COLLECTION "DOCUMENTS DU CREM"

No 3 NOVEMBRE 1997

L'INITIATION À L'ALGÈBRE

Bernard Baton, professeur à l'I.P.E.S.P. Mons

Roland Giot, professeur à l'I.E.S.P.E.C.F. Mons-Tournai

Yolande Noël, professeur honoraire

Avec la collaboration de
Guy Noël, Université de Mons-Hainaut

Nouvelle édition corrigée

CREM a.s.b.l.
Centre de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Emile Vandervelde
B-1400 Nivelles, Belgique

C.D.S.
Centre de Didactique des Sciences
Université de Mons-Hainaut
15 avenue Maistriau
B-7000 Mons

Le CREM a.s.b.l. a pour missions principales la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte et la formation continue des enseignants de mathématiques. Pour mener à bien ces missions, il a signé des conventions bilatérales d'entraide avec les groupes suivants :

- AHA, Approche Heuristique de l'Analyse,
  10 fond du Rondia 1348 Louvain-la-Neuve
  Contact : Marisa Krysinska, tél. 32 10 45 06 50

- CDS, Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut
  Faculté des Sciences,
  15 Avenue Maistriau 7000 Mons
  Contact : Guy Noël, tél. 32 65 37 34 15

- COJEREM, Collèges Jésuites, Réflexions sur l'Enseignement des Mathématiques
  (sous-groupe du Centre de Formation à la Pédagogie des Mathématiques, FOPEMA)
  Département de Mathématiques des FUNDP,
  8 rempart de la Vierge 5000 Namur
  Contact : Maggy Schneider, tél. 32 2 687 20 73

- GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique
  Département de Mathématiques de l'UCL,
  2 chemin du Cyclotron 1348 Louvain-La-Neuve
  Contact : Christiane Hauchart, tél. 32 10 47 32 72

- GEPEMA, Groupe d'Etude sur les Premiers Enseignements de la Mathématique
  Université de Mons-Hainaut, Faculté des Sciences,
  15 avenue Maistriau 7000 Mons
  Contact : Paul Van Praag, tél. 32 65 37 34 17

- SBPMef, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française,
  15 rue de la Halle 7000 Mons
  Contact : Guy Noël, tél. 32 65 37 34 15

- UEREM, Unité d'Étude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
  Institut Supérieur Industriel de Liège,
  6 quai Gloesener 4020 Liège
  Contact : André Pétry, tél. 32 41 41 13 85

- UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
  Département de Mathématiques de l'ULB,
  CP 216 boulevard du Triomphe 1050 Bruxelles
  Contact : Francis Buekenhout, tél. 32 2 650 58 64

CREM a.s.b.l., juillet 1996
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles (Belgique)
Tél. : 32 67 21 25 27 Fax : 32 67 21 22 02

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un accord de coopération entre le Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut *et le* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques *(CREM a.s.b.l.). Elle est publiée avec le soutien de la Direction Générale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation de la Communauté Française de Belgique.*

Les auteurs sont heureux d'avoir reçu l'autorisation de reproduire en version française l'article de Nicolas Herscovics et Carolyn Kieran que l'on trouvera en annexe.

Table des matières

1 Introduction

L'enseignement de l'algèbre pose-t-il des problèmes en Communauté Française de Belgique ? Les manuels proposent-ils une démarche structurée et graduée en fonction des difficultés rencontrées par nos élèves ? Ceux-ci apprécient-ils cette matière et leurs résultats les satisfont-ils ? Et les enseignants ?

Nous ne disposons pas de grand-chose pour répondre scientifiquement à cette question. Si nous faisons confiance aux impressions dominantes dans le corps enseignant, c'est la géométrie qui poserait les problèmes les plus délicats et l'algèbre *serait plus facile* ? Pour constater que les enseignants se posent beaucoup moins de problèmes à son sujet, il suffit de relire les pages destinées à guider nos « algébristes débutants » dans la plupart des manuels scolaires d'hier et d'aujourd'hui. A travers les modifications pégagogiques, nous ne trouvons presque pas de variations dans l'introduction du calcul algébrique : sauf exception, les élèves sont plongés d'emblée dans un tas d'habitudes familières aux adultes (qui en ont oublié les pièges) et soumis trop rapidement et répétitivement sans motivation à des séries d'exercices de fixation qui peuvent créer des mécanismes pervers (que l'enseignant n'a pas toujours la possibilité d'identifier).

Peut-être parce qu'on y enseigne moins de géométrie que chez nous, la Grande Bretagne et les Etats-Unis notamment, semblent moins utopiques sur leur enseignement de l'algèbre. Une évaluation nationale réalisée aux Etats-Unis (National Assessment of Educational Progress) a amené des chercheurs à publier en 1988 des conclusions peu rassurantes au sujet des connaissances des étudiants. A tout niveau, beaucoup possèdent quelques connaissances de base de l'algèbre mais sont incapables de les appliquer pour résoudre des problèmes et ne comprennent pas grand-chose aux structures qui sous-tendent les concepts mathématiques et les compétences techniques. Il semble bien que les résultats enregistrés aux USA ne diffèrent guère de ceux qui ont été relevés dans d'autres pays : des erreurs analogues et bien connues se reproduisent de génération en génération ; les élèves compensent leur manque de compréhension par une mémorisation dépourvue de sens ... et finissent par croire que l'application de règles constitue l'essentiel des mathématiques. Ils en arrivent d'ailleurs à appliquer leurs propres règles, pas toujours dépourvues de cohérence interne ; certaines erreurs ne sont pas dues au manque de souci de bien faire de l'élève mais à la mauvaise mise en pratique d'une consigne valable dans d'autres circonstances. Tout progrès devient impossible si les sources du dysfonctionnement ne sont pas clarifiées. Des illustrations viendront dans la suite du texte.

Confrontés aux résultats peu encourageants de l'enseignement de l'algèbre, des enseignants et des chercheurs ont essayé de voir ce qui amène les étudiants à pratiquer une algèbre dépourvue de sens. Le problème est-il provoqué par

- le contenu ?
- la manière d'enseigner ?
- la manière d'apprendre ?

Sur base de nombreux travaux (voir la bibliographie), il semble que les difficultés relèvent des trois causes. Les analyses de comportements d'élèves mettent en évidence l'existence de deux « courants » dans leur évolution.

Un premier courant pourrait être appelé *du rhétorique au symbolique.* Il correspond à l'évolution historique de l'algèbre elle-même. Le second courant, *du procédural au structural* est peut-être moins bien délimité dans l'histoire, des éléments structuraux, aussi bien que procéduraux, étant présents depuis longtemps dans les activités algébriques.

Ces deux courants sont tout sauf linéaires, des tourbillons peuvent les parcourir. Parfois ils se croisent, parfois ils sont parallèles. Essayons d'y voir plus clair.

2 Du rhétorique au symbolique

Eon Harper, [14], rappelle que les historiens des mathématiques distinguent généralement trois phases dans l'évolution de l'algèbre : les phases *rhétorique, syncopée et symbolique.* L'expérimentation qu'il relate fait apparaître ces trois phases dans des travaux d'élèves.

1. Avant DIOPHANTE, en « algèbre rhétorique », les problèmes sont résolus en utilisant uniquement le langage courant. Ni les opérations, ni les inconnues ne sont représentées par des symboles.

2. Avec Diophante, (IIIᵉ siècle), débute la phase syncopée (nous dirons plutôt *diophantienne*). Diophante introduit l'usage d'une lettre pour représenter une quantité inconnue. Il résout des équations en une ou deux inconnues mais exprime la deuxième en fonction de la première. Il n'introduit pas de méthode générale, résolvant chacun des 189 problèmes de son *Arithmetica* par une méthode différente.

   Voici, repris de [32], comment Diophante résout le problème 16 du Livre I posé en ces termes :

   > *Trouver trois nombres qui, pris deux à deux, forment des nombres proposés.*

   En notation moderne, nous demanderions de résoudre le système

$$\begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ z+x &= c \end{cases}$$

   Diophante choisit $a = 20$, $b = 30$ et $c = 40$ et écrit ([1])

([1]) Le texte reproduit est une traduction partielle puisque les nombres sont écrits en numération grecque, laquelle utilise les lettres de l'alphabet comme chiffres : $\alpha = 1, \ldots$ Dans ce texte, seule la lettre ζ désigne une variable, dénommée par ailleurs "arithme". Ainsi, $\zeta\alpha$ est "1 arithme".

Nous traduisons:

"Posons que la somme des trois nombres est ςα (1 arithme). Dès lors, puisque le premier nombre plus le second forment Mκ (20 unités), si nous retranchons Mκ (20 unités) de ςα (1 arithme), nous aurons comme troisième nombre ςα⋔Mκ (1 arithme moins 20 unités). Pour la même raison, le premier nombre sera ςα⋔Mλ (1 arithme moins 30 unités), et le second nombre sera ςα⋔Mμ (1 arithme moins 40 unités). Il faut encore que la somme des trois nombres devienne égale à ςα (1 arithme). Mais la somme des trois nombres forme ςγ⋔Mq (3 arithmes moins 90 unités). Egalons-les à ςα (1 arithme) et l'arithme devient Mμε (45 unités). Revenons à ce qui a été posé : le premier nombre sera Mιε (15 unités), le second sera Mε (5 unités) et le troisième sera Mκε (25 unités), et la preuve est claire."

$x + y + z = 1A$
$x + y = 20$

Donc $z = 1A - 20$

De même, $x = 1A - 30$
et $y = 1A - 40$

Or, $x + y + z = 1A$

Mais $x + y + z = 3A - 90$
Donc $3A - 90 = 1A$
et on obtient $A = 45$.
De là on obtient : $x = 15$
$y = 5$
$z = 25$.

Plus tard, différentes lettres sont utilisées pour représenter différentes inconnues, mais toujours pas pour représenter des données. Après la conquête d'une partie de l'Europe au VII[e] siècle, les mathématiciens arabes répandent leurs connaissances et entretiennent les mathématiques connues des Grecs et des Hindous, mais leur algèbre reste essentiellement au même stade de développement. Jusqu'au XVI[e] siècle, les algébristes s'occupent de *rechercher la valeur* des lettres introduites plutôt que de leur attribuer une signification de généralisation. Les premières équations de degrés 2 et 3 sont résolues, mais les coefficients sont toujours numériques et les solutions exprimées exclusivement en termes numériques. A la Renaissance, quelques modifications de notations sont adoptées sporadiquement (« p » au lieu de « plus » par exemple et quelques termes spéciaux), mais aucune évolution majeure du symbolisme ne se produit.

Et voici comment, dans son *Algèbre* publiée en 1554 en français, Jacques PELETIER (1517 – 1582) traite un problème qui consiste à déterminer les avoirs (en Ecuz !) de trois personnes. [18]. Il désigne les trois inconnues par les lettres R, A, et B et est amené à résoudre le système que nous noterions actuellement

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2R + A + B & = & 64 \\ R + 3A + B & = & 84 \\ R + A + 4B & = & 124 \end{array}\right.$$

Voici la technique d'élimination qu'il propose :

Dispo∫ons donq noz troęs Equacions an cętę sortę.

I. 2℞ p.1A p.1B, egalęs a 64.

II. 1℞ p.3A p.1B, egalęs a 84.

III. 1℞ p.1A p.4B, egalęs a 124. Ajoutons la sęcondę e la tiercę : cę ſeront, pour la quatriemę Equacion,

IIII. 2℞ p.4A p.5B, egalęs a 208. Donq an la conferant a la pręmierę Equacion, par cę quę 2℞ ſont tant d'vnę part quę d'autrę : la differancę dę 64 a 208 (qui ęt 144) ſęra egalę auęc la differancę dę 1A p.1B a 4A p.5B. Donq, an otant 1A p.1B dę 4A p.5B : nous aurons pour la cinquiemę Equacion,

V. 3A p.4B, egalęs a 144. Ajoutons la pręmierę e la ſęcondę : nous aurons pour la ſiziemę Equacion,

VI. 3℞ p.4A p.2B, egalęs a 148. Ajoutons la pręmierę e la tiercę : nous aurons pour la ſętiemę Equacion,

Nous traduisons :

$$\begin{aligned} 2R + A + B &= 64 \qquad (1) \\ R + 3A + B &= 84 \qquad (2) \\ R + A + 4B &= 124 \qquad (3) \end{aligned}$$

$$(2) + (3) \longrightarrow 2R + 4A + 5B = 208 \qquad (4)$$

$$(4) - (1) \longrightarrow 3A + 4B = 144 \qquad (5)$$

$$(1) + (2) \longrightarrow 3R + 4A + 2B = 148 \qquad (6)$$

$$(1) + (3) \longrightarrow \dots \qquad (7)$$

3. Au XVI^{e} siècle, les mathématiciens européens ont accès à une traduction latine de l'œuvre de Diophante. VIÈTE (1540-1603) s'en inspire pour innover. Dans son *Introduction à l'Art Analytique* (1591), il utilise des lettres pour désigner non seulement les *quantités inconnues*, mais aussi les *quantités données*. Il rend ainsi possible l'*expression générale de solutions* et l'utilisation de l'algèbre pour *démontrer des relations* numériques. Il permet le passage de l'« algèbre diophantienne » à l'« algèbre symbolique ». Il introduit également l'usage de symboles (+ et −) ainsi que d'abréviations (*A quadratus* pour A^2, *A cubus* pour A^3). Notons au passage que c'est en 1557 que l'anglais Robert RECORDE introduit le signe « = ».
Pour Viète, l'égalité

$$A^3 + BA = CA^2 + D$$

s'écrit

$$A\ cub + B \text{ plano in } A\ aequatur\ C \text{ in } A\ quad + D\ solido$$

Les termes *plano* et *solido* préservent l'homogénéité du degré dans l'égalité.

Dans une sauce moderne pour faciliter la lecture, voici le même problème résolu par Diophante et par Viète :

Diophante

Partager un nombre donné en deux nombres avec une différence donnée. Soit 100 le nombre donné et soit 40 la différence.
Appelons x le plus petit des deux nombres.
Alors le plus grand vaut $x + 40$
Les deux ensembles valent $2x+40$ et on a dit que c'était 100.
Donc $100 = 2x + 40$
En retirant la même chose (40) de la même chose ($2x + 40$ et 100), j'obtiens $60 = 2x$, donc $x = 30$.
Le plus petit nombre est 30 et le plus grand 70 et la preuve est claire.

Viète

Etant données la différence de deux côtés et leur somme, trouver les deux côtés.
Soit A le plus petit côté inconnu.
Alors le plus grand est $A + B$.
Donc la somme est $2A+B$. Mais la même somme est donnée par D.
Donc $2A + B = D$ et par antithèse $2A = D - B$
En divisant tout par 2, $A = \frac{1}{2}(D - B)$
Ou, soit E le plus grand côté inconnu.
Alors le plus petit est $E - B$.
Donc la somme est $2E-B$. Mais la même somme est donnée par D.
Donc $2E - B = D$ et par antithèse $2E = D + B$.
En divisant par 2, $E = \frac{1}{2}(D + B)$.
Ainsi, lorsque la somme et la différence sont données, les côtés sont trouvés.

Les passages de la phase rhétorique à la phase diophantienne, puis à la phase symbolique ne constituent pas seulement des allègements de langage ou de notations. Ils mettent en place des outils qui non seulement permettent de résoudre aisément des problèmes que l'on savait déjà résoudre auparavant, mais qui, de plus, sont de nature à favoriser la mise en place de nouveaux concepts. Ainsi, lorsque Viète utilise une lettre pour désigner une donnée et écrit la solution générale de l'équation $x + a = 3$ sous la forme $x = 3 - a$, il prépare l'apparition chez Euler de la notion de fonction comme étant une expression algébrique servant à calculer la valeur d'une variable dépendante á partir de celle d'une variable indépendante..

3 Du procédural au structural

La distinction entre *conception procédurale* et *conception structurale* d'une notion abstraite apparaît dans [34], et est reprise dans [23] et [24].

Lors d'un apprentissage, un nouvel objet mathématique est souvent rencontré en premier lieu dans un cadre procédural (ou opératoire) :

- Pour expliquer ce qu'est une fonction, on fait calculer des valeurs particulières. (Par exemple, on calcule $3x^2 + 5y$ pour $x = 4$ et $y = 10$). Ainsi, on quitte immédiatement l'« expression algébrique » pour exécuter un « calcul arithmétique ».

- Pour expliquer ce qu'est une équation, par exemple $2x+3 = 5$, on peut la représenter par un diagramme fléché qui n'est que la traduction graphique d'un algorithme :

$$\square \xrightarrow{\times 2} \square \xrightarrow{+3} \boxed{5}$$

La résolution est réalisée en inversant cette procédure.

- Pour expliquer ce qu'est une fraction, on la considère comme un opérateur.
- Tant qu'on n'utilise une symétrie axiale que pour construire l'image d'une figure, cette symétrie n'est considérée que comme une procédure.
- ...

Des exemples analogues peuvent être énoncés en géométrie ou en analyse. Dans sa conception opératoire, un objet mathématique a un aspect essentiellement dynamique. Il n'a pas vraiment d'existence propre, étant plutôt une succession d'opérations à effectuer sur d'autres objets.

Certaines manipulations exigent de considérer un objet mathématique comme une entité autonome, bien déterminée, ayant donc un caractère statique. Additionner, multiplier ou composer deux fonctions ou deux symétries en acceptant que le résultat soit encore une fonction ou une isométrie, remplacer une équation par une équation équivalente, combiner linéairement des équations, ..., toutes ces opérations ne sont possibles que si les fonctions, les symétries ou les équations manipulées ont effectivement acquis le statut d'objet. De même, additionner deux fractions n'a guère de sens tant que celles-ci n'ont pas acquis le statut de nombre.

On dira que les concepts considérés ont atteint le niveau structural s'ils sont perçus comme des objets autonomes. On pourra dès lors également leur appliquer des procédures. Par exemple, on pourra intégrer ou dériver une fonction. Dans un premier temps la dérivation ne sera perçue qu'au niveau procédural, puis dans le cadre des opérateurs différentiels, elle atteindra à son tour le niveau structural.

