boules a le plus grand volume ?

L'enseignant demande aux élèves une estimation. Étant donné que la boule en acier est bien plus lourde que la boule en pâte à modeler, certains élèves pourraient penser qu'en les immergeant, la boule la plus lourde déplacerait le plus d'eau et aurait, de ce fait, un volume supérieur à l'autre.

En réalisant l'expérience, les élèves voient que les quantités d'eau déplacées par les deux boules sont identiques. Prenant appui sur les conclusions précédentes, ils déduisent que ces deux boules ont même volume.

Cette expérience montre aux élèves que *deux objets de masses différentes peuvent avoir le même volume.*

Objets de formes et de masses différentes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant prend, d'une part, le colombin provenant de la déformation d'une boule en pâte à modeler et d'autre part la boule de pétanque (figure 42).

Fig. 42

Il pose aux élèves la question suivante.

Que pouvez-vous dire du volume de ces deux objets ?

Si les élèves disent que le volume des deux objets est le même, l'enseignant leur demande d'expliciter leur raisonnement.

Celui-ci devrait ressembler à : « La boule en pâte à modeler et le colombin ont le même volume. La boule en pâte à modeler et la boule d'acier ont également le même volume, donc le volume du colombin est identique au volume de la boule d'acier ». Les élèves qui disent cela ont donc acquis la transitivité de l'égalité sans en avoir conscience.

Ce raisonnement, qui s'appuie sur les résultats des expériences précédentes, permet de faire l'économie de l'immersion, mais n'est probablement pas à la portée de tous les élèves. Ceux qui ne sont pas convaincus proposeront sans doute de vérifier en comparant, comme précédemment, les quantités d'eau déplacées par l'immersion des deux objets. La comparaison par immersion est donc réalisée pour convaincre les plus sceptiques et pour valider le raisonnement.

On en déduit que *deux objets de masses et de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

Les fiches 6 à 8 sont destinées au cahier de l'élève qui garde ainsi la trace des expériences réalisées. Des synthèses rédigées avec l'enseignant y sont notées au fur et à mesure des manipulations.

1.3 Remplissage et immersion

Les deux expériences suivantes mènent à la même conclusion. L'une peut suffire mais il n'est pas inutile d'explorer les deux manières de faire pour permettre à un maximum d'élèves de créer des liens entre les différentes images mentales construites précédemment.

Chacune des expériences nécessite un objet creux pouvant être lesté, fermé hermétiquement et immergé, ainsi qu'un récipient dans lequel cet objet peut être immergé. L'objet doit également pouvoir être rempli de liquide. Dans notre exemple, nous avons choisi un cube [3] en plexiglas.

Première expérience

Comment s'y prendre ?

L'enseignant note d'un trait le niveau initial de l'eau et propose aux élèves de se souvenir des deux manières utilisées pour comparer des volumes : on a rempli les objets creux tandis que les objets pleins ont été immergés. Pour établir un lien entre ces deux méthodes, il propose la consigne suivante.

> Vérifiez si la quantité d'eau déplacée lors de l'immersion de ce solide est équivalente à la quantité d'eau qu'il peut contenir.

Dans un premier temps, l'enseignant immerge le cube dans le récipient contenant de l'eau et note à l'aide d'un trait le niveau atteint par l'eau. Pour immerger un objet creux, il faut le lester. Le cube peut être lesté en y plaçant des pièces de monnaie, les élèves doivent se souvenir qu'une expérience précédente a montré que la modification de la masse n'a pas d'impact sur le volume (figure 43).

Dans un second temps, l'enseignant remplit le cube d'eau à ras bord [4] et verse son contenu dans le récipient (figure 44).

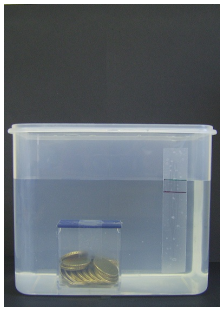


Fig. 43

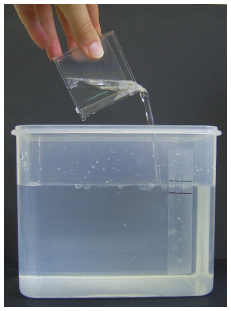


Fig. 44

[3] Le choix d'un objet de forme parallélépipédique permettra, lors du prolongement de la section 2.6, de comparer par calcul le volume d'eau déplacée au volume de l'objet.

[4] Notons pour l'enseignant que, dans le récipient rempli à ras bord, la surface de l'eau doit être horizontale et non bombée (phénomène de tension superficielle), afin de limiter les erreurs de mesure.

Le niveau atteint par l'eau correspond à celui noté précédemment.

La quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion.

La seconde partie de la fiche 8 se prête à rédiger une synthèse de cette expérience.

Seconde expérience

Comment s'y prendre ?

L'enseignant se munit du cube en plexiglas utilisé lors de l'expérience précédente, d'un récipient rempli d'eau à ras bord qu'il place dans un bassin pouvant recueillir l'eau qui débordera du récipient. Il donne la consigne suivante.

> Vérifiez si la quantité d'eau déplacée lors de l'immersion de ce solide est équivalente à la quantité d'eau qu'il peut contenir.

L'enseignant immerge le cube lesté préalablement dans le récipient contenant de l'eau à ras bord. L'eau qui déborde, récupérée dans le bassin, correspond à l'eau déplacée lors de l'immersion du cube. Ensuite, l'enseignant verse dans le cube l'eau recueillie dans le bassin. On remarque que cette quantité d'eau permet de remplir exactement le cube.

La quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion.

2 Boîtes parallélépipédiques

De quoi s'agit-il ?

Déterminer par manipulation et par calcul le volume de diverses boîtes parallélépipédiques avec différents cubes étalons.

Enjeux

Établir des liens entre les mesures de volume d'une même boîte parallélépipédique en fonction des cubes étalons choisis.

Construire la formule du volume du parallélépipède rectangle.

Construire des rapports d'unités de volume.

Compétences disciplinaires

Les grandeurs

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat (capacités, volumes, ...).

Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels.

Connaître le sens des préfixes [...]*, déci.,* [...]*, centi.,* [...].

Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Deux à trois périodes de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Trois boîtes parallélépipédiques à construire, dont les différents développements se trouvent en annexe page 143 :
- une boîte cubique d'arête 6 cm ;
- une boîte à base carrée de 4 cm de côté et de hauteur 12 cm ;
- une boîte dont la longueur mesure 10 cm, la largeur 6 cm et la hauteur 4 cm.

Un cube d'un décimètre de côté et de l'eau.

Une boîte parallélépipédique transparente et deux élastiques.

Les fiches 9 à 15, pages 153 à 159.

Matériel pour chaque groupe d'élèves

Six cubes emboîtables de 2 cm d'arête.

Quatre boîtes parallélépipédiques à construire, dont les développements se trouvent en annexe page 144 et dont les dimensions sont les suivantes :
- boîte 1 : longueur 6 cm, largeur 4 cm, hauteur 8 cm ;
- boîte 2 : longueur 12 cm, largeur 8 cm, hauteur 4 cm ;
- boîte 3 : longueur 14 cm, largeur 10 cm, hauteur 6 cm ;
- boîte 4 : longueur 16 cm, largeur 12 cm, hauteur 8 cm.

Trente-huit cubes en bois de 2 cm d'arête.

Cinquante petits cubes de 1 cm d'arête.

Une calculatrice.

2.1 Construction d'un solide en cubes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant répartit les élèves en groupes et distribue à chacun d'eux six cubes emboîtables.
Il leur montre un solide de forme parallélépipédique qu'il a construit avec six de ces mêmes cubes puis il donne une première consigne.

Construisez un solide différent du mien en utilisant vos six cubes.

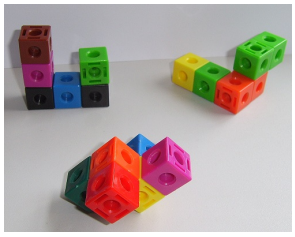


Fig. 45

L'enseignant devra peut-être encourager la créativité des élèves pour obtenir des formes variées (figure 45).

Cette première question, indispensable avant de poursuivre, permettra d'attirer l'attention des élèves sur le mot « volume » dans la seconde consigne.

Construisez un solide de *volume* différent du mien en utilisant tous les cubes.

Par habitude, les élèves cherchent à se conformer à la consigne et tentent, par tous les moyens, de construire un tel solide. Dès lors, il se peut que plusieurs d'entre eux construisent un solide différent de celui de l'enseignant tout en sachant pertinemment bien que le volume trouvé ne sera pas différent. Dans le cas où des solides sont construits, l'enseignant les rassemble sur sa table et demande aux élèves de comparer les volumes en justifiant leurs réponses.

Cette seconde consigne vise à faire prendre conscience aux élèves que le volume d'un objet ne varie pas si on utilise le même nombre de cubes.

Il se peut qu'aux yeux de certains élèves, des solides construits semblent prendre plus de place que d'autres car leur rangement est moins aisé à cause de leur configuration. C'est le moment opportun pour dissocier la notion de volume de celle de rangement.

Échos des classes Des élèves, persuadés qu'un tel solide n'existe pas mais souhaitant se conformer à la consigne, retirent et cachent un ou deux cubes. Ils obtiennent ainsi un solide de volume différent de celui de l'enseignant mais évidemment pas avec le même nombre de cubes.

2.2 Comparaison du volume de boîtes parallélépipédiques

Comment s'y prendre ? L'enseignant place sur son bureau 38 cubes en bois de 2 cm d'arête et les trois boîtes de forme parallélépipédique décrites dans le matériel pour la classe. Les boîtes sont positionnées comme l'illustre la figure 46. Elles sont placées sur la table de manière à ce que la boîte la plus haute ne soit pas celle qui a le plus grand volume. Chaque boîte s'ouvre par sa face supérieure. L'enseignant pose aux élèves la question suivante.

Quelle est la boîte la plus « grande » ?

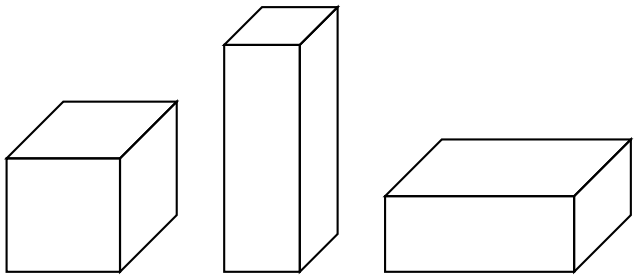


Fig. 46

Cette question imprécise devrait provoquer plusieurs réactions parmi les élèves. La boîte la plus « grande » est-elle la plus haute, la plus large, la plus longue, ... ? Cette discussion fait surgir la nécessité de préciser la question : nous souhaitons trouver la boîte qui a le plus grand volume.

Quelle est la boîte qui a le plus grand volume et comment s'y prendre pour la trouver ?

Si, pour établir la comparaison, les élèves pensent à utiliser du riz comme précédemment, l'enseignant répond qu'il n'en n'a plus à disposition. Les enfants peuvent alors penser aux cubes

emboîtables, on les remplacera par des cubes en bois qui se disposent mieux dans les boîtes en carton. Devant la classe, les trois boîtes sont alors remplies successivement. Le nombre de cubes que contient chaque boîte est noté au tableau ; on remarque que ce nombre est constant, quelle que soit la position de la boîte.

On se met d'accord sur le fait qu'on peut comparer le volume des boîtes en comparant le nombre de cubes qu'elles contiennent, ce nombre de cubes peut donc servir à mesurer le volume. La boîte contenant le plus grand nombre de cubes est identifiée comme étant la boîte de plus grand volume. C'est celle qui se trouve à droite dans la figure 46, elle contient 30 cubes, les deux autres boîtes en contiennent 27 et 24.

À partir de cette mise au point, on convient d'exprimer le volume des boîtes suivantes en nombre de cubes.

2.3 Construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle

Boîtes en carton

Comment s'y prendre ?

Après avoir réparti les élèves en plusieurs groupes, l'enseignant distribue à chacun d'eux la boîte 1 et 38 cubes en bois de 2 cm d'arête. La question suivante est posée.

> Quel est le volume (en nombre de cubes en bois) de cette boîte ? Écrivez votre réponse sur une feuille ainsi que toutes les démarches que vous effectuez pour y répondre.

Les boîtes 2, 3 et 4 seront données une à une par la suite, laissant à chaque fois le temps aux élèves de répondre à la question posée, commune à toutes les boîtes. Il est important que les boîtes soient données une à une à chaque groupe d'élèves et dans l'ordre de numérotation afin que chaque étape de la construction mentale, menant à la découverte de la formule, soit notée explicitement par les élèves.

Normalement les élèves devraient trouver assez facilement le volume des trois premières boîtes. Ils ont suffisamment de cubes pour remplir entièrement la boîte 1. Pour la boîte 2, ils ont suffisamment de cubes pour couvrir la base et entamer le second étage. Certains enfants « imaginent » les 10 cubes manquants de la deuxième couche et les ajoutent aux 38 cubes qu'ils ont pu placer. D'autres calculent le nombre total de cubes comme étant deux fois le nombre de cubes dans la base, ou le nombre de cubes sur une base plus ce même nombre de cubes.

Pour la boîte 3, les élèves ont assez de cubes pour couvrir la base et voient qu'on peut mettre deux étages supplémentaires mais n'ont pas suffisamment de cubes pour les remplir. Ils sont donc amenés à multiplier le nombre de cubes de la base par trois.

La boîte 4 est prévue pour susciter davantage de questionnements. Les élèves n'ont pas assez de cubes pour couvrir la base entièrement. Par contre, ils ont assez de cubes pour construire une longueur, une largeur et une hauteur. À partir d'une longueur et d'une largeur, les élèves peuvent déterminer le nombre de cubes que l'on peut mettre sur la base. En plaçant des cubes le long de la hauteur, les élèves comptent le nombre d'étages que contient la boîte. Comme pour la boîte précédente, connaissant le nombre de cubes dans la base et le nombre de cubes dans la hauteur, ils calculent le nombre total de cubes nécessaires pour remplir cette quatrième boîte.

Tous les élèves n'arriveront sans doute pas à trouver la réponse. Nous suggérons cependant que l'enseignant les laisse réfléchir puis passe auprès d'eux pour entendre leurs propositions et les aiguiller si nécessaire afin qu'ils aillent au bout de leur recherche.

La mise en commun qui retrace la manière dont les élèves ont procédé, est écrite au tableau après le remplissage des boîtes et peut ressembler à ce qui suit.

- *Pour remplir la première boîte, je place les cubes un par un et je les compte. Le comptage donne 24 cubes.*
- *Pour remplir la deuxième boîte, je construis une base de 24 cubes (6 cubes dans la longueur et 4 cubes dans la largeur) puis je multiplie ce nombre par 2 puisqu'il y a deux étages, ce qui donne 48 cubes.*
- *Pour remplir la troisième boîte, je place 35 cubes dans la base (7 cubes en longueur et 5 cubes en largeur) puis je multiplie ce nombre par 3 puisqu'il y a 3 étages, ce qui fait un total de 105 cubes.*
- *Pour remplir la quatrième boîte, je place 8 cubes dans la longueur et 6 cubes dans la largeur soit 48 cubes dans la base. Je multiplie ce nombre par 4 puisqu'il y a 4 étages. Il faudra 192 cubes.*

Les élèves notent, pour chaque boîte, le volume en nombre de cubes en bois dans le tableau de la fiche 9.

Échos des classes

Certains élèves adoptent une démarche différente tout aussi efficace. Par exemple, des élèves placent les cubes à l'extérieur de la boîte, le long de ses côtés, afin de les compter.

D'autres ne remplissent que la boîte 1. Sachant qu'il faut 24 cubes pour remplir la boîte 1, des élèves la placent à l'intérieur de la boîte 2. Soit ils constatent que la boîte 1 occupe la moitié de l'espace et dans ce cas, ils doublent le nombre de cubes que contient la boîte 1, soit ils remplissent de cubes l'espace vide et additionnent le nombre de cubes ajoutés au nombre de cubes de la boîte 1.

Un lien multiplicatif existe également entre les volumes des boîtes 2 et 4 et donc entre les boîtes 1 et 4. L'exploitation de ces liens peut faire l'objet d'un prolongement.

Boîtes dessinées

Comment s'y prendre ?

L'enseignant poursuit l'activité par un travail papier-crayon sur la recherche du volume de boîtes parallélépipédiques auxquelles l'élève n'a plus accès physiquement mais dont il a une représentation en deux dimensions. Il faut cependant que les cubes en bois restent accessibles pour que les enfants qui en auront éventuellement besoin puissent les prendre.

> Quel est le volume (en nombre de cubes) de chacun de ces parallélépipèdes rectangles ? Justifiez votre réponse.

Voici deux exemples de solides (figures 47 et 48). Les fiches 10 et 11 en proposent d'autres.

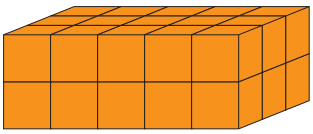


Fig. 47

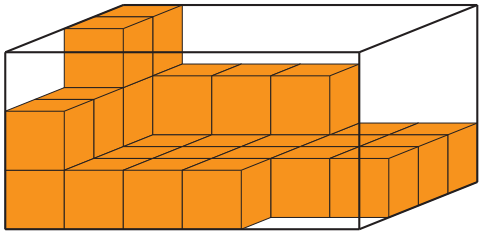


Fig. 48

L'observation de chaque dessin amène les élèves à dénombrer les cubes dessinés sur la longueur, la largeur et la hauteur. Certains dessins les incitent à imaginer les cubes manquants nécessaires à ce comptage. Pour trouver le nombre de cubes que contient chaque boîte complètement remplie, les élèves multiplient entre eux le nombre de cubes qu'on peut placer sur la longueur, la largeur et la hauteur. Le quatrième exercice (fiche 11) permet d'attirer l'attention sur la formule particulière de la boîte cubique.

Si certains élèves ne parviennent pas à se représenter le solide en trois dimensions, nous suggérons de les laisser reconstruire l'objet avec des cubes en bois. C'est une démarche naturelle d'utiliser les cubes en bois restés accessibles, il faut laisser l'enfant y recourir aussi longtemps que nécessaire.

Échos des classes

On remarque, pour la figure 47, que certains élèves comptent le nombre de cubes qu'ils voient en avant-plan, comme si cet avant-plan constituait un « mur », puis comptent le nombre de « murs » qui se succèdent. Cette procédure correcte peut être réexploitée pour résoudre l'exercice 5 (fiche 11) où seul un mur latéral de la boîte est visible.

Boîtes imaginaires

Comment s'y prendre ?

L'enseignant propose les situations suivantes à partir de la fiche 12.

> Dans une boîte, je couvre la base avec 12 cubes et je place 5 cubes dans la hauteur. Quel est son volume ?

Cette situation demande à l'élève une démarche d'abstraction supplémentaire puisqu'il n'a plus la boîte devant lui. Néanmoins le travail réalisé auparavant devrait lui permettre de répondre qu'il est de 60 cubes.

L'enseignant répartit ses élèves en plusieurs groupes et leur demande de représenter cette boîte à l'aide des cubes. Les élèves n'ont pas assez de cubes mais amorcent la construction d'un solide formé de 60 cubes, dont la base est composée de 12 cubes. Comme il y a trois représentations possibles d'une base composée de 12 cubes, à savoir 4 cubes en longueur et 3 en largeur, 6 cubes en longueur et 2 en largeur et 12 cubes en longueur et 1 en largeur, les solides ne seront sans doute pas tous identiques. Dans le cas où les trois configurations ne se trouvent pas parmi les solides construits par les élèves, l'enseignant participe à la recherche en proposant le ou les élément(s) manquant(s).

L'enseignant poursuit avec une nouvelle consigne.

> Intéressons-nous à une autre boîte. Pour recouvrir sa base, il faut 14 cubes. Sa hauteur est composée de 5 cubes et sa longueur de 7 cubes. Quel est le volume de cette boîte ?

La donnée du nombre de cubes en longueur est, dans cet exemple, une donnée parasite puisque les nombres de cubes dans la base et dans la hauteur sont suffisants pour trouver le nombre de cubes que contient cette boîte. Cette situation permet à l'enseignant de savoir si les élèves ne se contentent pas de multiplier les données numériques entre elles mais visualisent la situation et, de ce fait, trouvent 70 cubes pour le volume.

On termine par une question de synthèse.

> Comment faire pour trouver le volume (en nombre de cubes) d'une boîte de forme parallélépipédique ?

Pour avoir réalisé la manipulation, les élèves mettent en évidence que, dans toutes les recherches précédentes, ils ont calculé le produit du nombre de cubes qu'on peut placer sur la base par le nombre de cubes que l'on peut empiler pour atteindre la hauteur indiquée. Si le nombre de cubes que l'on peut placer sur la base n'est pas connu, ils le calculent en multipliant les nombres de cubes que l'on peut mettre en longueur et en largeur.

Vers où cela va-t-il ? La formule du calcul du volume d'un prisme droit et d'un cylindre droit.

2.4 Calcul du volume du parallélépipède rectangle en cm^3

Comment s'y prendre ? L'enseignant distribue 50 petits cubes de 1 cm d'arête, deux cubes en bois de 2 cm d'arête et les boîtes 1 à 3 à chaque groupe. Il demande aux élèves de se munir de la fiche 9 (déjà complétée partiellement) puis pose la question suivante.

> On souhaite à présent remplir ces trois boîtes avec des petits cubes. Combien en faut-il pour remplir chaque boîte ?

Les élèves cherchent soit par calculs, soit par remplissage partiel. Pour chaque boîte, ils ont suffisamment de cubes pour remplir une longueur, une largeur et une hauteur.

Il se peut que des élèves ne passent pas par l'utilisation des petits cubes mais se basent sur le fait que la longueur de l'arête d'un cube en bois est le double de celle d'un petit cube. De ce fait, ils peuvent être tentés de doubler le nombre de cubes en bois pour calculer le volume en petits cubes. La vérification par remplissage partiel trouve alors tout son sens.

L'intérêt de cette activité est de montrer que, pour une même boîte, on obtient un nombre de petits cubes différent du nombre de cubes en bois. Ces nombres sont des *mesures du volume* de la boîte. Ils diffèrent parce que l'on a utilisé des « cubes étalons » différents.

Les élèves complètent le tableau : le volume de chacune des trois boîtes, exprimé en nombre de petits cubes, vaut respectivement 192 cubes, 384 cubes et 840 cubes.

	Volume	
	en cubes en bois	en petits cubes
Boîte 1	24	192
Boîte 2	48	384
Boîte 3	105	840
Boîte 4	192	

L'enseignant propose ensuite le défi suivant.

> Pouvez-vous trouver le volume (en petits cubes) de la boîte 4 sans l'avoir à votre disposition ?

Pour répondre à ce défi, les élèves consultent le tableau complété pour les boîtes 1 à 3. Le lien entre le nombre de cubes en bois et le nombre de petits cubes étant difficile à percevoir, l'enseignant propose de comparer le petit cube avec le cube en bois. Il faut 8 petits cubes pour reconstituer un cube en bois. On vérifie donc qu'on passe des nombres de cubes en bois aux nombres de petits cubes en multipliant par 8. Les élèves peuvent, dès lors, trouver le nombre de cubes nécessaires pour remplir la quatrième boîte sans l'avoir à disposition.

Cette activité amène la nécessité du choix d'un étalon commun pour mesurer des volumes.

Ensuite, l'enseignant explique aux élèves que le cube de 1 cm d'arête est souvent choisi comme unité de référence pour mesurer et calculer un volume. Cette unité de volume est appelée centimètre cube. Ce choix est conventionnel, tout comme le choix du mètre ou du litre pour mesurer respectivement les longueurs et les capacités.

L'enseignant propose aux élèves de réfléchir au calcul du volume de boîtes qu'ils ne peuvent pas manipuler. Il leur expose la situation suivante.

> Si une autre boîte mesure 3 cm de large, 4 cm de long et 7 cm de haut, quel est son volume en cm^3 ?

Le but de cette question est de faire découvrir aux élèves que l'on peut faire l'économie du remplissage en effectuant un calcul. Les cubes conventionnels ayant une arête de 1 cm, on place autant de cubes sur une arête que sa mesure en centimètres. Cela nous amène au calcul suivant : dans cette boîte, on peut mettre $3 \times 4 \times 7$ cubes d'un centimètre d'arête ce qui correspond à un volume de 84 cm^3.

Échos des classes

Si l'enseignant veut observer les démarches effectuées par les élèves pour remplir le tableau, ceux-ci doivent impérativement noter leur façon de procéder pour trouver le nombre de petits cubes nécessaires pour remplir chaque boîte. Par exemple, la réponse 192 petits cubes peut être obtenue de deux manières différentes : soit en multipliant le nombre de cubes mis dans la longueur, la largeur et la hauteur ($6 \times 4 \times 8 = 24 \times 8 = 192$

cubes), soit en multipliant le nombre de cubes en bois par le coefficient 8 ($24 \times 8 = 192$ cubes). Remarquons que, dans ces deux façons de procéder, les nombres 8 et 24 ne représentent pas la même chose.

Certains élèves qui ont remarqué que la boîte 4 contient quatre fois la boîte 2 évoquent des rapports internes entre les lignes du tableau.

Prolongement possible

L'enseignant amène les élèves à réfléchir sur les éléments nécessaires pour connaître le volume d'une boîte parallélépipédique. On commence par une première question qui ne pose pas de problème et on enchaîne avec les suivantes (fiche 13).

> Pouvez-vous trouver le volume d'une boîte parallélépipédique connaissant la longueur de ses arêtes ?

> Pouvez-vous trouver le volume d'une boîte parallélépipédique connaissant le périmètre de la base et la hauteur ?

Trouver le volume d'une boîte connaissant le périmètre de sa base et sa hauteur demande un moment de réflexion. En proposant un périmètre de 20 cm et une hauteur de 5 cm, le premier réflexe de beaucoup d'élèves est de calculer le produit de ces deux nombres. L'enseignant peut alors demander aux élèves de décrire la boîte à laquelle ils pensent afin de comprendre l'erreur commise.

Les élèves cherchent alors des couples longueur-largeur de boîtes dont le périmètre est égal à 20 cm et calculent leurs volumes. Leurs propositions pourraient être celles-ci :
- le volume d'une boîte parallélépipédique, dont la longueur mesure 8 cm et la largeur 2 cm, est égal à 80 cm^3 ;
- si la longueur mesure 6 cm et la largeur 4 cm, le volume vaut 120 cm^3 ;
- ...

D'autres exemples de couples longueur-largeur peuvent être proposés par les élèves mais il n'est pas indispensable de les trouver tous pour découvrir que deux boîtes de même hauteur, dont les bases ont le même périmètre, n'ont pas nécessairement le même volume.

Remarquons qu'il est possible de trouver le volume d'une boîte parallélépipédique à base carrée connaissant le périmètre de sa base et sa hauteur puisque, pour un carré, la mesure du périmètre suffit à connaître la mesure d'un côté, puis celle de son aire.

> Pouvez-vous trouver le volume d'une boîte parallélépipédique connaissant sa hauteur et l'aire de sa base ?

Cette troisième question peut installer un doute temporaire dans l'esprit des élèves. Après avoir découvert que, pour un périmètre donné, différents couples longueur-largeur donnent des volumes différents, ils pourraient croire que, pour une aire donnée, différents couples longueur-largeur donnent également des volumes différents. Laissons les élèves imaginer de telles boîtes pour se rappeler ensuite la manière dont ils ont procédé pour trouver le volume d'une boîte.

> Est-il possible de calculer le volume d'une boîte parallélépipédique à partir de son développement ?

Pour répondre à cette quatrième question, l'enseignant dessine au tableau le développement d'un parallélépipède sans y indiquer de mesure (figure 49).

Les élèves doivent comprendre qu'il suffit de repérer sur le développement du solide une base et la hauteur correspondante pour calculer son volume.

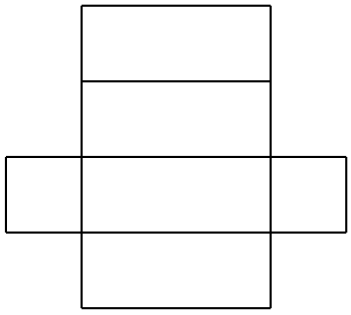


Fig. 49

2.5 Une boîte particulière

Comment s'y prendre ?

L'enseignant apporte une boîte de 10 cm d'arête sans préciser ses dimensions. Il donne la consigne suivante.

> Cherchez le volume de cette boîte en nombre de petits cubes après en avoir donné une estimation.

À la demande de l'enseignant, les élèves notent leur estimation sur une feuille. Rappelant que le nombre de petits cubes que l'on peut mettre dans une boîte correspond à son volume en cm^3, l'enseignant propose aux élèves de vérifier les différentes estimations données en utilisant la formule qui vient d'être découverte.

Puisqu'il leur est possible de mesurer les dimensions de cette boîte, les élèves effectuent le calcul $10 \times 10 \times 10$ cm^3 qui font 1000 cm^3. On met donc 1000 petits cubes dans le cube de 1 décimètre d'arête.

Si un élève s'interroge sur le nombre de cubes en bois nécessaires au remplissage de ce cube de 10 cm d'arête, on peut utiliser le tableau de la fiche 9 pour répondre à la question. Sinon, il est inutile d'aborder le sujet car l'objectif est ici de privilégier les étalons conventionnels.

L'enseignant rappelle aux élèves que la mesure de chaque arête, exprimée en centimètres, peut aussi être exprimée en décimètres. La boîte que les élèves ont devant eux a une longueur, une largeur et une hauteur égales à 1 dm. L'enseignant amène les élèves à comparer cette boîte au petit cube : un centimètre cube est le volume d'un cube mesurant un centimètre d'arête, un décimètre cube est le volume d'un cube ayant 1 décimètre d'arête.

Le calcul du volume de cette boîte fait découvrir aux élèves qu'il faut 1000 cubes de 1 cm^3 pour remplir la boîte de 1 dm^3. Par conséquent, 1 dm^3 et 1000 cm^3 sont des mesures d'un même volume.

Échos des classes

Dans certaines classes, le décimètre cube a déjà été manipulé lors d'exercices de numération, ou simplement déjà rencontré. Dans ce cas, les élèves évaluent correctement le nombre de petits cubes qu'il contient. Dans les autres classes, les élèves font des estimations très en deçà de la réalité, c'est le calcul à partir de la longueur des arêtes qui rectifie.

Pour connaître le volume du décimètre cube en cubes en bois, quelques élèves pensent au rapport 8, d'autres alignent des cubes en bois le long d'une arête du décimètre cube. Ils en comptent 5. Puisqu'il s'agit d'un cube, le calcul du volume correspond à $5 \times 5 \times 5$ ou 5^3 soit 125 cubes en bois.

2.6 Adéquation des unités

Comment s'y prendre ?

L'enseignant propose aux élèves de chercher le volume d'une boîte qui n'est pas en classe. Il utilise la fiche 14 et pose la question suivante.

> Quel est le volume d'une boîte ayant comme longueur 70 cm, comme largeur 3 dm et comme hauteur 40 cm ?

Le choix des mesures données en centimètres s'est porté sur des multiples de 10 afin d'éviter les nombres décimaux dans un premier temps. Il est probable que des élèves mentionnent une réponse sans unité. Le fait d'attirer leur attention, à ce moment précis, sur la nécessité d'une unité de mesure peut suffire à leur faire corriger une erreur éventuelle. Outre les erreurs de calculs possibles, plusieurs réponses peuvent surgir, telles que 84 000 cm^3, 84 dm^3 ou encore 8 400 cm^3. L'enseignant invite les élèves à justifier la réponse qu'ils proposent.

- La réponse 84 000 cm^3 est obtenue par les élèves qui ont converti toutes les dimensions en centimètres avant de calculer le volume en cm^3.
- La réponse 84 dm^3 est obtenue par les élèves qui ont effectué le même travail mais en dm^3.
- Les élèves qui proposent 8 400 cm^3 ont vraisemblablement multiplié les trois dimensions entre elles en omettant de les convertir en une unité commune.

Lorsque l'ensemble de la classe s'est accordé sur un volume égal à 84 000 cm^3 ou 84 dm^3, il reste à demander aux élèves comment expliquer que ces deux volumes sont égaux. Cela les renvoie à l'activité précédente dans laquelle ils ont découvert que le décimètre cube est 1000 fois plus grand que le centimètre cube. Puisque 1 dm^3 équivaut à 1000 cm^3, 84 dm^3 équivalent à 84 000 cm^3. Le nombre qui donne la mesure du volume en dm^3 est ici d'un ordre de grandeur plus facile à appréhender.

La recherche du volume de la boîte suivante légitime l'extension de la formule aux nombres décimaux. L'enseignant pose aux élèves la question qui suit.

> Quel est le volume d'une boîte ayant 55 cm de longueur, 3,4 dm de largeur et 21 cm de hauteur ? Exprimez votre réponse en cm^3 et en dm^3.

Pour exprimer la réponse en cm^3, les élèves convertissent en cm la largeur donnée, effectuent le produit $55 \times 34 \times 21$ cm^3 et obtiennent 39 270 cm^3.

Pour exprimer la réponse en dm^3, deux possibilités se présentent. Soit les élèves se souviennent que 1 dm^3 équivaut à 1000 cm^3 et transforment 39 270 cm^3 en 39,270 dm^3, soit ils transforment la longueur et la hauteur en dm et effectuent le produit $5{,}5 \times 3{,}4 \times 2{,}1$ dm^3. Comme le résultat est le même, on pense que le dernier calcul est légitime même si cette multiplication des trois nombres ne peut plus s'appuyer sur la même démarche mentale de dénombrement de cubes.

Calculer un volume à partir de nombres décimaux amène les élèves à dépasser l'image mentale du volume qu'ils s'étaient construite à partir des manipulations.

Échos des classes

Quelques élèves multiplient entre elles des mesures exprimées dans des unités différentes. L'enseignant leur explique que le solide choisi comme étalon de référence dans notre exemple a alors une forme parallélépipédique et non cubique puisqu'il est le résultat d'un produit de type cm × cm × dm. Cette unité ne faisant pas partie des unités de référence choisies, tout comme les cubes de 2 cm d'arête, elle n'est pas retenue.

2.7 Calcul du volume d'un objet

L'objectif principal des manipulations proposées dans cette dernière section consiste à tisser des liens entre différents résultats obtenus au cours de ce chapitre, et notamment à utiliser la formule du volume d'un parallélépipède rectangle pour calculer le volume de quelques objets immergés lors des expériences antérieures. La fiche 15 permet de garder la trace de cette activité et du premier prolongement.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant plonge, dans un récipient parallélépipédique transparent [5], un objet parallélépipédique qui peut être soit rempli, soit lesté et immergé. Dans l'exemple décrit ci-après, nous avons utilisé le cube en plexiglas, lesté comme décrit à l'activité 1.3.

Il donne la consigne suivante.

Calculez de deux manières le volume du cube immergé et comparez.

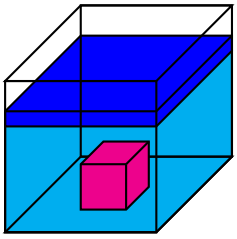


Fig. 50

Si nécessaire, il guide les élèves en rappelant qu'on peut calculer le volume d'un objet en l'immergeant et que ce volume correspond à la quantité d'eau déplacée. Lorsque des objets sont immergés dans un récipient de forme parallélépipédique, le volume d'eau déplacée est le volume d'un parallélépipède rectangle qui peut être visualisé en entourant la boîte d'élastiques aux différents niveaux atteints par l'eau.

La longueur et la largeur de ce parallélépipède correspondent respectivement à la longueur et la largeur du récipient dans lequel l'objet est immergé. La hauteur correspond à la différence de niveau de l'eau avant et après immersion (figure 50).

Dans l'exemple traité ici, le parallélépipède virtuel formé par le déplacement de l'eau a une longueur et une largeur de 10 cm, une hauteur qu'on ne peut déterminer avec précision et qu'on situe au mieux entre 1,5 et 1,6 cm. Le volume d'eau déplacée est compris entre $10 \times 10 \times 1{,}5$ soit 150 cm^3 et $10 \times 10 \times 1{,}6$ soit 160 cm^3. Ce procédé donne une valeur approximative du volume de l'objet. Et, dans notre exemple, une imprécision de lecture d'un millimètre sur la hauteur donnera une différence de volume de $0{,}1 \times 10 \times 10$ cm^3, soit 10 cm^3.

Pour ce même objet, calculons directement le volume à partir de ses mesures. L'arête du cube mesure 5,4 cm, son volume est égal à $5{,}4 \times 5{,}4 \times 5{,}4$ soit 157 cm^3. La mesure du volume obtenue ainsi est bien comprise dans l'encadrement donné par l'expérience.

Ce travail permet de se faire une idée de la précision que peut apporter le calcul du volume d'un objet par immersion.

Le calcul du volume par immersion est particulièrement utile pour calculer le volume d'un objet

[5] Le décicube convient parfaitement.

de forme quelconque pour lequel il n'existe pas de formule. L'enseignant donne alors aux élèves un morceau de plasticine de forme quelconque et leur demande de trouver son volume. Les élèves immergent l'objet et calculent le volume du parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée, tout en ayant conscience du niveau de précision du résultat obtenu. Dans notre exemple, la hauteur du parallélépipède virtuel est comprise entre 1,7 et 1,8 cm, le volume de l'objet se situe donc entre 170 cm^3 et 180 cm^3.

Notons que, pour chercher la mesure du volume d'un objet de cette manière, il est nécessaire que l'objet soit de volume assez grand afin qu'un déplacement d'eau soit visible et mesurable.

Prolongements possibles

Nous proposons en prolongements deux autres démarches pour mesurer le volume d'un objet et exploiter la conversion des unités de capacité en unités de volume.

Objets pleins

L'enseignant se munit d'un récipient contenant de l'eau à ras bord qu'il place dans un bassin. Il immerge le morceau de plasticine utilisé à l'étape précédente. Il verse ensuite l'eau récoltée dans le bassin dans un récipient gradué en millilitres. La quantité d'eau recueillie se situe entre 170 ml et 180 ml. Or nous savons que le volume du morceau de plasticine est compris entre 170 et 180 cm^3. Si les élèves connaissent déjà la conversion des unités de capacité en unités de volume, l'égalité des nombres de l'encadrement les conforte dans l'idée que 1 ml vaut 1 cm^3. Si les élèves n'ont pas encore abordé la conversion des unités, l'enseignant se sert de l'égalité des nombres des deux encadrements pour amener l'idée que 1 ml vaut 1 cm^3. C'est le moment propice pour mettre en place une activité reliant les mesures de volume et les mesures de capacité.

Objets creux

La manipulation réalisée à l'activité 1.1 nous a montré que les boîtes proposées, parallélépipédique et cylindrique, ont le même volume. Nous avons à présent d'autres outils pour le confirmer (fiche 5).

Pour calculer le volume de la boîte cylindrique utilisée lors de l'activité 1.1 on la remplit d'eau à ras bord. Cette quantité d'eau est ensuite versée dans un récipient gradué. Dans notre exemple, le niveau d'eau se situant à mi-chemin entre 800 ml et 900 ml, la valeur approchée du volume est comprise entre 800 cm^3 et 900 cm^3.

Pour calculer le volume de la boîte parallélépipédique, il suffit aux élèves d'appliquer la formule : soit $17 \times 10 \times 5$ cm^3, soit 850 cm^3.

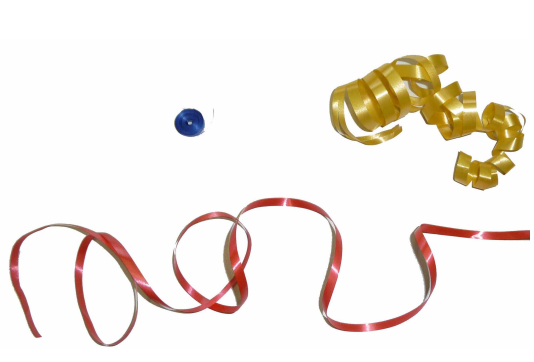
Commentaires

Le retour vers les expériences initiales, qui ne permettent que des comparaisons sans mesures, pour en réexploiter les démarches au moment où on dispose de moyens de calcul, nous a semblé essentiel pour tisser des liens entre la démarche expérimentale et le calcul théorique. Ce va-et-vient montre notamment l'intérêt de la démarche expérimentale pour déterminer la mesure d'un volume pour lequel on n'a pas de formule, mais attire aussi l'attention sur les limites de cette démarche, et sur les erreurs expérimentales qu'elle entraîne.

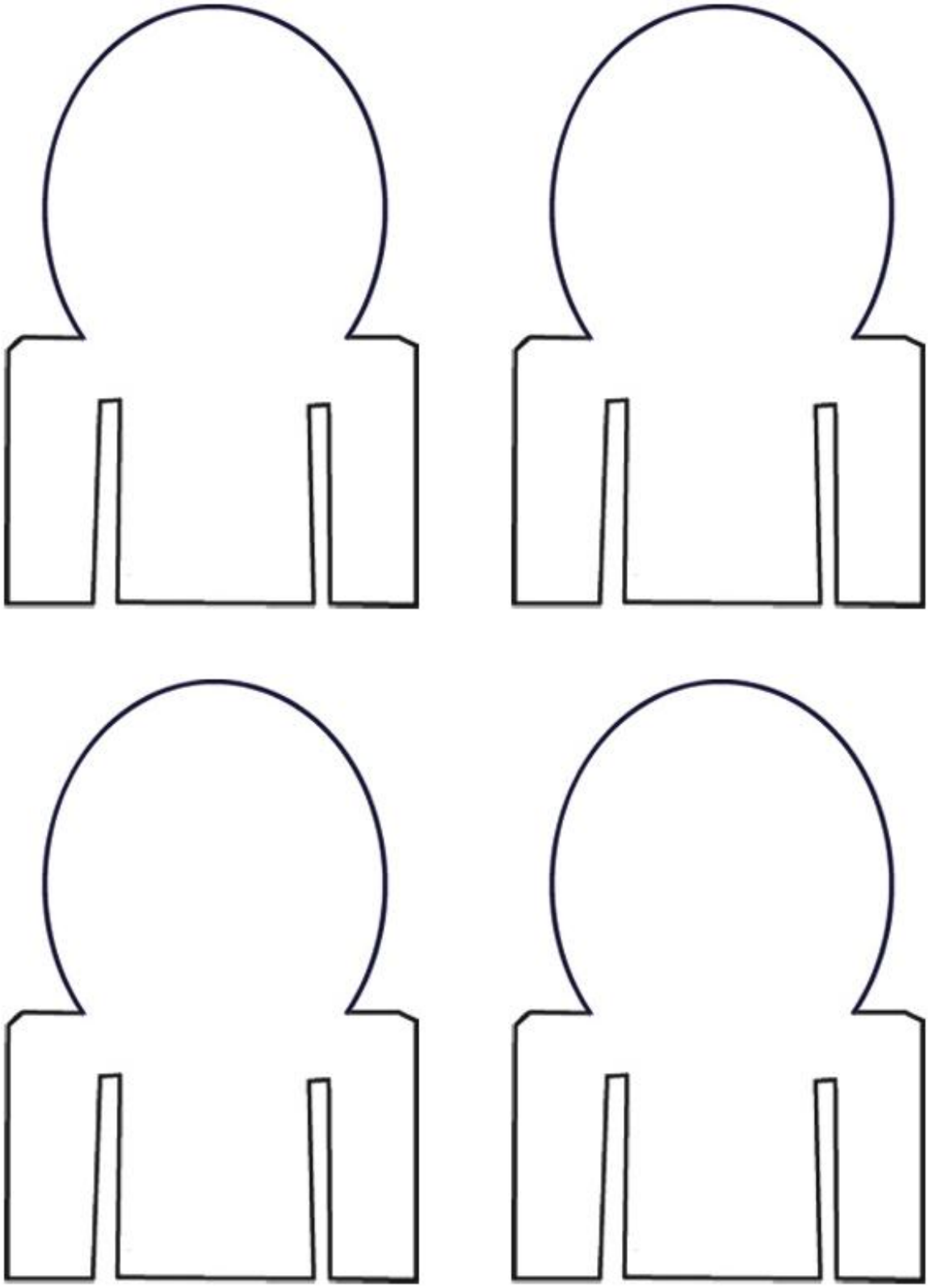
Annexe II

Description de matériel
Fiches à photocopier

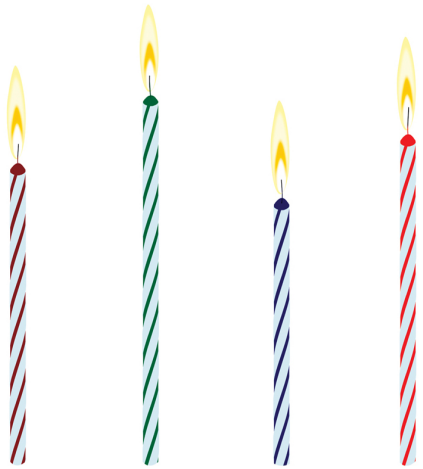
Matériel utilisé pour les comparaisons de grandeurs



Marque verre



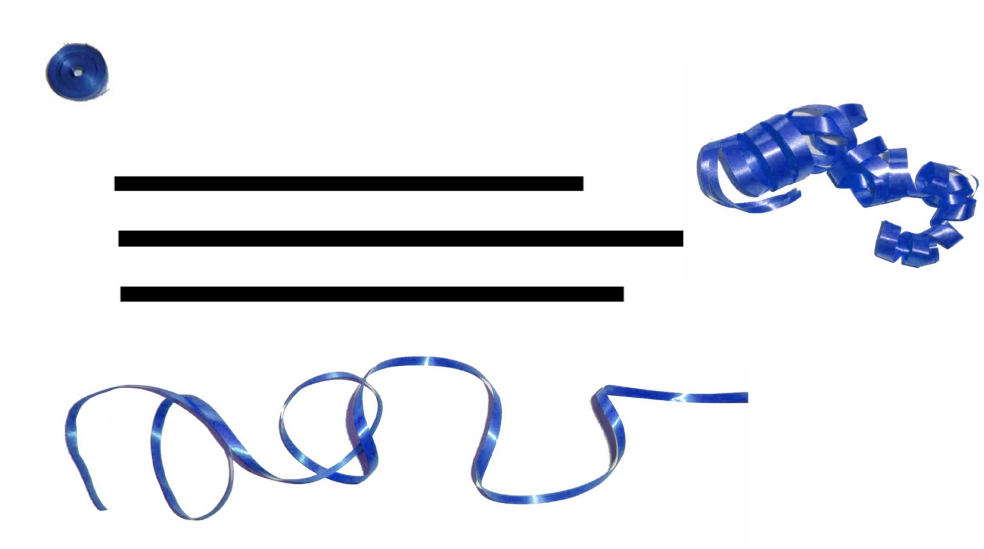
Longueur



Capacité

Masse
Capacité

Longueur



Aire

Comparaison directe de deux récipients

Une histoire...

Vous êtes deux équipes d'archéologues. Avant de partir en expédition, vous avez fait vos malles ensemble et vous emportez exactement le même matériel de travail. Une équipe part sur un site de fouilles en Grèce, une autre en Égypte. Au cours des fouilles, les équipes se donnent des nouvelles. Il se fait qu'elles ont trouvé toutes les deux une amphore. Chaque groupe estime avoir découvert l'amphore de plus grande capacité. Malheureusement, ces amphores sont trop fragiles pour être transportées de sorte qu'il n'est pas possible de les comparer directement. Afin de déterminer l'amphore de plus grande capacité, vous pouvez utiliser le matériel de votre malle et échanger des informations écrites. Vous êtes également en contact avec un expert belge auquel vous devez envoyer un rapport mentionnant les résultats de la comparaison et leur justification.

Les drapeaux

Des monuments

Synthèses

Comparaison de deux récipients (synthèse orale)

Je remplis d'eau un des deux récipients. Je le vide dans le second récipient.

S'il reste de l'eau dans le premier, cela signifie que le second récipient est trop petit pour recueillir toute l'eau du premier. Le premier récipient a donc une capacité supérieure au deuxième récipient.

Si le deuxième récipient n'est pas rempli entièrement alors que le premier est vide, cela signifie que le deuxième récipient peut contenir plus d'eau que ce qu'il y avait dans le premier. Le deuxième récipient a, dans ce cas, une capacité supérieure au premier récipient.

Les archéologues (synthèse écrite)

Pour comparer les capacités des deux amphores, il a fallu les remplir d'eau en utilisant un même récipient qui sert d'unité de mesure et est appelé **étalon**.

Il s'agit ici d'un **étalon familier** (objet de la vie de tous les jours) qui pose problème : il ne donne pas une mesure précise et il n'est pas disponible partout. C'est pourquoi, pour mesurer les capacités, on utilise actuellement un **étalon conventionnel** c'est-à-dire un étalon reconnu dans le monde entier. Cet étalon est le **litre**.

L'instrument utilisé pour mesurer la capacité est le **récipient gradué**. Celui-ci peut donner la capacité en litres, décilitres, centilitres ou millilitres.

Les valisettes

Le matériel doit être varié et pas nécessairement approprié à la mesure de capacité (paire de ciseaux, corde, . . .). Il faut impérativement veiller à ce que les élèves puissent nommer chaque objet sans équivoque dans les messages. Par exemple : s'il y avait un bol bleu et un récipient de conservation bleu dans les valisettes, faire référence au récipient bleu prêterait à confusion.

Rappelons qu'il faut prévoir tout le matériel en double afin de constituer les deux valisettes identiques et qu'il ne doit pas y avoir de verre dans celles-ci !

Voici par exemple le contenu des valisettes qui ont été utilisées pour les expérimentations :

- une tasse blanche ;
- un récipient de conservation transparent ;
- un bol rouge ;
- une pique à brochette ;
- une boîte de cacahuètes ;
- une cuillère ;
- un pot à fleurs troué ;
- un bouchon ;
- un crayon ;
- une corde ;
- une règle graduée ;
- une paire de ciseaux ;
- une petite bouteille ;
- un rouleau de papier collant ;
- une petite boîte de conserve ;
- un pot à cure-dents.

Une série de récipients à classer

Nous conseillons de prévoir trois récipients qui servent à former les trois premiers groupes et d'y ajouter autant de récipients qu'il y a d'élèves en classe. Le but étant de faire apparaître les égalités de capacité formulées avec des unités différentes, il faut prévoir, si possible, des récipients où les capacités sont indiquées de plusieurs manières (en ℓ, en $m\ell$ ou en $c\ell$) comme des canettes, certains berlingots de jus, certaines petites bouteilles d'eau ou encore certaines briques de crème fraîche. Il faut prévoir au maximum 8 groupes de capacités différentes.

Voici une série de récipients rassemblés pour les expérimentations dans les classes, appropriés pour cette activité :

- une brique de jus de 2 ℓ ;
- une bouteille d'huile de 2 ℓ ;
- un bidon de produit d'entretien de 2 ℓ ;
- une bouteille d'eau de 200 $c\ell$;

- une brique de jus de 1 ℓ ;
- un bac de glace de 1000 $m\ell$;
- une bouteille d'eau de 1 ℓ ;
- une bouteille de jus de 100 $c\ell$;
- un bidon de produit de lessive de 1000 $m\ell$;

- une bouteille d'eau de 75 $c\ell$;
- un spray de nettoyage de 750 $m\ell$;

- une bouteille d'eau pétillante avec la double indication 50 $c\ell$ et 500 $m\ell$;
- une brique de crème fraîche avec la double indication 50 $c\ell$ et 500 $m\ell$;
- une bouteille de shampooing de 500 $m\ell$;
- une bouteille d'eau de 50 $c\ell$;

- des canettes de 330 $m\ell$, 33 $c\ell$ et 0,33 ℓ* ;
- une bouteille d'eau de 33 $c\ell$;
- un carton de jus de 0,33 ℓ* ;

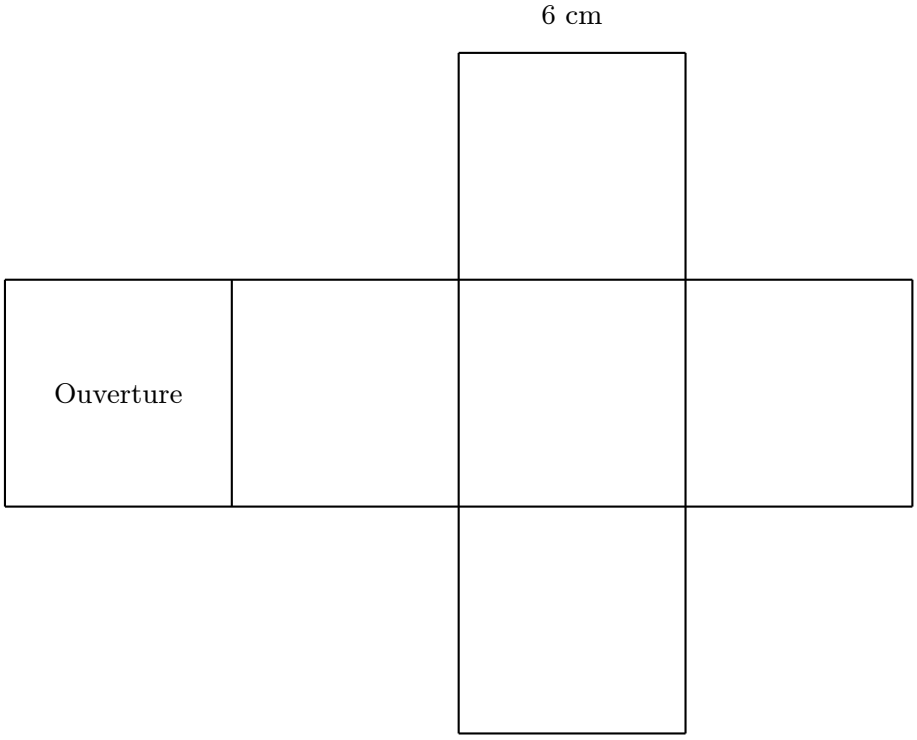
- un flacon de shampooing de 250 $m\ell$;
- une bouteille de crème fraîche de 25 $c\ell$;
- une bouteille de limonade de 0,25 ℓ* ;

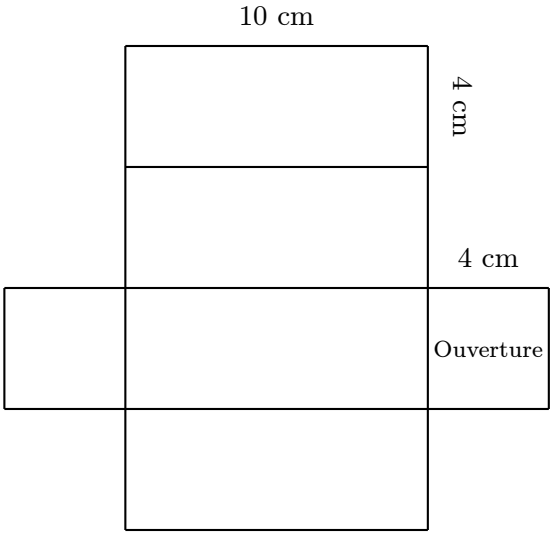
- un flacon de démaquillant de 200 $m\ell$;
- un carton de jus de 0,2 ℓ* ;
- un pot de crème épaisse de 20 $c\ell$;

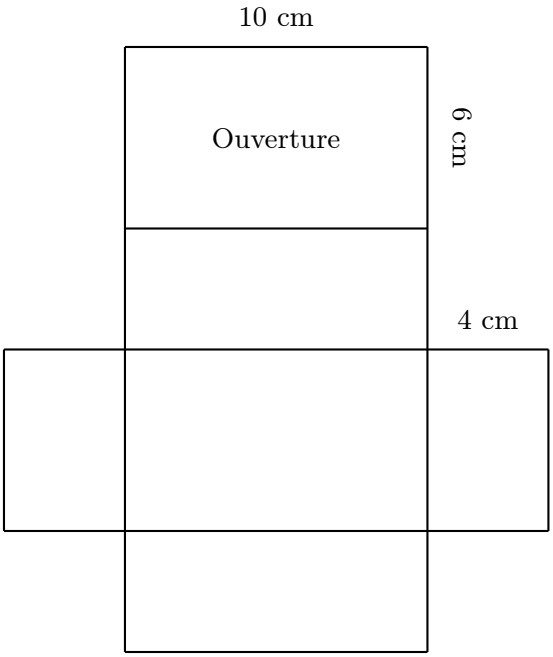
- une bouteille de shampooing de 50 $m\ell$.

(*) À sélectionner uniquement si les élèves ont déjà travaillé les nombres décimaux.

