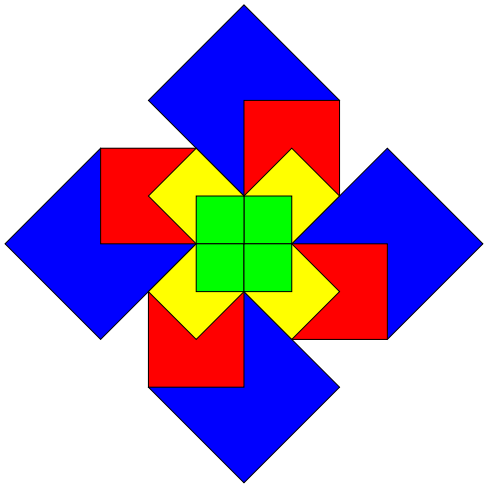
Apprenti Géomètre

Impact du logiciel « Apprenti Géomètre » sur certains apprentissages

Tome 1



Ministère de la Communauté française

CREM

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

2007

Avertissement

Le présent document constitue le *Rapport final* de la recherche intitulée

Utilisation du logiciel « Apprenti Géomètre » en vue de la remédiation des difficultés d'apprentissage en mathématique dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire (Période : 2005–2007).

Il a été rédigé par une équipe constituée de
- Sébastien Agie de Selsaten, Instituteur primaire et licencié en sciences de l'éducation,
- Bernard Honclaire, Professeur honoraire de mathématiques au degré inférieur de l'enseignement secondaire,
- Pierrette De Rijck, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire,
- Michel Herman, Professeur de mathématiques au Département Pédagogique de la Haute École de la Ville de Liège,
- Guy Noël, Professeur honoraire de mathématiques de l'Université de Mons-Hainaut,
- Philippe Mairesse, Instituteur primaire,
- Gregory Philippart, Ingénieur civil en mathématiques appliquées,
- Philippe Skilbecq, Instituteur primaire
- André Vandenbruaene, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire.

Le développement de la version 2 du logiciel *Apprenti Géomètre* est assuré par Guy Noël et Geoffrey Pliez, Licencié en informatique.

Les auteurs tiennent à remercier pour leur collaboration
- Michel Ballieu, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire,
- Laetitia Desmet, Institutrice primaire et licenciée en logopédie,
- Marie-France Guissard, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire,
- Ginette Gallez, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire,
- Nicolas Rouche, Professeur honoraire de mathématiques de l'Université Catholique de Louvain,
- Marie-Françoise Van Troeye, Professeur de mathématiques au degré inférieur de l'enseignement secondaire,

ainsi que les membres du Comité d'Accompagnement du Service général du Pilotage du Système éducatif, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Ministère de la Communauté française de Belgique.

Chapitre 0

Introduction

0.1 Motivation et objectifs de la recherche

La recherche relatée dans le présent document a pour origine première une tâche confiée en 2002 au CREM par le Ministère de la Communauté française. Il s'agissait de concevoir et de superviser la réalisation d'un logiciel de mathématique destiné aux enfants de 8 à 12 ans. Cette tâche s'inscrivait naturellement dans une politique tendant à l'intégration des technologies de l'information et de la communication (TIC) aux activités scolaires. Le développement de logiciels vise notamment à l'apprentissage de compétences via la mise des élèves en présence de situations-problèmes difficilement abordables dans un contexte scolaire traditionnel.

Réalisé en moins d'un an par une firme privée, d'après un cahier de charges rédigé par le CREM, le logiciel reçut le nom de « *Apprenti Géomètre* ». Il constitue un « micro-monde » dans lequel l'enfant, à travers la résolution de problèmes présentés dans le cadre géométrique et exprimés dans un registre graphique, progresse dans la conceptualisation de notions mathématiques dont certaines débordent largement de la géométrie.

En même temps, le CREM écrivait et expérimentait des activités mettant en œuvre *Apprenti Géomètre* dans le cadre du cours de mathématique dans les classes des deuxième et troisième degré de l'école primaire. La brochure [18] reprenant des fiches relatives à ces activités a été réalisée en 2003 et envoyée à toutes les écoles fondamentales des divers réseaux en Communauté française, en même temps que le logiciel lui-même.

Apprenti Géomètre commence seulement sa carrière dans l'enseignement. Les expérimentations réalisées de 2002 à 2005, et relatées dans les brochures [18] à [20], faisaient bien augurer des services qu'il pourrait rendre dans l'avenir. Mais clairement, elles étaient loin d'épuiser les possibilités, d'autant plus que ces expérimentations avaient été réalisées presque uniquement dans des classes de l'enseignement primaire, ce qui résultait tout naturellement du fait que le projet initial de 2002 était dû à l'initiative du Ministre ayant l'enseignement fondamental dans ses attributions.

Néanmoins, deux éléments étaient clairs pour les responsables du CREM. D'une part *Apprenti Géomètre* ne disposait pas de toutes les fonctionnalités qui lui auraient permis d'être

utilisé efficacement dans l'enseignement secondaire. D'autre part, ses spécificités par rapport aux autres logiciels de géométrie dynamique disponibles devaient lui permettre de jouer un rôle important à ce niveau d'enseignement pour peu que les fonctionnalités manquantes y soient ajoutées.

Aussi, dans le courant de 2005, le CREM entama-t-il la réalisation d'une seconde version d'*Apprenti Géomètre*. Tout en conservant les principes de base et les fonctionnalités de la première version, la deuxième devait être conçue de manière à fournir au professeur de l'enseignement secondaire les outils indispensables et d'étendre les spécificités permettant une approche dynamique d'un large éventail de situations problèmes.

Simultanément, le CREM introduisit auprès du Ministère de la Communauté Française un nouveau projet de recherche pour la période 2005–2007 en vue de coordonner la réalisation de la seconde version d'*Apprenti Géomètre* avec la réalisation de nouvelles expérimentations dans les enseignements primaire et secondaire. Cette approche s'imposait d'autant plus que le Ministère demandait précisément aux centres de recherche de s'intéresser particulièrement à la charnière entre ces deux niveaux d'enseignement.

Les objectifs du projet de recherche portaient sur les deux aspects de l'enseignement et de l'apprentissage. Nous pouvons les formuler comme suit.

- Analyser les conséquences didactiques de l'emploi du logiciel sur l'apprentissage à deux niveaux d'enseignement situés à la charnière primaire-secondaire.
- Prolonger les études réalisées antérieurement portant sur l'utilisation du logiciel dans l'enseignement primaire, notamment dans une optique de différenciation de l'enseignement.
- Construire des séquences d'activité destinées à intégrer l'outil dans les pratiques des classes, en établissant une forme de continuité dans la transition du primaire vers le secondaire.
  Ces séquences devaient amener les élèves à exploiter les possibilités dynamiques du logiciel dans une philosophie d'enseignement basée sur les principes constructivistes (*voir le chapitre 6*).

0.2 Les caractéristiques d'*Apprenti Géomètre*

Apprenti Géomètre se classe dans la catégorie des logiciels de « géométrie dynamique » . Il se situe ainsi dans la ligne de deux logiciels très connus : le langage `Logo` dû à S. Papert, [57], et `Cabri-Géomètre`, conçu et réalisé par J.-M. Laborde, [52].

Apprenti Géomètre se distingue de ces logiciels par le fait qu'il donne la possibilité d'amener directement à l'écran les formes géométriques les plus courantes : triangles, quadrilatères, etc. Alors que les autres logiciels demandent aux élèves d'appliquer une procédure parfois complexe, fût-ce pour dessiner un triangle équilatéral, dans *Apprenti Géomètre*, cette forme (et bien d'autres) est prédéfinie.