Remarquons qu'un concept qui a atteint le niveau structural peut encore être utilisé au niveau procédural : une fonction reste une fonction. La distinction procédural – structural n'est pas directement couplée à la distinction rhétorique – diophantien – symbolique. Ainsi, lorsque Diophante résout une équation, il est amené à la remplacer par une autre qui lui est équivalente et se place donc à un niveau structural. Et lorsque Viète résout l'équation générale $x + a = 3$, il prépare l'apparition de la notion de fonction dans sa conception procédurale.

En ce qui concerne l'apprentissage de l'algèbre, les observations de réponses d'élèves — débutants ou non — montrent que la maîtrise du premier niveau — le niveau procédural — est déjà semée d'embûches, certaines provenant de ce que des prérequis, notamment l'égalité, n'ont pas atteint le stade structural, d'autres venant d'usages plus ou moins conscients chez l'enseignant et devant lesquels l'élève peut être totalement désarmé et perdu (une perception différente d'une lettre selon l'usage : dans $y = mx+p$, par exemple, les lettres m et p ne jouent pas le même rôle que les lettres y et x). D'autres illustrations viendront dans la suite du texte. La deuxième étape est bien plus périlleuse encore, il s'agira de considérer de nouveaux objets (équations, systèmes d'équations, fonctions, structures ...) et d'opérer sur ceux-ci en tant qu'objets. Certains élèves de l'enseignement secondaire ne franchissent pas cette difficulté.

La transition du procédural au structural, même si elle est réalisée pour un concept particulier, doit être revécue par chaque élève à chaque rencontre d'un nouveau concept. Ce sont généralement des problèmes à résoudre qui provoquent la maturation nécessaire. Un élève qui n'est pas confronté à des situations nécessitant qu'un concept soit rencontré au niveau structural n'a aucune raison d'accéder à ce niveau pour ce concept.

4 Et l'enseignement ?

Les distinctions rencontrées précédemment se retrouvent aussi dans l'enseignement bien qu'il soit parfois difficile de déterminer l'origine des difficultés d'un élève, dans la mesure où les distinctions rhétorique – diophantien – symbolique et procédural – structural peuvent interférer.

On considère généralement que l'enseignement de l'algèbre ne commence pas en Belgique avant l'enseignement secondaire et que ce qui marque le début de cet apprentissage est le « calcul avec des lettres ». Nous pensons qu'il n'en est rien et que l'apprentissage de l'algèbre commence dès l'école primaire. A ce moment, il se situe au niveau rhétorique. La formulation en phrases des solutions des problèmes d'arithmétique est significative de ce stade. L'usage de formules telles que $S = L \times l$, ne signifie pas que l'élève a dépassé le stade rhétorique car il peut ne percevoir les lettres que comme des abréviations de « Longueur » et « largeur ».

Par ailleurs des interviews d'élèves en difficulté montrent que des handicaps qui se cristallisent « en algèbre » proviennent par exemple du manque de perception d'un nombre dans « $4+8$ », d'une mauvaise interprétation du signe « $=$ », sans oublier une mauvaise maîtrise des conventions de priorité dans un calcul comportant plusieurs opérations. Nous arrêtons ici cette liste non exhaustive ; plus de développement y sera donné dans la partie consacrée aux études cognitives réalisées avec des élèves.

Venons-en à l'enseignement usuel de l'algèbre. Si nous consultons les manuels ... car nous savons que ce sont eux qui déterminent la plupart des cours donnés aux élèves ..., nous constatons que les panoplies d'exercices ont très peu varié dans le temps, à travers les modifications de programme. ([2])

Dans un premier temps, les calculs de valeurs numériques d'expressions littérales ramènent immédiatement les élèves au calcul arithmétique : avec des nombres et des opérations, ils calculent un nombre. Le travail se situe dans la phase PROCÉDURALE de l'enseignement de l'algèbre : les objets sur lesquels les élèves opèrent ne sont pas les ex-

([2]) Une analyse détaillée de l'évolution des batteries d'exercices à travers les manuels scolaires utilisés depuis un siècle pourrait se révéler très instructive. Notons une évolution positive dans la dernière mouture des programmes du premier degré : les élèves devraient être amenés à *imaginer* des relations dans lesquelles ils *introduiraient eux-mêmes des lettres*. Ceci semble nécessaire pour qu'ils comprennent *un* des usages des lettres en algèbre. Le plus souvent, de telles relations sont données toutes faites.

pressions algébriques. Par contre, une certaine maîtrise du niveau symbolique doit déjà être acquise, ainsi qu'une maîtrise de l'égalité au niveau structural.

Nous verrons dans les études cliniques que cette activité de calcul peut éventuellement renforcer les difficultés des élèves qui n'ont pas atteint cette maîtrise de l'égalité. Cela ne signifie pas qu'il ne faut pas pratiquer ce genre d'exercices, mais qu'il faut les exploiter en connaissance de cause. Ils sont utiles pour éviter l'installation de certaines « règles analogiques fausses » que les recherches mettent en évidence, pour fixer l'idée qu'une lettre remplace un nombre, pour fixer les règles d'écriture propres à l'algèbre ... et les règles de priorité en principe connues par le calcul numérique antérieur.

Viennent très rapidement ensuite des « simplifications » ou « réductions d'expressions », des applications de la distributivité de la multiplication sur l'addition suivies de réduction des termes semblables, des mises en évidence (exemple : $3a+5b+2a = 5a+5b = 5 \times (a + b)$, des polynômes, des calculs avec des polynômes, des résolutions d'équations notamment par transformations d'équations en équations équivalentes (exemple: opérer sur les deux membres pour transformer $4x + 3 = 6x$ en $2x = 3$), des inéquations, des factorisations, des simplifications de fractions rationnelles, des divisions de polynômes, ... Tous ces exercices consistent cette fois à transformer l'écriture d'une expression littérale.

Cette fois, les élèves sont confrontés à la phase STRUCTURALE de l'enseignement de l'algèbre. Ils doivent aussi maîtriser totalement le niveau symbolique. Nous voyons donc que, dans les deux courants que nous avons discernés, un haut niveau d'assimilation est très rapidement exigé et que la transition entre les niveaux n'est guère assurée dans beaucoup de cas.

5 La maîtrise des nombres entiers

Des difficultés non négligeables rencontrées dès le stade rhétorique se répercutent aux stades ultérieurs. Le poids de l'histoire est également énorme. Nous consacrons ce paragraphe aux obstacles liés particulièrement à la conception des nombres négatifs.

Nous pouvons tous observer les difficultés qu'ont nos élèves à maîtriser le concept de nombre négatif et par voie de conséquence, d'accepter que zéro soit un nombre à part entière. Parmi les erreurs rencontrées, témoignant de ces problèmes, épinglons :

- $$0 - 2 = 0, \qquad \text{zéro a ici le sens de « rien »}$$

- la difficulté de traiter les parenthèses précédées du signe $-$, due aux différentes significations de ce signe : attribut du nombre négatif, opération unaire (prendre l'opposé de ...) et opération binaire. Le fait de ne pas accepter qu'une lettre puisse représenter un nombre négatif procède des mêmes causes (a est perçu comme positif et $-a$ comme négatif).

5.1 Des obstacles à la compréhension

Les difficultés qui viennent d'être mentionnées ont constitué de véritables obstacles à la compréhension des nombres entiers par les mathématiciens. Dans un article publié en 1981, [13], GLAESER dégage une dizaine d'obstacles qui se sont opposés à la maîtrise des nombres entiers; il en choisit six et examine au travers des écrits de dix auteurs, si ceux-ci ont franchi ou non ces différents seuils de compréhension. Voici un résumé de ses constatations :

Liste des obstacles

1. Inaptitude à manipuler des quantités négatives isolées

Les quantités négatives ne sont pas perçues comme des nombres. Voici ce qu'en dit Augustin CAUCHY (1789-1857) :

> *De même qu'on voit l'idée de nombre naître de la mesure des grandeurs, de même, on acquiert l'idée de quantité (positive, négative) lorsque l'on considère chaque grandeur de même espèce donnée comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de même espèce ....*

Pour nous, il s'agit ici du concept d'opérateur additif et soustractif et pas de celui de nombre.

Si Cauchy donne des règles de calcul sur ces quantités (positives et négatives), DUHAMEL, lui-aussi professeur à l'Ecole Polytechnique, écrit en 1866 ([11]) :

> *Toute démonstration de règles sur les quantités négatives isolées, ne peut être qu'une illusion puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres et n'ont aucune existence réelle.*

2. Difficulté de donner du sens à des quantités négatives isolées

Dès le départ, le concept de quantité positive ou négative engendre une confusion entre le signe opératoire et le signe attribut du nombre (signe prédicatif). Les quantités négatives n'ont donc de sens qu'à l'intérieur d'un calcul et non pas de manière isolée. Cela conduira DESCARTES (1596-1650), alors qu'il obtient des quantités négatives comme racines d'une équation, à parler de « fausse racine 5 » au lieu de -5 ([11]).

De même S.F. LACROIX en 1808 qualifie d'absurdes des solutions négatives. Voici ce qu'il dit à propos de l'équation $60 + 7y = 46$:

la seule inspection de cette équation y fait reconnaître une absurdité. En effet, il n'est pas possible de former le nombre 46 en ajoutant quelque chose au nombre 60, qui, seul, surpasse déjà 46.

Certains auteurs de manuels à l'usage des lycées (Tombeck, 1878 et Bourdon, 1834) vont jusqu'à dire qu'un problème est mal posé s'il se traduit par une équation ayant une racine négative.

3. Difficulté à unifier la droite numérique

C'est une conséquence même du sens donné à une quantité négative. Cela se manifeste lorsque les auteurs font une différence qualitative entre les quantités négatives isolées et les nombres positifs. La droite est alors décrite comme deux demi-droites opposées représentant des objets hétérogènes, d'une part les nombres positifs et d'autre part les quantités négatives. Il n'y a pas de lien entre eux, les problèmes d'ordre ne sont pas résolus.

Ainsi René Descartes n'utilise jamais d'axe sur lequel l'abscisse d'un point varie de moins l'infini à plus l'infini; tout au plus, utilise-t-il deux demi-droites opposées. Les courbes qu'il trace sont souvent réduites au premier quadrant.

Dans l'article « négatif » de l'encyclopédie de DIDEROT, D'ALEMBERT écrit :

> *Négatif, adj. (alg), les quantités négatives, en algèbre, sont celles qui sont affectées du signe moins et qui sont regardées par plusieurs mathématiciens comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est pas juste comme on le verra dans un moment ...*

Et il justifie de la manière suivante :

> *... on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle négatives et qu'on regarde faussement comme au-dessous de zéro sont très souvent représentées par des quantités réelles comme dans la géométrie ...*

Ici il fait allusion aux deux demi-droites des quantités positives et négatives qui ne diffèrent que par leur position et pas par les objets qu'elles représentent. Il poursuit :

> *De là il est assez naturel de conclure que les quantités négatives que l'on rencontre dans le calcul sont en effet des quantités réelles auxquelles il faut attacher une idée autre que celle que l'on avait supposée ...*

Il donne comme exemple :

> *Dans l'équation $x + 100 = 50$ qui donne $x = -50$, il faut voir que la quantité x est 50 et qu'elle doit être retranchée de 100. De sorte que l'on aurait dû énoncer le problème ainsi : trouver une quantité x qui*

étant retranchée de 100 donne 50 pour reste... la forme négative de x ne subsiste plus. Ainsi les quantités négatives indiquent réellement dans le calcul des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position.

4. Ambiguïté des deux zéros

Il est question du zéro absolu signifiant « rien », limite infranchissable, et du zéro relatif, lié à l'idée du zéro origine posé conventionnellement. Le concept de zéro relatif est intimement lié à l'invention des nombres négatifs, alors que le zéro absolu y fait obstacle. Voici ce que dit Lazare CARNOT (1753-1823), membre de l'Académie des Sciences :

> *Pour obtenir réellement une quantité négative isolée il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?*

5. La stagnation au stade des opérations concrètes

Elle résulte de la volonté d'attribuer un sens concret aux êtres numériques. Dès lors, les quantités négatives ne sont pas des nombres. Ainsi Cauchy dans son cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821) dit :

> *Nous prendrons toujours la dénomination de nombre dans le sens où on l'emploie en arithmétique en faisant naître les nombres de la mesure des grandeurs...*
>
> *D'ailleurs, les lettres dans les expressions algébriques ne définissent que des nombres tels que définis ci-dessus. $+A$ et $-A$ sont donc des quantités respectivement positive et négative.*

6. Désir d'un modèle unifiant

Il s'agit de la volonté de faire fonctionner un modèle additif également pour illustrer la multiplication où ce modèle est inopérant. Un exemple de cette volonté nous est donné par EULER (1707-1883), dans un ouvrage destiné aux débutants (1770) :

1. *La multiplication d'une dette par un nombre positif n'offre guère de difficultés : trois dettes de A écus font une dette de $3A$ écus. Donc $B \times (-A) = -AB$.*
2. *Par commutativité, Euler déduit que $(-A) \times B = -AB$.*
3. *Il reste à déterminer ce qu'est le produit $(-A) \times (-B)$. Il est clair, dit Euler, que la valeur absolue est AB. Comme $(-A) \times B$ vaut déjà $-AB$ il ne reste plus comme unique possibilité que $(-A) \times (-B) = +AB$.*

Voici de manière simplifiée comment se situent dix auteurs face à ces obstacles. Comme le reconnaît Glaeser, le codage est sommaire et peut-être discutable, mais il fournit une vision globale de la situation :

+ L'auteur a franchi l'obstacle
– L'auteur n'a pas franchi l'obstacle
? Pas de réponse possible

	Obstacles					
Auteurs	1	2	3	4	5	6
Diophante	–					
S. Stévin	+	–	–	–	–	–
R. Descartes	+	?	–	?		
C. Maclaurin	+	+	–	–	+	+
L. Euler	+	+	+	?	–	–
J. d'Alembert	+	–	–	–	–	–
L. Carnot	+	–	–	–	–	–
P. de Laplace	+	+	+	?	–	?
A. Cauchy	+	+	–	–	+	?
H. Hankel	+	+	+	+	+	+

5.2 Des différences culturelles

Certaines différences de perception sont dues à des faits de civilisation ou de société. Ainsi, il semble que le concept de nombre négatif soit apparu très tôt en Asie, [13].

- Les Chinois ont utilisé les nombres négatifs depuis le premier siècle. Les négatifs sont représentés par des baguettes noires et les positifs par des baguettes rouges. Les règles des opérations sont connues et utilisées pour résoudre des équations.

- Les Indiens ont utilisé très tôt les négatifs dans la résolution d'équations.

En Occident, bien que les négatifs (quantités négatives) soient apparus vers la fin du XV^e siècle chez les mathématiciens qui s'intéressent à la résolution d'équations, ce concept évolue différemment en France et en Allemagne. Gert SCHUBRING, [35], constate une rupture dans les progrès réalisés en France après la révolution française et cela sous l'influence des Idéologues.

Cette école de philosophes aurait exercé une grande influence sur les sciences en France fin du XVIII^e siècle et début du XIX^e siècle et particulièrement dans l'enseignement de celles-ci. L'Idéologue MAINE DE BIRAN veut *nettoyer* les mathématiques de toutes les obscurités. Il mentionne comme telles les quantités négatives. Comme le rapporte Schubring, pour Biran les nombres sont interprétés comme des grandeurs géométriques « susceptibles d'être construits et traduits en lignes ». Chez l'Idéologue DESTUTT DE TRACY (1804), « une quantité quelconque est donc calculable à proportion qu'elle soit réductible directement ou indirectement en mesure de l'étendue, car c'est là la propriété des êtres la plus éminemment mesurable ». La prééminence de la géométrie sur l'algèbre pour les Idéologues élimine les quantités négatives.

A l'inverse, l'Allemagne donne très tôt un statut mathématique aux nombres négatifs.

- METZ, professeur de philosophie à l'université de Würszburg, développe le calcul sur les nombres négatifs et affirme que l'on peut comparer les négatifs aux positifs (1804). On peut donc comprendre que -7 est plus petit que -3.

- WILCKENS fait la distinction très nette entre le signe moins de l'opération, le signe moins d'un nombre et la valeur absolue de celui-ci (1800). L'opposé d'une quantité A est notée $\bar{A}$ et définie par l'équation $A + \bar{A} = 0$.

- Une théorie des nombres négatifs est publiée en 1817 par FÖRSTMANN, professeur à Dantzig. Il fait très clairement la distinction entre grandeur et nombre. Toutes les opérations algébriques sont effectuées sur les nombres et non pas sur les grandeurs.

- Enfin, on trouve chez HANKEL (1867) une théorie des nombres entiers où les nombres ne sont plus découverts mais inventés (voir [13]). Les opérations sont prolongées aux négatifs avec pour objectif une structure algébrique qui a les bonnes propriétés (respecter la distributivité à gauche et à droite).

Conclusions

1. Il semble que la volonté de trouver un modèle concret pour les quantités négatives ait été un obstacle à l'existence et au statut de nombre de ces quantités. Le sens du zéro absolu n'a pas arrangé les choses. De même la recherche, à tout prix, d'un modèle concret pour faire comprendre une règle (par exemple la règle du produit de deux négatifs) peut entraver la compréhension soit de cette règle, soit d'autres règles.

2. La confusion entretenue entre le signe moins de l'opération soustraction et le signe moins attribut de la quantité négative a été un obstacle à l'existence des quantités négatives isolées.

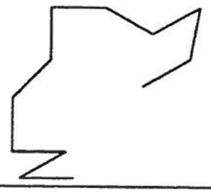
6 La maîtrise de l'algèbre élémentaire

Des recherches nombreuses et menées aussi bien aux Etats-Unis qu'en Grande Bretagne et en France dans les années 1970 et 1980 conduisent à des conclusions concordantes. En tenir compte permettrait d'assurer une meilleure compréhension des objets algébriques et une meilleure progression des difficultés à affronter par les débutants. Nous ébauchons dans ce paragraphe une synthèse des résultats en les regroupant suivant les thèmes les plus souvent mis en évidence.