Comparaison du volume de boîtes parallélépipédiques



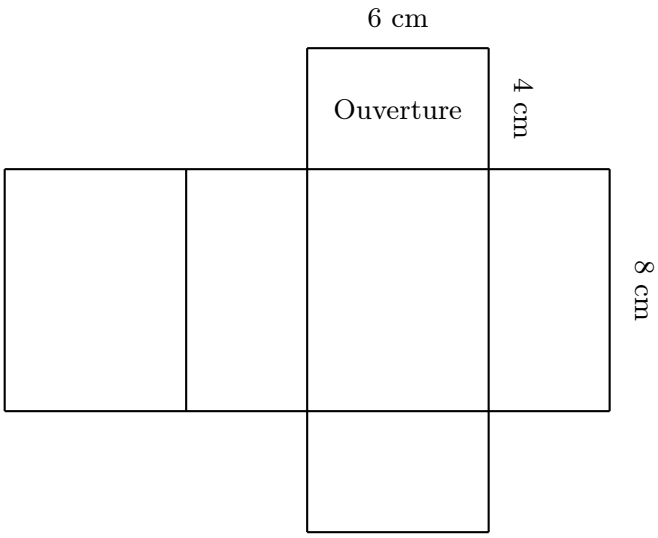




Remarque : les dimensions ne sont pas respectées, mais les proportions le sont.

Construction de la formule du volume d'un parallélépipède rectangle

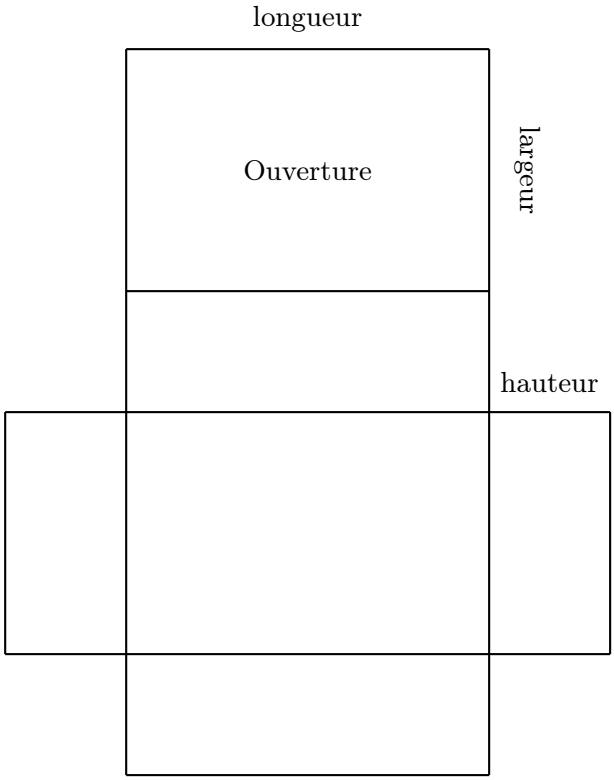
Boîte 1 :



Boîte 2 : longueur = 12 cm, largeur = 8 cm, hauteur = 4 cm.

Boîte 3 : longueur = 14 cm, largeur = 10 cm, hauteur = 6 cm.

Boîte 4 : longueur = 16 cm, largeur = 12 cm, hauteur = 8 cm.

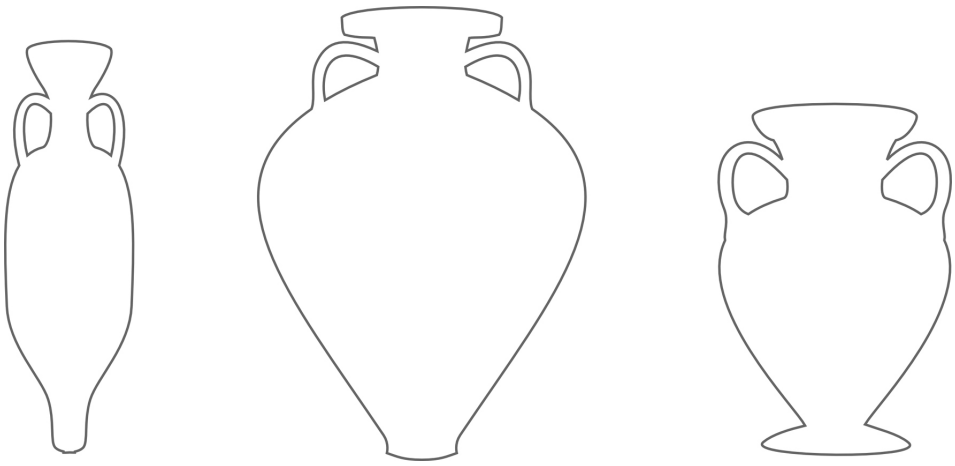


Amphore

Définition : .....

.....

.....



Archéologue

Définition : .....

.....

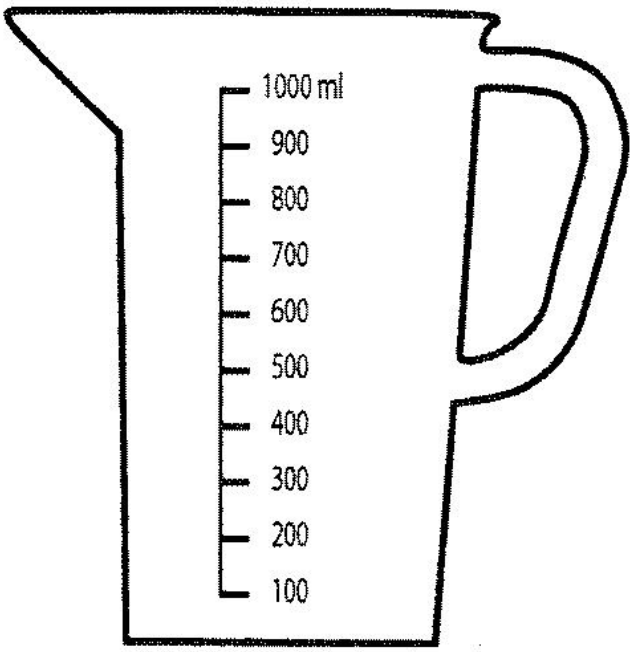
.....

Récipient gradué

Définition : .....

.....

.....



Classement des récipients :

Litre								
Décilitre								
Centilitre								
Millilitre								

1 litre = 10 déci litres

1 litre = 100 centi litres

1 litre = 1000 milli litres

Comparaison de boîtes

Sans utiliser de matériel supplémentaire, comparez la quantité de riz que peut contenir chaque boîte remplie à ras bord.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Prolongement possible

Calcul du volume des deux boîtes et comparaison

Calcule le volume de la boîte parallélépipédique à partir de la longueur de ses arêtes.

. . . . . .

Remplis la boîte cylindrique d'eau à ras bord. Transvase ensuite son contenu dans un récipient gradué en ml. Donne une valeur approchée du volume de cette boîte en ml.

. . . . . .

Compare les volumes des deux boîtes.

. . . . . .

. . . . . .

Comparaison d'objets pleins (1)

Immersion de boules identiques en pâte à modeler

Lorsque je les immerge tour à tour, laquelle de ces deux boules déplace le plus d'eau ?

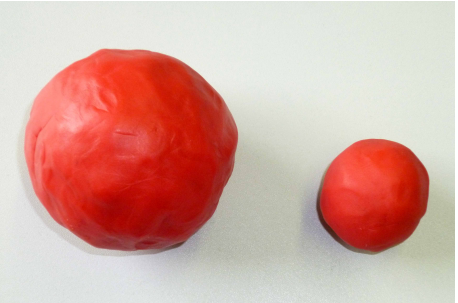
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Immersion de deux boules en pâte à modeler de tailles différentes

Comparez les déplacements d'eau lors de l'immersion de chacune de ces deux boules.



. . . . . .

. . . . . .

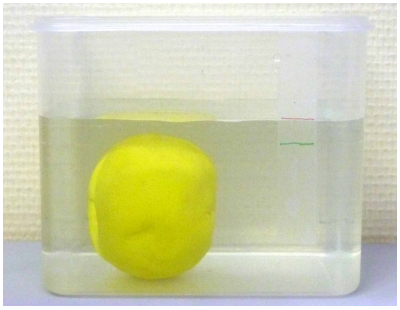
. . . . . .

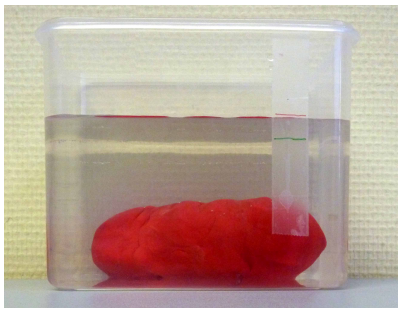
Comparaison d'objets pleins (2)

Immersion d'une boule et d'un colombin en pâte à modeler

Le colombin est obtenu par la déformation de la seconde boule en pâte à modeler.

Comparez les déplacements d'eau provoqués par l'immersion de la boule et du colombin.





. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Immersion de deux boules de taille identique et de masses différentes

Laquelle de ces deux boules a le plus grand volume ?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Comparaison d'objets pleins (3)

Immersion de deux objets de formes et de masses différentes

Que pouvez-vous dire du volume de ces deux objets ?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Remplissage et immersion

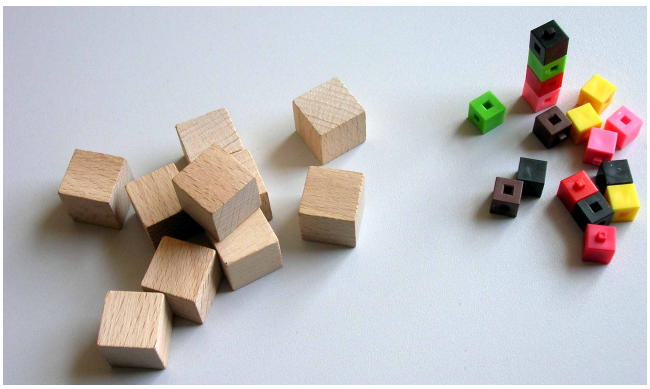
Vérifiez si la quantité d'eau déplacée lors de l'immersion de ce solide est équivalente à la quantité d'eau qu'il peut contenir.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

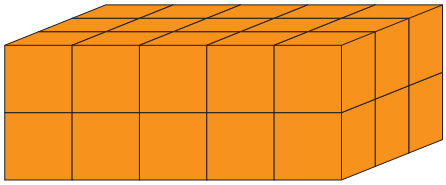
Cubes

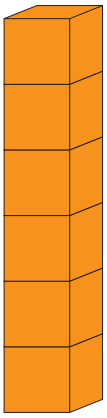


	Volume	
	en cubes en bois	en petits cubes
Boîte 1		
Boîte 2		
Boîte 3		
Boîte 4		

Boîtes dessinées (1)

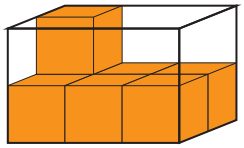
1. Quel est le volume (en nombre de cubes) de chacun de ces parallélépipèdes ?





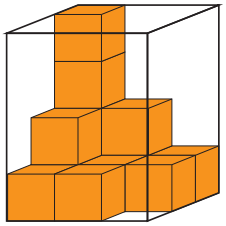
....

2. Observe ces boîtes qui pourraient être complètement remplies de cubes.



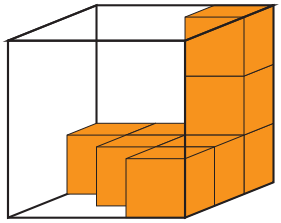
Le volume de la boîte est de ..... cubes.

.....



Le volume de la boîte est de ..... cubes.

.....

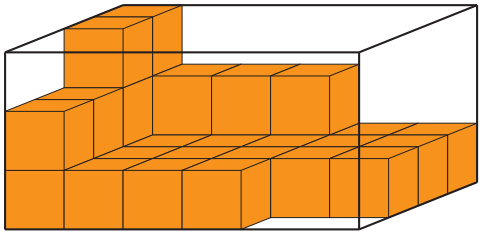


Le volume de la boîte est de ..... cubes.

.....

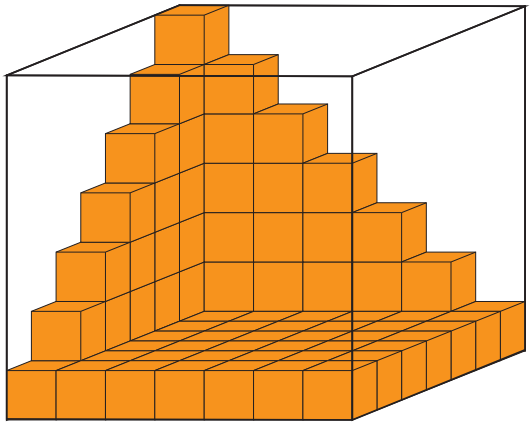
Boîtes dessinées (2)

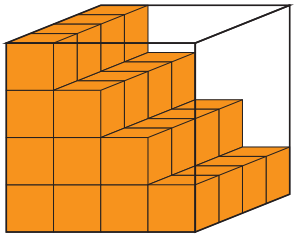
3. Quel est le volume (en nombre de cubes) de ce parallélépipède rectangle ?



. . . . . .

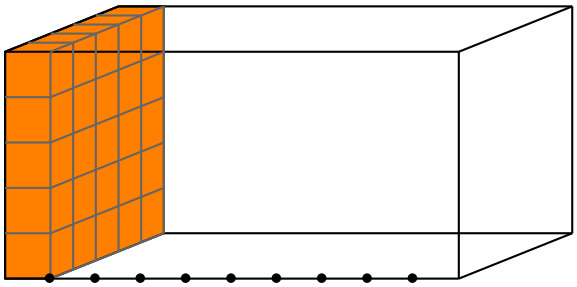
4. Observe ces boîtes cubiques. Indique sous chacune son volume (en nombre de petits cubes).





. . . .

5. Quel est le volume de cette boîte ?



. . . . . .

Boîtes imaginaires (1)

Dans une boîte, je couvre la base avec 12 cubes et je place 5 cubes dans la hauteur. Quel est son volume ?

.....

.....

.....

Intéressons-nous à une autre boîte. Pour recouvrir sa base, il faut 14 cubes. Sa hauteur est composée de 5 cubes et sa longueur de 7 cubes. Quel est le volume de cette boîte ?

.....

.....

.....

Comment faire pour trouver le volume (en nombre de cubes) d'une boîte de forme parallélépipédique ?

.....

.....

.....

Boîtes imaginaires (2)

Pouvez-vous trouver le volume d'une boîte parallélépipédique connaissant la longueur de ses arêtes ?

.....

.....

Pouvez-vous trouver le volume d'une boîte parallélépipédique connaissant le périmètre de la base et la hauteur ?

.....

.....

Pouvez-vous trouver le volume d'une boîte parallélépipédique connaissant sa hauteur et l'aire de sa base ?

.....

.....

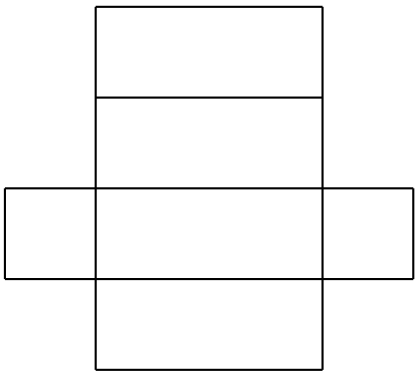
Est-il possible de calculer le volume d'une boîte parallélépipédique à partir de son développement ?

.....

.....

.....

.....



Unités

Quel est le volume d'une boîte ayant comme longueur 70 cm, comme largeur 3 dm et comme hauteur 40 cm ?

.....

.....

.....

.....

Quel est le volume d'une boîte ayant 55 cm de longueur, 3,4 dm de largeur et 21 cm de hauteur ? Exprimez votre réponse en cm^3 et en dm^3.

.....

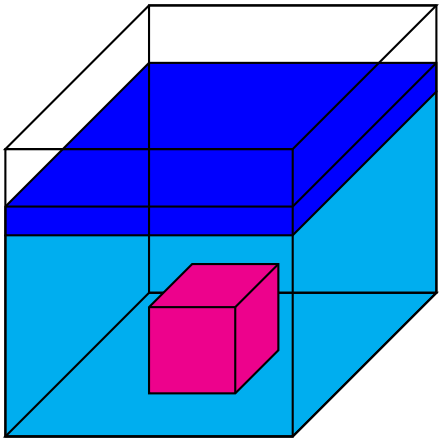
.....

.....

.....

Calcul du volume d'un objet

Calculez de deux manières le volume du cube immergé et comparer.



Volume du cube :

.....

.....

.....

.....

.....

Volume du parallélépipède virtuel :

.....

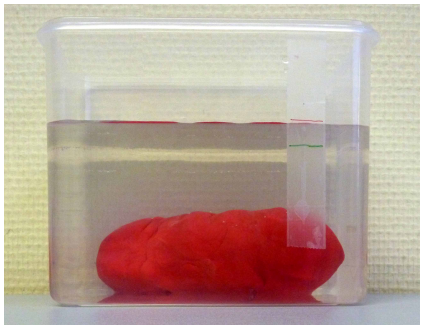
.....

.....

.....

.....

Calculez le volume de l'objet immergé.



Volume de l'objet :

.....

.....

.....

.....

.....

Troisième partie

Math & Manips à partir de 11 ans

Chapitre 6

Agrandissements

Préambule

Ce chapitre est destiné aux élèves du premier degré, y compris ceux du premier degré différencié. À partir de la construction d'agrandissements de figures sur papier pointé, la séquence d'apprentissage s'intéresse à l'influence de la duplication de la longueur des côtés d'un polygone sur son aire. La mise en place de techniques efficaces de comparaison des aires, par pavages et découpages, conduit à la généralisation à d'autres facteurs entiers.

Les dessins, les découpages et les puzzles peuvent être réalisés soit dans un environnement papier-crayon ( ), soit avec le support du logiciel de géométrie dynamique gratuit *Apprenti Géomètre* ( ), téléchargeable sur le site `www.crem.be`. La manière de mener l'activité en classe n'est pas la même selon qu'elle est traitée en version papier-crayon ou à l'aide du logiciel. Chacune des approches a ses spécificités et les compétences que les élèves mettent en œuvre pour effectuer les tâches ne sont pas toujours les mêmes. Toutefois, la séquence aboutit aux mêmes synthèses quel que soit le type de travail adopté.

Les deux symboles et sont utilisés tout au long du chapitre afin de signaler quel type de matériel est concerné. Les logos sont destinés à faciliter la lecture. Par exemple, si la classe effectue les tâches dans la version papier-crayon, tout commentaire ou section renseigné exclusivement par le symbole n'est pas à lire, et inversement.

Deux courtes activités de familiarisation avec le logiciel sont prévues dans la séquence avec *Apprenti Géomètre* pour faire découvrir aux élèves les différentes fonctionnalités nécessaires. Si l'enseignant a déjà utilisé le logiciel auparavant avec les élèves, les sections 1.1 et 2.1 sont superflues.

Signalons que les rapports des recherches précédentes liées à l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* dans les classes (notamment [15] et [16]) et d'autres documents comme [36] sont disponibles sur le site `www.crem.be`.

1 Découverte ( )

De quoi s'agit-il ?

Construire des agrandissements de figures sur papier pointé et en établir les caractéristiques.

Enjeux

Reconnaître les caractéristiques de l'agrandissement de polygones quelconques.

Compétences disciplinaires

Les solides et figures

Reconnaître, comparer [...] *des figures, les différencier et les classer.*

Construire des figures [...] *simples avec du matériel varié.*

Tracer des figures simples.

Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.

Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.

Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.

Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.

Les grandeurs

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels.

Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.

Fractionner des objets en vue de les comparer.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Un peu moins d'une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

La fiche 1 de la page 214 et les fiches 7 à 9 (pages 220 à 222) concernant l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*.

Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé, un projecteur et un écran.

Les fiches 11 et 12 des pages 224 et 225.

Matériel pour chaque groupe d'élèves

Un compas.

- Les fichiers listés ci-dessous, téléchargeables sur le site `www.crem.be`.
  - *Campagne.fag*
  - *ChapeauxPointus.fag*
  - *Egypte.fag*
  - *Polygone.fag*
- Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé.

1.1 Découvrons *Apprenti Géomètre* avec les formes libres ( )

Avant toute manipulation avec les élèves, l'enseignant doit s'être approprié le logiciel *Apprenti Géomètre*. La lecture du guide utilisateur facilite la prise en main [1].

Comment s'y prendre ?

L'enseignant répartit les élèves devant les ordinateurs de la classe. Après leur avoir montré comment ouvrir le logiciel et travailler à partir d'un fichier (fiche 7), il explique que le logiciel *Apprenti Géomètre* est prévu pour faciliter l'apprentissage de la géométrie et que, par conséquent, son fonctionnement est différent de celui d'un logiciel de dessin.

Il illustre ses propos en détaillant comment se tracent des segments ainsi que des polygones quelconques (à partir du fichier *Polygone.fag*) ou vérifiant certaines propriétés. Ensuite, l'enseignant invite les élèves à effectuer le même travail que lui. La fiche 8 reprend l'ensemble de ces indications.

Il explique encore aux élèves les indications notées sur la fiche 9 (activation d'une fonctionnalité et sélection d'un objet), puis donne la consigne suivante.

> Entrez dans *Apprenti Géomètre*, ouvrez le fichier *ChapeauxPointus.fag* et reproduisez le dessin qui s'y trouve. Pour vous aider, lisez attentivement les indications qui s'affichent à côté du curseur. Ensuite, coloriez les chapeaux et visages de votre reproduction.

Au cours du travail, les élèves sont amenés à construire, sur une grille, des polygones réguliers ou quelconques et des segments. Des triangles particuliers (isocèle ou rectangle) ont été insérés dans le dessin (figure 1) pour que les élèves prennent conscience de l'importance de l'ordre de construction des points dans le logiciel, comme dans l'exemple de la fiche 8.

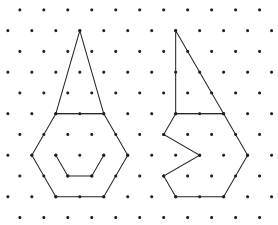


Fig. 1

Afin de tracer les polygones, les élèves doivent d'abord les reconnaître et donc compter le nombre de côtés. Les polygones réguliers leur sont généralement familiers mais c'est plus rarement le cas des polygones quelconques et encore moins des polygones concaves.

[1] Les éventuelles questions liées à l'utilisation du logiciel sont à adresser à `info@crem.be`.

Pour mettre en couleur l'intérieur d'un polygone, il faut commencer par choisir une couleur via la fonctionnalité `Colorier` dans le menu *Outils* avec l'option `Couleur_fond`. Ensuite, il faut sélectionner le polygone. Si des élèves ont reproduit les formes en travaillant par segments, il leur sera impossible de colorier leur reproduction car une succession de segments ne crée pas la forme dans le logiciel. L'enseignant le leur expliquera et rappellera si nécessaire comment créer un polygone.

L'intérêt de travailler avec des polygones plutôt qu'avec des segments peut également être illustré par d'autres fonctionnalités comme `Avant-plan`, `Arrière-plan`, `Découper` ou `Dupliquer`. Si le bord du polygone est un ensemble de segments, il faudra appliquer la fonctionnalité à chacun des segments séparément et il sera évidemment impossible de `Découper` ou `Dupliquer` la figure ainsi construite.

L'*Opération* `Dupliquer` est une spécificité du logiciel qui offre la possibilité de disposer d'autant de figures identiques que nécessaire. Des liens unissent les formes dupliquées à celle de départ : toute modification apportée à l'une d'elles est appliquée automatiquement aux autres.

Après avoir laissé les élèves manipuler les formes libres du logiciel, l'enseignant leur fait également découvrir les mouvements qui se trouvent dans le pavé à gauche de l'écran : `Glisser`, `Tourner`, `Retourner` et `Zoomer`. À part le mouvement `Retourner`, ces mouvements s'appliquent tant aux figures qu'à la feuille de dessin. Pour `Glisser` toute la feuille, il suffit de cliquer avec le curseur dans une zone vide et de déplacer la souris en maintenant le bouton gauche enfoncé. Si on sélectionne un élément, c'est celui-ci qui sera déplacé. Pour `Tourner` la feuille de dessin ou une figure, le procédé est le même : le bouton gauche de la souris doit être maintenu et il suffit de faire tourner le curseur soit autour du centre de l'écran, soit autour du centre de la figure. Quant au mouvement `Zoomer`, pour la feuille de dessin, il faut placer le curseur de la souris dans une zone vide et le déplacer vers le centre ou l'extérieur de la feuille, tout en maintenant le bouton gauche de la souris enfoncé. On procède de la même façon pour rétrécir ou agrandir une forme. Le mouvement `Retourner` quant à lui s'applique exclusivement aux figures, il faut approcher le curseur de la figure et choisir un des quatre axes prédéfinis passant par le centre de la figure.

En plus des mouvements, l'enseignant renseigne une fonctionnalité supplémentaire qui servira aux élèves par la suite : le bouton `Modifier` est utile notamment lorsqu'on souhaite déplacer un point d'une figure.

Échos des classes

Certains élèves ne parviennent pas à colorier le visage de la figure de droite. Ils l'ont construite par segments, probablement parce qu'ils n'ont pas assimilé la forme à un octogone. La mise en couleur permet à l'enseignant d'identifier rapidement la démarche des élèves pour reproduire les figures.

D'autres élèves tentent de réaliser la figure de droite en modifiant un hexagone régulier. Ces élèves n'ont pas encore intégré que le logiciel conserve les propriétés des figures dessinées, il faut leur laisser le temps de le découvrir.

Des élèves éprouvent des difficultés à se repérer dans le plan, même sur du papier pointé, d'autres ne reconnaissent pas les polygones à reproduire, ... L'activité est donc plus compliquée pour eux mais permet de mettre en évidence ces problèmes et d'y remédier autant que possible avant d'aborder l'activité de la section suivante.

1.2 Doublons les longueurs ( )

Comment s'y prendre ?

Les élèves ouvrent les fichiers *Campagne.fag* et *Egypte.fag* avec *Apprenti Géomètre*. Ils passent de l'un à l'autre via le menu *Fenêtres* (`Figure 1`, `Figure 2`).

Les fiches « À la campagne » et « Vacances en Égypte » des pages 224 et 225 sont distribuées à chaque élève.

L'enseignant donne la consigne suivante.

> Reproduisez sur la deuxième moitié de chaque feuille les différents éléments du dessin en doublant chacune des longueurs, y compris les distances qui séparent ces éléments.
>
> Un gros point a été placé dans chacune des grilles pour signaler l'endroit où commencer la reproduction.

Les figures 2 et 3 illustrent les dessins proposés ainsi que les agrandissements qui sont obtenus en doublant toutes les longueurs. Des grilles de deux types, à réseau carré ou triangulaire, ont été utilisées en fonction des polygones à y représenter. La présence de ces grilles facilite notamment le travail des élèves pour doubler la longueur de chaque segment tout en conservant sa direction.

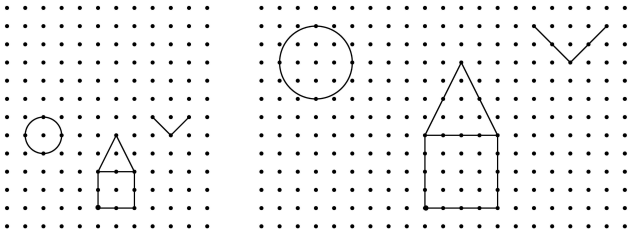


Fig. 2

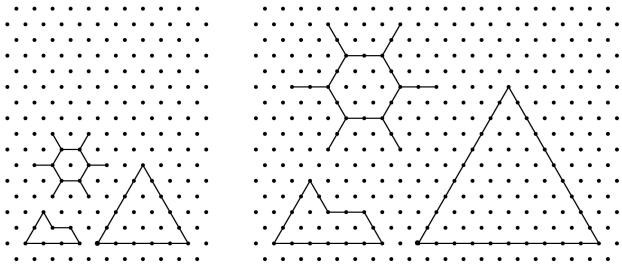


Fig. 3

Les élèves ne devraient pas rencontrer de difficultés pour doubler les longueurs. Par contre, l'enseignant devra peut-être rappeler le fait qu'il est important de doubler également les distances entre les différents éléments des dessins. C'est ainsi que l'apparence globale sera conservée.

Pour réaliser l'activité, les élèves auront dû reconnaître les différents polygones figurant dans les dessins. Notamment, pour représenter le sphinx du fichier *Egypte.fag*, il faut l'identifier au préalable à un pentagone. La fiche 1 est à disposition afin de permettre aux élèves de garder une trace du travail réalisé avec le logiciel.

1.3 Établissons les caractéristiques d'un agrandissement ( )

Comment s'y prendre ?

L'enseignant indique aux élèves que leurs reproductions sont des agrandissements des dessins originaux et leur demande alors ce qui, selon eux, caractérise un agrandissement. Il propose le travail collectif suivant.

> En observant vos réalisations, établissons ensemble un tableau reprenant ce qui reste identique et ce qui est modifié par un agrandissement.

Le tableau est construit au fur et à mesure des discussions entre élèves et professeur. Ce tableau reprend, dans un premier temps, l'ensemble des propositions des élèves, qu'elles soient à caractère mathématique ou non. Globalement, on obtient un tableau qui pourrait ressembler à celui reproduit ci-dessous.

Ce qui reste identique par un agrandissement	**Ce qui est modifié par un agrandissement**
carré	mesures
triangle	longueurs
triangle isocèle	hauteurs
oiseau	espacements
image	diamètres
...	périmètres
	aires
	...

Au fil des propositions, les élèves remarquent que certains éléments peuvent être regroupés. Par exemple, que ce soit un carré qui reste un carré ou un triangle qui reste un triangle dans l'agrandissement, on peut dire que la forme est conservée. L'enseignant souhaite parvenir au tableau de synthèse suivant avec les élèves.

Ce qui reste identique par un agrandissement	**Ce qui est modifié par un agrandissement**
la forme	les longueurs
l'amplitude des angles	les aires

Généralement, les élèves repèrent d'eux-mêmes la conservation de la forme et la modification des longueurs et des aires mais il est rare qu'ils identifient la conservation de l'amplitude des angles. Pour guider les élèves, l'enseignant propose d'observer l'oiseau du dessin « À la campagne » et un autre oiseau, qu'il dessine au tableau, avec des ailes de longueur double mais dont l'ouverture n'est pas de même amplitude (figure 4).

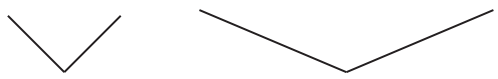


Fig. 4

L'enseignant clarifie la situation avec les élèves : ce qui fait que l'oiseau de droite de la figure 4 n'est pas appelé un agrandissement de l'oiseau de gauche est que l'amplitude de l'angle n'est pas conservée, bien que les ailes soient de longueur double. À ce stade, certains élèves n'ont pas une représentation claire de ce qu'est un angle. Ils associent un angle à la longueur de ses côtés. Avec ces élèves, c'est justement l'occasion de travailler ce concept plus en profondeur.

Dans les fichiers *Campagne.fag* et *Egypte.fag*, les élèves peuvent déplacer les polygones de départ sur leurs agrandissements et remarquer que, en chacun des sommets, les angles se superposent parfaitement.

Suite au tableau réalisé en commun, l'enseignant introduit le vocabulaire correct : les polygones de départ et leurs agrandissements respectifs sont qualifiés de « polygones semblables ».

Dans la suite, lorsque nous parlons d'agrandissement de polygones, il s'agit bien de polygones de côtés n fois plus grands et dont l'amplitude de chaque angle a été conservée.

Remarquons pour l'enseignant que, contrairement aux triangles qui sont indéformables (si les longueurs des côtés d'un triangle sont données, il n'est possible d'en construire qu'un seul, à une isométrie près), les polygones de plus de trois côtés sont déformables. La figure 5 illustre ce fait : connaissant la longueur des côtés d'un quadrilatère, il est possible d'en construire une infinité non isométriques.

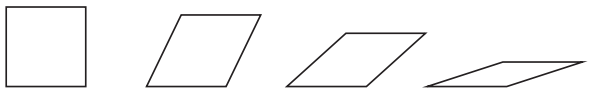


Fig. 5

La multiplication de la longueur de chacun des côtés par un même facteur et la conservation de l'amplitude des angles sont ainsi deux conditions nécessaires pour obtenir l'agrandissement d'un polygone.

Notons encore que la conservation des angles est une condition nécessaire mais qu'elle n'est pas suffisante. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer deux figures qui ont les mêmes angles mais qui n'ont pas des mêmes rapports de longueurs, un carré et un rectangle par exemple.

2 Pavages pour comparer des aires ( )

De quoi s'agit-il ? Observer, par pavages et découpages, ce qu'il advient de l'aire d'un polygone lorsqu'on l'agrandit en multipliant la longueur de ses côtés par deux.

Enjeux Mettre en place des techniques efficaces et généralisables de comparaison des aires.

Lier l'aire d'un polygone aux aires des triangles d'une de ses décompositions.

Compétences disciplinaires

Les compétences travaillées dans cette section sont identiques à celles listées à la section 1 (page 164).

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

- Une période de 50 minutes.
- Un peu moins d'une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

- Les fiches 2 et 3 des pages 215 et 216 ainsi que la fiche 10 (page 223) à propos de l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*.
- Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé, un projecteur et un écran.
- Les fiches 13 à 17 des pages 226 à 230.

Matériel pour chaque groupe d'élèves

- Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé.
- Les fichiers listés ci-dessous, téléchargeables sur le site `www.crem.be` dans la partie consacrée à la recherche *Math & Manips*.
  - *Exemple.fag*
  - *Hexagone.fag*
  - *PavageCarre.fag*
  - *PavageChat.fag*
  - *PavageChatInit.fag*
  - *PavageHexagone.fag*
  - *PavagePentagone.fag*
  - *PavageTriangle.fag*
- Des ciseaux et de la colle.
- Les figures à découper qui se trouvent en annexe (page 211), à imprimer de préférence sur feuille cartonnée de couleur.

Prérequis

- La conservation de l'aire par découpages et assemblages (acquise normalement par tous les élèves à ce niveau).

2.1 Continuons la découverte d'*Apprenti Géomètre* ( )

Cette section amène les élèves à découvrir d'autres fonctionnalités qui leur seront utiles pour les activités suivantes.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant ouvre le fichier *Exemple.fag* avec *Apprenti Géomètre*. Il montre aux élèves dans un premier temps comment construire les triangles de la figure 6 à partir d'un carré afin qu'ils puissent, dans un second temps, effectuer un travail similaire avec d'autres formes.

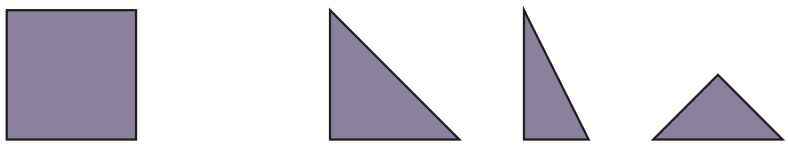


Fig. 6

L'enseignant glisse les triangles sur le carré et demande aux élèves ce qu'ils feraient pour construire les triangles à partir du carré. Les élèves observent que ces figures ont même base

ou même hauteur que le carré de départ et que les triangles pourraient être obtenus en découpant le carré. L'enseignant montre alors aux élèves quelles opérations permettent d'obtenir ces trois triangles particuliers à partir du carré.

Pour obtenir le premier triangle, l'enseignant utilise l'*Opération* qui consiste à `Découper` le carré selon une de ses diagonales, ce qui produit deux triangles rectangles isocèles. Il profite de cette intervention pour souligner l'importance des indications données par le curseur de la souris et montrer aux élèves que, lorsqu'une figure est découpée, *Apprenti Géomètre* crée les morceaux découpés au-dessus de la figure originale. Ceci permet aux utilisateurs de conserver la forme de départ, ce qu'un travail papier-crayon ne permet pas. Afin de mieux visualiser le découpage, l'enseignant utilise la fonctionnalité `Glisser` pour déplacer le morceau correspondant au triangle souhaité à côté de la forme initiale et écarter les morceaux superflus.

Pour créer les deux triangles suivants à partir du carré, on se rend compte que des points supplémentaires doivent être créés. Dans un cas, il faut créer le point milieu de la base du carré en la divisant en deux parties égales via l'*Opération* `Diviser`. La division effectuée, il reste à `Découper` le carré. L'un des deux morceaux correspond au triangle rectangle (figure 7).

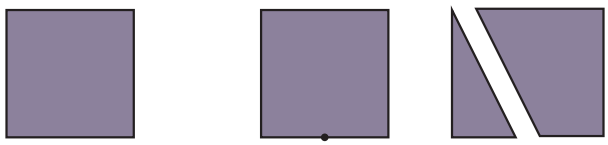


Fig. 7

Dans l'autre cas, pour obtenir le petit triangle rectangle isocèle, les élèves observent que, lorsque les figures sont superposées, le sommet du triangle se trouve au centre du carré (figure 8). L'enseignant montre alors l'*Opération* `Construire le centre` et glisse à nouveau le triangle sur le carré pour s'assurer que ce point correspond au sommet du triangle.

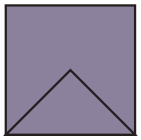


Fig. 8

Ensuite, il reste à `Découper` le carré, ce qui doit se faire en commençant et terminant par les points situés sur son bord.

La fiche 10 reprend l'exemple et les fonctionnalités présentées.

L'enseignant donne ensuite la consigne suivante.

> Ouvrez le fichier *Hexagone.fag*. Vous y trouvez un hexagone et trois autres polygones. Construisez ces trois formes à partir de l'hexagone en recourant aux fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre*.

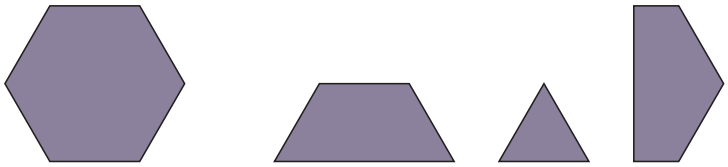


Fig. 9

Pour obtenir le trapèze de la figure 9, les élèves découpent l'hexagone le long d'une de ses diagonales. Ensuite, ils doivent penser à utiliser l'*Opération* `Construire le centre` afin d'obtenir le triangle équilatéral. Pour construire la dernière forme de la figure 9 à partir de l'hexagone, il est nécessaire de diviser deux de ses côtés opposés en deux parties afin d'effectuer le découpage le long d'une médiane.

2.2 Pavons les polygones ( )

Comment s'y prendre ?

L'enseignant demande aux élèves d'ouvrir, dans l'ordre, les fichiers *PavageTriangle.fag*, *PavageCarre.fag*, *PavagePentagone.fag*, *PavageHexagone.fag* et *PavageChat.fag*. Les élèves reviennent ensuite au premier fichier (`Figure 1`) via le menu *Fenêtres*. Ils passeront de fichier en fichier via ce même menu. Dans chaque fichier sont représentés un « petit polygone » et son agrandissement de côtés de longueur double.

L'enseignant forme des groupes de deux élèves. Il leur donne les fiches 13 et 14 sur lesquelles sont représentés des « petits polygones » ainsi que leurs agrandissements de côtés de longueur double. Chaque groupe reçoit également plusieurs exemplaires des petits polygones [2], un tube de colle et des ciseaux.

L'enseignant pose la question suivante et complète par la consigne.

> Combien de « petits polygones » sont nécessaires pour couvrir (sans superposition) l'agrandissement dont la longueur des côtés a été doublée ? Pour réaliser le pavage, ne découpez que lorsque c'est indispensable.

Avant de les laisser entamer le travail, l'enseignant demande aux élèves d'estimer le nombre de polygones nécessaires à leur réalisation. Les élèves commencent par le pavage du triangle quelconque.

Dans le cadre d'un travail avec *Apprenti Géomètre*, il suffit de dupliquer le triangle et de glisser les duplicata dans l'agrandissement ; le blanc apparent est facilement identifié comme un triangle qui a subi une rotation d'un demi-tour (figure 10). Il reste alors aux élèves à placer ce triangle.

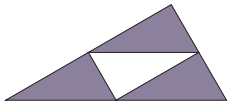


Fig. 10

Les élèves réalisent le pavage avec les formes en carton, ce qui devrait être réussi rapidement. Pour chacune des figures, les élèves colleront leur puzzle sur la fiche du groupe. L'enseignant se chargera de photocopier les solutions pour chacun des membres du groupe [3].

Le pavage de l'agrandissement du carré est réalisé très simplement car il suffit de placer quatre exemplaires côte à côte dans l'agrandissement.

Le pavage suivant est celui d'un pentagone (rencontré dans [31]). Il est possible de paver celui-ci avec quatre pentagones de départ sans aucun découpage. Cependant, les élèves ne verront peut-être pas cette possibilité et découperont plusieurs pièces pour paver l'agrandissement.

[2] Les pièces à découper sont imprimées de préférence sur papier cartonné et de couleur (annexe, page 211).

[3] Si l'enseignant souhaite que chaque élève puisse coller son puzzle sur une fiche qui lui est propre, il doit être conscient que cela représente un nombre considérable de formes à découper.

Un premier pentagone a été placé dans le fichier (figure 11) pour suggérer qu'il faut appliquer le mouvement `Retourner` à certaines pièces lors du pavage.

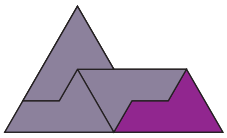


Fig. 11

L'enseignant qui le souhaite peut profiter de l'occasion pour faire observer aux élèves la différence entre un déplacement et un retournement.

En effet, il existe dans *Apprenti Géomètre* des formes dont la face avant et la face arrière sont colorées différemment, ce qui permet de distinguer les formes qui ont été retournées. Pour les obtenir, il faut dès le début de l'activité cocher l'option `Formes bifaces` dans les *Préférences* (voir le commentaire de la page 184 à ce sujet).

Si les élèves n'ont pas réalisé le puzzle de la figure 12, l'enseignant leur signale qu'il existe et les défie d'y parvenir. Certaines pièces doivent être retournées, ce qui se produit assez naturellement, souvent inconsciemment, avec les formes en carton.

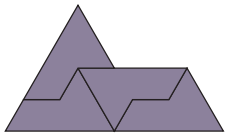


Fig. 12

Si l'enseignant souhaite que les élèves distinguent les formes déplacées des formes retournées dans les pavages qu'ils réalisent, il peut proposer des formes en carton avec des faces différentes (voir à ce propos le commentaire de la page 184).

Les élèves observent que, jusqu'ici, quatre polygones initiaux sont nécessaires pour paver leur agrandissement de côtés de longueur double.

Ensuite, lorsque les élèves pavent l'agrandissement de l'hexagone, ils s'aperçoivent rapidement qu'il n'est plus possible de placer quatre formes entières. Ils peuvent placer trois hexagones entiers mais l'agrandissement n'est pas totalement couvert. Les élèves pensent alors à découper un hexagone pour compléter ce puzzle. Ils s'apercevront qu'un hexagone coupé en trois losanges comme dans la figure 13 permet de finaliser le pavage (le découpage est réalisé facilement si les élèves utilisent l'*Opération* `Construire le centre`). La figure 14 montre une alternative. Comme précédemment, quatre polygones initiaux sont nécessaires pour paver l'agrandissement de côtés de longueur double.

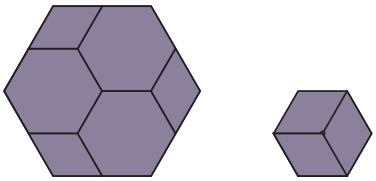


Fig. 13

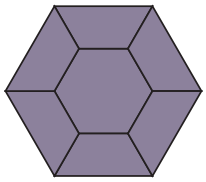


Fig. 14

Rappelons que, lors des découpages avec *Apprenti Géomètre*, les morceaux découpés se superposent à la figure initiale. Les duplicata créés lors des découpages pourraient perturber les élèves dans le décompte du nombre d'hexagones nécessaires à la réalisation du pavage. Il est donc intéressant de proposer aux élèves, après avoir réalisé le pavage et écarté les morceaux superflus, de reconstituer des hexagones entiers à partir des différentes pièces.

Le travail se poursuit avec une figure qui a l'apparence d'une tête de chat. Comme pour les autres polygones, les élèves essayent de paver l'agrandissement de côtés de longueur double avec un maximum de petites « têtes de chat » entières.

L'objectif de cette figure est de faire prendre conscience aux élèves qu'une solution raisonnée permet l'économie d'un grand nombre de découpages fastidieux, on ne les laissera donc pas s'attarder sur ce travail. Les élèves se rendent compte que, même en découpant, il n'est pas toujours facile de paver un polygone avec des figures qui lui sont semblables. L'enseignant propose alors de procéder autrement et de se référer à un polygone qui a été pavé simplement et qui pourrait lui-même être utilisé pour paver des polygones plus compliqués. Le pavage du carré paraît simple mais il est impossible de décomposer le polygone en forme de tête de chat en carrés. Par contre, le pavage du triangle quelconque a également été réalisé rapidement et la « tête de chat » est décomposable en triangles.

Le procédé que l'on adopte est donc le suivant : partager en triangles le polygone et son agrandissement de la même manière (figure 15) et recomposer ensuite chaque grand triangle avec des petits (figure 16).

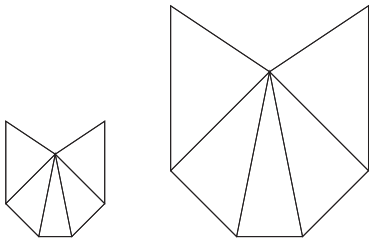


Fig. 15

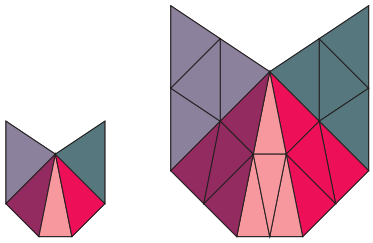


Fig. 16

Il est possible de décomposer le polygone en triangles de nombreuses manières. Pour travailler avec un minimum de triangles, une des solutions consiste à choisir un sommet et à le relier à tous les autres. Dans le cas de la figure 15, la décomposition a, de plus, l'avantage de respecter la symétrie de la figure.

Après avoir demandé d'ouvrir le fichier *PavageChatInit.fag*, l'enseignant fait appliquer le procédé en donnant la consigne suivante.

> Partagez de la même manière les deux « chats » en triangles et, après avoir mis chaque triangle du petit « chat » en couleur (une couleur différente par triangle), pavez les triangles du grand chat avec ceux du petit chat.

Pour décomposer les figures en triangles, les élèves commencent généralement par placer des segments pour visualiser les triangles. Mais, dès qu'ils utilisent l'*Outil* `Colorier` (`Couleur_Fond`), ils voient qu'ils ne peuvent colorier que la figure entière du chat, les triangles n'ayant pas été construits en tant que polygones avec le logiciel. Ils construisent alors ces triangles afin de pouvoir donner une couleur différente à chacun.

Une fois les triangles du petit « chat » coloriés, les élèves effectuent la démarche décrite plus haut en pavant chacun des grands triangles avec quatre petits triangles identiques. Ils observent ainsi qu'il faudra quatre exemplaires de chaque morceau de la petite tête de chat pour paver l'agrandissement de côtés de longueur double (figure 16).

Pour garder une trace du travail effectué avec le logiciel *Apprenti Géomètre*, l'enseignant distribue la fiche 2 aux élèves. Ils peuvent colorier les différents triangles du chat pour mieux se rappeler ce qui a été réalisé en classe.

L'enseignant distribue la fiche 15 et demande aux élèves de suivre la consigne.

> Partagez de la même manière les petits « chats » et le grand en triangles puis coloriez les triangles d'un petit chat avec des couleurs différentes. Reproduisez ensuite sur le grand chat les petits triangles qui composent chacun des grands triangles, en conservant les couleurs. Coloriez autant d'exemplaires de petits chats que nécessaire.

Les élèves partagent en triangles les exemplaires de la figure initiale et son agrandissement selon la même décomposition. Pour reproduire les petits triangles sur le grand chat, plusieurs solutions existent. L'une consiste à reproduire les triangles à l'aide d'un compas. Une alternative est de remarquer qu'il suffit de joindre les milieux des côtés pour faire apparaître les triangles identiques à ceux du petit chat puisque l'agrandissement du chat a des côtés de longueur double de ceux du petit chat.

L'utilisation de la couleur facilitant l'association des triangles correspondants, les élèves remarquent que chacun des grands triangles est composé de quatre triangles identiques issus de quatre exemplaires de la petite tête de chat. Plus d'exemplaires que nécessaire ont été dessinés sur la fiche 15 pour que l'enseignant puisse voir si les élèves associent correctement les triangles.

On observe avec eux que, comme pour les autres polygones rencontrés, les morceaux de quatre exemplaires de la figure initiale sont ainsi nécessaires pour recomposer l'agrandissement de côtés de longueur double. Ce travail terminé, les élèves reçoivent la fiche 16 comme synthèse.

Échos des classes

Des élèves, ayant bien compris qu'il est nécessaire de créer des triangles pour les mettre en couleur et qu'il ne suffit pas de placer des segments pour partager la figure, créent les quatre premiers triangles mais oublient de créer le cinquième. Après avoir mis en couleur les quatre premiers triangles, les élèves croient colorier le cinquième mais c'est la figure du chat située à l'arrière plan qui se met en couleur. Les élèves visualisent à l'écran cinq triangles de couleurs différentes et c'est lorsqu'ils tentent de dupliquer le cinquième triangle qu'ils se rendent compte de leur oubli. Ils y remédient alors rapidement.

Certains élèves nomment chacun des triangles des petits chats (une lettre par exemplaire de chat) afin de mieux identifier par la suite l'emplacement de leur reproduction dans l'agrandissement.

2.3 Comparons les aires ( )

Comment s'y prendre ?

Après la réalisation des différents pavages, l'enseignant donne la consigne suivante.

> Comparez les aires de chacun des polygones rencontrés avec celles de leur agrandissement de côtés de longueur double.

Pour paver l'agrandissement du triangle de côtés de longueur double, quatre exemplaires du triangle ont été nécessaires. Les élèves devraient alors déduire que *lorsqu'on double la longueur des côtés d'un triangle, son aire est multipliée par quatre.*

Les agrandissements des autres polygones ont également été pavés avec quatre exemplaires de la figure initiale. Pour ces polygones, la même conclusion peut être formulée : l'aire du polygone semblable de côtés de longueur double est quatre fois plus grande que l'aire du polygone initial.

Pour généraliser, on construit avec les élèves un raisonnement en plusieurs étapes. La première consiste à se demander si tout polygone est un assemblage de triangles comme c'est le cas pour la figure qui a l'apparence d'une tête de chat. À ce niveau d'enseignement, les élèves peuvent s'en convaincre en réalisant la décomposition en triangles sur quelques exemples. Ils peuvent d'ailleurs constater qu'un raisonnement similaire peut être appliqué aux polygones rencontrés précédemment.

Les élèves doivent également remarquer que, si un polygone et son agrandissement (de côtés de longueur double) sont décomposés en triangles de la même manière, chaque triangle de l'agrandissement a des côtés de longueur double de celles des triangles semblables de la décomposition du polygone initial.

Suite à ces réflexions et en partant du polygone de la figure 17, le raisonnement suivant peut être établi.

1. Tout polygone est un assemblage de triangles (figure 18).

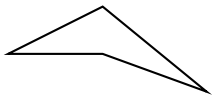


Fig. 17

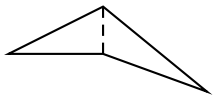


Fig. 18

2. Un polygone et son agrandissement peuvent être décomposés de la même manière. Les grands triangles de la décomposition de l'agrandissement (de côtés de longueur double) ont des côtés de longueur double de ceux des petits triangles de la décomposition du polygone initial (figure 19).

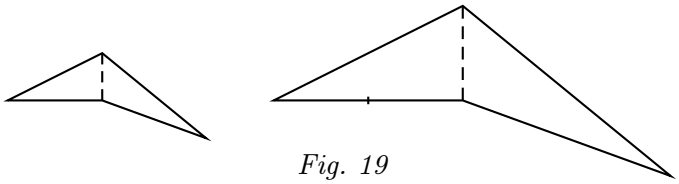


Fig. 19

3. Lorsqu'on double la longueur des côtés d'un triangle, l'agrandissement est pavé avec quatre exemplaires du triangle de départ. Son aire est donc multipliée par quatre (figure 20).

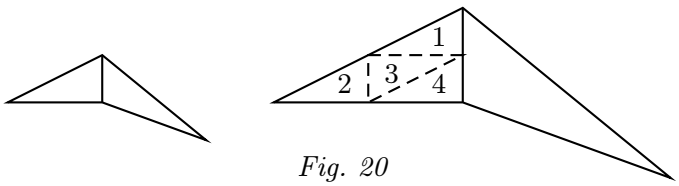


Fig. 20

La conclusion suit : *lorsqu'on multiplie la longueur des côtés d'un polygone par deux, l'aire de l'agrandissement est égale à quatre fois celle du polygone initial.*

Le quadrilatère quelconque de la figure 21 en montre une illustration (le bas de la fiche 15 permet aux élèves de réaliser la construction de manière autonome).

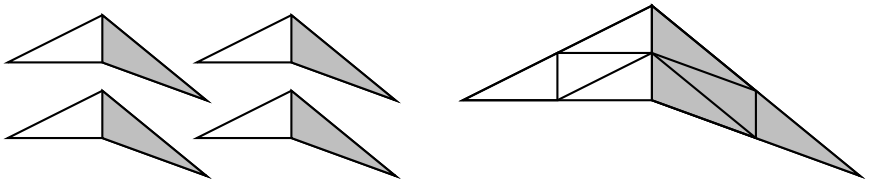


Fig. 21

L'enseignant distribue alors la synthèse (fiche 3, fiche 17) afin que les élèves gardent une trace du travail réalisé en classe.

Notons pour l'enseignant que la démarche sous-jacente à la justification de la conclusion implique une réorganisation mentale des pièces du puzzle qui correspond à une mise en évidence, ou à une distributivité, comme l'illustre la figure 22.

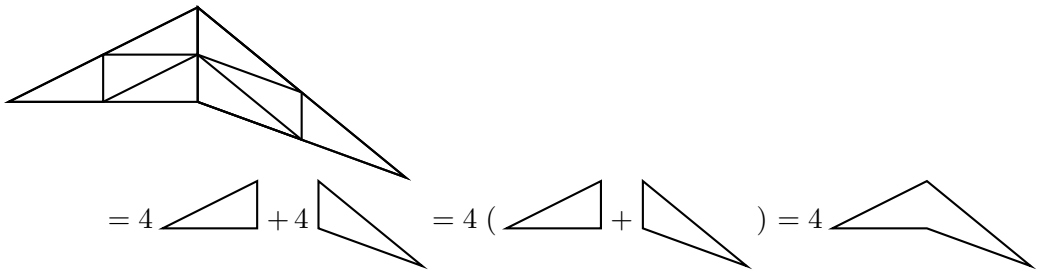


Fig. 22

3 Constructions pour généraliser ()

Dans l'activité 1.2, les élèves ont construit facilement des agrandissements de figures géométriques grâce à la présence d'une grille en arrière-plan. Le travail effectué ici s'appuie sur les spécificités du logiciel *Apprenti Géomètre* qui permettent d'envisager la construction d'un agrandissement sans le support d'une grille.

De quoi s'agit-il ?

Construire des agrandissements de figures sans le support de papier pointé.

Enjeux

Réinvestir les acquis de la section précédente pour réaliser la construction d'agrandissements.

Amorcer la généralisation de la comparaison d'aires.

Compétences disciplinaires

Les compétences travaillées dans cette section sont identiques à celles listées à la section 1 (page 164).

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Un peu moins d'une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé, un projecteur et un écran.

Matériel pour chaque groupe d'élèves

- Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé.

3.1 Construisons des agrandissements de côtés de longueur double ( )

Comment s'y prendre ?

L'enseignant demande aux élèves d'ouvrir une nouvelle fenêtre dans *Apprenti Géomètre* et donne la consigne suivante.

> Tracez un triangle quelconque. Après l'avoir mis en couleur, construisez son agrandissement de côtés de longueur double par assemblage de triangles.

En l'absence de quadrillage, il n'est plus possible de dessiner d'abord le contour du triangle agrandi pour le remplir ensuite. En s'inspirant des manipulations précédentes, les élèves devraient parvenir à obtenir le contour de la figure agrandie en dupliquant trois fois le triangle initial et en glissant les duplicata dans la position adéquate (figure 23). L'utilisation du logiciel permet d'exécuter cette construction rapidement avec toute la précision requise.

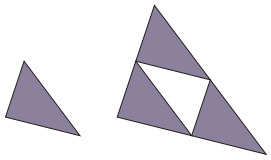


Fig. 23

De plus, cette construction permet aux élèves de justifier qu'ils ont effectivement construit un triangle semblable puisque les angles sont conservés.