Les formes prédéfinies dans *Apprenti Géomètre* sont de deux types : certaines, qualifiées de « standard » sont indéformables et conviennent particulièrement bien aux plus jeunes

enfants. Elles sont regroupées en familles adaptées à la comparaison d'aires en l'absence d'unité conventionnelle. Elles sont comparables à certains jeux de matériel didactique en bois ou en plastique, mais à la différence des éléments de ces jeux, les formes géométriques « virtuelles » peuvent être découpées, fusionnées et reproduites à volonté. De plus les figures réalisées peuvent être imprimées et collées dans le cahier de l'élève.

La possibilité de dupliquer, découper ou fusionner des formes dessinées à l'écran fait d'*Apprenti Géomètre* un outil particulièrement adapté à l'apprentissage des mesures de grandeurs géométriques et des fractions.

D'autres formes, dites « libres » peuvent être déformées à volonté, tout en conservant leurs caractéristiques initiales, par exemple un triangle rectangle reste toujours un triangle rectangle. Toutes peuvent également être déplacées ou retournées sur l'écran ou être soumises à diverses transformations géométriques. De plus, le logiciel est structuré de manière à assembler en familles les formes ayant des caractéristiques communes.

Une présentation détaillée de la version 1 du logiciel peut être trouvée dans la brochure d'accompagnement, [18], ainsi que dans les documents [65] et [66] de Nicolas Rouche et Philippe Skilbecq.

Bien qu'elle ait déjà été utilisée pour les expérimentations réalisées en 2006–2007 dans des classes de première secondaire, la version 2 du logiciel n'est pas encore tout à fait terminée. Elle devrait être disponible dans le courant de l'année scolaire 2007–2008. Il est néanmoins déjà possible de donner ici quelques indications à son sujet. Pour commencer, disons que tout ce qui vient d'être indiqué à propos de la version 1 reste valable pour la version 2 et concentrons-nous sur ce qui différencie les deux versions.

La première différence concerne la structure de l'interface. Alors que dans la version 1, les fonctionnalités étaient réparties en deux niveaux, dénommés « Kit standard » et « Kit libre » , la version 2 comprend trois niveaux dénommés « Niveau A », « Niveau B » et « Niveau C ».

Le niveau A reprend les fonctionnalités du « Kit standard » et est donc particulièrement destiné aux enfants de 8 à 12 ans (ce qui ne veut pas dire qu'il soit sans aucun intérêt avec des élèves plus âgés). Les formes géométriques qui y sont accessibles sont les formes standard.

Comme dans la version 1, les formes standard peuvent être déplacées (nous disons désormais « glissées »), tournées et retournées, mais ces mouvements sont plus variés. Ainsi les formes peuvent être retournées au long de quatre axes au lieu d'un seul. Bien entendu la propriété de magnétisme qui assure l'ajustement des pièces les unes aux autres est toujours là et a même été simplifiée. À signaler également, la possibilité de remplacer le jeu de base de formes standard par d'autres jeux particuliers. Par exemple les douze pentaminos ou les pièces du tangram peuvent être chargés en tant que formes standard et donner lieu aux activités bien connues avec ces pièces. L'enseignant qu'un peu de programmation ne rebute pas, peut éventuellement créer lui-même d'autres jeux de pièces standard.

Les fonctionnalités du « Kit libre », accessibles vers la fin de l'école primaire se retrouvent au niveau B. Il est donc toujours possible en quelques clics de créer des formes géométriques préprogrammées (triangles quelconques, triangles rectangles, isocèles...). Et

comme les formes standard, ces formes peuvent être glissées, tournées, retournées... À ces fonctionnalités, déjà présentes dans la version 1, viennent s'ajouter quelques nouveautés. Ainsi, la fonction `Dupliquer` ne se contente pas de reproduire une forme à l'identique. La forme initiale et son duplicata restent associées, de sorte que toute modification apportée à l'une se répercute sur l'autre. Cette association est également valable lorsqu'une forme est découpée en morceaux : toute modification apportée à la forme initiale se répercute sur les morceaux, et vice-versa. Cette fonctionnalité permet d'illustrer dynamiquement beaucoup de résultats géométriques auxquels elle confère leur généralité.

Une autre nouveauté importante par rapport à la version 1 : la possibilité de placer des points mobiles sur des segments, des cercles ou des polygones. L'absence de cette fonctionnalité dans la version 1 constituait une lacune importante rendant problématique son emploi dans les cours de géométrie de l'enseignement secondaire. La fonction `Dupliquer` s'applique également aux « points sur » en assurant une liaison entre eux : si un duplicata d'un point mobile sur un segment est créé et placé sur un autre segment, les deux points auront toujours la même abscisse. Cette technique permet de créer de véritables fonctions d'un segment ou d'un polygone vers un autre et de créer des fichiers dynamiques illustrant par exemple des propriétés de proportionnalité.

Quant au niveau C, absent dans la version 1, il comprend les objets « infinis » : droites, demi-droites, bandes, secteurs, tous objets indispensables pour l'étude de la géométrie, dès le début du secondaire.

D'autres fonctionnalités pourraient encore être rappelées, par exemple l'existence des transformations géométriques (translations, rotations, symétries) dont l'usage a été complètement revu par rapport à la version 1. Certaines possibilités répondent aux vœux des enseignants. Il leur est par exemple possible de modifier à volonté le vocabulaire utilisé dans le logiciel, ou encore de personnaliser les menus accessibles à l'élève, de façon que celui-ci puisse utiliser ou ne pas utiliser une fonction particulière. Ceci permet une certaine différenciation de l'enseignement selon la classe, voire selon l'élève. À noter encore que lors de chaque session de travail, un fichier « historique » est créé et que tout le travail de l'élève y est enregistré. Celui-ci peut ainsi relire ce fichier, partiellement ou totalement, l'utiliser pour rédiger une narration de recherche, ou encore modifier un choix précédent... L'enseignant peut aussi relire le fichier historique afin de prendre connaissance du travail de l'élève.

0.3 Le contenu de la recherche

La recherche menée de septembre 2005 à août 2007 a comporté deux parties correspondant aux deux objectifs principaux relatifs l'un à l'enseignement, l'autre à l'apprentissage. Compte tenu de ce que la recherche devait concerner à la fois la fin de l'enseignement primaire et le début du secondaire, le thème qui nous a semblé le plus adéquat était *la mesure des aires des formes géométriques élémentaires, de 10 à 14 ans.*

À priori, il s'agissait donc d'élaborer des séquences d'enseignement utilisant *Apprenti Géomètre*, qui permettent de rencontrer différents concepts et procédures, à savoir

– le concept d'égalité d'aires,
– le concept d'aire lui-même ;
– le concept de mesure de l'aire ;
– les procédures de mesure et calcul de l'aire.

C'est à ce programme que nous nous sommes attelés, tout en étant conscients de ce que la tâche ne serait pas facile. En effet, si une recherche portant sur l'enseignement d'un sujet donné doit nécessairement innover et prendre quelques libertés par rapport aux techniques d'enseignement usuelles de ce sujet — sans quoi, ce ne serait plus une recherche — elle doit néanmoins prendre en considération non seulement les directives officielles telles que les programmes et les socles de compétences, mais aussi la réalité, parfois très variable, du terrain.

En l'occurrence, les socles de compétences prévoient que les élèves soient *sensibilisés* aux questions relatives aux grandeurs dans le courant du deuxième degré du primaire, que les compétences correspondantes soient *certifiées* au troisième degré du primaire et *entretenues* au premier degré du secondaire.

En situant nos expérimentations en cinquième et sixième primaire et première secondaire, nous aurions donc pu rencontrer les différentes composantes du programme élaboré ci-dessus, en supposant qu'au début de la cinquième primaire, les élèves n'avaient été que « sensibilisés » au sujet. Il nous est apparu assez rapidement — et nous nous y attendions — que l'expression « sensibiliser » peut faire l'objet d'interprétations différentes.