6.1 Usage des lettres

Une recherche menée en Grande Bretagne de 1980 à 1983, [5], exploite — entre autres — les problèmes suivants :

Que peux-tu écrire à propos du périmètre de cette figure sachant qu'une partie du dessin a été effacé et que la figure comprend en tout n côtés, chacun de longueur 2 ?



Interviewés individuellement, des élèves de 14 et même 16 ans répondent que s'il y avait 15 côtés, il faudrait multiplier 2 par 15 pour obtenir un périmètre égal à 30. Le besoin psychologique d'une réponse numérique entraîne chez une enfant de 14 ans la réponse 28. Pas parce qu'elle a 14 ans, mais parce que n est la 14e lettre de l'alphabet ! Elle ne perçoit aucun autre moyen d'exploiter la donnée littérale n. D'autres arrivent à des compromis moins extrêmes : poussés par le chercheur, ils finissent par écrire $2 \times n$, mais se montrent étonnés de la satisfaction de celui-ci et l'expriment JE PENSAIS QUE VOUS VOULIEZ LA RÉPONSE ! .

Epinglons deux difficultés pour l'élève :

- la réussite « en mathématique » a trop souvent consisté à donner le bon nombre
- une écriture dans laquelle un signe opératoire subsiste ne peut pas être donnée par certains élèves. Ils y voient une procédure, quelque chose à exécuter mais pas une réponse.

Les chercheurs voient là une extrapolation néfaste de l'enseignement de l'arithmétique et/ou un effet psychologique qu'ils appellent le souci de *fermeture* des systèmes mathématiques. (3) Ce souci pourrait pousser les élèves à remplacer $5a + 7b$ par $12ab$.

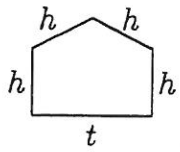
Nous venons de voir la lettre n remplacée par le nombre 14 (à cause de sa position dans l'alphabet courant). Voici quelques autres malheurs rencontrés dans l'usage de lettres :

- Si une équipe a marqué x buts et une autre y buts, combien en ont-elles marqué à elles deux ?
  Puisque le souci de fermeture interdit la réponse $x+y$ et qu'en l'absence de nombres on utilise des lettres, une réponse vient : z ... Dans le cadre de son interprétation, l'élève a fait tout ce qu'il pouvait.
- Que vaut $2ab + a$ lorsque $a = 5$ et $b = 8$?
  Une réponse moins rare qu'on ne le croit est 263 (parce que $258 + 5 = 263$). Ainsi, 5 est mis à la place de a et 8 à la place de b dans une configuration dont il ne reste plus que *l'aspect graphique*. (4) On constate évidemment une grosse perturbation de l'élève lorsque a prend la valeur 78 (ou tout autre nombre de plusieurs chiffres).
- Le problème de configuration a été relevé aussi dans des écritures de périmètres. Des élèves anglais agés de 14 à 15 ans ont été soumis à un questionnaire (voir [25]).

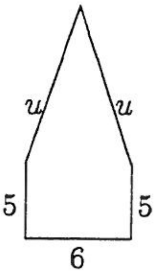
(3) On pourrait aussi parler de stagnation au stade procédural.

(4) On pourrait considérer ce phénomène comme résultant d'une lecture relevant du stade rhétorique.

20 % ont fourni les réponses $p = 4ht$ ou $p = hhhht$ comme périmètre de



16 % ont fourni $p = 2u16$ ou $p = uu556$ comme périmètre de



- Le remplacement de $3 + 5a$ par $8a$ satisfait aussi celui qui se sent obligé de faire disparaître le signe opératoire (apparent pour $+$, caché pour $\times$) et qui effectue docilement tout calcul possible dans l'assemblage de signes qu'il voit.
- L'utilisation exclusive de formules comme $S = L \times l$ ou l'usage systématique de lettres qui aident à se souvenir de la signification des variables peut entraîner des confusions. L'élève en arrive à recommencer une résolution complète de l'équation $5y - 41 = 8(7 - 4y)$ alors que $5x - 41 = 8(7 - 4x)$ a été préalablement résolue. Le rôle de la lettre (« l'inconnue » ?) n'est pas perçu, le contexte familier de l'alphabet (n est la quatorzième lettre dans un exemple précédent, ici x et y sont deux lettres différentes) occulte l'idée d'une boîte noire. L'usage des lettres est enfin vicieusement différent selon le contexte puisque, de VARIABLE lorsqu'il s'agit de tester la valeur de vérité d'une égalité, elle devient L'INCONNUE lorsqu'il s'agit de résoudre une équation. Sans oublier que L et l peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans le calcul de l'aire tandis que $5y - 41 = 8(7 - 4y)$ n'est vraie que pour une seule valeur de y. Nous reprenons plus loin le sujet spécifique des équations équivalentes.

6.2 La notion d'égalité

La maîtrise de l'égalité nécessite que le signe « = » exprime une relation. De nombreuses études montrent que l'égalité recouvre trop souvent tout autre chose.

Nicolas HERSCOVICS et Carolyn KIERAN [16] ([5]) confirment une étude de BEHR, ERLWANGER et NICHOLS [1] : le signe « = » est perçu comme un signe d'EXÉCUTION, il faut « faire quelque chose ». Cela se manifeste par exemple par le fait que $2 + 7$ n'est pas senti comme un nombre.

Des élèves (de 7e grade -USA) ont été invités à proposer

- une égalité.
  Ils donnent $4 + 9 = 13$ et d'autres exemples exclusivement du type $a * b = c$, mais pas par exemple $4 + 5 = 2 + 7$ ni $13 = 4 + 9$.

([5]) Une traduction de cet article est donnée en annexe.

- une égalité avec une opération dans les deux membres.
  Ils donnent $5 \times 4 = 4 \times 5$ ou d'autres illustrations de la commutativité d'une opération. Bref, des égalités apprises.

- une égalité avec des opérations différentes dans les deux membres.
  Ils s'affranchissent avec $5 + 5 = 2 \times 5$ ...et $6 + 3 = 6 \times 3$ ...reconnue rapidement comme incorrecte et modifiée, $6 + 3 = 3 \times 3$.

- des égalités avec plus d'une opération dans chaque membre.
  Voici des réponses obtenues :

  $2 + 2 + 2 = 2 \times 3$, $4 \times 3 + 1 - 3 = 3 \times 2 + 4$, $3 + 5 + 4 = 12 - 4 + 4$ ...mais aussi $2 + 1 \times 5 = 3 \times 4 + 3$.

Nous voyons dans le dernier exemple proposé une nouvelle manifestation de la pression exercée par l'écriture gauche-droite. L'élève calcule au fur et à mesure qu'il imagine et écrit, les règles de priorité préalablement apprises sont occultées. Les auteurs signalent que ce travail produit chez les élèves une extension nouvelle de l'usage de l'égalité. Une autre étude de Carolyn Kieran [20], montre que l'impact de la lecture et de l'écriture de gauche à droite est tel que les élèves ne trouvent d'eux-mêmes aucune ambiguïté à $2+1 \times 5$; pour eux, $2 + 1 \times 5 = 15$ sans aucun besoin de parenthèses.

Ainsi pour de nombreux élèves, les signes opératoires et le signe « = » commandent l'exécution de procédures. Il en résulte que l'égalité n'acquiert pas son caractère de relation symétrique et transitive, ce qui empêche notamment que la lecture gauche-droite et la lecture droite-gauche interviennent avec la même facilité selon les besoins. Il en résulte nécessairement des difficultés lors du travail sur les équations.

Rappelons aussi que l'habitude de lire « 2 plus 5 font 7 », ou « en additionnant 2 et 5 on obtient 7 » (ou d'autres variantes dans lesquelles « quelque chose devient » ou « quelque chose donne ») pour $2+5 = 7$, ne conduit pas l'élève à percevoir l'égalité comme une relation symétrique entre deux expressions d'un nombre, ni $2 + 5$ comme un nombre.

6.3 La mise en équation

Le problème suivant a été repris dans de nombreuses recherches :

> *Ecris une équation utilisant les variables e et p pour représenter la relation suivante : « Il y a six fois autant d'étudiants que de professeurs dans cette université ». Utilise e pour le nombre d'étudiants et p pour le nombre de professeurs.*

Parmi 150 candidats ingénieurs (entrée à l'Université du Massachusetts) qui réussissent (réussite entre 91 et 99 %) les résolutions d'équations, seulement 63 % écrivent l'équation correcte $e = 6p$.

John CLEMENT, [7], dresse une synthèse de protocoles d'entretiens individuels en classant les comportements en catégories qui conduisent à une bonne équation ou au contraire à une relation incorrecte. En résumé, les élèves qui échouent utilisent

- une construction de formule qui suit aveuglément les éléments clés dans la lecture : ils rencontrent successivement « 6 », puis « étudiants », et enfin « professeurs » et cela amène $6e = p$

- un assemblage d'informations sans contrôle de leur interaction : pour que les étudiants constituent un groupe plus important que les professeurs, « 6 » est associé à « e » plutôt qu'à « p ». Cette erreur de lecture a été rapportée en 1983 par MEVARECH et YITSCHAK, [30] : sur 150 étudiants de collège testés, 37 % répondent que dans l'équation $3k = m$, k est supérieur à m.

- une assimilation des lettres proposées à des étiquettes : « e » est lu « étudiant », devenant « un étudiant » plutôt que « le nombre d'étudiants ». Mis en présence des deux égalités $6e = p$ et $e = 6p$, l'élève choisit la première (incorrecte) comme traduction du problème. La lecture de $6e = p$ est alors « six étudiants pour un professeur » . La variable a donc perdu son sens pour devenir une abréviation d'un mot. Le rapprochement n'est peut-être pas fortuit avec les égalités du style « 100 cm = 1 m » où m est effectivement une étiquette, simple abréviation de « mètre ».

Par contre, les élèves qui réussissent utilisent

- une hypothétique multiplication ou division de la population d'un groupe pour obtenir celle de l'autre groupe.

- une substitution numérique pour tester une équation élaborée. Ils expliquent alors la signification de l'équation en termes opératoires : par exemple, « il faut multiplier le nombre de professeurs par 6 pour obtenir le nombre d'étudiants ».

L'analyse des protocoles montre que l'inversion des nombres dans l'écriture de l'équation n'est pas du tout un problème d'attention. Après avoir écrit successivement $6e = p$, $\frac{e}{6} = p$ et $e = 6p$, des élèves justifient finalement le mauvais choix ! C'est notamment le cas d'un étudiant ingénieur, réussissant fort bien ses études et calculant correctement et rapidement en cours d'interview la dérivée d'une fonction composée. Une des causes supposées de difficulté réside dans la présence en filigrane des notions de fonction et/ou de relation dans une expression du type $ax = by$, alors que l'idée de « nombre caché » suffit à interpréter $ax = b$ (a et b étant connus). L'élève qui choisit la bonne équation entre $e = 6p$ et $6e = p$ en procédant à un contrôle par substitution numérique n'a pas nécessairement *compris pourquoi* son choix est correct.

Dans le même groupe de candidats ingénieurs, la réussite tombe à 27% pour la mise en équation de la situation suivante :

Au restaurant de la Cloche d'Or, pour quatre clients qui commandent du gâteau au fromage, il y en a cinq qui commandent de la salade de fruits. Utilise g pour représenter le nombre de mangeurs de gâteau et s pour le nombre de mangeurs de salade de fruits.

L'erreur la plus fréquente est la permutation des facteurs multiplicatifs 4 et 5.

Les auteurs reconnaissent que le passage des énoncés verbaux aux équations $6p = e$ et $4s = 5g$, ou l'interprétation de celles-ci, relèvent du niveau structural. Il s'agit donc du niveau jugé plus difficile que le niveau procédural. Une étude menée en 1980 par SOLOWAY, LOCHHEAD et CLEMENT, [36] montre qu'une explicitation procédurale du problème dit « professeurs-étudiants » conduit à un taux de réussite nettement supérieur. Voici la présentation du problème dans le cadre algorithmique :

Etant donné la situation suivante : « Il y a six fois autant d'étudiants que de professeurs dans cette université », écris pour l'ordinateur un programme qui permet d'obtenir en sortie le nombre d'étudiants lorsqu'on fournit en entrée (au clavier) le nombre de professeurs. Utilise e pour le nombre d'étudiants et p pour le nombre de professeurs.

On constate ici que la description du problème est rédigée en termes de procédure et cela entraîne une formulation également procédurale de la résolution. (Par exemple : « Pour obtenir la valeur de la variable e, je dois multiplier la valeur de p par 6 ».) Ceci favorise significativement une résolution correcte du problème, mais on peut se demander si cette réussite liée à la perception entrée-sortie fait progresser vers la perception structurale de l'équation.

6.4 La recherche des solutions d'une équation

6.4.1 Les calculs à trou

GINSBURG [12], montre que les jeunes enfants interprètent le symbolisme différemment des adultes.

Ainsi, assimiler les « calculs à trou » du style $2 + \square = 7$ à une résolution d'équation relève de la familiarisation acquise par l'adulte. La découverte du contenu du « trou » ne relève pas nécessairement d'une technique de transformation d'équation, mais peut découler

- d'un comptage systématique : 3, 4, 5, 6, 7 pour évaluer l'écart
- d'un procédé par essai-erreur qui se repète jusqu'à obtenir 7.
- d'une intervention (peu consciemment contrôlée) de la mémoire si $2 + 5 = 7$ est un *fait arithmétique connu.*

Qu'il n'y ait là aucune intervention d'un processus algébrique est étayé par la constatation que les mêmes élèves qui ont trouvé la solution pour $2 + \square = 7$ échouent lorsque les nombres 2 et 7 sont remplacés par de grands nombres.

6.4.2 Des processus informels

Nicolas HERSCOVICS et Liora LINCHEVSKI [17], ont donné des équations à résoudre à des enfants (âge moyen 12 ans 9 mois) ayant pratiqué des substitutions numériques dans des expressions littérales et des concaténations du style $2a + 3a = 5a$, mais n'ayant reçu aucun enseignement sur la résolution d'équations. Les 22 enfants étaient en situation de réussite dans leur cours de mathématique. Pour permettre aux élèves de fixer totalement leur attention sur les démarches de résolution et leur donner le maximum de chance de ne pas perdre le fil conducteur de leur démarche personnelle, des calculatrices (élémentaires, non conditionnées aux règles de priorité) sont mises à leur disposition pour résoudre les équations. Ils vérifient systématiquement leur réponse en la substituant dans l'énoncé.

Nous ne pouvons passer ici en revue les 50 équations posées et les démarches individuelles enregistrées (les élèves « pensaient tout haut » et étaient accompagnés de deux observateurs). Epinglons quelques constatations :

- Les élèves exploitent différentes procédures de résolution :
  - des reconnaissances numériques, par exemple pour $16n = 64$, la réponse 4 est donnée sans autre explication que $16 \times 4 = 64$.
  - un opérateur inverse, par exemple lorsque les nombres à exploiter sont plus grands, ou pour résoudre $n : 6 = 13$.
  - des substitutions de valeurs dans l'inconnue jusqu'à obtenir une proposition vraie.
- Aucun élève n'a transformé $37 - n = 18$ en $37 = 18 + n$, ni $\frac{84}{n} = 4$ en $84 = 4 \times n$: les élèves n'opèrent pas sur l'inconnue ou avec l'inconnue.
- Une même équation est parfois résolue différemment par différents élèves, un même élève utilisant des procédés différents dans différentes équations, mais les auteurs insistent sur le fait qu'ils n'ont observé aucun élève opérant des transformations algébriques sur l'inconnue.
- Tous les élèves résolvent correctement les équations $3n - 12 = 33$ et $16n - 215 = 265$. Pour la première, neuf élèves utilisent consécutivement deux opérateurs inverses, trois utilisent un opérateur inverse puis une reconnaissance numérique et six procèdent uniquement par substitutions numériques. A cause des plus grands nombres, seize élèves utilisent deux opérateurs inverses successifs et quatre des substitutions systématiques pour résoudre la deuxième équation. Des élèves réussissent sans utiliser d'opérateurs inverses : pour résoudre $3n - 12 = 33$ par exemple, ils reconnaissent que c'est de 45 qu'il faut retirer 12, ils passent donc à l'équation $3n = 45$ ... qu'ils résolvent ensuite par substitution ou par reconnaissance d'un calcul connu ou par division par 3 .
- Certaines équations sont récrites par certains élèves : $420 = 13n + 147$ est remplacée par $13n + 147 = 420$. Ce besoin confirme le rôle différent des deux membres d'une équation, peut-être induit par les habitudes « canoniques ».

- Pour résoudre des équations dans lesquelles l'inconnue apparaît deux fois dans le même membre ($3n + 4n = 35$, $17n - 13n = 32$ par exemple), deux élèves seulement groupent les termes en n, faisant intervenir une procédure algébrique ; tous les autres continuent par substitutions numériques uniquement, trois élèves éprouvant le besoin d'entourer les produits par des parenthèses. Les examinateurs soulignent que les élèves qui ont groupé les termes en n dans les deux équations ne le font plus dans les équations suivantes, ce qui montre que le processus n'est pas acquis et confirme la difficulté déjà signalée d'opérer avec l'inconnue.

- Trois équations avec l'inconnue dans les deux membres sont posées : $n + 15 = 4n$, $4n+9 = 7n$ et $5n+12 = 3n+24$. Deux élèves seulement échouent dans la résolution de la première et un des échecs est dû à la valeur 45 attribuée à $4n$ lorsque n vaut 5. Comme la même erreur est commise dans la résolution et la vérification, celle-ci n'amène pas l'élève à se corriger. Trois élèves échouent dans la résolution de la deuxième et deux dans la résolution de la troisième. Les réussites (20 sur 22 et 19 sur 22) sont obtenues par essai-erreur en substituant des valeurs numériques à la variable.

Le pourcentage de réussite obtenu dans cette étude peut paraître étonnamment élevé, mais il faut rappeler que les élèves se trouvaient par ailleurs en situation de réussite en mathématique et contrôlaient les solutions obtenues systématiquement (en disposant toujours d'une calculatrice). Cette vérification les amenait parfois à corriger un résultat erroné ou une lecture inadéquate dans la résolution comme dans la vérification (remplacement de $63 - 5n = 28$ par $5n - 63 = 28$ par exemple). Des constatations essentielles pour l'enseignement se dégagent de cette étude :

- Des équations ayant même structure provoquent des réactions différentes : par exemple des coefficients plus élevés provoquent un plus grand recours à l'inversion d'opérateurs (exemple : $3n - 12 = 33$ et $16n - 215 = 265$).