Pour aller plus loin, on demande d'effectuer un travail similaire avec un pentagone quelconque [4].

> Tracez un pentagone quelconque et construisez son agrandissement de côtés de longueur double par assemblage de triangles (coloriez chaque triangle de la décomposition du pentagone initial dans une couleur différente).

Pour réaliser cet agrandissement, les élèves doivent tout d'abord penser à décomposer le pentagone en triangles puis à accoler des triangles semblables obtenus par duplication en suivant la direction de chacun des côtés. La figure 24 donne un exemple de réalisation.

Moyennant un travail sur la somme des angles, ce procédé permet de justifier que la construction réalisée est bien un agrandissement du pentagone initial puisque les angles sont conservés. De plus, cette méthode est généralisable aux agrandissements de tout polygone.

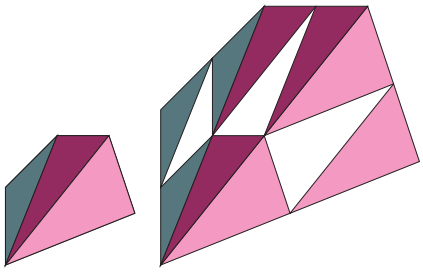


Fig. 24

[4] Il est possible que le fonctionnement du logiciel amène les élèves à construire des polygones croisés. L'enseignant veillera à les éliminer des constructions des élèves car le calcul de l'aire de tels polygones est particulier (voir à ce sujet [32]).

Échos des classes

Les élèves ne se contentent généralement pas de placer les trois triangles qui forment le contour de l'agrandissement, certains tiennent à placer le quatrième exemplaire dans l'espace vide. On les laisse faire tant qu'ils en éprouvent le besoin.

Construire l'agrandissement du pentagone n'est pas évident pour tous, certains élèves ont besoin de consignes plus précises. Soit l'enseignant les guide en leur proposant de réaliser l'agrandissement de chacun des triangles pour commencer, soit il leur suggère de former le contour du pentagone agrandi en disposant judicieusement les triangles. Pour cela, ils placent à chaque fois deux triangles en respectant l'alignement des côtés de manière à construire des côtés de longueur double. Cette deuxième méthode permet d'aborder plus facilement l'activité de la section suivante.

Les élèves qui assimilent rapidement la technique se mettent au défi d'appliquer cette méthode à des pentagones concaves, ce qu'ils réussissent parfaitement.

3.2 Construisons des agrandissements de côtés de longueur triple ( )

Comment s'y prendre ?

Au cours du travail accompli jusqu'ici, les élèves ont formulé la conclusion suivante : *lorsque la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par deux, l'aire de l'agrandissement est égale à quatre fois l'aire du polygone initial.* La démarche continue en se posant la question suivante.

> Qu'advient-il de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit son agrandissement de côtés de longueur triple ?

Pour commencer, l'enseignant demande aux élèves une estimation. En général, les élèves pensent que six ou huit polygones seront nécessaires pour paver l'agrandissement de côtés de longueur triple et donc que l'aire sera six ou huit fois plus grande.

Comme tout polygone est décomposable en triangles, les élèves devraient proposer d'examiner le cas d'un triangle quelconque et d'appliquer le procédé de construction utilisé dans l'activité précédente. Ils tentent alors de réaliser un triangle dont les côtés sont de longueur triple de celui de départ en employant les deux fonctionnalités `Dupliquer` et `Glisser` comme précédemment.

À nouveau, il n'est pas obligatoire de placer tous les triangles pour former l'agrandissement dont les côtés sont trois fois plus longs. On joue sur les couleurs et dans l'agrandissement, les espaces blancs suggèrent les trois triangles que l'on a évité de déplacer (figure 25).

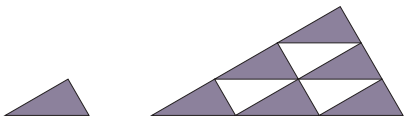


Fig. 25

La construction permet de conclure que neuf triangles sont nécessaires pour paver l'agrandissement et de déduire alors que son aire est neuf fois plus grande que celle du triangle initial.

Ce travail peut également être réalisé pour un polygone quelconque. La figure 26 illustre la construction des agrandissements de côtés de longueur double et de longueur triple d'un pentagone quelconque.

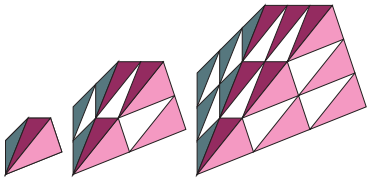


Fig. 26

Les élèves ont dès à présent les outils nécessaires pour formuler le raisonnement suivant :
- tout polygone est un assemblage de triangles ;
- un polygone et son agrandissement peuvent être décomposés de la même manière ;
- chaque triangle de la décomposition d'un agrandissement de côtés de longueur triple a également des côtés de longueur triple ;
- lorsqu'on triple la longueur des côtés d'un triangle, l'agrandissement est pavé avec neuf exemplaires du triangle de départ. Son aire est donc multipliée par neuf.

Les élèves peuvent enfin conclure que *lorsque la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par trois, l'aire de l'agrandissement est égale à neuf fois l'aire du polygone initial.*

La construction des agrandissements d'un polygone avec le logiciel amorce le travail de généralisation développé dans la section suivante.

4 Généralisations ( )

De quoi s'agit-il ?

Observer, par pavages et découpages, ce qu'il advient de l'aire d'un polygone lorsqu'on l'agrandit en multipliant la longueur de ses côtés par un nombre entier.

Se convaincre que, à cet égard, tout polygone (et même le disque) se comporte comme le triangle et le carré.

Enjeux

Généraliser les techniques de comparaison des aires.

Compétences disciplinaires

Les compétences travaillées dans cette section sont identiques à celles listées à la section 1 (page 164).

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

La fiche 4 de la page 217. Les fiches 5 et 6 (pages 218 et 219) reprenant les consignes données aux élèves peuvent être distribuées à la fin de l'activité afin qu'ils gardent trace de l'ensemble du travail réalisé en classe avec le logiciel.

Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé, un projecteur et un écran.

Les fiches 18 et 19 des pages 231 et 232.

Matériel pour chaque groupe d'élèves

- Un ordinateur sur lequel le logiciel *Apprenti Géomètre* (version 2) est installé.
- Le fichier *SuitePolygones.fag*, téléchargeable sur le site `www.crem.be`.
- La suite de polygones en annexe au bas de la page 211.

4.1 Triplons la longueur des côtés ( )

Comment s'y prendre ?

Lors de la synthèse de l'activité de la section 2.3, les élèves ont relevé que *lorsque la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par deux, l'aire de l'agrandissement est égale à quatre fois celle du polygone initial.* L'enseignant pose alors la question suivante.

> Qu'advient-il de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit son agrandissement de côtés de longueur triple ?

Les élèves devraient penser à s'intéresser à l'agrandissement d'un triangle quelconque puisque celui-ci conduit à la généralisation à tout polygone. Plusieurs stratégies sont alors possibles. Soit les élèves partent de l'agrandissement de côtés de longueur double du triangle rencontré précédemment et le complètent, au crayon ou avec des formes en carton, pour obtenir l'agrandissement de côtés de longueur triple, soit l'enseignant leur donne la fiche 18 sur laquelle est tracé le contour de l'agrandissement du triangle dont la longueur des côtés a été multipliée par trois.

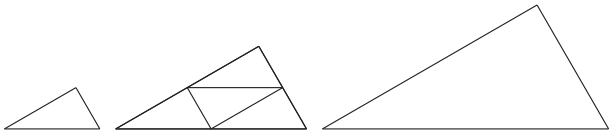


Fig. 27

Quel que soit le procédé suivi, les élèves obtiennent le pavage de la figure 28. Comme précédemment, les élèves devraient pouvoir combiner ce qu'ils viennent d'observer sur le triangle quelconque aux observations réalisées précédemment pour généraliser à tout polygone :

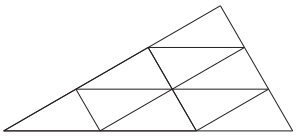


Fig. 28

- tout polygone est un assemblage de triangles ;
- un polygone et son agrandissement peuvent être décomposés de la même manière ;
- chaque triangle de la décomposition d'un agrandissement de côtés de longueur triple a également des côtés de longueur triple ;
- lorsqu'on triple la longueur des côtés d'un triangle, l'agrandissement est pavé avec neuf exemplaires du triangle de départ. Son aire est donc multipliée par neuf.

La conclusion peut alors être formulée comme suit : *lorsque la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par trois, l'aire de l'agrandissement est égale à neuf fois l'aire du polygone initial.*

Un travail qui aboutit à la même conclusion a été mené avec le logiciel *Apprenti Géomètre* dans la section 3.2.

4.2 Multiplions la longueur des côtés par un nombre entier ( )

Comment s'y prendre ?

Les élèves ont pu observer jusqu'ici comment se comporte l'aire d'un polygone lorsqu'on l'agrandit en multipliant la longueur de ses côtés par deux ou par trois. On poursuit ici le raisonnement au-delà du facteur trois.

La question suivante est posée aux élèves.

> Qu'advient-il de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit l'agrandissement dont la longueur des côtés est multipliée par huit ?

Suite au travail effectué dans les sections précédentes, les élèves devraient avoir compris que tout polygone est un assemblage de triangles et que, lorsqu'on construit l'agrandissement d'un polygone, chaque triangle de la décomposition subit le même agrandissement. Il reste donc à découvrir combien d'exemplaires d'un triangle de départ sont nécessaires pour paver un agrandissement dont la longueur des côtés a été multipliée par huit.

Les élèves peuvent tenter de trouver des liens entre les facteurs multiplicatifs des longueurs et aires rencontrés dans les activités précédentes en dressant un tableau tel que celui illustré ci-contre.

Longueurs	Aires
$\times 2$	$\times 4$
$\times 3$	$\times 9$

Ces seules données ne permettant pas de répondre à la question, les élèves pourraient essayer de les compléter en dessinant les agrandissements successifs d'un triangle [5] (figure 29).

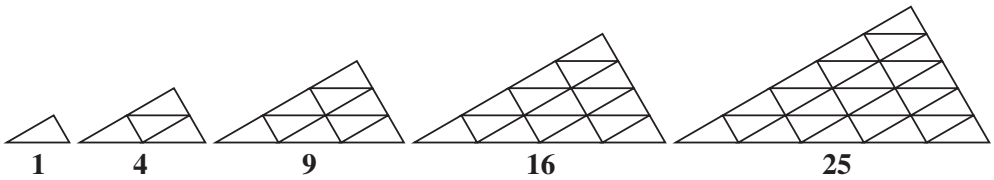


Fig. 29

Le dénombrement de triangles devenant fastidieux, ils complètent leur tableau avec les résultats supplémentaires et obtiennent par exemple le tableau ci-contre.

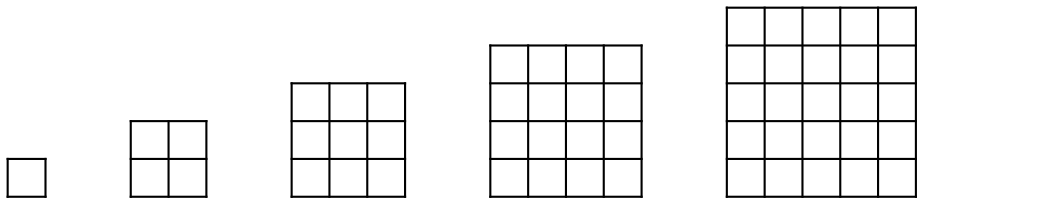
Longueurs	Aires
$\times 2$	$\times 4$
$\times 3$	$\times 9$
$\times 4$	$\times 16$
$\times 5$	$\times 25$

À ce moment, soit les élèves repèrent les liens entre les lignes et déduisent que, si la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par huit, l'aire du polygone agrandi sera 64 fois plus grande. Si ce n'est pas le cas, l'enseignant convient avec les élèves de s'intéresser aux aires des agrandissements d'un carré dont on a montré qu'elles se comportent comme celles des agrandissements d'un triangle.

Il dessine au tableau les trois premiers carrés de la figure 30 et demande aux élèves de continuer cette suite de carrés. Cette figure est plus facile à interpréter et à mémoriser. Elle donne l'image

[5] Si les élèves remarquent que le nombre de triangles dans un agrandissement de côté n correspond à la somme des n premiers nombres impairs (en s'appuyant sur la ligne de triangles ajoutée à chaque étape), l'enseignant peut en profiter pour faire le lien avec les nombres carrés.

mentale qui permet de retenir comment évolue l'aire d'un agrandissement en fonction de la multiplication de la longueur des côtés du polygone initial.



$1 \quad 4 = 2 \times 2 \quad 9 = 3 \times 3 \quad 16 = 4 \times 4 \quad 25 = 5 \times 5 \quad \cdots$

Fig. 30

À partir de tout ce qu'ils ont observé jusqu'ici, les élèves peuvent conclure que *si la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par un nombre entier, l'aire du polygone agrandi sera égale à l'aire du polygone initial multipliée par le carré de ce nombre.* Une synthèse est alors distribuée aux élèves (fiche 4, fiche 19).

Nous n'envisageons pas ici l'extension de la règle à des multiples non entiers.

4.3 Observons le disque ( )

Cette section est facultative. Elle est prévue pour les enseignants qui souhaitent étendre au disque les propriétés découvertes pour les polygones.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant invite les élèves à observer les agrandissements réalisés dans la section 1.2 et donne la consigne suivante.

> Pour les dessins « Campagne » et « Égypte », vérifiez que l'aire de l'agrandissement de toutes les formes est le quadruple de l'aire de la forme de départ.

Pour les polygones rencontrés au fil des sections précédentes, le travail est simple. En effet, les élèves ont pu observer cette propriété par pavage pour les triangles, le carré, le pentagone en forme de sphinx et l'hexagone régulier. Par contre, pour le disque, il est impossible de paver l'agrandissement avec quatre exemplaires du disque de départ. Il n'est pas non plus possible de réinvestir la généralisation de la section 2.3 puisque le disque ne peut être partagé en triangles. On adopte alors une technique qui permet d'approcher le disque.

L'enseignant demande aux élèves d'observer les polygones réguliers de la figure 31 (fichier *SuitePolygones.fag*, bas de l'annexe de la page 211) et de décrire ce qu'ils observent dans cette suite.

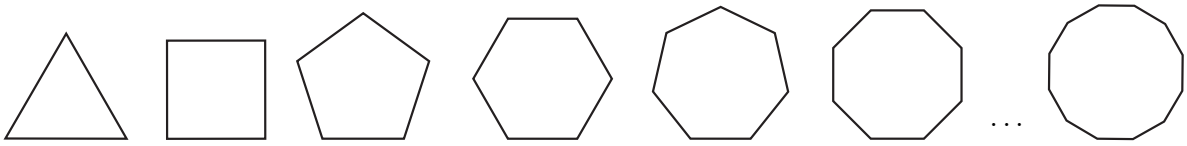


Fig. 31

Les élèves pourraient remarquer différentes propriétés : plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus son contour est proche d'un disque ; tous ces polygones sont inscrits dans un cercle de même rayon ; plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus son aire s'approche de celle du disque circonscrit ; ...

Chacun des polygones peut être subdivisé en triangles comme le montre la figure 32.

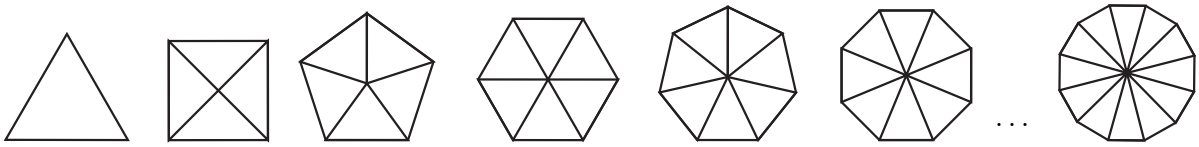


Fig. 32

Le disque n'est pas un polygone mais si on l'imagine comme la limite d'une suite de polygones réguliers dont le nombre de côtés devient de plus en plus grand, on pourrait lui appliquer la démarche réalisée précédemment. La figure 33 est une illustration du raisonnement sur un dodécagone, mais on peut comprendre qu'on pourrait le faire avec un polygone dont le nombre de côtés devient aussi grand que l'on veut.

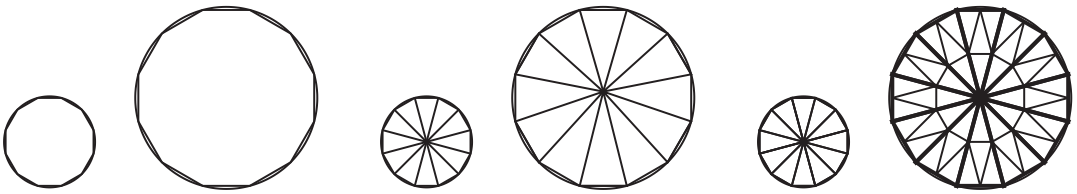


Fig. 33

Pour être complet, il faudrait encore justifier que les triangles construits dans le disque de rayon double sont des agrandissements de côtés de longueur double de ceux construits dans le disque de départ. En fonction de sa classe, l'enseignant jugera du niveau de justification à adopter.

Il proposera alors aux élèves d'admettre que l'aire du disque varie lors d'un agrandissement comme celle de tout polygone, même si cela ne peut leur être complètement démontré à ce stade.

Le lien avec la formule de l'aire du disque, appliquée à un exemple, renforce la validité du raisonnement.

Commentaires

Apprenti Géomètre offre la possibilité de travailler avec des `Formes bifaces`[6] (dans le menu *Préférences*). Cette option est utile pour l'enseignant qui souhaite faire prendre conscience aux élèves des différents mouvements qu'ils réalisent pour les pavages de la section 2.2.

Par exemple, pour paver le triangle semblable de côtés de longueur double, trois triangles sont glissés et un quatrième est tourné. Certains élèves procèdent en appliquant deux retournements successifs à ce quatrième triangle avant de le placer. Ils pourraient donc penser que ce triangle est retourné. L'utilisation des formes bifaces montre que le triangle revient en fait sur sa face initiale (figures 34 à 36).

[6] Les formes bifaces sont des formes dont la face arrière a la couleur complémentaire de la face avant.

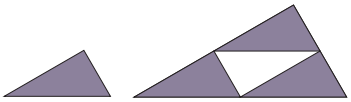


Fig. 34

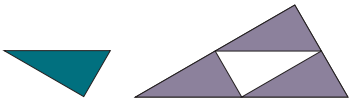


Fig. 35

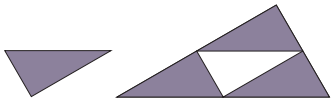


Fig. 36

Quant au pavage du pentagone, les élèves manipulent tellement les formes pour réussir le puzzle qu'ils peuvent ne plus se rendre compte des formes retournées ou non. L'utilisation de formes bifaces montre clairement aux élèves que trois pièces sont retournées (figure 37).

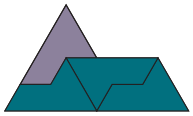


Fig. 37

La manipulation de formes en carton ne donne pas aux élèves l'occasion de prendre conscience des mouvements qu'ils appliquent pour réaliser les pavages. Pour pallier cet inconvénient, l'enseignant peut dès lors utiliser des feuilles cartonnées dont une face est déjà imprimée pour obtenir les formes de l'annexe de la page 211.

Les élèves peuvent ainsi se rendre compte que le pavage de l'agrandissement du triangle est constitué uniquement de triangles qui ont été déplacés tandis que celui du pentagone est obtenu avec des pentagones de deux sortes : un est déplacé, trois sont retournés (figure 37). Notons par contre que ce pavage est réalisé avec plus de difficultés avec des formes « bifaces » car les élèves sont moins enclins à assembler des pièces d'apparences différentes.

Chapitre 7

Des cylindres

Préambule

Au fil des différentes sections de ce chapitre, les expériences proposées aux élèves leur font découvrir que le volume d'un cylindre ne varie pas de la même manière si on agit sur sa hauteur ou sur son diamètre. Les tableaux de nombres issus des relevés expérimentaux permettent d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. L'accent est mis sur la confrontation des deux situations. Les graphiques qui en découlent font rencontrer tout d'abord la fonction linéaire, puis une première approche de la fonction du second degré.

1 Des cylindres... et leur hauteur

De quoi s'agit-il ?

Estimer et observer comment varie le volume d'un récipient cylindrique lorsque sa hauteur est doublée, triplée, puis multipliée par un nombre entier quelconque.

Compléter des tableaux et des graphiques à partir des résultats obtenus.

Enjeux

Découvrir ou réinvestir les tableaux de proportionnalité ainsi que quelques-unes de leurs propriétés.

Compétences disciplinaires **Les nombres**

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers, des décimaux et des fractions [...].

Estimer, avant d'opérer, l'ordre de grandeur d'un résultat.

Les solides et figures

Associer un point à ses coordonnées dans un repère.

Les grandeurs

Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat.

Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Une casserole cylindrique (attention à la courbure à la base).

Un verre qui servira d'étalon de référence[1] pour remplir la casserole.

Les fiches 20 à 23 des pages 233 à 236.

Matériel par groupe d'élèves

Un récipient cylindrique assez haut, de préférence transparent.

Une mesurette[2] adaptée au remplissage de ce récipient cylindrique.

Une règle graduée dont le zéro coïncide avec une des extrémités. Il est possible de fabriquer un tel instrument à partir d'une pique à brochette ou d'un bâton plat, voir annexe page 213.

Du ruban adhésif mat.

Un seau d'eau et des torchons.

1.1 Combien de verres pour remplir la casserole à la moitié de sa hauteur ?

Cette section est destinée à familiariser les élèves avec le matériel mis à leur disposition et à mettre en place le processus expérimental.

Comment s'y prendre ?

Pour cette activité, il faut prévoir une réserve d'eau dans un seau. L'enseignant présente aux élèves la casserole ainsi qu'un verre servant d'étalon. S'il ne trouve pas de casserole adaptée, il peut la remplacer par une boîte de conserve qui a une base large ou par un vase cylindrique.

Avant toute manipulation, l'enseignant pose la question suivante qui a pour objectif premier d'exercer l'aptitude des élèves à estimer.

> Combien de verres d'eau pensez-vous devoir verser dans la casserole pour la remplir jusqu'à la moitié de sa hauteur ?

On demande à chaque élève d'écrire son estimation sur une feuille afin d'y revenir après vérification. La fiche 20 peut être utilisée à cet effet. L'expérience peut alors commencer. L'enseignant demande à un élève de réaliser la manipulation devant la classe et invite les autres élèves à

[1] Dans la suite de cette section, nous écrivons « étalon » pour « étalon de référence ».

[2] Nous appelons mesurette un petit récipient non gradué servant à doser notamment des liquides.

intervenir s'ils ont des observations à formuler sur son déroulement. Ce sont ces réactions qui vont permettre de mettre en place, avec les élèves, le processus expérimental.

Par exemple, l'élève-expérimentateur commence souvent en versant directement le contenu du verre plusieurs fois jusqu'à ce qu'un élève de la classe demande où il faut s'arrêter. Cela fait prendre conscience aux élèves qu'il est nécessaire de marquer auparavant le niveau correspondant à la moitié de la hauteur du récipient.

Il faut alors déterminer cette hauteur. Pour cela, un élève est invité à venir mesurer avec son matériel. Il emporte habituellement sa règle graduée. Rapidement, les élèves constatent que celle-ci ne convient pas. En effet, pour réaliser cette mesure, il est nécessaire d'utiliser une règle graduée dont le zéro correspond à une des extrémités. De plus, il faut penser à mesurer la hauteur à l'intérieur de la casserole qui est différente, dans ce cas, de la hauteur mesurée à l'extérieur. Il reste alors à diviser cette mesure par deux et à marquer ce niveau sur la casserole. Pour ce faire, il est pratique de placer un morceau de ruban adhésif à l'intérieur de la casserole et d'y marquer le repère (voir page 213).

Les élèves devraient également remarquer que le verre étalon doit toujours contenir la même quantité d'eau. Soit ils le remplissent à ras bord, soit il est important de marquer un niveau afin qu'il contienne à chaque fois la même quantité d'eau. Pour cela, on peut procéder de la même manière que précédemment, avec du ruban adhésif.

Une fois la démarche expérimentale établie, un élève recommence l'expérience. Il verse le contenu du verre étalon dans la casserole et continue jusqu'à ce que l'eau atteigne le niveau repéré sur l'adhésif. Pendant ce temps, les autres élèves comptent le nombre de verres versés. Après avoir versé le contenu du premier verre et observé le niveau atteint par l'eau à ce moment, les élèves peuvent revoir leur estimation.

Il arrive que le nombre de verres nécessaires pour remplir la casserole jusqu'à la moitié de sa hauteur soit un nombre entier mais, si ce n'est pas le cas, l'enseignant autorisera l'utilisation de nombres décimaux ou de fractions.

Il est intéressant de confronter le résultat obtenu aux estimations préalables des élèves, elles sont bien souvent loin de la réalité. Les élèves sont effectivement trop peu habitués à estimer.

Échos des classes

Avant de commencer l'expérimentation, plusieurs élèves ont l'intention de compter le nombre de verres nécessaires pour remplir entièrement la casserole et de diviser ensuite ce nombre par deux. Cette démarche répond à la question de la casserole remplie à la moitié de sa capacité et non de sa hauteur. Certains d'entre eux ont déjà compris que, dans ce cas, les deux situations sont identiques.

1.2 Et si on double la hauteur ?

Comment s'y prendre ?

Cette première partie se poursuit en posant la question suivante aux élèves.

> Combien de verres d'eau seront nécessaires pour remplir la casserole à ras bord ?

Avant toute manipulation, il est important de faire à nouveau conjecturer les élèves. L'idée de doubler le nombre de verres d'eau, ou d'en ajouter le même nombre, devrait émerger assez naturellement. Il suffit alors de vérifier en remplissant la casserole. Si les élèves se limitent aux nombres entiers, il y a peu de chances qu'ils parviennent à remplir exactement la casserole. En travaillant avec des décimaux ou des fractions, ils approcheront au mieux le nombre de verres nécessaires au remplissage complet de la casserole.

Les élèves complètent alors le tableau de résultats suivant.

Hauteur	Nombre de verres
moitié	
totale	

Selon la casserole, le choix de l'étalon et la précision, le nombre contenu dans la dernière case ne sera peut-être pas exactement le double de celui contenu dans la case du dessus. Il peut varier jusqu'à une unité de plus ou de moins.

Les élèves expliquent facilement cette erreur, liée principalement au matériel, et énoncent une conclusion : lorsque la hauteur d'un cylindre est doublée, le nombre de verres est multiplié par deux. Certains élèves le formulent différemment : il est nécessaire d'ajouter le même nombre de verres pour atteindre une hauteur double. Ces deux visions de l'expérience sont équivalentes puisque la multiplication par un entier est une addition répétée.

Avant de passer à la suite, l'enseignant fait une rapide synthèse avec les élèves en reprenant les résultats prédits et obtenus et en soulignant la démarche expérimentale.

Échos des classes

Lorsqu'on demande aux élèves d'estimer le nombre de verres nécessaires pour remplir la casserole entièrement, les réactions de nombreux élèves surprennent. À cause de la forme de la casserole, beaucoup d'entre eux pensent avec raison que, pour la remplir à ras bord, il faut un peu plus du double du nombre de verres nécessaires au remplissage jusqu'à la moitié de la hauteur. Ils avancent différents arguments : « la casserole n'est pas tout à fait cylindrique », « le bord de la casserole est évasé », « dans le bas, c'est un petit peu rentré », ... L'expérimentation leur donne raison même si les élèves ont déjà en tête que, si la casserole était un cylindre « parfait », le nombre de verres doublerait bien pour passer de la moitié de la hauteur de la casserole à sa hauteur totale.

1.3 Et si on triple la hauteur ?

Pour la suite des expérimentations, nous proposons de travailler en groupe avec des récipients autres que des casseroles, qui sont généralement basses, larges et opaques, et de plutôt considérer des récipients cylindriques élancés et transparents. Il faudra alors changer l'étalon et l'adapter au récipient choisi. Il est préférable d'avoir préparé les zones d'expérimentation au préalable.

Comment s'y prendre ?

Après avoir distribué un récipient cylindrique et une mesurette à chaque groupe, l'enseignant demande aux élèves de verser une ou deux mesurettes (en fonction du cylindre et de la mesurette reçus) et de marquer à ce moment la hauteur atteinte sur leur récipient, sur un ruban adhésif.

Ce procédé permet aux élèves de travailler avec des nombres de mesurettes entiers, ce qui ne serait probablement pas le cas si la première hauteur est fixée au préalable. Il est souhaitable que le nombre de mesurettes à verser pour fixer la première hauteur ne soit pas le même pour chacun des groupes. Les élèves peuvent ensuite répondre aux questions suivantes en complétant la fiche 21.

> Pour ce nouveau récipient, de combien de mesurettes pensez-vous avoir besoin pour atteindre le double, puis le triple de la hauteur ?
>
> Après avoir écrit chacun votre réponse, versez les mesurettes dans le récipient et complétez le tableau suivant au fur et à mesure.
>
> ... ( ) ...
>
> | Hauteur (en cm) | Nombre de mesurettes |
> |---|---|
> | initiale = ... | ... |
> | double = ... | ... |
> | triple = ... | ... |
>
> Complétez les pointillés à côté des flèches pour indiquer les liens que vous voyez entre la première et la deuxième ligne de votre tableau.

Pour répondre à la question, les élèves doivent placer préalablement sur le récipient une marque pour la hauteur double ainsi que pour la hauteur triple en utilisant la règle graduée dont le zéro correspond à une des extrémités.

Ils peuvent alors procéder au remplissage et compléter le tableau, puis y indiquer les liens. Cette consigne devrait susciter principalement deux types de réactions :

- certains élèves remarqueront dans le tableau qu'on a multiplié la hauteur par deux et que le nombre de mesurettes a doublé également ;
- d'autres élèves noteront qu'on a ajouté la hauteur de départ à elle-même et que le nombre de mesurettes correspondant a été obtenu en ajoutant le nombre initial de mesurettes à lui-même.

D'autres réactions peuvent apparaître. La question ci-dessous permettra d'éclaircir ces diverses possibilités.

> Voyez-vous d'autres liens que vous pouvez aussi symboliser par des flèches ? Si oui, complétez le tableau en ajoutant les flèches correspondantes.

Pour illustrer, prenons une hauteur de départ de 3,5 centimètres et un nombre de mesurettes de départ égal à 2. Certains élèves verront dans le tableau des liens de type multiplicatif (tableau de gauche) et d'autres repéreront les écarts constants (tableau de droite).

×2 ×3

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
initiale = 3,5	2
double = 7	4
triple = 10,5	6

×2 ×3

+3,5 +3,5

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
initiale = 3,5	2
double = 7	4
triple = 10,5	6

+2 +2

Si les nombres de centimètres correspondant aux différentes hauteurs y sont propices (comme dans l'exemple ci-contre), certains élèves pourraient remarquer un rapport externe permettant de passer d'une colonne à l'autre.

$: 2$ ou $\times \frac{1}{2}$

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
initiale = 4	2
double = 8	4
triple = 12	6

$\times 2$

Certains élèves pourraient obtenir un tableau plus complet présentant des liens de différents types et pourraient même reconnaître d'autres régularités telles que celles qui lient des lignes entre elles. Par exemple, les données contenues dans la troisième ligne sont égales à la somme des données contenues dans les deux premières lignes pour chacune des grandeurs.

Remarquons pour l'enseignant que les nombres présents sur les flèches liant les éléments des trois tableaux n'ont pas le même statut. En effet, dans le premier tableau les facteurs sont des scalaires tandis que dans le deuxième tableau, il s'agit d'additions de centimètres dans la colonne de gauche alors que ce sont des nombres de mesurettes qui sont ajoutés dans la colonne de droite. Le tableau présentant les rapports externes comporte également des unités sous-jacentes. Le rapport permettant de passer de la colonne de gauche à celle de droite est exprimé en mesurettes par centimètre et celui correspondant au passage de la colonne de droite à celle de gauche est exprimé en centimètres par mesurette.

1.4 Et si la hauteur est multipliée par 4, 5 ou 10 ?

Comment s'y prendre ?

Afin d'étendre ce que chacun vient d'observer, la question suivante est posée.

> De combien de mesurettes pensez-vous avoir besoin pour atteindre 4, 5 et 10 fois la hauteur de départ ?

Par cette question, on franchit une étape supplémentaire en recourant à une expérience mentale qui passe notamment par l'utilisation des liens découverts dans les tableaux. Après avoir laissé un peu de temps aux élèves pour répondre à la question, il est opportun de faire une synthèse en reprenant les différents résultats et avis.

Pour cette synthèse, l'enseignant propose pour le nombre de mesurettes de départ ainsi que pour la hauteur initiale une valeur différente de celles utilisées par les élèves dans leurs expérimentations. Cela lui permet de s'assurer qu'ils sont capables de réinvestir ce qu'ils ont compris.

Au cours de cette mise en commun, l'enseignant remarque avec les élèves que la multiplication est plus générale en ce sens que les additions dépendent des valeurs initiales tandis que les liens multiplicatifs internes sont les mêmes pour tous les groupes, quelles que soient les valeurs de départ. De plus, les liens de type multiplicatif permettent de trouver la réponse pour n'importe quelle hauteur sans recourir aux étapes intermédiaires. Elle permet donc de calculer directement le nombre de mesurettes nécessaires pour atteindre n'importe quelle hauteur multiple de celle de départ. L'enseignant conviendra alors avec les élèves de ne garder que des liens multiplicatifs pour leur synthèse.

De plus, soulignons pour l'enseignant que les liens additifs ne résistent notamment pas à une permutation ou suppression de lignes et que des liens du même genre peuvent apparaître dans

des tableaux qui ne sont pas de proportionnalité (dans un tableau correspondant à une fonction affine par exemple), ce qui créerait de la confusion dans l'esprit des élèves. Des exemples illustrant ces écueils sont proposés dans les commentaires en fin de section, page 207.

Remarquons que, même si les tableaux (comme celui de la fiche 22) sont complétés avec des mots tels que « quadruple », « quintuple » ou « décuple », employés à dessein pour éviter d'indiquer d'emblée des nombres dans les tableaux, l'enseignant doit s'exprimer oralement plus simplement en utilisant des expressions comme « cinq fois la hauteur initiale », etc. Pour les élèves qui ne sont pas familiers avec ce vocabulaire, il est d'autant plus important de placer des flèches sur le côté du tableau afin de mettre en évidence les multiplications.

Ensuite, l'enseignant donne la consigne suivante.

Représentez l'ensemble des résultats par un graphique.

Deux types de graphiques sont envisageables. Une première possibilité est de travailler en vraie grandeur sur deux feuilles A4 quadrillées accolées. Les élèves peuvent y tracer un axe des abscisses assez long pour y placer les différentes hauteurs en centimètres. L'alternative est de travailler dans le système d'axes de la fiche 23 où la hauteur initiale est représentée par 1 centimètre par convention. Les élèves obtiennent un graphique tel que celui de la figure 1.

Signalons pour l'enseignant que tous les points représentés n'ont pas le même statut. Certains sont issus de l'expérimentation, d'autres ont été obtenus par application d'un modèle théorique.

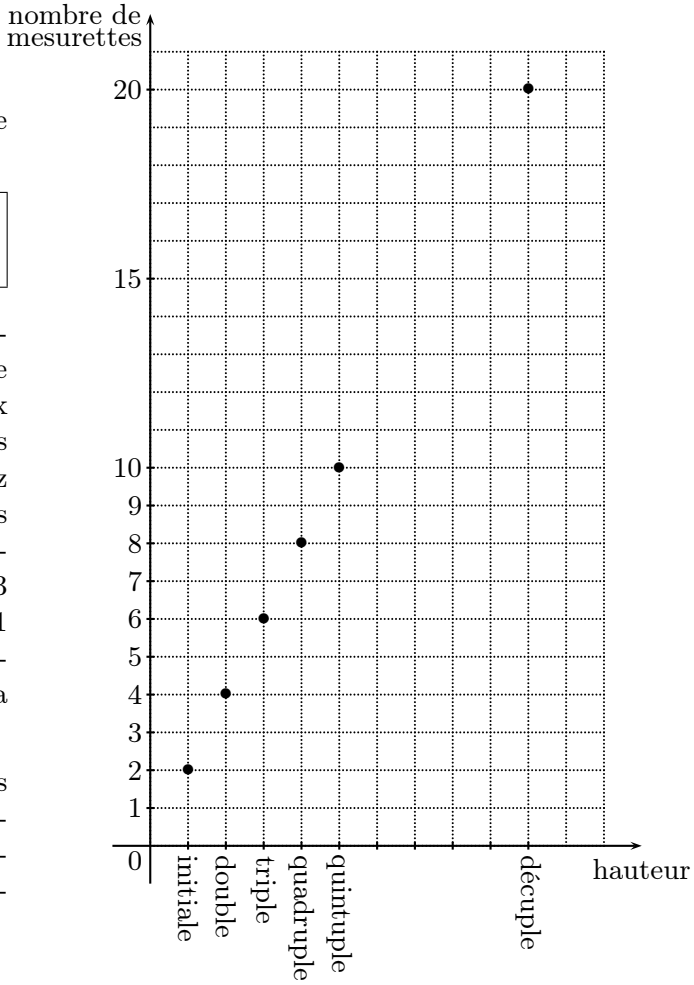


Fig. 1

Après avoir remarqué que, quel que soit le matériel utilisé dans les différents groupes, les points sont alignés dans tous les graphiques, les élèves s'interrogent sur la nécessité de relier les points.

L'enseignant demande alors si des points intermédiaires auraient du sens. On peut se demander s'il est possible de trouver un nombre de mesurettes correspondant au remplissage du cylindre jusqu'à 2,5 fois sa hauteur initiale. Puisque c'est le cas, les élèves réalisent un rapide calcul qui leur permet de placer un nouveau point sur le graphique et de remarquer qu'il est aligné avec les autres points. Le graphique en ligne droite continue prend alors tout son sens, en lien avec l'expérience vécue. Il permet d'anticiper le nombre de mesurettes nécessaires pour atteindre 2,25 fois la hauteur, etc.

Des élèves tracent alors une demi-droite d'origine (0,0) pendant que d'autres la commencent au point correspondant à la première hauteur. Il est donc nécessaire de se poser à nouveau la question de la signification des points placés sur le graphique. Les élèves se rendent compte que le point (0,0) correspond à la situation initiale du cylindre : nombre de mesurettes nul pour une hauteur nulle. Les points intermédiaires ont alors également du sens et les élèves comprennent que la demi-droite commence à l'origine. Il devient alors évident pour eux que, dans ce contexte-ci, la demi-droite prolongée dans les négatifs n'a pas de sens.

Échos des classes

Afin de connaître le nombre de mesurettes nécessaires pour atteindre dix fois la hauteur de départ, des élèves additionnent le nombre initial de mesurettes autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir le nombre correspondant au décuple de la hauteur initiale et d'autres multiplient le nombre de mesurettes initial par dix. Certains élèves remarquent également que multiplier par deux la cinquième hauteur donne la dixième et qu'il suffit d'appliquer la même opération dans la colonne de droite pour obtenir le nombre de mesurettes correspondant à la dixième hauteur. Les deux dernières procédures sont reconnues plus efficaces par l'ensemble des élèves et c'est ce qui les amène à décider avec l'enseignant de n'utiliser que des liens multiplicatifs pour la synthèse.

2 Des cylindres... et leur diamètre

Nous nous sommes intéressés à la hauteur des récipients cylindriques, posons-nous le même type de question à propos de l'autre variable des cylindres : la base, et plus précisément, son diamètre. En effet, jusqu'ici nous avons fait varier la hauteur en conservant un diamètre fixe. Nous allons à présent faire varier le diamètre tout en gardant une hauteur fixe. Il est important d'expliquer aux élèves ce principe expérimental qui consiste à changer une seule variable à la fois pour étudier l'influence de chacune indépendamment de l'autre.

De quoi s'agit-il ?

Estimer et observer comment varie le volume d'un récipient cylindrique lorsque son diamètre est doublé, triplé, puis étendre la situation au cas où le diamètre est multiplié par un nombre entier quelconque.

Compléter des tableaux et des graphiques à partir des résultats obtenus.

Enjeux

Rencontrer un phénomène non proportionnel.

Distinguer un tableau de non-proportionnalité d'un tableau de proportionnalité.

Compétences disciplinaires

Les nombres

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers [...], y compris l'élévation à la puissance.

Estimer, avant d'opérer, l'ordre de grandeur d'un résultat.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Les compétences travaillées dans cette section pour les domaines des solides et figures et des grandeurs sont les mêmes que celles identifiées à la section 1 (page 186).

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Les fiches 24 à 26 des pages 237 à 239.

Matériel par groupe d'élèves

Un récipient cylindrique et deux autres, un de diamètre double et un de diamètre triple de celui du premier récipient. Par facilité, le récipient de départ devrait être le plus bas afin que sa hauteur puisse servir de référence. Pour trouver cette série de récipients, on peut chercher parmi des verres, des vases, des casseroles, des pots à crayons, des boîtes de rangement, des tubes de perles, des boîtes de conserve (en prenant garde aux bords coupants), etc. De tels récipients sont illustrés en annexe, page 212.

Une règle graduée dont le zéro coïncide avec une des extrémités.

Du ruban adhésif mat.

Un seau d'eau et des torchons.

2.1 Et si on double ou triple le diamètre ?

Comment s'y prendre ?

L'enseignant montre aux élèves les trois récipients cylindriques et pose la question suivante.

> À votre avis, combien de fois faut-il verser l'eau contenue dans ce récipient cylindrique pour remplir un récipient cylindrique de diamètre double jusqu'à la même hauteur ?
>
> Et combien pour remplir un récipient de diamètre triple ?

Pour garder une trace des estimations des élèves, l'enseignant demande à chaque élève de compléter un tableau tel que celui ci-dessous (repris à la fiche 24). C'est le cylindre le plus petit qui sert ici de mesurette. Le terme « mesurette » correspond donc dans cette partie à « récipient initial ».

Diamètre	Nombre de mesurettes (estimation)
initial	1
double	
triple	

Comme les élèves viennent de travailler sur la variation de la hauteur d'un cylindre, on s'attend à ce que certains estiment qu'il faut deux mesurettes pour remplir un cylindre de diamètre double

et trois mesurettes pour un de diamètre triple. Ces estimations erronées mais naturelles car basées sur un modèle linéaire donnent tout son sens à l'activité.

Échos des classes

Lors des expérimentations, la plupart des élèves estiment effectivement à deux et trois mesurettes le remplissage des cylindres de diamètre double et triple. Cependant, quelques élèves ont de bonnes intuitions en s'aidant de dessins ou en se représentant l'évolution du diamètre du simple au double (« il s'agrandit dans un sens et dans l'autre »). De rares élèves pensent même à remplacer r par $2\,r$ ou $3\,r$ dans la formule du volume d'un cylindre, ces élèves avaient travaillé ce même type de formules dans d'autres contextes auparavant.

2.2 Et si on vérifiait ?

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chacun des groupes les trois récipients cylindriques et donne la consigne suivante.

> À partir du matériel que vous avez reçu, vérifiez combien de mesurettes sont nécessaires pour remplir les récipients cylindriques de diamètre double et triple jusqu'à la même hauteur.

L'enseignant demande aux élèves de compléter un tableau tel que celui ci-dessous (fiche 24) pour noter les résultats obtenus par expérimentation.

Diamètre (en cm)	Nombre de mesurettes (expérimentation)
initial = ...	1
double = ...	
triple = ...	

hauteur = ... cm

Puisque le travail porte sur le diamètre, la hauteur atteinte par le niveau de l'eau doit être identique pour les trois récipients cylindriques, ce qui a été signalé dans la phase d'estimation. Si le récipient initial est le moins haut, on prend sa hauteur comme référence. Sinon, il faut fixer cette dernière en choisissant une hauteur commune aux trois récipients et en la marquant sur chaque cylindre. Pour cela, les élèves utilisent à nouveau la règle graduée dont le zéro coïncide avec une des extrémités en mesurant à l'intérieur du cylindre.

Avant tout remplissage, l'enseignant propose aux élèves de vérifier, en mesurant les différents diamètres, que le matériel reçu est bien conforme à ce qui leur a été annoncé.

L'enseignant devra peut-être rappeler ce qu'est le diamètre d'un cercle, par exemple en traçant la figure au tableau. Les élèves devront également remarquer que c'est le diamètre intérieur qui est à mesurer pour la même raison que celle évoquée lors du travail sur les hauteurs. Pour effectuer cette mesure, il est nécessaire d'utiliser une règle graduée classique qui donne une précision au millimètre.

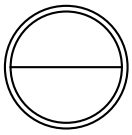


Fig. 2

Dès la première étape du remplissage, les pronostics incorrects sont invalidés. Quatre mesurettes sont en effet nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double et non deux comme la

plupart des élèves l'avaient imaginé. Suite à ce premier résultat, les élèves peuvent revoir leur estimation pour le cylindre de diamètre triple. Ces nouvelles prévisions sont souvent incorrectes car les élèves ne réalisent pas encore le réel impact de la modification du diamètre.

Une fois le cylindre de diamètre triple rempli dans chacun des groupes, les élèves mettent leurs résultats en commun. Il est important que les élèves ne se contentent pas d'observer mais qu'ils s'interrogent sur la raison pour laquelle ces résultats ne correspondent pas à leurs estimations. En ce qui concerne le cylindre de diamètre double, des élèves pourraient donner quelques explications pertinentes basées sur les schémas suivants que l'enseignant peut réaliser au tableau.

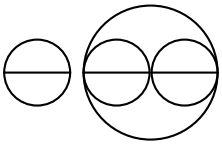


Fig. 3

Si le diamètre d'un cylindre est multiplié par deux, un dessin représentant la base du cylindre de départ et celle du cylindre de diamètre double montre que le disque représentant le cylindre de diamètre double n'est pas rempli lorsqu'on n'y place que deux « cylindres » ayant le diamètre de départ.

Les élèves peuvent également remarquer que, lorsque le diamètre d'un cercle double, le disque s'agrandit dans toutes les directions. Le dessin de la figure 4 illustre ce fait. L'enseignant leur fait verbaliser que s'ils peuvent se permettre de s'intéresser uniquement au diamètre, c'est parce que la hauteur est fixe.

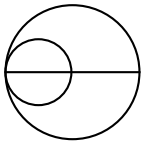


Fig. 4

Pour le cylindre de diamètre triple, tous les groupes n'auront pas nécessairement obtenu le même résultat. Certains ont besoin de neuf mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre triple pendant que d'autres en utilisent dix ou seulement huit. L'enseignant souligne alors l'importance d'être précis dans les expérimentations car l'imprécision est probablement la cause de cette diversité de résultats. Afin de se mettre d'accord sur la réponse, les élèves recommencent l'expérience en s'astreignant à être le plus précis possible.

Cette nouvelle expérimentation n'uniformisera pas nécessairement tous les résultats et elle ne suffirait d'ailleurs pas à conclure. Le recours à une argumentation mathématique raisonnée est nécessaire et doit alors être présentée comme validation ou invalidation des résultats obtenus par expérimentation.

L'enseignant amène ainsi les élèves à envisager l'analogie entre le cas d'un cylindre et celui d'un parallélépipède à base carrée. Puisque, dans notre expérimentation, la hauteur fixée est identique pour tous les récipients, on s'intéresse ici uniquement à la base. Lorsque le côté d'un carré est multiplié par deux, les élèves peuvent se représenter facilement que l'aire est multipliée par quatre. De même, en construisant un carré de côté triple, les élèves se rendent compte que son aire est neuf fois plus grande que celle de départ (figures 5 et 6).

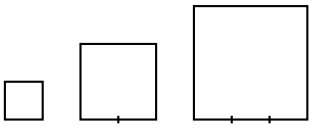


Fig. 5

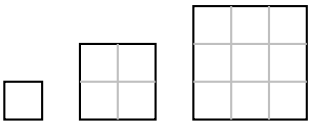


Fig. 6

La *Math & Manip* « Agrandissements » (chapitre 6) montre qu'il en va de même pour les aires de tous les polygones. Elle permet notamment d'amener les élèves à se convaincre que cette propriété peut s'étendre aux disques.

Les élèves peuvent ainsi accéder à l'intuition que, pour une hauteur constante, en doublant le diamètre d'un cylindre, on quadruple effectivement son volume et que, en triplant le diamètre d'un cylindre, on multiplie son volume par neuf.

Échos des classes

Lors des manipulations, les élèves constatent facilement que quatre mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double. Ils tiennent alors à revoir leur estimation pour le remplissage du cylindre de diamètre triple. Les nouvelles estimations sont généralement de six ou de huit mesurettes.

Des élèves, persuadés que huit mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre triple jusqu'à la hauteur demandée, s'arrangent pour que ce soit effectivement le cas : lorsqu'ils obtiennent neuf comme résultat de l'expérience, ils recommencent jusqu'à obtenir les huit mesurettes attendues.

Certains élèves déterminent le nombre de mesurettes nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre triple de manière économique. Ils utilisent directement l'eau contenue dans le cylindre de diamètre double. Ils ne doivent ainsi verser que deux fois le contenu du cylindre de diamètre double pour s'apercevoir qu'une mesurette de plus est nécessaire pour atteindre la hauteur définie dans le cylindre de diamètre triple.

Les cylindres utilisés lors des expérimentations dans les classes (voir annexe page 212) sont de diamètres assez petits. Le cylindre le plus étroit qui sert de mesurette est difficile à remplir et à vider, il faut le secouer pour y parvenir. Les quelques gouttes d'eau parasites lors des transvasements ont un impact sur les résultats de l'expérience. Afin de parer à ces imprécisions, une technique a été proposée et a fait ses preuves : un élève remplit la mesurette et la passe à un condisciple dont les mains sont sèches. C'est celui-ci qui transvase l'eau dans le cylindre plus large.

2.3 Et si le diamètre est multiplié par 4, 5 ou 10 ?

Comment s'y prendre ?

Une fois que les élèves disposent de ces résultats, l'objectif est qu'ils parviennent à compléter le tableau pour un diamètre quatre, cinq ou dix fois plus grand sans être en possession du matériel nécessaire à l'expérience. Dans ce but, la question suivante est posée.

> Si nous voulions remplir un récipient cylindrique de diamètre 4, 5 ou 10 fois plus grand que le plus petit et ce jusqu'à la même hauteur, de combien de mesurettes aurions-nous besoin ?

L'analogie avec les carrés et le recours à la figure 7 permettent à certains élèves de remplir le tableau de la fiche 25 sans nécessairement reconnaître les liens existant entre les lignes.

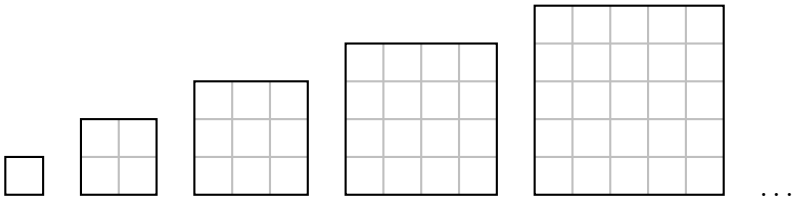


Fig. 7

Diamètre	Nbre de mes.
initial	1
double	4
triple	9
quadruple	16
quintuple	25
...	...
décuple	100

D'autres élèves auront déjà remarqué les liens dans le tableau issu de l'expérimentation, comme ci-dessous.

	Diamètre	Nbre de mes.	
$\times 2$	initial	1	$\times 4$ ou $\times 2^2$
	double	4	
$\times 3$	triple	9	$\times 9$ ou $\times 3^2$

Ces liens de type multiplicatif font apparaître la suite des entiers élevés au carré. La reconnaissance par les élèves de cette suite leur permet de poursuivre le tableau pour les diamètres quadruple, quintuple et décuple.

	Diamètre	Nbre de mes.	
$\times 10$	initial	1	$\times 2^2$
$\times 5$	double	4	$\times 3^2$
$\times 4$	triple	9	$\times 4^2$
$\times 3$	quadruple	16	$\times 5^2$
$\times 2$	quintuple	25	
	...	...	$\times 10^2$
	décuple	100	

hauteur fixe

Dans tous les cas, il faut imposer à tous les élèves d'écrire explicitement ces liens.

Si les élèves complètent le tableau mais éprouvent des difficultés à formuler les liens qui permettent de passer d'une ligne à l'autre, l'enseignant suggère d'enrichir le tableau avec d'autres multiples du diamètre initial. La suite des nombres élevés au carré leur apparaîtra peut-être ainsi plus clairement.

Remarquons que, dans cette situation, les rapports entre les nombres des deux colonnes ne sont pas constants, on ne peut donc pas parler ici de rapport externe.

Après une mise en commun des résultats, l'enseignant demande aux élèves de placer sur un graphique les points correspondant aux données de leur tableau. Ils peuvent tracer un graphique où les longueurs des diamètres sont reportées sur l'axe des abscisses en vraie grandeur. Sinon, ils complètent le graphique de la fiche 26 où la longueur du diamètre initial est représentée par 1 cm, comme dans le graphique de la figure 8.

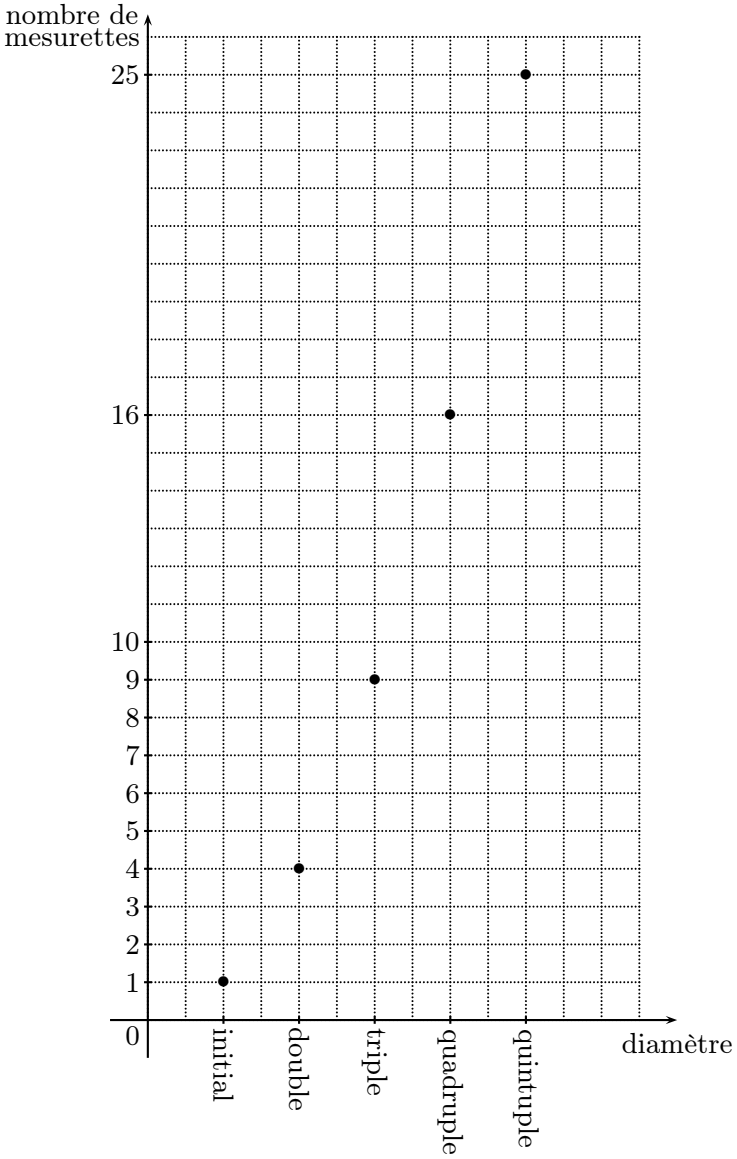


Fig. 8

Comme dans l'expérience précédente, il est naturel de se demander si les points peuvent être reliés. En réfléchissant à l'interprétation du graphique en lien avec l'expérience menée, on peut s'en convaincre car il est tout à fait possible d'imaginer des cylindres de tout diamètre et de calculer les nombres de mesurettes correspondants.

À ce moment, les élèves doivent décider de relier les points soit par des segments, soit par une courbe passant par les points de leur graphique. Pour les amener à choisir entre ces deux modèles,

l'enseignant propose de s'intéresser à un cylindre de diamètre 1,5 fois plus grand que celui du cylindre de départ. On calcule qu'il faudrait verser 2,25 mesurettes pour le remplir jusqu'à une même hauteur. En plaçant ce nouveau point sur le graphique, les élèves se rendent compte qu'il ne se trouve pas sur le segment qui relie les points d'abscisses correspondant aux diamètres initial et double. Ce segment ne peut modéliser la situation rencontrée. On doit donc relier les points expérimentaux par une courbe intégrant ce nouveau point.

