N. ROUCHE

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES D'HIER A DEMAIN

CREM a.s.b.l.

L'Enseignement des Mathématiques d'Hier à Demain

Document élaboré dans le cadre d'une convention de recherche entre Monsieur Michel Lebrun, Ministre de l'Education de la Communauté Française de Belgique et le CREM, avec le soutien du CPEONS, Conseil des Pouvoirs Organisateurs de l'Enseignement Officiel Neutre Subventionné et de la FESeC, Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique.

Le CREM a.s.b.l. a pour missions principales la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte et la formation continue des enseignants de mathématiques. Pour mener à bien ces missions, il a signé des conventions bilatérales d'entr'aide avec les groupes suivants :

• AHA, Approche Heuristique de l'Analyse
10 fond du Rondia 1348 Louvain-La-Neuve
Contact : M. Krysinska, tél. (010) 45 06 50

• CDS, Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut
Faculté des Sciences, 15 avenue Maistriau 7000 Mons
Contact : G. Noël, tél. (065) 37 34 15

• GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique
Département de Mathématiques de l'UCL, 2 chemin du Cyclotron 1348 Louvain-La-Neuve
Contact : C. Hauchart, tél. (010) 47 32 72

• GEPEMA, Groupe d'Etude sur les Premiers Enseignements de la Mathématique
Université de Mons-Hainaut, Faculté des Sciences, 15 avenue Maistriau 7000 Mons
Contact : P. Van Praag, tél. (065) 39 34 17

• SBPMef, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
15 rue de la Halle 7000 Mons
Contact : G. Noël, tél. (065) 37 34 15

•UEREM, Unité d'Etude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Institut Supérieur Industriel de Liège, 6 quai Gloesener 4020 Liège
Contact : A. Pétry, tél. (041) 41 13 85

• UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Département de Mathématiques de l'ULB
CP 216 boulevard du Triomphe 1050 Bruxelles
Contact : F. Buekenhout, tél. (02) 650 58 64

D/1995/7359/01 ISBN 2-930161-00-0

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.
5 rue E. Vandervelde B-1400 NIVELLES (Belgique)
Tél. : 32-67-21 25 27
Fax : 32-67-21 22 02

N. ROUCHE

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES D'HIER A DEMAIN

CREM a.s.b.l.

Sommaire

Avant-propos

Cette étude a pour but d'expliquer, parmi les difficultés qui ont secoué l'enseignement des mathématiques depuis une trentaine d'années, celles qui tiennent à l'évolution des mathématiques elles-mêmes. Elle est destinée aux enseignants de tous les niveaux, depuis le maternel jusqu'à la fin du secondaire, ainsi qu'aux responsables politiques et administratifs de l'enseignement. Elle éclairera sans doute aussi tout lecteur qui, n'étant pas mathématicien, voudrait préciser quelque peu l'idée qu'il se fait des mathématiques. Pour compléter cette lecture, on pourra consulter utilement R. Bkouche et M. Soufflet, Axiomatique, formalisme, théorie *(chapitre IV de l'ouvrage cité à la note 10,* in fine*).*

L'exposé ne contient que peu d'incursions techniques dans les mathématiques : un lecteur attentif armé d'un certain courage en viendra à bout, même s'il n'a pas d'affinité particulière pour cette discipline.

1. Pourquoi changer l'enseignement des mathématiques ?

En Belgique francophone, l'enseignement dit des " mathématiques modernes "[1] préparé depuis les années 60, a été introduit dans les écoles secondaires en 1968, et dans les écoles primaires en 1980. Il s'agissait d'une innovation radicale, marquée moins peut-être par l'étude élémentaire des ensembles et des relations que par la volonté d'inculquer très tôt aux enfants les structures qui sont à la base des mathématiques d'aujourd'hui.

Cette réforme n'a pas donné entière satisfaction, puisque le nouveau programme pour le secondaire promulgué dès 1980 prenait quelque distance vis-à-vis des " mathématiques modernes " et introduisait de nouvelles perspectives, surtout la pédagogie des situations et de la résolution de problèmes. Un nouveau programme a aussi été introduit dans les écoles primaires de l'Etat en 1985 : il s'écarte de même, dans une certaine mesure, des options du précédent, celui de 1980.

Les changements continuent aujourd'hui. Un autre programme encore est en préparation pour les écoles secondaires et devait entrer en vigueur en 1994. Parmi d'autres options, il s'éloigne davantage des " mathématiques modernes ". De nouveaux programmes sont annoncés aussi pour les écoles primaires et préparent une évolution analogue.

Pourquoi tous ces changements, que les professeurs et les élèves doivent suivre, non sans difficulté ? Qu'est-ce qui n'a pas marché dans les " mathématiques modernes " ? Les nouveaux programmes font-ils beaucoup plus que prendre des distances par rapport à celles-ci ? Dégagent-ils des perspectives positives ? Si oui, sur quoi sont-elles basées ? Peut-on s'attendre dans l'avenir à plus de stabilité dans l'enseignement des mathématiques ?

L'objectif de cet exposé est de chercher des éléments de réponse à ces questions, de sorte que les enseignants et plus généralement les responsables de l'enseignement puissent analyser l'évolution récente en bonne connaissance de cause et peser, plus que par le passé, sur les orientations futures.

Mais pour pouvoir chercher des réponses à ces questions elles-mêmes, il importe de comprendre suffisamment ce que sont les mathématiques d'aujourd'hui et à travers quelle évolution séculaire elles sont arrivées à leur forme actuelle. C'est l'objet des sections 2 à 4.

2. Qu'est-ce qu'une théorie axiomatique ?

2.1 Deux exemples

Aux alentours de 300 avant J.-C., Euclide a écrit le grand traité de géométrie connu sous le nom d'*Eléments*. On trouve au début de cet ouvrage quelques propositions non démontrées [2] telles que

• *par deux points passe une droite et une seule ;*

ou encore celle qu'on appelle le postulat des parallèles et qu'on énonce aujourd'hui le plus souvent sous la forme

• *par un point pris hors d'une droite passe une et une seule parallèle à celle-ci.*

Tout le reste des Eléments, c'est-à-dire un très grand nombre de théorèmes, est tiré de ces propositions de base presque uniquement par déduction logique. Certains passages pourtant, quoique importants, s'appuient *aussi* sur l'intuition et donc ne recourent pas à la déduction pure. En voici deux exemples :

- Euclide dit que deux triangles sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider, mais il laisse au lecteur le soin d'imaginer comment un triangle peut voyager vers un autre sans perdre son identité ;
- Euclide admet implicitement que si une droite (cet objet infini bien connu) pénètre dans un triangle, elle en ressort; il ne démontre donc pas cette proposition, qui par ailleurs saute aux yeux dans l'univers familier.

On appelle *axiomes* les propositions de départ, non démontrées, d'une théorie déductive. On dit d'une théorie qu'elle est *axiomatique* lorsqu'elle est ainsi tirée de quelques axiomes énoncés explicitement.

Comme on vient de le voir, les Eléments d'Euclide sont, pour l'essentiel, une théorie axiomatique. Ils sont même le premier exemple connu d'une telle théorie[3].

Donnons un deuxième exemple de théorie axiomatique. On peut déduire toutes les propriétés des nombres réels d'un petit nombre d'entre elles, que l'on trouve énoncées dans les manuels : ce sont, pour n'en citer que quelques-unes, la commutativité et l'associativité de l'addition, l'existence du zéro, la commutativité et l'associativité de la multiplication, l'axiome d'Archimède, etc. Les réels munis de ces propriétés et de toutes celles qu'on peut en déduire constituent le corps des réels, autre exemple de théorie axiomatique.

2.2 Des problèmes aux théories axiomatiques

Est-ce que les théories axiomatiques constituent le tout des mathématiques ? Et sinon, quelle est leur place et quel est leur sens dans la science mathématique, dans la recherche ?

Au fil des siècles, les théories ont été élaborées chacune pour répondre à des questions qui se posent ou se posaient dans un contexte donné. Il est important d'en donner quelques exemples, mais on ne peut le faire sans beaucoup d'arbitraire, tant les objets de curiosité et les thèmes de recherche ont été variés au cours de l'histoire. En voici quelques-uns.

Le contexte peut être mathématique, avec des questions telles que

- Y a-t-il une infinité de nombres premiers ?
- Comment construire tous les triangles rectangles dont les trois côtés peuvent être mesurés dans une même unité par des nombres naturels ?
- Quel est le volume de la sphère ?
- Peut-on résoudre les équations algébriques de n'importe quel degré en

utilisant des racines (carrées, cubiques, ...) ?

Le contexte peut aussi se situer en dehors des mathématiques, avec des questions telles que

- Quelle est la forme des orbites des planètes ?
- Comment croissent les populations dans diverses circonstances ?
- Comment répartir les mises entre les joueurs lorsqu'on interrompt tel jeu de hasard ?

Quoiqu'il en soit - et ceci est extrêmement important - à toutes les époques et encore aujourd'hui, les théories répondent à des questions. Donc les concepts et théorèmes nouveaux ont pour sens, pour raison d'être, de contribuer à résoudre un problème ou une famille de problèmes.

Il en résulte que lorsqu'une théorie se met en place, ceux qui ont oeuvré pour la créer ou la perfectionner ne se demandent jamais à quoi elle sert, car ils le voient immédiatement. Elle répond à leur attente en rendant intelligible un ensemble de phénomènes parfois très ample et jusque-là obscur.

Les théories dont nous parlons ainsi n'ont pas tout de suite la forme axiomatique. La pensée mathématique en recherche, au rebours de celle qui est codifiée dans les traités, ne procède pas par la seule déduction. Elle joue une sorte de contrepoint entre d'une part l'imagination fragmentaire et hasardeuse, et d'autre part des tentatives souvent très locales de déduction. Aucune théorie n'est née dans la forme axiomatique. L'axiomatisation est un travail de mise en ordre déductif d'un champ de faits déjà largement connu.

Dans la suite de cet exposé, nous serons amenés à nous appesantir sur les idées de théorie axiomatique et d'axiomatisation. Il est très important que ces développements n'induisent pas le lecteur à confondre les mathématiques - vivantes et bourdonnantes - avec un musée silencieux de théories figées.

2.3 Il faut bien partir de quelque part

Pourquoi donne-t-on aux théories mathématiques la forme axiomatique ? Pour répondre à cette question, demandons-nous ce que l'on fait, essentiellement, en mathématiques. On résout des problèmes, avons nous dit. Mais pour résoudre des problèmes en assurant sa démarche, il faut démontrer des propositions, c'est-à-dire en établir le bien fondé [4]. Mais pour démontrer une proposition (exprimant une propriété), on ne peut pas partir de rien : on doit s'appuyer sur d'autres propositions. Il faut donc avoir démontré celles-ci au préalable. Mais pour ce faire, il a fallu invoquer d'autres propositions encore, et ainsi de suite. Force est bien de s'arrêter quelque part dans cette régression potentiellement infinie.