- Une démarche investie avec succès dans une résolution ne l'est pas nécessairement dans une résolution suivante, même si elle peut s'y avérer efficace. (Exemple : deux élèves groupent spontanément les termes en n dans $11n + 14n = 175$ et dans $17n - 13n = 32$, mais ne le font pas dans $5n + n = 78$ (pas de coefficient explicite dans le deuxième terme !), ni dans $7n+5n+7 = 55$, ni dans des équations suivantes. Une démarche, même inventée par l'élève se révèle ainsi très fragile à la moindre perturbation dans la forme de l'expression.

On constate dans l'expérience précédente que des élèves peuvent obtenir de bons résultats tout en travaillant au niveau procédural. Le recours à des méthodes relevant du niveau structural ne se justifie que si les équations à résoudre présentent une complexité suffisante. D'autres recherches antérieures débouchent sur des taux de réussite moins élevés.

Dans un article plus récent, [27], Herscovics et Linchevski notent que les résolutions d'équations ont joué un rôle important dans le développement du calcul algébrique. Ils proposent de renverser l'ordre habituel de présentation du calcul algébrique élémentaire en présentant des exercices de résolution d'équations avant que les élèves aient reçu un enseignement portant sur la manipulation d'expressions algébriques. Une expérience d'ampleur limitée les confirme dans l'opinion que les résolutions d'équations favorisent les opérations sur, ou avec, des lettres. Ils analysent les démarches intuitives de six élèves et leur évolution au cours de trois leçons où des équations judicieusement choisies donnent progressivement du sens à des manipulations telles que grouper des termes semblables, décomposer un terme en somme ou différence de deux termes semblables, transformer une équation.

Kieran [22], analyse des interviews de six élèves d'environ 13 ans (7[e] grade) considérés comme moyens en mathématique et n'ayant suivi aucun enseignement d'algèbre. Les questions portent sur l'utilisation d'une lettre, sur la notion d'égalité, sur des résolutions d'équations et sur l'équivalence d'équations. L'analyse des réponses la conduit à séparer les enfants en deux groupes :

- Ceux qui perçoivent la lettre comme un nombre inconnu (aussi bien dans $5 + a = 12$ que dans $a + 3$). Pour résoudre une équation, ils procèdent par substitution, exécutant ainsi les opérations telles qu'elles sont données dans l'équation. Lorsqu'on leur propose d'ajouter 10 au membre de gauche de $x + 69 = 1351$, ils suggèrent d'ajouter également 10 au membre de droite pour conserver l'équation.

- Ceux qui expliquent le sens de la lettre en donnant une succession de calculs pour obtenir sa valeur : ils donnent donc $12 - 5$ pour $5 + a = 12$, mais ne trouvent aucune signification à $a+3$. Pour résoudre une équation, ils procèdent plus ou moins systématiquement en commençant par la droite et en essayant de faire disparaître un nombre à la fois : par exemple, pour résoudre $3a + 3 + 4a = 24$, ils partent de 24, divisent 24 par 4, retirent 3 au résultat et enfin hésitent à soustraire 3 ou à diviser par 3. Confrontés à l'équation $x + 69 = 1351$ et la question « qu'arrive-t-il si on ajoute 10 à $x + 69$ », ils suggèrent la nouvelle équation $x + 69 + 10 = 1351 - 10$.

Il apparaît que le deuxième groupe, qui opère efficacement en utilisant des opérateurs inverses dans des équations très simples, est incapable de transférer le processus dès que la forme d'écriture se complique un peu. Après dix leçons portant sur les notions d'égalité, d'inconnue, sur l'application d'une même transformation aux deux membres d'une égalité et sur la résolution d'équations, les élèves de ce groupe semblent avoir acquis la notion de lettre tenant la place d'un nombre et la renforcent en utilisant la méthode de substitution numérique pour certaines équations, mais ils résistent à la méthode de transformation identique des deux membres de l'égalité. Ce passage d'une équation à une équation équivalente ne semble pas prendre de sens pour eux. Par contre, les élèves du premier groupe utilisent régulièrement cette procédure.

Filloy et Rojano, [9], ont travaillé avec trois classes d'élèves de 12 à 13 ans ayant appris à résoudre des équations du type $x \pm a = b, ax \pm b = c, ax - b = c$, mais n'ayant pas résolu d'équations du type $ax \pm b = cx$, ni $ax \pm b = cx \pm d$. La recherche met en évidence une très mauvaise maîtrise des mécanismes algébriques enseignés sur les premiers types d'équations puisque les élèves sont incapables de les transférer à la résolution d'équations présentant l'inconnue dans les deux membres. Les difficultés sont attribuées au niveau structural auquel les élèves sont confrontés, ayant à opérer sur des objets algébriques (opérer avec les inconnues en soustrayant cx par exemple, transformer une égalité en une autre en opérant sur les deux membres). Ces auteurs pensent que c'est le passage aux équations présentant l'inconnue dans les deux membres qui constitue un seuil difficile à franchir dans l'apprentissage.

Les trois recherches témoignent de la difficulté rencontrée pour opérer sur une égalité. Elles montrent que des réussites sont possibles dans des résolutions d'équations préalablement à tout apprentissage, que les processus utilisés sont divers et que certaines réussites apparentes à court terme peuvent conduire à des difficultés à long terme. Filloy et Rojano identifiaient un seuil de difficulté à franchir dans le passage aux équations présentant l'inconnue dans les deux membres, Herscovics et Linchevski voient plutôt ce seuil non pas dans un type d'équation, mais dans LE BESOIN D'OPÉRER AVEC OU SUR L'INCONNUE (5 élèves sur 6 ne résolvent pas correctement $3a + 5 + 4a = 19$ chez Kieran tandis que les 22 élèves réussissent dans l'expérience de Herscovics et Linchevski, mais la plupart des élèves qui obtiennent la solution correcte procèdent par substitution sans aucune modification de l'écriture de l'équation. Le remplacement de la somme de $3a$ et $4a$ par $7a$ est extrêmement rare et ce comportement n'est pas reproduit d'une équation à une autre).

6.4.3 Des méthodes de résolution d'équations

Les différentes études relèvent l'utilisation de quelques méthodes :

- PAR SUBSTITUTION : la comparaison des valeurs obtenues dans les deux membres après substitution d'un nombre à la variable.
- PAR CACHE : dans $3 \times (x - 2) = 18$, l'élève cache $x - 2$ avec son doigt pour résoudre $3 \times \ldots = 18$, on procède ensuite de même avec $x - 2 = 6$ en cachant x.
- PAR OPÉRATEURS INVERSES : à rapprocher de la pratique des flèches dans notre enseignement primaire :

$$\square \xrightarrow{-2} \cdots \xrightarrow{\times 3} 18$$

qui conduit à la résolution de $3 \times (x - 2) = 18$ en utilisant les opérateurs inverses :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "-2"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times 3"] \arrow[l, bend left, "+2"] & 18 \arrow[l, bend left, "\div 3"] \end{tikzcd}$$

- PAR ÉQUATIONS ÉQUIVALENTES : un opérateur est appliqué aux deux membres de l'équation pour la transformer en une équation nouvelle ayant le même ensemble de solutions.

Tous les chercheurs cités estiment

- nécessaire l'utilisation de la méthode par substitution, notamment pour faire comprendre la notion de variable et d'égalité,
- nécessaire mais très difficile et à amener comme étape ultime, le principe d'équivalence d'équations.

John E. BERNARD et Martin P. COHEN [2] proposent une évolution en quatre étapes.

- Laisser d'abord utiliser librement la méthode de substitution. Les élèves procèdent d'abord de manière anarchique et fastidieuse, mais ils s'organisent ensuite en essayant d'encadrer progressivement la valeur à atteindre. Ils se familiarisent avec la valeur de vérité d'une égalité et la notion de solution d'une équation.
- Introduire un ensemble bien choisi d'équations qui fera apparaître des rapprochements : insérées parmi d'autres, on trouve par exemple $15+(10-x) = 22$, $10-x = 7$ et $15 - (10 - x) = 8$. Cela favorise l'introduction de la méthode par cache. La lecture de $15 - \square = 8$ étant du style « Que faut-il soustraire de 15 pour obtenir 8 ? », les opérateurs qui interviennent dans la résolution sont ceux qui sont écrits dans l'équation.
- Introduire les opérateurs inverses. Les auteurs considèrent que cette méthode très liée à la méthode par cache ne lui est ni mathématiquement, ni psychologiquement équivalente puisqu'elle n'utilise plus les opérateurs lus dans l'équation mais leurs inverses. Même si cela n'est pas explicité, il s'agit d'inverser une fonction composée. Ils suggèrent de ne l'introduire qu'à partir d'équations ayant une complexité suffisante (par exemple $\frac{7(2x-3)-5}{10} = 3$) pour que l'écriture des équations de plus en plus simples à écrire successivement dans la méthode précédente devienne fastidieuse.
- Introduire des équations équivalentes en s'assurant de différentes maîtrises á acquérir :
  - calculer deux expressions numériques et les comparer,
  - compléter un membre pour équilibrer une égalité,
  - appliquer un opérateur donné aux deux membres d'une égalité,
  - reconnaître, parmi des équations données, des équations équivalentes,
  - reconnaître un but à atteindre en cours de résolution (par exemple « se débarrasser des variables dans un membre »).

Nous venons de regarder assez longuement les problèmes liés à la résolution d'équations. Ce n'est pas par hasard qu'elle occupe une bonne place dans les recherches : sa part dans l'enseignement de l'algèbre est probablement celle du lion dans différents pays.

6.5 Conclusions générales

- L'arithmétique doit constituer un support solide pour l'algèbre.
- Les lettres doivent être utilisées avec une meilleure conscience de la variété des contextes dans lesquels elles interviennent.
- L'arithmétique et l'algèbre ont des usages communs, mais aussi des usages qui s'opposent. Ces différences doivent être explicitées et reconnues dans les erreurs qu'elles provoquent.
- Des aller-retour doivent être spontanément effectués par les élèves entre arithmétique et algèbre, de manière à donner toujours du sens au travail en cours.
- Le support géométrique, des énoncés de problèmes (dits « de vie courante » — « word-problems » en anglais), des schémas variés doivent être exploités pour introduire des lettres et construire progressivement des expressions algébriques. Réciproquement, des expressions doivent faire l'objet d'interprétations variées pour contrôler qu'un sens leur est donné par les élèves.
- Les techniques doivent être bien explicitées et ne doivent intervenir que parce qu'elles apportent plus de clarté ou qu'elles dénouent une situation pour laquelle les connaissances antérieures échouent.
- La nature et le niveau des difficultés qui apparaissent dans l'apprentissage d'une matière doivent être analysées en détails.

7 Des tentatives d'amélioration

Les difficultés rencontrées par les enfants des premières années du secondaire en algèbre sont assez bien cernées et ont été décrites ci-dessus : compréhension de la notion de variable, statut du signe « = », notion d'équation, etc.

Assez peu de remèdes ont, en revanche, été proposés. Nous examinerons d'une part une approche originale qui s'est déroulée en URSS et que nous connaissons grâce à un article de H. FREUDENTHAL [10], d'autre part des tentatives d'utilisation d'un ordinateur. En annexe, on trouvera la traduction d'un article américain [16], centré sur les notions d'égalité et d'équation.

7.1 En URSS

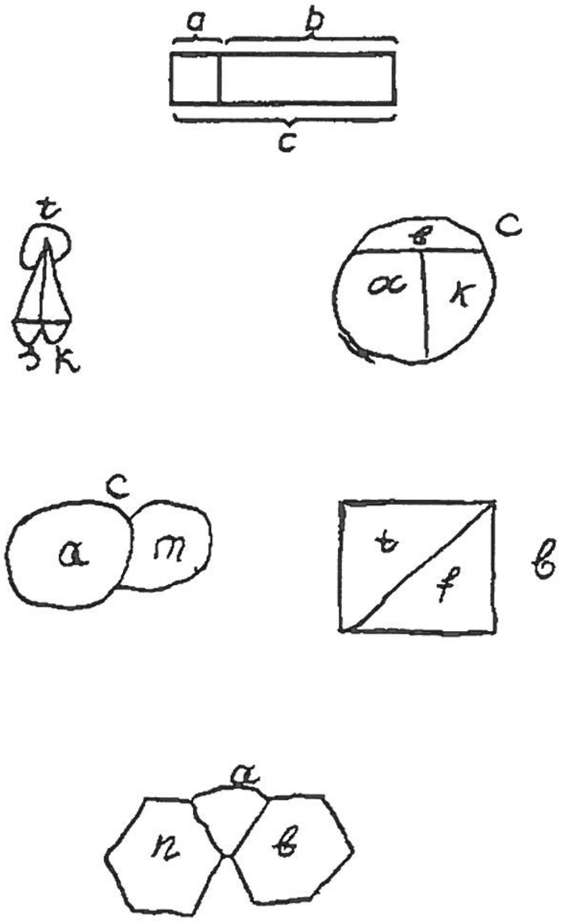
Deux courants se sont affrontés en URSS au début des années 60 à propos de la résolution de problèmes enseignée aux enfants de 7 à 11 ans.

- Les uns voulaient enseigner d'abord les nombres entiers, l'arithmétique des nombres entiers et des fractions, les résolutions de problèmes par des méthodes purement arithmétiques et passer seulement ensuite à l'algèbre (considérée comme utilisant des lettres et des équations).

- Les autres comparent les enfants contraints à utiliser les méthodes arithmétiques à des soldats utilisant des armes antérieures à Pierre le Grand pendant leur première année de service militaire.

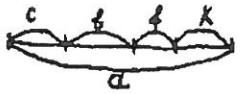
Une approche radicale a été étudiée sous l'impulsion de DAVYDOV [10] : dès qu'ils connaissent la suite des nombres naturels, les enfants sont amenés à traiter sous forme littérale des relations entre un tout et des parties de ce tout. Un ensemble de 42 leçons de 30 à 35 minutes a été structuré suivant deux phases d'apprentissage, les nombres n'apparaissant qu'en fin de la seconde :

- phase 1: « Le tout et des parties »
  - Manipuler des bandelettes qu'on découpe, des récipients contenant de l'eau, du sable et transvaser des contenus.
  - Représenter graphiquement les manipulations et utiliser des lettres (les dessins ci-dessous sont des productions d'enfants).



– Connecter les activités précédentes avec des écritures comprenant les signes +, – et =

$$k = a - c - b - f$$



– Analyser une écriture. Par exemple :

  * représenter $k = a - b - c - f$
  * souligner ce qui représente « le tout » dans $c = f - e - k$.

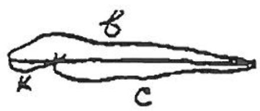
- phase 2 : Résolution de problèmes

  – Traduire un énoncé par un dessin, un schéma, des formules. Exemple : « On dispose de a crayons rouges et b crayons bleus, et ensemble on a c crayons. »

  – Inventer un texte correspondant à un dessin donné.

  – Inventer un texte correspondant à une formule donnée.

Insistons sur l'originalité de la recherche : la notion du tout et de parties est longuement vécue sur des grandeurs physiques : des découpages de rubans, des transvasements de liquide, de sable, etc. Pendant toute la première phase, aucune graduation n'apparaît sur les bandelettes ou les récipients. Seuls des repères de niveaux atteints sont apportés sur le matériel : tout l'accent est ainsi mis sur une interprétation qualitative de l'usage de l'addition et de la soustraction, aucun nombre, aucun calcul n'interviennent. Dès que des formules littérales sont écrites en liaison avec un schéma, toutes les formules sont parfois demandées, comme par exemple dans l'exemple suivant :



$$c = b - k$$
$$b = c + k$$
$$k = b - c$$

Au deuxième stade, les premiers problèmes proposés ne contiennent que des données littérales. Les nombres ne sont introduits qu'après contrôle de la perception de la situation à travers des schémas et des formules littérales. Voici — à titre exemplatif — des extraits de deux leçons (36e et 37e dans l'expérience décrite).

36e leçon

Le professeur montre un vase gradué sur lequel le niveau (k) de l'eau est marqué par un élastique. Il prend alors un autre récipient gradué contenant c eau (6) et vide les deux dans

(6) Nous respectons ici la présentation soviétique qui utilise l'expression a eau plutôt que un volume a d'eau

un troisième récipient non gradué, qui contient maintenant b eau. Les élèves représentent par un dessin le lien entre k, c, b et écrivent les égalités $c = b - k$, $b = c + k$, $k = b - c$.

P (le professeur) : Nous avons indiqué le volume d'eau avec des lettres, mais nous pouvons aussi le mesurer avec des nombres. Quelle grandeur allons-nous d'abord mesurer ?

E (un élève) : La grandeur k, l'eau du premier verre gradué.

P : Peux-tu déterminer le volume d'eau dans ce verre gradué ?

E (regardant les graduations) : Cette eau était 30 grammes.

P : Bien, écrivons $k = 30$.

E : Maintenant, l'autre verre gradué. C'était 70 grammes. $c = 70$.

P : Combien y a-t-il d'eau dans le verre maintenant ? Il n'est pas gradué. Comment pouvons-nous savoir ce que vaut b ?

Les élèves sont embarrassés. Quelques propositions viennent :

Ljuda B. : On va le vider dans un verre gradué et regarder combien ça fait.

Sereza S. : Pas besoin. b est notre tout. Et k et c sont des parties. k vaut 70 et c vaut 30. Pour avoir le tout, on doit ajouter les parties k et c, et on trouve 100.

<u>37^e leçon</u>

Le professeur donne le texte suivant

> *Un jour, un garçon a lu a pages d'un livre, le jour suivant k et pour les deux jours réunis, c.*

Trois égalités sont écrites à partir de cet énoncé et le professeur demande ensuite à la classe de remplacer a et c par des nombres.

Gena F. : a est égal à 5 et c est égal à 2.