En fait, la plupart des élèves arrivent en cinquième primaire en ayant déjà rencontré les *formules* de périmètre et d'aire au moins pour le carré et le rectangle, parfois pour le triangle. Bien souvent cette connaissance procédurale est instable du fait qu'elle ne repose pas sur une assimilation des concepts élémentaires. Il convient alors de reprendre des activités portant sur ces notions de base, ce qui est toujours difficile dans un contexte scolaire dans lequel l'enfant a déjà rencontré les aspects procéduraux et compris l'importance que l'institution leur accorde.

Le résultat est que la certification supposée acquise à la fin du primaire est loin d'être toujours effective et que l'enseignant du secondaire se retrouve dans la situation de devoir *entretenir des connaissances* parfois mal assurées, et ne disposant pour cela que d'un nombre limité de périodes de cours.

Les chapitres 7, 8 et 9, consacrés aux comptes-rendus des expérimentations ainsi que les chapitres 10 à 15, qui présentent et analysent les résultats des tests auxquels nous avons procédés, permettront au lecteur de prendre la mesure des difficultés que nous venons d'évoquer.

En ce qui concerne les aspects liés à l'apprentissage, notre objectif était d'analyser l'impact du logiciel *Apprenti Géomètre* sur la conceptualisation de l'aire et de sa mesure. Autrement dit, il s'agissait de déterminer si les comportements des élèves en situation de résolution de problème avaient évolué différemment au cours de l'année scolaire, selon que les élèves avaient ou n'avaient pas utilisé le logiciel durant leur apprentissage. Et il s'agissait aussi d'interpréter les comportements observés en termes de conceptualisation.

Une telle comparaison ne peut se faire que par l'adoption du schéma expérimental tra-

ditionnel répartissant les élèves en un groupe expérimental et un groupe témoin. Encore fallait-il que l'enseignement dispensé aux deux groupes ne diffère que par l'usage du logiciel, alors que nous voulions, comme expliqué plus haut, reprendre des activités portant sur les notions de base afin de fournir une meilleure assise aux aspects procéduraux. Procéder de cette façon uniquement dans le groupe expérimental aurait biaisé l'expérience dès le départ.

Ce sont donc en fait deux expériences différentes que nous avons menées en parallèle, tant dans les classes du primaire que dans celles du secondaire. Les deux expériences proposaient aux élèves les mêmes activités, le groupe témoin n'utilisant que le contexte papier-crayon et le groupe expérimental passant d'un contexte à l'autre. Nous voulons en effet insister sur le fait que l'usage de l'informatique dans les classes ne peut en aucun cas faire disparaître les techniques plus traditionnelles.

Il serait d'ailleurs aberrant de vouloir transposer un schéma traditionnel d'enseignement du contexte papier-crayon vers un contexte informatique sans l'adapter aux spécificités de ce dernier. À plusieurs reprises, nous remarquerons dans ce rapport que les concepts mathématiques rencontrés et les procédures mises en œuvre dans les deux contextes ne sont pas toujours identiques. Le passage de l'un à l'autre constitue en soi une activité de transfert qui peut être fructueuse. La complémentarité des contextes permet aux élèves de percevoir au mieux les concepts à acquérir. Lors d'une réunion avec les institutrices ayant participé à l'expérience, l'une d'entre elles s'exprimait ainsi :

> *Les enfants ont acquis certains réflexes qu'ils n'avaient pas auparavant : notamment découper et superposer, le fait d'avoir lié l'informatique et le côté écrit pratique leur a permis d'acquérir des petits réflexes... L'informatique a aidé et motivé à avoir ces réflexes de superposition. Quand nous avons continué nous avons remarqué que les enfants appliquaient un peu plus les démarches qui leur avaient été apprises... ou ce qu'on leur avait montré.*

Le contexte informatique permet aussi de proposer des activités irréalisables dans le contexte papier-crayon. Dans le cadre de notre expérience, de telles activités auraient empêché toute comparaison directe entre les deux groupes. Elles pourraient être envisagées dans un schéma expérimental différent.

Afin d'analyser les démarches mises en œuvre par les élèves, nous avons fait précéder et suivre les séquences d'enseignement de pré-tests et post-tests qui ont ensuite été dépouillés et analysés. Nous avons ainsi relevé des taux de réussite à diverses questions. Mais ce qui nous intéressait au premier chef était les comportements afin de dégager quels étaient les plus fréquents dans des situations de résolution de problèmes. Nous avons donc cherché à déterminer systématiquement comment les élèves avaient obtenu leurs réponses, qu'elles soient correctes ou non. Dans ce but, nous leur avons très souvent demandé de *justifier* leurs réponses ou *expliquer* leurs démarches. Malgré l'emploi du verbe *justifier*, il ne s'agissait pas de leur demander de produire une démonstration mathématique rigoureuse, ce qui n'était pas encore possible pour la plupart d'entre eux, mais simplement de les amener à s'exprimer. La correction de l'expression est un élément intéressant, mais ce n'est qu'un élément parmi d'autres. Les tests montrent qu'on trouve des élèves capables

de s'exprimer très correctement.

Cette introduction serait incomplète si nous n'y donnions aucune indication quant aux constatations que nous avons pu faire quant à l'impact du logiciel *Apprenti Géomètre* sur la conceptualisation et les démarches des élèves. Reconnaissons qu'au départ, nous concevions cet impact essentiellement en termes de maîtrise des *compétences* telles que définies par exemple dans le document relatif aux *socles*.

Mais une recherche n'en serait pas une, si elle ne faisait apparaître des phénomènes imprévus. La *compétence* sur laquelle l'usage d'*Apprenti Géomètre* nous semble avoir eu le plus grand impact ne figure pas dans les *socles*. Et cependant, c'en est bien une et la recherche nous a permis de prendre conscience de son importance pour la maîtrise de celles qui sont mentionnées dans les *socles*. Il s'agit de la capacité à *voir* une figure géométrique, à la décomposer en éléments constitutifs, à la compléter en y traçant des traits supplémentaires, des traits qu'on ne peut dessiner sans les avoir au préalable imaginés abstraitement, mentalement. Cette capacité apparaît comme un élément constitutif important de la réussite aux questions posées dans les tests. Et effectivement, les élèves ayant utilisé *Apprenti Géomètre* semblent avoir acquis une meilleure vision géométrique, ce qui n'a en fait rien d'étonnant vu le caractère dynamique de l'activité sur ordinateur.

L'importance de la vision en géométrie a été décrite et analysée par R. Duval dans un article paru en 2005. Comme on le verra dans ce rapport, cet article a eu une influence importante sur notre travail.

Un autre impact de l'utilisation d'un logiciel, qui n'est pas non plus une compétence des *socles* est que les élèves du groupe expérimental semblent avoir acquis une attitude plus réfléchie lorsqu'ils se trouvent en situation de résolution de problème.

Lors de la réunion déjà évoquée avec les enseignantes du primaire, l'une d'entre elles disait :

> *Ce qui est pratique avec l'informatique c'est que les enfants devaient mieux se représenter au départ ce qu'ils voulaient réaliser parce que sinon ils étaient piégés, à la limite quand ils peuvent disposer de matériel qu'ils peuvent manipuler, ils vont chipoter. Tandis qu'avec l'ordinateur, ils ont tout intérêt s'ils veulent être efficaces rapidement à imaginer là où ils veulent aller !... bien se représenter,... de réfléchir avant d'agir. Ils pourraient chipoter aussi avec l'informatique mais en règle générale ils ne le font pas, car ils se rendent compte qu'ils sont vite piégés !*

Que les élèves réfléchissent plus, n'est-ce pas de nature à favoriser la mise en œuvre de méthodes actives d'enseignement ?