Conclusion : il y a donc toujours quelques propositions qui se trouvent au début et que l'on accepte sans démonstration. Ce sont les axiomes [5].

C'est évidemment une question importante de savoir jusqu'où on recule vers des propositions de départ, et comment on choisit celles-ci. En général, on arrive à faire découler une théorie d'un nombre d'axiomes assez petit, disons, pour fixer les idées, entre trois et une quinzaine. Il y a toujours divers choix d'axiomes possibles. Parfois on cherche à obtenir des axiomes indépendants, c'est-à-dire dont aucun ne peut être déduit des autres.

Un premier effet de la mise d'une théorie en ordre axiomatique est d'en montrer - ce qui va de soi - un engendrement logique. C'est donc, pour le dire familièrement, une façon de répondre à la question : qu'est-ce qui dépend de quoi ? Et la réponse est plus complète si les axiomes sont indépendants que s'ils ne le sont pas.

2.4 Tenir l'intuition à l'écart, par règle de méthode

Intéressons-nous maintenant au travail de mise en ordre axiomatique d'une théorie [6]. Supposons que l'on ait choisi des axiomes et que, ce qui arrive rarement du premier coup, ceux-ci suffisent pour engendrer la théorie.

Il faut commencer par faire *table rase absolue* de la théorie et de *tout son contexte*, puisque dans la reconstruction logique, on n'a droit au départ qu'aux axiomes, et ultérieurement qu'aux axiomes augmentés de ce qui est déjà démontré. Bien sûr, il faut néanmoins conserver la théorie en point de mire, puisque c'est elle qu'il s'agit de reconstruire, et que si on l'oublie, on ne sait plus où aller. En somme, la théorie en aval doit être présente à l'esprit pour indiquer le chemin, mais absente de toutes les déductions que l'on fait. C'est une situation mentale inconfortable. On risque, à la moindre inattention, de se servir dans une preuve de ce qui doit être démontré.

Soulignons le fait que *tout* doit être *démontré*, y compris les propositions qui paraissent évidentes dans le contexte de la théorie. En l'occurrence *démontrer* une proposition signifie établir qu'*elle découle logiquement des axiomes*, et certainement pas l'*amener à l'évidence* (intuitive). Il n'est parfois pas évident du tout qu'une proposition intuitivement évidente découle logiquement des axiomes.

Une méthode pour se prémunir contre tout recours à l'intuition dans les preuves consiste à écarter du langage les mots suggestifs et à les remplacer soit par des mots arbitraires, n'évoquant plus rien par eux-mêmes, soit, ce que l'on fait plus souvent, par des symboles arbitraires eux aussi. Ces mots ou ces symboles sont alors soumis à des règles combinatoires abstraites (les axiomes [7]), qui ne renvoient à rien elles non plus. Travailler ainsi, c'est larguer le fond pour ne conserver que la pure forme déductive. C'est faire des mathématiques *formelles*.

Le formalisme *à l'état pur* ne *s'exprime* presque jamais : l'esprit humain a trop besoin d'intuition. Ce que l'on trouve souvent, par contre, ce sont des traités qui, tout en utilisant un vocabulaire suggestif, facilitent de leur mieux la vérification que chaque démonstration est indépendante des images qu'on lui associe.

Un exemple célèbre de formalisme a été donné par Hilbert lorsque, à la fin du XIX^{e} siècle, il a reconstruit la géométrie d'Euclide en en éliminant les quelques recours à l'intuition que nous avons mentionnés au n° 2.1. Il a dû pour cela écarter de son esprit les images des objets de la géométrie familière. Il n'est pas inutile, même si elle très connue, de rappeler ici l'anecdote suivante. Hilbert aurait dit un jour qu'on pourrait, dans ses *Fondements de la géométrie* [8], remplacer les termes *point*, *droite* et *plan* par *chaise*, *table* et *verre de bière*, sans que la théorie en soit affectée.

Cet exemple appelle deux remarques. L'ouvrage de Hilbert est écrit en allemand ordinaire et recourt à peu de symboles mathématiques. Ceci montre qu'il ne faut pas confondre *formalisme* avec *symbolisation mathématique*. Le formalisme est le rejet méthodologique du sens. Il n'implique pas nécessairement le recours à des symboles absents de la langue commune, même s'il est vrai que formalisme et symbolisation vont souvent de pair.

La deuxième remarque est plus importante. Le rejet du sens n'est jamais un objectif en soi : qui en effet pourrait s'intéresser au maniement aveugle, selon des règles arbitraires, de mots et de symboles qui ne renverraient jamais à rien ?

D'ailleurs Hilbert lui-même, après avoir doté la géométrie d'Euclide d'une structure purement formelle, a affirmé avec force que là n'était pas le tout de la géométrie. Dans la préface d'un livre au titre significatif (*La géométrie et l'imagination* [9]), il écrit: " En mathématiques comme dans toute recherche scientifique, on trouve deux tendances. D'une part la tendance à l'*abstraction* cherche à cristalliser les relations *logiques* inhérentes à la masse des matériaux étudiés, et à organiser ces matériaux en un système ordonné. D'autre part, la tendance à la *compréhension intuitive* pousse à saisir plus immédiatement les objets d'étude, à établir avec eux pour ainsi dire un *rapport* vivant qui exhibe le caractère concret de leurs relations. "

2.5 Les seuils et la multiplication des concepts

On ne peut pas construire techniquement des démonstrations en s'appuyant seulement sur les notions utilisées dans la vie et le langage quotidiens.

Prenons un exemple. La vitesse d'un mobile est mesurée par le chemin que parcourt celui-ci en l'unité de temps : par exemple, tant de km par heure. Cela ne présente aucune difficulté lorsque le mobile est animé d'un mouvement uniforme. Mais que faire lorsque sa vitesse varie à chaque instant ? On ne peut plus, pour la mesurer, attendre une heure (pour voir combien de km le mobile parcourra dans cette heure) ; on ne peut même plus attendre une minute, ni même une seconde. Il ne sert à rien, si le mobile est une auto, de dire que sa vitesse est donnée sur un cadran du tableau de bord, car cette idée ne donne non plus aucune prise au raisonnement mathématique. La vitesse du chauffeur, notion tellement utile et si bien appropriée à l'usage quotidien, ne peut pas servir à démontrer des théorèmes de cinématique.

C'est pour cela qu'il a fallu fonder l'étude des mouvements sur plusieurs concepts très techniques tels que ceux de *fonction* pour pouvoir représenter la position $x(t)$ du mobile à l'instant t, de *limite* pour pouvoir après définir la dérivée, et de *dérivée* pour représenter la vitesse instantanée. Cette vitesse à l'instant t, notée $x'(t)$, est définie par l'égalité

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Que le lecteur ne s'alarme pas s'il ne comprend pas ou ne comprend plus cette formule. Tout ce que nous avons voulu montrer, c'est la technicité du concept.

On pourrait sans peine multiplier les exemples de ce genre : les théories mathématiques en sont parsemées. Le raisonnement déductif, instrument de construction d'une théorie axiomatique, a besoin de cette technicité.

Nombre de concepts mathématiques sont à distance du sens commun. Il existe un seuil [10] malaisé à franchir entre les notions quotidiennes et les concepts mathématiques qui les relaient dans les démonstrations. Pour s'habituer à cela, il faut de bonnes raisons : à vrai dire il faut vouloir faire des démonstrations. Il faut en outre le temps de s'aguerrir à cette gymnastique de l'esprit.

L'exemple de la vitesse illustre un autre aspect de la technicité mathématique, à savoir la multiplicité des concepts. Pour saisir la vitesse d'une manière appropriée au raisonnement, il a fallu non seulement la définir elle-même d'une manière peu naturelle, mais encore définir préalablement les concepts de fonction et de limite .

Il en est ainsi très souvent. L'agencement logique d'une théorie est facilitée par l'introduction de nouveaux concepts. Les démonstrations sont rendues plus aisées par la reconnaissance de nouveaux objets et par de nouvelles distinctions entre objets connus. Mais le prix à payer, qui est la multiplication des concepts, n'est souvent pas négligeable.

2.6 La construction différée du sens

Plus important peut-être que la multiplication des concepts est l'ordre dans lequel l'axiomatisation amène souvent à les présenter.

Prenons à nouveau un exemple : l'analyse mathématique, qui est en gros la théorie des dérivées et des intégrales. Ces concepts sont issus de contextes problématiques assez divers. Les dérivées sont liées à l'étude des tangentes, des pentes, des taux de croissance, des vitesses, des maxima et minima, etc. Les intégrales interviennent dans les problèmes de longueurs, aires et volumes, d'espaces parcourus, de centres et moments d'inertie, etc. Ces contextes sont les principaux domaines de sens des dérivées et des intégrales. Si on a créé ces deux concepts, c'est pour répondre à des questions qui se posent dans ces domaines.

Or lorsqu'on reconstruit axiomatiquement l'analyse, on est amené à s'occuper d'abord de concepts préalables, dont la fonction principale est de rendre techniquement possible ou de faciliter les définitions des concepts de dérivée et d'intégrale, et les démonstrations de leurs propriétés. Ces concepts sont ceux de nombre réel, de fonction, de limite, de continuité. Il faut du temps et bien des pages dans les traités pour les expliquer. Donc on n'en voit pas d'emblée les usages principaux. On ne les voit intervenir que tardivement dans les champs de problèmes qui ont suscité la théorie.

Ce phénomène est fréquent. La mise en ordre axiomatique d'une théorie passe par une préparation technique absorbante qu'il faut pouvoir assumer, dans l'espoir d'une récompense différée [11].

2.7 Le recours aux symboles

En principe tout au moins, la pensée mathématique déductive peut être exprimée dans la langue commune. Les Eléments d'Euclide (mais aussi d'autres théories axiomatiques ultérieures) ne font pas usage de symboles spéciaux pour représenter les relations et les variables. Tout au plus y trouve-t-on des lettres, pour repérer des points ou des segments sur des figures.

Mais un tel mode d'expression est devenu rare de nos jours. La plupart des exposés théoriques utilisent à des degrés divers, outre la langue commune, des symboles arbitraires et des lettres pour désigner les objets mathématiques. Des notations bien choisies aident considérablement au développement de la pensée. Il est vrai par contre que les symboles éloignent les exposés mathématiques de la langue commune, et ajoutent la difficulté supplémentaire de leur décodage.

Observons toutefois ceci, pour dissiper une méprise fréquente : il est tout à fait exceptionnel qu'un exposé mathématique ne s'inscrive pas dans le *cadre* habituel de la langue commune. Ceci veut dire que les formules apparaissent dans des phrases où elles jouent, selon le cas, les rôles de sujet, complément, attribut.