Certains élèves commencent leur courbe au point origine alors que d'autres démarrent du point correspondant au diamètre initial. L'enseignant propose à ce moment de réfléchir à l'existence d'un cylindre de diamètre moitié du cylindre de départ. Les élèves sont alors convaincus que la courbe commence à l'origine du graphique et calculent le nombre de mesurettes correspondant au cylindre de diamètre moitié pour placer un point supplémentaire sur le graphique.

Échos des classes

Lorsque les élèves tracent le graphique reprenant leurs résultats, certains d'entre eux s'étonnent de ne pouvoir placer tous les points repris dans leur tableau. Il faut donc leur faire remarquer que les nombres de mesurettes correspondant à des diamètres plus grands que cinq fois celui de départ sont des nombres trop élevés pour les placer sur le graphique.

3 Des cylindres... leur hauteur et leur diamètre

En faisant varier la hauteur puis le diamètre d'un cylindre, nous avons obtenu divers tableaux et graphiques. Comparons l'ensemble des résultats obtenus.

De quoi s'agit-il ?

Comparer la variation du volume d'un récipient cylindrique en fonction de sa hauteur ou de son diamètre.

Enjeux

Repérer dans un graphique ou dans un tableau de nombres ce qui caractérise une situation de proportionnalité et une situation de non-proportionnalité.

Lier phénomène proportionnel, tableau de proportionnalité et graphique d'une fonction linéaire.

Compétences disciplinaires

Les grandeurs

Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Les fiches 27 et 28 des pages 240 et 241.

Matériel par groupe d'élèves

Les fiches reprenant les résultats des expériences menées dans les sections 1 et 2.

Comment s'y prendre ?

La comparaison des deux situations est réalisée collectivement, on cherche donc à ce qu'elle ne dépende pas des particularités des différents récipients. Le nombre de centimètres correspondant aux différentes hauteurs ainsi qu'aux diamètres ne sont plus repris dans cette synthèse puisqu'ils varient d'un groupe à l'autre. Dans la première situation, le nombre de mesurettes qui détermine la hauteur initiale n'était pas nécessairement le même dans les différents groupes. L'enseignant fait la synthèse au tableau à partir d'un autre nombre, trois par exemple.

L'enseignant demande aux élèves quelles grandeurs ont été travaillées. Il s'agit de la hauteur d'un cylindre et de son volume dans la première expérience et du diamètre d'un cylindre et de son volume dans la seconde. Il propose alors de modifier l'intitulé de la seconde colonne des tableaux et de l'axe des ordonnées pour la synthèse.

Les fiches 27 et 28 peuvent être distribuées à chaque élève à la fin du travail. On y trouve les éléments suivants.

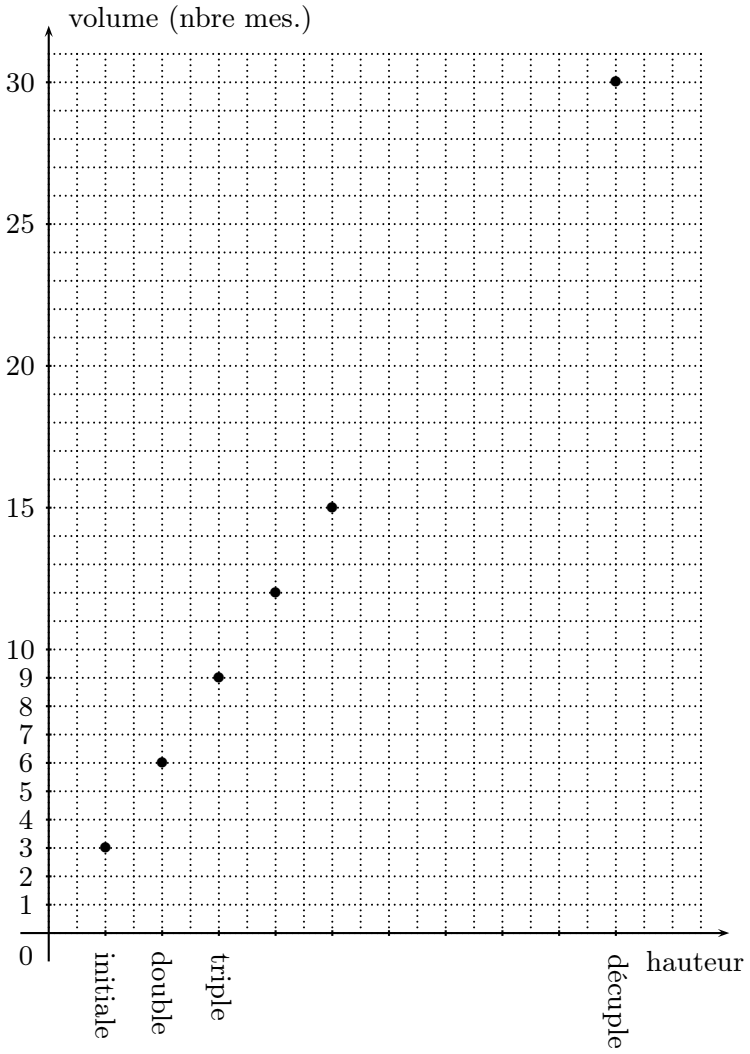


Fig. 9

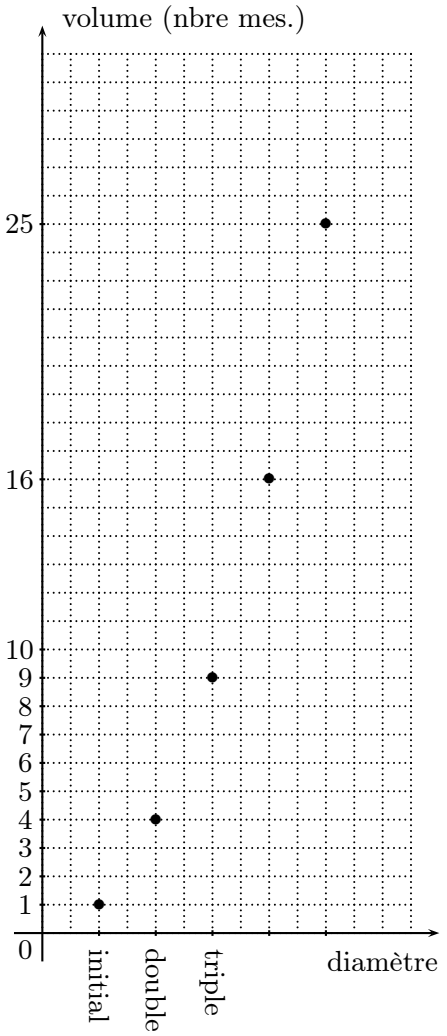


Fig. 10

Hauteur	Volume (nbre de mes.)
initiale	3
double	6
triple	9
quadruple	12
quintuple	15
⋮	⋮
décuple	30

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$ $\times 5$ ⋮ $\times 10$

diamètre fixe

Diamètre	Volume (nbre de mes.)
initial	1
double	4
triple	9
quadruple	16
quintuple	25
⋮	⋮
décuple	100

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$ $\times 5$ ⋮ $\times 10$

$\times 2^2$ $\times 3^2$ $\times 4^2$ $\times 5^2$ ⋮ $\times 10^2$

hauteur fixe

Par comparaison des deux situations, l'enseignant évoque la proportionnalité. La première situation fait apparaître que **la hauteur et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs proportionnelles** alors que la seconde montre que **le diamètre et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs non proportionnelles**.

Dans le tableau de la première situation, les élèves identifient que, lorsqu'on multiplie une grandeur par un nombre, on multiplie l'autre grandeur par le même nombre. La propriété relevée est caractéristique de grandeurs proportionnelles.

Graphiquement, les élèves observent facilement que, dans le graphique du volume en fonction de la hauteur, les points sont alignés. Ceci ne suffit cependant pas à caractériser une situation de proportionnalité. C'est l'enseignant qui attire l'attention sur l'alignement des points avec l'origine. Pour illustrer cela, il peut dessiner des exemples et contre-exemples graphiques (situations linéaires et affines). On retient qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux grandeurs soient proportionnelles est que tous les points soient alignés avec l'origine.

Dès lors, si l'une des conditions n'est pas rencontrée, on dira que les deux grandeurs ne sont pas proportionnelles. Par exemple, la deuxième situation montre que lorsqu'on multiplie une grandeur par un nombre, l'autre grandeur n'est pas multipliée par ce même nombre. On dit que ces grandeurs ne sont pas proportionnelles. On peut arriver à la même conclusion en observant que les points du graphique ne sont pas alignés.

Les fiches 27 et 28 récapitulent ce travail.

Vers où cela va-t-il ?

Le travail réalisé jusqu'ici constitue une première approche de la fonction linéaire et de la fonction du second degré, fonctions qui seront largement étudiées par la suite.

Prolongement possible

Si les élèves ont bien intégré les résultats de l'activité, ils peuvent réfléchir à la question suivante.

> Un cylindre A est de diamètre double et de hauteur triple d'un cylindre initial I. Un cylindre B est de diamètre triple et de hauteur double du cylindre I.
>
> Les cylindres A et B ont-ils même volume ? Justifiez.

Les activités précédentes devraient avoir sensibilisé les élèves à ce genre de subtilités. Ils ont remarqué précédemment que les variations de la hauteur et du diamètre n'influençaient pas de la même manière le volume d'un cylindre. Pour répondre à cette question, les élèves peuvent exprimer le volume de chacun des deux cylindres A et B en fonction du volume du cylindre I. Ils doivent pour cela combiner les deux résultats découverts précédemment.

- Cylindre A : un cylindre de diamètre double de celui de départ a un volume 4 ($= 2^2$) fois plus grand, le cylindre A qui a une hauteur triple de ce dernier a un volume encore 3 fois plus grand. Le cylindre A a donc un volume 12 fois plus grand que celui du cylindre initial (volume$I \times 4 \times 3 =$ volume$I \times 12$).
- Cylindre B : un cylindre de diamètre triple de celui de départ a un volume 9 ($= 3^2$) fois plus grand, le cylindre B qui a une hauteur double de ce dernier a un volume encore 2 fois plus grand. Le cylindre B a donc un volume 18 fois plus grand que celui du cylindre initial (volume$I \times 9 \times 2 =$ volume$I \times 18$).

Le cylindre B a donc un plus grand volume que celui du cylindre A. Les élèves remarquent que les résultats sont identiques si on modifie d'abord la hauteur pour obtenir le cylindre intermédiaire.

Toutes les constatations précédentes nous poussent à faire le lien avec la formule permettant de calculer le volume d'un cylindre et à travailler un aspect du formalisme algébrique :

$$V_{cyl} = \pi\, r^2\, h \quad \text{ou} \quad V_{cyl} = \pi\, \tfrac{d^2}{4}\, h$$

$$V_A = \pi\,(2\,r)^2\,.\,3\,h = 12\,\pi\,r^2\,h = 12\,V_I,$$
$$V_B = \pi\,(3\,r)^2\,.\,2\,h = 18\,\pi\,r^2\,h = 18\,V_I.$$

Lorsque le diamètre d'un cylindre est multiplié par un nombre, on a découvert que le nombre de mesurettes était multiplié par le carré de ce nombre. Par contre, lorsque la hauteur d'un cylindre est multipliée par un nombre, le nombre de mesurettes est multiplié simplement par ce nombre. Le lien avec les exposants présents dans la formule sur d (ou r) et h respectivement peut ainsi être éclairé.

Échos des classes

Lorsque nous avons proposé cette activité dans une classe, un des élèves a demandé de quel cylindre initial il s'agissait. Dès qu'on lui a dit « celui-ci » sans préciser de mesure, il a pu répondre à la question. Il est important de faire remarquer aux élèves à ce niveau de l'activité que ce qui a été observé jusque là est indépendant du cylindre initial.

4 Un outil supplémentaire : le coefficient de proportionnalité

Le travail mené à partir des manipulations sur les cylindres a conduit à des tableaux organisés de manière spécifique. Face à des tableaux de nombres présentés dans le désordre, il peut se révéler plus difficile de contrôler l'ensemble des rapports internes pour vérifier s'il s'agit de tableaux de

proportionnalité ou non. Il se peut aussi que le critère graphique ne permette pas de trancher à cause de l'imprécision du dessin, par exemple pour des tableaux comportant des nombres décimaux ou des nombres d'ordres de grandeurs très différents, difficiles à représenter dans un même graphique.

Dans ces situations, l'outil « coefficient de proportionnalité » peut se révéler très utile. Cette section a pour but de le faire rencontrer aux élèves.

De quoi s'agit-il ?

Identifier si deux grandeurs sont proportionnelles à partir de données numériques non organisées.

Enjeux

Différencier des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité à l'aide de différentes techniques (dont l'utilisation du coefficient de proportionnalité).

Compétences disciplinaires

Les nombres

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers [...]

Les solides et figures

Associer un point à ses coordonnées dans un repère.

Les grandeurs

Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.

Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une vingtaine de minutes.

Matériel pour la classe

La fiche 29 de la page 242 ainsi que les fiches 22 et 25 sur lesquelles les élèves ont travaillé précédemment.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue la fiche 29 aux élèves et leur fait remarquer, en observant l'exemple repris ci-dessous, qu'un tableau n'est pas nécessairement arrangé comme ceux qu'ils ont rencontrés jusqu'à présent.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

Il donne ensuite la consigne.

> Sur base de ces données, déterminez si les grandeurs 1 et 2 sont des grandeurs proportionnelles.

Les élèves ont déjà rencontré au cours de l'activité plusieurs moyens pour répondre à la consigne.

Premièrement, le système d'axes mis à disposition sur la fiche permet de placer les différents points. Comme ces points sont tous alignés avec l'origine, les élèves peuvent affirmer avec certitude que les grandeurs sont proportionnelles.

Deuxièmement, les élèves peuvent relever des liens multiplicatifs comme ceux illustrés dans le tableau ci-dessous, ce qui leur permet d'arriver à la même conclusion : ces grandeurs sont proportionnelles.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

$\times 5$, $\times \frac{1}{2}$, $\times \frac{7}{5}$

Certains d'entre eux remarqueront peut-être les liens additifs entre certaines lignes du tableau qui sont une caractéristique de grandeurs proportionnelles (voir commentaire page 208).

Les valeurs choisies dans le tableau devraient amener les élèves à repérer rapidement l'existence d'un rapport constant permettant de passer des valeurs d'une grandeur aux valeurs correspondantes de l'autre grandeur. Ce rapport externe qui caractérise également un tableau de proportionnalité est connu sous le nom de coefficient de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité permettant de passer des valeurs de la grandeur 1 à celles de la grandeur 2 est « 3 ». Remarquons que le coefficient permettant de passer des valeurs de la grandeur 2 à celles de la grandeur 1 est « $\frac{1}{3}$ ».

Dans un tableau qui présente deux grandeurs non proportionnelles, il sera impossible de trouver un coefficient de proportionnalité.

L'enseignant fait le point avec les élèves sur ces trois méthodes qui permettent d'identifier si deux grandeurs sont proportionnelles puis, pour poursuivre le travail, il les invite à reprendre les fiches 22 et 25 sur lesquelles sont notés les résultats des expériences. Il donne alors la consigne suivante.

> Pour chacune des situations rencontrées, pouvez-vous trouver un coefficient de proportionnalité ? Dans l'affirmative, représentez le lien sur le tableau à l'aide d'une flèche.

Les élèves devraient prévoir qu'il existe un coefficient de proportionnalité pour la situation faisant varier la hauteur d'un cylindre mais pas pour la deuxième situation rencontrée, lorsque c'est le diamètre que l'on fait varier.

Dans la première situation, les élèves vérifient donc qu'il existe un coefficient de proportionnalité. Pour l'exemple donné à la page 190, voici des liens qu'ils pourraient trouver.

$: 1,75$ ou $\times \frac{4}{7}$

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
initiale = 3,5	2
double = 7	4
triple = 10,5	6

$\times 1,75$ ou $\times \frac{7}{4}$

Dans la deuxième situation, les élèves ne peuvent trouver de rapport externe. En effet, le rapport qu'on trouve pour les valeurs d'une ligne n'est pas le même pour les valeurs d'une autre ligne.

Il est nécessaire que les élèves soient confrontés à de nombreux exercices de ce type. La plupart des manuels scolaires en proposent un grand nombre. On trouve diverses situations confrontant proportionnalité et non-proportionnalité dans les chapitres 5 et 6 de l'ouvrage « Des grandeurs aux espaces vectoriels » issu d'une précédente recherche du CREM consacrée à la linéarité [13].

5 D'autres récipients

De quoi s'agit-il ?

Identifier des solides pour lesquels le volume varie proportionnellement à leur hauteur.

Enjeu

Comprendre que le volume d'un solide est proportionnel à sa hauteur lorsque les sections parallèles à la base sont isométriques.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une vingtaine de minutes.

Matériel pour la classe

Des récipients de toutes formes que l'enseignant ou les élèves amènent en classe. Des solides utilisés lors des expérimentations sont illustrés dans les *Échos des classes* de la page 206.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant place en évidence une série de récipients de formes variées, parmi lesquels il aura prévu des prismes. Il pose alors la question.

> Pour quels récipients le volume est-il proportionnel à la hauteur ? Justifiez votre réponse.

S'interroger sur cette question revient à se demander quels sont les récipients dont la section parallèle à la base est constante tout le long de la hauteur. Cette propriété est satisfaite pour des récipients de forme parallélépipédique et pour ceux qui ont la forme d'un prisme droit ou oblique avec une base quelconque mais également pour d'autres récipients tels que la boîte en forme de vague de la figure 11.

Échos des classes

La figure 11 montre quelques-uns des solides proposés aux élèves au cours des expérimentations dans les classes.

Fig. 11

La boîte de chocolats (prisme à base triangulaire) suscite des réflexions. En effet, le volume de cette boîte est reconnu comme proportionnel à la hauteur tant qu'elle est placée sur une de ses bases triangulaires. Mais, si la boîte est posée sur une de ses faces rectangulaires (présentation classique du produit), les élèves considèrent la hauteur du triangle comme la hauteur de l'objet et pensent alors que le volume de la boîte n'est pas proportionnel à la hauteur dans ce cas. Il est à ce moment utile de rappeler que l'objet est un prisme droit dont la hauteur est la longueur des arêtes perpendiculaires à la base triangulaire.

La boîte de céréales est celle qui mène généralement à un vrai débat dans les classes. Sa forme en vague interpelle. Lors de chaque expérimentation, ce sont les arguments des élèves qui convainquent ceux qui ne reconnaissent pas la proportionnalité entre le volume et la hauteur de cette boîte. Les arguments sont du type « on retrouve le morceau qui manque sur un côté de la boîte de l'autre côté », « si on regarde la boîte par en-dessous, on se dit bien qu'il y a le même rectangle tout le long de la hauteur de la boîte », ...

Vers où cela va-t-il ?

Cette activité donne des images mentales qui pourraient être mobilisées plus tard lors du calcul d'un volume par intégrale définie.

Commentaires

– Au cours du chapitre 7, nous avons constaté que les liens additifs que pourraient trouver les élèves dans les tableaux de proportionnalité étaient moins généraux que les liens multiplicatifs. Rappelons que de tels liens additifs, qui peuvent apparaître lorsque les valeurs de deux grandeurs proportionnelles sont organisées comme dans le tableau de gauche, peuvent également apparaître dans des tableaux comme celui de droite qui n'est pas un tableau de proportionnalité.

	Hauteur	Nbre de mes.	
+4	4	2	+2
+4	8	4	+2
+4	12	6	+2
+4	16	8	+2

	Grandeur 1	Grandeur 2	
+4	1	2	+2
+4	5	4	+2
+4	9	6	+2
+4	13	8	+2

Ce dernier tableau concerne des grandeurs liées par une fonction affine et non par une fonction linéaire. On observe dans ce cas que, graphiquement, les points sont alignés mais pas avec l'origine.

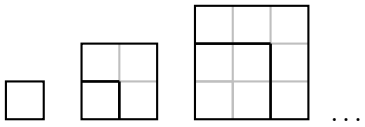
Remarquons dès lors que, dans le premier tableau qui est de proportionnalité, il est possible d'inscrire le couple (0,0) en conservant les liens.

– Des élèves pourraient repérer d'autres liens additifs dans le tableau de la page 198 reprenant les diamètres et le nombre de mesurettes correspondant. C'est la suite des nombres impairs qui est mise en évidence comme le tableau ci-dessous l'illustre.

	Diamètre (en cm)	Nbre de mes.	
+0,8	initial (= 0,8)	1	+3
+0,8	double (= 1,6)	4	+5
+0,8	triple (= 2,4)	9	+7
+0,8	quadruple (= 3,2)	16	+9
	quintuple (= 4)	25	

Cela tient au fait qu'en additionnant des impairs successifs, les sommes partielles sont des nombres carrés. Cette propriété peut s'observer numériquement ou géométriquement.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+3}_{4}+5}_{9}+7}_{16}+\ldots$$



– Remarquons néanmoins encore un autre type de liens additifs entre des lignes d'un tableau comme celui de la page 204, qui sont une caractéristique de grandeurs proportionnelles.

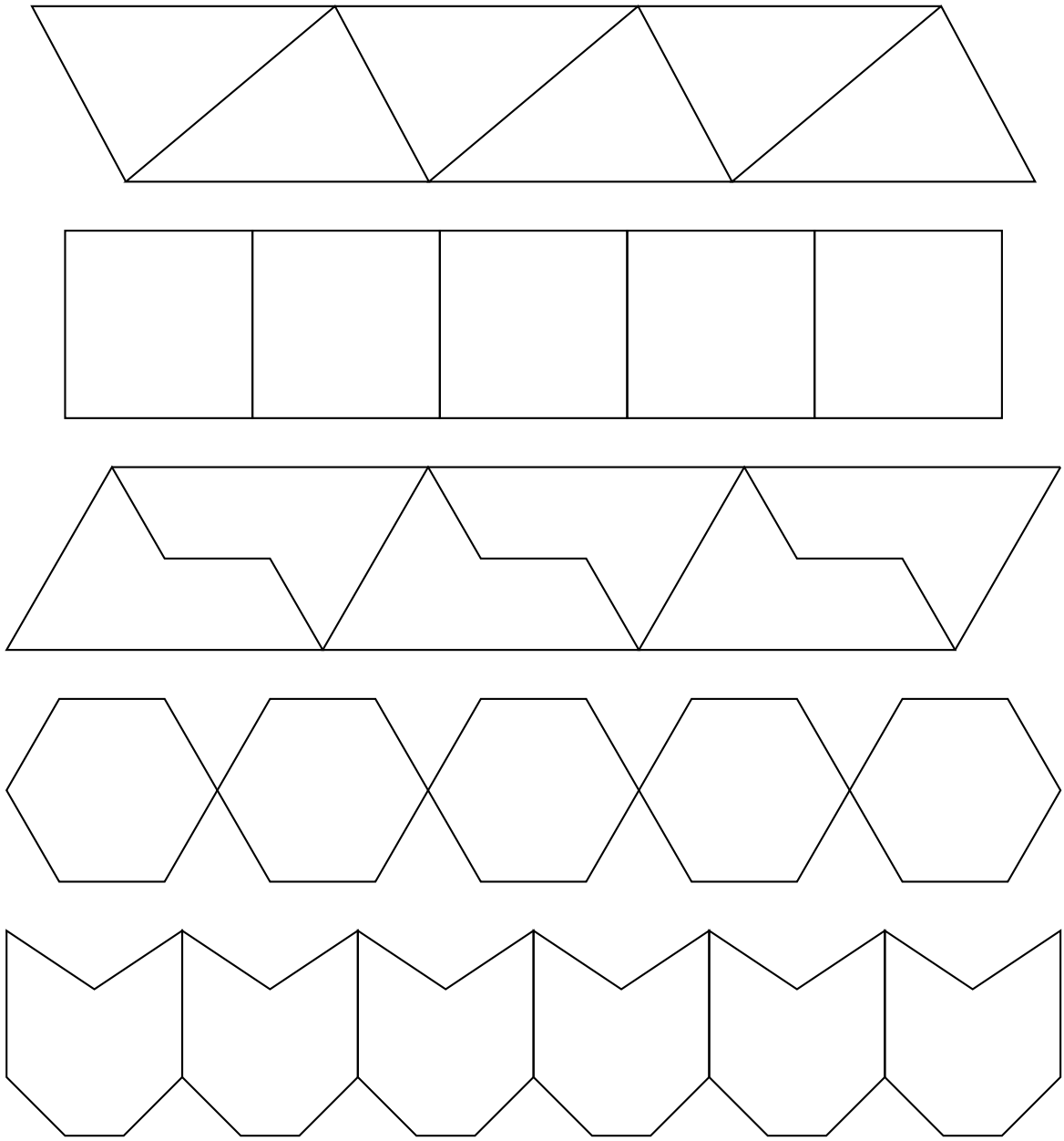
grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

Tout comme les liens multiplicatifs ou les coefficients de proportionnalité, cette propriété permet de compléter les données manquantes d'un tableau que l'on sait être de proportionnalité.

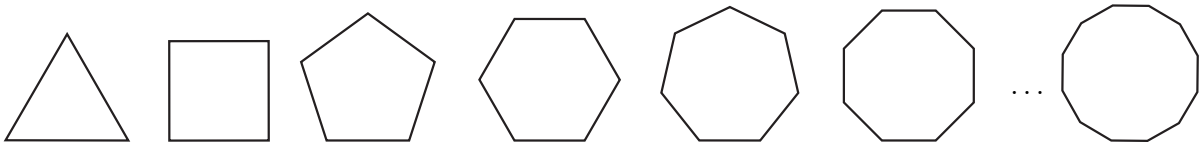
Annexe III

Description de matériel
Fiches à photocopier

Figures à découper ( )



Suite de polygones ( )

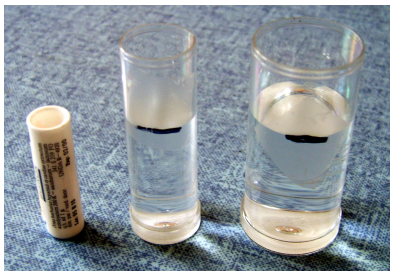


Récipients cylindriques

Pour choisir les cylindres, il faut être attentif à plusieurs aspects :

- c'est le diamètre intérieur des cylindres qui est à mesurer pour que l'activité se déroule correctement ;
- lors du choix des cylindres de diamètre double et triple d'un autre, il est impératif que les diamètres soient des multiples exacts de celui de départ, au millimètre près, pour la réussite de la manipulation.

Voici une série de récipients qui a été testée et qui permet le bon déroulement de cette activité. Il s'agit d'un petit tube de médicament homéopathique de 8 mm de diamètre (et de 3,5 cm de hauteur) et de deux tubes de perles de 16 et 24 mm de diamètre.



Des fichiers permettant de réaliser des cylindres tels que le diamètre du deuxième et du troisième sont respectivement le double et le triple du diamètre du premier sont disponibles sur le site du CREM (`http://www.crem.be`).

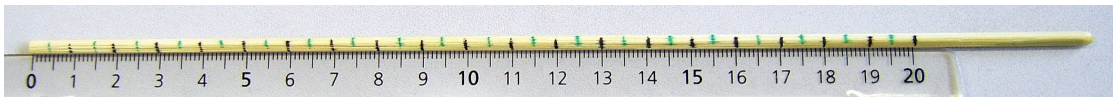
Trucs et astuces

Pour mesurer la hauteur à atteindre par l'eau dans un récipient, il faut mesurer à l'intérieur de ce récipient. Il est donc nécessaire d'avoir une règle graduée dont le zéro correspond à une de ses extrémités pour connaître la hauteur exacte.

Il est possible de fabriquer un tel instrument de mesure. Pour cela, il suffit d'avoir le matériel suivant :

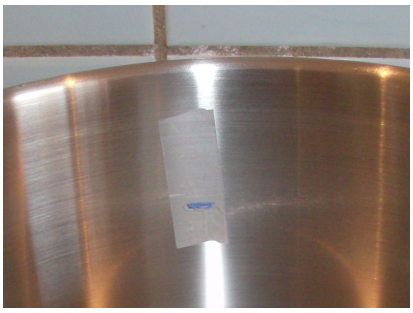
- un bâton plat ou une pique à brochette ;
- une règle graduée ;
- des feutres résistants à l'eau de deux couleurs différentes (feutres pour CD par exemple).

En plaçant une extrémité du bâton au niveau du zéro de la règle graduée et en plaçant ce bâton le long de la règle, il suffit de placer une marque sur le bâton à chaque centimètre. Pour faciliter la prise de mesures par la suite, on peut également faire une marque tous les 5 millimètres, dans une autre couleur de préférence.



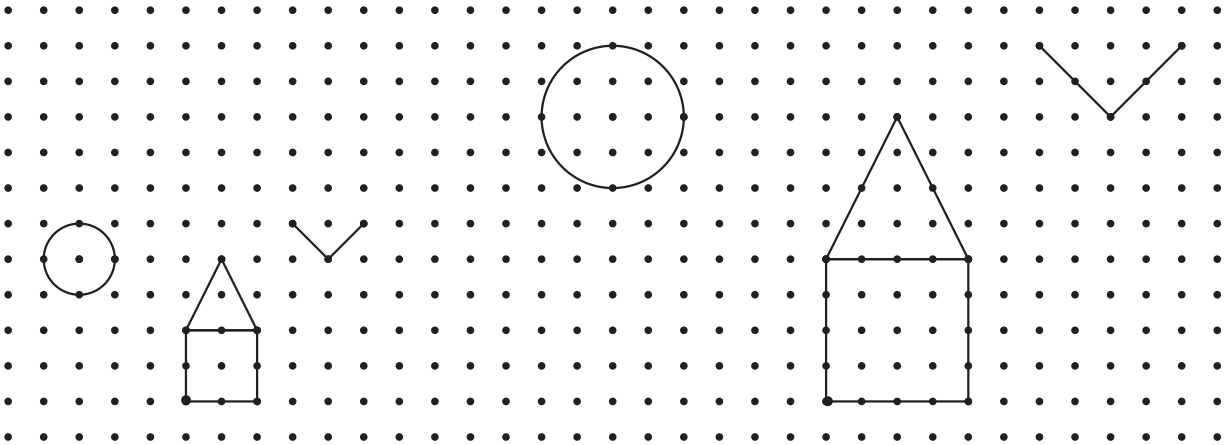
Pour marquer la hauteur atteinte ou à atteindre dans un récipient, sans l'abîmer, il suffit de placer un morceau de ruban adhésif mat sur la surface du récipient et de placer la marque sur cet adhésif.

L'adhésif peut être placé à l'extérieur des récipients transparents mais doit être placé à l'intérieur des récipients opaques.



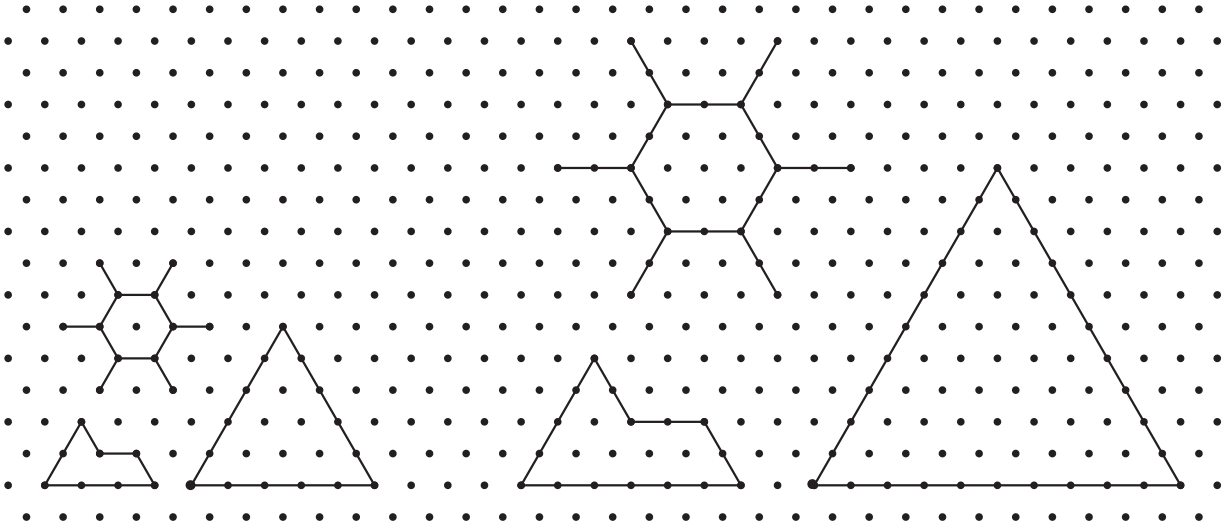
À la campagne ( )

Campagne.fag

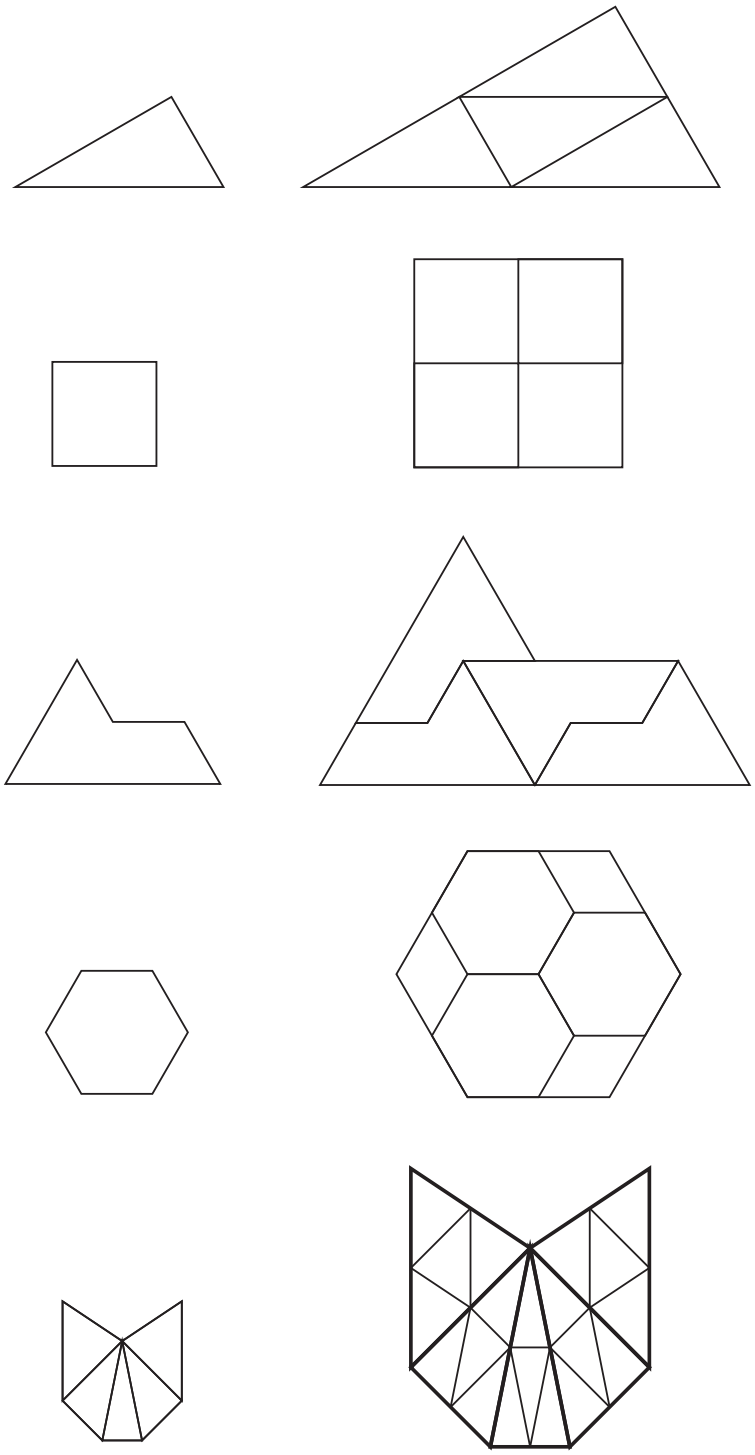


Vacances en Égypte ( )

Egypte.fag



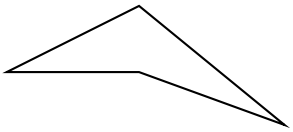
Pavages avec ***Apprenti Géomètre*** – synthèse (✥)



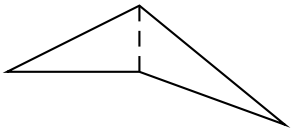
Lorsqu'on double les longueurs des côtés d'un polygone, quatre exemplaires du polygone initial sont nécessaires pour paver le polygone agrandi.

Aires d'agrandissements de polygones ( )

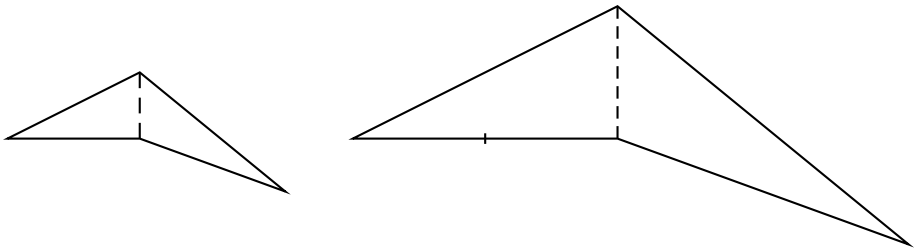
Considérons le polygone quelconque suivant.



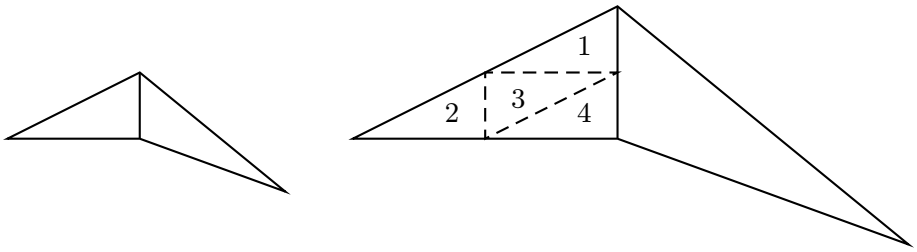
1. Tout polygone est un assemblage de triangles.



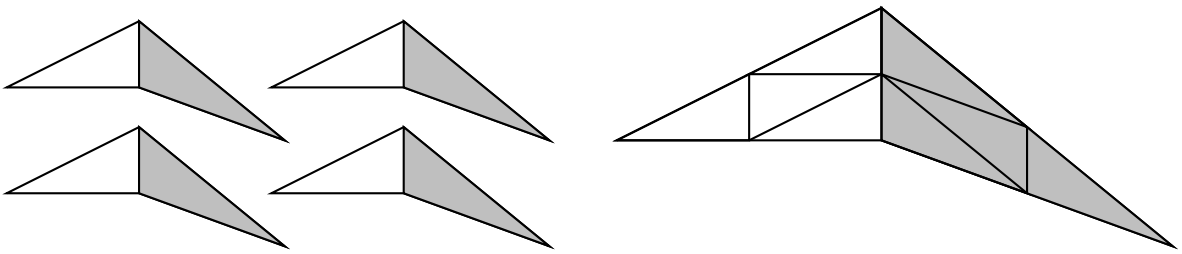
2. Un polygone et son agrandissement peuvent être décomposés de la même manière. Les grands triangles de la décomposition de l'agrandissement de côtés de longueur double ont des côtés de longueur double de ceux des petits triangles de la décomposition du polygone initial.



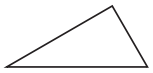
3. Lorsqu'on double la longueur des côtés d'un triangle, l'agrandissement est pavé avec quatre exemplaires du triangle de départ. Son aire est donc multipliée par quatre.



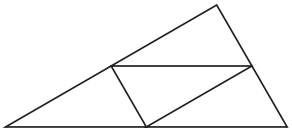
Conclusion : « lorsqu'on multiplie la longueur des côtés d'un polygone par deux, l'aire de l'agrandissement est égale à quatre fois celle du polygone initial ».



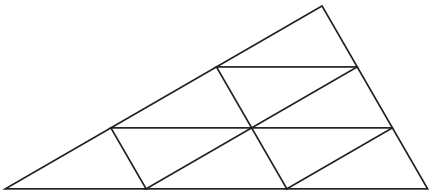
Synthèse ( )



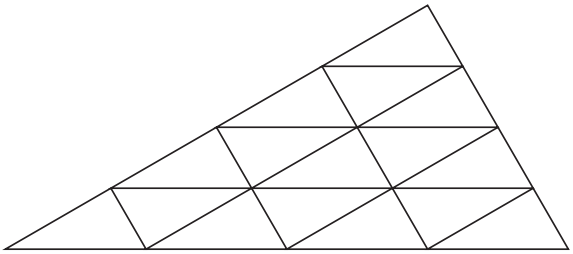
1 triangle



4 triangles



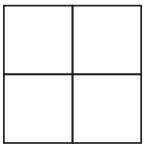
9 triangles



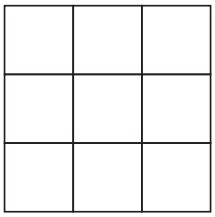
16 triangles

...

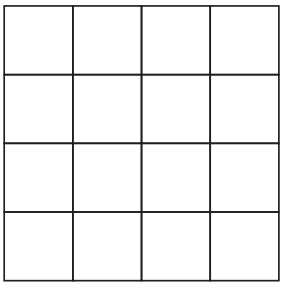
1 carré



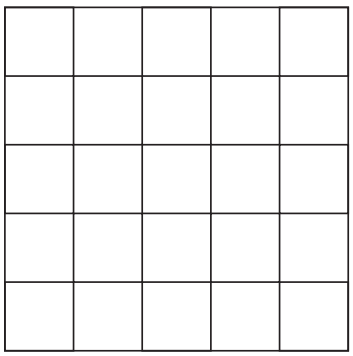
4 carrés
(2x2=2^2)



9 carrés
(3x3=3^2)



16 carrés
(4x4=4^2)

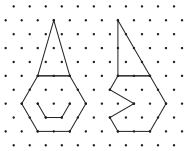


25 carrés
(5x5=5^2)

Si la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par un nombre entier, l'aire du polygone agrandi sera alors égale à l'aire du polygone initial multipliée par le carré de ce nombre.

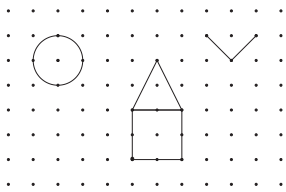
Liste des consignes ( )

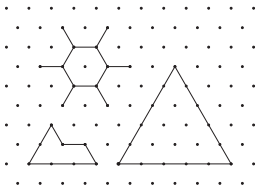
Entrez dans *Apprenti Géomètre*, ouvrez le fichier *ChapeauxPointus.fag* et reproduisez le dessin qui s'y trouve. Pour vous aider, lisez attentivement les indications qui s'affichent à côté du curseur. Ensuite, coloriez les chapeaux et visages de votre reproduction.



Ouvrez les fichiers *Campagne.fag* et *Egypte.fag*. Reproduisez sur la deuxième moitié de chaque feuille les différents éléments du dessin en doublant chacune des longueurs, y compris les distances qui séparent ces éléments.

Un gros point a été placé dans chacune des grilles pour signaler l'endroit où commencer la reproduction.

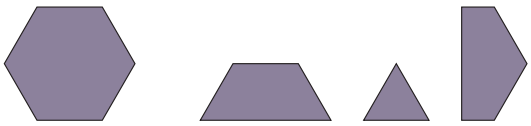




En observant vos réalisations, établissons ensemble un tableau reprenant ce qui reste identique et ce qui est modifié par un agrandissement.

Ce qui reste identique par un agrandissement	Ce qui est modifié par un agrandissement

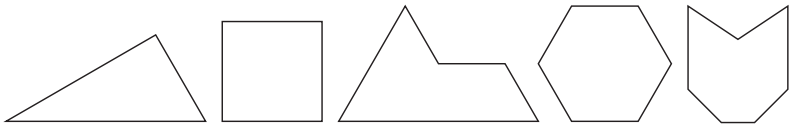
Ouvrez le fichier *Hexagone.fag*. Vous y trouvez un hexagone et trois autres polygones. Construisez ces trois formes à partir de l'hexagone en recourant aux fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre*.



Liste des consignes – suite ( )

Pour chacun des fichiers *PavageTriangle.fag*, *PavageCarre.fag*, *PavagePentagone.fag*, *PavageHexagone.fag* et *PavageChat.fag*, répondez à la question en suivant la consigne.

Combien de « petits polygones » sont nécessaires pour couvrir (sans superposition) l'agrandissement dont la longueur des côtés a été doublée ? Pour réaliser le pavage, ne découpez que lorsque c'est indispensable.



Ouvrez le fichier *PavageChatInit.fag*.

Partagez de la même manière les deux « chats » en triangles et, après avoir mis chaque triangle du petit « chat » en couleur (une couleur différente par triangle), pavez les triangles du grand chat avec ceux du petit chat.

Comparez les aires de chacun des polygones rencontrés avec celles de leur agrandissement de côtés de longueur double.

Tracez un triangle quelconque. Après l'avoir mis en couleur, construisez son agrandissement de côtés de longueur double par assemblage de triangles.

Tracez un pentagone quelconque et construisez son agrandissement de côtés de longueur double par assemblage de triangles (coloriez chaque triangle de la décomposition du pentagone initial dans une couleur différente).

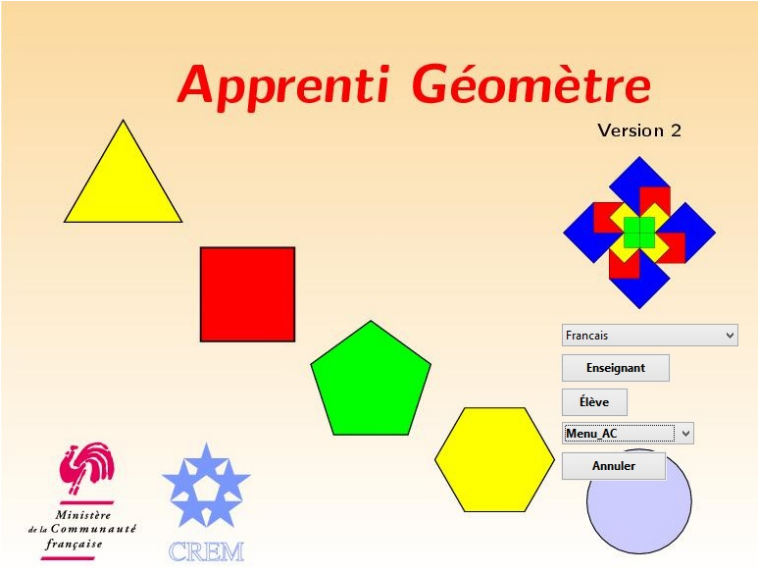
Qu'advient-il de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit son agrandissement de côtés de longueur triple ?

Qu'advient-il de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit l'agrandissement dont la longueur des côtés est multipliée par huit ?

Pour les dessins « Campagne » et « Égypte », vérifiez que l'aire de l'agrandissement de toutes les formes est le quadruple de l'aire de la forme de départ.

Ouverture du logiciel *Apprenti Géomètre* ( )

Quand on ouvre le logiciel, la fenêtre représentée ci-dessous s'affiche.

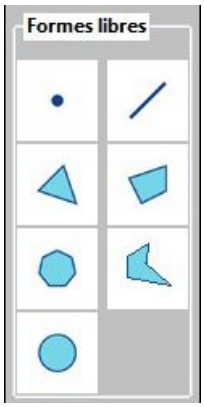


Pour entrer dans le logiciel, il faut choisir le menu avec lequel travailler et cliquer sur le bouton *Élève*.

Une fenêtre s'ouvre dans laquelle il faut écrire son prénom ainsi que l'initiale de son nom si plusieurs élèves de la classe portent le même prénom.

Il est ensuite possible de cliquer sur le bouton *Ok* qui ouvre alors une fenêtre d'*Apprenti Géomètre*.

Une barre horizontale propose différents menus. Sur la gauche de l'écran apparaissent une boîte à outils, proposant notamment des mouvements, et un pavé de formes libres.



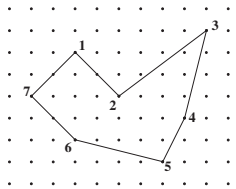
Le menu *Fichier* permet entre autres d'ouvrir des fichiers se trouvant dans des dossiers placés sur l'ordinateur ainsi que de sauvegarder des productions (`Sauvegarder_sous` en choisissant le dossier dans lequel enregistrer les travaux).

Familiarisation avec *Apprenti Géomètre* ( )

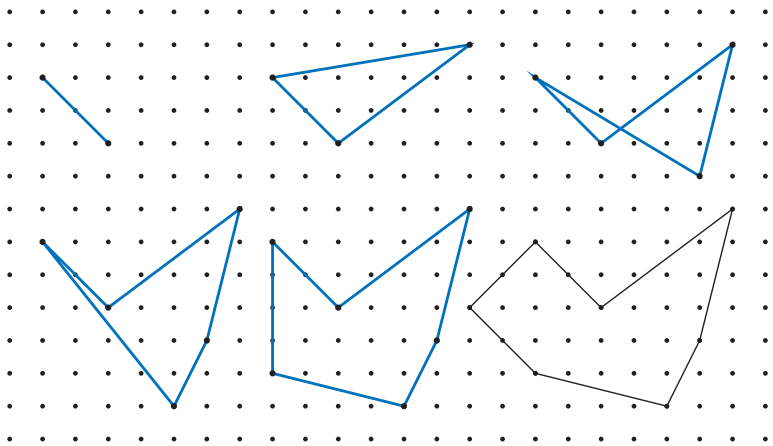
Apprenti Géomètre est un logiciel pour apprendre la géométrie. Par conséquent, son fonctionnement est spécifique, différent de celui d'un logiciel de dessin.

Par exemple, **pour tracer un segment**, il faut d'abord fixer un premier point par un clic gauche de souris. Le segment apparaît à l'écran dès qu'on déplace la souris. Un second clic gauche de souris fixe le segment sur la feuille de travail.

Pour tracer un polygone quelconque, il faut fixer chacun des sommets. Dès le troisième point placé, un polygone apparaît à l'écran mais le polygone souhaité ne sera effectivement construit qu'après le placement du dernier point. Construisons par exemple l'heptagone (polygone à sept côtés) ci-contre.



Les polygones intermédiaires peuvent avoir une apparence surprenante au vu du résultat final que l'on désire obtenir. La figure ci-dessous illustre les différentes étapes de la construction.



Pour tracer un polygone vérifiant certaines propriétés, l'ordre de construction des points a de l'importance.

Par exemple, pour construire un triangle rectangle, le premier clic fixe un sommet du triangle, le deuxième clic fixe l'angle droit et, lorsqu'on déplace la souris, on voit apparaître à l'écran des triangles rectangles qui peuvent être construits. Le troisième clic de souris fixe le troisième sommet sur la perpendiculaire au premier côté.

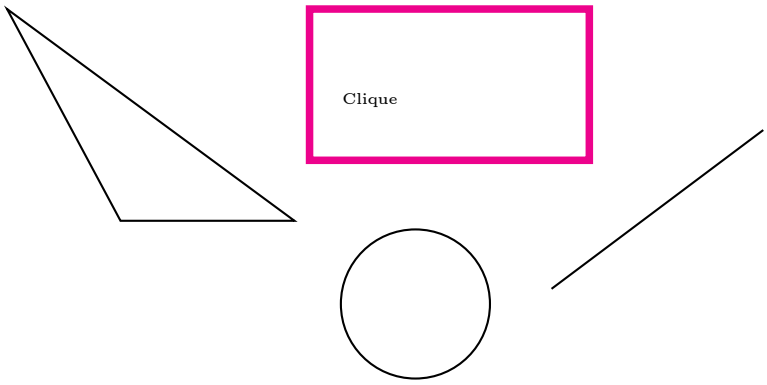
Pour tracer un polygone régulier, deux clics de souris suffisent. En effet, le premier point place un premier sommet du polygone et, en déplaçant la souris, le polygone régulier apparaît. Le deuxième clic de souris fixe le polygone à l'écran, avec la longueur de côté souhaitée.

Familiarisation avec *Apprenti Géomètre* – suite ( )

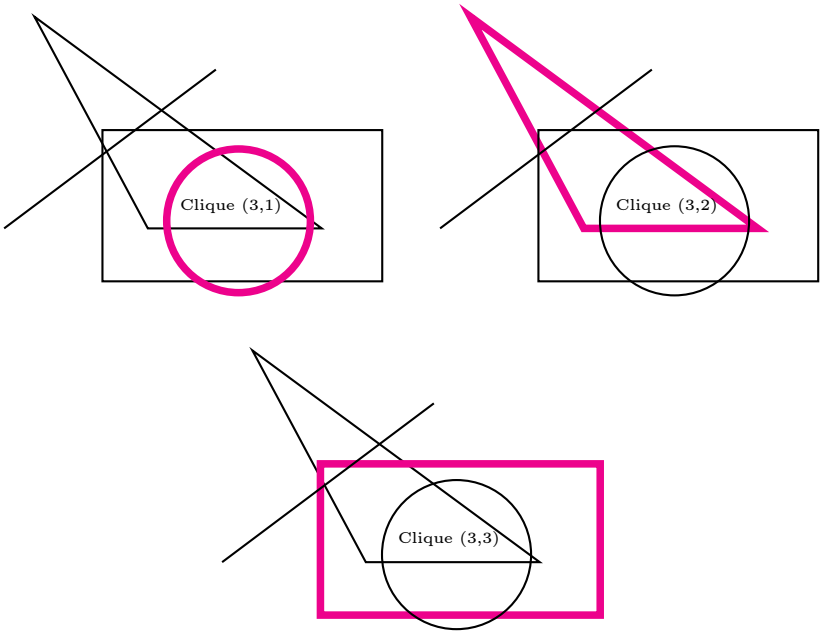
Bon à savoir :

– Dans *Apprenti Géomètre*, la fonctionnalité en cours reste active tant qu'on n'en sélectionne pas une autre. Pour quitter une fonctionnalité, il est donc nécessaire d'en choisir une autre ou, éventuellement, d'effectuer un clic droit de souris.

– Lorsque le curseur de la souris glisse sur la feuille de travail d'*Apprenti Géomètre*, la couleur des objets susceptibles d'être sélectionnés vire au magenta (rose vif). Pour sélectionner un point, un segment ou une forme, il faut donc s'assurer qu'il soit magenta au moment du clic de la souris.

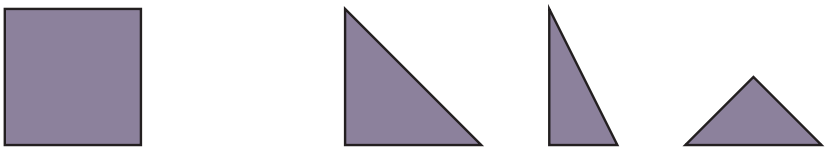


– Lorsque plusieurs objets sont superposés, c'est celui situé à l'avant-plan qui prend la couleur magenta et qui peut donc être sélectionné. Pour accéder aux autres objets, il faut utiliser la barre d'espacement ou la roulette de la souris. La couleur magenta signale quel objet pourrait alors être sélectionné.



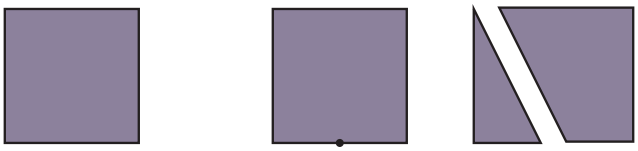
Quelques fonctionnalités supplémentaires d'*Apprenti Géomètre* ( )

Ouvrons le fichier *Exemple.fag* dans *Apprenti Géomètre*. Les polygones de la figure ci-dessous ont des points communs : même base ou même hauteur. Construisons chacun des triangles à partir du carré. L'*Opération* `Découper` permet d'obtenir les différents triangles.

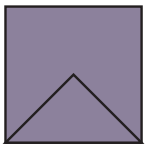


Le grand triangle rectangle isocèle est obtenu en découpant le carré selon une diagonale. Pour obtenir les deux autres triangles, des points qui n'existent pas encore sont nécessaires au découpage du carré, il faut donc les créer.

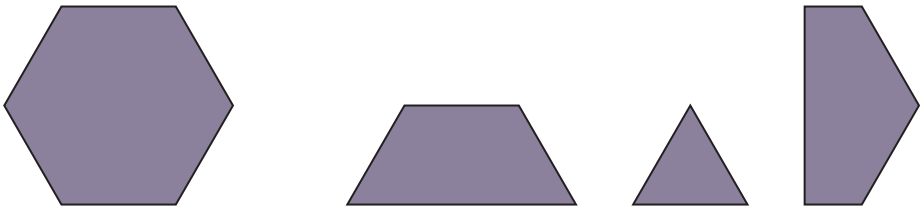
Dans un cas, il faut diviser la base du carré en deux parties égales via l'*Opération* `Diviser` pour créer le point milieu de la base. Une fois la division effectuée, il reste à `Découper` le carré. L'un des deux morceaux correspond au triangle rectangle.