Misa Z. : Faux, c ne peut pas valoir 2. C'est très petit.

P : Pourquoi pas ?

Ljuda B. : Il y avait 5 pages le premier jour et c en tout. Le tout ne peut pas être plus petit qu'une partie, donc c ne peut pas valoir 2, par exemple, il peut valoir 10 ou 8.

P : Bien, écrivons alors que c vaut 8. Il nous reste alors la grandeur k. Je propose d'écrire $k = 4$. Ou y a-t-il une autre proposition ?

Andrej K. : Il est égal à 3.

P : Qui propose un autre nombre ?

Sasa Z. : k est égal à 8.

P : Encore une autre proposition ?

Misa P. : Nous ne pouvons pas choisir la grandeur de k. Elle est fixée avec précision. Ce nombre doit être calculé, mais pas imaginé. k est égal à 3.

P : A l'aide de quelle formule devons-nous calculer k ?

Andrej S. : k égale c moins a.

Andrej M. : k égale 8 moins 5, c'est 3.

De manière claire, l'expression littérale précède le calcul à effectuer pour obtenir « la réponse » au sens traditionnel du terme.

Au terme de l'expérience, cinq problèmes ont été donnés à résoudre, avec données littérales ou numériques. En voici deux exemples :

Ce matin, les lapins ont mangé 5 carottes. Plus tard, ils en ont encore mangé. En tout ils en ont mangé 13. Combien en ont-ils mangé dans la deuxième partie de la journée ?

Un certain nombre de voitures se trouvaient au garage, k sont parties et il en reste c. Combien y en avait-il au départ ?

Les auteurs jugent très satisfaisants les résultats du test et concluent :

- Former le concept « du tout et des parties » permet de le décrire en termes littéraux ; ceci peut être le contenu d'une phase d'enseignement spécifique précédant la résolution de problèmes.
- Des dessins, des schémas et des formules littérales ont été utilisés avec une signification didactique ; ils servent de modèle et de description de la relation entre le tout et les parties. Le symbolisme littéral s'est avéré un moyen bien compris pour fixer et décrire. Les valeurs numériques ont été introduites ensuite.
- Si le concept « du tout et des parties » fait l'objet d'une phase spéciale d'enseignement, le symbolisme littéral peut précéder le symbolisme numérique dans la résolution des problèmes.
- On peut apprendre à de jeunes enfants à résoudre des énoncés directs (schématiquement entre nous : $a + b = x$) et indirects ($a + x = b$) avec des données littérales avant qu'ils n'utilisent des nombres.
- Il est possible non seulement d'accélérer l'introduction de lettres dès le début de l'enseignement des mathématiques, mais aussi de commencer en résolvant des problèmes à données littérales et des équations.

7.2 Algèbre et informatique

7.2.1 Introduction

Dans les articles que nous avons examinés, l'informatique est utilisée dans quatre contextes assez différents :

1. utilisation de machines fictives et/ou réelles pour programmer dans un langage classique (ici, le Basic) des opérations algébriques simples ([3], [39]),
2. utilisation de programmes tout faits chargés de construire des « tables de valeurs » pour des fonctions algébriques quelconques ([15]),
3. utilisation de tableurs ([19], [29], [33]),
4. utilisation de l'environnement Logo ([31], [37],[38]).

7.2.2 Les problèmes abordés

En synthétisant les idées émises par les différents auteurs des articles cités ci-dessus, idées qui se recoupent d'ailleurs assez bien, et qui recoupent également celles qui sont apparues dans les paragraphes précédents, on peut dire que les points d'achoppement suivants sont particulièrement étudiés :

1. la difficulté pour les élèves de « passer aux lettres » ([3]),

2. la compréhension de la notion de variable.

   SUTHERLAND signale une progression dans l'acquisition de cette notion :

   - acceptation de la notion de variable : les élèves admettent que c'est un outil qui peut aider à résoudre certains des problèmes qu'ils ont rencontrés,
   - un même nom peut représenter plusieurs valeurs numériques,
   - n'importe quel nom peut être utilisé pour désigner une variable et il n'y a donc pas d'aspect « magique » dans le nom donné à une variable,
   - des variables de noms différents peuvent contenir la même valeur,
   - une expression « non fermée » (comme $2x + 1$) est un objet mathématique et à ce titre peut être manipulé comme une entité,
   - deux expressions contenant une même variable sont liées (« relations du second ordre » selon KÜCHEMANN),
   - capacité à utiliser une ou des variables pour décrire une méthode générale.

   Selon Sutherland, l'élève a compris ce qu'est une variable lorsqu'il a franchi toutes ces étapes sauf peut-être la dernière. Mais, d'après Filloy et Rojano [9], le passage de l'arithmétique (au sens élémentaire du terme) à l'algèbre n'est effectué que si toutes les étapes ont été franchies. Comme ils le remarquent, il y a une réelle coupure didactique entre arithmétique et algèbre et il ne faut pas s'en étonner puisqu'elle est le reflet des 1300 ans qui séparent Diophante de Viète.

3. le manque de liens conceptuels entre des notions comme « expression algébrique », « équation », « inéquation » dû sans doute au fait que ces notions sont introduites dans les cours d'algèbre à des moments trop séparés.

4. le manque d'attrait de l'algèbre qui paraît peu utile et qui est même considérée par les élèves comme « un détour » (VERGNAUD) puisque les problèmes qu'on résout par l'algèbre au début de celle-ci sont souvent résolus par les élèves à l'aide de méthodes plus ou moins informelles héritées de l'école primaire. Au lieu de cela, les résolutions algébriques consistent, après la mise en équation, en un ensemble de manipulations ésotériques sur des objets complètement dépourvus de sens, sans rapport apparent avec le problème de départ qui ne réapparaît quasi miraculeusement que tout à la fin.

7.2.3 Pourquoi l'ordinateur ?

Le point de vue de Vergnaud est partagé par Sutherland qui constate en particulier que la notion de variable paraît au départ inutilement abstraite dans le cadre traditionnel. Par contre, pour utiliser un ordinateur dans le cadre d'un langage, la notion de variable informatique est indispensable et les concepts de variables informatique et algébrique sont très voisins. Le raccord ne sera donc pas difficile à faire. De plus, un langage informatique est un système formel avec une syntaxe précise et impitoyable, tout comme l'algèbre. Enfin, l'attrait bien connu des enfants pour l'ordinateur constitue une motivation supplémentaire.

7.2.4 Première piste : programmation en langage classique

Le problème abordé par THOMAS et TALL [39], est essentiellement le passage de l'arithmétique à l'algèbre ou encore, pour être caricatural, le « passage aux lettres ».

Faisant référence à un article de Lesley R. BOOTH [3], les auteurs signalent la grande difficulté qu'ont les enfants à accepter la présence de lettres dans les expressions (dans certains cas, ainsi qu'on l'a déjà signalé au paragraphe 6.1, ils se raccrochent aux nombres par une bijection de $\{a, \ldots, z\}$ sur $\{1, \ldots, 26\}$) et leur désir d'« obtenir une réponse numérique ».

A la suite des expériences de Booth avec des « Maths Machines » (ordinateurs fictifs avec mémoire-programme et mémoire-données figurées par des fiches cartonnées) et vu les résultats encourageants qu'il avait obtenus, Thomas et Tall ont poursuivi l'expérience avec des Maths Machines et des machines réelles. Leur but était de faciliter chez l'enfant la construction d'images mentales pour la notion de variable.

L'expérience fut réalisée avec des enfants de 12 ans. A partir d'une représentation classique en « boîte » (distinction adresse/contenu) d'une variable informatique et d'une initiation au Basic, ils ont pu, en écrivant de petits programmes, comparer les valeurs d'expressions telles que $2\times(a+b)$ et $2\times a+2\times b$ et entrer en contact avec des propriétés telles que commutativité, distributivité, ..., avec les règles de priorité, les parenthèses, ... Le texte de Thomas et Tall ne donne aucune indication sur l'apprentissage du remplacement de $(2 \times a) + (2 \times b)$ par $2 \times a + 2 \times b$.

La structure des programmes était très simple et toujours la même : input, calcul sur les données introduites, affichage du résultat.

Il est d'ailleurs à noter que plusieurs auteurs insistent beaucoup sur l'importance d'une instruction de type « input » pour favoriser chez l'élève l'acquisition de l'idée qu'une variable peut représenter plusieurs valeurs numériques.

Ils ont aussi utilisé un programme calculant la valeur numérique d'expressions algébriques diverses pour des valeurs données des variables ; la convivialité de ce programme permettait d'introduire les expressions algébriques « comme sur le papier » (multiplication implicite, ...). Dans une dernière étape, ce programme fut utilisé pour résoudre des inéquations du premier degré à une inconnue par tâtonnement. De cette façon, la technique algébrique de résolution ne masquait pas ce qu'est réellement une solution.

A la fin de ces activités, un questionnaire fut proposé aux élèves afin de voir si leur participation à l'expérience avait amélioré leur compréhension de la notion de variable.

Les auteurs rapportent des résultats très encourageants tant au niveau de la comparaison avec les élèves d'un groupe-témoin ayant le même âge qu'à celui de la comparaison avec des élèves de 15 ans n'ayant pas suivi ce programme. Ces différences portent sur la conception que les élèves ont des lettres, aussi bien comme « valeur » généralisée que comme variable proprement dite. Leur conclusion est donc qu'il est intéressant de travailler de cette façon avec l'ordinateur préalablement à une initiation à l'algèbre formelle. On peut dire que, dans notre système d'enseignement, une telle démarche pourrait être envisagée au niveau de la première année du secondaire.

7.2.5 Deuxième piste : construction de tables de valeurs

Dans le même ordre d'idées, HEID et KUNKLE, [15], utilisent des programmes permettant d'engendrer des tables de valeurs pour des fonctions algébriques et de résoudre des équations algébriques de degré 1 ou 2. Les exemples donnés par les auteurs montrent qu'ils placent leur démarche plutôt en aval d'une introduction des notions algébriques de base comme variable, expression, équation, ... On s'aperçoit en effet qu'une certaine capacité à traduire algébriquement des situations est nécessaire avant d'utiliser les tables produites par ordinateur. On constate qu'il s'agit ici d'une démarche devant accompagner un cours d'algèbre ; toutefois, pour les auteurs, elle constituerait un préalable intéressant aux manipulations algébriques formelles. Ainsi, chez nous, ce type d'activité trouverait sa place au niveau de la deuxième année.

7.2.6 Troisième piste : utilisation d'un tableur

Rojano et Sutherland [33], s'intéressent à la phase de transition de l'arithmétique à l'algèbre. Leur expérience concerne donc des enfants de fin d'école primaire et début d'école secondaire. Les auteurs pensent que la compréhension d'un problème nécessite un constant va-et-vient du sens aux manipulations formelles. Le principal point d'achoppement dans ce trajet est, comme l'ont montré Filloy et Rojano, l'introduction de lettres symbolisant des inconnues et les manipulations de calcul sur celles-ci. Mais, comme l'a montré Sutherland, il semble que l'obstacle soit mieux franchi dans un contexte informatique que dans le contexte papier-crayon traditionnel.

Le but de Rojano et Sutherland est de favoriser, par l'utilisation d'un tableur, la transition entre les méthodes arithmétiques informelles auxquelles les élèves sont habitués et les méthodes algébriques lors de la résolution de problèmes. Un tableur permet en effet de résoudre par des méthodes arithmétiques des problèmes habituellement résolus algébriquement.

Mais de plus, leur aisance dans l'utilisation du tableur s'accroissant au cours du temps, les enfants pourraient, avec l'aide du pédagogue, faire le lien entre la syntaxe inhérente au tableur et la syntaxe de l'algèbre traditionnelle.

En effet, si la convivialité des tableurs actuels permet d'affecter à une cellule de façon visible le résultat d'un calcul effectué à partir du contenu d'autres cellules simplement en pointant ces dernières avec la souris et en indiquant les opérations à effectuer, c'est bien une formule algébrique qui fonctionne en arrière-plan de la cellule-résultat et cette formule est affichée par le tableur à un endroit *ad hoc* lorsque la cellule est pointée. Dans une telle expression, chaque cellule est désignée par ses coordonnées. Celles-ci jouent le rôle des lettres dans les expressions algébriques traditionnelles.

Une manipulation intensive du tableur amenant à des essais de différentes valeurs comme contenus des cellules-variables conduit à l'idée qu'une variable (cellule référencée par un nom fixe) représente en fait tout un ensemble de valeurs, idée qui, comme nous l'avons déjà signalé, est loin d'être évidente chez les élèves.

De plus, d'après les auteurs, la résolution d'un problème à l'aide d'un tableur oblige à une continuelle navette entre sens (l'énoncé du problème) et technique : à tout moment, il faut en effet garder à l'esprit la relation entre données et inconnues. Lors de l'expérience, toutefois, les auteurs signalent des difficultés de la part de certains élèves pour donner du sens aux résultats fournis par le tableur.

MAXIM et VERHEY [29], suivent une démarche semblable, mais après avoir résolu le problème à l'aide du tableur, ils demandent aux élèves d'écrire un modèle algébrique. Bien entendu, comme l'avaient déjà signalé CAPPONI et BALACHEFF [6], un préalable à ce type d'expérience est une connaissance minimale de l'utilisation d'un tableur. Mais on peut quand même dire que, si cette remarque tempérait l'enthousiasme pour ce type d'expérience dans le cas d'un tableur comme Multiplan en 1987, elle perd beaucoup de sa pertinence avec les tableurs conviviaux actuels.

On peut donc concevoir une initiation à l'utilisation d'un tableur pendant la première année du secondaire ; ainsi la transition arithmétique–algèbre pourrait en bénéficier dès la deuxième.

7.2.7 Quatrième piste : l'environnement LOGO

Dans [31], NOSS se pose la question de savoir si une pratique de travail dans un environnement LOGO favorise la conceptualisation des objets de l'algèbre élémentaire, et surtout, de la notion de variable.

Il a observé pendant 18 mois un groupe de 118 élèves de 8 à 11 ans, donc sans bagage algébrique. Ces élèves ont été sensibilisés à un environnement LOGO et, sur les détails de cette étape, l'auteur est très discret. A la fin de l'expérience, les élèves ont été soumis à un test visant à juger leur capacité à construire des expressions algébriques simples modélisant des situations mathématiques non informatiques.

Lors de ce test, il est expliqué aux élèves qu'ils doivent rédiger une méthode de résolution du problème qui leur est posé afin que des élèves plus jeunes « qui ne savent pas très bien lire » (il faut donc être concis), « mais qui ont fait du LOGO » puissent la comprendre.

Il remarque que, lorsque l'élève est en panne, une simple allusion à l'environnement LOGO permet souvent de débloquer la situation et il en conclut que le travail en environnement LOGO favorise la conceptualisation de la notion de variable en algèbre, le transfert des compétences se faisant assez facilement. Il termine en souhaitant la mise au point d'un environnement LOGO sous-tendant les débuts de l'algèbre.

Dans [37] et [38], Sutherland résume une expérience dont le but est de prouver qu'un travail approprié en environnement LOGO permet aux élèves d'utiliser de façon pertinente des concepts algébriques, et notamment celui de variable, d'en améliorer la compréhension et aussi que ces compétences pourront alors être utilisées dans un environnement non informatique pour la résolution de problèmes algébriques.

S'il est intéressant en soi que les élèves perçoivent certaines notions algébriques quand elles sont utilisées dans un cadre informatique, il est bien plus intéressant que cette compréhension soit transférée au niveau algébrique ordinaire.

Ainsi, en fin d'expérience, le pont entre variable informatique et variable algébrique sera assuré par des séquences LOGO du type « Devinez ma fonction » où un élève, à partir des valeurs prises par une fonction inconnue pour des valeurs connues de la variable devra trouver cette fonction et écrire une procédure la calculant. Comme il n'utilisera certainement pas le même nom de variable, on pourra immédiatement constater que le nom de la variable n'a pas d'importance.

On profitera de cette occasion pour écrire sur papier la fonction-solution de différentes façons : couples, notation fonctionnelle classique, ...

L'expérience fut menée avec huit enfants d'environ 10 ans qui furent suivis pendant 3 ans. Tout au long de l'expérience et à la fin de celle-ci, les élèves ont dû répondre aux questions d'un test; chaque question avait deux formulations équivalentes : l'une en contexte LOGO, l'autre en contexte non informatique et les deux versions n'étaient évidemment pas posées consécutivement.

Par exemple, on pose la question : $L+M+N = L+P+N$ *est vrai toujours / jamais / parfois lorsque* ... afin de vérifier si, dans un contexte algébrique, l'élève admet que deux noms différents peuvent représenter la même valeur. Il existe une version LOGO de cette question :

```
POUR LIGNES :L :M :N :P
AV :L AV :M AV :N
DROITE 90
AV :L AV :P AV :N
FIN
```

Quand ces commandes LOGO dessinent-elles des segments de même longueur ? toujours / jamais / parfois lorsque ...

Sutherland estime qu'elle pouvait ainsi juger de la profondeur de la compréhension de la notion de variable en LOGO, mais aussi du degré de transfert de cette compréhension dans un contexte classique. L'expérience a consisté à comparer le groupe avec un groupe-témoin n'ayant pas eu d'initiation LOGO et à observer le groupe au cours du temps. Aprés une initiation au LOGO, les activités ont consisté en la production d'objets graphiques selon un schéma assez standard :

- point de départ : création d'un objet de dimensions données (pas de variable)
- question : comment s'arranger pour l'agrandir à notre guise? (introduction de variable(s))

On démarre avec une figure simple, une lettre par exemple. Assez vite, les élèves, convenablement aiguillés, utilisent une variable d'échelle qui permet de modifier très simplement la procédure de départ. A ce stade, personne n'a analysé les proportionnalités des mesures.

Les élèves ayant atteint ce stade, et tous y arriveront plus ou moins rapidement, ont franchi les étapes de l'acceptation de la variable et du fait qu'elle remplace plusieurs valeurs : les tests « LOGO » le montrent et les compétences sont même transférées pour 6 élèves sur 8.