3. Qu'est-ce qu'une structure abstraite ?

3.1 Des systèmes axiomatiques aux structures abstraites

Au n° 2.1, nous avons mentionné la géométrie d'Euclide comme premier exemple de théorie axiomatique. Cette géométrie ne s'occupe pas d'objets physiques tels que des cordes bien tendues ou des triangles dessinés au crayon, car de tels objets sont trop imprécis pour se plier aux exigences du raisonnement. Elle considère au contraire des objets idéaux, droites et cercles infiniment minces, points sans étendue, etc. Mais quoique idéaux, ces objets sont bien présents dans l'imagination, ils existent aux yeux de l'esprit, et c'est d'eux que la géométrie s'occupe.

Montrons maintenant comment et pourquoi les mathématiques en sont arrivées à s'écarter parfois de l'étude d'objets assez clairement imaginables.

L'axiome des parallèles (voir n° 2.1) a tout de suite fait problème dans la géométrie d'Euclide. On a pensé pendant longtemps qu'il n'était pas indépendant des autres axiomes, et qu'on pourrait le démontrer à l'aide de ceux-ci. Toutefois, pendant vingt-deux siècles, tous les efforts pour y arriver sont demeurés vains.

Dans la période qui va *grosso modo* de 1815 à 1830, Gauss, Lobatchevski et Bolyai ont montré que si on remplaçait l'axiome des parallèles par l'une ou l'autre proposition qui le contredisait, on engendrait des théories nouvelles, que l'on a appelées géométries *non euclidiennes*. Mais contredire l'axiome des parallèles, c'était nier ce que tout le monde au départ pensait être une propriété du monde physique. C'était donc inventer des géométries imaginaires dans lesquelles, tout de suite, certaines propositions s'opposent à des résultats familiers et à des intuitions de la géométrie d'Euclide. Ainsi, dans ces géométries, la somme des angles d'un triangle ne fait plus 180°, il arrive que plus d'une droite passent par deux points distincts, etc. Construire les géométries non euclidiennes obligeait à s'appuyer sur le seul raisonnement, en évitant les évidences spontanées ou acquises. C'était faire un pas vers l'abstraction : lorsque les choses dont on s'occupe se dérobent à l'imagination – mais c'est toujours provisoire – le seul recours est de s'accrocher aux propriétés qu'on leur attribue et qui, même si on ne les voit pas, peuvent servir à raisonner [12].

Examinons maintenant une autre étape de la marche d'une certaine partie des mathématiques vers l'abstraction. La théorie des permutations de n objets a été beaucoup étudiée au XIXe siècle, entre autres par Galois et Cauchy. Les permutations en question sont des opérations faciles à réaliser ou à imaginer : étant donnés n objets présentés dans un certain ordre, par exemple les trois chiffres dans (1,2,3), les permuter c'est passer de cet ordre à un autre, par ex. (3,1,2). Certaines propriétés de la théorie en question se sont avérées cruciales et peuvent être érigées en axiomes. Pour arriver à expliquer ce qu'est une structure abstraite, prenons le temps d'énoncer ces axiomes.

Soit $r, s, t, \ldots$ les permutations d'un ensemble de n objets. *Composer* deux permutations, c'est les exécuter l'une après l'autre. Le résultat, appelé la *composée* des deux permutations, est encore une permutation. Si r et s sont deux permutations, nous noterons leur composée $s \circ r$ (r exécutée d'abord, et s ensuite).

Les permutations jouissent des propriétés suivantes :

(i) si r, s, t sont trois permutations, on a

$$t \circ (s \circ r) = (t \circ s) \circ r \qquad \text{(associativité) ;}$$

(ii) il existe une permutation u telle que pour toute permutation r, on a

$$u \circ r = r \circ u = r \qquad \text{(existence d'un neutre) ;}$$

cet élément neutre est la permutation *identique*, celle qui laisse chaque objet en place et n'est appelée permutation que par extension ;

(iii) pour toute permutation r, il existe une permutation, notée r^{-1}, telle que

$$r^{-1} \circ r = r \circ r^{-1} = u \qquad \text{(existence d'un symétrique).}$$

De ces axiomes découlent par déduction une foule de propriétés des permutations.

Considérons maintenant un autre ensemble d'objets mathématiques absolument différents des permutations, mais dont certaines propriétés ressemblent aux trois axiomes ci-dessus.

Soient les translations du plan de la géométrie ordinaire. Translation veut dire ici déplacement sans rotation. Faire deux translations successivement, c'est encore faire une translation. Notons $b*a$ la composée de deux translations : d'abord a et ensuite b.

Si a, b, c sont trois translations, on a

$$c*(b*a)=(c*b)*a \qquad \text{(associativité) ;}$$

il existe une translation i (celle qui ne déplace aucun point du plan et n'est appelée translation que par extension) telle que pour toute translation a, on a

$$i*a=a*i=a \qquad \text{(existence d'un neutre) ;}$$

enfin, pour toute translation a, il existe une translation a_0 telle que

$$a_0*a=a*a_0=i \qquad \text{(existence d'un symétrique).}$$

De ces trois propriétés, on peut déduire beaucoup de propriétés des translations.

Considérons ensuite les nombres entiers $0,1,2,$ et $-1,-2,$ et l'opération ordinaire d'addition. On sait que si m, n et p sont trois entiers, on a

$$(m+n)+p=m+(n+p) \qquad \text{(associativité) ;}$$

on sait aussi que pour tout entier n on a

$$n+0=0+n=n \qquad \text{(0 est neutre pour l'addition) ;}$$

et enfin, à tout entier n correspond un entier noté $(-n)$ tel que

$$n+(-n)=(-n)+n=0 \qquad \text{(existence d'un symétrique).}$$

Dans les trois exemples [13] que nous venons d'examiner (les permutations, les translations et les entiers), on a une loi (notée $\circ$, $*$ ou $+$ selon le cas) qui à deux éléments d'un ensemble fait correspondre un élément du même ensemble. Cette loi satisfait dans chaque exemple à trois propriétés *de même forme*, même si les notations diffèrent de l'une à l'autre.

On peut évidemment étudier *séparément* les propriétés des permutations, des translations et des entiers, et c'est bien ce qui a été fait dans l'histoire. Mais on voit aussi, une fois qu'on a mis à jour la parenté de forme des propriétés, l'intérêt qu'il peut y avoir à traiter les trois cas en un. Ceci ne peut se faire qu'*en ne précisant plus de quoi on parle*, c'est-à-dire en construisant une *structure abstraite*.

On dira : soit E un ensemble. Supposons qu'il existe une loi qui, à deux éléments quelconques x et y de E fasse correspondre un élément de E que nous noterons $x\mathrm{T}y$ (on choisit le symbole T de façon tout à fait arbitraire). Supposons que pour tous les x, y, z de E on ait

$$(x\mathrm{T}y)\mathrm{T}z = x\mathrm{T}(y\mathrm{T}z) \qquad \text{(associativité) ;}$$

qu'il existe dans E un élément que nous noterons v, tel que pour tout x de E

$$v\mathrm{T}x = x\mathrm{T}v = x \qquad \text{(existence d'un neutre) ;}$$

que pour tout x de E, il existe un élément de E, que nous noterons x^{-1}, tel que

$$x\mathrm{T}(x^{-1}) = (x^{-1})\mathrm{T}x = v \qquad \text{(existence d'un symétrique).}$$

Si on procède ainsi, c'est bien, comme nous l'avons annoncé, que l'*on a décidé d'ignorer provisoirement de quoi on parle*. Le discours porte sur des éléments d'un ensemble, que l'on peut combiner de telle et telle façon, conformément aux trois axiomes choisis. On peut construire ainsi une théorie *abstraite*, sans l'appliquer à rien, mais en sachant qu'à tout moment on peut l'appliquer aux permutations, aux translations, aux nombres entiers (en fait, à tous les ensembles de choses qui satisfont aux trois axiomes).

La structure abstraite dont nous venons de parler s'appelle *structure de groupe*. C'est l'une des plus importantes de l'algèbre. Comme nous l'avons dit au début de cette section, Galois, Cauchy et d'autres avaient, dans la première moitié du XIX^e siècle, fait progresser beaucoup l'étude des groupes de permutations. On doit à Cayley d'avoir proposé l'étude abstraite de la notion de groupe, et d'en avoir montré l'application à des ensembles de matrices et de quaternions [14].

Les structures abstraites ont joué un rôle considérable dans la suite de l'histoire des mathématiques. On en a vu fleurir un très grand nombre, connues sous les noms les plus variés : anneau, corps, espace vectoriel, etc., etc.

De par son caractère formel ou abstrait, chacune est étudiée en elle-même et ne renvoie à aucun objet particulier. Ceci explique le mot de Bertrand Russell disant qu'en mathématiques " on ne sait pas de quoi on parle ". Il ne faut pas oublier toutefois que chaque structure abstraite a pour fonction d'aider à comprendre ce qui se passe dans divers ensembles d'objets particuliers.

Il nous a paru éclairant, pour cet exposé, de distinguer les deux notions de *théorie axiomatique* et de *structure abstraite*. On pourrait dire qu'une structure abstraite est une théorie axiomatique, mais dans laquelle on ne cherche pas à savoir de quoi on s'occupe. Seule la forme des relations et des déductions demeure, le fond est oublié (d'où la locution synonyme, très courante elle aussi, de structure *formelle*). On peut dire également que dans une telle structure seule la syntaxe est étudiée, tandis que le sens est volontairement délaissé.

3.2 Les quatre usages du formalisme

La notion de structure abstraite ou formelle étant acquise, le moment est venu de l'éclairer davantage encore en rassemblant ce que l'on peut dire des usages de ces structures. Nous en avons déjà découvert certains. Comme on va le voir, il y en a d'autres.

Dans l'ensemble des travaux mathématiques, la mise en ordre axiomatique d'une théorie est une activité assez rare quoique importante. Comme nous l'avons vu au n° 2.4, elle exige que l'on se concentre sur le seul engendrement logique en évitant les pièges de l'intuition. Il faut être rigoureux. Or le recours à des termes ou des symboles arbitraires combinés selon des règles convenues, c'est-à-dire *le formalisme, est un instrument de la rigueur*. Et c'est là un premier usage du formalisme.

L'économie de pensée est un deuxième usage du formalisme. Nous l'avons rencontré au n° 3.1: il est plus avantageux de démontrer une seule fois (et c'est alors forcément dans un cadre abstrait) un lot de propriétés qu'on pourra ensuite appliquer telles quelles dans plusieurs théories particulières, que de démontrer à nouveau ces propriétés à l'intérieur de chacune de ces théories. De l'une à l'autre, elles ne font que changer de vêtement.