Une autre constatation que nous ne pouvons passer sous silence est le fait que l'emploi d'un logiciel modifie la didactique à mettre en œuvre, précisément parce qu'il rend les élèves plus actifs. Cette modification nécessite de la part des enseignants un travail d'adaptation, qu'ils n'auront pas tendance à faire si de bonnes conditions matérielles ne sont pas réalisées. En particulier, si l'on souhaite voir s'accroître l'utilisation de l'informatique, le matériel doit être disponible en permanence et facile d'accès. L'ordinateur et le projecteur

doivent donc faire partie du mobilier de la classe de mathématique. La séparation actuelle des salles informatiques et des salles de cours traditionnelles constitue un frein important à l'intégration de l'ordinateur dans l'enseignement. Elle renforce les différences entre les leçons où on utilise le logiciel et celles où on ne l'utilise pas. Pour l'enseignant qui désire pratiquer une pédagogie active, l'ordinateur n'a pas pour seul rôle d'illustrer un enseignement traditionnel en montrant de temps en temps quelques séquences de géométrie dynamique. Il s'agit d'un outil qui vient à l'appui de la réflexion de l'élève et doit être disponible au moment où celui-ci en a besoin, même si ce moment résulte d'initiatives de la classe et par conséquent ne peut être prévu. L'expérimentation réalisée dans l'enseignement secondaire a pu mettre en évidence des différences dans le déroulement des activités selon que les ordinateurs sont ou ne sont pas installés dans la classe.

Bien entendu ces dernières remarques concernent l'emploi des logiciels en général et non uniquement celui d'*Apprenti Géomètre*.

0.4 Le contenu du rapport

Le présent rapport comporte cinq parties. La première partie, intitulée « État des lieux » est consacrée uniquement à l'utilisation de logiciels dans l'enseignement des mathématiques en général et de la géométrie en particulier. Le chapitre 1 propose un bref historique du développement de cette technique d'enseignement, ainsi qu'un rapide compte-rendu des principales réflexions d'ordre didactique qui ont accompagné les différentes recherches relatées dans la littérature spécialisée. Le chapitre est consacré à une étude comparative de divers logiciels de géométrie dynamique existant sur le marché. Le logiciel « vedette » est incontestablement `Cabri-Géomètre`, mais d'autres logiciels tels que `Cinderella` et `GeoGebra` disposent de fonctionnalités spécifiques qui en font également des outils intéressants. Quant au chapitre , il constitue une présentation d'*Apprenti Géomètre* qui complète la description qui en a été faite dans cette introduction en le situant par rapport aux objectifs de nos enseignements primaire et secondaire.

La seconde partie est consacrée à la mesure des aires, en abordant successivement les aspects historiques, mathématiques et didactiques-épistémologiques. Le chapitre 4 évoque l'enracinement de la géométrie dans les activités d'arpentage présentes dans l'antique civilisation égyptienne, mais aussi sa naissance en tant que science à l'époque de Thalès, avec l'apparition d'un principe directeur de nombreuses activités humaines, à savoir la *proportionnalité*. Mesurer étant une activité associant un nombre à une grandeur physique, il n'est pas étonnant que l'histoire de la mesure soit aussi l'histoire des développements des concepts numériques. Une place assez importante a été consacrée aux mathématiques arabes (du IXe au XVe siècle) dont l'apport en mathématiques est très généralement méconnu dans nos contrées.

Le chapitre 5 décrit d'un point de vue strictement mathématique les différentes activités pouvant être consacrées à l'aire, de la comparaison qualitative de formes géométriques à la détermination numérique de leur aire relativement à une unité conventionnelle. Il peut servir de référence sur le plan mathématique et fixe le vocabulaire qui est utilisé dans la

suite, notamment en distinguant soigneusement les perceptions *qualitative*, *quantitative* et *numérique* de l'aire.

Quant au chapitre 6, il propose une description, très fortement — mais pas uniquement — inspirée des travaux de PIAGET, de l'apprentissage par l'enfant des concepts d'aire et de mesure d'aire. Le point de vue *constructiviste* qui y est développé a été à la base de la construction des activités soumises aux élèves lors de cette expérimentation. On y fait déjà également allusion au problème de la « perception visuelle » et on met en évidence quelques-uns des seuils épistémologiques que les élèves auront à franchir.

La troisième partie relate les activités expérimentées en 2005–2006 dans des classes de sixième primaire (chapitre 8) et en 2006–2007 dans des classes de cinquième primaire (chapitre 7). En vue d'une édition du présent rapport en modules séparés, il nous a semblé préférable de placer l'introduction à cette partie au début de la partie elle-même. Le lecteur voudra donc bien se reporter à la page 159 pour prendre connaissance de cette introduction, qui mentionne notamment les conditions de réalisation des deux expérimentations.

De la même manière, l'introduction à la quatrième partie, qui est consacrée à l'expérimentation en première secondaire est située au début de cette partie, à la page 251.

Enfin, la cinquième et dernière partie (si l'on ne tient pas compte des annexes) est consacrée à la présentation et à l'analyse des résultats des tests qui ont accompagné les expérimentations. À raison de trois expérimentations et de deux tests par expérimentations, ce sont six tests qu'il a fallu composer, reproduire, dépouiller et analyser. La cinquième partie comporte donc six chapitres, qui ont été placés dans l'ordre chronologique et non dans l'ordre « scolaire » (l'expérimentation en sixième primaire a eu lieu un an avant celle de cinquième primaire) du fait de références dans certaines analyses à des analyses antérieures.

Dans chacune de ces analyses, on trouvera d'abord les questionnaires soumis aux élèves (dans une mise en page moins gourmande en papier), et leurs réponses, dans une présentation qui met surtout en évidence les divers comportements qu'ils adoptent en vue de résoudre les (petits) problèmes qui leur étaient soumis. Ces analyses ne distinguent pas encore les élèves des groupes témoin et expérimental. Elles sont abondamment illustrées d'extraits des copies des élèves, souvent plus expressives que les sèches descriptions que nous pouvons en faire. Nous ne nous sommes préoccupés que du contenu sémantique de ces extraits, laissant à chacun le soin d'en apprécier la syntaxe.

Nous nous sommes ensuite livrés à des analyses statistiques qui nous ont permis de dégager ce que nous avons appelé d'une part des comportements de réussite, d'autre part des comportements d'échec. Ces expressions ne doivent certainement pas être prises dans un sens absolu car tel comportement qui amène à trouver une bonne réponse dans un certain éventail de situations peut se révéler catastrophique dans d'autres. À titre d'exemple, l'élève qui détermine l'aire d'un polygone en le pavant avec de petits carrés, a de bonnes chances de trouver une réponse acceptable si le polygone est un rectangle. Il en a beaucoup moins pour des polygones plus généraux. Les expressions « comportements d'échec » et « comportements de réussite » sont relatives à un exercice donné, ou plus précisément

encore, à un questionnaire donné car les comportements d'un élève lors de la résolution d'un exercice peuvent aussi varier en fonction des autres exercices du même questionnaire.

Compte tenu de la technicité non négligeable des études statistiques effectuées, nous avons placé en annexe leur compte-rendu détaillé. Nous nous sommes contentés dans la partie principale d'un résumé des constatations effectuées. Le lecteur intéressé est donc invité pour plus de détails à se reporter à l'annexe B, tant pour la description de l'analyse statistique utilisée que pour les résultats de cette analyse pour les six tests.

La détermination des comportements les plus fréquents de réussite et d'échec présente un intérêt certain du point de vue didactique, puisqu'elle permet de mieux apprécier les performances individuelles des élèves. Elle avait donc sa place dans ce rapport indépendamment de toute comparaison des performances des élèves des groupes témoin et expérimental. De plus, nous avons exploité la liste des comportements de réussite en vue de cette comparaison. Lors du pré-test, il s'agissait de déterminer si les deux groupes étaient équivalents. Lors du post-test, il s'agissait de rechercher en quoi les comportements des deux groupes étaient différents.