Dans l'autre cas, le sommet du triangle se trouve au centre du carré. L'*Opération* `Construire le centre` permet de dessiner le point nécessaire au découpage. Il reste ensuite à `Découper` la forme en commençant et terminant par les points situés au bord de la forme.



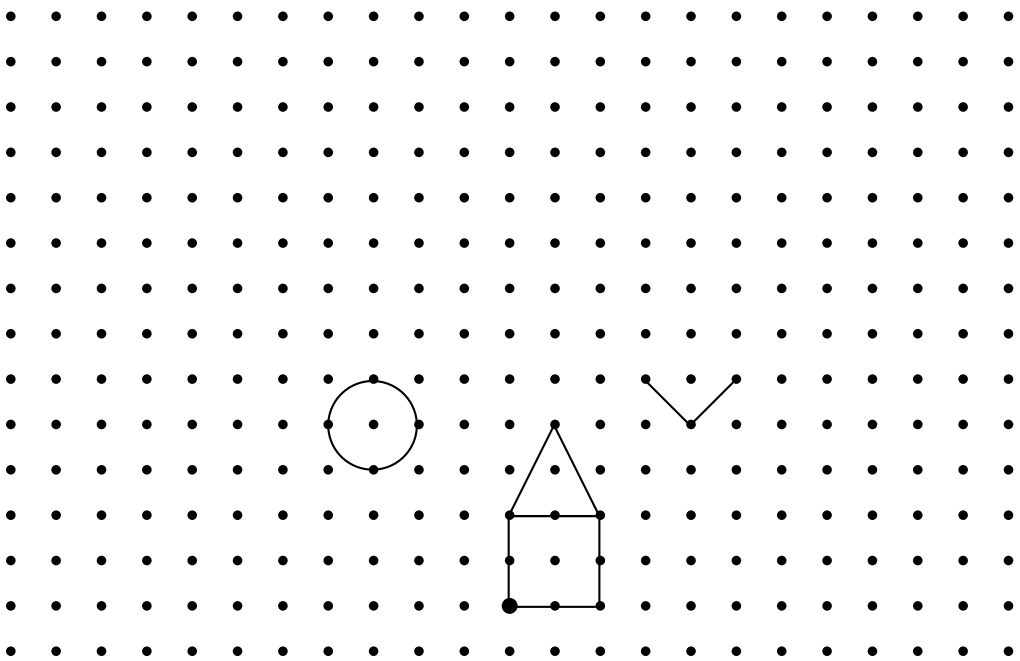
Ouvrez le fichier *Hexagone.fag*. Vous y trouvez un hexagone et trois autres polygones. Construisez ces trois formes à partir de l'hexagone en recourant aux différentes fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre*.

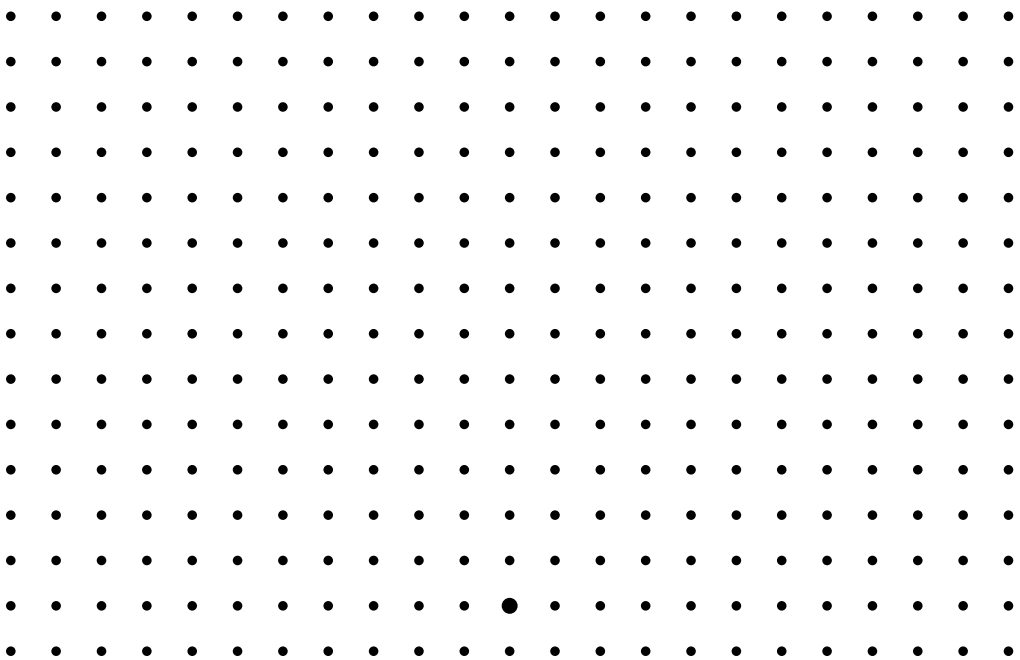


À la campagne ( )

Reproduisez sur la deuxième moitié de chaque feuille les différents éléments du dessin en doublant chacune des longueurs, y compris les distances qui séparent ces éléments.

Un gros point a été placé dans chacune des grilles pour signaler l'endroit où commencer la reproduction.

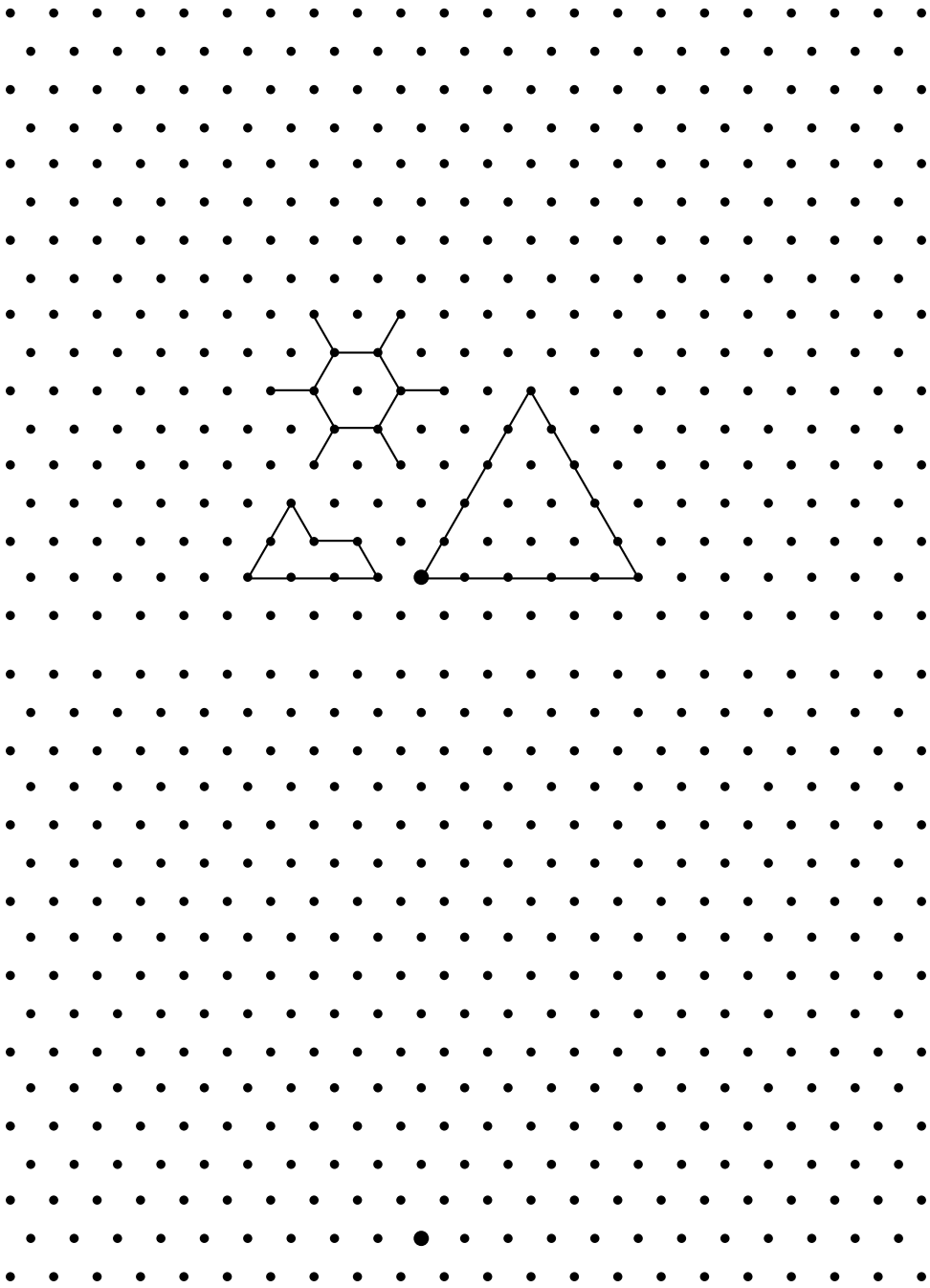




Vacances en Égypte ( )

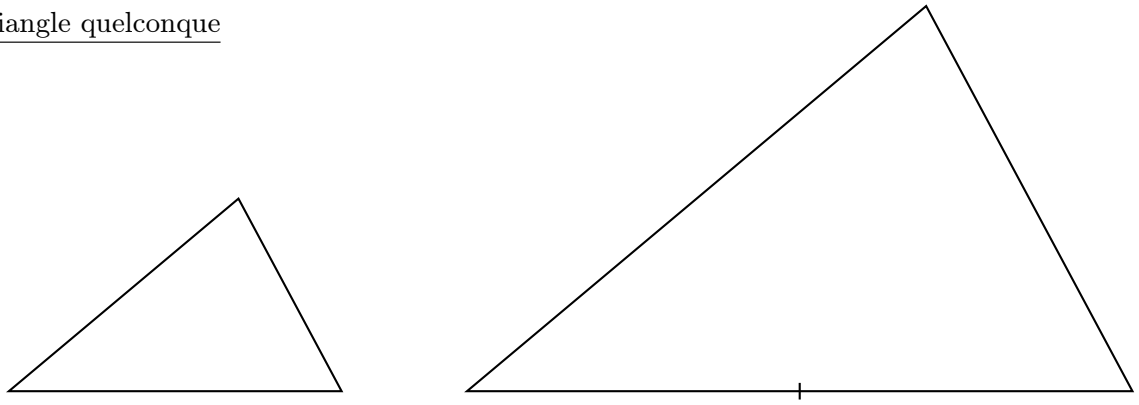
Reproduisez sur la deuxième moitié de chaque feuille les différents éléments du dessin en doublant chacune des longueurs, y compris les distances qui séparent ces éléments.

Un gros point a été placé dans chacune des grilles pour signaler l'endroit où commencer la reproduction.

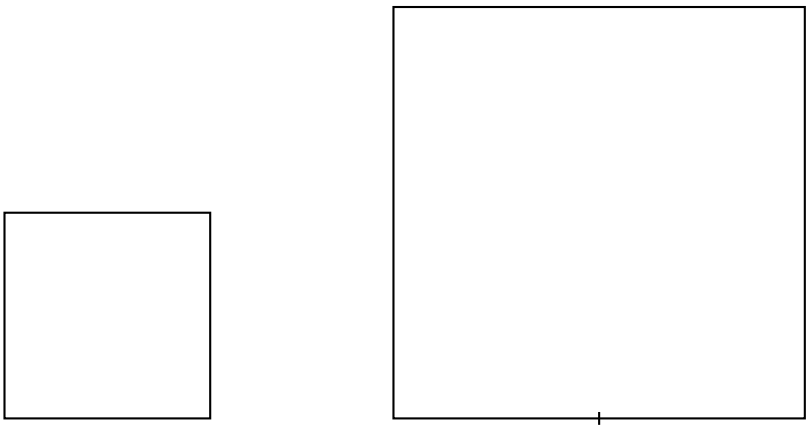


Pavages de polygones ( )

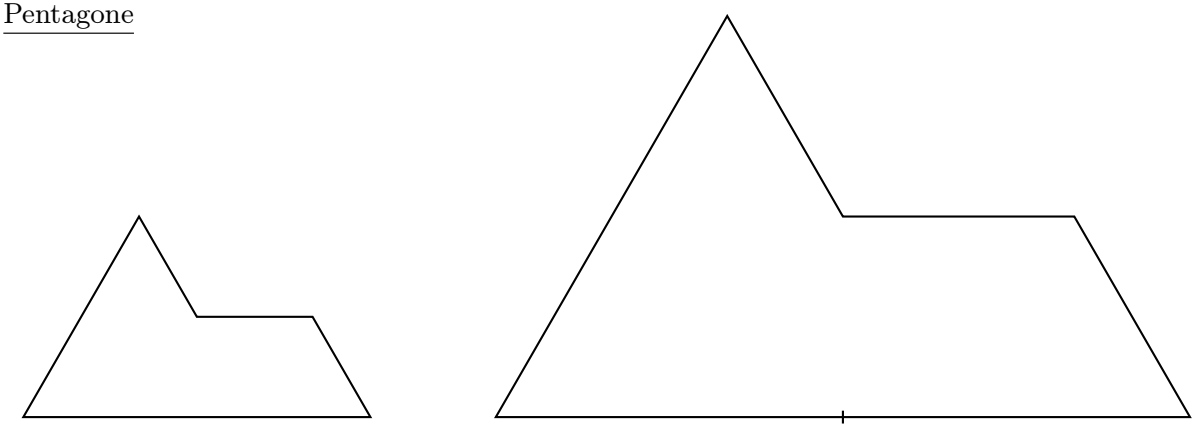
Triangle quelconque



Carré

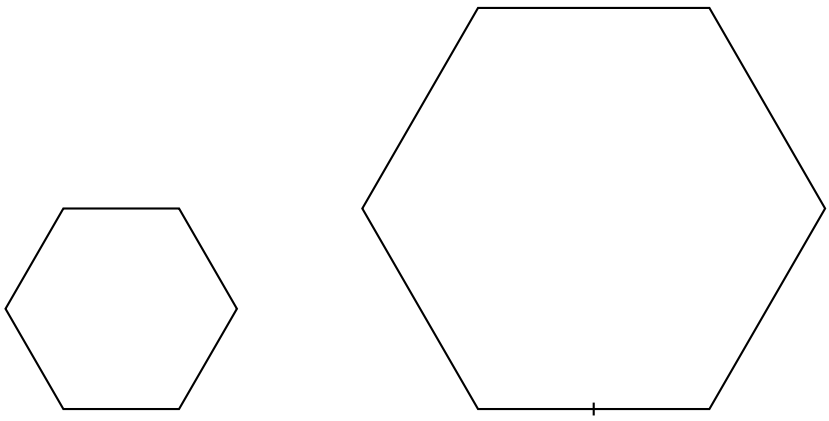


Pentagone

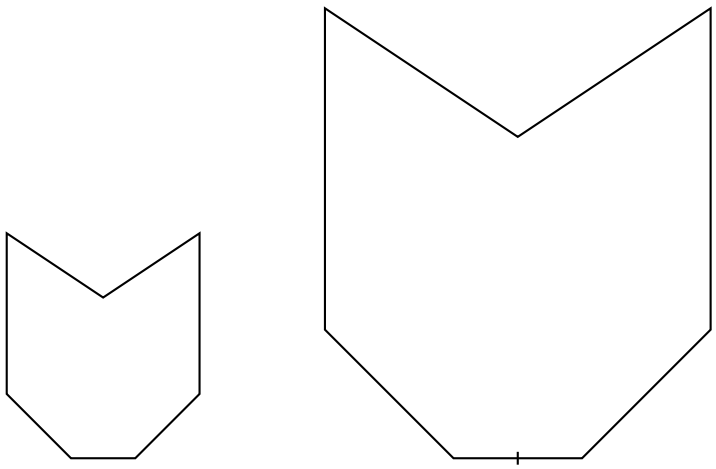


Pavages de polygones – suite ( )

Hexagone

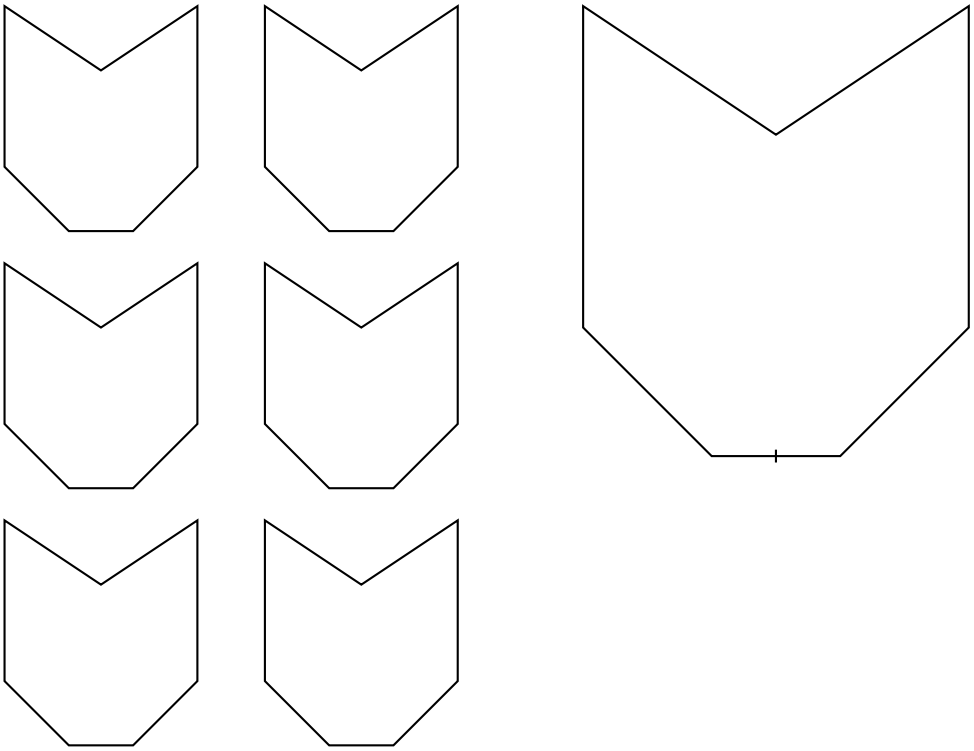


Tête de chat

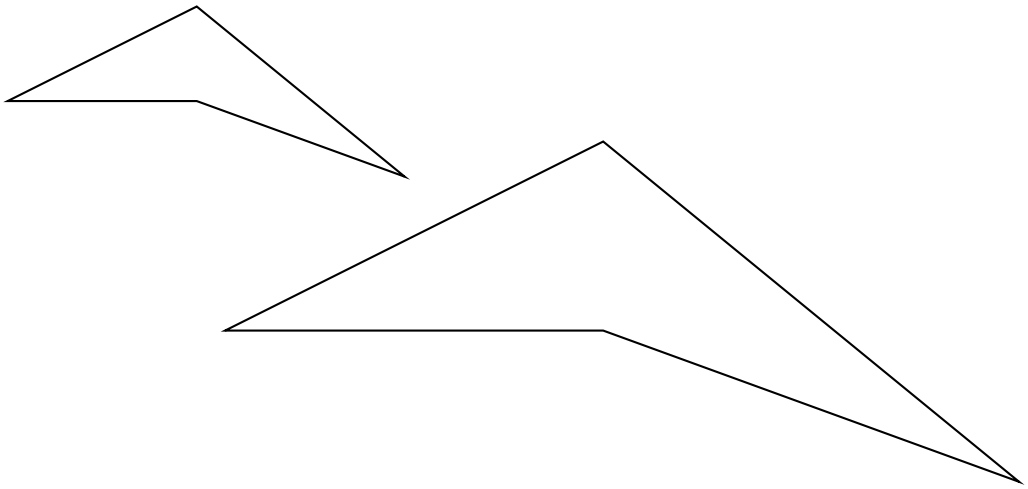


Décompositions pour paver ( )

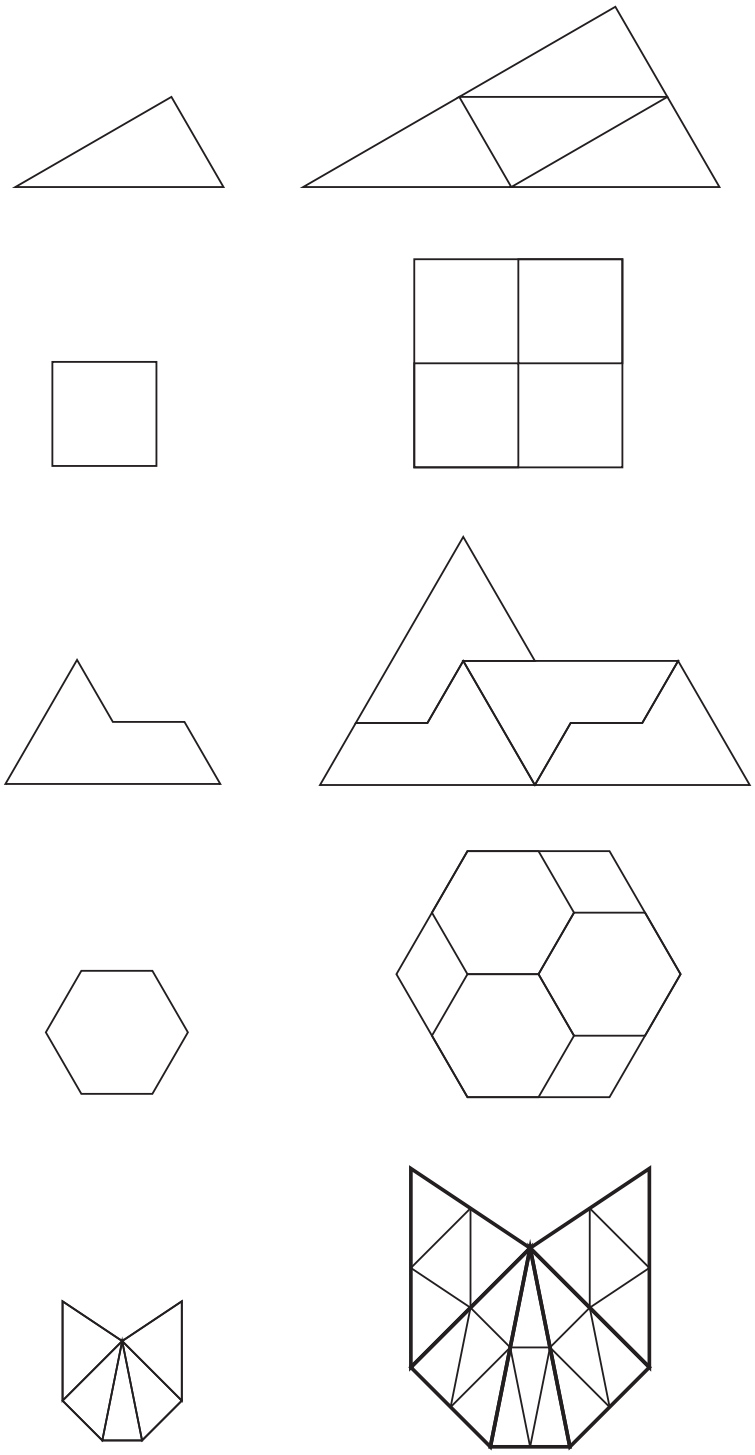
Partagez de la même manière les petits « chats » et le grand en triangles puis coloriez les triangles d'un petit chat avec des couleurs différentes. Reproduisez ensuite sur le grand chat, en conservant les couleurs, les petits triangles qui composent chacun des grands triangles. Coloriez autant d'exemplaires de petits chats que nécessaire.



. . . . . .



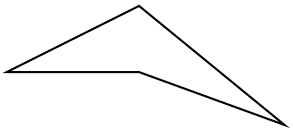
Pavages de polygones – synthèse ( )



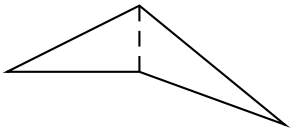
Lorsqu'on double les longueurs des côtés d'un polygone, quatre exemplaires du polygone initial sont nécessaires pour paver le polygone agrandi.

Aires d'agrandissements de polygones ( )

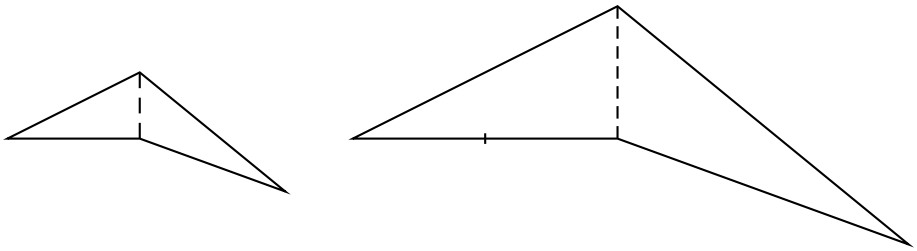
Considérons le polygone quelconque suivant.



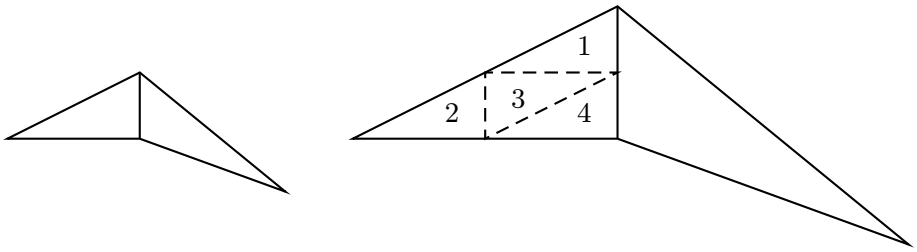
1. Tout polygone est un assemblage de triangles.



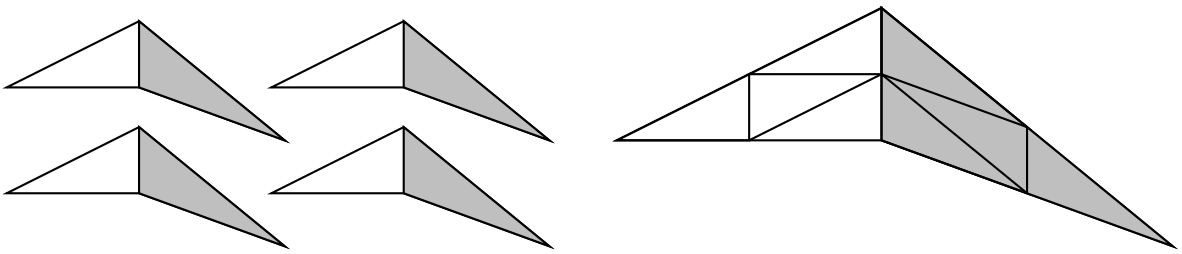
2. Un polygone et son agrandissement peuvent être décomposés de la même manière. Les grands triangles de la décomposition de l'agrandissement de côtés de longueur double ont des côtés de longueur double de ceux des petits triangles de la décomposition du polygone initial.



3. Lorsqu'on double la longueur des côtés d'un triangle, l'agrandissement est pavé avec quatre exemplaires du triangle de départ. Son aire est donc multipliée par quatre.

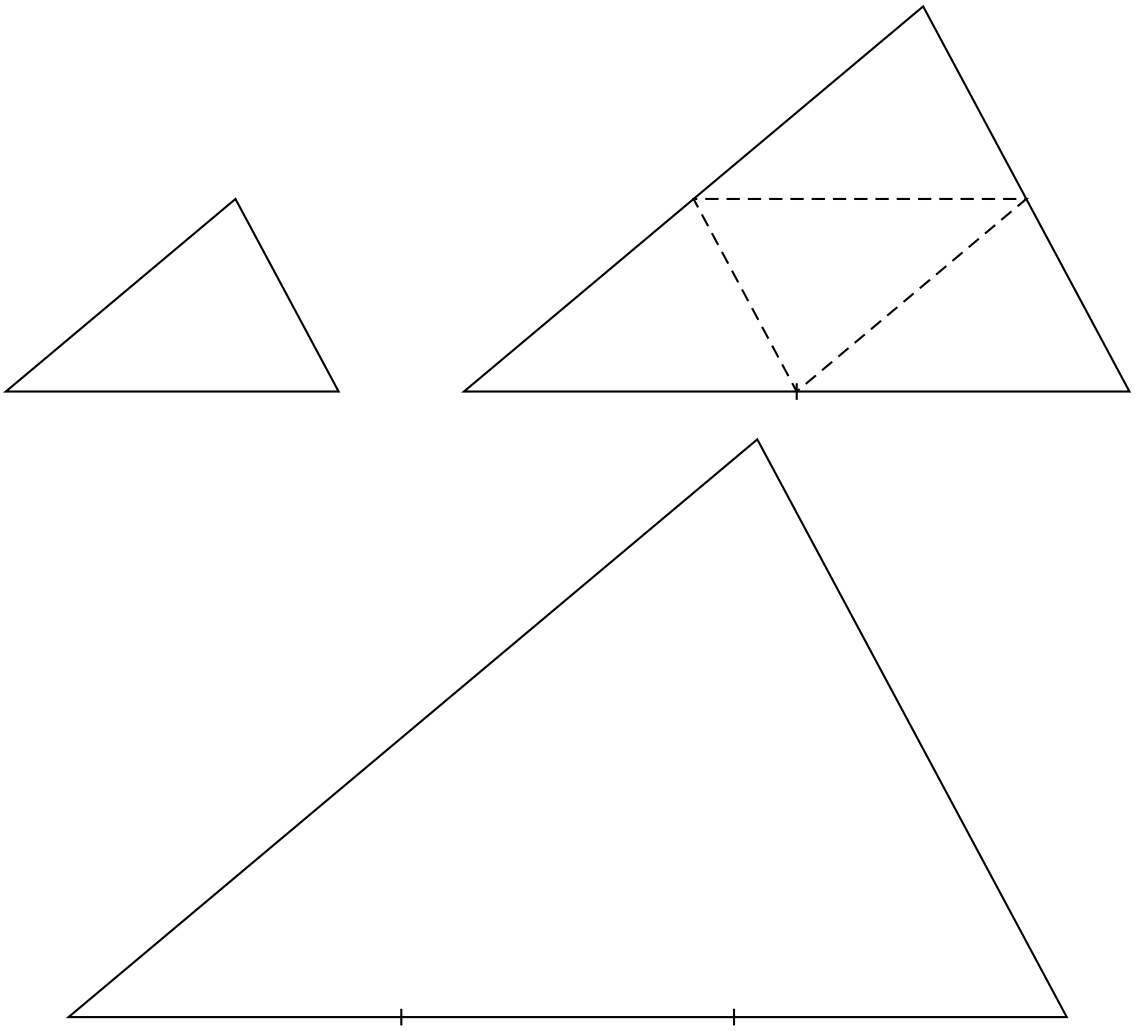


Conclusion : « lorsqu'on multiplie la longueur des côtés d'un polygone par deux, l'aire de l'agrandissement est égale à quatre fois celle du polygone initial ».

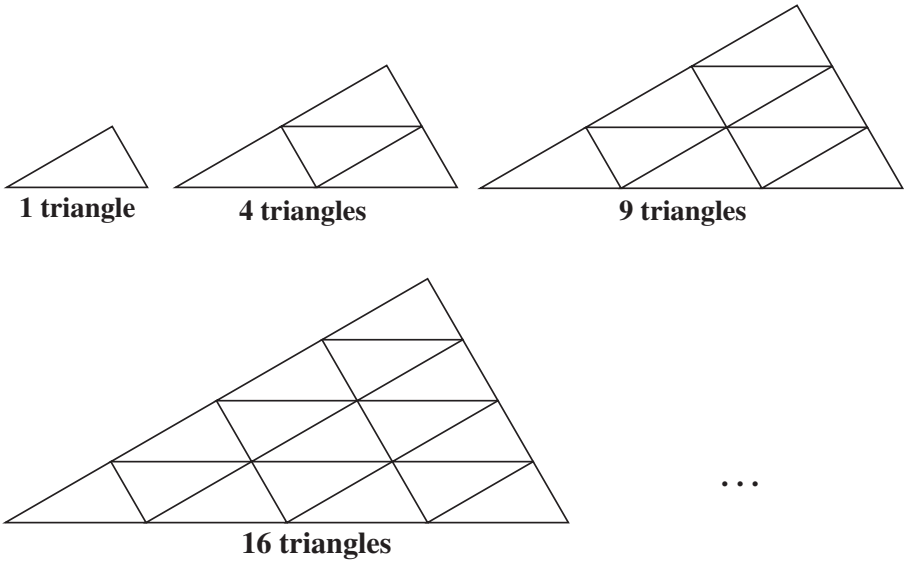


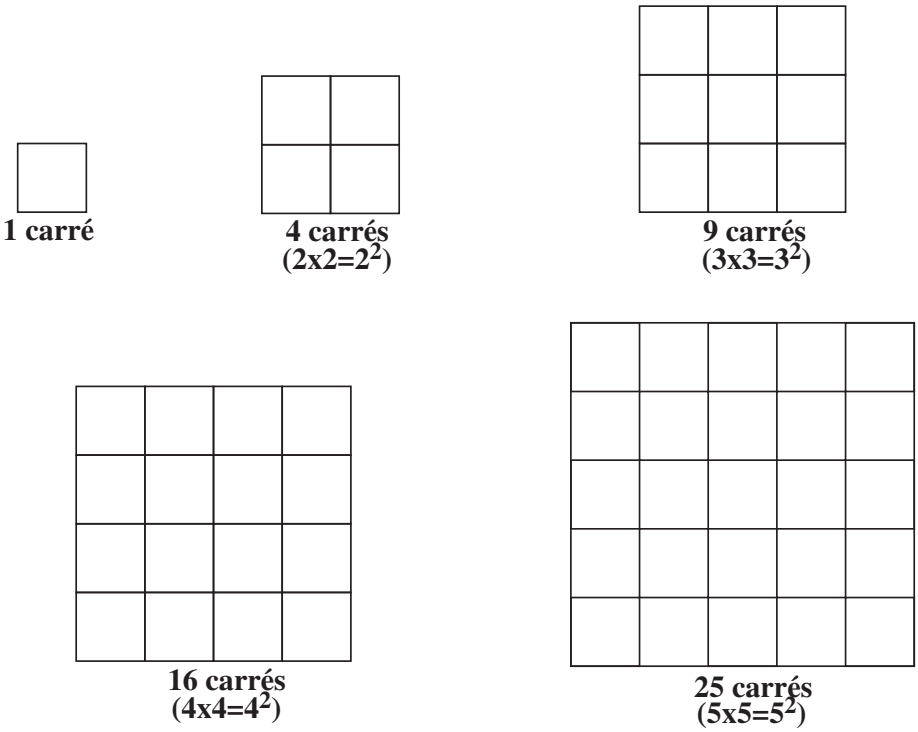
Agrandissement de côtés de longueur triple ( )

Qu'advient-il de l'aire d'un polygone lorsqu'on construit son agrandissement de côtés de longueur triple ?



Synthèse ( )





Si la longueur des côtés d'un polygone est multipliée par un nombre entier, l'aire du polygone agrandi sera alors égale à l'aire du polygone initial multipliée par le carré de ce nombre.

Casserole

Combien de verres d'eau penses-tu qu'il faut verser dans la casserole pour la remplir jusqu'à la moitié de sa hauteur ?

Ton estimation : .....

Comptons le nombre de verres d'eau nécessaires pour atteindre la marque placée à la moitié de la hauteur de la casserole.

Nombre de verres d'eau : .....

Connaissant le nombre de verres d'eau nécessaires pour remplir la casserole à la moitié de sa hauteur, combien de verres d'eau seront alors nécessaires selon toi pour remplir la casserole à ras bord ?

Ton estimation : .....

Continuons à remplir la casserole pour vérifier ta réponse.

Maintenant, remplis le tableau suivant avec les données de l'expérience.

Hauteur	Nombre de verres
moitié	
totale	

Hauteur d'un cylindre (1)

Pour commencer, verse le contenu d'une ou deux mesurettes dans ton récipient cylindrique (en fonction de ce qui t'a été demandé) et place une marque correspondant à la hauteur du niveau d'eau qui sera la hauteur de départ.

Ensuite, **avant de verser l'eau**, place des marques sur ton récipient en t'aidant de ton bâton gradué pour fixer la hauteur double ainsi que la hauteur triple et réponds aux questions suivantes.

Combien faudra-t-il de mesurettes, à ton avis, pour atteindre le double, puis le triple de la hauteur de départ ?

Nombre de mesurettes pour la hauteur double : .....

Nombre de mesurettes pour la hauteur triple : .....

Après avoir écrit tes estimations, verse les mesurettes dans le récipient cylindrique pour vérifier et complète le tableau suivant au fur et à mesure.

Hauteur (en cm)	Nombre de mesurettes
initiale =	
double =	
triple =	

Complète les pointillés à côté des flèches pour indiquer les liens que tu vois entre la première et la deuxième ligne du tableau.

Vois-tu d'autres liens ? Si oui, ajoute les flèches correspondantes.

Hauteur d'un cylindre (2)

Suite à tes observations, réponds à la question suivante.

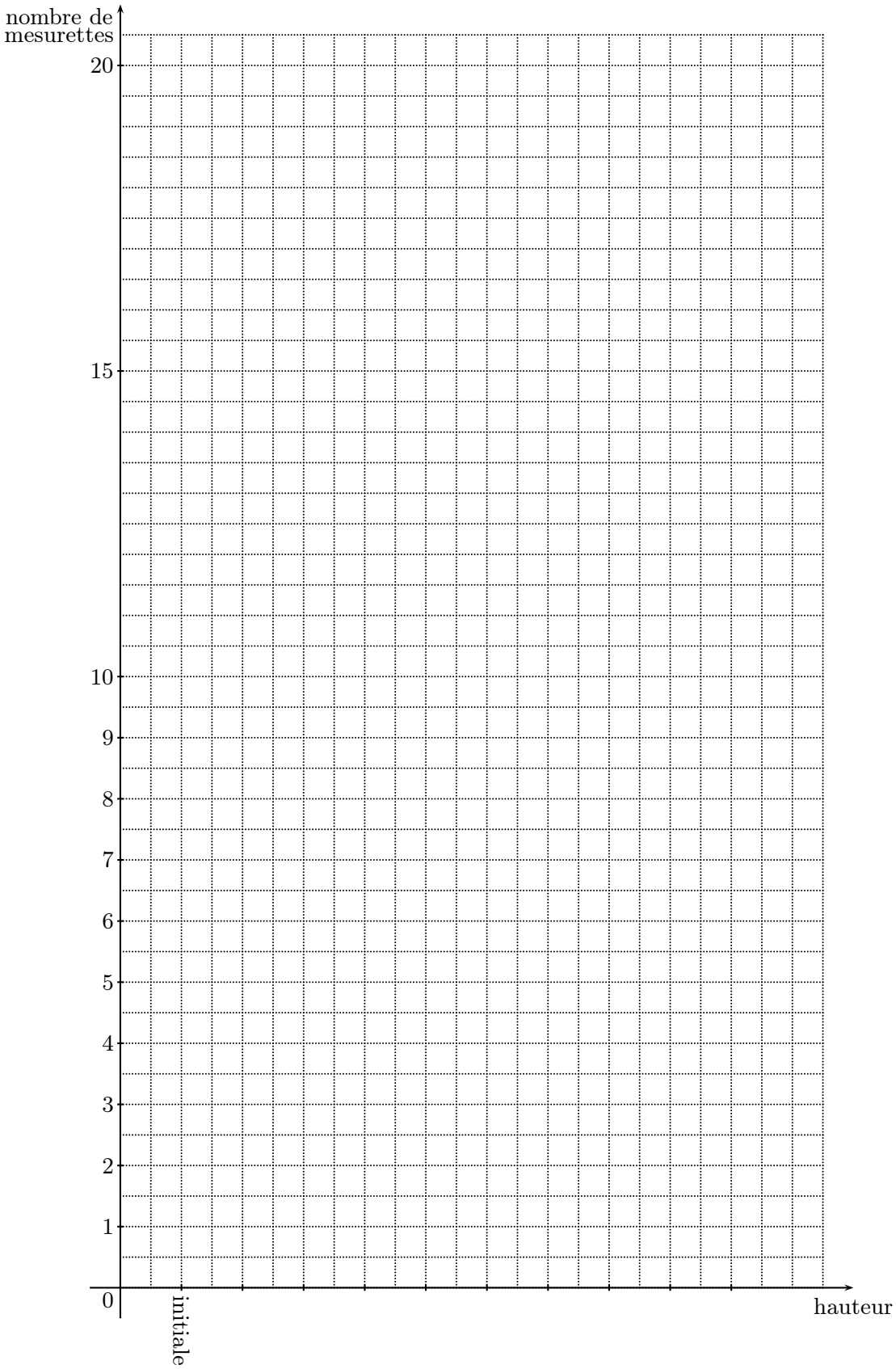
De combien de mesurettes aurais-tu besoin pour atteindre 4, 5 et 10 fois la hauteur de départ ?
Complète le tableau ci-dessous.

Hauteur (en cm)	Nombre de mesurettes
initiale =	
double =	
triple =	
quadruple =	
quintuple =	
⋮	⋮
décuple =	

Après avoir complété le tableau, réalise un graphique avec tous les résultats.

- Tu peux travailler en vraie grandeur en prenant deux feuilles A4 quadrillées collées l'une à côté de l'autre. Trace un repère et places-y les points qui représentent tes résultats.
- Tu peux aussi travailler sur le graphique de la fiche 23 où la hauteur initiale est représentée par 1 cm.

Hauteur d'un cylindre (3)



Diamètre d'un cylindre (1)

À ton avis, combien de fois faut-il verser l'eau contenue dans le récipient cylindrique que tu as reçu pour remplir un récipient cylindrique de diamètre double jusqu'à la même hauteur ?

Et combien pour remplir un récipient de diamètre triple ?

Complète le tableau ci-dessous avec tes estimations sachant que le récipient initial sert de mesurette.

Diamètre	Nombre de mesurettes (estimation)
initial	1
double	
triple	

Réalise maintenant la manipulation en remplissant les cylindres de diamètre double et triple jusqu'à la hauteur fixée – en utilisant le petit cylindre comme mesurette – et complète le tableau suivant avec les résultats que tu obtiens.

Diamètre (en cm)	Nombre de mesurettes (expérimentation)
initial =	1
double =	
triple =	

hauteur = cm

Compare tes résultats avec ceux des autres groupes.

Diamètre d'un cylindre (2)

À partir des résultats précédents, complète le tableau pour un diamètre quatre fois plus grand, cinq fois plus grand, ...

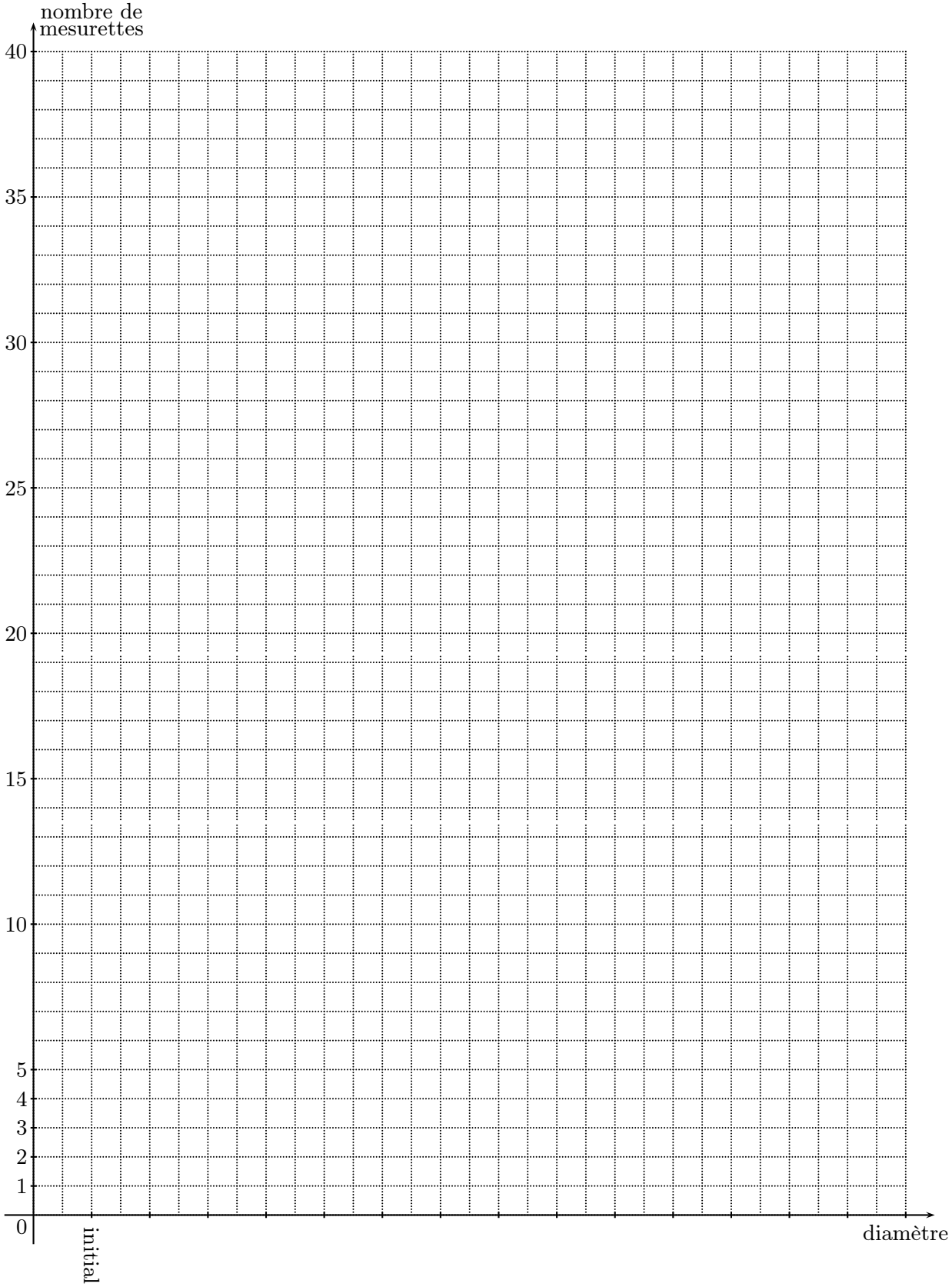
Écris les liens que tu trouves à l'aide de flèches.

hauteur = cm

Diamètre (en cm)	Nombre de mesurettes
initial =	1
double =	
triple =	
quadruple =	
quintuple =	
⋮	⋮ ⋮
décuple =	

Diamètre d'un cylindre (3)

Après avoir discuté de tes résultats avec les autres groupes, place les résultats dans le graphique ci-dessous.



Synthèse : travail sur les hauteurs (diamètre constant)

La hauteur et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs proportionnelles.

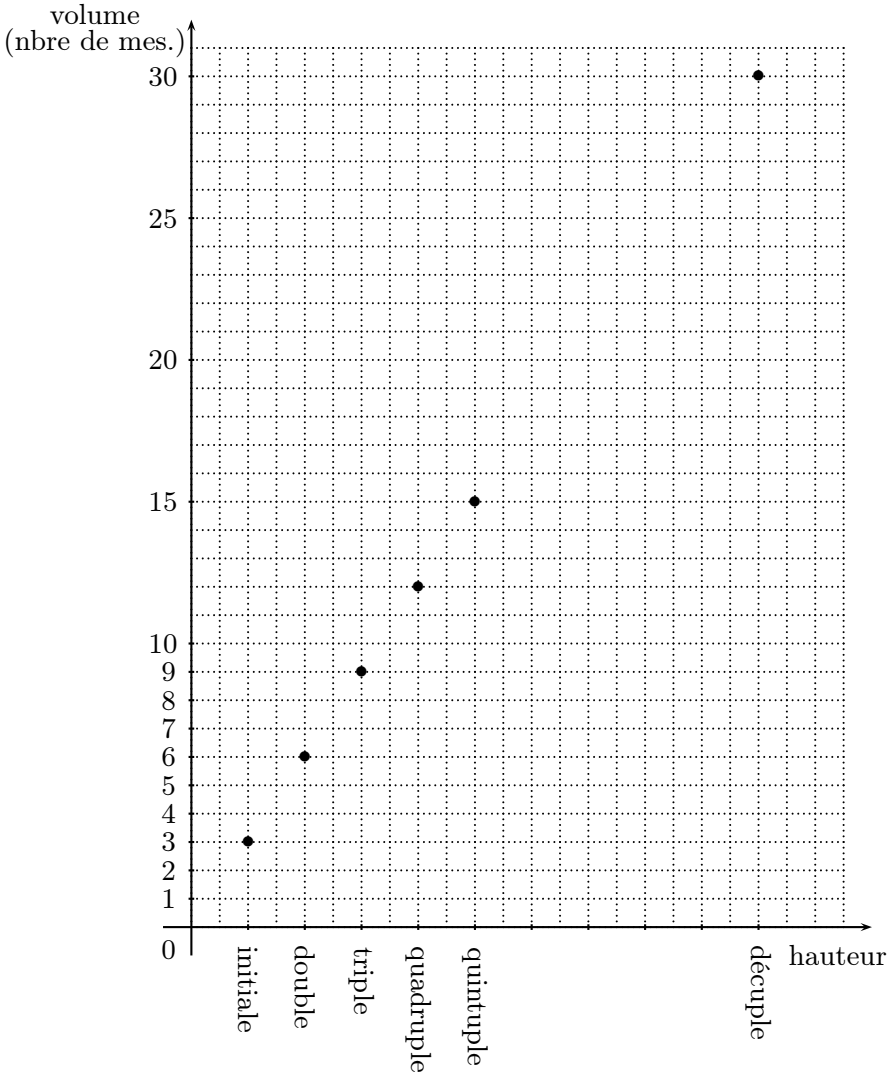
Tableau : lorsqu'on multiplie la hauteur d'un cylindre par un nombre sans changer le diamètre, on multiplie le volume par le même nombre.

Hauteur	Volume (mes.)
initiale	3
double	6
triple	9
quadruple	12
quintuple	15
⋮	⋮
décuple	30

×2 ×3 ×4 ×5 ⋮ ×10

×2 ×3 ×4 ×5 ⋮ ×10

Graphique : les points du graphique sont alignés avec l'origine (0,0).



Synthèse : travail sur les diamètres (hauteur constante)

Le diamètre et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs non proportionnelles.

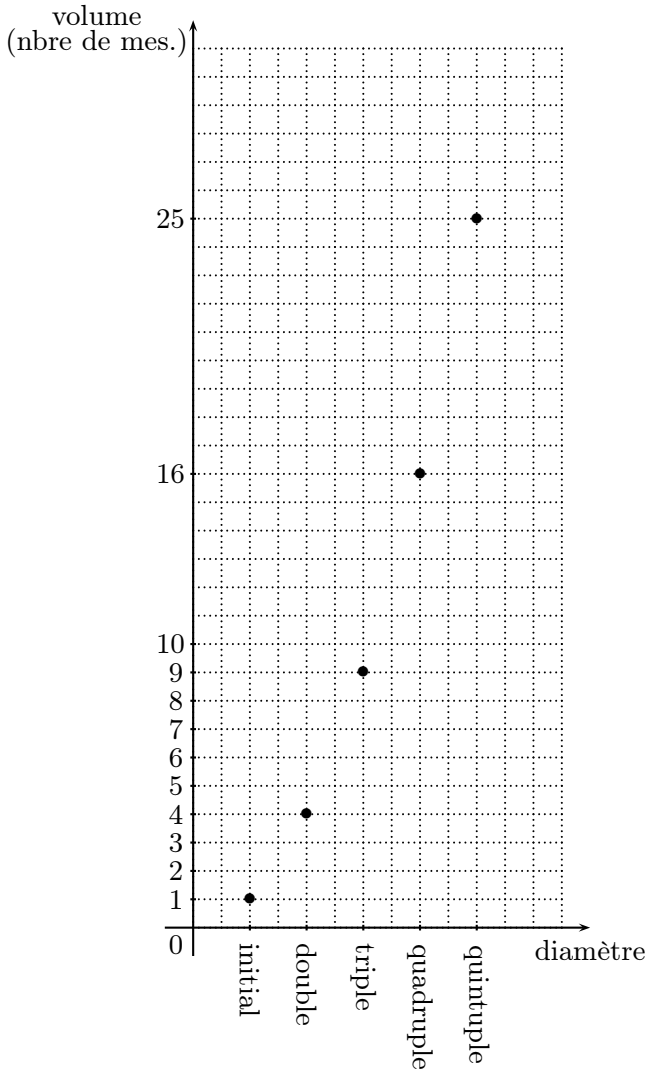
Tableau : lorsqu'on multiplie le diamètre d'un cylindre par un nombre sans changer la hauteur, on ne multiplie pas le volume par ce même nombre.

Diamètre	Volume (mes.)
initial	1
double	4
triple	9
quadruple	16
quintuple	25
⋮	⋮
décuple	100

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$ $\times 5$ $\vdots$ $\times 10$

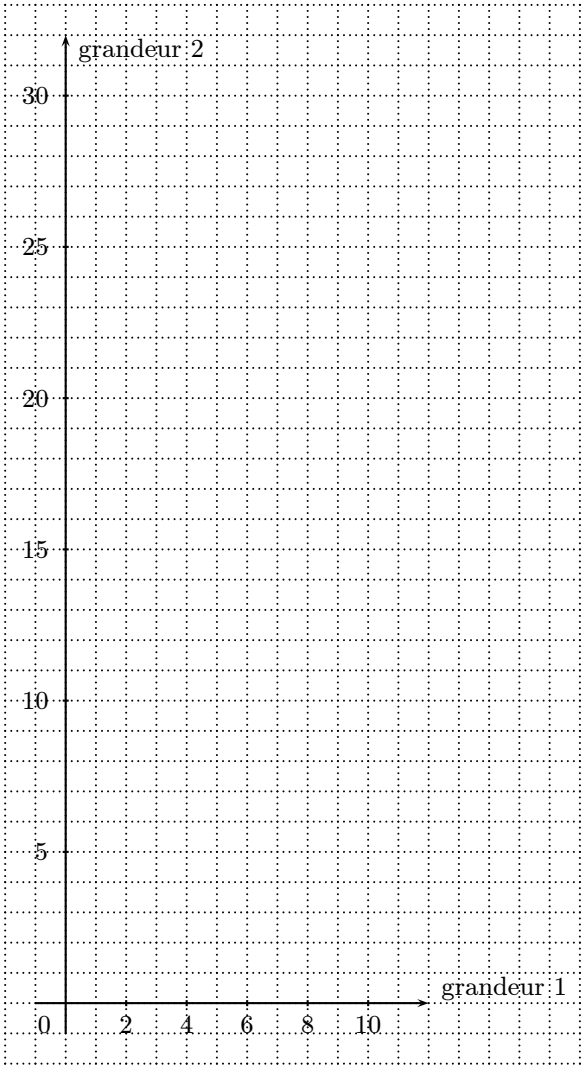
$\times 2^2$ $\times 3^2$ $\times 4^2$ $\times 5^2$ $\vdots$ $\times 10^2$

Graphique : les points du graphique ne sont pas alignés avec l'origine (0,0).



Grandeurs proportionnelles ou non ?

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21



La grandeur 1 et la grandeur 2 sont des grandeurs .....

car .....

Quatrième partie

Math & Manips à partir de 15 ans

Chapitre 8

Le volume du cône

Préambule

Les deux sections de ce chapitre décrivent des activités très proches l'une de l'autre. Elles se basent sur une même expérience consistant à graduer un récipient conique pour faire apparaître le lien entre le volume versé dans le cône et la hauteur atteinte par le liquide.

La séquence d'apprentissage de la section 1 est destinée à explorer la fonction cubique à partir d'une situation concrète. En effet, on demande explicitement aux élèves de représenter le volume en fonction de la hauteur, tout d'abord à partir de points expérimentaux. On élabore ensuite un modèle théorique, à partir de la formule $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, qui mène à l'étude de la fonction $y = ax^3$ et on en explore quelques propriétés, tant sur le plan analytique que sur le plan graphique. Cette activité est prioritairement destinée aux élèves qui découvrent les fonctions de référence.

Dans la section 2, on s'intéresse à la fois à la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur et à celle qui donne la hauteur en fonction du volume. L'expérimentation et la phase de modélisation mettent en évidence les liens entre la fonction cubique et la fonction racine cubique. Le concept de fonctions réciproques est ainsi abordé dans un contexte qui lui donne du sens.