Le troisième usage des structures abstraites a trait aux *transferts d'intuition*. Nous venons de le rappeler : une même structure peut exprimer, en tout ou en partie, le squelette logique de plusieurs chapitres bien différents des mathématiques. Ce squelette manifeste une parenté de forme entre ces chapitres. Ainsi, des liens s'établissent dans l'esprit entre des familles d'objets et de phénomènes qui pourtant, au premier regard, paraissent étrangères les unes aux autres : dans notre exemple du n° 3.1, les permutations, les translations, les entiers, les matrices, les quaternions,

Comment réfléchit quelqu'un (mathématicien, élève, ...) qui tâche de résoudre un problème dans l'une de ces familles d'objets et de phénomènes ? Résoudre un problème, c'est *d'abord imaginer* des solutions, souvent de façon chaotique, tâtonnante et morcelée, et c'est ensuite seulement prouver logiquement ce que l'on est arrivé à voir ou à deviner. Dans la partie imaginative de ce travail, toutes les manoeuvres sont permises, et en particulier les excursions mentales dans les domaines parents, parfois tout autres comme nous venons de le voir. On ne peut pas penser sans s'appuyer sur des intuitions, des images, extrêmement variables d'un esprit à l'autre. L'un verra plus facilement des choses intéressantes dans les permutations, et un autre dans les translations, etc. Les structures qui forment le lien entre les divers chapitres des mathématiques canalisent en quelque sorte les intuitions, permettent des *transferts d'intuition* des uns aux autres. Il y a là un paradoxe : parce qu'elles sont abstraites, les structures se trouvent à l'écart des intuitions, mais parce qu'elles sont communes à divers domaines " concrets ", elles induisent des transferts d'intuition entre ces domaines.

Les transferts d'intuition jouent un rôle majeur chaque fois que, venant d'un domaine où les intuitions sont nombreuses et aisées (par exemple la géométrie élémentaire), on s'aventure dans un domaine nouveau où elles sont rares et difficiles (par exemple, la géométrie à quatre dimensions, ou à n dimensions).

Voici, dans ces circonstances, ce qui se passe souvent. On a une propriété évidente dans le premier domaine. Comme elle est évidente, on n'éprouve pas un très grand besoin de la démontrer. On la démontre néanmoins, ou en d'autres termes, on fait voir qu'elle découle logiquement des axiomes. Cette propriété conduit, par analogie, à en soupçonner (on dit à en *conjecturer*) une autre, cette fois dans le second domaine. Celle-ci n'est pas évidente. De toute façon, il faut la démontrer. Il arrive fréquemment que la démonstration de la première inspire celle de la seconde. On trouve là une raison supplémentaire de démontrer des évidences : la démonstration d'un fait évident peut donner le modèle de la démonstration d'un fait non évident.

Bien entendu, l'économie de pensée et les transferts d'intuition ne sont que deux facettes d'un même phénomène. La citation suivante [15] montre leur lien, ainsi que leur rôle dans la pensée mathématique créative: " [...] chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique [...] ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut. " Il serait difficile d'exprimer plus clairement que le formalisme est un instrument de la résolution de problèmes et de la pensée créative. Celle-ci demeure l'essentiel. Le formalisme n'est pas un objectif.

Voici enfin un quatrième et dernier usage du formalisme. La reconnaissance de structures communes à des domaines mathématiques parfois très éloignés au départ les uns des autres a pour effet de *mettre de l'ordre dans la matière mathématique* considérée globalement. Des liens de parenté, de filiation souvent, se tissent à travers cette matière et contribuent à en faire voir l'architecture d'ensemble. Ce thème de la mise en ordre nous conduit tout droit à celui du fondement des mathématiques, auquel nous consacrons la section suivante.

4. Le problème du fondement

4.1 Des théories diverses, un problème de fondement

Revenons à une perspective historique. Vers la fin du XIX^{e} siècle, Cantor a créé la théorie des ensembles, sur laquelle nous reviendrons au n° 4.2. L'objectif qu'il poursuivait n'était pas de donner un point de départ aux mathématiques considérées dans leur ensemble. Au contraire, il avait besoin de cette théorie pour élucider certains phénomènes particuliers relatifs à des fonctions périodiques. Mais la théorie des ensembles à son début a buté sur des paradoxes. Les énoncés de ceux-ci étaient assez simples. Disons seulement qu'ils étaient parents du vieux paradoxe du menteur qui affirme " ce que je dis est un mensonge ". Ces paradoxes ont montré que les mathématiques pouvaient se sentir en danger de contradiction. L'avènement des géométries non euclidiennes (cf. n° 3.1) avait d'ailleurs déjà alerté les esprits dans ce sens.

D'autre part, en cette même fin du XIX^{e} siècle, les mathématiques étaient déjà une science très vaste. Elles étaient constituées de diverses théories : la géométrie, l'algèbre, l'analyse, la théorie des nombres, qui avaient entre elles certains liens bien visibles, mais n'étaient toutefois pas organisées en un tout absolument cohérent. Certaines structures abstraites avaient déjà été construites, mais les mathématiques dans leur ensemble n'avaient pas encore, comme elles allaient le faire par la suite, réalisé leur unité profonde.

La recherche mathématique allait en s'accélérant. De plus en plus de résultats s'accumulaient dans les diverses théories. Un jour devait bien arriver où serait posé de façon plus insistante que par le passé le problème du fondement de cette science foisonnante. La question était précisément la suivante : peut-on continuer à démontrer encore et toujours de nouveaux théorèmes en étant sûr de ne jamais rencontrer de contradiction ?

Mais comment travailler cette question tant que la science mathématique se présentait comme une juxtaposition de théories, avec des liens entre elles certes, mais sans organisation d'ensemble ? Fallait-il travailler sur tous les fronts en parallèle ? Ou alors par quel bout fallait-il commencer, tant qu'aucun bout ne paraissait vraiment à privilégier ?

4.2 Les mathématiques tirées de l'axiomatique des ensembles

La réponse à cette question – par où commencer ? – a reçu une réponse le jour où précisément on a trouvé " un bout privilégié ". Pour comprendre cela, il nous faut revenir à la notion de théorie axiomatique.

Rappelons l'idée de base, celle de régression dans le travail d'organisation déductive. Pour définir un objet, on doit recourir à la connaissance d'autres objets. Il faut donc avoir défini ceux-ci, à partir d'autres objets encore, etc. Pour démontrer une proposition, on s'appuie sur d'autres propositions. Il faut donc avoir démontré ces dernières, à partir d'autres propositions encore, etc. Où s'arrête-t-on ?

Dans la pratique, on s'arrête à des termes non définis et à des axiomes qui permettent un exposé commode et clair de la théorie. On a construit ainsi une théorie axiomatique pour les réels, une pour les naturels, une pour la géométrie euclidienne, etc. Les exemples sont très nombreux.

Mais lorsqu'on en vient à poser la question du fondement des mathématiques, on a intérêt à ne pas arrêter la marche régressive vers des termes et des axiomes de départ de moins en moins nombreux. Et c'est bien ce qui s'est passé dans l'histoire. Les principales théories mathématiques se sont cherché à reculons des racines de plus en plus lointaines. Il se fait qu'elles se sont trouvé *une* racine commune, à savoir la théorie axiomatique des ensembles qui dérive de quelques axiomes et des seules notions d'*ensemble* et d'*appartenance à un ensemble*. Les mathématiques contemporaines peuvent être tirées logiquement de là, et l'ont été effectivement en bonne partie par N. Bourbaki, dans un traité qui a marqué le XX^{e} siècle [16].

Les théories les plus connues s'engendrent dans l'ordre suivant : de la théorie des ensembles on tire, grâce à des définitions appropriées, celle des nombres naturels puis des nombres entiers, de celle-ci on tire les rationnels ; les rationnels permettent de construire les réels ; à partir des réels, via la définition d'espace vectoriel, on reconstruit l'essentiel de la géométrie ; les réels engendrent aussi les complexes et l'analyse mathématique.

On obtient ainsi une suite de théories emboîtées, dont on dit qu'elles vont des plus *pauvres* aux plus *riches*. La théorie des ensembles est la plus pauvre au sens où elle comprend le moins de définitions, où les objets dont elle s'occupe – les ensembles – sont décrits par très peu de propriétés et sont donc d'application très générale. Les naturels ont plus de propriétés, ils forment une structure plus riche et moins générale. Et ainsi de suite, dans l'ordre de l'engendrement global.

Ainsi les mathématiques, science immense, sont accrochées à des propositions de départ qui tiennent sur une seule page. Elles ont, après de nombreux siècles, et en dépit de leur expansion constante, trouvé leur unité.

Revenons à notre problème de fondement. Sachant que le grand arbre mathématique sort d'une graine minuscule (l'axiomatique des ensembles), on comprend que le problème de la non-contradiction se trouve clarifié : démontrer que les mathématiques ne produiront pas de résultats contradictoires est ramené à démontrer que les axiomes de la théorie des ensembles ne sont pas contradictoires. En termes imagés, si la graine est saine, l'arbre entier est sain.

L'unité des mathématiques et l'incontestable majesté de leur architecture globale a beaucoup frappé les mathématiciens. Pour marquer cette unité, certains ont proposé de parler dorénavant de *la* mathématique plutôt que *des* mathématiques. L'usage n'a pas encore tranché.

4.3 Les mathématiques enfin fondées ?

Nous avons dit : si la graine est saine, l'arbre entier est sain. Mais la graine est-elle saine ? Il serait trop long d'évoquer ici les péripéties de la crise des fondements. Disons seulement qu'on n'a pas prouvé la non-contradiction des mathématiques tirées de l'axiomatique des ensembles par les procédés de la logique ordinaire. Et même, ce qui est un résultat considérable, on a prouvé qu'on ne pourrait jamais prouver cette non-contradiction. Ceci est une conséquence, énoncée sommairement, d'un théorème célèbre de K. Gödel.

Quoiqu'il en soit, que le lecteur se rassure, les mathématiques n'ont encore jusqu'aujourd'hui rencontré aucune contradiction dont elles n'aient réussi à s'affranchir. Et en tant que science, elles se portent bien.

Et même l'intérêt pour la structure globale et les questions de fondement, très fort au milieu du siècle, semble s'affaiblir aujourd'hui. Les mathématiques repartent dans des directions diverses. Comme le note J.-P. Kahane [17], " en même temps que s'affirme ce lien [dont il vient de parler] à l'informatique, le lien avec la physique et avec les applications techniques [automatique, traitement du signal, codage, traitement de l'image] se resserre de nouveau. Le cadre donné par Bourbaki éclate. La théorie des ensembles, loin de servir de base inébranlable à la mathématique, apparaît comme une théorie axiomatique, comme les autres théories mathématiques, avec des variations possibles de l'axiomatique selon les usages envisagés (un peu comme les géométries diverses se prêtent aux différentes théories physiques). Les branches communiquent et se fécondent par leurs rameaux extrêmes. L'unité des mathématiques apparaît bien plus comme celle d'une jungle, riche de communications imprévues et d'un mouvement incessant, que, dans l'optique bourbakiste, comme celle d'un beau jardin à la française. "

Ceci dit, le lecteur ne devrait pas déduire de cette citation que les mathématiques suivent une voie incohérente : au milieu de l'animation actuelle, l'oeuvre des " fondateurs " est toujours là et toujours importante.