Il convient d'être très prudent lors de l'interprétation des résultats de n'importe quelle analyse statistique. Dans le domaine de la didactique, les paramètres susceptibles d'influencer ces résultats sont très nombreux et souvent difficiles à contrôler. C'est pourquoi, afin d'éviter des formulations par trop sommaires, nous préférons ne pas résumer en quelques lignes des constatations qui ne sont certainement pas des conclusions définitives. Le lecteur trouvera ces constatations avec tous les détails possibles à la fin des chapitres 11, 13 et 15. Rappelons néanmoins ici que notre expérimentation ne portait que sur des aspects particuliers de l'apprentissage, et dans un contexte déterminé. Comme pour n'importe quelle expérimentation didactique, il est exclu d'en généraliser les résultats de façon irréfléchie.

Nivelles, le 31 août 2007.

Première partie

L'état des lieux

Chapitre 1

Le contexte informatique

Le présent chapitre constitue une version actualisée et complétée du chapitre 2 de la brochure [18] qui a été diffusée en 2003 dans les écoles primaires de la Communauté française en même temps que la version 1 d'Apprenti Géomètre.

1.1 L'informatique dans les écoles : une réalité

Force est de constater que l'informatique a pris de plus en plus de place dans la vie quotidienne des enfants. Même ceux d'entre eux qui n'ont pas accès à un ordinateur au domicile familial sont initiés à la démarche informatique par leurs camarades plus favorisés qui leur expliquent le maniement de divers appareils : jeux électroniques, console de jeux, ordinateur...

De plus, depuis plusieurs années, l'outil informatique a fait son entrée dans les écoles. Que ce soit timidement par le don ou l'achat d'ordinateurs isolés, ou que ce soit plus officiellement par l'arrivée d'I-Mac ou de PC dans les écoles primaires de tous les réseaux de la Communauté française de Belgique ainsi que dans beaucoup d'écoles secondaires.

Tant à la maison qu'à l'école, on constate que les enfants n'ont guère de difficultés à s'adapter à l'outil informatique. Très rapidement, la plupart d'entre eux apprennent les opérations fondamentales de manipulation d'un ordinateur : cliquer sur des boutons, dérouler des menus, introduire des informations au clavier, insérer un CD-Rom dans un lecteur, se connecter sur Internet.

On ne peut néanmoins pas être sûr de l'absence totale pour les élèves de difficultés d'instrumentation. Et si celles-ci existent, elles peuvent avoir une influence sur l'impact de l'utilisation des ordinateurs dans les classes, en particulier sur le rôle qu'ils peuvent jouer dans le cadre de l'apprentissage des savoirs géométriques. Cet élément sera donc l'une des composantes de notre réflexion.

Par contre, nous ne nous attarderons guère sur les aspects que l'on pourrait qualifier de « logistiques » : il est clair que la présence en classe d'un ordinateur « équipé d'une imprimante et de logiciels performants » constitue pour l'enseignant et pour les élèves une aide appréciable en vue de la réalisation de documents de qualité. Ce dernier point n'est

certainement pas négligeable, vu l'importance accordée usuellement aux productions des élèves. Dans le même ordre d'idées, il serait souhaitable que chaque école dispose d'au moins un scanner.

L'usage de l'outil informatique dans les classes dépend également d'autres facteurs. Certains sont d'ordre institutionnel et ne nous laissent guère de possibilités d'intervention. Le plus important d'entre eux est évidemment le coût de cet outil. À cet égard, la situation peut être très variable d'une école à l'autre. S'il arrive, notamment dans l'enseignement primaire, que des classes soient équipées d'un ou deux ordinateurs, il arrive aussi que tous les ordinateurs destinés à l'usage des élèves soient rassemblés dans un laboratoire informatique auquel l'enseignant n'a accès que « sur rendez-vous ». Ces situations matérielles différentes conduiront nécessairement à des situations didactiques différentes.

Pas plus qu'aucun autre outil pédagogique, l'informatique ne constitue une panacée ou une méthode miracle pour résoudre tous les problèmes qui peuvent se présenter dans une classe. Nous considérons que la présence d'un ordinateur dans une classe ne se justifie pas pleinement s'il n'est utilisé que pour accélérer ou automatiser des procédures qui sont pour l'essentiel identiques à celles qui étaient déjà réalisées avant l'ère informatique. Les possibilités de ce nouvel outil devraient être utilisées en vue de favoriser l'activité personnelle de l'élève.

Notre conception de l'ordinateur est celle d'un outil efficace dans le cadre d'activités de résolution de problèmes. De plus, c'est un outil parmi d'autres, à utiliser non de façon isolée, mais en harmonie avec les outils traditionnels. Ainsi, on doit considérer comme normal qu'un élève, ou un groupe d'élèves, ait recours durant seulement quelques minutes à un ordinateur, lequel serait disponible en permanence, comme peuvent l'être tous les autres outils utilisés dans un cours de mathématique, du crayon au manuel, en passant par les instruments de dessin.

C'est donc à une véritable intégration de l'ordinateur dans la classe qu'il importe d'arriver, ce qui paraît incompatible avec la formule « laboratoire d'informatique » .

On doit également s'attendre à ce que l'usage de l'outil informatique entraîne des modifications dans les conceptions des élèves dans les différents domaines d'étude, en particulier dans le domaine géométrique. C'est pourquoi il importe d'analyser systématiquement quel est l'impact des « didacticiels » sur l'apprentissage des mathématiques.

1.2 Plusieurs types de logiciels

Depuis quelques années, nous assistons à une production importante de logiciels de mathématiques.

Certains d'entre eux sont au départ des outils de travail pour le scientifique : il s'agit d'aider à la réalisation de calculs, de dessins géométriques...

Pour d'autres, l'objectif est clairement d'ordre pédagogique. Il s'agit de fournir un environnement propice à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques.

Il serait excessif de prétendre que la distinction entre ces deux catégories de logiciels est évidente. Tout outil peut se mettre au service de l'apprentissage, même si ce n'est pas sa vocation initiale.

De plus, il peut apparaître à l'usage qu'un didacticiel, c'est-à-dire un logiciel ayant des objectifs didactiques, n'est en réalité pas adapté aux besoins et n'influence donc guère l'apprentissage. Cette réalité peut avoir plusieurs causes, certaines relevant de l'ergonomie et de la convivialité du logiciel, d'autres de la qualité de la réflexion didactique ayant guidé sa réalisation.

Il arrive aussi qu'un didacticiel de qualité soit employé avec des élèves qui ne possèdent pas les connaissances instrumentales nécessaires, ou encore que les contenus mathématiques utilisés par le logiciel ne soient pas à la portée des élèves qui l'utilisent.

Un dernier facteur peut influencer la prégnance d'un didacticiel dans les classes, l'approche, presque « sentimentale », de l'outil informatique par l'enseignant. Cette approche est elle-même influencée par de multiples facteurs tels que le vécu de l'enseignant, sa formation en informatique, la pédagogie qu'il utilise...

1.3 To clic or not to clic ?

Dans la suite de ce chapitre, notre propos sera plutôt de rendre compte de différents travaux, expériences et analyses portant sur l'influence de la manipulation de didacticiels de mathématique sur l'apprentissage de cette discipline. Vu la nature des sujets destinés à être abordés à l'aide du logiciel *Apprenti Géomètre*, qui fait l'objet de ce travail, nous considérerons uniquement des logiciels de géométrie. Rappelons néanmoins que les mêmes questions pourraient être posées relativement à d'autres logiciels — `Derive` par exemple — qui fournissent un appui appréciable à l'enseignement d'autres sujets.

La plupart des articles disponibles dans la littérature spécialisée portent sur deux logiciels de géométrie particuliers : `Logo` et `Cabri`. On ne s'étonnera donc pas de ce que nous limitions notre compte-rendu à ceux-ci. Nous nous attarderons plus particulièrement sur deux aspects complémentaires : l'activité des enfants et le développement chez eux des concepts géométriques.

Au chapitre 2, nous analyserons de façon plus technique un plus grand nombre de logiciels de la famille de `Cabri`, afin d'en dégager les spécificités. Pour commencer, il n'est pas mauvais de rappeler quelques faits qui désormais relèvent de l'histoire de la pédagogie.