Qui plus est, progressivement, des relations du second ordre se font jour, mais les élèves ne les rendent pas encore explicites. A l'occasion d'extensions diverses des procédures mises au point, on voit apparaître quelques surprocédures et certains élèves ont commencé à intégrer la notion de variable pour l'utiliser à leur profit.

Lorsque la figure se complique (schématiquement, lorsqu'il faut avancer et reculer), on voit curieusement apparaître chez certains deux variables d'échelle, une pour avancer, une pour reculer. Cela traduit le niveau très précaire de la compréhension de la variable. Cela apparaît clairement dans les noms donnés aux variables, noms chargés d'un sens un peu magique : les noms devraient suffire à agir. C'est la raison pour laquelle, par la suite, on a habitué les élèves à utiliser des noms non signifiants.

Après expérimentation, il apparaît pour la plupart que les valeurs données aux deux facteurs d'échelle doivent être égales. C'est ce que les élèves font, mais ce n'est que plus tard que, conseillés par l'enseignant, certains auront l'idée de ne plus conserver qu'une variable d'échelle. Cet écueil est intéressant en soi puisqu'il habitue les élèves à ce que des variables différentes prennent la même valeur.

Il est curieux de constater que les élèves n'ayant pas suivi la filière « deux variables d'échelle » ont mal réussi les épreuves contrôlant la compétence ci-dessus : par exemple, dessiner un carré avec une procédure à deux variables « Rectangle ».

L'acceptation des expressions ouvertes, favorisée d'après l'auteur par la syntaxe LOGO et les exercices du type « Devinez ma fonction », a été bonne en contexte LOGO et relativement bonne en milieu algébrique, mais en tout cas beaucoup meilleure qu'à l'accoutumée.

Pour les relations du second ordre, les résultats furent mauvais : personne ne put répondre à la question : « Qu'est-ce qui est plus grand, $2n$ ou $n+2$? » ni à sa traduction LOGO. Sutherland s'aperçut alors qu'aucun élève n'avait effectué d'activité développant cette compétence. Elle testa de telles activités avec des élèves de 10 ans et les réponses aux mêmes questions que celles posées aux élèves de 13 ans furent bonnes dans 3 cas sur 5.

Quant à l'utilisation de variables pour généraliser des méthodes, l'expérience montre que le travail en environnement LOGO et les discussions entre élèves d'une même équipe ont favorisé l'émergence de cette compétence, notamment chez les élèves ayant passé par le stade de l'unification des variables d'échelle. A ce titre, la syntaxe LOGO avec la liste des variables suivant le nom de la procédure paraît à l'auteur un indéniable plus.

En conclusion, Sutherland estime que la réponse aux deux questions posées est affirmative et que LOGO constitue un excellent cadre pour le développement de l'algèbre élémentaire.

Il nous semble donc particulièrement intéressant d'habituer les élèves à l'univers LOGO dès la première année du secondaire. Notons à ce sujet qu'une quantité non négligeable d'élèves ont déjà reçu un bagage LOGO à l'école primaire.

8 La situation en Belgique francophone

8.1 Des constatations empiriques

Toutes les difficultés signalées dans les autres pays nous paraissent malheureusement être fréquemment vécues chez nous. Reprenons d'abord une à une les recommandations du paragraphe 6.5:

1. ARITHMÉTIQUE SUPPORT SOLIDE :

   - Pour évaluer correctement $4ab$ lorsque $a = -3$ et $b = -2$, il faut calculer correctement $4 \times (-3) \times (-2)$.
   - Pour donner une signification correcte à $3+5x$, il ne faut pas croire que $3+5\times 4 = 32$. Il ne faut donc pas escamoter imprudemment des parenthèses dans un calcul arithmétique, l'enseignant doit être conscient que les quatre opérations fondamentales sont des opérations *binaires* et que des écritures comme $3+4+5$ ou $3+4-5$ (bien que non ambiguës, mais les élèves savent-ils pourquoi ?) créent des réflexes difficilement contrôlables dans la suite, lorsque les priorités des opérations doivent intervenir.

2. VARIÉTÉ D'UTILISATION DES LETTRES :

   - L'égalité $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ est appelée *identité*. Elle est vraie lorsque les lettres sont remplacées par des éléments quelconques d'un référentiel donné. Les lettres sont appelées des *variables*.
   - L'égalité $3a + 5 = 18$ est appelée *équation*. Elle n'est vraie que lorsque la lettre est remplacée par certains éléments d'un référentiel donné. La lettre est appelée cette fois l'*inconnue*.
   - Selon le référentiel, les égalités $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ sont équivalentes ou non.
   - Dans $y = mx+p$, x et y sont des variables, mais l'usage veut que x soit *variable indépendante* et y *variable dépendante* tandis que m et p sont des *paramètres*.
   - Dans les formules trop clichées comme « aire d'un rectangle $= L \times l$ », les lettres peuvent devenir des abréviations de mot (ici Longueur et largeur) plutôt que des nombres.

3. DES USAGES EN ARITHMÉTIQUE ET EN ALGÈBRE :

   - usages communs :

– La signification des opérations.
Dès l'apprentissage de l'arithmétique la plus élémentaire, l'analyse de situations, débouchant sur le choix de l' (des) opération(s) à effectuer, doit faire l'objet d'un apprentissage en soi. L'exécution des calculs relève d'un apprentissage distinct : le *pourquoi* doit précéder le *comment*.

– Les règles de priorité des opérations.
De mauvaises habitudes sont installées dès le début de l'arithmétique en favorisant la lecture gauche-droite dans des calculs comme $7+2+4-3+6$.

- usages différents :

  – Le signe $\times$ escamoté entre des lettres, mais pas entre des nombres. Ainsi $3a = 3\times a$, ce qui ne vaut ni 32, ni 5 lorsque $a = 2$. Que dire de l'incohérente écriture $3\frac{1}{2}$ au lieu de $3+\frac{1}{2}$? L'argument invoqué est souvent que « tout le monde fait comme ça » et donc que les élèves rencontreront ces écritures en dehors de l'école ... C'est vrai, encore faut-il les avertir de nos incohérences et expliciter progressivement et clairement les conventions d'écriture que nous utilisons !

  – Le placement d'un facteur numérique avant les facteurs littéraux.

  – Il est rare (c'est un euphémisme !) de voir un enseignant satisfait si un élève propose $3 + 6$ comme réponse à un problème : il doit généralement *effectuer* l'opération donnée. Cette contrainte, d'autant plus mal digérée que l'apprentissage de la technique opératoire est privilégiée par rapport à l'apprentissage du choix de l'opération, amène des erreurs comme $3 + 6a = 9a$. Une situation intermédiaire est d'ailleurs vécue lorsque les élèves n'osent pas garder une solution d'équation sous forme fractionnaire, même si la vérification avec la valeur approchée de remplacement ne « tombe pas tout à fait juste ». Le fait que les opérations ont toujours dû être effectuées en arithmétique entraîne également la perplexité de certains qui ne peuvent donner aucun sens à $3 + x$.

  – Un phénomène du même genre est lié au signe « = » qui, en arithmétique appelle une réponse, un calcul, tandis que la signification est toute différente dans $3x + 5 = 7$. Il faut que l'élève perçoive ici deux *écritures différentes* du *même objet*.

4. De l'arithmétique à l'algèbre, et réciproquement :

Si les élèves sont conduits progressivement de l'arithmétique à l'algèbre, ils doivent aussi avoir recours à la démarche inverse lorsqu'ils sont en difficulté en algèbre, ainsi, ils peuvent juger par une simple substitution qu'une proposition est fausse. Mais ce recours s'avère très fragile si les élèves ont pratiqué du calcul algébrique dépourvu de signification. On peut couramment observer en Belgique des comportements analogues à ceux relevés par Lesley Lee et David Wheeler [26]. Ceux-ci ont essayé de voir quelle connexion des étudiants de 15–16 ans établissaient entre l'arithmétique et l'algèbre. Ils leur ont proposé des formules en demandant si elles étaient *toujours vraies, parfois vraies, jamais vraies.* Ils demandaient également de justifier les réponses. Ils ont proposé par exemple

$$\frac{2x+1}{2x+1+7}=\frac{1}{8} \qquad \frac{1}{6n}-\frac{1}{3n}=\frac{1}{3n} \qquad (a^2+b^2)^3=a^6+b^6$$

Sur 268 étudiants qui ont reçu l'une ou l'autre de ces propositions, 10 seulement testent la validité à l'aide de substitutions numériques. Et même dans ce cas, la troisième égalité est parfois déclarée correcte ... parce que

$$(1^2+2^2)^3=(1+4)^3=1+64=65$$

On constate donc une régression du calcul arithmétique qui aurait dû amener $1+4=5$ et $5^3=125$, conformément à la lecture imposée par les parenthèses. Au lieu de cette saine lecture conforme aux bonnes vieilles normes apparaissent des applications « sauvages » de « *ce que nous avons appris à l'école, mais c'est juste une théorie comme tout en math.* ». Ces pseudo-règles les amènent à justifier aussi bien que a^6+b^6, a^5+b^5 ou a^8+b^8 sont toujours égaux à $(a^2+b^2)^3$. Un étudiant déclare même que les nombres et les lettres se comportent différemment et n'est pas gêné par la contradiction entre un exemple numérique qui montre que l'égalité n'est pas toujours vraie et la « démonstration algébrique » de sa validité.

5. L'ARITHMÉTIQUE N'EST PAS LE SEUL SUPPORT DE L'ALGÈBRE :
Des supports géométriques, des schémas, des généralisations à partir d'exemples numériques du même type doivent permettre l'élaboration de formules algébriques. Inversement, des formules données doivent être transposées à d'autres supports.

6. DES TECHNIQUES :
Dans les résolutions d'équations, la recherche par essai-erreur ne doit pas être négligée et les techniques de plus en plus efficaces ne sont à introduire que lorsque la situation ne peut plus être dénouée par les moyens connus. La progression dans les équations à résoudre doit le permettre et la comparaison de plusieurs méthodes est nécessaire pour les débutants, alors que l'initié a tendance à n'y percevoir aucune différence notoire. Un panachage libre de techniques peut aider à garder un sens à la résolution et empêcher que l'algèbre ne devienne une application aveugle de règles.

7. L'ANALYSE DES DIFFICULTÉS :
La nature et le niveau des difficultés doivent être correctement estimés.

   - Des situations peuvent faire intervenir les mêmes concepts mathématiques, mais à des niveaux de complexité différents.

     Exemple : Les résolutions des équations $2x+4=10$ et $1467x+1792=6193$ font intervenir les mêmes concepts mathématiques. La seconde équation se révèle cependant plus difficile.

- Tout en faisant intervenir les mêmes concepts mathématiques, et des calculs élémentaires du même niveau, deux situations peuvent être de difficultés différentes par le nombre d'étapes à enchaîner. La maîtrise d'un grand nombre d'étapes nécessite de la part de l'élève une capacité d'anticipation ou d'appréhension globale qui relève des aptitudes générales.
- La nature plus ou moins complexe des concepts mathématiques en jeu ne peut pas être négligée :
  - le calcul sur les naturels ne présente pas les mêmes difficultés que le calcul sur les entiers,
  - opérer algébriquement sur $3a + 5$ est plus simple que sur $3a + 5 = 2a$, à cause de la nature des objets mathématiques mis en jeu : d'une part un polynôme de degré 1, d'autre part une égalité.

Si nous consultons nos manuels scolaires, nous constatons que beaucoup des difficultés signalées ci-dessus sont très souvent escamotées.

8.2 Des pistes à explorer

Quelques idées susceptibles d'améliorer l'initiation à l'algèbre sont apparues au fil du temps dans l'évolution de notre enseignement.

- L'emploi de plusieurs systèmes de codage des nombres, pour favoriser la compréhension du concept de nombre lui-même. En particulier, pour insister sur le fait que $27 + 35$ et 62 sont des *écritures différentes* d'un *seul nombre*.

- L'emploi de diverses représentations qui différentient l'usage de différentes opérations. Par exemple diagrammes en arbre ou cartésien en liaison avec la multiplication par opposition aux diagrammes de Venn ou aux juxtapositions en liaison avec l'addition.

- L'emploi de supports divers (diagrammes fléchés, organigrammes)

  - pour modéliser dans un premier temps des enchaînements d'opérations, de manière moins lourde que l'écriture traditionnelle,
  - pour analyser dans un deuxième temps des expressions numériques ou algébriques écrites de manière traditionnelle.

- L'emploi du signe « = » pour relier des écritures différentes d'un même objet. Si cette notion est bien installée, la symétrie et la transitivité de la relation ne doivent pas faire l'objet de longs discours, elle va de soi puisqu'il s'agit généralement de remplacer une écriture, un dessin, par un(e) autre plus commode en fonction des circonstances.

- L'utilisation du support géométrique pour illustrer, rendre visuellement prégnantes certaines propriétés comme le carré d'une somme par exemple.

- L'élaboration *par les élèves* des premières expressions utilisant des lettres
  - à l'occasion de généralisations après avoir rencontré des cas particuliers,
  - en laissant choisir librement les lettres et en favorisant des variations,
  - en ne se limitant pas au cadre restreint de « l'algèbre ».
- L'utilisation de LOGO dont les répercussions sont sensibles non seulement sur le plan géométrique, mais aussi sur le plan algébrique, dans la perception de la notion de variable par exemple.
- L'utilisation d'un tableur.
- Le remplacement de règles techniques par des processus plus fondamentaux (exemple : le « passage d'un membre dans l'autre » dans la résolution d'équations avantageusement remplacé par l'analyse des expressions et leur « détricotage » ou par la transformation de différentes expressions d'un même nombre nécessaire dans les cas plus compliqués).

La lecture de cette liste pourrait laisser croire que beaucoup de problèmes sont résolus. Il n'en est cependant rien parce que toutes les possibilités énumérées ci-dessus, bien que pas toutes neuves et parfois fort simples, ne transparaissent guère dans de nombreux manuels scolaires ... et que ce sont ceux-ci qui conditionnent la plupart des cours. Une résistance non négligeable doit être vaincue chaque fois qu'un adulte est invité à modifier un comportement qui lui paraît ÉVIDEMMENT simple ... puisqu'il a toujours « fait comme ça ». Il oublie en toute bonne foi que l'élève, lui, n'a pas encore d'« habitude » et qu'une nouvelle bonne habitude sera prise aussi facilement qu'une nouvelle habitude qui conduit à long terme à une difficulté. L'enseignant est aussi confronté, de la maternelle à l'université, au problème de l'évaluation à court terme. Installer un réflexe qui fonctionne rapidement et apparemment bien est donc tentant et paraît rentable (aux parents, aux autorités, et donc aux enseignants). C'est probablement à cause de cette contrainte que l'application de règles, la répétition de techniques dominent les cours au détriment de l'analyse qui permet de CHOISIR ce qui doit être fait en liaison avec une notion fondamentale qui modélise la situation vécue. Il faut également assurer la fixation des notions, mais celle-ci n'a guère de chance de réussir, en algèbre pas plus qu'ailleurs, par l'exécution de séries d'exercices dominés par une technique vide de sens.

Une évaluation de la situation globale est scientifiquement impossible actuellement. L'évolution des programmes a parfois poussé une idée en avant, l'a parfois contrecarrée. Certaines possibilités, seulement vaguement encouragées par les textes officiels, ont été exploitées de manière très variable (tant en importance qu'en souci pédagogique) et aucune diffusion organisée des résultats n'a été assurée (usage de LOGO et des tableurs par exemple ?).

Références

[1] BEHR M., ERLWANGER S. and NICHOLS E., *How children view equality sentences*, PMDC Technical Report n ° 3, Tallahassee, Florida State University, (1976).

[2] BERNARD J. E. and COHEN M. P., *An integration of equation-solving methods into a developmental learning sequence*, The ideas of algebra, K-12, Yearbook NCTM, pp. 97 – 111, (1988).

[3] BOOTH L. R., *Misconceptions leading to error in elementary algebra (generalized arithmetic)*, Doctoral dissertation, Chelsea College, London.

[4] BOOTH L. R., *Algebra : Children's strategies and errors*, NFER–Nelson, (1984).

[5] BOOTH L. R., *Children's difficulties in beginning algebra*, The ideas of algebra, K-12, Yearbook NCTM, pp. 20 – 32, (1988).

[6] CAPPONI B. et BALACHEFF N., *Tableur et calcul algébrique*, Educational Studies in Mathematics, V.20, N ° 2, pp. 179–210, (1989).

[7] CLEMENT J., *Algebra word problem solutions : thought processes underlying a common misconception*, Journal for Research in Mathematics Education, V.13, N ° 1, pp. 16 – 30, (1982).

[8] EDWARDS C.H., The historical development of the calculus, Springer Verlag, New York, (1979).

[9] FILLOY E. and ROJANO T., *Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies*, Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, V.1, pp. 154 – 158, (1985).

[10] FREUDENTHAL, H., *Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school*, Educational Studies in Mathematics, 5, pp 391 – 412, (1974), rapport rédigé en anglais à partir des chapitres IV, V et VI de *Psihologiceskie vozmoznosti mladsih skol'nikov v usvoenij matematiki*, ed. V. V. DAVIDOV, Moscow (1969), (auteurs respectifs de ces chapitres : G. G. MIKULINA, G. I. MINSKAJA, F. G. BODANSKIJ).

[11] GAUD D. et GUICHARD J.P., *Aperçu historique sur les nombres relatifs*, IREM de Poitiers, Repères - IREM, V.2, pp. 94 – 123, (1991).

[12] GINSBURG *Children's Arithmetic*, The Learning Process. New York, Van Nostrand (1977).

[13] GLAESER G., *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherches en didactique des mathématiques, V.2, N ° 3, pp. 303 – 345, (1981).

[14] HARPER E., *Ghosts of Diophantus*, Educational Studies in Mathematics, V.18, N° 1, pp. 75 – 90, (1987).

[15] HEID M. K. and KUNKLE D., *Computer-generated tables : tools for concept development in elementary algebra*, The ideas of algebra, K–12, Yearbook NCTM, pp. 170 – 177, (1988).

[16] HERSCOVICS N. and KIERAN C., *Constructing meaning for the concept of equation*, The Mathematics Teacher, V.73, N° 8, pp. 572 – 580, (1980).