5. L'enseignement devait suivre

Jusqu'au milieu du XX^{e} siècle, les enseignements primaire et secondaire n'ont pas suivi, ou n'ont suivi que de loin, l'évolution des mathématiques que nous avons esquissée. Dans les années 50 et 60, on enseignait encore, à des adaptations mineures près, la géométrie héritée d'Euclide (300 ans avant J.C.) et l'algèbre des XVI^{e} et XVII^{e} siècles. Les programmes comportaient aussi quelques éléments de l'analyse mise au point au XIX^{e} siècle, mais l'essentiel de cette théorie était réservée à l'enseignement supérieur. Ainsi, le retard pris par l'enseignement sur les mathématiques de la recherche était devenu trop important. Une mise au point s'imposait.

Qui plus est, après la guerre de 1940-45, les nations industrialisées entraient dans une période d'expansion économique considérable. Les gouvernements estimaient urgent d'adapter l'enseignement scientifique, et en particulier mathématique, au progrès des techniques. Il fallait produire en nombre suffisant des hommes de science et des ingénieurs de niveau élevé.

Le coup d'envoi de la réforme est venu en 1958-59 de l'O.E.C.E. (Organisation Européenne de Coopération Economique). Les grandes lignes en ont été dessinées lors des Colloques de Royaumont (1959), et un peu plus tard de Dubrovnik, auxquels ont participé un certain nombre de mathématiciens renommés, venus de plusieurs pays [18] .

Il est très important, pour comprendre cette réforme, de se souvenir qu'elle a été inspirée par des mathématiciens chercheurs. Par contre, ces mathématiciens n'ont pas collaboré aux réformes ultérieures, qui ont été essentiellement l'oeuvre des commissions de programme.

6. Les grands axes de la réforme

6.1 Enseigner rigoureusement les structures

La réforme des " mathématiques modernes " a procédé d'un dessein ferme et clair (même s'il s'est avéré critiquable, voir n° 7). Il consistait à enseigner dès que possible [19] les structures axiomatiques les plus fondamentales, celles qui sous-tendent les grands secteurs classiques des mathématiques : algèbre, géométrie, analyse, ... Il ne s'agissait pas de remplacer ceux-ci, mais bien de les exposer plus clairement, plus rigoureusement. Pour ce faire, on a introduit quelques matières et outils nouveaux.

C'étaient d'abord, comme base pour tout le reste, des notions sur les ensembles et les relations. Cette partie de l'enseignement a joué un rôle clé : nous y revenons au n° 6.2

C'étaient ensuite et surtout les transformations du plan, puis les vecteurs géométriques conduisant à la structure d'espace vectoriel. C'étaient des éléments de statistique et de calcul des probabilités. C'étaient enfin des notions d'analyse poussées un peu plus loin que par le passé.

Du point de vue de la rigueur, il fallait en tous cas éviter ce qui, dans Euclide ou dans le traitement scolaire traditionnel des nombres, apparaissait comme fautif ou incomplet au regard des mathématiciens contemporains.

Les structures à enseigner n'étaient pas, bien entendu, des structures abstraites, c'est-à-dire ne renvoyant à rien. Au contraire, on étudiait à tout moment des phénomènes géométriques ou numériques, et donc il y avait bien des objets dans le champ de la pensée. Pourtant les structures abstraites étaient visées aussi à terme, puisqu'on voulait petit à petit enseigner à reconnaître un groupe, un anneau, un espace vectoriel, derrière diverses façades " concrètes ".

6.2 Commencer par les ensembles

Puisque les ensembles et les relations étaient devenus à la fois la source (logique) et le principe unificateur des mathématiques, il fallait commencer par eux.

Il n'était toutefois pas question d'enseigner la théorie axiomatique des ensembles, car elle est beaucoup trop abstraite et le détail de son engendrement éclaire peu les mathématiques qui s'ensuivent. D'où dès le départ, une exception, mais raisonnable, au projet d'adopter la voie axiomatique : on a enseigné la théorie dite " naïve " des ensembles, c'est-à-dire celle que l'on peut dégager de la notion quotidienne et intuitive de collection.

Une fois les propriétés principales des ensembles et des relations usuelles acquises de cette façon, il devenait possible d'enseigner tout le reste des mathématiques de façon non seulement rigoureuse mais progressive, en introduisant par étapes de nouveaux axiomes. On allait ainsi des structures pauvres vers les plus riches (sur cette distinction, voir n° 4.2), ou pour le dire plus familièrement, du général au particulier.

On le voit, cet ordre de présentation des matières était inspiré par l'architecture globale des mathématiques, issue des recherches sur les fondements.

Mais d'autres arguments étaient invoqués à l'appui de la réforme. Parcourons les principaux d'entre eux.

6.3 Enseigner des concepts définitifs

L'argument suivant a été maintes fois invoqué : il valait mieux enseigner directement les concepts fondamentaux, qui forment la base des mathématiques et seraient donc *acquis définitivement*, que commencer par des notions moins bien mises au point et sur lesquelles *il faudrait* de toute façon *revenir* pour expliquer les mathématiques d'aujourd'hui.

Enseigner d'emblée des concepts définitifs, c'était construire le savoir par accumulation, comme on fait un mur en posant chaque brique à sa place du premier coup.

6.4 La simplicité

On pensait aussi que les structures (pauvres entre autres) étaient faciles à apprendre, plus faciles en tout cas que les mathématiques moins ordonnées et moins rigoureuses d'autrefois. Quelques décennies d'ajustement et de décantation avaient apporté de la limpidité aux mathématiques. On savait enfin " ce qui dépendait de quoi ". De plus, le départ d'une théorie axiomatique n'est jamais fait que de quelques propositions simples, que l'on peut illustrer par des situations familières. La conviction de la simplicité était forte : on pensait qu'il y aurait beaucoup moins d'échecs que par le passé.

6.5 Des élèves actifs

Les promoteurs des " mathématiques modernes " pensaient, avec J. Piaget [20] que le savoir mathématique pouvait et devait être construit en bonne partie par les élèves eux-mêmes, placés dans un contexte approprié et stimulés par des questions adaptées. On parlait de pédagogie active, de la méthode de redécouverte s'appuyant sur l'imagination des élèves, et du fait que l'enseignement devait déboucher sur de nombreuses applications. On voulait rapprocher les élèves d'une activité mathématique authentique. Au moins était-ce là le discours des réformateurs, puisque sur le fond, nous l'avons vu, ils voulaient inculquer les mathématiques en suivant un fil axiomatique déterminé.

6.6 Un enseignement démocratique

Des moyens d'expression non verbaux tels que les diagrammes de Venn et les graphes à flèches devaient permettre aux élèves de s'exprimer sans trop recourir à la langue commune, ce qui aurait pour effet d'atténuer les différences socio-culturelles entre eux [21] .

7. Ce qui n'a pas marché

7.1 La pauvreté du contexte

La difficulté principale rencontrée par la réforme des " mathématiques modernes ", c'est la pauvreté du contexte, inévitable dans un enseignement qui se veut d'emblée axiomatique. Par contexte, nous entendons ici les domaines de sens et d'application des théories enseignées, les choses qu'on pouvait évoquer dans la classe de mathématiques, et non tout ce qui peuple la mémoire et la vie des élèves.

Aborder une théorie par la voie axiomatique, c'est l'apprendre sans contexte, sans questions. S'il est vrai qu'une structure met en ordre des matériaux mathématiques (n° 2.4), cela n'a guère de sens de l'apprendre avant d'avoir reconnu et travaillé ces matériaux [22] . On ne peut mettre en ordre que ce que l'on a. A défaut d'un contexte significatif, tout ce que l'on peut faire avec les axiomes et les premières propositions et définitions d'une théorie, c'est les illustrer par des exemples naïfs, et non montrer l'éclairage qu'ils apportent à des questions substantielles. Le domaine de sens, c'est-à-dire l'ensemble des référents de la théorie naissante, est trop ténu.

Qui plus est, le chemin à parcourir pour construire une théorie axiomatique est long, trop long pour de jeunes esprits. Par exemple, la construction rigoureuse des nombres réels prenait de nombreux mois [23] : comment les élèves auraient-ils pu poursuivre un objectif aussi lointain, que par ailleurs ils n'avaient pas choisi ? C'est pourquoi cet enseignement leur a souvent paru dogmatique.

7.2 Des structures trop longtemps inopérantes

Nous avons vu (n° 3.2) que les structures d'une part apportent une économie de pensée et d'autre part facilitent les transferts d'intuition. S'il en est ainsi, c'est parce que chacune d'elles montre le squelette, l'architecture abstraite de plusieurs contextes significatifs, souvent très éloignés les uns des autres sur le plan de l'intuition.

Or l'élève qui découvre une structure pour la première fois ne peut être sensible à cet aspect des choses. En effet, cette structure non seulement ne s'applique initialement qu'à un seul contexte, mais encore celui-ci est maigre : le squelette, nous venons de le voir, n'est habillé que de peu de chair.

Bien entendu, l'élève va dans la suite rencontrer à nouveau cette structure dans d'autres contextes. Il va la *reconnaître*, et on lui demandera de la *nommer*. Mais va-t-il pour autant pouvoir s'en inspirer et faire ainsi jouer les transferts d'intuition, va-t-il pouvoir s'en servir et faire ainsi jouer l'économie de pensée ? Va-t-il embrayer dans un contexte nouveau quelque théorème fort acquis sur un autre terrain ? Parfois peut-être. Rarement sans doute dans la mesure où, l'enseignement demeurant absorbé dans la construction des structures elles-mêmes, les contextes problématiques se multiplient et s'enrichissent trop lentement. Les transferts d'intuition et l'économie de pensée manquent de terrains où s'exercer. La construction du sens est trop lente.

7.3 L'aridité des structures

Malheureusement, là où les structures ne peuvent développer leurs avantages, elles imposent néanmoins leurs difficultés propres.

La première et non la moindre est l'obligation de tout démontrer, y compris ce qui paraît évident (cf. n° 2.4).

Une autre est la technicité et l'abondance des concepts (cf. n° 2.5). Pour enseigner des concepts définitifs, pouvant servir d'instruments de navigation et permettant d'éviter les écueils dans le long voyage jusqu'aux mathématiques avancées, on prend au départ des précautions logiques dont le sens n'apparaît que beaucoup plus tard, lorsqu'on arrive en vue des écueils. Il est significatif, à cet égard, que les lexiques des manuels de " mathématiques modernes " étaient beaucoup plus longs que ceux des ouvrages antérieurs.