1.4 Aux débuts de l'informatique dans les classes

Dès les premières expériences d'introduction de l'informatique dans des classes, il est apparu que l'usage de cet outil constituait un facteur de motivation des enfants. On aurait pu craindre que cette motivation disparaisse, ou tout au moins s'atténue fortement, en même temps que, l'accès à l'ordinateur devenant plus facile, une banalisation de son

emploi apparaîtrait. Il ne semble pas que ce soit le cas, ou tout au moins pas encore. Il convient évidemment de s'interroger sur les causes de ce phénomène.

Remémorons-nous d'abord la situation telle qu'elle se présentait lors de l'apparition des premiers micro-ordinateurs, c'est-à-dire un peu après 1980. En ces temps éloignés, rares étaient les écoles qui disposaient d'une salle d'informatique. Quelques enseignants avaient réussi à équiper leur classe d'un ordinateur. Peu de logiciels didactiques existaient, et leur convivialité était faible.

Toutefois, dès le début, les enseignants qui croyaient à l'entrée des ordinateurs dans les écoles, étaient convaincus que les possibilités de cet appareil devaient être exploitées en vue de présenter aux élèves « autre chose » que ce qu'on pouvait leur présenter avec les moyens classiques.

Plusieurs tendances sont alors apparues. L'une d'entre elles consistait à exploiter l'outil informatique en vue de réaliser des « cours programmés » tels qu'on les concevait à la suite des travaux de B. F. Skinner ou N. Crowder. La réalisation de cours de ce genre était coûteuse en moyens matériels et humains. Skinner, un membre éminent de l'école « behavioriste » — une école qui a beaucoup étudié les comportements tant animaux qu'humains — préconisait de découper la matière à enseigner en petites unités dont la complexité ne croissait qu'extrêmement lentement (voir [69]). Les enfants recevaient des textes « à trous » qu'ils devaient compléter. Chaque réponse fournie était immédiatement évaluée, en guise de « renforcement ». La méthode de Skinner était facilement utilisable avec un ordinateur ; encore nécessitait-elle que la matière soit analysée de façon très fine, ce qui était parfois difficile à réaliser. De plus, l'élève pouvait arriver au bout du texte à trous en ayant répondu correctement à toutes les questions, en ayant acquis quelques connaissances nouvelles, mais sans avoir compris le sens profond de ce qu'il avait appris. La méthode pouvait convenir en vue de l'apprentissage de recettes techniques, mais se prêtait plus difficilement à la formation de concepts.

Au contraire des cours skinnériens, qui étaient linéaires (tous les élèves recevaient exactement la même suite de questions), un cours crowdérien était ramifié (voir [22]). À chaque question, l'élève devait choisir entre plusieurs réponses possibles. Les questions qui lui étaient soumises ensuite dépendaient de son choix. Le parcours du questionnaire s'adaptait donc à la situation individuelle de chaque enfant. Cette méthode permettait aussi de proposer aux enfants des questions de complexité plus grande que dans l'enseignement skinnérien : la réponse correcte parmi les réponses proposées n'était pas nécessairement évidente. Les distracteurs ([1]) correspondaient normalement à des erreurs fréquentes. Il ne s'agissait donc pas toujours d'un choix facile, mais souvent d'une véritable réponse à élaborer. Si elle était correcte, la question suivante permettait de progresser dans l'apprentissage. Sinon, selon l'erreur commise, l'élève était aiguillé vers un passage qui lui fournissait des explications plus détaillées ([2]). Cette méthode nécessitait de la part de l'auteur du cours un travail pédagogique encore plus grand que la méthode skinnérienne : il fallait analyser la matière et en même temps prévoir les comportements possibles (cor-

([1]) Dans un questionnaire à choix multiple, ce nom désigne les réponses incorrectes qui figurent parmi les propositions soumises au choix.

([2]) Un livre crowdérien était souvent appelé un livre « brouillé », les pages n'étant pas lues dans l'ordre.

rects ou non) des élèves. Le caractère ramifié d'un cours crowdérien rendait plus opportune encore l'utilisation d'un ordinateur que dans le cas skinnérien.

Qu'elles soient skinnériennes ou crowdériennes, les méthodes d'enseignement programmé n'ont plus été utilisées après la décennie 1980-1990. À côté de leurs défauts évidents, nous voulons en retenir deux aspects positifs. Le premier est le contact d'ordre privé entre l'élève et le support d'enseignement, que ce soit un manuel imprimé ou un ordinateur. On a souvent souligné que cette caractéristique permet d'éviter chez l'élève la peur de l'évaluation, explicite ou implicite, en cas de mauvaise réponse. Le second était une certaine interactivité de l'élève avec le matériel d'enseignement. Reconnaissons toutefois que ces deux aspects — d'ailleurs plus marqués dans la méthode crowdérienne que dans la méthode skinnérienne — restaient assez limités. Ce n'était pas l'enfant qui pilotait l'ordinateur, c'était bel et bien l'ordinateur qui gouvernait le travail de l'enfant.

La réalisation de logiciels basés sur l'une ou l'autre des méthodes d'enseignement programmé mobilisait normalement des équipes importantes, comportant non seulement des informaticiens, mais aussi des pédagogues « généralistes » au courant des principes de ces méthodes, des spécialistes de la discipline, pour analyser la matière de façon approfondie et des enseignants « de terrain » qui, seuls, pouvaient prévoir les réactions possibles des élèves aux différentes questions. Lorsque ces conditions n'étaient pas remplies, les réalisations n'étaient guère convaincantes. Aussi n'est-il pas étonnant qu'une autre conception de l'E.A.O. ([3]) soit apparue très rapidement.

Cette tendance était le fait d'enseignants « militants », souvent isolés, toujours passionnés, qui avaient réussi — parfois à leurs propres frais — à équiper leur classe d'un micro-ordinateur. Le plus souvent, ces enseignants programmaient eux-mêmes les didacticiels dont ils souhaitaient disposer. Les moyens matériels et le temps dont ils disposaient étant faibles, il n'était pas question qu'ils se lancent dans des projets importants. Il ne s'agissait pas pour eux de créer des cours par ordinateur, mais bien de petites séquences qu'ils intégraient à leur enseignement usuel. Ils profitaient des possibilités de l'ordinateur — et principalement des possibilités graphiques — pour « montrer des choses » qu'ils n'auraient pu montrer autrement. Chaque séquence ainsi réalisée pouvait être assimilée à un petit film et être projetée autant de fois qu'il était souhaité. On a souvent dit que dans cet emploi, l'ordinateur devenait un « super-tableau ». À nouveau, les élèves n'y accédaient que de façon limitée.

Progressivement, les enseignants concernés ont pris conscience de l'utilité de pouvoir modifier certains paramètres de la situation étudiée. Sont ainsi apparus plus tard des logiciels permettant une plus grande interactivité entre l'élève et l'ordinateur : par exemple, des logiciels de géométrie spatiale, réalisés à l'intention de l'enseignement secondaire, ont permis à l'élève non seulement de visualiser des sections de cubes par des familles préprogrammées de plans, mais aussi de choisir lui-même le plan de section. Des jeux arithmétiques ou géométriques installaient une compétition soit entre deux élèves, soit entre un élève et l'ordinateur. (voir [6], [7]).

Mais ces efforts isolés ne pouvaient finalement mener très loin.

([3]) E.A.O. : Enseignement Assisté par Ordinateur.

1.5 Quand l'élève pilote l'ordinateur

Les premiers logiciels à avoir vraiment permis à l'élève de piloter l'ordinateur, plutôt que le contraire, ont été d'une part le langage `Logo` dû à S. Papert (voir [57]) et `Cabri-Géomètre`, conçu et réalisé par J.-M. Laborde (voir [52]). Ces deux logiciels de géométrie sont très différents. Ils vont nous permettre de nous pencher sur la question de savoir *à quelle géométrie l'ordinateur donne accès.*

Avant de tenter de répondre à cette question, formulons quelques considérations générales. Le pilotage d'un ordinateur par un élève a en effet des retombées extra-mathématiques, qu'il n'est pas mauvais d'expliciter.