Tout au long du chapitre, une réflexion est menée sur la démarche expérimentale, le processus de modélisation, la confrontation des résultats théoriques et expérimentaux. On amène les élèves à s'interroger sur les raisons pour lesquelles une réponse théorique est satisfaisante dans un cas, mais pas dans un autre.

1 Volume du cône et fonction cubique

De quoi s'agit-il ?

Graduer expérimentalement un récipient conique et représenter graphiquement le volume en fonction de la hauteur.

Construire l'expression analytique du volume d'un cône en fonction de la hauteur.

Confronter les calculs théoriques aux résultats expérimentaux.

Enjeux

Rencontrer et interpréter un phénomène non linéaire.

Découvrir la fonction $f(x) = ax^3$.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité, interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Compétences à développer

S'approprier différents modèles fonctionnels.

Modéliser une situation par une transformée d'une fonction de référence pour en tirer des informations.

Stratégies transversales *Utiliser une calculatrice graphique et/ou un outil informatique.*

Reconnaître les fonctions de référence dans divers contextes.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes pour la phase expérimentale.

Une période de 50 minutes pour la représentation graphique et l'élaboration du modèle théorique.

Une demi-heure pour la comparaison et l'exploitation des résultats.

Matériel pour la classe

Les annexes et les fiches des pages 287 à 294, à choisir en fonction du ou des cône(s) utilisé(s).

Matériel par groupe d'élèves

De l'eau ou un liquide coloré.

Un verre conique.

Un cône en plexiglas transparent.

Un support pour déposer le cône en position verticale. De tels supports se trouvent souvent dans les laboratoires de chimie, mais on en trouve aussi à petits prix dans les magasins de décoration.

Un récipient gradué pour mesurer des capacités avec une précision de 20 à 50 ml.

Des seringues graduées de 5 ml, 10 ml et 20 ml (sans l'aiguille). Ce matériel est disponible en pharmacie.

Du papier millimétré (une feuille adaptée se trouve en annexe page 287).

Une règle graduée de 20 cm minimum.

Des ciseaux et du ruban adhésif mat.

Une calculatrice, ou un ordinateur avec un tableur.

Prérequis

La formule du volume du cône (sans démonstration).

1.1 Le verre à moitié vide, ou à moitié plein

Comment s'y prendre ?

On répartit entre quelques groupes d'élèves des verres de forme approximativement conique, de tailles différentes et d'angles au sommet différents, comme ceux de la figure 1. On peut demander aux élèves d'en apporter afin de varier les modèles. L'enseignant donne la consigne suivante.

> Remplir les verres « à moitié ».

Cette consigne, assez vague, devrait susciter une première discussion destinée à préciser le problème : s'agit-il de remplir le verre à la moitié de sa contenance ou à la moitié de sa hauteur ? Les élèves se rendent compte assez vite du fait que le verre rempli à la moitié de la hauteur n'est pas rempli à la moitié de sa contenance, puisque, si on partage le verre en deux parties en marquant sur la paroi la moitié de la hauteur, la partie inférieure du verre, plus « étroite », ne contient pas le même volume que la partie supérieure. La deuxième consigne précise le problème.

> Jusqu'à quelle hauteur faut-il verser du liquide dans chaque verre pour le remplir à la moitié de sa contenance ?
>
> Exprimer le résultat par rapport à la hauteur du contenant.

À ce stade, on demande aux élèves de marquer, sur un ruban adhésif collé sur la paroi du verre, la hauteur qu'ils estiment correspondre à la moitié de la contenance. Ensuite, les élèves réalisent l'expérience, par exemple en remplissant chaque verre à ras bord, en transvasant le contenu dans un récipient gradué, puis en reversant dans le verre la moitié de la quantité de liquide qui vient d'être mesurée. Une autre option consiste à remplir le verre en mesurant les quantités versées, puis à en retirer la moitié du liquide. On constate que, pour les verres utilisés, le niveau finalement atteint par le liquide est plus proche des deux tiers de la hauteur que de la moitié.

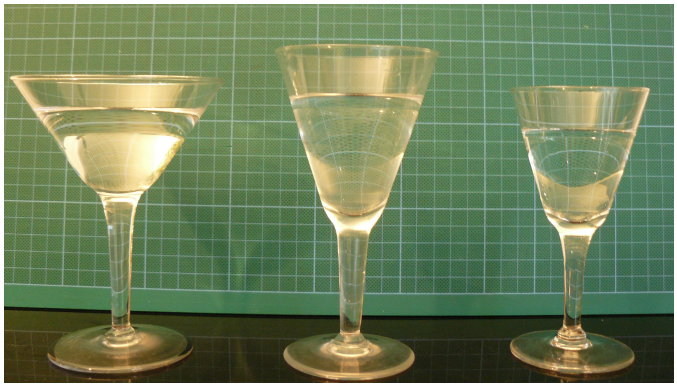


Fig. 1

Fig. 2

Même si les verres sont tous de forme conique, ils diffèrent par la taille et la forme, il y en a de plus « étroits » et de plus « larges » (figure 1). On a cependant l'impression qu'ils sont tous remplis à la même fraction (au même pourcentage) de leur hauteur.

Pour vérifier cela, on mesure les hauteurs atteintes par le liquide dans les différents verres, et on calcule ensuite le rapport entre la hauteur du liquide et la hauteur du verre.

Les résultats obtenus pour les verres de la figure 1 sont respectivement 0,68 pour le premier, 0,69 pour le deuxième et 0,68 pour le troisième. Le verre à vin plus classique de la figure 2 présente quant à lui, un rapport de 0,6 sensiblement différent. Pour les verres coniques, on peut aussi calculer le rapport entre les longueurs mesurées sur la paroi (c'est-à-dire sur la génératrice du cône) et constater que ces rapports ne diffèrent pas des rapports des hauteurs correspondantes. Cette remarque devrait amener les élèves à évoquer le théorème de Thalès, qui nous sera utile à la section suivante. Ce procédé, qui évite de mesurer les hauteurs, ne s'applique évidemment pas à des verres dont la paroi est courbe.

L'interprétation de ces rapports en termes de pourcentages de la hauteur ne sera sans doute pas évidente pour tous les élèves. On note la stabilité de ce rapport pour les verres « coniques » même si ceux-ci ne le sont que très approximativement, le fond du verre n'étant pas aussi pointu que celui d'un « vrai » cône. On peut se demander si ce rapport sera toujours le même pour tous les récipients coniques et s'interroger sur sa signification. Cette question est laissée provisoirement en suspens, la suite de l'activité permettra de lui apporter une réponse précise.

L'étonnement provoqué par cette première expérience pose le problème de la graduation du cône : les élèves se rendent bien compte qu'une graduation indiquant des quantités égales de liquide ne correspondra pas à des écarts réguliers de hauteur. Cette observation les engage à réaliser une autre expérience pour préciser l'allure de cette graduation et mieux comprendre le phénomène.

Échos des classes

Même si les élèves placent l'indication de la moitié de la contenance plus haut qu'à mi-hauteur, leurs estimations sont souvent bien en-dessous de la réalité. Pour vérifier, ils n'employent pas de récipient gradué, mais remplissent le verre avec des seringues de 10 ou 20 ml en comptant combien ils en versent, puis retirent la moitié du liquide, toujours à la seringue. Notons que le travail à la seringue est rapide et précis.

Pour évaluer la hauteur ainsi obtenue, ils marquent des repères sur une règle graduée placée verticalement auprès de chaque verre. Un dessin au tableau est nécessaire pour faire prendre conscience aux élèves que le rapport des hauteurs est égal au rapport des longueurs sur la paroi des verres coniques.

Pour exprimer ce rapport en terme de pourcentages, ils ont recours à la règle de trois. Il n'est pas clair pour eux que la valeur décimale du rapport (comprise entre 0,67 et 0,73) donne directement le pourcentage.

Après l'expérience, certains élèves pensent que la valeur du rapport ne dépend pas de la forme du cône, mais tous ne sont pas convaincus.

1.2 Graduation d'un cône

Comment s'y prendre ?

Chaque groupe d'élèves reçoit un cône en plexiglas transparent, un support et le matériel nécessaire pour mesurer. L'enseignant communique à l'ensemble de la classe les objectifs de l'activité.

Graduer un cône en marquant les niveaux atteints par 5 ml, 10 ml, ...

Placer sur un graphique les points expérimentaux qui représentent le volume du liquide versé en fonction de la hauteur.

Déterminer la fonction qui modélise ce phénomène.

Comparer les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

Cette activité se déroule donc en trois phases :
- une phase expérimentale qui consiste à graduer le cône, puis à reporter sur un graphique les « points expérimentaux »,
- un calcul théorique visant à établir la formule donnant le volume du cône en fonction de la hauteur,
- une confrontation des résultats, par comparaison des tableaux de valeurs expérimentales et théoriques, et par comparaison des graphiques.

Phase expérimentale

Graduation du cône

La graduation d'un récipient s'effectue naturellement sur la paroi. Une solution pratique consiste à coller le long d'une génératrice du cône, une bande de papier millimétré sur laquelle on marquera les niveaux atteints au fur et à mesure des quantités versées (figure 3). Cette méthode ne nous fournira donc pas directement la hauteur atteinte par le liquide pour chaque volume versé.

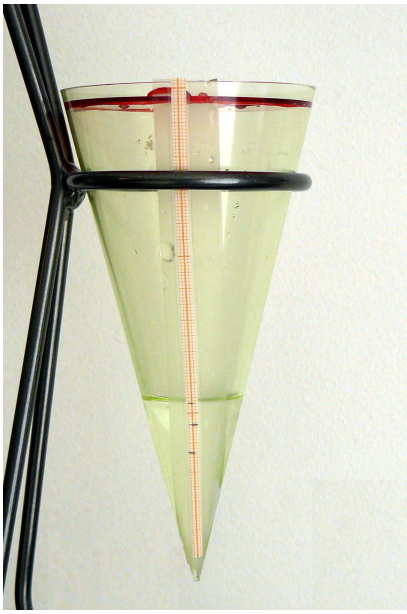


Fig. 3

Le cône représenté à la figure 3, avec lequel nous avons réalisé l'expérience, fait partie du matériel classique qu'on trouve généralement dans les classes de l'école primaire. La génératrice mesure 16 cm et le diamètre 8 cm. Il ne peut être rempli jusqu'en haut car il est surmonté d'un couvercle percé d'un orifice. Il existe dans le matériel pédagogique disponible sur le marché un autre cône de 10 cm de haut et 10 cm de diamètre.

Pour maîtriser les quantités de liquide versées dans le cône, on utilise de préférence des seringues de 5, 10 et 20 ml.

Les cinq premiers millilitres versés créent l'étonnement : le liquide atteint déjà presque le quart de la hauteur du récipient. À ce moment, les élèves ont l'impression que le cône sera très vite rempli et que la graduation de 5 ml en 5 ml n'est pas suffisamment fine. Néanmoins, les différences de hauteur diminuent rapidement au fur et à mesure du remplissage. À partir de 50 ml versés, ces différences de hauteurs devenant presqu'imperceptibles, on décide de verser 10 ml à la fois, puis 20 ml. Il faut attirer l'attention des élèves sur la nécessité de noter les quantités versées à chaque étape. Ces quantités de liquide versé ont été notées dans la quatrième colonne du tableau de la page 251.

Graphique

La fonction demandée est celle qui donne le volume du liquide en fonction de la hauteur. Les longueurs mesurées sur la génératrice doivent donc être transformées en hauteurs. Plusieurs méthodes permettent d'atteindre cet objectif.

On peut procéder graphiquement sur une feuille de papier millimétré où on aura dessiné une projection orthogonale du cône. Cette projection est facile à construire dès qu'on connaît la longueur de la génératrice du cône et le diamètre de sa base. La hauteur totale du cône peut être mesurée sur le dessin ou calculée par le théorème de PYTHAGORE. Dans notre exemple, nous trouvons, pour une génératrice de longueur $L = 16$ cm et un rayon $R = 4$ cm, une hauteur $H = \sqrt{16^2 - 4^2}\,\text{cm} \simeq 15{,}49$ cm. Ce résultat, comme ceux qui suivront, est arrondi à deux décimales.

Les marques des niveaux de liquide sont reportées sur la génératrice, accompagnées de l'indication du volume de liquide correspondant. Ces repères sont alors projetés orthogonalement sur une verticale (figure 4).

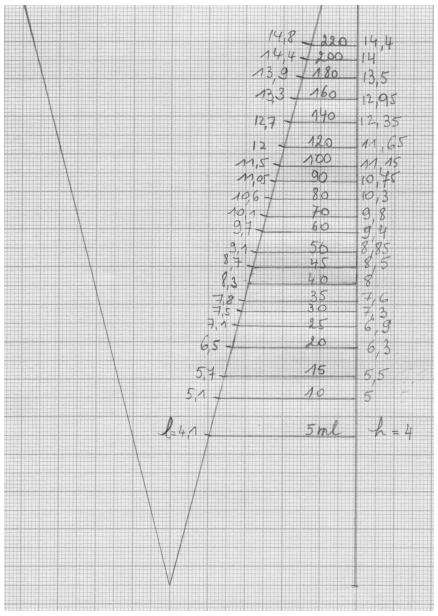


Fig. 4

Cette opération est assez rapide si elle est effectuée par deux élèves, l'un qui prend les mesures de longueur sur la génératrice, l'autre qui les reporte sur la feuille de papier millimétré. Les longueurs sur la génératrice et les hauteurs mesurées suivant ce procédé ont été indiquées dans les première et deuxième colonnes du tableau de la page 251.

Une autre piste consiste à calculer les hauteurs à partir des longueurs mesurées sur la génératrice, par exemple en utilisant le théorème de THALÈS : on a $\dfrac{h}{l} = \dfrac{H}{L} = \dfrac{15{,}49}{16} \simeq 0{,}97$. La hauteur est donc obtenue en multipliant la longueur mesurée sur la génératrice par le rapport $\dfrac{15{,}49}{16}$.

Cette suite d'opérations peut être réalisée assez rapidement à la calculatrice, en plaçant la valeur de ce rapport en mémoire. C'est encore plus rapide en utilisant un tableur, si les élèves disposent d'un ordinateur dans le local. Les hauteurs calculées suivant ce procédé ont été reportées dans la troisième colonne du tableau.

Certains élèves peuvent penser au cosinus, qui correspond au rapport des longueurs des côtés H et L. Pour chaque longueur l mesurée sur la génératrice, on obtient la hauteur h correspondante par la formule $h = l \cdot \cos\alpha$ où $\cos\alpha = \dfrac{H}{L} = \dfrac{15{,}49}{16} \simeq 0{,}97$, α étant l'angle formé par l'axe du cône et une génératrice. La valeur en degrés de cet angle est dans ce cas très proche de 14°. La suite de calculs à effectuer est exactement la même que précédemment.

Le tableau qui suit présente l'ensemble des résultats obtenus dans notre exemple. Les tableaux produits par les élèves pourraient ne comporter que deux ou trois colonnes, éventuellement dans un ordre différent. Le professeur peut imposer les quantités de liquide versé à chaque étape (en

utilisant la fiche 2 par exemple), mais ce n'est pas indispensable pour gérer efficacement l'activité si les groupes ne sont pas trop nombreux.

Les données adéquates pour placer sur un graphique les points demandés sont à présent disponibles. Ce travail peut être effectué sur papier millimétré ou au moyen d'un tableur (figure 5).

longueur sur la génératrice en cm	hauteur mesurée en cm	hauteur calculée en cm	volume versé en ml
0	0	0	0
4,1	4	3,97	5
5,1	5	4,94	10
5,7	5,5	5,52	15
6,5	6,3	6,29	20
7,1	6,9	6,87	25
7,5	7,3	7,26	30
7,8	7,6	7,55	35
8,3	8	8,03	40
8,7	8,5	8,42	45
9,1	8,85	8,8	50
9,7	9,4	9,39	60
10,1	9,8	9,78	70
10,6	10,3	10,26	80
11,05	10,75	10,70	90
11,5	11,15	11,13	100
12	11,65	11,62	120
12,7	12,35	12,29	140
13,3	12,95	12,87	160
13,9	13,5	13,46	180
14,4	14	13,94	200
14,8	14,4	14,32	220

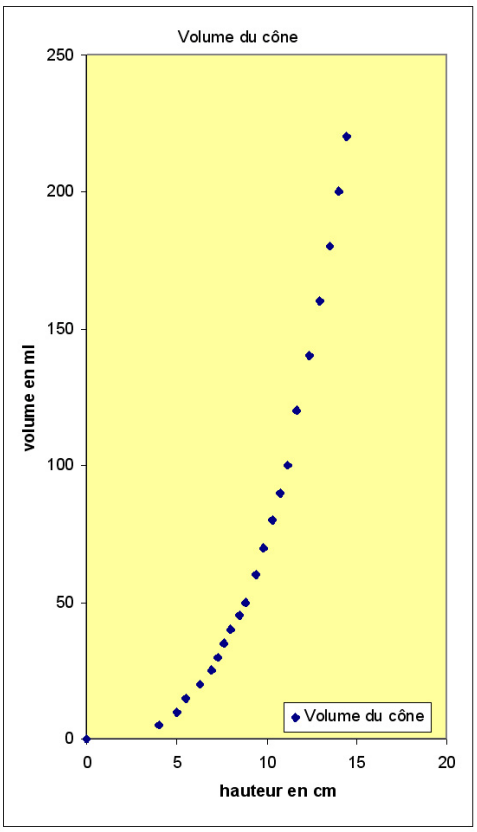


Fig. 5

Échos des classes

Les élèves qui choisissent la méthode graphique (figure 4) pour déterminer les hauteurs le font probablement parce qu'ils ne voient pas clairement comment procéder pour les calculer.

Les élèves qui procèdent par calcul évoquent tous le théorème de Thalès, aucun ne mentionne les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Pour la représentation graphique, tous placent comme repère 1 cm pour 1 cm de hauteur en abscisse et 1 cm pour 10 ml de volume sur l'axe des ordonnées. On remarque avec les élèves que cela revient à représenter le volume exprimé en cl.

Les valeurs trouvées par les élèves sont extrêmement proches de celles qui figurent dans le tableau ci-dessus, surtout pour les valeurs les plus élevées (à partir de 140 ml).

Modèle théorique

On explique qu'on cherche la fonction théorique qui donne le volume du cône en fonction de sa hauteur. Cette fonction doit modéliser le phénomène étudié. La forme de la courbe sur laquelle semblent se disposer les points expérimentaux évoque la parabole. À ce stade, quelques questions supplémentaires peuvent favoriser des intuitions utiles pour orienter la recherche.

Par exemple, pour faire surgir l'idée que la fonction pourrait bien être une cubique, il est utile d'analyser plus finement le tableau des nombres et poser la question suivante.

Qu'advient-il du volume lorsque la hauteur est doublée ?

On trouve notamment dans le tableau les hauteurs 4 cm et 8 cm. Les volumes correspondants sont 5 ml et 40 ml. Donc quand la hauteur est doublée, le volume est multiplié par $8 = 2^3$. Cette observation peut aider à comprendre que le volume varie comme h^3.

La formule du volume du cône, telle qu'elle est abordée à la fin de l'école primaire, est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

Dans le problème qui nous occupe, il nous faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h et le rayon r sont variables, les deux variant en même temps.

Le dessin sur papier millimétré réalisé précédemment (figure 4) devrait aider les élèves à percevoir que le rapport entre ces deux variables est constant. Cette observation indique qu'il sera possible d'obtenir une expression de V en fonction de la seule variable h. Si on exprime r comme multiple de h et qu'on le remplace dans la formule, on aura effectivement une fonction où V varie proportionnellement à h^3.

Les triangles semblables de la figure 6 montrent que

$$\frac{R}{H} = \frac{r_1}{h_1} = \frac{r_2}{h_2}.$$

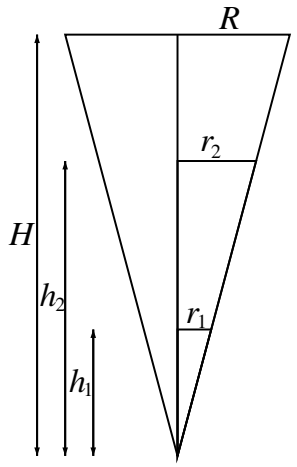


Fig. 6

Dans notre exemple, ce rapport vaut $\frac{4}{15{,}49}$. On a donc $r = \frac{4}{15{,}49}h$.

On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur :

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4}{15{,}49}h\right)^2 h \simeq 0{,}07\, h^3.$$

Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

À ce moment, il est primordial que les élèves comprennent bien comment ce coefficient 0,07 a été obtenu. Il vaut $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{15{,}49}\right)^2$ pour le cône utilisé lors de l'expérimentation, $\frac{4}{15{,}49}$ étant le rapport du rayon et de la hauteur de ce cône, $\frac{1}{3}\pi$ étant une constante. Le coefficient 0,07 ne

dépend donc que de la forme du cône. On peut faire remarquer que la valeur du rapport $\dfrac{4}{15{,}49}$ est aussi celle de $\tan\alpha$, où α est l'angle formé par l'axe du cône et une de ses génératrices. Le coefficient 0,07 correspond donc à $\dfrac{\pi}{3}\cdot\tan^2(14°)$ pour ce cône.

Échos des classes

Le passage au modèle théorique est extrêmement difficile à faire réaliser par les élèves. Tout se passe comme si, une fois les points placés sur le graphique, les élèves occultaient le lien entre le graphique et l'expérience réalisée, comme si le fait d'avoir fait le graphique permettait de se détacher de l'expérience.

L'idée d'utiliser le théorème de Thalès pour remplacer r par son expression en fonction de h, et obtenir ainsi V comme une fonction de h seul, ne leur est pas naturelle. On retrouve ici la difficulté qu'ont les élèves à passer d'un cadre à un autre, en particulier, dans ce cas, à faire appel à une propriété géométrique dans un travail sur les fonctions. Notons que cette stratégie leur sera utile dans bien des contextes, notamment dans les problèmes d'optimisation.

Une difficulté importante réside dans le choix de notations appropriées : il y a d'abord les dimensions R et H du cône de plexiglas, qui sont des constantes. Le volume $V_T = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, où R et H sont remplacés par leur valeur donne le volume du cône rempli. Par contre, $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ donne le volume de liquide dans le cône rempli jusqu'à la hauteur h ; dans cette dernière formule, V, r et h sont variables. Ces distinctions sont difficiles à comprendre pour les élèves et doivent être clairement explicitées dans le contexte de l'expérience réalisée.

Comparaison

Pour terminer, on s'attache à comparer les résultats expérimentaux et le modèle théorique. Ici encore, on peut confronter les tableaux et les graphiques.

Comparaison sur les tableaux

Dans un tableau, on compare les valeurs du volume versé avec les valeurs du volume calculées à l'aide de la formule. Remarquons que les valeurs de volume calculées dans la troisième colonne du tableau de la page 254 ont été obtenues à partir des valeurs de la hauteur mesurée en cm sur le papier millimétré qui apparaissent dans la première colonne. On aurait aussi bien pu effectuer le même calcul à partir des hauteurs calculées qui figurent dans la troisième colonne du tableau de la page 251. Les écarts entre les valeurs calculées du volume et les valeurs du volume versé sont de l'ordre de 5 % quelle que soit la façon de calculer.

Comparaison sur les graphiques

Dans le graphique de la figure 7, les hauteurs en cm sont placées en abscisses, les volumes en ml (ou cm^3) sont portés en ordonnées. La première graduation de l'axe des y représente 10 ml.

Voici différentes procédures de comparaison envisageables.

- On représente la courbe théorique au moyen d'un logiciel de dessin et on place les points expérimentaux sur le même graphique.
- Pour éviter du travail inutile, on peut imprimer la courbe théorique sur un transparent (en

veillant à respecter l'échelle) et appliquer celui-ci sur le graphique expérimental réalisé auparavant. La figure 7 illustre ce procédé de comparaison. Les courbes théoriques correspondant aux deux cônes les plus faciles à trouver sur le marché se trouvent en annexe aux pages 288 et 289. Notons qu'il y a souvent une légère déformation à l'impression, mais on peut éviter cet inconvénient en imprimant ce graphique et le papier millimétré de la page 287 sur la même machine.

– On peut enfin utiliser du papier millimétré pour représenter sur le même graphique les valeurs calculées du volume et les valeurs du volume versé.

hauteur mesurée en cm	volume versé en ml	volume calculé en ml
0	0	0
4	5	4,48
5	10	8,75
5,5	15	11,65
6,3	20	17,50
6,9	25	23
7,3	30	27,23
7,6	35	30,73
8	40	35,84
8,5	45	42,99
8,85	50	48,52
9,4	60	58,14
9,8	70	65,88
10,3	80	76,49
10,75	90	86,96
11,15	100	97,03
11,65	120	110,68
12,35	140	131,86
12,95	160	152,02
13,5	180	172,23
14	200	192,08
14,4	220	209,02

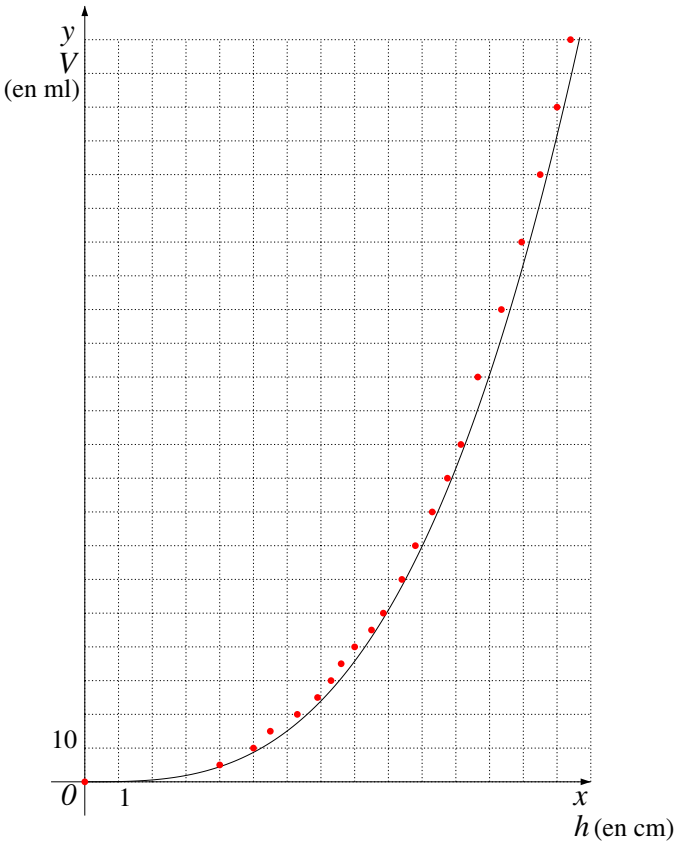


Fig. 7

Très souvent, on a constaté que les valeurs calculées du volume sont un peu en-dessous des valeurs du volume versé.

Échos des classes

En observant le tableau, les élèves sont perturbés par les écarts entre les valeurs calculées du volume et les valeurs du volume versé, qui leur paraissent importants lorsque les volumes sont exprimés en ml. Le même tableau où les volumes sont exprimés en cl ne produit pas la même impression. C'est pourquoi il faut arriver à la comparaison des graphiques qui permet de relativiser ces écarts. Les graphiques montrent plus clairement que les valeurs calculées du volume sont proches des volumes versés.

Prolongement possible

Ce travail peut être complété par un travail sur les unités et les changements de repère. Les valeurs du volume de liquide versé dans le cône étant des multiples de 5 ml, et même de 10 ml à partir de 50 ml, il est assez naturel de graduer l'axe des y en prenant 10 ml comme repère comme cela a été fait sur le graphique de la figure 7. On pourrait toutefois décider d'exprimer le volume en cl, de sorte que la première graduation sur l'axe Oy corresponde à la valeur 1 puisque 10 ml = 1 cl. Le graphique de la fonction du modèle théorique reste le même mais son expression analytique change et devient $V = 0{,}007\,h^3$ puisque la valeur du volume en cl est 10 fois plus petite que sa valeur en ml.

1.3 Et le cône à moitié rempli ?

Comment s'y prendre ?

On revient à la question posée à la section 1.1 et on se propose d'y apporter, non plus une réponse empirique, mais une réponse à partir du modèle mathématique.

> Jusqu'à quelle hauteur faut-il verser du liquide dans un cône placé sur sa pointe pour le remplir à la moitié de son volume ?
>
> Exprimer le résultat par rapport à la hauteur du cône.
>
> Ce résultat dépend-il de la forme du cône ?

Les élèves seront sans doute tentés d'apporter d'abord une réponse pour le cône sur lequel ils viennent de travailler. À partir de la formule théorique $V = 0{,}07\,h^3$, ils pourront calculer que le volume total V_T du cône, d'une hauteur de 15,49 cm, est de $V_T = 260{,}17$ cm^3. Avec la même formule, ils calculent que la hauteur $H_{\frac{1}{2}}$ qui correspond au volume $\frac{V_T}{2} = 130{,}08$ cm^3 vaut 12,29 cm.

Le rapport $\dfrac{H_{\frac{1}{2}}}{H_T} = \dfrac{12{,}29}{15{,}49} \simeq 0{,}79$ nous indique que la hauteur du liquide dans le cône rempli à la moitié de son volume atteint presque 80 % de la hauteur totale. Ce résultat est encore plus surprenant que les observations empiriques de la section 1.1. La différence s'explique par le fait que les verres ne sont pas des « vrais » cônes : on a constaté que c'est justement dans la pointe que la hauteur augmente le plus en fonction du volume. Le modèle théorique fournit une réponse pour un cône idéal qui n'existe pas dans la réalité.

Pour comprendre la signification de ce facteur 0,79, on peut utiliser dans un premier temps l'expression de la fonction $V(h) = 0{,}07\,h^3$, correspondant au cône dont l'angle entre l'axe et une génératrice est de 14° puisque $0,07 = \dfrac{1}{3}\pi\tan^2(14°)$, la hauteur étant exprimée en cm et le volume en ml. Le raisonnement qui suit est en effet plus facile à comprendre pour les élèves s'il se réfère au cône particulier sur lequel ils ont travaillé.

Pour un cône de cette forme et de hauteur H_T, le volume total est $V_T = 0{,}07{H_T}^3$. Pour ce même cône rempli à la moitié de sa contenance, on a $\dfrac{V_T}{2} = 0{,}07{H_{\frac{1}{2}}}^3$. En remplaçant la valeur de V_T de la première égalité dans la deuxième, on obtient

$$\frac{1}{2}0{,}07{H_T}^3 = 0{,}07{H_{\frac{1}{2}}}^3.$$

En simplifiant les deux membres par 0,07 et en prenant la racine cubique des deux membres, on trouve successivement $\frac{1}{2}\,{H_T}^3 = {H_{\frac{1}{2}}}^3$ et $H_{\frac{1}{2}} = \frac{H_T}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0{,}79\,H_T$.

Le coefficient 0,79 prend à présent tout son sens, on voit qu'il correspond à $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Cette façon de faire le calcul est immédiatement généralisable à n'importe quel cône car seul le coefficient 0,07 dépend de la forme du cône et celui-ci se simplifie lors des calculs.

Ainsi, pour un cône d'angle α, on aura $V_T = \lambda {H_T}^3$ où le coefficient $\lambda = \frac{1}{3}\pi \tan^2 \alpha$. Rappelons que ce que nous appelons l'angle du cône est l'angle formé par l'axe du cône et une de ses génératrices.

Pour ce même cône rempli à la moitié de sa contenance, on aura $\frac{V_T}{2} = \lambda {H_{\frac{1}{2}}}^3$.

En remplaçant la valeur de V_T de la première égalité dans la deuxième, en simplifiant les deux membres par λ et en prenant la racine cubique des deux membres, on trouve également

$$H_{\frac{1}{2}} = \frac{H_T}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0{,}79\,H_T,$$

ce qui établit que le résultat ne dépend pas de la forme du cône. On peut encore « lire » ce résultat, ainsi que celui du prolongement ci-après, sur le graphique de la figure 8.

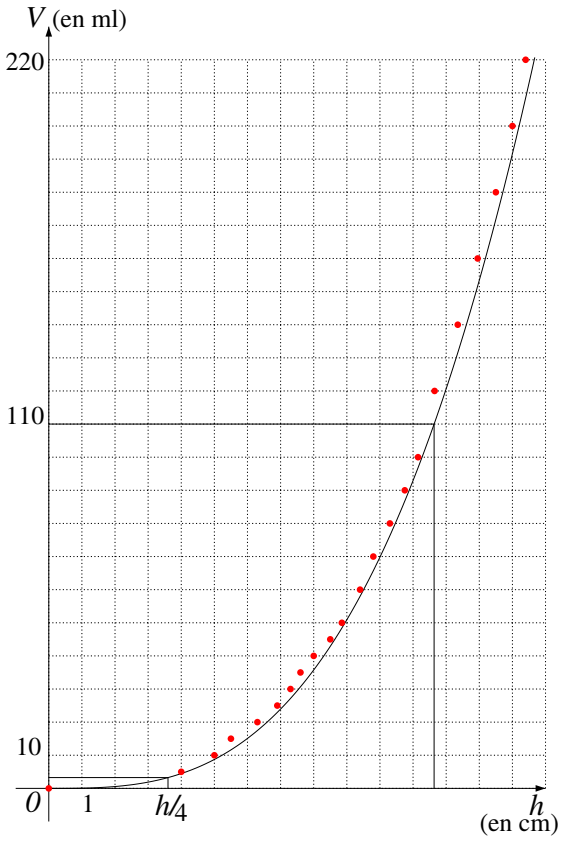


Fig. 8

Échos des classes

Les élèves commencent par fournir une réponse expérimentale. Ils regardent dans leur tableau et disent que « cela fait à peu près 75 % ». Il faut insister pour obtenir une réponse théorique qui montre que la réponse est indépendante de la forme du cône. Ici encore, c'est la mise en place des notations appropriées qui cause la difficulté.

Le passage par la fonction particulière $V(h) = 0{,}07\,h^3$ se révèle absolument indispensable pour faire comprendre le raisonnement aux élèves. Dès qu'ils le comprennent et qu'ils voient que le coefficient 0,07 se simplifie, ils comprennent aussi que pour un cône d'une autre forme, tout se passerait de la même façon, avec un autre coefficient. Par contre, si on essaie de raisonner d'emblée sur la forme générale $V(h) = \lambda h^3$, les élèves hésitent sur la façon d'exprimer $\frac{V_T}{2}$. Certains proposent par exemple $\frac{V_T}{2} = \frac{\lambda}{2}{H_{\frac{1}{2}}}^3$. Le passage au paramètre λ provoque une perte de sens sur la signification du coefficient. Cette généralisation où l'on

utilise le paramètre λ à la place du coefficient propre au cône n'est pas à faire avec tous les élèves.

Par contre, une discussion montre que les élèves sont bien conscients que la valeur théorique de 79 % correspondant à $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ fournit la réponse au problème pour un cône parfait qui n'existe que dans la tête du mathématicien, et qu'elle n'est pas meilleure qu'une réponse expérimentale pour un verre conique par exemple. Ils perçoivent bien que la réponse théorique permet d'éviter de réaliser l'expérience et qu'elle fournit une réponse d'autant plus appropriée que l'objet étudié est proche d'un cône parfait.

Prolongement possible

Pour vérifier si l'utilisation du modèle théorique qui vient d'être faite a été bien comprise par l'ensemble des élèves, on peut poser cette question.

> Quel est le volume de liquide dans un cône qui a été rempli au quart de sa hauteur ? Donner le résultat en fonction du volume total du cône.

Un raisonnement similaire permet de découvrir que le volume correspondant à un quart de la hauteur est $\frac{1}{64}$ du volume total (figure 8).

2 Volume du cône et fonctions réciproques

De quoi s'agit-il ?

Graduer expérimentalement un récipient conique et représenter graphiquement les liens fonctionnels entre le volume et la hauteur.

Construire les expressions analytiques des fonctions liant le volume et la hauteur d'un cône.

Confronter les calculs théoriques aux résultats expérimentaux.

Enjeux

Découvrir ou réinvestir les fonctions cubiques et racines cubiques comme fonctions réciproques.

Concevoir deux fonctions réciproques comme deux modèles de description d'un même phénomène.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité, interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Compétences à développer

S'approprier différents modèles fonctionnels.

Reconnaître et établir des liens de réciprocité entre des fonctions.

Modéliser une situation par une transformée d'une fonction de référence pour en tirer des informations.

Stratégies transversales

Utiliser une calculatrice graphique et/ou un outil informatique.

Reconnaître les fonctions de référence dans divers contextes.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes pour la phase expérimentale.

Une période de 50 minutes pour la représentation graphique et l'élaboration du modèle théorique.

Une demi-heure pour la comparaison et l'exploitation des résultats.

Matériel pour la classe

Les annexes et les fiches des pages 287 à 290 et 295 à 298, à choisir en fonction du ou des cône(s) utilisé(s).

Matériel par groupe d'élèves

Le même matériel qu'à la section 1, page 246.

Prérequis

La formule du volume du cône.

2.1 Expérimentation et graphiques

Comment s'y prendre ?

L'activité commence par la section 1.1 et le début de la section 1.2 de ce même chapitre. L'objectif étant ici de rencontrer des fonctions réciproques et de comparer leurs graphiques, la consigne est exprimée différemment, de manière à laisser aux élèves la possibilité de représenter le volume en fonction de la hauteur ou la hauteur en fonction du volume.

> Graduer un cône en marquant les niveaux atteints par 5 ml, 10 ml, 15 ml, ... et noter dans un tableau les valeurs des volumes versés et des hauteurs atteintes par le liquide dans le récipient.
>
> Représenter graphiquement ces résultats.

Toute la phase expérimentale se déroule comme précédemment décrit au point 1.2 de ce chapitre. Dès que les élèves ont obtenu le tableau des correspondances entre les volumes et les hauteurs, la consigne ci-dessus permet de réaliser deux représentations graphiques différentes.

Vu la façon dont l'expérience se déroule et la manière dont le tableau aura été rempli, certains élèves penseront que le volume est fonction de la hauteur et produiront le graphique de la figure 9 alors que d'autres seront tentés de représenter la hauteur atteinte par le liquide en fonction du volume versé comme à la figure 10. C'est la production de deux graphiques différents pour un même phénomène qui fait tout l'intérêt de cette approche.

On demande aux élèves de travailler sur papier millimétré en prenant comme unité de hauteur le cm et comme unité de volume le cl ($= 10$ cm^3) pour éviter une disproportion des longueurs des axes difficile à gérer sur le papier. On leur recommande aussi de placer la feuille dans le sens adapté au graphique qu'ils envisagent de produire.

volume versé en ml	hauteur mesurée en cm
0	0
5	4
10	5
15	5,5
20	6,3
25	6,9
30	7,3
35	7,6
40	8
45	8,5
50	8,85
60	9,4
70	9,8
80	10,3
90	10,75
100	11,15
120	11,65
140	12,35
160	12,95
180	13,5
200	14
220	14,4

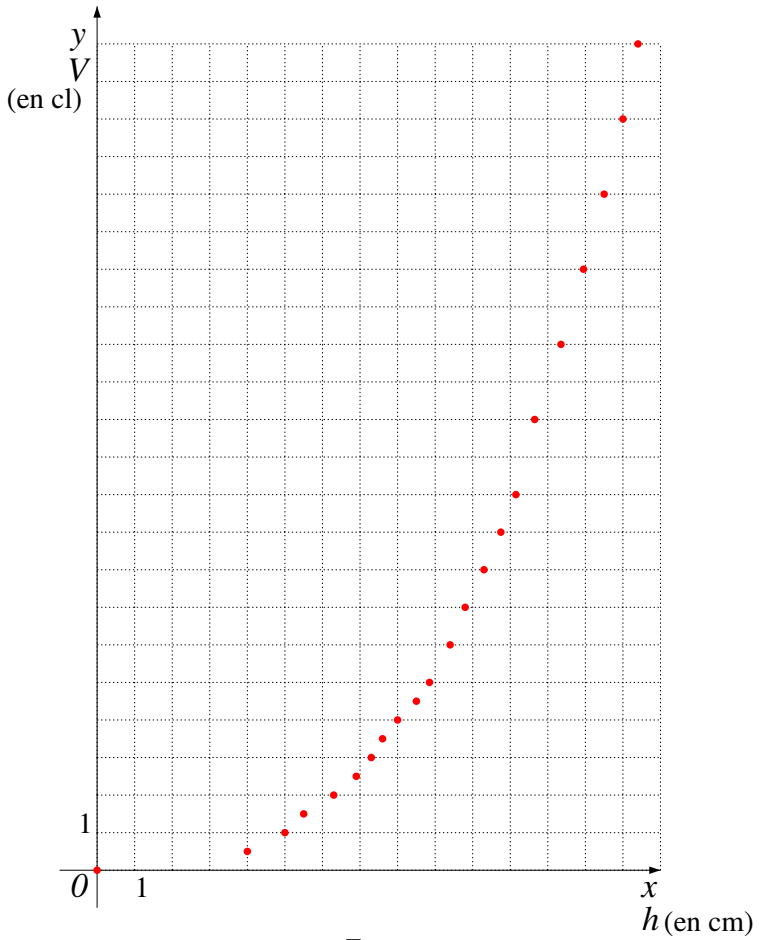


Fig. 9

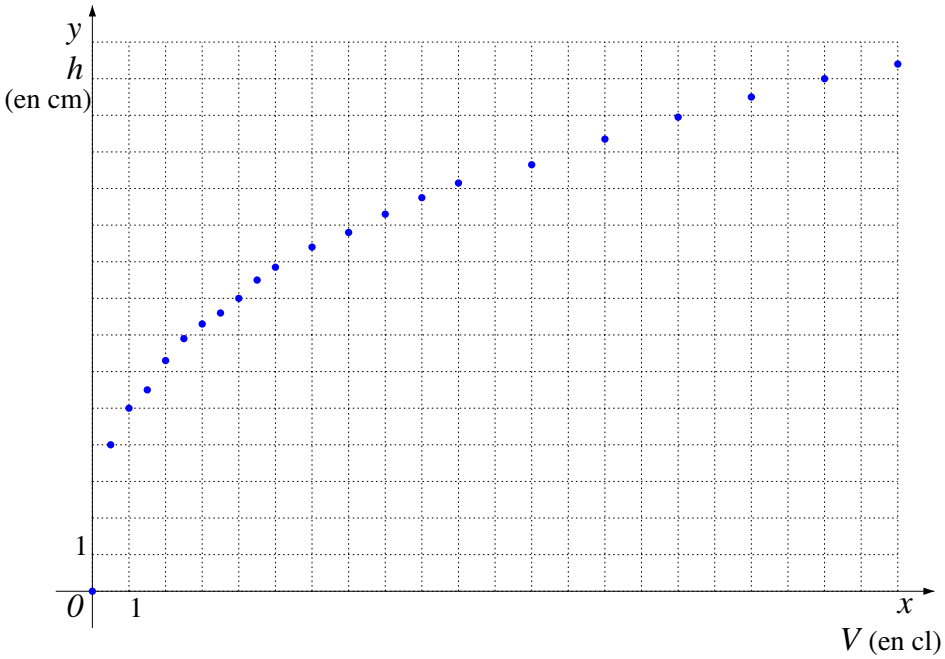


Fig. 10

Les deux graphiques présentent des ressemblances – à une symétrie près – dans la manière dont les points expérimentaux se disposent.

Cette observation donne du sens à l'idée de placer les deux représentations sur un même graphique en omettant les unités (même si les dimensions de la feuille de papier millimétré ne permettent pas de les placer tous). Le 1 de l'axe Ox représente 1 cl pour un graphique, 1 cm pour l'autre. On obtient ainsi la figure 11 qui montre que les points expérimentaux des deux représentations se placent symétriquement par rapport à la bissectrice des axes du repère, ce qui s'explique facilement par le fait que pour passer d'une représentation à l'autre, on permute l'abscisse et l'ordonnée de chaque point.

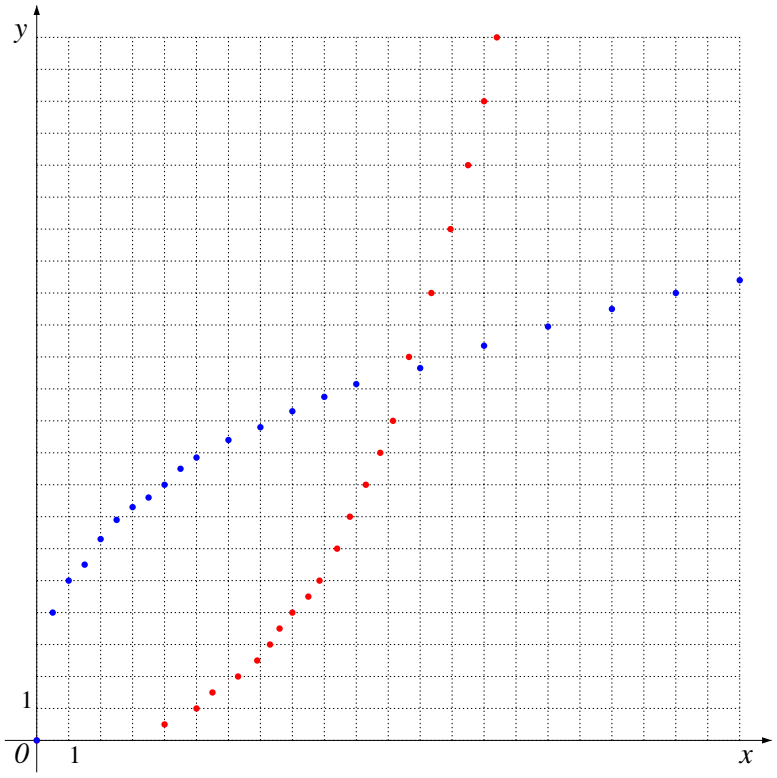


Fig. 11

Il reste à comprendre quelles sont les deux fonctions qui modélisent les deux courbes esquissées par les points expérimentaux et comment on peut déduire l'une de l'autre. Les consignes qui suivent vont dans ce sens.

2.2 Modélisation et comparaison

Comment s'y prendre ?

L'activité se poursuit avec la consigne suivante.

> Déterminer les expressions analytiques des fonctions qui lient la hauteur et le volume du liquide versé.
>
> Comparer les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

Comme à la section 1.2, le modèle théorique est élaboré à partir de la formule du cône $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Dans notre exemple, on a $r = \dfrac{4}{15{,}49}h$. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4}{15{,}49}h\right)^2 h \simeq 0{,}07\, h^3$$

si la hauteur est exprimée en cm et le volume en cm^3, c'est-à-dire en ml. La valeur du volume en cl est dix fois plus petite et on a donc $V = 0{,}007\, h^3$. Cette relation qui exprime le lien entre

V et h donne lieu à deux fonctions.

Dans l'une, V en fonction de h. Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y = 0{,}007\,x^3$ (fonction f_1).

Dans l'autre, on souhaite exprimer h en fonction de V. À partir de $V = 0{,}007\,h^3$, on écrit alors $h^3 = \dfrac{1}{0{,}007}\,V$ et puis $h = \sqrt[3]{\dfrac{1}{0{,}007}\,V}$. Finalement, avec les notations mathématiques usuelles, on a $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{0{,}007}\,x}$ ou encore $y = 5{,}23\sqrt[3]{x}$ (fonction f_2).

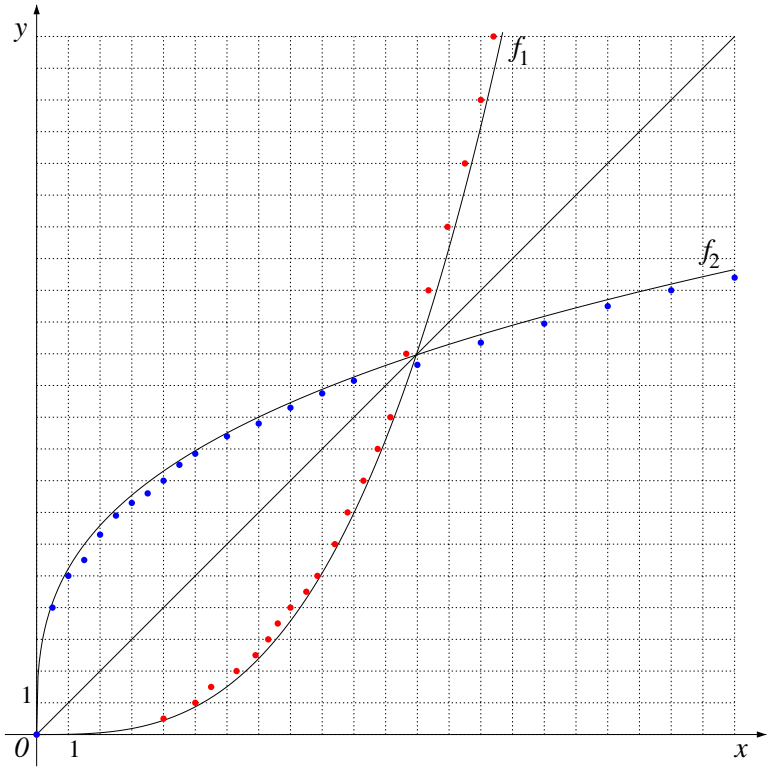


Fig. 12

À ce stade, on se dégage des unités de l'expérimentation, les deux fonctions sont représentées dans un repère orthonormé, on sait qu'elles expriment le lien entre le volume (en cl) du liquide versé dans le cône et la hauteur atteinte par le liquide (en cm). L'unité sur chacun des axes sera interprétée correctement selon le contexte.

La comparaison peut s'effectuer en représentant les deux fonctions sur un même graphique (en axes orthonormés) au moyen d'un logiciel de dessin et en y reportant les points expérimentaux. On peut aussi imprimer les fonctions théoriques (en annexe page 288 ou 289 pour les deux cônes envisagés) sur un transparent qu'on dépose, en le retournant si nécessaire, sur les graphiques reprenant les points expérimentaux. Ce procédé met une fois de plus en évidence que c'est la même courbe, à une symétrie près, qui s'adapte aux deux séries de points expérimentaux.

Échos des classes Pour tout ce qui concerne l'expérimentation et l'élaboration du modèle théorique du volume en fonction de la hauteur, le lecteur se reportera aux *Échos des classes* de la section 1.

Au moment de placer les points expérimentaux sur un graphique, certains élèves pensent qu'ils sont obligés de placer le volume en abscisse. Cela correspond à ce qu'ils ont l'habitude de faire au cours de pratique de laboratoire en physique. Il faut expliquer qu'on peut aussi considérer que le volume varie en fonction de la hauteur et que les deux façons de représenter le lien fonctionnel entre le volume et la hauteur sont licites.

L'élaboration de l'expression analytique de $V(h)$ est difficile, mais une fois qu'elle est obtenue, le passage à la fonction réciproque $h(V)$ est effectué sans peine par tous les élèves.

2.3 Et le cône à moitié rempli ?

Comment s'y prendre ?

Comme dans l'activité de la section 1, on se propose d'apporter une réponse théorique à la question du cône rempli à la moitié de sa contenance.

> Jusqu'à quelle hauteur faut-il verser du liquide dans un cône placé sur sa pointe pour le remplir à la moitié de son volume ?
>
> Exprimer le résultat par rapport à la hauteur du cône.
>
> Ce résultat dépend-il de la forme du cône ?

Cette fois, les élèves disposent de l'expression de la hauteur en fonction du volume pour le cône de l'expérience.

Celle-ci donne immédiatement pour la hauteur du cône complètement rempli :

$$H_T = 5{,}23\sqrt[3]{V_T},$$

et pour la hauteur du liquide dans le cône rempli à la moitié de sa contenance :

$$H_{\frac{1}{2}} = 5{,}23\sqrt[3]{\frac{V_T}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,5{,}23\sqrt[3]{V_T} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}H_T.$$

Le coefficient 5,23 dépend de la forme du cône, mais pour un autre cône, le même raisonnement pourra être répété en remplaçant 5,23 par le coefficient adéquat. Le calcul montre bien que le résultat ne dépend pas de la valeur de ce coefficient.

Prolongement possible

Voir le prolongement de la page 257.

Commentaire

Cette activité est réellement éclairante pour la compréhension de ce que sont des fonctions réciproques. Elles apparaissent comme deux représentations d'un lien fonctionnel entre deux quantités qui varient l'une en fonction de l'autre. C'est le choix de ce qu'on prend comme variable indépendante qui fait que l'on obtient l'une ou l'autre fonction. Ce choix détermine ensuite ce que l'on place en abscisse et en ordonnée. Le fait que les deux graphiques soient symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ prend ainsi tout son sens, ainsi que l'échange des rôles de x et y pour passer d'une fonction à l'autre.

Chapitre 9

Problèmes d'optimisation

Préambule

Ce chapitre présente, en introduction à l'optimisation, une suite de quatre problèmes de difficultés croissantes, destinés à des élèves de la fin du secondaire. Dans chacun des cas, une manipulation de courte durée vise à améliorer la perception des enjeux d'un tel type de problème. À chaque fois, le contexte est géométrique. Il s'agit de construire un solide de volume maximum à partir d'une feuille de papier, en tenant compte de certaines contraintes. Chacun de ces problèmes a été choisi pour faire apparaître une difficulté spécifique, en faire naître une réflexion et susciter une discussion. Dans une séquence sur l'optimisation, ces problèmes trouvent leur place entre d'autres exercices issus de contextes complètement différents.

Dans les trois premiers, accessibles aux élèves de toutes les sections, il s'agit de construire une boîte parallélépipédique de volume maximum à partir d'un développement particulier découpé dans une feuille de papier de format A4. Le premier, très classique, ne présente aucune difficulté, ni dans le choix de la variable, ni dans la construction de la fonction. Nous présentons ici la possibilité de l'utiliser comme introduction à la dérivée. Son objectif essentiel est d'aider l'élève à comprendre l'essence de l'optimisation et ensuite, à percevoir l'efficacité de l'outil dérivée. Le deuxième problème présente une première difficulté car deux variables s'introduisent naturellement au départ, tout en étant liées par une contrainte imposée par la construction. Quant au troisième, il montre que le recours à la dérivée ne fournit pas toujours la solution attendue et attire l'attention sur un autre type de preuve.

Le dernier problème est plutôt destiné aux élèves des sections « mathématiques pour scientifiques ». Il a pour objet la construction d'un cône de volume maximum à partir d'un disque en papier dont on retire un secteur. L'enjeu est ici de faire voir aux élèves à quel point un choix judicieux de la variable indépendante peut simplifier les calculs.

Différents aspects de la modélisation sont ainsi abordés progressivement : expérimentation, interprétation des résultats, choix des variables, expression des contraintes, construction d'une fonction qui modélise la grandeur à optimiser. La valeur optimale est recherchée à l'aide de tableaux de valeurs, de graphiques, ou encore de l'étude de la dérivée de la fonction dont on recherche un extremum.

Tout au long des activités qui suivent, des réflexions sont portées sur deux facteurs qui nous ont semblé influer particulièrement sur l'activité des élèves, notamment au moment du choix de la variable. Tout d'abord, la formulation de la question ou de la consigne, peut susciter des

entrées assez différentes dans un même problème. Ensuite, l'ordre dans lequel les exercices sont proposés peut conduire les élèves à réinvestir une méthode qui a donné de bons résultats dans un problème précédent, mais qui n'est pas forcément la plus adaptée au problème concerné.

1 La boîte sans couvercle

De quoi s'agit-il ?

Construire une boîte de volume maximum en respectant des contraintes.

Enjeux

Comprendre les enjeux d'un problème d'optimisation.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Percevoir l'efficacité de l'outil dérivée dans la résolution d'un problème d'optimisation.

Compétences à développer

Lier les concepts de pente, tangente, taux d'accroissement, croissance et concavité à l'outil dérivée.

Résoudre des problèmes d'optimisation dans des contextes divers.

Stratégies transversales

Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet.

Développer différentes stratégies d'optimisation.

Utiliser l'outil informatique.

Modéliser et résoudre un problème.

Vérifier la plausibilité d'un résultat.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Quelques feuilles A4, éventuellement d'un grammage de 160 g.

Du matériel de dessin et des ciseaux.

Matériel pour la classe

Un ordinateur avec un logiciel de géométrie dynamique, un projecteur et un écran.

Les fiches 10 et 11, des pages 299 et 300.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève reçoit quelques feuilles de papier de format A4. On leur indique les dimensions de la feuille, respectivement 21 cm et 29,7 cm pour la largeur et la longueur, puis on leur donne les consignes suivantes.