Une troisième difficulté enfin (cf. n° 2.7), liée à l'enseignement des structures, est l'abondance des symboles arbitraires soumis à des règles précises de calcul. En introduisant de nombreux symboles nouveaux, les " mathématiques modernes " ont multiplié les occasions (déjà nombreuses dans l'enseignement traditionnel) où les élèves, ayant perdu le souvenir des choses représentées par les symboles, se concentrent sur le seul respect des règles présidant à leur manipulation. Dans ces conditions, il leur arrive souvent d'oublier les règles.

Un des effets les plus patents de cette algébrisation a été la moindre importance accordée à la géométrie des figures. Ainsi, toute une génération d'élèves, puis d'enseignants, à peu près privés de cette géométrie, en sont arrivés à la méconnaître et à la craindre.

On le voit donc, enseigner d'emblée les structures conduisait à payer un prix élevé pour des avantages imperceptibles ou trop longtemps différés.

7.4 Canaliser la pensée

Autre aspect de cet enseignement : construire les éléments des mathématiques selon une voie axiomatique déterminée, c'est proprement canaliser la pensée. En d'autres termes, c'est négliger des pans entiers de l'expérience que les enfants accumulent dans la vie quotidienne ou dans d'autres disciplines scolaires, voire même leur interdire de puiser dans cette expérience.

C'est ainsi par exemple que la règle graduée et le rapporteur étaient proscrits au début de l'enseignement secondaire, le premier de ces instruments tant qu'on n'avait pas construit la notion de graduation dans le cadre de la géométrie affine, et le second tant qu'on n'avait pas, et c'était beaucoup plus tard, construit le concept d'angle et surtout la somme des angles.

Le point soulevé ici est parmi les plus lourds de conséquences : on ne peut impunément tenter d'inculquer la science constituée sans l'enraciner dans le savoir antérieur. Il est dangereux d'ignorer ce que l'enseignement peut puiser dans ce savoir : non seulement des points d'appui, mais des obstacles qui donnent sens à la science constituée.

Revenons alors sur l'espoir des réformateurs de pratiquer une pédagogie active, de donner aux élèves une bonne part d'initiative. Nous l'avons dit : les axiomes d'une théorie et leurs premières conséquences constituent un paysage pauvre, insuffisamment stimulant. A défaut d'une certaine richesse de perceptions et d'idées, l'esprit demeure immobile. Le professeur en est donc réduit à prendre et garder l'initiative. Il conduit la classe sur la route choisie, à travers ces concepts techniques et ces symboles nouveaux qui n'exhiberont leur plein sens – par ailleurs réel et profond – que bien plus tard.

Dans ces conditions, pratiquer une pédagogie active s'avère difficile. Il est vrai que certains enseignants arrivent néanmoins à animer une classe dans ce genre de circonstances. Mais il y faut un talent pédagogique hors du commun, combiné à une connaissance profonde de la matière et de son sens.

8. L'apport positif des " mathématiques modernes "

Ces constats pessimistes pourraient donner à penser que la réforme des " mathématiques modernes " n'a eu que des côtés négatifs, qu'elle a été une erreur pure et simple. Il n'en est rien. Aussi est-il important de relever la partie positive de l'héritage.

8.1 Une mise à jour s'imposait

Tout d'abord, le jugement de départ des réformateurs ne doit pas être revu. Il est vrai que l'enseignement des mathématiques du milieu du siècle était sclérosé. Il était alors et il demeure aujourd'hui nécessaire de prendre en compte l'évolution importante au fil des siècles de la science mathématique.

8.2 Certaines matières importantes

Dans cette perspective certaines matières nouvelles introduites lors de la réforme sont importantes et doivent être conservées. C'est le cas des transformations géométriques qui, bien que d'apparition tardive dans l'histoire, ont des points d'ancrage suffisamment forts dans le quotidien pour pouvoir être enseignées avec beaucoup de sens à des élèves jeunes. C'est le cas aussi pour les vecteurs, dont la fonction et donc le sens peuvent apparaître dans des questions élémentaires de géométrie et de physique [24] , ainsi que pour les éléments de l'algèbre linéaire. Et c'est encore le cas pour les éléments de statistique et de probabilités ainsi que pour le supplément d'analyse apporté par la réforme.

8.3 Aller vers les structures

Ensuite il faut garder à l'esprit et comme en point de mire la notion de structure axiomatique. On l'a vu, elle est capitale dans les mathématiques d'aujourd'hui. Il faut s'en rapprocher avec tous les élèves et y arriver avec certains. Le changement nécessaire, c'est qu'il ne faut plus proposer aux élèves d'*aborder* une théorie dans sa forme axiomatique. Ce qui a un sens par contre, c'est d'organiser axiomatiquement un ensemble de propriétés mathématiques que l'on connaît déjà familièrement et dont on connaît certains usages, que ce soit en mathématiques ou ailleurs. Alors on leur donne une forme abstraite qui les prépare à d'autres usages. C'est dans ce cadre d'une *activité* d'axiomatisation le plus souvent tardive que les notions (naïves) sur les ensembles et les relations exhibent leur plein sens.

9. Quels changements ?

Pour les raisons que nous avons analysées au n° 7, la difficulté essentielle rencontrée par les " mathématiques modernes ", celle qui résume toutes les autres, c'était le déficit de sens pour les élèves. Alors que les chercheurs trouvent une plénitude de sens dans les mathématiques qu'ils connaissent et pratiquent, beaucoup d'élèves des années 70 n'arrivaient pas à faire des mathématiques " a purposeful activity ", une activité possédant à leurs yeux un but, une intention.

Voyons maintenant quelles orientations ont été proposées pour ramener les élèves dans un univers de sens.

9.1 Des situations-problèmes

Dès 1980, on pouvait lire dans l'Introduction du programme des écoles secondaires [25] : " Cet enseignement a [...] pour objectifs l'assimilation de certaines notions et propriétés et l'acquisition de savoir-faire. Cependant, il ne suffit pas, pour cela, d'énoncer en langage précis des définitions et des propriétés, de les illustrer par l'un ou l'autre exemple, et de les appliquer dans des exercices ad hoc. Il importe que la prise de conscience des notions et des propriétés résulte d'une *véritable activité de l'élève* [c'est l'auteur du programme qui souligne]. Aussi lui proposera-t-on des activités : résolution de problèmes, calcul, transformation d'expression, observation d'objets géométriques, analyse de situations concrètes et de situations mathématiques, dans lesquelles sont engagées les notions ensemblistes et appliquées les propriétés des nombres et les éléments de la géométrie. *C'est à partir de la réflexion sur ces activités qu'on élaborera des définitions et énoncera des propriétés. On demandera d'abord que les notions soient utilisées à bon escient ; ce n'est qu'ensuite qu'on élaborera et consignera des définitions importantes* [nous soulignons]. "

Le même programme dit un peu plus loin : " l'expérience montre qu'en géométrie particulièrement, les objets d'étude et les propriétés ne deviennent disponibles que s'ils ont été dégagés de situations concrètes et de démarches pratiques, et utilisés dans des applications. "

Certes, les promoteurs des " mathématiques modernes " voulaient aussi que les élèves soient actifs (n° 6.5). Ceux du programme de 1980 indiquaient en outre des conditions de cette activité : des problèmes, observations, analyses de situations (impliquant l'existence de contextes où la pensée puisse s'animer), et cela préalablement à la mise en forme de la théorie. Nous verrons ci-après dans quelle mesure cet appel à l'activité des élèves a été suivi d'effet (n° 9.5).

L'utilisation systématique des problèmes et situations-problèmes dans l'apprentissage des mathématiques est maintenant recommandée un peu partout dans le monde. Elle a été illustrée par les travaux de G. Polya [26], mais ensuite par beaucoup d'autres. En 1980, le National Council of Teachers of Mathematics (U.S.A.) lui a accordé assez d'importance pour déclarer [27] : " la résolution de problèmes doit être le point central des mathématiques vues à l'école. "

Le recours à la résolution de problèmes repose sur l'observation suivante : pour apprendre aux élèves à penser mathématiquement, il est plus efficace de les faire travailler d'abord sur des questions de difficulté mesurée et qui appellent une théorie, que de leur inculquer d'emblée des connaissances toutes faites. A condition toutefois de se souvenir que pour apprendre à résoudre des problèmes de plus en plus difficiles, il faut avoir des connaissances de plus en plus nombreuses et de mieux en mieux structurées. Nous reviendrons sur ce point (n° 9.5).

9.2 L'enseignement en spirale : construire son savoir

L'évocation des situations-problèmes focalise l'attention sur les élèves aux prises jour après jour avec des difficultés bien choisies. L'idée est qu'à travers une suite programmée de telles situations, ils arrivent dans la mesure du possible à construire eux-mêmes leur propre savoir. Il est important de dire " dans la mesure du possible ", car on ne peut pas s'attendre à ce qu'ils retrouvent tout ce qui a coûté tant de siècles d'efforts à l'humanité. Ce qui laisse la place à bien d'autres formes d'enseignement.

Quoiqu'il en soit, le savoir ainsi construit progressivement ne l'est pas comme un mur ou une maison, par l'adjonction, chaque fois définitive, d'une nouvelle brique (cf. 6.3). Les concepts s'élaborent à partir des notions quotidiennes, par ajustements successifs, pour servir dans des situations problématiques de plus en plus difficiles. Les ajustements permettent de franchir des obstacles [28] nouveaux, les concepts s'élaborent techniquement pour répondre aux besoins des démonstrations [29]. La rigueur n'est pas une exigence imposée *a priori,* comme propriété ou condition bien définie de la pensée mathématique. Au contraire, elle s'élabore elle aussi par paliers [30] comme un moyen de cette pensée en progrès.

Une telle forme d'enseignement est souvent évoquée sous le nom d'enseignement " en spirale [31] ". Voici ce qu'en disait en 1990 le rapport de la Commission Danblon [32] : " Dans l'enseignement dit ' en spirale ', chaque notion, chaque théorie vue une première fois à un niveau élémentaire et dans un contexte peu étendu est reprise et approfondie plus tard dans un contexte élargi, et ainsi plusieurs fois jusqu'à ce que, d'approfondissement en approfondissement et de généralisation en généralisation, elle arrive à maturité en établissant ses connexions naturelles avec les notions et théories voisines. Nous suggérons que les programmes soient élaborés dans l'avenir, plus qu'ils ne l'ont été jusqu'à présent, en s'inspirant explicitement du principe de l'enseignement en spirale [33]. Cette option se justifie principalement par deux raisons. La première est que [...] aucune connaissance mathématique ne saurait être définitivement acquise du premier coup. La seconde est que dans un enseignement où les notions et théories sont chacune vue une fois dans un enchaînement linéaire, l'élève qui décroche en un point donné ne voit plus repasser le train. Au contraire, dans l'enseignement en spirale, il se retrouve régulièrement en pays de connaissance, ce qui lui donne une meilleure chance de raccrocher ".