L'ordinateur n'aime pas les « à peu près ».

Bien que l'on parle parfois d'« intelligence artificielle », un ordinateur est une machine qui ne sait rien faire d'autre que ce qu'on lui a appris. Et encore convient-il de le lui expliquer dans tous les détails. Aussi l'élève qui donne des instructions à un ordinateur, est-il astreint à s'exprimer avec une précision rare dans la vie quotidienne. Toute instruction erronée est immédiatement sanctionnée d'un message d'erreur. De plus, les crises de colère ou de larmes restent sans influence sur la machine.

L'ordinateur impose son langage.

L'expression « l'ordinateur impose son langage » est en fait trop simplificatrice. Ce n'est pas l'ordinateur qui impose son langage, mais bien le didacticiel. Celui-ci a été programmé de façon à communiquer avec l'utilisateur dans un ou plusieurs registres sémiotiques ([4]) spécifiques.

Ces registres peuvent être de natures différentes : il peut s'agir d'un langage symbolique dans lequel l'utilisateur rédige une suite d'instructions à l'intention de la machine. Il peut s'agir aussi d'un ensemble de manipulations (de la souris par exemple) qui permettent d'obtenir les résultats souhaités.

Le choix du ou des registres d'expression destinés à la communication entre ordinateur et utilisateur est une des questions les plus importantes qui peuvent se poser lors de la réalisation d'un didacticiel.

Le registre d'expression choisi peut en effet être plus ou moins « convivial », ce qui signifie dans la pratique qu'il peut être plus ou moins facile à apprendre par l'utilisateur. Mais dans tous les cas, celui-ci doit exprimer sa pensée et ses souhaits dans le registre en question. Il doit donc passer par une *conversion* en termes compréhensibles par l'ordinateur, exercice qui n'est pas sans influence sur la formation des concepts chez l'utilisateur.

Un ordinateur est très patient et très rapide.

Il en résulte qu'une expérience peut être exécutée à de nombreuses reprises, avec ou sans modification des paramètres expérimentaux. Un grand nombre de situations différentes peuvent ainsi être étudiées et comparées en un laps de temps assez court. Cette richesse expérimentale facilite la découverte des solutions d'un problème et contribue à la concep-

([4]) Voir l'annexe .

tualisation, par exemple à travers des « simulations » variées.

Un ordinateur ne raisonne pas comme un être humain.

Les opérations nécessaires pour obtenir un résultat donné à l'aide d'un ordinateur diffèrent souvent des opérations mentales qui conduisent au même résultat.

Consciemment ou inconsciemment, l'esprit humain tient compte d'un contexte inaccessible à l'ordinateur et adopte des raccourcis qui facilitent son travail. L'ordinateur ne dispose pas d'un « pifomètre » et doit donc être beaucoup plus systématique. Sa « logique » est très souvent de style « combinatoire ». Par exemple, s'il est à la recherche d'un objet satisfaisant à un critère donné, il lui arrive de devoir examiner toutes les possibilités en éliminant une à une celles qui ne satisfont pas au critère. Dans un tel cas, il arrive que l'esprit humain restreigne d'emblée l'ensemble de cas à considérer en éliminant globalement (parfois de façon inconsciente) toute une série de cas qui « ne vérifient visiblement pas » une condition découlant nécessairement du critère donné.

Autre exemple : le déplacement d'un objet sur un plan de travail se fait à la main sans guère de réflexion : nous saisissons l'objet et le mettons à l'emplacement voulu, avec l'orientation voulue sans être conscients des ordres envoyés par notre cerveau à notre main en vue de réaliser l'opération. Par contre, déplacer une forme géométrique sur un écran en utilisant un logiciel tel que *Apprenti Géomètre* nécessite de donner explicitement à l'ordinateur des ordres du genre « faire glisser », « faire tourner » et d'accompagner ces mouvements à la souris. Notre cerveau doit dès lors analyser l'action souhaitée en vue de transmettre les ordres nécessaires à la machine.

On pourrait dire que l'élève qui travaille sur ordinateur est confronté à un « tempérament » différent. Cette confrontation amène un enrichissement important des concepts manipulés.

Ces remarques sont restées très générales. On en trouvera des manifestations concrètes dans les paragraphes qui suivent.

1.6 Logo

Il existe de nombreuses versions de `Logo`, certaines disposant même d'un interface adapté à `Windows` (avec menus déroulants, boutons-poussoirs...). Quelle que soit la version, `Logo` est d'abord un langage de programmation dérivé de `Lisp`, un peu lourd et assez lent, mais qui peut en principe être utilisé à n'importe quelle fin. Cela étant dit, il est surtout raisonnable d'utiliser `Logo` pour son point fort : l'apprentissage de la géométrie. Mais de quelle géométrie s'agit-il et comment l'élève l'apprend-il ?

1.6.1 Comment l'élève apprend-il ?

Le principe de `Logo` est bien connu : l'élève pilote une tortue en lui donnant des ordres en « langage tortue », c'est-à-dire des instructions du langage `Logo` lui-même. Le cas échéant, il doit modifier son choix d'instructions, c'est-à-dire son programme. Nous sommes bien dans une situation où c'est l'élève qui pilote l'ordinateur et non le contraire.

Les instructions fondamentales sont celles qui ordonnent à la tortue d'avancer d'une longueur L (`Av :l`), de reculer d'une longueur L (`Re :l`), de tourner à gauche d'un angle A (`Ga :a`) ou de tourner à droite d'un angle A (`Dr :a`).

Notre première constatation est donc la coexistence de deux registres de représentation différents : un registre symbolique, utilisé par l'enfant, et un registre graphique qui constitue en quelque sorte la réponse de la tortue à l'enfant. Les deux interlocuteurs ne parlent pas la même langue !

À l'utilisateur de juger si les instructions qu'il donne à la tortue sont suivies des effets attendus. Autrement dit, l'utilisateur est en permanence confronté à un problème de conversion entre les deux registres. D'après Duval, [33], un tel travail est une condition indispensable à la conceptualisation.

Quand l'enfant éprouve des difficultés à s'exprimer dans le registre symbolique du « langage tortue », on lui conseille de « jouer à la tortue » en mimant les déplacements de celle-ci. L'enfant utilise ainsi un registre, que nous pourrions qualifier de *corporel*, qui établit une connexion directe entre lui-même et le registre graphique de la tortue et facilite l'analyse de la situation. Le retour au registre symbolique en est facilité.

Dans un premier temps, l'instituteur peut laisser l'enfant libre de réaliser les dessins de son choix. Par la suite, il propose à l'élève un *projet*, un dessin à réaliser. Éventuellement, on restreint les instructions que l'élève a le droit d'utiliser. Ou bien on met à sa disposition des procédures rédigées par l'enseignant mais que l'élève utilisera comme des « boîtes noires », au même titre que les primitives du langage. Au début, les projets seront évidemment simples. Leur réalisation consistera en une suite d'instructions `Av, Re, Ga, Dr` ne constituant pas un programme : l'élève les introduit une à la fois et évalue directement le résultat. S'il est satisfait, il introduit l'instruction suivante. Sinon il s'arrange pour ramener la tortue là où elle était et il recommence. La programmation ne viendra que quand il pourra anticiper.

Pour tirer un profit maximum de `Logo`, et réaliser des « projets » plus compliqués (un bouquet de fleurs par exemple), l'élève doit franchir trois obstacles non négligeables ([5]).