[17] HERSCOVICS N. and LINCHEVSKI L., *Pre-algebraic thinking : range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction*, Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 173 – 180, (1991).

[18] ITARD J., *Matériaux pour l'Histoire des Nombres Complexes*, APMEP, Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique, 2, p. 22, (1969).

[19] KAPUT J.J., *Technology and mathematics education*, Handbook of research on mathematics teaching and learning, N.C.T.M., pp. 515 – 556, (1992).

[20] KIERAN C., *Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations*, Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 128 – 133, (1979).

[21] KIERAN C., *Concepts associated to the equality symbol*, Educational Studies in Mathematics, V.12, pp. 317 – 326, (1981).

[22] KIERAN C., *Cognitive mecanisms underlying the equations-solving errors of algebra novices*, Proceedings of the Eighth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (1984).

[23] KIERAN C., *A procedural–structural perspective on algebra research*, Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 245 – 253, (1991).

[24] KIERAN C., *The learning and teaching of school algebra*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, N.C.T.M., pp. 390 – 419, (1992).

[25] KÜCHEMANN D. *Children's understanding of numerical variables*, Mathematics in School, V.7, N° 4, pp. 23 – 26, (1978).

[26] LEE L. and WHEELER D., *The Arithmetic connection*, Educational Studies in Mathematics, V.20, pp. 41 – 54, (1989).

[27] LINCHEVSKI L. and HERSCOVICS N., *Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra : operating on the unknown in the context of equations*, Educational Studies in Mathematics, V.30, pp. 39 – 65, (1996).

[28] MC CONNEL J.W., *Technology and algebra*, The ideas of algebra K-12, Yearbook NCTM, pp. 142 – 148, (1988).

[29] MAXIM B.R. and VERHEY, R.F., *Using spreadsheets in algebra instruction*, The ideas of algebra K-12, Yearbook NCTM, pp. 178 – 180, (1988).

[30] MEVARECH Z.R. and YITSCHAK D., *Student's misconceptions of the equivalence relationship*, Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 313 – 318, (1983).

[31] NOSS R., *Constructing a conceptual framework for elementary algebra through Logo programming*, Educational Studies in Mathematics, V.17, pp. 335 – 357, (1986).

[32] RADFORD, L., *Diophante et l'algèbre pré-symbolique*, Bulletin AMQ, Canada, (1991–1992)

[33] ROJANO T. and SUTHERLAND R., *Symbolising and solving algebra word problems : the potential of a spreadsheet environment*, Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 207 – 213, (1991).

[34] SFARD A., *On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, V.22, pp. 1 – 36, (1986).

[35] SCHUBRING G., *Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs*, Petit x, 12, pp. 5 – 32, (1986).

[36] SOLOWAY, LOCHHEAD and CLEMENT, *Does computer programming enhance problem solving ability ? Some positive evidence on algebra word problems*, in Computer Literacy, New York : Academic Press, (1982)

[37] SUTHERLAND R., *What are the links between variable in Logo and variable in algebra ?*, Recherches en Didactique des Mathématiques, V.8, N° 12, pp. 103 – 130, (1987).

[38] SUTHERLAND R., *Providing a computer-based framework for algebraic thinking*, Educational Studies in Mathematics V.20, pp. 317 – 344, (1989).

[39] THOMAS M. and TALL D., *The value of the computer in learning Algebra concepts*, Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 313 – 318, (1986).

Annexe

Donner de la signification au concept d'équation

Nicolas Herscovics Carolyn Kieran*

Beaucoup de façons d'introduire le concept d'équation au niveau de l'enseignement secondaire évitent de répondre directement à la question « Mais qu'est-ce qu'une équation ? »

1 Quelques approches courantes dans la littérature

Certains livres introduisent le concept d'équation par la résolution de problèmes et cela convient sans doute à un bon nombre d'élèves. Cependant, pour certains élèves, traduire un « word problem » ([1]) en une équation équivaut à traduire ce problème en un langage qui leur est inconnu. En fait, même l'approche plus simple sous forme de « pense un nombre » ([2]) dépasse les capacités des élèves qui ne peuvent accepter qu'une lettre représente un nombre. Les W.P. ([3]) sont essentiels pour montrer l'intérêt de l'algèbre ; cependant ils ne conviennent pas pour faire comprendre la notion d'équation.

Une autre présentation courante consiste à introduire les équations comme des « propositions ouvertes » qui peuvent être vraies ou fausses selon la substitution, le nombre appartenant à un « ensemble de remplacement ». Suit alors l'apprentissage des opérations algébriques requises pour résoudre des équations. Bien qu'une telle approche présente éventuellement l'avantage d'être très générale en ce sens qu'elle introduit simultanément beaucoup d'aspects de la notion d'équation (par exemple ce qu'est une solution, une non-solution, une variable), elle le fait peut-être au détriment de la clarté. Même si les étudiants réussissent à patauger dans un excès de vocabulaire non familier, ils peuvent ne pas avoir compris la signification des équations à cause des caractères vague et général de la présentation. Beaucoup d'enseignants sont conscients de ces obstacles et assurent que c'est par les manipulations mises en oeuvre lors de la résolution d'équations que les étudiants pourront construire quelque signification à l'écriture algébrique. De nouveau, ceci réussira avec certains étudiants mais les autres, « quoique intelligents et

---

*Traduit par Yolande Noël, avec l'autorisation du *Mathematics Teacher*, (Vol. 73, N° 8, 572–580), National Council of Teachers of Mathematics (E.U.), Novembre 1980. Tous droits réservés.

[1] Nous ne connaissons pas d'équivalent français pour cette expression qui désigne les problèmes parfois dits "de la vie courante"

[2] Nous pensons qu'il s'agit de problème du genre "Pense un nombre, ajoute 5, multiplie le résultat par 2, retranche 10 du produit obtenu et donne ton résultat. Je peux 'deviner' le nombre auquel tu as pensé."

[3] word problem

travailleurs, sont incapables de tirer une quelconque signification de manipulations de symboles qu'ils ne comprennent pas » [3]

2 Difficultés conceptuelles

Des recherches menées par WAGNER en 1977 [4] montrent que les difficultés conceptuelles rencontrées dans l'enseignement de l'algèbre sont plus importantes et plus répandues qu'on ne le croit généralement. Elle a demandé à des élèves de 12 à 17 ans si différentes solutions sont obtenues en résolvant les équations

$$7w + 22 = 109 \qquad \text{et} \qquad 7n + 22 = 109,$$

elle a obtenu des réponses variées:

- La solution de la première équation est plus grande que celle de la seconde car w vient après n dans l'alphabet.
- Je ne peux rien dire avant d'avoir résolu les deux équations.
- Bien sûr, les deux équations ont la même solution.

Nous disons des étudiants qui ont donné la dernière réponse qu'ils « conservent l'équation », et des autres (50% des élèves de 12 ans et 20% de ceux de 14 ou 17 ans) qu'ils « ne la conservent pas ».

Ces résultats, qui semblent assez surprenants, puisque les enfants ont eu un contact important avec des équations à l'école élémentaire, nous obligent à examiner les problèmes cognitifs sous-jacents. Il semble tout à fait clair que les enfants qui ne conservent pas l'équation ne réalisent pas que la valeur de l'inconnue est indépendante de la lettre utilisée. Ceci montre que le symbolisme et les notations utilisées dans les équations peuvent ne pas avoir la même signification pour les élèves et les professeurs.

De nombreux élèves rencontrent à l'école élémentaire des problèmes tels que

$$2 \cdot \square = 18,$$

et nous supposons donc que le signe = a le même sens pour eux que pour nous. Que de jeunes enfants interprètent les symboles différemment des adultes a été montré par GINZBURG [1]. Ils ne considèrent pas $2 + 3 = 5$ comme une identité, mais l'interprètent de façon opératoire comme le montre la lecture « 2 et 3 font 5 ». Il est significatif que quand nous avons demandé à des élèves de 7^e année [4] de donner un exemple dans lequel ils utilisent le signe d'égalité, ils se sont limités à une opération avec deux nombres dans le membre de gauche et le résultat à droite [2].

[4] 12 ans environ

Nous supposons aussi que lorsque les enfants résolvent un problème tel que $2 \cdot \square = 18$, ils ont une certaine compréhension des concepts d'inconnue et d'équation et qu'ils peuvent donc utiliser l'algèbre. Cependant, en résolvant des exemples de ce type, les enfants se contentent de passer en revue les faits arithmétiques stockés dans leur mémoire ; par conséquent leur découverte de la réponse relève du calcul mental. Qu'aucun processus algébrique ne soit utilisé est mis en évidence par le fait que les mêmes enfants ne peuvent résoudre des équations analogues lorsqu'elles comportent de plus grands nombres ou des nombres rationnels, bien que ceux-ci leur soient tout à fait familiers. De tels procédés de résolution, qui dépendent des valeurs numériques, ne peuvent pas être considérés comme des procédés algébriques puisque, comme l'exprime PETITO [5], « Par opposition à l'arithmétique, l'algèbre ne consiste pas à apprendre de nouvelles manipulations de nombres mais consiste plutôt en la formulation et la manipulation de relations formelles dont le contenu numérique est relativement fortuit ».

3 Une construction explicite basée sur l'arithmétique

Généralement, les équations sont définies soit implicitement, soit formellement. Les élèves sont confrontés à des formes algébriques préfabriquées qui ne peuvent acquérir une signification qu'*après* que les élèves les aient raccrochées à leur arithmétique au travers du calcul de valeurs particulières après substitutions.

Nous souhaitons présenter dans cet article une autre approche qui n'est pas destinée à remplacer les présentations classiques mais à servir d'introduction. Elle repose sur l'hypothèse que de nombreux élèves qui arrivent dans l'enseignement secondaire ont une connaissance active de l'arithmétique et que cette connaissance peut être transformée progressivement pour qu'ils puissent construire pour eux-mêmes la notion d'équation algébrique.

En partant de l'arithmétique, l'étudiant peut construire explicitement une signification à la notion d'équation algébrique, lui permettant ainsi de saisir intuitivement le concept avant qu'il ne soit formalisé symboliquement. Une telle construction amarre le concept d'équation dans l'arithmétique, le rendant ainsi significatif.

Le manque initial de généralité de cette approche (par exemple, toutes les équations ont des solutions) est plus que compensé par le fait que, du point de vue de l'étudiant, la notion d'équation possède une base solide. Nous pensons qu'il est pédagogiquement valable de traiter d'abord d'équations qui admettent des solutions et de laisser pour plus tard celles qui n'en admettent pas.

Cette approche a été expérimentée dans six classes avec des élèves de différents niveaux en 7^e et 8^e années dans différentes écoles. Nous allons détailler les points suivants:

- Comment nos étudiants ont été guidés pour acquérir une signification explicite de la notion d'équation. Ils élargissent d'abord leur notion d'égalité arithmétique en travaillant sur des identités arithmétiques et les utilisent alors pour construire des équations.

- Comment nous avons préparé le travail de base pour l'éventuelle justification des opérations algébriques pour résoudre des équations. Ceci a été réalisé en faisant construire par les étudiants de nouvelles identités arithmétiques sous certaines contraintes.
- La suggestion d'une introduction à la résolution d'équations qui met en chantier simultanément une identité arithmétique et une équation qui en est tirée.

3.1 La construction du concept d'équation

BEHR ET AL [6] ont montré que les enfants perçoivent le signe d'égalité comme une « commande de faire quelque chose ». Comme nous l'avons écrit plus tôt, nos propres élèves ne concevaient le signe d'égalité que dans l'expression d'égalités arithmétiques simples, c'est-à-dire avec une opération à gauche et le résultat à droite. Ceci confirme les recherches de BEHR: « rien ne permet de penser que les enfants modifient leur perception de l'égalité en vieillissant et en progressant dans leur scolarité (6^e année) ; en fait il semble que c'est le contraire ». Une telle perception fonctionnelle du signe d'égalité peut expliquer pourquoi beaucoup d'enfants ne peuvent utiliser le signe pour exprimer des propositions fausses. Ceci est évité dans notre approche, qui bâtit sur le caractère opérationnel de la pensée de l'enfant.

3.2 Etendre la signification du signe d'égalité

Pour donner du sens à une classe d'équations algébriques non triviales (par exemple $ax \pm b = cx \pm d$), nous pensions que la notion d'égalité de nos étudiants devait être étendue pour différentes opérations des deux côtés. Nous avons d'abord demandé, « Pouvez-vous utiliser le signe *égal* avec une opération des deux côtés ? ». La plupart répondent en fournissant une illustration de la commutativité comme

$$5 \times 4 = 4 \times 5 \qquad \text{ou} \qquad 2 + 6 = 6 + 2.$$

A la question « Pouvez-vous me donner un exemple avec deux opérations différentes de chaque côté ? », nous avons obtenu des réponses attendues telles que $5 + 5 = 5 \times 2$ mais aussi des inattendues comme $0 + 0 = 0 \times 0$. Qu'une telle question puisse être mal comprise est apparu dans la réponse d'une élève: $6+3 = 6 \times 3$. Elle a rapidement accepté que cela était faux, en réalisant que le même nombre devait intervenir, et a modifié sa proposition en $6 + 3 = 3 \times 3$.

On a alors demandé aux étudiants « Pouvez-vous donner un exemple avec plus d'une opération de chaque côté ? » Voici quelques réponses:

$$2+2+2 \;=\; 2 \times 3$$

$$
\begin{aligned}
4 \times 3 + 1 - 3 &= 3 \times 2 + 4 \\
3 + 5 + 4 &= 12 - 4 + 4 \\
2 + 1 \times 5 &= 3 \times 4 + 3 (\textit{sic})
\end{aligned}
$$

Comme on peut le voir dans le dernier exemple, les étudiants ont souvent écrit des propositions qui contredisaient les priorités des opérations. Bien qu'ils aient étudié ces règles antérieurement, ils ne les utilisent pas lorsqu'ils construisent eux-mêmes leurs propres égalités arithmétiques faisant intervenir plusieurs opérations. Ils écriraient leurs opérations, une à une, au fur et à mesure qu'ils y pensent et poursuivraient leurs calculs à partir de chaque résultat partiel atteint au fur et à mesure. L'invitation à évaluer les expressions en respectant les priorités crée un conflit entre la tendance plus naturelle d'évaluation dans l'ordre de l'écriture, conforme, lui, à l'ordre dans lequel les calculs ont été inventés. Cette tendance gauche-droite était si forte que les étudiants ne pouvaient voir aucune ambiguïté dans une expression comme $2+1\times 5$. Ils ne voyaient par conséquent ni le besoin de parenthèses, ni le besoin de règles de priorité. [2]

En fait, nous avons dû demander explicitement des exemples utilisant des parenthèses. Voici quelques égalités que nous avons obtenues:

$$
\begin{aligned}
(2+3) \cdot 5 &= 3 \times 5 + 2 + 8 \\
2 + (5 \times 4) &= 3 + 7 + 12 \\
(5+2) \cdot 3 &= 2 \times 10 + 1
\end{aligned}
$$

Cette extension de l'emploi du signe d'égalité paraissait nouvelle à nos six étudiants. En tous cas, sans exception, ils réalisaient l'essentiel du concept mis en jeu: le signe indiquait que les résultats de part et d'autre étaient le même nombre. Nous avons appelé « *identités arithmétiques* » de telles égalités, traduisant ainsi le fait que nous nous étions limités aux opérations arithmétiques. Nos étudiants ont rapidement accepté la nouvelle terminologie et étaient capables de la justifier. Leurs premiers exemples ne comportant qu'une opération et un résultat étaient perçues comme des cas simples.

Beaucoup de livres utilisent le mot *équation* sans distinction en arithmétique et en algèbre. Cela peut conduire à une confusion inutile chez les étudiants. En introduisant l'expression *identités arithmétiques*, nous réservons le mot *équation* pour l'utiliser dans sa signification algébrique usuelle.

3.3 Définir la notion d'équation

Il est maintenant possible de définir le concept d'équation en exprimant l'idée mathématique sous-jacente sans recourir à du formalisme inutile.

Nous prenons une identité arithmétique et cachons avec le doigt un des nombres de l'égalité. Ainsi, nous définissons une équation comme *une identité arithmétique avec un nombre caché*. En cachant d'abord un nombre avec un doigt, l'idée d'équation est introduite *avant* que l'étudiant ne soit mis en présence d'un nouvel objet mathématique.

Ayant saisi la notion, l'étudiant est maintenant capable d'aller vers une représentation plus pratique. Ceci conduit à utiliser la boîte vide, qui est très familière. Par exemple,

$$3 \cdot 7 + 3 = 25 - 1 \qquad \text{devient} \qquad 3 \cdot \square + 3 = 25 - 1.$$

Cacher le nombre avec une boîte est une étape intermédiaire dans le processus très progressif pour donner une signification au nouvel objet mathématique. Le remplacement de la boîte par une lettre de l'alphabet représente seulement un petit pas. Les étudiants peuvent rapidement justifier pourquoi la lettre est appelée *inconnue* parce que cela correspond bien à l'idée d'un nombre caché.

Nous avons constaté que cette approche convient à des étudiants d'habilités différentes. C'est peut-être parce que notre introduction respecte la suite des représentations identifiées en 1963 par BRUNER: [7] un mode *énactif* (basé sur des actions, ici l'exécution d'opérations), un mode *iconique* (comportant des représentations imaginées), et un mode *symbolique*.

Tout en acquérant le sens du nouvel objet mathématique, les étudiants construisent des équations à partir de leurs propres identités arithmétiques en utilisant d'abord leur doigt, ensuite la boîte et finalement une lettre. Selon les recherches de WAGNER, il semble essentiel qu'à ce stade les étudiants soient encouragés à choisir beaucoup de lettres différentes.

Il est également important pour les étudiants de réaliser qu'une identité arithmétique donnée peut donner naissance à beaucoup d'équations différentes:

$$3 \cdot 7 + 3 = 25 - 1$$

peut donner

$$a \cdot 7 + 3 = 25 - 1$$

$$3 \cdot b + 3 = 25 - 1$$

$$3 \cdot 7 + 3 = c - 1 \qquad \text{etc}$$

De telles variations dans la construction d'équations empêchent les étudiants d'imposer des restrictions inutiles au concept d'équation.