9.3 La langue, l'histoire

Telles sont les recommandations principales que l'on entend aujourd'hui et qui tendent à situer l'apprentissage des mathématiques dans un univers de sens, un univers où l'on sache habituellement où on est, d'où on vient, où on va, ce qu'on veut, à quoi ça sert.

D'autres recommandations sont inspirées par la recherche du sens. Voici les deux principales.

D'abord, le véhicule constant de la pensée mathématique est la langue naturelle. C'est pourquoi, le professeur de mathématiques doit aussi être professeur de français [34] . Bien entendu, les symboles et formules sont très souvent utiles, voire nécessaires, mais ils doivent s'inscrire dans des phrases et des paragraphes qui reflètent la pensée.

Ensuite, il est souvent intéressant de prendre appui sur le passé des mathématiques. D'une part, on peut ainsi comprendre certaines difficultés des élèves à la lumière des difficultés correspondantes rencontrées dans l'histoire. D'autre part, on montre aux élèves que les concepts et les théories s'élaborent, non sans difficultés, sur des chantiers de problèmes et que les mathématiques d'aujourd'hui, qui continuent à avancer, appartiendront demain à l'histoire [35].

9.4 Est-ce une nouvelle mode ?

Toutes les recommandations ci-dessus apparaissent en substance dans le préambule du projet de nouveau programme du secondaire. On en trouve d'analogues dans divers pays comme la France, la Hollande, l'Allemagne, l'Angleterre, l'Italie, les Etats-Unis.

La recherche du sens et des moyens d'y atteindre a fait la quasi-unanimité au 7e Congrès International sur l'Education Mathématique, qui a rassemblé à Québec en 1992 plus de trois mille participants venus du monde entier.

Il faut toutefois se demander si cette convergence d'opinions est simplement le signe d'une nouvelle mode, ou si au contraire les principes énoncés sont susceptibles d'inspirer un enseignement solide et efficace pendant un bon nombre d'années. On va le voir, la réponse est nuancée.

9.5 Une valeur sûre et deux difficultés pratiques

Tout d'abord, l'argumentation relative à la primauté du sens est convaincante en soi. Elle n'a pas besoin d'être soutenue par des études psychopédagogiques comparatives. Elle est confirmée par l'expérience journalière de toute personne – mathématicien, élève ou autre – qui prend conscience avec joie de ses progrès chaque fois qu'elle s'empare d'un problème et avance dans sa solution.

La question n'est donc pas tellement de savoir ce qu'est le sens ou s'il est sain de s'en préoccuper, que de trouver pratiquement les moyens d'amener un supplément de sens dans les leçons de mathématiques. Deux difficultés majeures apparaissent ici.

La première est très ancienne. Quels que soient les appels au développement d'une pensée autonome chez les élèves, une part importante des enseignants continuent à insister sur l'inculcation des routines de calcul. Imposer l'exécution selon des règles invariables de calculs qui n'ont d'autres objectifs qu'eux mêmes, c'est-à-dire qui ne répondent à aucune question dans aucun contexte, c'est placer les élèves à côté du sens. En ce faisant, on leur apprend l'insignifiance, on les prive d'occasions de penser sérieusement et on leur donne des mathématiques une idée fausse et affligeante.

Cette véritable déviation de l'enseignement a des causes multiples. Certains enseignants ont hérité de leurs années d'études l'idée que les mathématiques consistent à calculer juste. Beaucoup pensent que savoir calculer sans faute est un préalable à la pratique des mathématiques plus avancées. Beaucoup aussi, en organisant un apprentissage intensif des techniques de calcul, ne font que répondre aux exigences des collègues qui recevront leurs élèves les années suivantes.

Il est vrai aussi qu'enseigner les routines de calcul est une activité sécurisante : les règles à appliquer sont peu nombreuses et claires, l'enseignant ne court aucun risque. Certains élèves y trouvent aussi, à défaut de sens, une forme de confort : en observant soigneusement les consignes, on gagne des points. Il est vrai que d'autres élèves acceptent mal l'absence de sens, et c'est plutôt un signe de santé intellectuelle que d'incapacité mathématique. Ceux-ci risquent l'échec.

Les examens portant sur le calcul peuvent être notés plus objectivement, ce qui paraît important, que ceux qui requièrent davantage de réflexion. Mais à quoi sert de noter objectivement des acquisitions négligeables ?

En effet, il est bien établi dorénavant [36] que l'enseignement par routines (sans contexte) peut conduire certains élèves à calculer correctement, mais que ce savoir-faire est de courte durée. Et de fait, au début de chaque année ou de chaque cycle d'études, on entend les professeurs se plaindre de l'incapacité en calcul des élèves qui leur arrivent, et qui sont pourtant (par définition) ceux qui ont réussi jusque-là.

On sait aussi par ailleurs que l'enseignement non routinier (celui qui s'appuie sur le sens) conduit habituellement à des acquisitions plus durables.

Une autre raison de ne plus enseigner massivement les routines de calcul, c'est que celles-ci sont dorénavant exécutées électroniquement. Et donc celui qui les aura apprises les désapprendra bientôt, à défaut de les pratiquer.

Est-ce à dire que le calcul soit une activité inutile et méprisable ? Pas du tout. La pensée mathématique s'appuie sans cesse sur des calculs. Il est donc souvent nécessaire de calculer pour penser. Par ailleurs, une part considérable de l'effort séculaire des mathématiciens a consisté à transformer en routines la solution de catégories de problèmes dont chacun était auparavant justiciable d'une solution particulière requérant un effort d'imagination [37]. Ce ne sont donc pas les calculs qu'il faut éviter, mais bien l'inculcation de règles de calcul hors des contextes où elles peuvent servir. Ces règles s'acquièrent de façon intelligente et durable par un usage régulier dans des contextes significatifs, c'est-à-dire des contextes où les fautes de calcul portent à conséquence, où elles entravent le sens. Ce qui d'autre part est dorénavant fondamental, c'est d'apprendre où, quand et comment il faut demander à une machine de calculer, c'est aussi de comprendre le sens des opérations qu'on lui demande et de les contrôler.

Venons-en à une deuxième difficulté pratique d'amélioration de l'enseignement. Après l'expérience des mathématiques modernes, certains se disent qu'il faut abandonner toute considération des structures axiomatiques, et faire travailler les élèves dans leur univers familier. Il faut leur donner des occasions d'observer, de manipuler des formes et des nombres, dans l'espoir que ces activités les amènent à découvrir " dans la nature " les mathématiques qu'ils ont à apprendre et les façons de s'en servir. Le danger est ici de maintenir les élèves dans des mathématiques en quelque sorte empiriques, et de ne pas prendre assez en compte le rôle de la théorie dans l'exercice de la pensée, c'est-à-dire dans la résolution de problèmes. Les concepts, les théories, les structures – nous l'avons sans doute suffisamment montré – sont les instruments de la pensée efficace. Il faut donc y tendre sans cesse et les enseigner, moins comme objets de contemplation que, précisément, comme instruments de pensée.

10. Comment promouvoir les changements ?

Et maintenant que faire pour promouvoir les changements souhaités ? Certains enseignants actifs partagent en gros les idées développées jusqu'ici, et ce n'est pas eux qu'il faut convaincre : c'est avec eux qu'il faut travailler à améliorer l'enseignement dans son ensemble.

Il ne suffira pas d'expliquer oralement ou par écrit qu'une " nouvelle méthode " est proposée, voire imposée. Il n'y a pas en réalité de nouvelle méthode, mais bien de multiples façons, à inventer ou adapter par chacun, de pratiquer dans les classes des mathématiques vécues comme " a purposeful activity ".

Il est difficile et risqué d'accorder aux élèves une bonne mesure d'autonomie de pensée. L'expérience prouve constamment que dès qu'on le fait, ils empruntent des chemins imprévus. Ceci donne peur aux professeurs, puisqu'il est entendu que c'est eux qui savent et transmettent le savoir. La peur de ne pas savoir et davantage encore celle de se tromper jouent chez les enseignants (et chez les élèves) un rôle considérable et inavoué.

Pour qu'un professeur puisse proposer des situations-problèmes à ses élèves, il faut qu'il ait lui-même l'habitude de travailler des questions ouvertes. Il faut qu'il ait une connaissance approfondie à la fois de la matière mathématique et de ses avatars dans un esprit en recherche. Le plus simple pour qu'il ait ces capacités-là serait qu'on les ait développées en lui tout au long de ses études. On est habituellement loin de compte. Et de plus on voit le paradoxe : pour que l'enseignement se renouvelle dans notre génération, il faudrait qu'il ait déjà été renouvelé dans la génération précédente.

La question est donc difficile pour le système d'enseignement et pour chaque personne. Il faudra de longues années d'efforts dans les formations initiale et continue des enseignants. Il faudra produire de nouvelles générations de manuels sollicitant davantage l'initiative des élèves.

Il ne faut en tout cas rien brusquer : il est dangereux pour n'importe qui de quitter le rivage et ses repères familiers et d'avancer vers le large avant d'avoir appris à nager en eau profonde.

Mais l'enjeu vaut les efforts et l'argent public qu'on y mettra : il s'agit de vaincre l'analphabétisme mathématique et l'échec par les maths, et de donner à chacun les moyens d'une pensée mathématique indépendante. C'est un bel objectif pour le XXI^{e} siècle.

Merci amicalement à Jeanette Bartholomé, Francis Buekenhout, Christine Docq, Yves Félix, Thérèse Gilbert, Christiane Hauchart, Philippe Tilleuil et Paul Van Praag d'avoir relu et commenté cette étude à divers moments de sa rédaction. Merci surtout à Guy Noël qui m'a proposé un nombre considérable d'améliorations. Toutes ces critiques ont eu un double effet : d'abord elles m'ont aidé à compléter et clarifier le texte ; ensuite elles m'ont fait mieux comprendre la difficulté, dans une matière aussi délicate et lorsqu'on s'adresse à un public large, de cerner suffisamment le sens des termes clés. Sans doute n'y ai-je pas réussi complètement. Par delà les aides reçues, j'assume bien entendu la responsabilité des ambiguïtés qui ont résisté à tant d'efforts.

NOTES

Les trois notes marquées ci-après d'un astérisque sont destinées particulièrement au lecteur mathématicien.

[1] La locution "mathématiques modernes " entre guillemets désigne dans notre exposé non pas les mathématiques que pratiquent les mathématiciens d'aujourd'hui, mais bien les mathématiques des programmes de 1970 dans le secondaire et de 1980 dans le primaire.

[2] * Nous nous contentons de mentionner ici " quelques propositions non démontrées ", sans entrer, au sujet des postulats et axiomes d'Euclide, dans des distinctions étrangères à notre propos. Par ailleurs, ces propositions sont " non démontrées ", sauf, si l'on veut, au sens des démonstrations triviales des logiciens. Mais cela ne nous importe pas non plus ici.