> Découper un carré dans chacun des coins de cette feuille pour construire une boîte parallélépipédique sans couvercle et en calculer le volume.
>
> Construire par ce procédé la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Ce problème, très classique, se trouve dans de nombreux manuels, assorti d'un schéma, voire d'un dessin en perspective de la boîte, et bien souvent la longueur du côté du carré découpé est déjà notée x sur la figure. La question est du type « Quelle est la longueur du côté du carré qu'il faut découper pour obtenir la boîte de volume maximal ? ». Posé sous cette forme, le problème élude complètement la phase de modélisation, de nombreux élèves ne voient pas comment la boîte est construite, n'imaginent pas la diversité des boîtes qu'on peut obtenir et n'ont pas idée de l'allure de la fonction qui donne le volume. Pour ces élèves, la question de trouver la boîte de volume maximal est vide de sens.

Le recours à la manipulation aide de nombreux élèves à se représenter la situation. La consigne ne précise pas que les carrés découpés doivent être identiques. C'est la manipulation qui montre que c'est nécessaire pour obtenir une boîte parallélépipédique.

Les élèves s'aperçoivent de la diversité des boîtes obtenues en comparant leurs constructions et constatent que les volumes calculés sont différents. Pour calculer le volume d'une boîte, il faut, soit mesurer, soit calculer ses trois dimensions. En construisant la boîte, les élèves remarquent assez facilement que la longueur du côté du carré découpé correspond à la hauteur de la boîte et que la largeur et la longueur de cette boîte valent respectivement 21 cm et 29,7 cm diminués du double de cette hauteur.

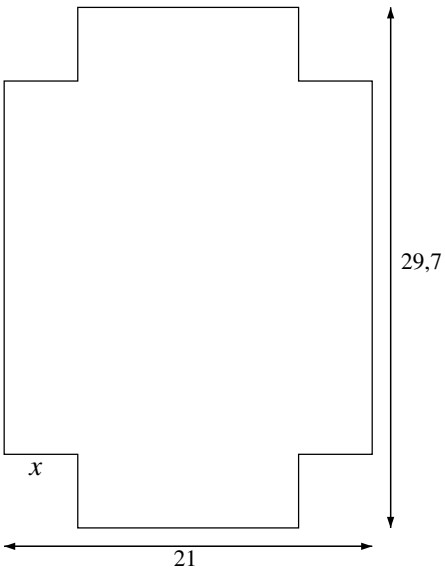


Fig. 1

La longueur du côté du carré découpé s'impose assez naturellement comme la variable, notée x, en fonction de laquelle on exprimera les dimensions de la boîte et son volume (figure 1).

Nous aurons alors les relations $h = x$, $\ell = 21 - 2x$, $L = 29{,}7 - 2x$ qui fournissent respectivement les expressions de la hauteur, de la largeur et de la longueur ; le volume V sera obtenu par la formule $V = h \cdot \ell \cdot L$.

On peut dès lors ébaucher un tableau reprenant les dimensions de quelques boîtes déjà construites et la valeur de leur volume.

côté du carré en cm x	hauteur en cm h	largeur en cm ℓ	longueur en cm L	volume en cm^3 V
2	2	17	25,7	873,8
3	3	15	23,7	1066,5
5	5	11	19,7	1083,5

Au vu des premiers résultats, on peut avoir l'impression que le volume augmente sans cesse quand x augmente. Cette conception est fortement présente chez les élèves et reste souvent très prégnante, ce qui entrave généralement une vraie compréhension du principe de l'optimisation au profit de l'application de techniques calculatoires. Cette impression est mise en défaut dès qu'on regarde ce qu'il advient lorsqu'on découpe un carré beaucoup plus grand. Par exemple, si $x = 9$, on a $h = 9$, $\ell = 3$, $L = 11{,}7$ et on obtient $V = 315{,}9$.

Pour trouver la boîte de volume maximum, les élèves pourraient imaginer faire un tableau plus complet. On peut leur donner la fiche 10 à ce moment pour les aider à organiser et éventuellement représenter leurs résultats. Le tableau ci-dessous a été obtenu en faisant varier systématiquement x de 1 cm.

côté du carré en cm x	hauteur en cm $h = x$	largeur en cm $\ell = 21 - 2x$	longueur en cm $L = 29{,}7 - 2x$	volume en cm^3 $V = h \cdot \ell \cdot L$
1	1	19	27,7	526,3
2	2	17	25,7	873,8
3	3	15	23,7	1066,5
4	4	13	21,7	1128,4
5	5	11	19,7	1083,5
6	6	9	17,7	955,8
7	7	7	15,7	769,3
8	8	5	13,7	548
9	9	3	11,7	315,9
10	10	1	9,7	97

À la lecture de leur tableau, les élèves pourraient être tentés de conclure que la solution consiste à découper un carré de 4 cm de côté.

Si des élèves cherchent à regarder de plus près ce qui se passe entre $x = 3$ et $x = 5$, l'usage d'un tableur permet d'examiner sans trop de peine les valeurs du volume pour x variant entre 3 et 5 par pas de 1 mm. Là encore, c'est pour $x = 4$ cm qu'on obtient le plus grand volume.

Certains élèves, peu enclins à s'investir longuement dans une méthode par approximations successives, pourraient se tourner vers une représentation graphique des résultats (figure 2). Vu les valeurs prises par le volume, il convient d'effectuer un changement d'unité sur l'axe vertical. Cette représentation graphique fait apparaître l'esquisse d'une fonction $V(x)$ dont le maximum est l'optimum demandé, ce qui engage la classe dans une réflexion plus théorique. On recherche alors l'expression analytique de cette fonction en remplaçant les expressions de h, ℓ et L dans la formule du volume.

On obtient

$$V(x) = x(21 - 2x)(29{,}7 - 2x)$$

dont le graphique réalisé avec un logiciel de dessin est présenté à la figure 3.

Sur base de ce graphique, on interroge les élèves sur les limites de variation de la variable. Pour le problème qui nous occupe, seules les valeurs comprises entre 0 et 10,5 cm sont prises en compte.

Notons que la lecture du graphique semble encore donner raison aux élèves qui pensaient que la solution consistait à découper un carré de 4 cm de côté, solution très satisfaisante en pratique.

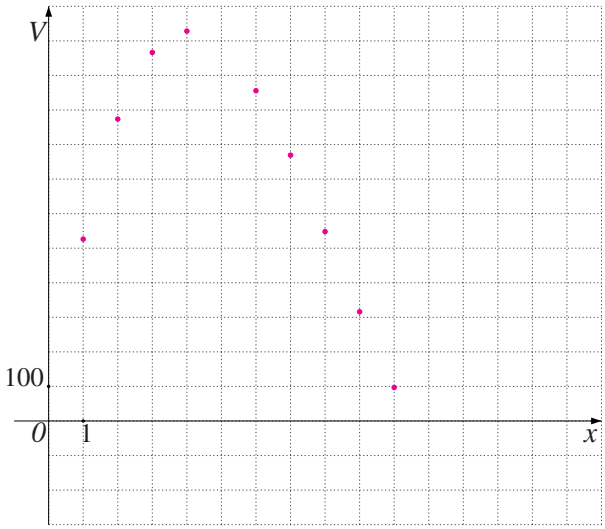


Fig. 2

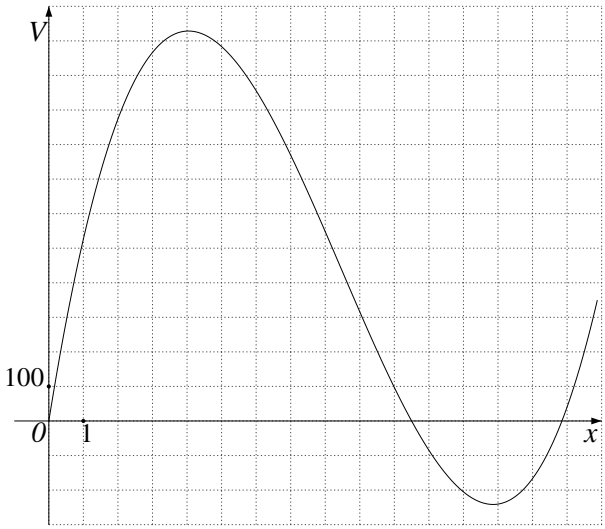


Fig. 3

Cependant, le changement d'unités nécessaire pour percevoir globalement la fonction masque les différences d'ordonnées près du point d'abscisse 4. Le professeur invite alors les élèves à regarder de plus près ce qui se passe en $x = 4$ grâce à un zoom de la fonction dans un voisinage de cette valeur (figure 4).

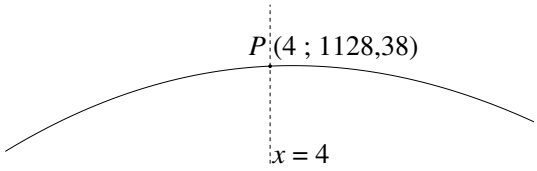


Fig. 4

Même si les différences d'ordonnées entre les points de la fonction au voisinage de $x = 4$ sont peu perceptibles, l'allure de la courbe suggère que la valeur maximale est atteinte un peu à droite de $x = 4$.

Le logiciel de géométrie dynamique permet de déplacer le point P vers la droite tout en affichant ses coordonnées. L'enseignant propose de tracer en plus la tangente en P et d'afficher son équation (figures 5 et 6). La tangente, en un point d'une courbe, est introduite comme la droite passant par ce point et qui, localement, épouse au mieux la courbe.

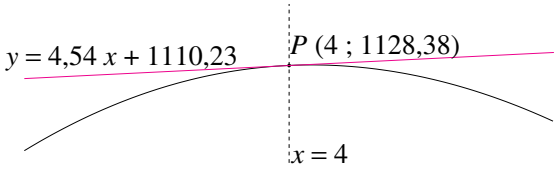


Fig. 5

On observe que la tangente en $x = 4$ est une droite croissante d'équation $y = 4{,}54\,x + 1110{,}23$ (ces calculs, ainsi que les suivants, sont effectués en arrondissant à deux décimales).

Le fait que la tangente est croissante indique que le volume n'a pas fini d'augmenter quand on est en $x = 4$. On déplace lentement le point P vers la droite en observant les valeurs de la fonction qui s'affichent en même temps. On comprend rapidement que la valeur maximum est atteinte quand la tangente est horizontale (figure 6). Avec une précision de deux décimales, c'est au point de coordonnées (4,04 ; 1128,49) que cela se produit[1]. C'est donc en découpant un carré de 4,04 cm de côté qu'on obtiendrait la boîte de volume maximum.

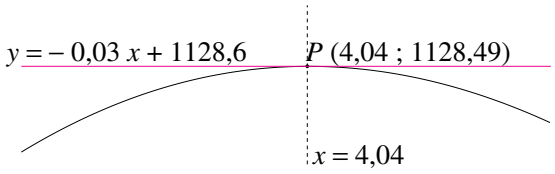


Fig. 6

Si on revient au graphique global, on perçoit très nettement la variation de la pente de la tangente entre $x = 4$ et $x = 4{,}04$ alors que la différence entre les ordonnées de ces deux points est imperceptible (figure 7).

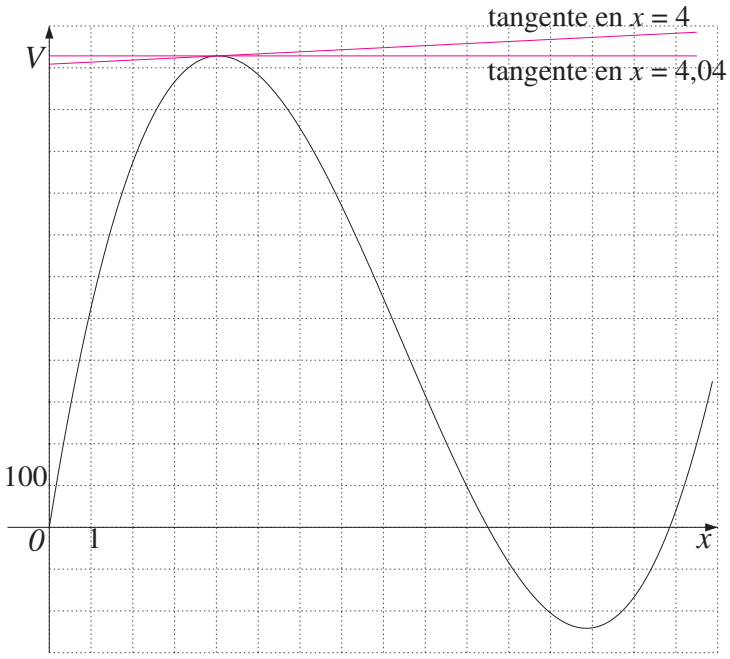


Fig. 7

Les observations sur les tangentes dans ce dernier graphique donnent à l'enseignant un argument vraiment convaincant pour motiver l'intérêt d'étudier la pente de la tangente au graphique d'une fonction en chacun de ses points. On va créer à partir de cette pente un nouvel outil d'analyse de la croissance et de la décroissance d'une fonction, et donc un outil pour la recherche des extrema.

Si les élèves ne connaissent pas encore la dérivée, on reviendra au problème de la boîte sans

[1]Remarquons que la pente en ce point n'est pas exactement nulle.

couvercle plus tard, lorsque les élèves disposeront du concept et des formules de dérivation. Ils pourront alors constater la puissance de l'outil dérivée pour trouver la solution théorique au problème.

Si les élèves connaissent déjà la notion de dérivée, le passage par l'observation du graphique et de la pente de la tangente devrait faire le lien et renforcer la conception du nombre dérivé en un point comme la pente de la tangente à la courbe en ce point.

La fonction $V(x)$ est une cubique, dont l'expression analytique est

$$V(x) = 4\,x^3 - 101{,}4\,x^2 + 623{,}7\,x.$$

Sa dérivée

$$V'(x) = 12\,x^2 - 202{,}8\,x + 623{,}7$$

s'annule en $x = 12{,}73$ et $x = 4{,}04$ (valeurs approchées à deux décimales). Il reste à voir que la valeur $x = 4{,}04$ fournit la valeur de x pour laquelle la fonction est maximum et correspond à la solution du problème. La valeur $x = 12{,}73$ par contre, pour laquelle la fonction est minimum, n'a aucun sens dans le cadre du problème qui nous occupe.

La distinction entre minimum et maximum se fait ici par un retour vers les observations concrètes : tableau de valeurs ou graphique obtenu à l'aide d'un logiciel adéquat. D'autres questions peuvent être investiguées à partir du graphique, comme l'interprétation des zéros de la fonction par exemple.

La fiche 11 est distribuée à la fin de l'activité pour garder une trace du travail accompli.

Échos des classes

Certains élèves commencent par découper un carré de 1 cm de côté, notent le volume de la boîte obtenue, puis dans la même feuille découpent un carré de 2 cm de côté et ainsi de suite. Ils s'étonnent de ce que le volume augmente d'abord pour diminuer ensuite. Une élève, persuadée que le volume était fonction croissante de x, voulait découper un carré de 10,5 cm de côté. Il a fallu lui demander de construire la boîte pour qu'elle se rende compte de ce qui se passait.

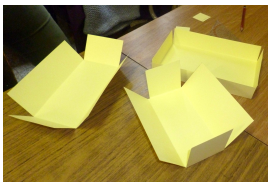


Fig. 8

Les élèves construisent des boîtes variées (figure 8), et notamment des cas presque « limites » en découpant des carrés de 0,2 cm ou de 9 cm de côté (figure 9). Une élève qui avait obtenu une boîte de volume 955,8 cm^3 en découpant des carrés de 6 cm de côté pensait s'être trompée car elle était persuadée que les mesures de volume allaient en augmentant. L'observation de la boîte formée à partir de la feuille dans laquelle on avait découpé les carrés de 9 cm de côté lui a permis de voir que la fonction n'était pas celle qu'elle imaginait.

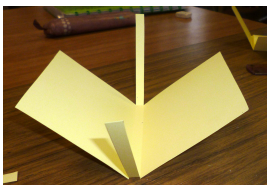


Fig. 9

Dans une classe, lorsque le graphique réalisé avec le logiciel a été présenté, la première observation d'un élève a été de dire que le volume ne pouvait pas être négatif, ce qui a permis de parler du domaine admissible de la fonction. Un élève a alors fait observer que la fonction redevenait positive mais ne correspondait plus à la situation.

En regardant la tangente au point d'abscisse 4, une élève a tout de suite fait la réflexion que « la tangente n'est pas encore horizontale ». Ce qui voulait bien dire pour les élèves que la fonction est croissante en ce point et qu'il y a donc une autre abscisse dont l'image est plus grande.

Le lien entre la pente de la tangente et l'outil dérivée n'était pas clair pour les élèves de cette classe.

Une élève s'est interrogée sur la possibilité d'avoir des problèmes d'optimisation où c'est un minimum qu'il faut chercher et non un maximum.

Dans une autre classe où la dérivée était déjà connue, beaucoup d'élèves ont pensé à écrire une fonction, plusieurs ont voulu utiliser la dérivée mais certains d'entre eux ne savaient plus vraiment comment, ils ont alors recherché dans leur cours la signification exacte de la dérivée.

2 La boîte parallélépipédique

De quoi s'agit-il ?

Construire une boîte parallélépipédique de volume maximum en respectant des contraintes.

Enjeux

Intégrer un système de contraintes dans la modélisation d'un problème d'optimisation

Compétences à développer

Lier les concepts de pente, tangente, taux d'accroissement, croissance et concavité à l'outil dérivée.

Résoudre des problèmes d'optimisation dans des contextes divers.

Stratégies transversales

Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet.

Développer différentes stratégies d'optimisation.

Utiliser l'outil informatique.

Modéliser et résoudre un problème.

Vérifier la plausibilité d'un résultat.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Quelques feuilles carrées de 20 cm de côté, éventuellement d'un grammage de 160 g.

Du matériel de dessin et des ciseaux.

Matériel pour la classe

Un ordinateur avec un logiciel de géométrie dynamique, un projecteur et un écran.

La fiche 12 en annexe page 301.

Comment s'y prendre ?

Chaque groupe d'élèves reçoit quelques feuilles carrées de 20 cm de côté, avec la consigne suivante.

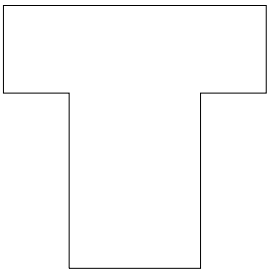


Fig. 10

> En découpant symétriquement un rectangle de chaque côté de la feuille carrée, de façon à obtenir un T, comme le montre la figure 10, il est possible d'obtenir le développement d'une boîte parallélépipédique fermée.
>
> Construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Cette fois, il semble bien qu'il y ait deux longueurs à choisir au moment du découpage, notées x et y sur la figure 11.

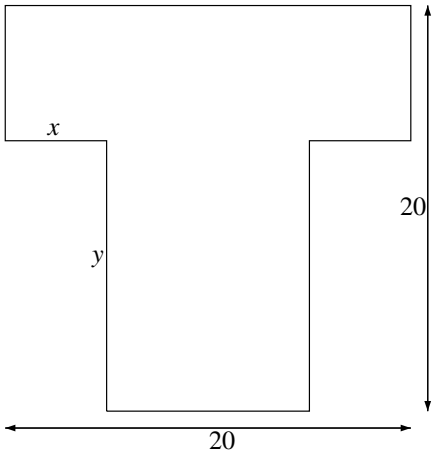


Fig. 11

En fonction de la facilité des élèves à voir dans l'espace, notamment de leur capacité à imaginer une boîte à partir de son développement, une discussion pourrait s'engager d'emblée sur la possibilité de construire une boîte parallélépipédique fermée pour n'importe quelle valeur de x et de y, avec $0 < x < 10$ et $0 < y < 20$.

Certains élèves auront besoin de tester un découpage « au hasard » pour se convaincre qu'il n'est pas toujours possible de refermer la boîte. En effet, toute figure en T n'est pas le développement d'un parallélépipède. La question des valeurs admissibles de x et y se pose alors.

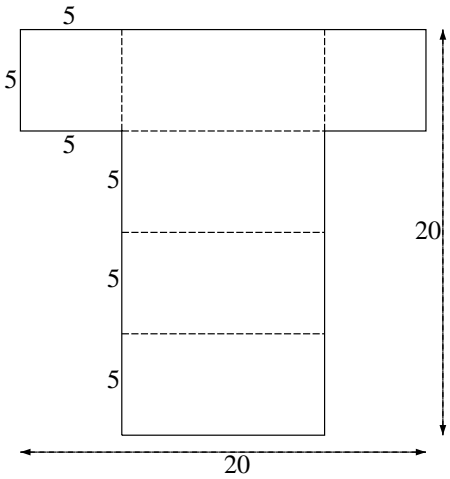


Fig. 12

Une autre stratégie consiste à commencer par un cas particulier, celui de la boîte dont les quatre faces latérales sont identiques, ce qui conduit à une boîte avec deux faces carrées de 5 cm de côté.

Ce développement (figure 12) est celui d'une boîte fermée particulière, mais existe-t-il d'autres boîtes constructibles à partir d'un développement en T dont aucune face ne soit carrée ? Le cas échéant, il n'y a aucune raison de penser que la boîte à faces carrées est celle dont le volume est maximum.

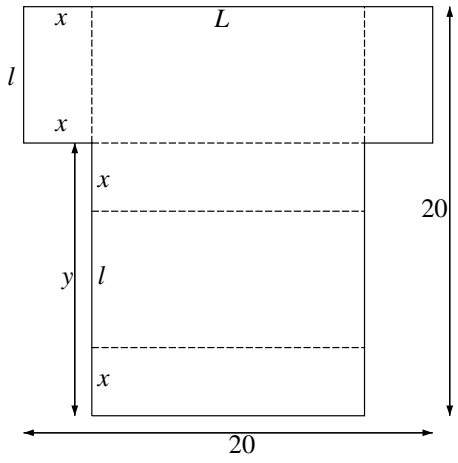


Fig. 13

La manipulation seule n'amène pas nécessairement l'expression des contraintes. Pour aller plus loin, on dessine le développement d'un parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont x, l et L (figure 13). On voit alors clairement que

$$y = 2x + l$$

mais qu'il faut aussi exprimer que le développement est inscrit dans un carré de 20 cm de côté, ce qui donne

$$\begin{cases} 2x + 2l &= 20 \\ 2x + L &= 20. \end{cases}$$

Les dimensions de la boîte sont donc x pour la hauteur, $L = 20 - 2x$ et $l = 10 - x$ pour la longueur et la largeur de la base. On peut compléter par $y = 10 + x$ si on veut connaître les dimensions du rectangle à découper.

La fonction volume, dont le graphique se trouve à la figure 14, est donnée par

$$V(x) = x \cdot l \cdot L = x \cdot (10 - x) \cdot (20 - 2x) = 2x^3 - 40x^2 + 200x.$$

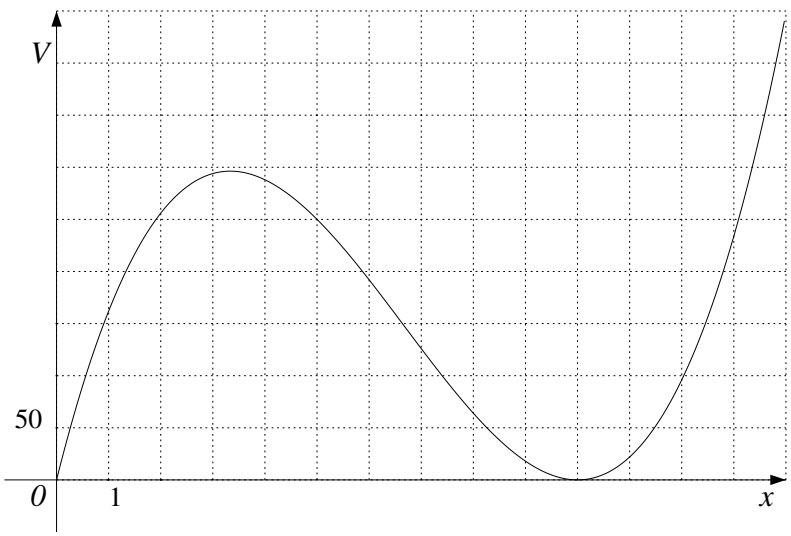


Fig. 14

Il faut garder à l'esprit que, pour le problème traité, x doit être inférieur à 10 et restreindre le graphique en conséquence. Le logiciel de géométrie dynamique permet à nouveau la recherche du maximum par tâtonnements et confirme pour les élèves que c'est au point où la tangente est horizontale que celui-ci est atteint. Le lien entre la pente de la tangente en un point de la courbe et la valeur de la fonction dérivée en ce point doit les inciter à calculer la fonction dérivée et à rechercher les valeurs qui l'annulent. On obtient $V'(x) = 6x^2 - 80x + 200$, $V'(x)$ s'annule pour $x = 10$ ou $x = \frac{10}{3}$.

C'est cette dernière valeur de x qui donne la boîte de volume maximum. Le rectangle à découper est de dimensions $x = \frac{10}{3}$ et $y = \frac{40}{3}$. La solution $x = 10$, $y = 20$ fournit la valeur minimum de la fonction $V(x)$, qui correspond à une boîte de volume nul puisqu'il n'y a plus de papier pour la construire.

Afin de valider l'optimum en $x = \frac{10}{3}$ et $y = \frac{40}{3}$, les élèves pourront soit examiner le graphique, soit étudier le signe de la dérivée première au voisinage de ce point, soit encore calculer $V''(\frac{10}{3})$.

La fiche 12 est distribuée à la fin de l'activité pour garder une trace du travail accompli.

Échos des classes

Pour de nombreux élèves, la phase de modélisation est difficile, surtout l'expression des contraintes qui rendent la boîte constructible.

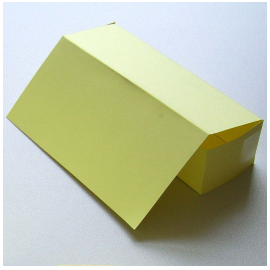


Fig. 15

Lors des essais de construction, les élèves obtiennent des boîtes qui ne se referment pas exactement. Si la longueur y du rectangle découpé est trop grande par rapport à sa largeur x, il y a un excès de papier (figure 15). Dans le cas contraire (figure 16), il y a au moins une face incomplète (figure 17). Il se peut que la longueur y du rectangle découpé soit beaucoup trop petite par rapport au x, à tel point qu'il manque toute une face et une partie d'une autre (figures 18 et 19).

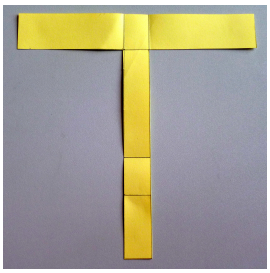


Fig. 16

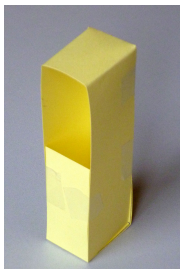


Fig. 17

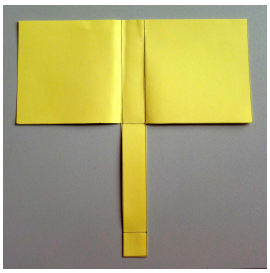


Fig. 18

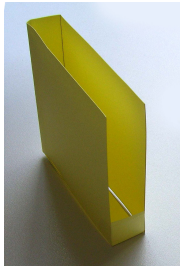


Fig. 19

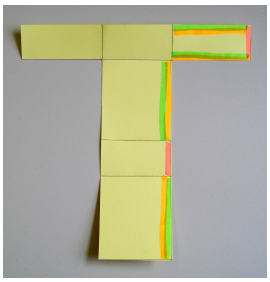


Fig. 20

Les élèves qui se trouvent devant une telle situation sont souvent désemparés. Une manière de débloquer la situation est de présenter le développement d'une boîte découverte par d'autres élèves, et d'y placer des traits de couleurs pour montrer les segments qui devront se raccorder au moment de construire la boîte (figure 20).

Prolongement possible

La question de la constructibilité du développement correspondant à la solution peut être posée aux élèves. Comment construire un segment de $\frac{10}{3}$ cm ? Soit on se satisfait d'une solution approchée : 3,3 cm est une

bonne solution en pratique, soit on rappelle aux élèves que le théorème de Thalès permet de diviser un segment donné en un nombre entier de segments de mêmes longueurs.

On peut aussi demander de résoudre le problème pour un carré de côté quelconque et de construire la solution aux instruments.

3 Le cube

De quoi s'agit-il ?

Construire des cubes de volume maximum en respectant des contraintes.

Enjeux

Montrer que l'outil dérivée n'est pas toujours approprié pour résoudre un problème d'optimisation.

Traduire une situation en langage mathématique sous forme d'équation, d'inéquation, ou d'autres formes de conditions.

Montrer la nécessité d'une preuve pour valider la solution d'un problème d'optimisation.

Rencontrer la preuve par exhaustion.

Compétences à développer

Résoudre des problèmes d'optimisation dans des contextes divers.

Stratégies transversales

Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet.

Développer différentes stratégies d'optimisation.

Modéliser et résoudre un problème.

Vérifier la plausibilité d'un résultat.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Quelques feuilles A4, éventuellement d'un grammage de 160 g.

Du matériel de dessin et des ciseaux.

Les fiches 13 et 14, pages 302 et 303.

Comment s'y prendre ?

Les élèves travaillent en groupe et disposent de quelques feuilles de papier de format A4. On leur donne la consigne suivante.

> Construire dans cette feuille le développement d'un cube de volume maximal.
>
> Les découpes seront parallèles aux bords de la feuille, le développement doit être d'un seul tenant et les faces du cube entières.

Les élèves ne se souviennent sans doute pas de tous les développements du cube, mais, après avoir travaillé sur le développement de la boîte parallélépipédique, ils penseront sans doute au développement du cube en T ou au modèle en croix latine (figure 21).

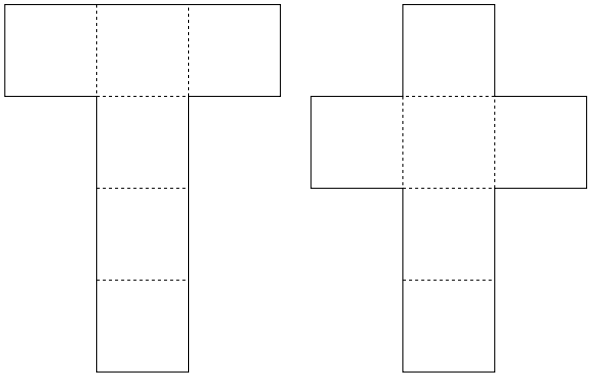


Fig. 21

La première idée qui vient à l'esprit est de diviser 21 cm en trois, de façon à dessiner trois carrés de 7 cm de côté dans la largeur de la feuille, puis de construire un développement (en T ou en croix) après avoir vérifié qu'on pourra bien placer quatre carrés dans la longueur.

Le problème risque fort de désarçonner les élèves. Même ceux qui voudraient se raccrocher à la méthode mise en place précédemment, qui utilise la dérivée, seraient déconcertés. En effet, la variable qui s'impose est la longueur de l'arête du cube, notée x. La fonction à maximiser est celle qui exprime le volume du cube, c'est $V(x) = x^3$. La dérivée $V'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$, la tangente au graphique de la fonction est donc horizontale en $x = 0$, mais il est clair que cette valeur ne fournit pas la solution au problème proposé.

Comme la fonction x^3 est toujours croissante, il s'agit ici de trouver la valeur de x maximale pour laquelle il est possible de construire un développement sur la feuille A4 tout en respectant les consignes.

Il y a donc lieu d'exprimer les contraintes sur cette variable x. En se référant à l'un ou l'autre des développements de la figure 21, on obtient les contraintes suivantes

$$\begin{cases} 3x & \leqslant & 21 \\ 4x & \leqslant & 29{,}7. \end{cases}$$

Ce système admet pour valeur maximale de x la valeur 7 cm. Le volume maximum est ici atteint pour la valeur maximum admissible de x. Il ne s'agit pas d'un point où la dérivée de la fonction s'annule, mais d'un point au « bord » de l'intervalle définissant les valeurs admissibles.

Si tous les élèves en sont convaincus (il s'agit effectivement de la solution optimale), la preuve n'en a pas encore été établie, et il n'est pas certain que des idées surgissent pour élaborer une justification complète, ni même que sa nécessité s'impose aux élèves, à ce stade.

La suite de l'activité a pour double objectif de faire percevoir la nécessité d'une preuve et de donner des pistes pour l'établir.

L'enseignant demande aux élèves de refaire le même exercice à partir d'une feuille A4 coupée en deux dans le sens de la longueur (10,5 cm de large et 29,7 cm de long).

S'ils sont convaincus que des contraintes similaires permettent de trouver la solution quelles que soient les dimensions de la feuille rectangulaire, ils écriront

$$\begin{cases} 3x & \leqslant & 10{,}5 \\ 4x & \leqslant & 29{,}7 \end{cases}$$

qui donne $x = 3{,}5$ cm pour l'arête du cube et 42,875 cm^3 pour le volume.

Si personne ne trouve mieux, l'enseignant exhibe le cube de volume maximal de 5,25 cm d'arête et engage les élèves à chercher comment il l'a obtenu. Si nécessaire, le cube sera développé pour montrer que la solution optimale est obtenue avec un autre développement du cube, celui présenté en figure 22.

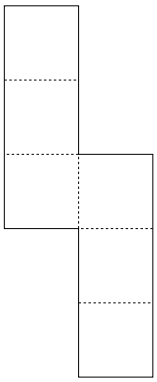


Fig. 22

En effet, dans le cas examiné à présent, les contraintes qui mènent à la solution optimale sont

$$\begin{cases} 2x & \leqslant & 10{,}5 \\ 5x & \leqslant & 29{,}7. \end{cases}$$

La valeur maximale de x qui satisfait le système est 5,25, ce qui donne un volume de 144,7 cm^3 pour le cube, valeur manifestement supérieure à celle obtenue pour le cube de 3,5 cm d'arête.

Cette remise en question devrait pousser les élèves à réexaminer la nécessité d'une preuve pour la solution optimale qu'ils avaient obtenue pour la feuille A4. Ils n'avaient examiné qu'un (ou deux) développements du cube, mais pas tous. Or, la preuve passe par le recensement de toutes les possibilités de construction du développement et nécessite la prise en compte des onze développements du cube.

Soit les élèves les connaissent, soit ils les obtiennent par recherche dans la littérature ou sur internet, soit encore ils les (re)construisent en étudiant de façon exhaustive les différents hexaminos [2]. Dans ce cas, une stratégie doit être mise en place pour s'assurer de les recenser tous sans répétition. Pour éviter de passer trop de temps sur cette étape, l'enseignant peut dégager les idées avec l'ensemble de la classe puis utiliser la fiche 13 qui présente l'inventaire des 35 hexaminos différents à une isométrie près. Parmi ceux-ci, il faut encore identifier ceux qui sont des développements du cube, il y en a onze, que montre la fiche 14.

Les onze développements du cube peuvent être classés en deux types, notés 3x4 ou 2x5, suivant le nombre de carrés disposés dans les deux directions. Il y en a dix du type 3x4 et un seul du type 2x5. Selon les dimensions de la feuille rectangulaire, l'un ou l'autre des deux systèmes de contraintes établis précédemment permet de trouver l'arête du cube de volume maximal.

Pour vérifier la bonne compréhension de la démarche, on peut proposer un exemple où la réponse au problème est fournie par la contrainte sur la longueur de la feuille.

Construire dans une feuille de 20 cm de large et 24 cm de long, avec les mêmes consignes, le développement d'un cube de volume maximal.

L'exemple d'une feuille carrée est également intéressant.

Échos des classes Dans le cas de la demi feuille A4, les élèves sont enclins à chercher d'autres développements que ceux de la figure 21, car ceux-ci n'occupent qu'une très petite partie de la surface.

[2] Un hexamino est une figure obtenue par assemblage de six carrés égaux reliés par leurs côtés.

Prolongements possibles

Ces dernières réflexions amènent assez naturellement le premier des prolongements suivants, qui consiste en la généralisation du problème à une feuille rectangulaire de dimensions quelconques.

Le fait que la solution du problème d'optimisation n'est pas ici fournie par une valeur qui annule $f'(x)$ est l'occasion d'entrer avec les élèves dans une discussion plus globale sur la recherche des extrema d'une fonction, ce qui fait l'objet du deuxième prolongement.

Généralisation à une feuille de dimensions quelconques

Déterminer l'arête du cube de volume maximal dont un développement est découpé parallèlement aux bords dans une feuille de largeur ℓ et de longueur L.

Il faut déterminer le côté qui donnera le cube de volume maximal dans chacun de ces deux types de développement. Notons x_{34} la mesure du côté du cube de volume maximum pour un développement de type 3x4, et x_{25} celle pour le développement de type 2x5.

Pour les développements 3x4, le système de contraintes est

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x & \leqslant & \ell \\ 4x & \leqslant & L \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad x_{34} = \min\left\{\frac{\ell}{3}, \frac{L}{4}\right\}$$

puisque les deux inégalités doivent être respectées en même temps.

De même, pour le développement 2x5, le système de contraintes est

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x & \leqslant & \ell \\ 5x & \leqslant & L \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad x_{25} = \min\left\{\frac{\ell}{2}, \frac{L}{5}\right\}.$$

L'optimum cherché sera réalisé avec un cube dont le côté mesure la plus grande de ces valeurs et donc $x_{opt} = \max\{x_{34}, x_{25}\}$.

Réflexions sur la détermination des extrema

L'enseignant qui le souhaite peut engager avec les élèves une discussion à propos de la recherche des extrema d'une fonction à l'aide de la dérivée et clarifier dans ce contexte les notions de condition nécessaire ou suffisante. L'enjeu principal est de « sortir de la tête des élèves » l'idée fortement ancrée « qu'un extremum est une valeur qui annule la dérivée » et uniquement cela.

Cette démarche nécessite de définir le concept d'extremum de manière générale, en se limitant cependant aux fonctions réelles d'une variable réelle. On peut commencer par définir le maximum et le minimum d'une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$. Si a appartient à $\mathcal{I}$,

- $f(a)$ est maximum de la fonction f sur $\mathcal{I} \Leftrightarrow \ f(a) \geqslant f(x) \ \ \forall x \in \mathcal{I}$,
- $f(a)$ est minimum de la fonction f sur $\mathcal{I} \Leftrightarrow \ f(a) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in \mathcal{I}$.

Notons que de cette manière, on ne prend pas en considération les fonctions présentant un point isolé. Cette première définition permet ensuite de définir la notion d'extremum local. Intuitivement, on pourrait dire que $f(a)$ est un extremum local de la fonction f si ce point est plus haut, ou plus bas que tous ses voisins dans le graphique de la fonction f. Plus précisément, on dira que $f(a)$ est extremum local de la fonction f s'il existe un voisinage de a, c'est-à-dire un intervalle ouvert comprenant a dans lequel $f(a)$ est maximum ou minimum. Dans les définitions plus formelles qui suivent, on impose un intervalle centré en a, du type $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

– $f(a)$ est maximum local de la fonction $f \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : f(a) \geqslant f(x) \;\; \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathrm{dom} f$,
– $f(a)$ est minimum local de la fonction $f \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : f(a) \leqslant f(x) \;\; \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathrm{dom} f$.

Si f est continue et que a est intérieur à $\mathrm{dom} f$, on peut encore dire que

– $f(a)$ est maximum local de la fonction f si $\exists\, \varepsilon > 0 : f(x)$ est croissante dans $]a-\varepsilon, a[$ et décroissante dans $]a, a+\varepsilon[$,
– $f(a)$ est minimum local de la fonction f si $\exists\, \varepsilon > 0 : f(x)$ est décroissante dans $]a-\varepsilon, a[$ et croissante dans $]a, a+\varepsilon[$.

Si de plus, f est dérivable dans un voisinage de a, sauf éventuellement en $x = a$, les propriétés liant la croissance et la décroissance de f au signe de sa dérivée f', permettent de reformuler ces conclusions.

– $f(a)$ est maximum local de f si $\exists\, \varepsilon > 0 : f'(x) \geqslant 0$ dans $]a-\varepsilon, a[$ et $f'(x) \leqslant 0$ dans $]a, a+\varepsilon[$,
– $f(a)$ est minimum local de f si $\exists\, \varepsilon > 0 : f'(x) \leqslant 0$ dans $]a-\varepsilon, a[$ et $f'(x) \geqslant 0$ dans $]a, a+\varepsilon[$.

Sur base de ces quelques définitions et propriétés, qui ne sont en aucun cas destinées à être manipulées de manière formelle, la discussion est amorcée par les quelques questions de réflexion qui suivent. En cas de réponse négative à une question, les élèves sont invités à fournir un contre-exemple, illustré par un graphique ou une fonction de référence. Dans le cas d'une réponse positive, ils sont amenés à en justifier la validité.

> Est-il vrai que
> si a, appartenant au domaine de définition de la fonction f, est solution de $f'(x) = 0$,
> alors $f(a)$ est extremum local de f ?

Si la dérivée de la fonction s'annule en l'abscisse d'un point, la tangente au graphique de la fonction en ce point est horizontale. Il peut s'agir d'un maximum, d'un minimum (et dans ces cas, on a bien un extremum) ou d'un point d'inflexion comme dans la figure 23, construite d'après la fonction de référence $f(x) = x^3$. Il ne suffit donc pas que $f'(a) = 0$ pour que $f(a)$ soit un extremum de la fonction f.

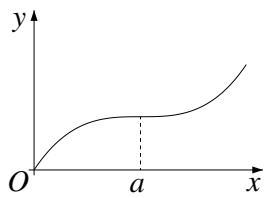


Fig. 23

> Est-il vrai que
> si $f(a)$ est extremum local de f, alors a est solution de $f'(x) = 0$?

Les exemples ci-après illustrent différentes situations où $f(a)$ est extremum alors que la condition $f'(a) = 0$ n'est pas réalisée. Pour construire des exemples de ce type, les élèves peuvent à nouveau, soit esquisser un graphique, soit proposer une expression analytique élaborée à partir de fonctions déjà rencontrées.

– La figure 24 montre une fonction affine par morceaux qui admet un maximum local en un point anguleux, en lequel les dérivées à gauche et à droite de a existent, mais ne sont pas égales.
– La fonction illustrée à la figure 25, construite à partir de deux transformées de la fonction de référence $\sqrt{x}$, admet un maximum en un point de rebroussement, point en lequel les dérivées à gauche et à droite sont infinies et de signes différents.

– La figure 26 montre une fonction qui admet un maximum local en un point dont l'abscisse est au bord du domaine, comme c'est le cas dans le problème du cube.
– La fonction illustrée à la figure 27 admet un maximum local en un point de discontinuité.

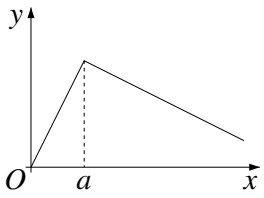


Fig. 24

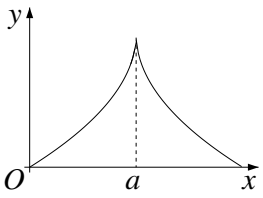


Fig. 25

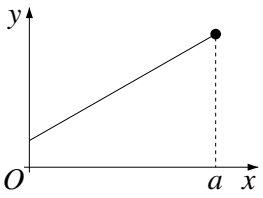


Fig. 26

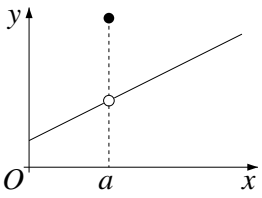


Fig. 27

Il n'est donc pas nécessaire que $f'(a) = 0$ pour que $f(a)$ soit extremum.

Les figures 24 et 25 qui montrent deux cas d'extremum, l'un correspondant à un point anguleux, l'autre à un point de rebroussement, peuvent suggérer les deux questions qui suivent.

Y a-t-il toujours un extremum en un point anguleux ?

Pour la fonction de la figure 24, il existe un voisinage de a pour lequel la fonction est croissante sur $]a - \varepsilon, a]$ et décroissante sur $[a, a + \varepsilon[$. Le point $(a, f(a))$ réalise bien un maximum local.

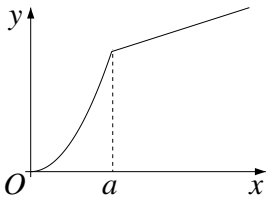


Fig. 28

La fonction représentée à la figure 28, au contraire, présente un point anguleux tel que la fonction reste croissante sur un intervalle contenant l'abscisse de ce point. Ce point anguleux ne réalise donc pas un extremum.

Il n'y a donc pas toujours un extremum local en un point anguleux. Être un point anguleux n'est pas une condition suffisante pour réaliser un extremum local.

Y a-t-il toujours un extremum en un point de rebroussement ?

Par définition du point de rebroussement, il existe un voisinage du point a inclus au domaine, tel que $f(x)$ est strictement croissante (ou strictement décroissante) sur $]a - \varepsilon, a]$ et strictement décroissante (ou strictement croissante) sur $[a, a + \varepsilon[$.

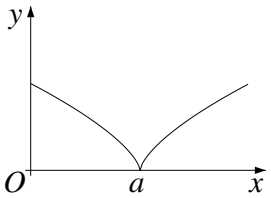


Fig. 29

La figure 25 illustre le premier cas, où le point de rebroussement réalise le maximum, la figure 29 qui montre le graphique de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ illustre le second, où le minimum est atteint au point de rebroussement.

Il y a donc toujours un extremum local en un point de rebroussement. Être un point de rebroussement est une condition suffisante pour réaliser un extremum local.

Dans le cas où, en $x = a$, la limite de la dérivée est infinie, mais de même signe à gauche et à droite de a, il ne s'agit plus d'un point de rebroussement mais d'un point d'inflexion à tangente verticale, et $f(a)$ n'est pas extremum.

Dès lors, une valeur $x = a$, intérieure au domaine d'une fonction f, pour laquelle f est extremum, apparaît comme une valeur correspondant à un changement de signe de la dérivée f' plutôt que comme une valeur pour laquelle f' s'annule (pour autant que f soit continue et dérivable dans un voisinage de a, éventuellement non dérivable en a). Ce critère permet de distinguer les points où un extremum est atteint des points d'inflexion (à tangente horizontale ou verticale) et de décider si un point anguleux réalise un extremum ou non.

4 Le cône

De quoi s'agit-il ?

Construire un cône de volume maximum en respectant des contraintes.

Enjeux

Dégager plusieurs stratégies de résolution d'un problème et comparer leur efficacité.

Compétences à développer

Résoudre des problèmes d'optimisation dans des contextes divers.

Stratégies transversales

Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet.

Développer différentes stratégies d'optimisation.

Modéliser et résoudre un problème.

Vérifier la plausibilité d'un résultat.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel par groupe d'élèves

Quelques feuilles, éventuellement d'un grammage de 160 g, dans lesquelles on a découpé des disques de 10 cm de rayon.

Du matériel de dessin, des ciseaux et du ruban adhésif.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève reçoit un disque de papier, de 10 cm de rayon, fendu suivant un rayon.

Il est conseillé de renforcer la zone centrale du disque avec du ruban adhésif pour éviter des déchirures du papier lors des manipulations. L'enseignant donne la consigne suivante.

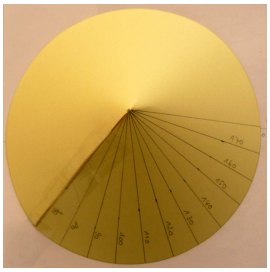


Fig. 30

> En découpant un secteur du disque, construire un cône dont le volume est le plus grand possible.

Les élèves travaillent en groupe pour débroussailler la question. Dès le départ, on leur fait remarquer que, pour visualiser de manière continue les différents cônes sans découper de secteur dans le disque, on peut faire glisser l'une sur l'autre les deux parties du disque situées de part et d'autre de la fente.

Pour chaque cône obtenu de cette manière, le secteur à enlever apparaît alors en épaisseur double. La mesure en radians de l'angle de ce secteur angulaire est notée α. La manipulation a pour but d'aider les élèves à percevoir les différentes variables qui interviennent dans ce problème ainsi que la façon dont elles interagissent. Lorsque l'angle α du secteur découpé augmente, le rayon de la base du cône diminue puisque la circonférence de la base diminue ; simultanément la hauteur du cône augmente. Au contraire, lorsque α diminue, le rayon de la base du cône augmente et sa hauteur diminue. Il y a donc lieu de chercher les liens qui unissent ces variables.

Dans l'expression du volume du cône $V = \frac{\pi}{3}r^2h$, les deux grandeurs r et h varient simultanément. La manipulation montre qu'elles sont toutes deux liées à α et qu'elles ne varient donc pas indépendamment l'une de l'autre.

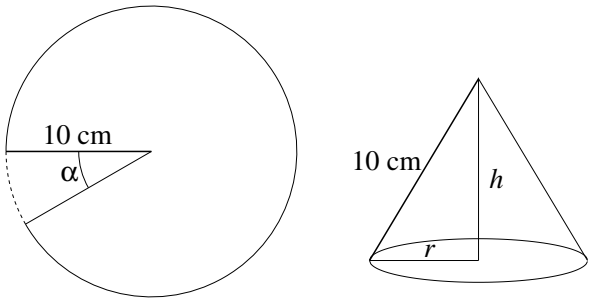


Fig. 31

Le lien entre r et h apparaît sans trop de peine dès qu'on représente la situation par un schéma (figure 31). Le théorème de PYTHAGORE nous donne $h^2 + r^2 = 10^2$, avec pour valeurs admissibles pour r et h les réels strictement compris entre 0 et 10.

Le lien avec α est beaucoup plus difficile à percevoir, il faudra sans doute évoquer la définition du radian pour que les élèves se rappellent que, tout comme $2\pi R$ est la longueur de la circonférence, αR est la longueur de l'arc de cercle de rayon R et d'angle au centre α.

Dans le problème qui nous occupe, le cercle de départ est de rayon 10, sa circonférence mesure donc $20\,\pi$. En retirant un secteur d'angle α, on retire un arc de longueur $10\,\alpha$. La circonférence de la base du cône est donc égale à $20\,\pi - 10\,\alpha$. Le rayon de la base du cône est donc lié à l'amplitude du secteur angulaire par la relation

$$20\,\pi - 10\,\alpha = 2\,\pi r \qquad \text{ou encore} \qquad \alpha = 2\pi\frac{10-r}{10}$$

où les angles sont exprimés en radians.

Les élèves qui n'arrivent pas ou ne cherchent pas d'emblée à exprimer le lien entre r et α ne sont cependant pas empêchés de progresser dans la résolution du problème. À partir de l'expression du volume du cône $V = \frac{\pi}{3}r^2h$ et de la relation $h^2 + r^2 = 10^2$, ils peuvent choisir l'une des deux grandeurs r ou h comme variable indépendante et en calculer la valeur, dite optimale, correspondant au cône de volume maximal. Le choix devrait se porter assez naturellement sur h, qui évite une racine carrée dans l'expression de la fonction volume. On obtient alors la cubique

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(100h - h^3)$$

dont la dérivée

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2)$$

est très aisée à calculer. Cette dérivée s'annule pour $h = \frac{\sqrt{3}}{3}10$ ou pour $h = -\frac{\sqrt{3}}{3}10$. Les valeurs admissibles pour la hauteur étant strictement positives, nous gardons $h_{opt} = \frac{\sqrt{3}}{3}10\text{ cm} \approx 5{,}77\text{ cm}$,

qui est admissible car strictement inférieure à 10. Il restera encore à montrer qu'elle correspond à un maximum.

De la valeur de h_{opt} et de la relation $r = \sqrt{100 - h^2}$, on déduit r_{opt}, le rayon du cône de volume maximal

$$r_{opt} = \sqrt{100 - h_{opt}^2} \Rightarrow r_{opt} = \frac{\sqrt{6}}{3} 10 \text{ cm} \approx 8{,}165 \text{ cm}.$$

À ce moment, on rappelle la consigne qui consiste à construire le cône en découpant un secteur angulaire dans la feuille de papier. Le problème du lien entre r et α qui avait éventuellement été laissé en suspens devra finalement être traité à ce moment. On obtient

$$\alpha_{opt} = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ rad}.$$

L'angle du secteur à retirer vaut donc approximativement 1,15 rad ou 66,06°.

Au vu de la consigne, certains élèves pourraient être tentés, au départ, de retenir α comme variable pour exprimer le volume. Les relations suivantes

$$\begin{cases} r = 10\dfrac{2\pi - \alpha}{2\pi} \\ h = \sqrt{100 - r^2} \end{cases}$$

permettent d'obtenir l'expression du volume en fonction de α

$$V(\alpha) = \frac{125}{3\pi^2}(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$$

pour les valeurs admissibles de α strictement comprises entre 0 et 2π. Ce choix mène à des calculs de dérivation relativement longs et fastidieux, ce qui augmente le risque d'erreur. Cette relative complexité peut amener les élèves à chercher un autre chemin pour déterminer l'amplitude de cet angle.

Un intérêt majeur de ce problème réside justement dans la grande variété des méthodes de résolution et dans les discussions que ces différentes approches peuvent susciter, notamment la comparaison des calculs. L'enseignant synthétisera les différentes approches possibles. Pour chacune des variables qui peuvent être retenues comme variable indépendante lors de la modélisation du problème, il notera l'expression correspondante de la fonction volume et les relations entre les variables. Il fera remarquer que la connaissance de la valeur (admissible) d'une des variables suffit pour déterminer la valeur des autres.

Voici un exemple de synthèse de quelques méthodes de résolution.

Ceux qui choisissent la hauteur h du cône comme variable indépendante obtiennent :

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(100h - h^3) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{100 - h^2} \\ \alpha = 2\pi\dfrac{10 - r}{10}. \end{cases}$$

Si on prend le rayon r du cône comme variable, on a :

$$V(r) = \frac{\pi}{3}r^2\sqrt{100 - r^2} \qquad \begin{cases} h = \sqrt{100 - r^2} \\ \alpha = 2\pi\dfrac{10 - r}{10}. \end{cases}$$

Si on choisit comme variable l'angle α du secteur du disque à retirer, on obtient :

$$V(\alpha) = \frac{125}{3\pi^2}(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \qquad \begin{cases} r = 10\dfrac{2\pi - \alpha}{2\pi} \\ h = \sqrt{100 - r^2}. \end{cases}$$

Il en existe encore d'autres dont nous ne détaillons pas les calculs.

- Une idée, proposée en formation d'enseignants, est de choisir comme variable l'amplitude du secteur que l'on conserve, plutôt que celle de celui que l'on découpe. Ceci simplifie quelque peu l'expression du rayon r et donc celles de la hauteur h et du volume V. Si nous notons x l'amplitude de cet angle, qui vaut $(2\pi - \alpha)$, les valeurs admissibles pour x sont bien les mêmes que celles de α.
- Une variante, proposée notamment sur un forum internet d'aide aux élèves, consiste à maximiser le carré du volume plutôt que le volume. Cette méthode nous paraît particulièrement pertinente dans la mesure où elle est souvent utilisée pour minimiser des distances. Il y a toutefois lieu de demander aux élèves, si cette solution est suggérée, de la justifier. Cela ne fonctionne en effet que lorsque les fonctions sont positives.

La comparaison des différentes fonctions qui expriment le volume du cône construit amènera les élèves à se convaincre que le choix le plus adéquat de la variable indépendante sera dans ce cas-ci h, la hauteur du cône, car la dérivée d'une fonction polynomiale est très simple à calculer, contrairement aux fonctions produits de plusieurs facteurs, ou aux fonctions irrationnelles.

Échos des classes

C'est le lien entre α et les autres variables qui pose problème aux élèves. C'est la raison pour laquelle la plupart d'entre eux adopte spontanément h comme variable indépendante, ce qui se révèle finalement très judicieux. Il ne faut cependant pas faire l'économie d'une discussion sur le choix de la méthode car c'est l'un des intérêts de ce problème.

Les élèves ont tendance à ne pas écrire complètement les relations entre les variables et l'expression du volume en fonction de la variable choisie avant de se lancer dans un calcul de dérivée. Ils s'engagent dans des calculs sans bien savoir où ceux-ci les mènent.

Après avoir calculé la valeur h_{opt} annulant $V'(h)$, de nombreux élèves s'arrêtent, estimant le problème résolu. Il faut leur rappeler que la consigne est de construire le cône en découpant un secteur dans le disque de papier. Même après cette précision, certains ne comprennent pas qu'il convient de calculer l'amplitude de l'angle.

Un élève a choisi p, circonférence de la base du cône construit comme variable, ce qui lui a donné

$$V(p) = \frac{p^2}{24\pi^2}\sqrt{400\pi^2 - p^2} \qquad \begin{cases} r = \dfrac{p}{2\pi} \\ h = \sqrt{100 - r^2} \\ \alpha = 2\pi\dfrac{10 - r}{10}. \end{cases}$$

Il n'a pas persévéré dans cette voie, découragé par la difficulté des calculs.

Commentaires

Sur le problème du cône

La façon de poser la question est primordiale et influence notablement l'activité des élèves lors de la résolution de ce problème.