La question de cacher plus d'un nombre arrive très vite. Par exemple, un de nos étudiants a demandé, « Puis-je mettre deux lettres des deux côtés ? Eh non ! Il sera difficile de trouver la réponse. » Comme, à ce stade, les étudiants n'essayaient pas de résoudre les équations mais se limitaient à les construire, nous n'avons vu aucune raison de les limiter à des équations présentant une seule lettre. Ainsi, chaque fois qu'ils souhaitaient cacher plus d'un nombre, nous avons signalé la convention: la même lettre pouvait être utilisée dans une équation plus d'une fois, chaque fois qu'elle servait à cacher le même nombre ; sinon, on devait utiliser des lettres différentes.

3.4 Le concept de solution

Alors que nous n'avions pas encore discuté la notion de solution, plusieurs étudiants manifestaient immédiatement une connaissance de cette notion. Le procédé qui consiste à cacher un nombre semble induire le procédé inverse de découverte. La notion de solution comme « nombre caché par la lettre » était atteinte avant l'introduction de procédés de résolution.

L'idée de plusieurs solutions s'est aussi dégagée de cette construction lorsque, comme nous l'avons signalé plus haut, des étudiants ont commencé à cacher plusieurs nombres. Un étudiant a caché les deux « 2 » dans l'identité arithmétique

$$3 + (1 \times 4) = 10 : 2 + 2$$

obtenant ainsi

$$3 + (1 \times 4) = 10 : c + c.$$

Il a immédiatement remarqué que 5 était une autre solution possible. Il paraissait très surpris de découvrir que l'inconnue pouvait être remplacée par un nombre différent de celui qu'il avait caché. Montrer que deux identités arithmétiques différentes, à savoir $3 + (1 \times 4) = 10 : 2 + 2$ et $3 + (1 \times 4) = 10 : 5 + 5$ peuvent donner la même équation semble une explication suffisante jusqu'à ce que la théorie des équations du second degré puisse être introduite. Il est tout à fait typique que les étudiants soulèvent spontanément toutes sortes de questions intéressantes lorsqu'ils utilisent une approche constructive.

Une autre étudiante a décidé de cacher les deux « 3 » dans

$$2 + 3 = 3 + 2,$$

obtenant

$$2 + a = a + 2,$$

pour découvrir qu'elle avait maintenant une équation dans laquelle elle pouvait remplacer la lettre par « n'importe quel nombre ». Les réactions de nos étudiants à ce type d'équations suggèrent que la recherche d'autres exemples de ce type fournit une bonne occasion de discuter les axiomes de nos systèmes de nombres. Il semble que de nombreux étudiants pouvaient n'avoir jamais compris ces axiomes sous leur expression symbolique. Peut-être ces axiomes peuvent-ils devenir mieux compris par ces élèves à travers la construction d'équations.

3.5 Généralisation de la notion d'équation

Beaucoup d'introductions standard à l'algèbre présentent les équations comme des expressions qui peuvent admettre ou ne pas admettre de solution. Cette approche est certainement plus générale que la nôtre mais néglige le problème cognitif de l'apprenant confronté avec une équation sans solution. La distinction entre équation avec ou sans solution peut être facilitée si on a d'abord donné une signification aux équations avec solution(s).

La construction des équations basée sur les identités arithmétiques fournit aux étudiants des équations admettant une solution. Il paraît pédagogiquement et psychologiquement valable d'introduire d'abord des objets mathématiques reliés à un contenu spécifique. En tout cas, l'utilisation d'identités arithmétiques peut être considérée comme une étape intermédiaire dans l'acquisition du concept d'équation avec solutions. En effet, l'idée que de telles équations acquièrent une existence en elles-mêmes est attestée par le fait que nos étudiants ont rapidement été de l'avant en construisant des équations sans écrire préalablement une identité arithmétique.

A ce stade, l'étudiant peut prendre conscience que la définition initiale d'équation (« une identité arithmétique avec un nombre caché ») doit être améliorée puisqu'elle ne s'applique qu'à la classe des « équations qui admettent une solution ». Puisqu'en effet, d'autres équations peuvent être inventées, comme $2x + 3 = 2x + 4$, qui n'admet aucune solution. Ceci conduit à une définition générale d'une équation: *toute expression algébrique d'une égalité contenant une lettre (ou des lettres).*

3.6 Opérations sur des identités arithmétiques

Pour justifier les opérations algébriques utilisées dans la résolution d'équations, beaucoup d'enseignants introduisent l'idée de balance. Ceci peut très bien être le meilleur moyen de justifier ces opérations aussi longtemps qu'on se limite à ajouter ou à soustraire des nombres naturels. Cependant, la balance ne se prête pas bien à l'addition ou la soustraction de nombres rationnels quelconques ni aux opérations plus complexes de multiplication ou division, car il est invraisemblable que des étudiants du secondaire pensent encore à ces opérations comme à des additions ou des soustractions itérées.

Les limites physiques inhérentes à la balance peuvent être évitées en exploitant les identités arithmétiques, car celles-ci sont une représentation arithmétique du concept d'équilibre et ne sont pas soumises à des contraintes physiques. De plus, puisque nos étudiants regardent les équations admettant des solutions comme issues des identités arithmétiques, les règles utiles pour résoudre des équations peuvent être induites des opérations sur les identités arithmétiques.

A partir d'une identité arithmétique simple comme $2 \times 5 = 10$, on demandait aux étudiants, « Qu'arrive-t-il si on ajoute 7 du côté droit ? » Ils remarquaient immédiatement qu'on n'avait plus une identité arithmétique. A la question « *En utilisant uniquement une addition*, peux-tu faire quelque chose pour retrouver une identité arithmétique ? », la réponse était le moyen évident « ajouter 7 du côté gauche ». Il fallait quatre ou cinq exercices de ce type pour obtenir des étudiants la règle, « Ce que vous ajoutez d'un côté, vous devez l'ajouter de l'autre côté ? ».

Si on n'insiste pas sur la restriction « en utilisant uniquement une addition », l'étudiant peut construire une nouvelle identité arithmétique en utilisant d'autres opérations et il n'obtiendra pas la conclusion souhaitée. Par exemple, nous pouvons partir de $2 \times 5 = 10$ et ajouter 20 à gauche. Si nous demandons alors à l'étudiant ce qu'il faut faire à droite, il ou elle peut très bien évaluer le membre de gauche, trouver la valeur 30 et suggérer alors de multiplier à droite par 3.

En utilisant des questions analogues pour les trois autres opérations, les étudiants arrivaient à des conclusions analogues après un seul exemple numérique. Le seul problème qui réapparaissait était le besoin de parenthèses, par exemple: $4+5=9$ amenait $4+5\times 3 = 9\times 3$ au lieu de $(4+5)3 = 9\times 3$. Tous les étudiants étaient capables de généraliser et concluaient: « Ce que vous faites d'un côté, vous devez le faire de l'autre. » Nos étudiants étaient maintenant prêts à relier ce travail préliminaire à la résolution d'équations.

3.7 Résolution d'une équation

Dans le processus de résolution d'une équation, les étudiants doivent transformer des expressions comprenant l'inconnue. Des études récentes montrent qu'un nombre étonnamment grand d'enfants éprouvent de grosses difficultés à manipuler de telles expressions. Les résultats d'une étude anglaise sur ce sujet [8] portant sur 3000 élèves des trois premières années de l'enseignement secondaire (âges moyens 13,3, 14,3 et 15,3 ans respectivement) révèlent l'étendue du problème. Trois des questions du test et le pourcentage de réponses correctes sont données dans le tableau suivant.

	Année		
Question	2	3	4
Ajouter 4 à $n+5$	61%	68%	69%
Ajouter 4 à $3n$	22%	36%	41%
Multiplier $n+5$ par 4	8%	17%	25%

Il est évident que les élèves ont du mal à exécuter des opérations arithmétiques sur des expressions algébriques. Peut-être est-ce particulièrement lié aux difficultés qu'ils éprouvent à penser qu'une lettre représente un nombre. La méthode que nous introduisons maintenant en tient compte. Cependant, elle ne peut être appliquée que lorsque l'inconnue n'apparaît qu'une fois, sinon, d'autres stratégies plus complexes sont nécessaires, elles débordent du cadre de cet article.

Partant de l'identité arithmétique $7\cdot 13+48=139$, nous pouvons cacher le 13 par une lettre et, pour nous assurer que les étudiants en sont constamment conscients, nous pouvons écrire côte à côte

$$7\cdot\boxed{13}+48=139 \qquad\qquad 7x+48=139$$

en leur demandant d'*imaginer* qu'ils *ne peuvent pas voir le* 13 *dans la boîte.*

Puisque résoudre cette équation consiste à reconstituer l'identité arithmétique, on peut demander aux étudiants ce qu'ils peuvent faire pour retrouver le nombre caché.

En considérant le problème de manière plus opérationnelle, nous pouvons demander, « Comment transformait-on 13 pour obtenir 139 ? » « Comment faudrait-il transformer 139 pour retrouver 13 ? » Ces questions attirent l'attention sur l'ordre dans lequel les opérations sont exécutées: 13 était d'abord multiplié par 7 et ensuite 48 ajouté au résultat. Comment ceci peut-il être défait ? (Pour une utilisation développée de « défaire », voir WIRTH [9])

Nous pouvons toujours exploiter l'analogie de l'habillage et du déshabillage: les étudiants enfilent leurs chaussettes avant leurs chaussures mais éprouveraient des difficultés à enlever d'abord leurs chaussettes. Donc, pour défaire la dernière opération, on soustrait 48. Et pourquoi doit-on soustraire 48 *des deux côtés ?* « Parce que, sinon, on ne conserverait pas une identité arithmétique ». Cela nous donne

$$7 \cdot \boxed{13} + 48 - 48 = 139 - 48 \qquad 7x + 48 - 48 = 139 - 48$$

Bien que les étudiants soient habitués à écrire horizontalement lorsqu'ils travaillent avec des identités arithmétiques, nous pensons qu'une disposition verticale est préférable dans la résolution d'équations parce que cela visualise mieux le processus. Ainsi, nous encourageons l'utilisation de la disposition suivante:

$$\begin{array}{rrcr|rrcr} 7 \cdot \boxed{13} & +48 & = & 139 & 7x & +48 & = & 139 \\ & -48 & = & -48 & & -48 & = & -48 \\ \hline 7 \cdot \boxed{13} & & = & 91 & 7x & & = & 91 \end{array}$$

A la dernière étape, les deux membres sont divisés par 7:

$$\frac{7 \cdot \boxed{13}}{7} = \frac{91}{7} \qquad \frac{7x}{7} = \frac{91}{7}$$

fournissant

$$\boxed{13} = 13 \qquad x = 13$$

Bien que la notation sous forme de fractions soit peut-être nouvelle pour certains étudiants, cela pourrait valoir la peine de l'introduire ici ; car si l'étudiant écrit $\frac{7 \cdot \boxed{13}}{7}$ au lieu de $7 \cdot \boxed{13} \div 7$, et $\frac{7x}{7}$ au lieu de $7x \div 7$, il ou elle peut voir plus rapidement que la division neutralise la multiplication. Une disposition verticale élimine aussi un tas de récriture. En notation horizontale, l'étudiant qui veut montrer qu'il soustrait 48 des deux côtés doit habituellement récrire l'égalité $7x + 48 = 139$ de manière à introduire des deux côtés la soustraction de 48. La disposition verticale peut aussi aider à éviter l'erreur, liée au manque de soin, qui consiste à oublier de soustraire aux deux membres de l'égalité.

Résoudre une équation consiste à isoler l'inconnue et, évidemment, ceci peut être fait de plusieurs manières. Certains étudiants vont d'abord s'attaquer au coefficient de l'inconnue et diviser l'équation par 7. Cependant, beaucoup d'enfants fuient cette méthode car ils semblent avoir développé une allergie envers les fractions.

Nos vieux livres résolvaient les équations en utilisant le procédé de « transposition » (« passer de l'autre côté et changer de signe »). Il en résultait une approche joliment mécanique dans laquelle beaucoup d'étudiants ne comprenaient jamais pourquoi le signe devait changer. Les approches modernes introduisent le concept d'équations équivalentes (« Deux équations sont équivalentes si elles ont la même solution dans le référentiel envisagé. ») et énumèrent un ensemble de transformations.

En utilisant notre méthode qui traite simultanément l'identité arithmétique, le nombre enfermé dans sa boîte et l'équation correspondante, on rappelle constamment à l'étudiant que la lettre remplace un nombre. Les transformations peuvent être justifiées à chaque étape puisque s'il n'utilise pas la même transformation des deux côtés, l'étudiant perd son identité arithmétique. « Défaire l'équation » apporte au concept d'équations équivalentes un parfum dynamique qui est perdu dans une définition formelle. Sans qu'on leur ait apporté aucune terminologie, nos étudiants ont montré qu'ils avaient acquis ce concept. Dans le travail ultérieur sur les équations, aucun doute n'est jamais apparu au sujet du nombre caché à chaque étape de la résolution.

Evidemment, un tel usage des identités arithmétiques est une étape intermédiaire et peut être abandonné lorsque l'étudiant a attribué une signification aux procédés mis en jeu. Cependant, la capacité d'un étudiant à justifier les règles ne sera pas interprétée erronément comme une stratégie de résolution puisque, comme pour tous les problèmes dont la solution nécessite plusieurs étapes, un élève peut très bien être capable de justifier pas à pas chaque étape sans pour autant atteindre la maîtrise nécessaire pour développer des stratégies de résolution.

4 Conclusions

Les différentes façons d'introduire le concept d'équation confrontent le professeur avec l'éternel problème de choisir entre une présentation générale et une présentation plus particulière. Les approches plus générales sont généralement plus formelles et, comme telles, atteignent moins d'étudiants tandis que les approches plus particulières sont relativement plus concrètes et donc accessibles à plus d'étudiants. Le schéma d'enseignement que nous avons développé est du deuxième type puisqu'il commence avec des équations qui admettent des solutions et étend seulement plus tard le concept d'équation de manière à inclure toutes les expressions algébriques d'égalités. Ceci permet aux étudiants d'ancrer le concept d'équation dans leur arithmétique. En suivant cette approche, nous avons inversé la tendance habituelle qui commence avec des expressions algébriques qui n'ont au départ aucune signification pour les apprenants. Au contraire, nous sommes partis de leur connaissance en arithmétique et nous l'avons transformée pour construire leur algèbre. (HERSCOVICS 1979) [10]

Notre introduction reflète la distinction entre contenu mathématique (concepts, règles, relations) et forme mathématique (notations et symbolisme utilisés pour exprimer le contenu). En définissant d'abord une équation comme une identité arithmétique avec un nombre caché, les enfants peuvent assimiler une nouvelle idée mathématique avant qu'elle ne soit figée dans une forme nouvelle pour eux. Si la compréhension formelle peut être définie comme la capacité à relier une forme mathématique aux idées mathématiques qui s'y rapportent (BYERS et HERSCOVICS [12]), alors, en participant à la construction des équations, les étudiants acquièrent un niveau de compréhension formel de ce sujet. Nous pensons que la distinction entre contenu et forme a des implications pédagogiques importantes dans l'enseignement des mathématiques. En effet, comme l'a montré BYERS [11], « l'enseignement qui vise la compréhension doit montrer à l'apprenant la continuité du contenu mathématique pendant, et préalablement à l'introduction d'une nouvelle forme mathématique. »

Finalement, nous voulons souligner que l'approche constructive que nous avons utilisée dans l'enseignement de l'algèbre est accessible à des étudiants présentant différentes capacités. En fait, des post-tests utilisés six semaines après le dernier entretien ont montré que nos étudiants avaient conservé une compréhension claire des identités arithmétiques, du concept d'équation et de la justification des règles algébriques. Bien sûr, beaucoup d'enfants peuvent développer du sens à partir des présentations plus usuelles. Peut-être ces étudiants ont-ils développé une plus grande affinité pour la forme mathématique et vivent-ils confortablement une approche plus formelle. Il nous semble pourtant que beaucoup d'autres n'ont pas acquis une telle habilité mathématique et que le temps passé à la construire est un investissement solide. Même si certains d'entre-eux ne développent pas beaucoup d'adresse dans des stratégies de résolution ou dans la traduction de W.P., ils peuvent cependant comprendre en quoi consiste l'algèbre sans être complètement mystifiés et sans se sentir intellectuellement incapables.

Références

[1] GINZBURG, Herbert, *Children's Arithmetic: The Learning Process*, New York: Van Nostrand, 1977.

[2] KIERAN, Carolyn, *Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations*, in Proceedings of the third international conference for the psychology on mathematics education, Warvick, England, 1979.

[3] SKEMP, Richard R., *The Psychology of Learning Mathematics*, Harmondsworth, England: Penguin Books, 1971.

[4] WAGNER, Sigrid, *Conservation of Equation and Function and its Relationship to Formal Operational Thought*, Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York, 1977.

[5] PETITO, Andrea, *The Role of Formal and Non-formal Thinking in Doing Algebra*, Paper presented at the annual meeting of the American Psychological Association, Toronto, 1978.

[6] BEHR, Merlyn, ERLWANGER, Stanley and NICHOLS, Eugene *How Children View Equality Sentences*, PMDC Technical Report n° 3, Tallahassee: Florida State University, 1976.

[7] BRUNER Jerome S., *The Process of Education*, New York: Random House, 1963

[8] KUCHEMANN, Dietmar, *Children's Understanding of Numerical Variables*, Mathematics in School, vol. 7, n°4, pp23–26, (1978).

[9] WIRTH, James,F., *The Christmas-Present Principle*, Mathematics Teacher 68, pp. 636–39, (1975).

[10] HERSCOVICS, Nicolas, *A Learning Model for Some Algebric Concepts.*, In *Explorations in the Modeling of the Learning of Mathematics*, edited by Karen Fuson and William Geeslin, Colombus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1979.

[11] BYERS, Victor, *Essays in Mathematics Education, Part 2.*, unpublished manuscript, 1978.

[12] BYERS, Victor et HERSCOVICS, Nicolas, *Understanding School Mathematics ?*, Mathematics Teaching, 81, 1977.