[3] La suite de la section 2 et les sections 3 et 4 montrent, à grands traits, ce qu'est devenu l'héritage d'Euclide *en mathématiques*, au fil des siècles et jusqu'à nos jours. Ajoutons que le *modèle euclidien* a largement débordé les mathématiques. Il a contribué à la formation de la pensée rationnelle occidentale en général. C'est pourquoi éclairer la notion de théorie axiomatique aide à faire comprendre ce que sont, *en général*, la culture et l'enseignement d'aujourd'hui.

[4] En utilisant le terme *bien-fondé*, et non celui de *vérité*, nous cherchons à éviter une discussion philosophique de la notion de vérité, ce qui sortirait de notre propos.

[5] Autre aspect des choses : puisque toute proposition porte sur des concepts (qui sont sujet, attribut, ...), il faut aussi se demander comment on définit ceux-ci. Pour définir une chose, on doit s'appuyer sur des concepts déjà définis. On voit ainsi s'amorcer pour les définitions, comme pour les propositions, une régression qu'il faut arrêter quelque part. Il y aura, au départ, des termes non définis, que l'on appelle *termes primitifs*.

[6] Il faut s'entendre ici sur le sens du mot *théorie*. Si l'on réserve ce terme à ce que nous avons appelé *théorie axiomatique* au n° 2.1 (théorie tirée déductivement de quelques axiomes énoncés explicitement), alors l'idée même de " mettre une théorie en ordre axiomatique " devient triviale. Mais prendre *théorie* dans cette acception serait dénier la qualité de théorie à l'analyse de Newton, d'Euler et de Cauchy. Nous prenons le terme théorie mathématique dans le sens d'ensemble cohérent de résultats et de démonstrations sur un sujet donné.

[7] Dans le cadre abstrait dont il est question ici, les axiomes ont effectivement la forme de règles combinatoires abstraites. Ils ne peuvent plus traduire des évidences relatives à un contexte, quel qu'il soit, puisque tout contexte a été éliminé.

[8] D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899), trad. franç. Rossier, Dunod, Paris, 1971.

[9] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, trad. angl. P. Nemenyi, Chelsea, New York, 1952.

[10] A propos de ces seuils, cf. R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, A. Colin, Paris, 1991, p. 198 et ss. Voir aussi N. Rouche, Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique, *Repères IREM*, **15** (1994), 25-36. Dans ces deux études, on tente de montrer, et de justifier par les nécessités du raisonnement, les caractères des concepts mathématiques qui les éloignent de la pensée commune.

[11] Sur cette construction lente du sens dans les traités, on consultera surtout I. Lakatos, *Preuves et réfutations, essai sur la découverte mathématique* (traduction Balacheff, Laborde), Hermann, Paris, 1984. A la fin de cet ouvrage, l'auteur propose une forme de rédaction mathématique où les concepts principaux seraient construits plus près des démonstrations principales qu'ils ont pour fonction de rendre possibles.

[12] Les axiomes de la géométrie d'Euclide (mis à part celui des parallèles qui paraissait moins clair) étaient considérés comme des évidences. Celles-ci portaient, nous l'avons dit, non pas sur des objets du monde physique (des petites taches pour les points, des cordes tendues pour les droites, etc.), mais sur des objets idéalisés (les points sans dimensions, les droites infiniment fines et longues, etc.). Dans la philosophie idéaliste de Platon, ces derniers objets étaient les objets réels, les premiers appartenant au monde des apparences.

Avec l'apparition des géométries non euclidiennes, cette conception des axiomes devait changer. Un axiome pouvait ne plus être une propriété de la réalité (quelle que soit l'idée que l'on ait de celle-ci). Il devenait alors une propriété sans référent, placée au départ d'une structure déductive.

Ajoutons, à propos des géométries non euclidiennes, d'une part que certaines d'entre elles se sont avérées être des modèles plus fidèles de l'espace physique que la géométrie euclidienne, et d'autre part que la découverte de modèles euclidiens pour les géométries non euclidiennes a apporté à celles-ci des supports intuitifs dont elles manquaient au départ.

[13] * Les deux derniers exemples paraîtront un peu ténus au lecteur mathématicien. Que celui-ci veuille bien se souvenir des autres lecteurs de cette note.

[14] Le lecteur qui ne voit pas ce que sont les matrices et les quaternions ne doit pas s'inquiéter : ce sont des objets mathématiques dont la connaissance n'est pas nécessaire ici. Ils sont plus difficiles à étudier que les translations du plan et les entiers, que nous avons choisis comme exemples parce qu'ils sont familiers. La contribution de Cayley, qui montrait pourtant la voie et l'intérêt de l'étude des structures formelles, est passée sur le moment quasi inaperçue. C'est, écrit Kline, " en partie parce que les matrices et quaternions étaient nouveaux et peu connus et que beaucoup d'autres systèmes mathématiques justiciables de la notion de groupe, soit devaient encore être construits, soit n'étaient pas reconnus comme relevant des groupes. L'abstraction prématurée tombe sur des oreilles sourdes, que ce soit celles de mathématiciens ou d'étudiants. " (Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972; 769-770).

[15] N Bourbaki, L'architecture des mathématiques, in *Les grands courants de la pensée mathé-*

matique (éditeur Le Lionnais), Cahiers du Sud, Paris, 1962 ; 2e édition Blanchard.

[16] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, nombreux volumes publiés à partir de 1939, Hermann, Paris.

[17] J.-P. Kahane, Mathématiques. Quelles tendances ? Quels enjeux ? *La Pensée* **270-271** (89-99).

[18] Sur le contexte socio-économique de la réforme, voir B. Charlot, Histoire d'une réforme : idées directrices et contexte, dans le premier ouvrage cité à la note 10.

[19] Ce " dès que possible " a été interprété diversement. Pour Dieudonné et Choquet, il s'agissait des dernières années du secondaire. Pour Papy, c'était déjà l'âge de douze ans. Cf. J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, 1968 ; G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964 ; G. Papy, *Mathématique moderne*, Vol. 1, 2, 3, 5, 6, Didier, Bruxelles, 1963 et ss. L'extension des " mathématiques modernes " au primaire ne s'est pas appuyée *explicitement* sur une base axiomatique.

[20] Voir par exemple J. Piaget, *Où va l'éducation*, Denoël, Paris, 1948.

[21] Cet argument m'a été utilement rappelé par G. Noël.

[22] Il est vrai qu'un mathématicien aguerri peut s'attaquer d'emblée à l'exposé axiomatique d'une théorie, en différant la satisfaction de son besoin de sens. Tel n'est pas le fait des enfants et des adolescents.

[23] Cf. G. Papy, ouvrages cités à la note 19.

[24] * Les vecteurs mentionnés ici sont les classes de segments orientés équipollents, et non les éléments d'un espace vectoriel abstrait.

[25] *Enseignement secondaire, programme de mathématique*, Première année, Ministère de l'Education Nationale, Bruxelles, 1980.

[26] Voir G. Polya, *How to solve it, a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, 1945 ; les idées de cet ouvrage ont été développées ultérieurement dans plusieurs autres livres du même auteur.

[27] Citation extraite de : N.C.T.M., *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston (Virginia), 1989.

Il est arrivé assez souvent aux Etats-Unis qu'au lieu d'enseigner les mathématiques à travers des problèmes, les professeurs consacrent une partie de leurs leçons à enseigner la résolution de problèmes et puis traitent des autres matières dans des cours magistraux.

[28] Les obstacles rencontrés par la science dans son développement historique ont été particulièrement étudiés par G. Bachelard, dans *La formation de l'esprit scientifique*, J.Vrin, Paris, rééd. 1980. Les obstacles rencontrés par les élèves ont été traités par G. Brousseau, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, in *Rech. en Didactique des Mathématiques*, 4.2 (1983), 165-198.

[29] Sur un enseignement qui respecte cette condition, voir surtout I. Lakatos, ouvrage cité à la note 11.

[30] Sur la notion de palier de rigueur, voir H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

[31] Certains mathématiciens pointilleux préfèreraient qu'on dise *enseignement en hélice*. Mais le dictionnaire Robert donne comme acception actuelle de spirale : " toute courbe qui tourne autour d'un axe ou d'un point, forme un enroulement. " Et il donne comme exemple "la spirale d'un escalier ". Sur la notion d'enseignement en spirale, voir entre autres F. Buekenhout, Goals of geometry teaching based on the spiral principle, in *Colloque International sur l'Enseignement de la Géométrie,* G. Noël éd., Université de l'Etat à Mons, 1992.

[32] *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*, rapport de la Commissioin scientifique d'Etude de l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences présenté à Monsieur le Ministre Y. Ylieff, Ministère de l'Education, Bruxelles, 1990.

[33] Les programmes sont habituellement rédigés comme des listes de matières qu'il faut apprendre, pour l'essentiel, dans un certain ordre. Ils accréditent ainsi l'idée que toute matière enseignée doit être sue, ce qui est un jugement sans nuance, opposé à l'idée même de l'enseignement en spirale.

[34] F. Buekenhout *et al.* parlent du " devoir impérieux qui fait du professeur de mathématique un professeur de langue maternelle avant toute autre considération. " Cf. *Vivre la mathématique 2*, Didier-Hatier, Bruxelles, 1981.

[35] Pour une initiation aux usages de l'histoire dans l'enseignement, voir Groupe inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, *Vers une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques* (éd. E. Barbin), IREM de Lyon, sans date, 334 pages.

[36] Cf. A. Bell, *What does research say about teaching methods in mathematics ?* Shell Centre for Mathematical Education, Nottingham (1980), 26 pages.

[37] Exemples parmi d'autres : la géométrie analytique de Fermat et Descartes, le calcul des propositions de Boole, le calcul vectoriel.

Nicolas Rouche

L'enseignement des mathématiques d'hier à demain

Les enseignants peuvent légitimement se demander pourquoi on leur a, depuis trente ans, imposé trois réformes de l'enseignement des mathématiques. Les autorités savent-elles ce qu'elles veulent ? Pourquoi ces changements chaque fois difficiles à mettre en oeuvre, d'autant qu'on n'en discerne pas toujours aisément la portée ? Quelles sont les idées qui se trouvent là derrière ?

Cette étude a pour but d'expliquer, parmi ces difficultés, celles qui tiennent à l'évolution des mathématiques elles-mêmes. Elle est destinée aux enseignants de tous niveaux, ainsi qu'aux responsables politiques et administratifs de l'enseignement. Elle éclairera sans doute aussi tout lecteur qui, n'étant pas mathématicien, voudrait préciser quelque peu l'idée qu'il se fait des mathématiques.

L'exposé ne contient que peu d'incursions techniques dans les mathématiques : un lecteur attentif armé d'un certain courage en viendra à bout, même s'il n'a pas d'affinité particulière pour cette discipline.

ISBN 2-930161-00-0