Telle qu'elle est formulée ici, la consigne ne mentionne pas explicitement l'angle du secteur angulaire à découper. Mais si on demande plutôt « Déterminer l'amplitude de l'angle du secteur angulaire qu'il faut découper dans un disque de papier pour obtenir un cône de volume maximal », on attire l'attention sur la variable α de telle manière que des élèves pourraient penser qu'il est obligatoire d'exprimer le volume du cône en fonction de α, ce qui les pousse dans une direction où ils vont se trouver confrontés à des calculs compliqués.

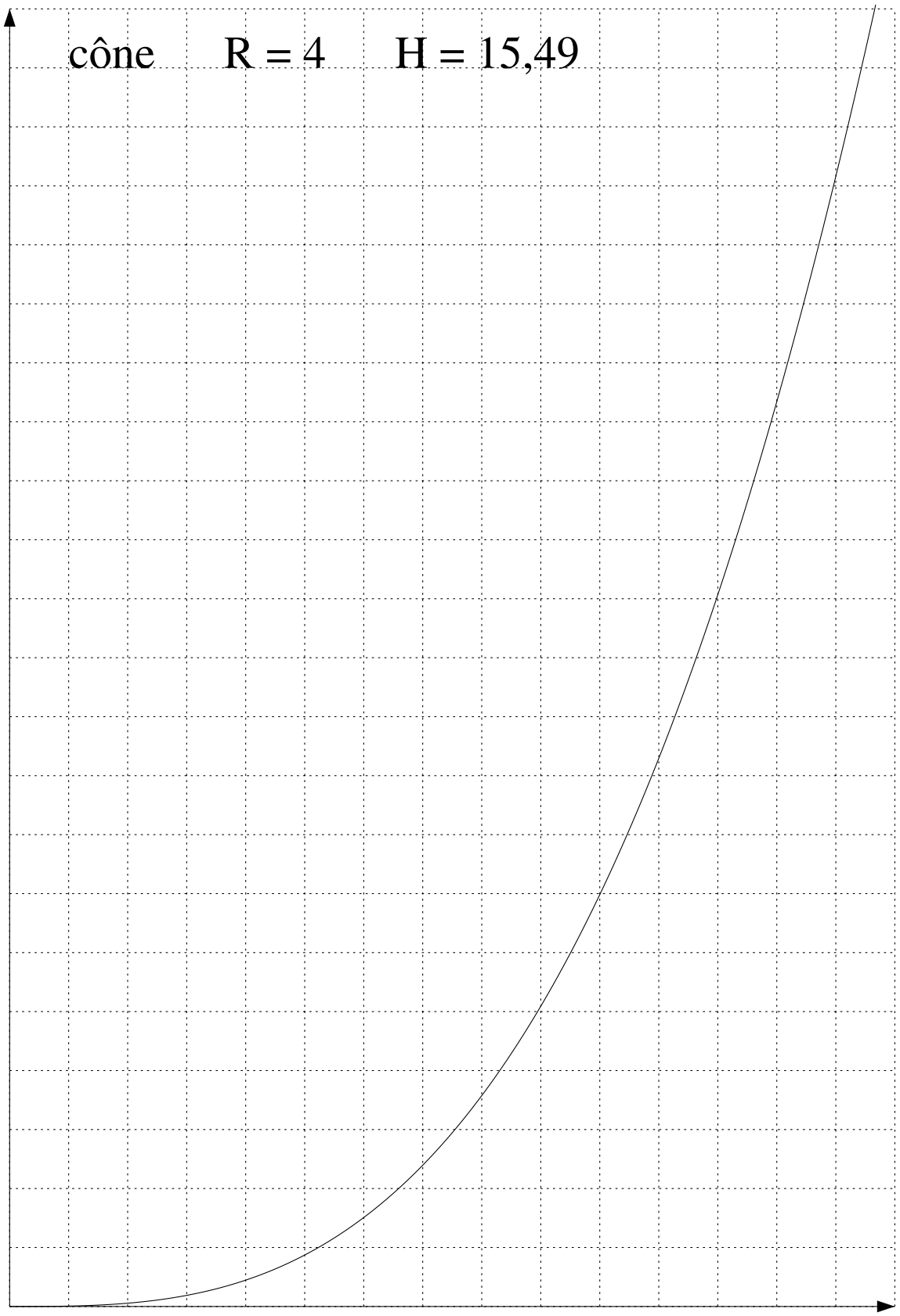
On peut laisser faire et montrer ensuite qu'il y a un autre chemin qui paraît moins direct au départ mais se révèle finalement plus rapide car il donne lieu à des calculs plus simples où les risques d'erreurs sont moindres. L'idéal est que diverses méthodes surgissent dans les travaux des différents groupes d'élèves et que la comparaison de ces méthodes soit commentée collectivement. Cela prend un peu de temps mais prendre conscience qu'un même problème peut être posé en des termes très différents est un apprentissage important pour des élèves qui se destinent à des études supérieures scientifiques.

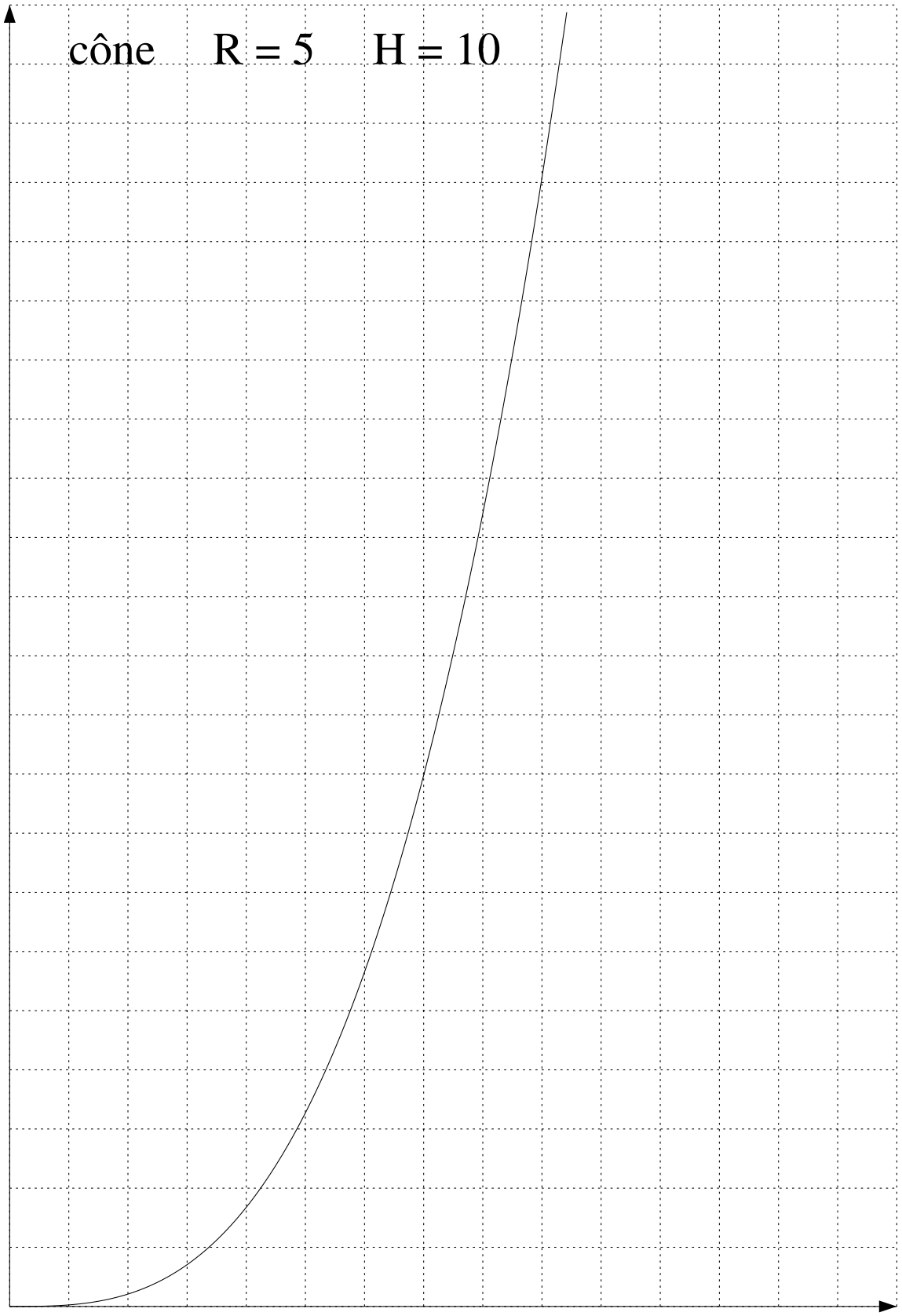
Sur l'utilisation de la dérivée dans les problèmes d'extrema

Pour de nombreux élèves à la sortie de l'enseignement secondaire, le mot extremum est presque synonyme de $f'(x) = 0$. S'il est vrai que rechercher une valeur de x qui annule f' fournit la solution de la plupart des problèmes d'optimisation proposés dans le secondaire, cette conception erronée peut mettre les élèves en difficulté au début de leur parcours dans les études supérieures. Pour éviter des remises en question souvent difficiles, nous préférons installer dès le départ le concept d'extremum de manière plus générale, de sorte que les élèves puissent reconnaître comme extremum une valeur au bord du domaine de validité de la fonction à optimiser, ou encore admettre que la valeur optimale puisse être atteinte en un point où la fonction n'est pas continue et/ou dérivable. Le prolongement de la page 277 a été conçu dans ce sens.

Annexe IV

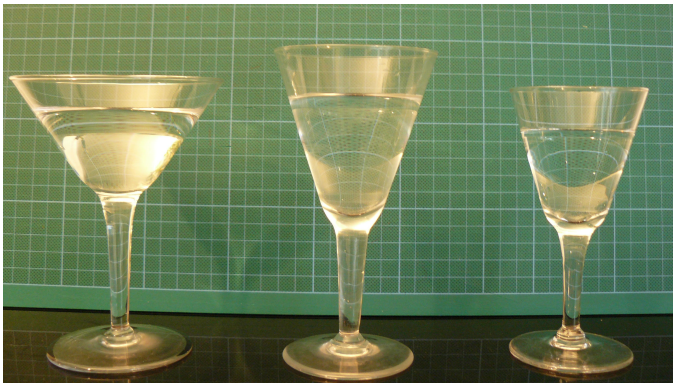
Matériel
Fiches à photocopier


cône R = 4 H = 15,49


cône R = 5 H = 10

Le verre à moitié vide ou à moitié plein

Jusqu'à quelle hauteur faut-il verser du liquide dans chaque verre pour le remplir à la moitié de sa contenance ?
Exprimer le résultat par rapport à la hauteur du contenant.



– pour le premier verre :

– pour le deuxième verre :

– pour le troisième verre :

– pour le quatrième verre :

– pour le cinquième verre :

Graduation d'un cône

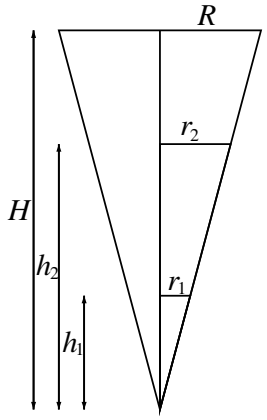
Graduer un cône en marquant les niveaux atteints par 5 ml, 10 ml, ...
Placer sur un graphique les points expérimentaux qui représentent le volume du liquide versé en fonction de la hauteur.
Établir un modèle mathématique pour déterminer cette fonction.
Comparer les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

longueur sur la génératrice en cm	hauteur du liquide en cm	volume mesuré en ml
0	0	0
		5
		10
		15
		20
		25
		30
		35
		40
		45
		50
		60
		70
		80
		90
		100
		120
		140
		160
		180
		200
		220

Modèle théorique – fonction cubique – cône $R = 4$ et $L = 16$

La formule du volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

Pour déterminer la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur, il faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h est variable, ainsi que le rayon r de la base, qui varie en fonction de la hauteur h.



Les triangles semblables montrent que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r_1}{h_1} = \dfrac{r_2}{h_2}$.

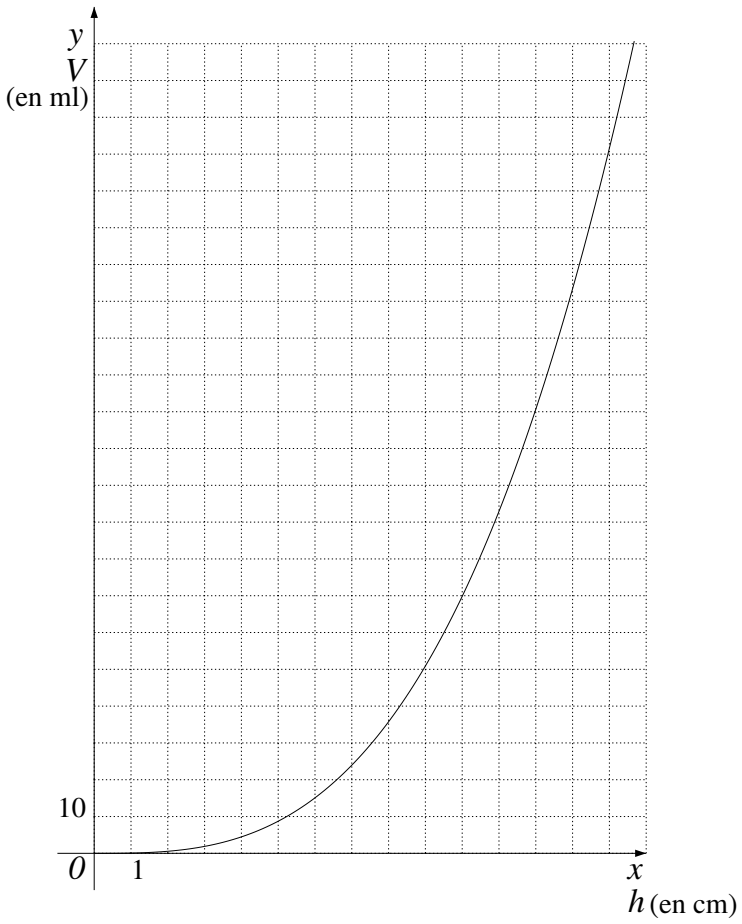
Dans notre exemple, ce rapport vaut $\dfrac{4}{15,49}$.

On a donc $r = \dfrac{4}{15,49}h$. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{4}{15,49}h)^2\, h \simeq 0,07\, h^3$$

Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y = 0,07\, x^3$.



Modèle théorique – fonction cubique – cône $R = 5$ et $H = 10$

La formule du volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

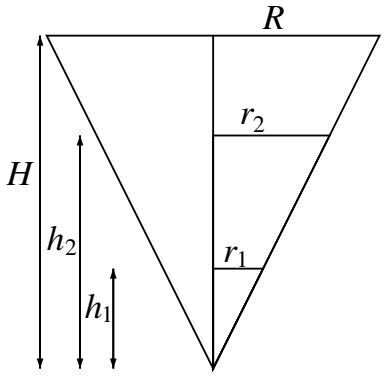
Pour déterminer la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur, il faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h est variable, ainsi que le rayon r de la base, qui varie en fonction de la hauteur h.

Les triangles semblables montrent que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r_1}{h_1} = \dfrac{r_2}{h_2}$.

Dans notre exemple, ce rapport vaut $\dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

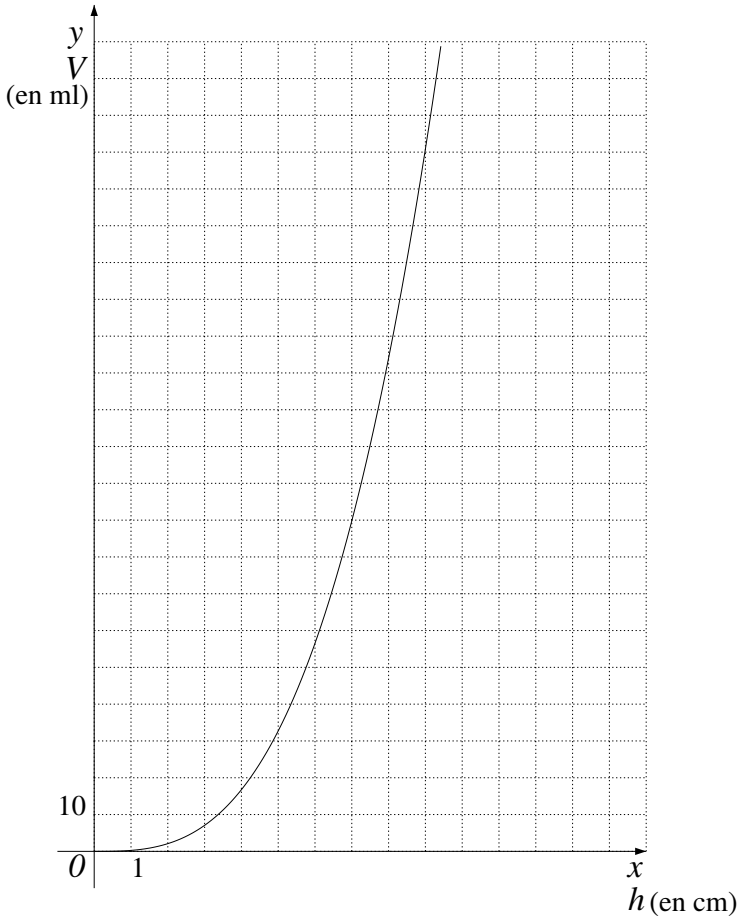
On a donc $r = \dfrac{1}{2}h$. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2\, h \simeq 0,26\, h^3$$



Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y = 0,26\, x^3$.

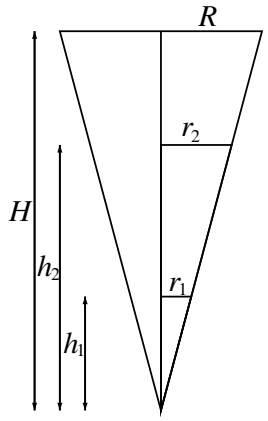


Modèle théorique – fonction cubique – cône $R =$ et $H =$

La formule du volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

Pour déterminer la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur, il faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h est variable, ainsi que le rayon r de la base, qui varie en fonction de la hauteur h.

Les triangles semblables montrent que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r_1}{h_1} = \dfrac{r_2}{h_2}$.



Dans notre exemple, ce rapport vaut —— = .

On a donc $r =$ ——h. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\text{——}h)^2\, h \simeq \qquad h^3$$

Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y = \qquad x^3$.

Graduation d'un cône

Graduer un cône en marquant les niveaux atteints par 5 ml, 10 ml, ... et noter dans un tableau les valeurs des volumes versés et des hauteurs atteintes par le liquide dans le récipient.
Représenter graphiquement ces résultats.

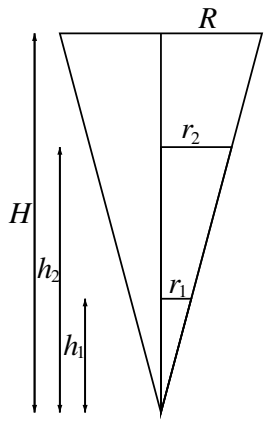
longueur sur la génératrice en cm	hauteur du liquide en cm	volume mesuré en ml
0	0	0
		5
		10
		15
		20
		25
		30
		35
		40
		45
		50
		60
		70
		80
		90
		100
		120
		140
		160
		180
		200
		220

Déterminer les expressions analytiques des fonctions qui lient la hauteur et le volume du liquide versé.
Comparer les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

Modèle théorique – fonctions réciproques – cône $R = 4$ et $L = 16$

La formule du volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

Pour déterminer la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur, il faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h est variable, ainsi que le rayon r de la base, qui varie en fonction de la hauteur h.



Les triangles semblables montrent que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r_1}{h_1} = \dfrac{r_2}{h_2}$.

Dans notre exemple, ce rapport vaut $\dfrac{4}{15,49}$.

On a donc $r = \dfrac{4}{15,49}h$. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{4}{15,49}h)^2\, h \simeq 0,07\, h^3$$

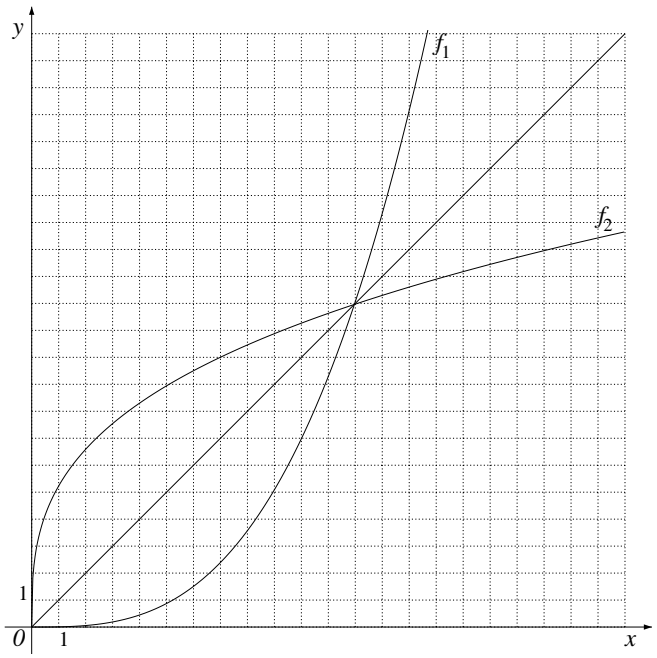
Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

La valeur du volume en cl est dix fois plus petite et on a donc $V = 0,007\, h^3$.

Cette relation qui exprime le lien entre V et h donne lieu à deux fonctions.

Dans l'une, V est fonction de h. Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y = 0,007\, x^3$ (fonction f_1).

Dans l'autre, h est fonction de V. On écrit alors $x = 0,007\, y^3$, donc $y^3 = \dfrac{1}{0,007}\, x$ et finalement $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{0,007}\, x} \simeq 5,23\sqrt[3]{x}$ (fonction f_2).



Modèle théorique – fonctions réciproques – cône $R = 5$ et $H = 10$

La formule du volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

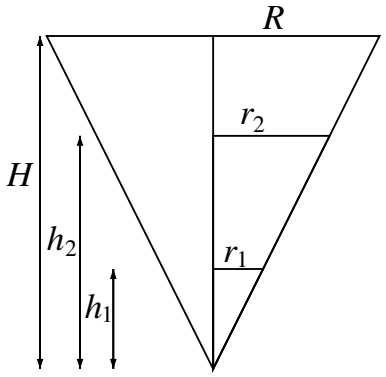
Pour déterminer la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur, il faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h est variable, ainsi que le rayon r de la base, qui varie en fonction de la hauteur h.

Les triangles semblables montrent que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r_1}{h_1} = \dfrac{r_2}{h_2}$.

Dans notre exemple, ce rapport vaut $\dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

On a donc $r = \dfrac{1}{2}h$. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2\, h \simeq 0,26\, h^3$$



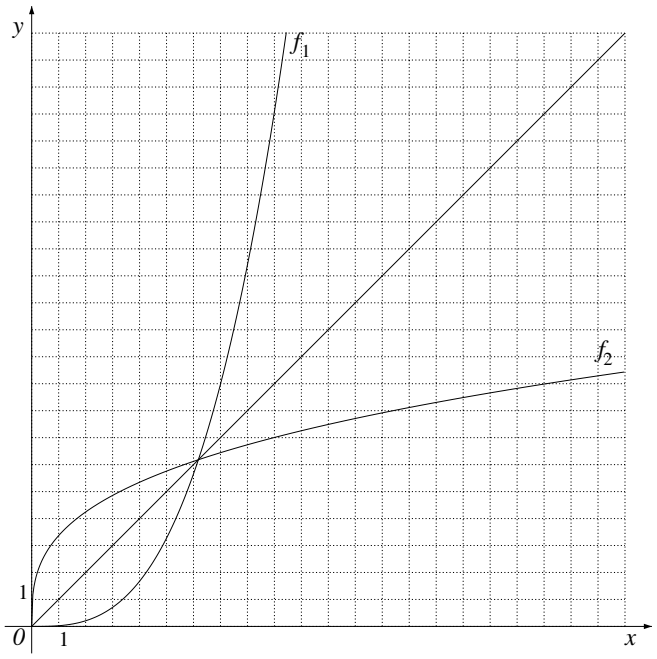
Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

La valeur du volume en cl est dix fois plus petite et on a donc $V = 0,026\, h^3$.

Cette relation qui exprime le lien entre V et h donne lieu à deux fonctions.

Dans l'une, V est fonction de h. Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y = 0,026\, x^3$ (fonction f_1).

Dans l'autre, h est fonction de V. On écrit alors $x = 0,026\, y^3$, donc $y^3 = \dfrac{1}{0,026}\, x$ et finalement $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{0,026}\, x} \simeq 3,37\sqrt[3]{x}$ (fonction f_2).

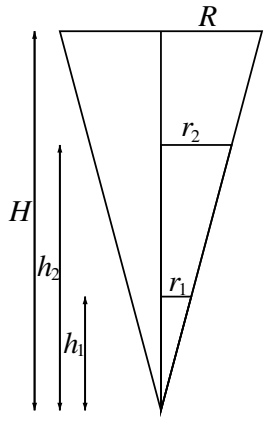


Modèle théorique – fonctions réciproques – cône $R =$ et $H =$

La formule du volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône dont la hauteur est notée h et le rayon de la base r.

Pour déterminer la fonction qui donne le volume en fonction de la hauteur, il faut calculer le volume de toute une série de cônes, dont la hauteur h est variable, ainsi que le rayon r de la base, qui varie en fonction de la hauteur h.

Les triangles semblables montrent que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r_1}{h_1} = \dfrac{r_2}{h_2}$.



Dans notre exemple, ce rapport vaut —— = .

On a donc $r =$ ——h. On obtient ainsi l'expression du volume en fonction de la hauteur.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\text{——}h)^2\, h \simeq \qquad h^3$$

Si la hauteur est mesurée en cm, le volume obtenu par cette formule sera exprimé en cm^3, c'est-à-dire en ml.

La valeur du volume en cl est dix fois plus petite et on a donc $V =$ h^3.

Cette relation qui exprime le lien entre V et h donne lieu à deux fonctions.

Dans l'une, V est fonction de h. Avec les notations mathématiques usuelles, on écrit $y =$ x^3 (fonction f_1).

Dans l'autre, h est fonction de V. On écrit alors $x =$ y^3, donc $y^3 = \dfrac{1}{\text{——}}\, x$ et finalement $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\text{——}}\, x} \simeq \qquad \sqrt[3]{x}$ (fonction f_2).

La boîte sans couvercle (1)

On travaille dans une feuille de papier de format A4. Les dimensions de cette feuille sont respectivement 21 cm et 29,7 cm pour la largeur et la longueur.

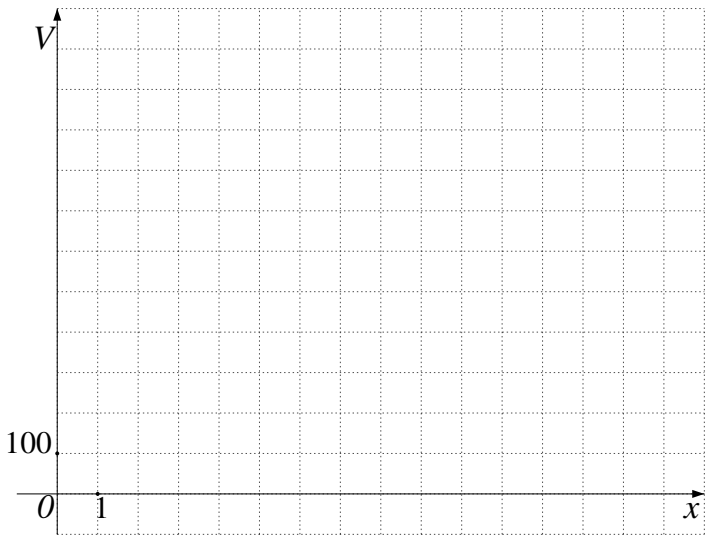
Découper un carré dans chacun des coins de cette feuille pour construire une boîte parallélépipédique sans couvercle et en calculer le volume.

Construire par ce procédé la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Tableau de résultats

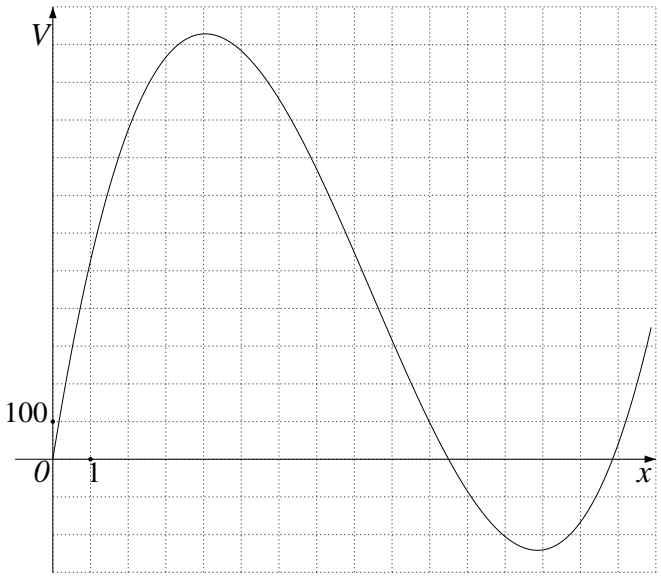
côté du carré en cm x	hauteur en cm h	largeur en cm ℓ	longueur en cm L	volume en cm^3 V

Représentation graphique des résultats

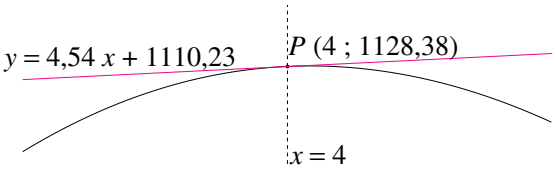


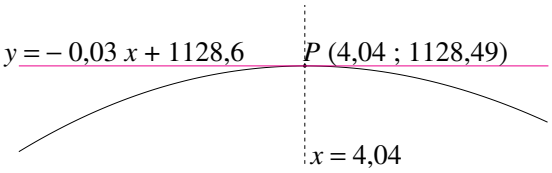
La boîte sans couvercle (2)

Représentation graphique de la fonction *V(x)*

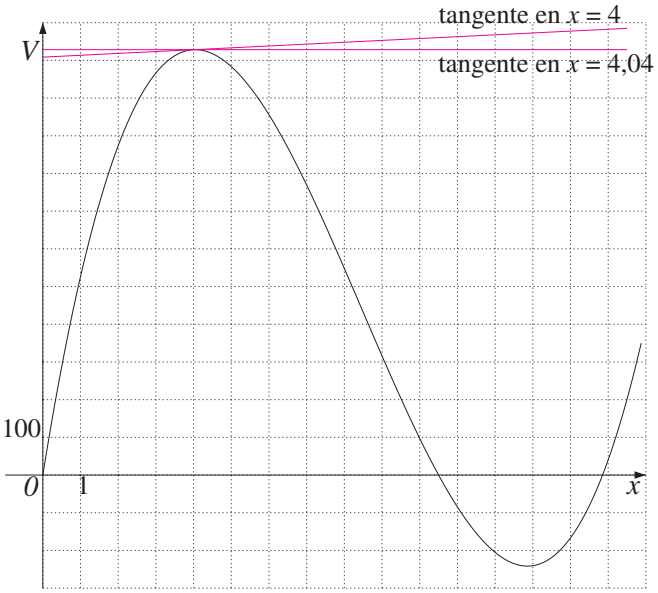


Zooms au voisinage du point d'abscisse 4





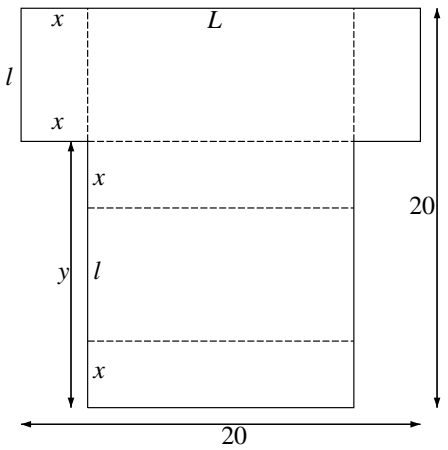
Tangentes aux points d'abscisses 4 et 4,04



La boîte parallélépipédique

En découpant symétriquement un rectangle de chaque côté de la feuille carrée de 20 cm de côté, de façon à obtenir un T, on peut obtenir le développement d'une boîte parallélépipédique fermée.

Construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.



Voici le développement d'un parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont x, l et L. On voit dans cette figure les liens entre x, y, l et L.

On a

$$y = 2x + l$$

De plus, en exprimant que le développement est inscrit dans un carré de 20 cm de côté, on obtient

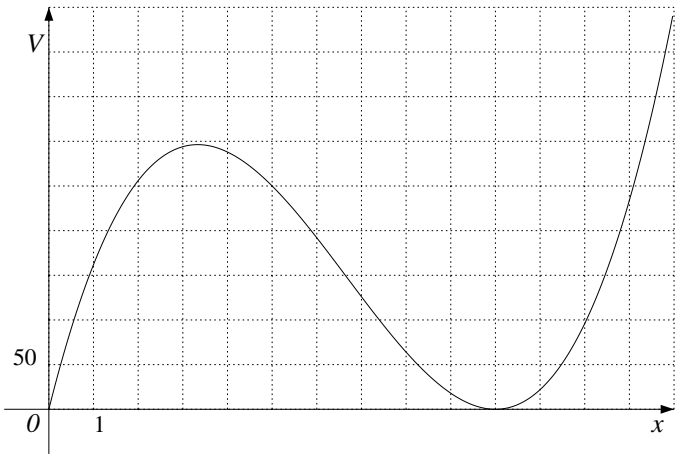
$$\begin{cases} 2x + 2l &= 20 \\ 2x + L &= 20. \end{cases}$$

Les dimensions de la boîte sont donc x pour la hauteur, $L = 20 - 2x$ et $l = 10 - x$ pour la longueur et la largeur de la base. On peut compléter par $y = 10 + x$ si on veut connaître les dimensions du rectangle à découper.

La fonction volume donnée par

$$V(x) = x \cdot l \cdot L = x \cdot (10 - x) \cdot (20 - 2x) = 2x^3 - 40x^2 + 200x$$

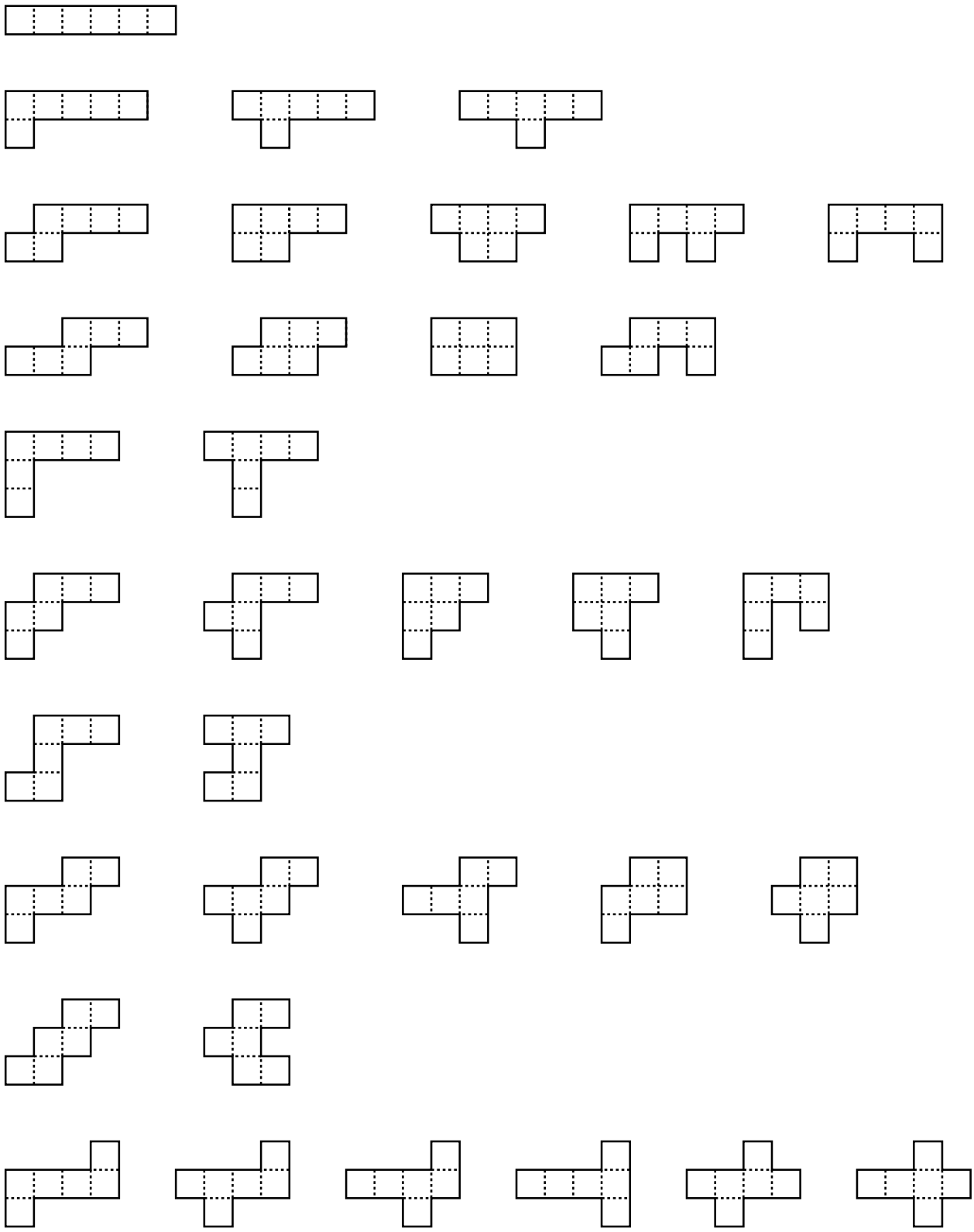
est représentée ci-dessous.



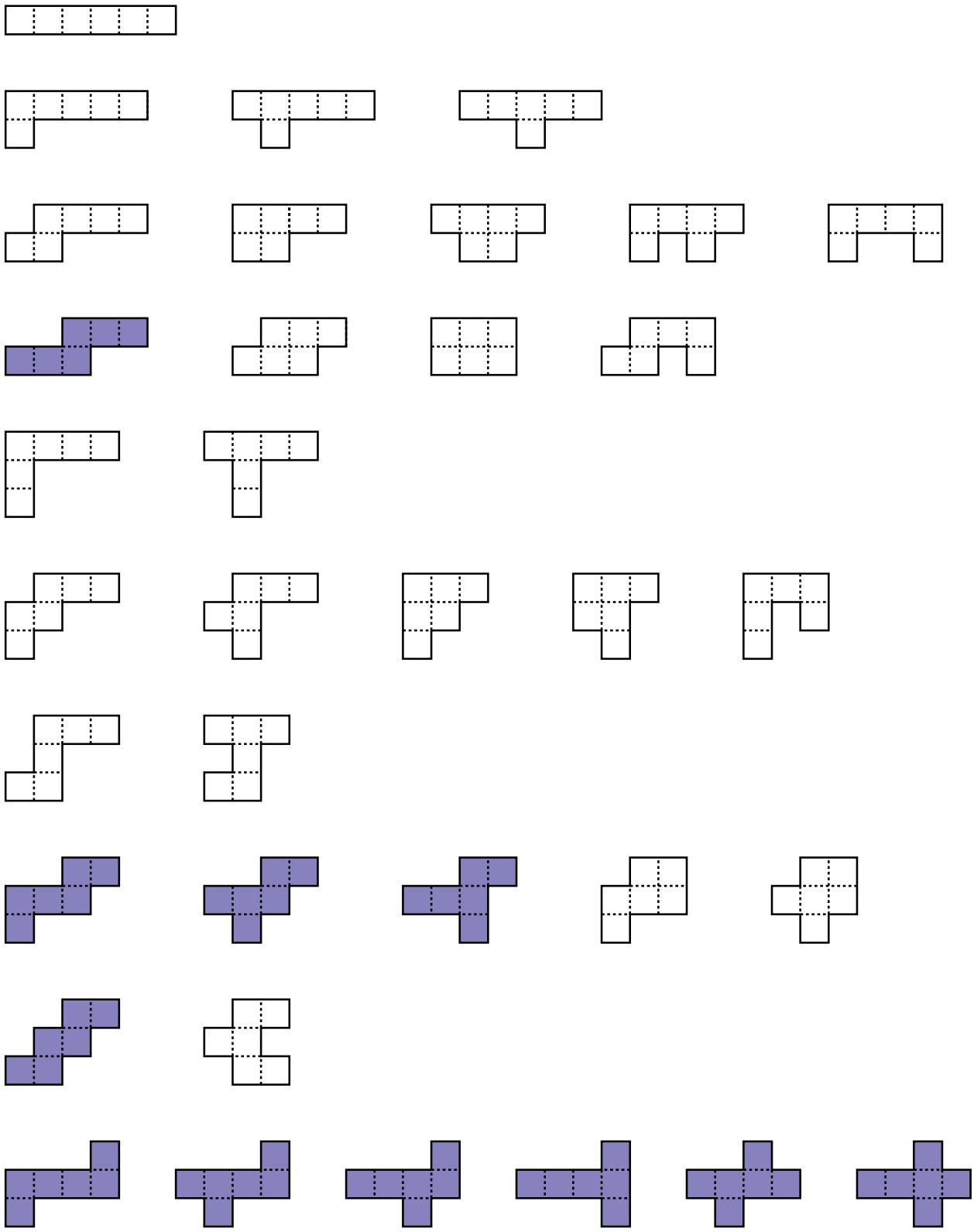
La fonction dérivée $V'(x) = 6x^2 - 80x + 200$ s'annule pour $x = \frac{10}{3}$ ou $x = 10$.

Le rectangle à découper est de dimensions $x = \frac{10}{3}$ et $y = \frac{40}{3}$.

Hexaminos



Hexaminos et développements du cube



Bibliographie

[1] Apmep, 2002. Courriers du ministre aux différents relais institutionnels concernés. http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Asm19_2002-06-08_CREM_extraits_communique_n12_Annexe.pdf.

[2] Apmep, 2002-2003. Projet de création d'un laboratoire de mathématiques. *Lycée Mas de Tesse, Montpellier.* http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Asm19_2002-2003_Projet_labo_de_Math_de_Tesse_Annexe_Asm19.pdf.

[3] C. Bernard, 1865. *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale.* Flammarion, Paris. Rééd. 1984.

[4] R. Bkouche, 2008. Du caractère expérimental des mathématiques. À propos des laboratoires de mathématiques. *Repères IREM*, (70) : 33–76.

[5] R. Bkouche, B. Charlot, et N. Rouche, 1991. *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.* Armand Colin, Paris.

[6] É. Borel, 1904. Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. Musée Pédagogique, Paris. Conférence prononcée le 3 mars 1904.

[7] J. Caron-Pargue, 1981. Quelques aspects de la manipulation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2.1 : 5–35.

[8] E. Castelnuovo et M. Barra, 1980. *La mathématique dans la réalité.* CEDIC, Paris. Traduit de l'italien par J. Maria.

[9] Commission scientifique d'Étude de l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences, 1990. *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique.* Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation.

[10] CREM, 1995. *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.* N. Rouche coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[11] CREM, 2001a. *Formes et Mouvements.* L. Lismont, et N. Rouche coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[12] CREM, 2001b. *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans.* L. Lismont et N. Rouche coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[13] CREM, 2002. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* N. Rouche coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[14] CREM, 2004. *Pour une culture mathématique accessible à tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.* M. Ballieu et M.-F. Guissard coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[15] CREM, 2005. *Apprenti Géomètre, un outil de différenciation des apprentissages en mathématiques.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. `http://www.crem.be/publication/AG/%20-%20Outil%20de%20différenciation`.

[16] CREM, 2007. *Impact du logiciel « Apprenti Géomètre », sur certains apprentissages.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. `http://www.crem.be/publication/Impact%20AG`.

[17] CREM, 2010. *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. `http://www.crem.be/publication/Decival`.

[18] T. Dias et V. Durand-Guerrier, 2005. Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, (60) : 61–78.

[19] Gattegno, C. *et al.*, 1958. *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques.* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

[20] GEM. Des laboratoires pour construire des mathématiques. 2007.

[21] INRP. Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques. `http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm`.

[22] F. Jaquet, 2007. *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel.* ARMT.

[23] P. Lambrecht, 2016. *Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité et de la non-proportionnalité au début de l'enseignement secondaire.* Thèse de doctorat, Université de Namur.

[24] G. Laverdure, 2005. Les différentes portes d'entrée en maths. *Vie pédagogique*, (136) : 26–28.

[25] Ministère de la Communauté française, 1997. *Décret définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre.* `http://users.skynet.be/IEF.be/articles/leg/decret240797/decret240797.pdf`.

[26] Ministère de la Communauté française, 1999. *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques.* Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, 15-17, Place Surlet de Chokier, 1000 - Bruxelles.

[27] Ministère de la Communauté française, 1999. *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, 15-17, Place Surlet de Chokier, 1000 - Bruxelles.

[28] Ministère de la Communauté française, 2000. *Compétences terminales et savoirs communs. Humanités professionnelles et techniques.* Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, 15-17, Place Surlet de Chokier, 1000 - Bruxelles.

[29] Ministère de la Communauté française, 2014. *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques.* `http://www.ejustice.just.fgov.be/mopdf/2014/04/17_1.pdf\verb`.

[30] Ministère de l'Instruction Publique, 1955. *Les modèles dans l'enseignement mathématique.* Direction Générale de l'Enseignement Moyen, Bruxelles. Documentation, Cahier n° 5.

[31] G. Noël, 2008. D'assemblages au théorème de Thalès. *Losanges*, (2) : 56–61.

[32] G. Noël et Y. Noël, 2010. Le théorème de Varignon (2). *Losanges*, (11) : 37–45.

[33] C. Robert et J. Treiner, 2004. Une double émergence. *Bulletin de l'APMEP*, (453) : 499–510.

[34] N. Rouche, 1992. *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels.* Didier Hatier.

[35] N. Rouche, 2004. La dérivée, l'intégrale, la primitive, un univers de sens. *Bulletin de l'APMEP*, (450) : 123–137.

[36] N. Rouche, 2006. *Apprenti Géomètre un atelier pour travailler les mathématiques.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques (CREM), Nivelles.

[37] N. Rouche. *Labos de math* (3). Rapport de réunion, 11 octobre 2007.

[38] SBPMEF, 1991. *Enseigner la mathématique ? Livre blanc sur l'enseignement des mathématiques en Communauté française de Belgique.* Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française.

[39] E. C. Wittmann et G. Müller, 1990 et 1994. *Handbuch produktiver Rechenübungen,* 2 vol. Ernst Klett, Stuttgart.

Index

agrandissement, 10, 165–187
aire, 9–11, 91, 170
    comparaison, 98, 101–102, 165, 171–187
angle, 170, 180, 284
Apprenti Géomètre, 10, 165–187
au-dessus, 9, 19, 26–30

Borel, 3, 5, 6
boîte
    cubique, 129, 131, 276–279
    parallélépipédique, 120–129, 265–276

capacité, 11, 91
    comparaison, 9, 94, 96–100, 103–107
    conservation, 93
    étalon, 107–112
    sériation, 107–112
carré, 33, 35–45, 170, 172–198
chemin, 24–26
CIEAEM, 4
codage, décodage, 9, 19, 22, 24–26
coefficient de proportionnalité, 205–208
comparaison, 9, 11
compétences, 13, 248, 259, 266, 272, 276, 282
    disciplinaires, 14, 94, 98, 103, 105, 107, 114, 120, 166, 188, 195, 202, 206
    socles, 5, 13
    terminales, 5, 14
    transversales, 13
construction des savoirs, 7
contrainte, 265, 273, 277–278
CREM, 3, 4, 7, 12, 13
cube, 131
    étalon, 120–130

Danblon, 3
dessin, 165
diamètre, 195–205
disque, 33, 185, 186, 198
duplication, 165, 169–181
dé, 22, 26–27
découpage, 10, 165
démarche expérimentale, 189–202, 247–253, 260–262
dérivée, 265, 270, 273, 280, 281, 286
développement, 129, 265, 267, 273, 276, 277

empreinte, 9, 32–35
en dessous, 9, 19, 26–30
enseignement
    fondamental, 7, 11
    maternel, 7, 9, 19
    primaire, 7, 9, 91
    secondaire, 8, 10–12
étalon, 9
    conventionnel, 9, 11, 91, 107–112
    familier, 9, 11, 91, 105–107
extremum, 279–281
extérieur, 9, 19, 21–24

fil conducteur, 7, 10
fonction, 7
    cubique, 10, 247, 254–259, 262–264, 268, 273, 284
    dérivée, 265, 270, 273, 280, 281, 284, 286
    linéaire, 12, 194, 203
    non linéaire, 12, 201, 203
    racine cubique, 247, 262–264
fonctions
    de référence, 5, 11, 247
    réciproques, 10, 247, 262–264
forme, 170
formes géométriques, 9, 19, 31–45

Gattegno, 4
GEM, 6
grandeur, 11, 91
grandeurs, 7
    comparaison, 9, 93–102
géométrie, 9, 19

hauteur, 188–195, 202–205

hexagone, 172–175

image mentale, 12
immersion, 9, 115–120, 131
intérieur, 9, 19, 21–24
itinéraire, 9, 19, 24–26

Jaquet, 7

laboratoire de mathématiques, 3
Lang, 5
Laverdure, 6
longueur, 9–11, 91, 170
    comparaison, 94–96, 98, 100–101

masse, 9, 11, 91
    comparaison, 97–98
maximum local, 279–281
mesure, 7, 9, 11, 91
minimum local, 279–281
modèle théorique, 247, 254–258, 262–264
modélisation, 5, 10–12, 189–205, 247, 254–258, 262–265, 268
méthodologie, 12

optimisation, 10, 265–286
ordre, 24–26
organisation spatiale, 9, 19

papier pointé, 10, 165, 167–169
papier-crayon, 165
pavage, 10, 165, 171–187
pentagone, 174–175, 180–182
phénomène
    linéaire, 12
    non linéaire, 12
point anguleux, 281
point d'inflexion, 280
point de discontinuité, 281
point de rebroussement, 281
polygone, 165, 167–187
psychomotricité, 19
puzzle, 9, 35–45, 165, 174–177

rectangle, 33, 35–45
remplissage, 9, 114, 115, 119–120, 122–124, 132
représentation graphique, 7, 11, 194, 201, 203, 253, 256, 258, 261–263
Rouche, 5

SBPM, 4
stratégies transversales, 14, 248, 260, 266, 272, 276, 282
symétrie, 9, 31, 32

tableau
    de non-proportionnalité, 12, 200, 204, 209
    de proportionnalité, 12, 126, 192, 193, 204, 209
tangente, 270
topologie, 9, 19
triangle, 33, 35–45, 170, 172–187

volume, 10, 11, 91
    comparaison, 113–120, 122
    du cylindre, 10, 11, 188–205
    du cône, 10, 11, 247–265, 282
    du parallélépipède rectangle, 9, 11, 91, 122–132, 266–276
    étalon, 126–131
    objets creux, 9, 114–115, 132
    objets pleins, 9, 115–119, 132

Table des matières

Avant-propos **1**

1 Origine et motivation du projet 1

2 Objectifs du projet 2

3 *Math & Manip* et laboratoire de mathématiques 4

4 *Math & Manips* de la maternelle à 18 ans 5

4.1 Dans l'enseignement fondamental 5

4.2 Dans l'enseignement secondaire 6

5 Contenu 7

6 Fils conducteurs 8

6.1 Les grandeurs 9

6.2 La démarche de modélisation 9

7 Méthodologie de la recherche 10

8 Nos documents 11

8.1 Les compétences 11

8.2 Présentation type des *Math & Manips* 12

8.3 En pratique 13

I *Math & Manips* à partir de 2 ans et demi **15**

1 Repérage dans l'espace **19**

1 Intérieur et extérieur 19

1.1 Des cercles et des poissons 19

1.2 Dé codé 20

1.3 L'étang 21

2 Itinéraires 22

2.1 Tracer un itinéraire et le coder 22

2.2 Associer une bandelette à un itinéraire 23

3 Au-dessus et en dessous 24

3.1 L'arche 24
3.2 Construction de tours 26
3.3 Description de tours 27
3.4 Description de tours avec contrainte 28

2 Reconnaissance de formes 29
1 Symétrie 29
2 Empreintes 30
2.1 Empreintes libres 31
2.2 Association 32
2.3 Ressemblance 32
3 Puzzles 33
3.1 Puzzle poisson-contour 34
3.2 Puzzle poisson-pièces 38
3.3 Puzzle poisson-œil 39
3.4 Puzzle avec contrainte 41

Matériel, fiches à photocopier 45

II *Math & Manips* à partir de 5 ans 87

3 Comparaison de grandeurs 91
1 Conservation de la capacité 91
2 Longueurs, capacités et masses 92
2.1 Bougies d'anniversaire 93
2.2 Moules à gâteau 94
2.3 Bonbons 95
3 Capacités, longueurs et aires 96
3.1 Gobelets 97
3.2 Rubans d'emballage 98
3.3 Serviettes carrées ou set de table ? 99
3.4 Synthèse 100
3.5 Le goûter d'anniversaire 100

4 Des étalons 101
1 Comparaison directe de deux capacités 101

2 Étalons non conventionnels 103
3 Étalons conventionnels : le litre et ses sous-multiples 105
3.1 Et si on comparait avec un autre étalon ? 106
3.2 Et si on classait les amphores ? 107
3.3 Et si on classait des récipients ? 108

5 Notion de Volume 111
1 Construction de la notion de volume 111
1.1 Comparaison de boîtes 112
1.2 Comparaison d'objets pleins 113
1.3 Remplissage et immersion 117
2 Boîtes parallélépipédiques 118
2.1 Construction d'un solide en cubes 119
2.2 Comparaison du volume de boîtes parallélépipédiques 120
2.3 Construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle 121
2.4 Calcul du volume du parallélépipède rectangle en cm^3 124
2.5 Une boîte particulière 127
2.6 Adéquation des unités 128
2.7 Calcul du volume d'un objet 129

Description de matériel, fiches à photocopier 131

III *Math & Manips* à partir de 11 ans 161

6 Agrandissements 163
1 Découverte 164
1.1 Découvrons *Apprenti Géomètre* avec les formes libres 165
1.2 Doublons les longueurs 167
1.3 Établissons les caractéristiques d'un agrandissement 168
2 Pavages pour comparer des aires 169
2.1 Continuons la découverte d'*Apprenti Géomètre* 170
2.2 Pavons les polygones 172
2.3 Comparons les aires 175
3 Constructions pour généraliser 177
3.1 Construisons des agrandissements de côtés de longueur double 178
3.2 Construisons des agrandissements de côtés de longueur triple 179

4 Généralisations . . . 180
4.1 Triplons la longueur des côtés . . . 181
4.2 Multiplions la longueur des côtés par un nombre entier . . . 182
4.3 Observons le disque . . . 183

7 Des cylindres 186
1 Des cylindres... et leur hauteur . . . 186
1.1 Combien de verres pour remplir la casserole à la moitié de sa hauteur ? . . . 187
1.2 Et si on double la hauteur ? . . . 188
1.3 Et si on triple la hauteur ? . . . 189
1.4 Et si la hauteur est multipliée par 4, 5 ou 10 ? . . . 191
2 Des cylindres... et leur diamètre . . . 193
2.1 Et si on double ou triple le diamètre ? . . . 194
2.2 Et si on vérifiait ? . . . 195
2.3 Et si le diamètre est multiplié par 4, 5 ou 10 ? . . . 197
3 Des cylindres... leur hauteur et leur diamètre . . . 200
4 Un outil supplémentaire : le coefficient de proportionnalité . . . 203
5 D'autres récipients . . . 206

Description de matériel, fiches à photocopier 209

IV *Math & Manips* à partir de 15 ans 243

8 Le volume du cône 245
1 Volume du cône et fonction cubique . . . 245
1.1 Le verre à moitié vide, ou à moitié plein . . . 247
1.2 Graduation d'un cône . . . 248
1.3 Et le cône à moitié rempli ? . . . 255
2 Volume du cône et fonctions réciproques . . . 257
2.1 Expérimentation et graphiques . . . 258
2.2 Modélisation et comparaison . . . 260
2.3 Et le cône à moitié rempli ? . . . 262

9 Problèmes d'optimisation 263
1 La boîte sans couvercle . . . 264
2 La boîte parallélépipédique . . . 270

3 Le cube 274
4 Le cône 280

Matériel, fiches à photocopier **285**

Bibliographie **304**

Index **306**