- Assimiler la méthode de répétition : pour dessiner un carré de côté 20, plutôt que d'écrire `Av 20 Dr 90 Av 20 Dr 90 Av 20 Dr 90 Av 20`, il suffit d'écrire `Repete 4 [Av 20 Dr 90]`. On note d'ailleurs que ces deux processus ne sont pas complètement équivalents : si la tortue dessine la même figure, son cap final n'est pas le même.
- Apprendre à donner un nom à une suite d'instructions, ce qui permet ensuite de réutiliser cette suite simplement en invoquant son nom, donc sans devoir récrire toutes les instructions : après `Pour Carre Repete 4 [Av 20 Dr 90] fin`, il suffit d'écrire `Carre` pour qu'un carré soit dessiné.
- Apprendre à utiliser des paramètres : après `Pour Carre :l Repete 4 [Av :l Dr 90] fin`, on peut dessiner des carrés de taille différente à l'aide d'instructions telles que `Carre 20` ou `Carre 40`.

Ces trois obstacles figurent parmi ceux que l'on rencontre dans tout apprentissage qui entraîne une globalisation et une structuration des connaissances. Dans les trois cas, un

([5]) Il faut donc prévoir que l'usage de `Logo` s'étale sur une période assez longue.

processus de *compression* doit avoir lieu, qui permet de constituer une entité unique à partir d'éléments au départ séparés.

Par exemple, quand l'élève écrit `Av 20 Dr 90 Av 20 Dr 90 Av 20 Dr 90 Av 20`, il porte son attention successivement sur chacun des côtés du carré. Il ne peut passer à `Repete 4 [Av 20 Dr 90]` qu'à condition d'envisager les quatre côtés à la fois.

Le remplacement de cette instruction par le seul mot `Carre` témoigne de ce qu'un carré est désormais considéré comme une entité en soi.

Enfin, l'apparition d'un paramètre dans `Carre :l` correspond à la prise de conscience de ce que les carrés constituent une famille de figures semblables susceptibles d'être dessinées par une seule procédure.

Avec les procédures paramétrées, on se rapproche un peu de la « géométrie dynamique » qui fut introduite dans les classes, 10 ans plus tard, à la suite de la diffusion de `Cabri` (voir le paragraphe suivant).

Bien que la description qui vient d'être faite soit probablement un peu trop schématique, on peut considérer que la progression dans la maîtrise de `Logo` correspond à une progression dans la maîtrise de certaines propriétés géométriques, ainsi que dans la pensée mathématique elle-même. En quelque sorte, les deux représentations, symbolique et graphique, s'épaulent mutuellement.

Ainsi, à la question « Comment l'enfant apprend-il de la géométrie avec `Logo` ? », nous pouvons répondre « en réalisant des projets de complexité croissante » qui lui permettent de réinvestir les acquis précédents. Au fil de son travail avec `Logo`, l'enfant va s'approprier ce que G. Vergnaud, [75], appelle des « théorèmes en actes ». Par exemple, il dégagera de ses expériences le théorème « du tour complet » : *Quand la tortue revient à son point de départ et reprend son cap d'origine, elle a certainement tourné au total d'un angle qui est un nombre entier de fois 360 °.*

Si `Logo` permet un apprentissage de certaines notions géométriques différent de l'apprentissage usuel, il ne faut pas en déduire que l'emploi de ce langage fournit la solution à tous les problèmes. Dès 1985, J. Hillel [46] notait que *« l'emploi de `Logo` ne fait pas disparaître les obstacles traditionnels à l'acquisition de concepts mathématiques »*. Elle ajoutait : *« Il ne faut cependant pas sous-estimer les résultats des enfants de 8 à 9 ans. Non seulement* ([6]) *ils ont réussi à écrire des descriptions dans un langage formel (certains programmes atteignant 35 commandes), mais ils ont aussi manipulé des concepts mathématiques sophistiqués* ([7])*. »*

1.6.2 Quelle géométrie l'enfant apprend-il ?

L'autre question posée était « Quelle géométrie l'enfant apprend-il ? » Ce n'est certainement pas ce qu'on appelle couramment la géométrie « de la règle et du compas », pour la très simple raison qu'il n'existe pas en langage-tortue d'instruction qui permette de

([6]) *Après douze heures d'activités `Logo`.*
([7]) *Pour leur âge.*

déterminer l'intersection de deux droites (ou deux segments si on préfère), ni — *a fortiori* — l'intersection d'une droite et d'un cercle ou celle de deux cercles. Pis encore : il n'existe pas en `Logo` de véritable cercle, déterminé par un centre et un rayon, mais uniquement des « cercles approchés » qui sont en réalité des polygones réguliers ayant un grand nombre de côtés. L'instruction REPETE 36 [AV 5 DR 10] dessine en effet une approximation acceptable d'un cercle, mais celui-ci ignore où est son centre. Rassurons le lecteur : il est possible de dessiner un cercle approché en imposant un centre et un rayon, mais cette opération n'est pas à la portée d'un enfant de l'école primaire.

Nous revenons là à la caractéristique première de `Logo` : ce langage oblige l'enfant à penser constamment au déplacement à effectuer et à l'orientation de ce déplacement pour amener la tortue en un point donné. Sa géométrie est donc essentiellement une géométrie dynamique, une géométrie des *mouvements*, mais il s'agit des mouvements d'un point unique, à ceci près que cela a un sens de le faire tourner sur lui-même (en changeant le cap de la tortue).

L'enseignement usuel considère peu les mouvements (que ce soient les mouvements d'un point ou d'un objet) et les questions d'orientation. Par exemple, pour placer son crayon en un point déterminé du papier, il n'y a aucune nécessité d'analyser préalablement les mouvements à effectuer. Quant aux angles de la géométrie élémentaire, ils ne sont pas orientés, au contraire de ceux de la tortue. Pourtant, dans la vie courante, tourner à gauche n'a pas la même signification que tourner à droite.

La géométrie que l'enfant peut apprendre avec `Logo` n'est pas vraiment la même que celle prévue par les documents officiels. Nul doute que cette circonstance n'encourage pas les instituteurs à orienter leur travail dans cette direction. Cependant, la géométrie-tortue peut apporter à l'enfant des éléments utiles. Passons en revue quelques travaux (déjà anciens).

En 1983–84, R. NOSS, [56], réalise une étude impliquant 118 élèves de 8 à 11 ans et portant sur la compréhension des concepts de longueur et d'angle. Ces deux sujets sont évidemment choisis pour leur rôle essentiel en `Logo`. Il constate une « tendance vers un effet positif » concernant la conservation de la longueur et le concept d'unité de mesure. L'effet était plus marqué relativement à la conservation des angles et la mesure des angles.

De son côté, en 1987, E. GALLOU, [40], constate que le changement d'orientation d'une figure provoqué par l'application d'une symétrie orthogonale n'est guère mis en évidence dans les collèges français. Elle fait alors travailler des élèves de 13 à 14 ans sur ce sujet. La tâche qui leur est soumise consiste à dessiner en `Logo` le symétrique d'une figure donnée sur papier. Les élèves peuvent faire apparaître la solution du problème sur leur écran, mais à trois reprises uniquement. L'étude de GALLOU est très fouillée ; elle comporte notamment plusieurs groupes d'élèves soumis à des conditions différentes. Des comparaisons sont ainsi possibles, d'où ressortent les conclusions suivantes :

Les objectifs sont atteints au mieux quand quatre conditions sont réalisées :

1. *Utilisation du micro-ordinateur avec une liste restreinte de commandes* `Logo`*.*
2. *Présence de l'interaction de deux élèves travaillant ensemble.*
3. *Place de la séquence avant le cours et les exercices.*

4. *Existence d'une correction dont l'élève dispose et nécessité, en cas de reconnaissance d'une erreur, de faire un nouvel essai, jusqu'à trois essais.*

Peut-être pouvons-nous interpréter la troisième condition comme signifiant que les élèves vivent comme une recherche ou un défi motivant, une activité portant sur un sujet qui n'a pas encore fait l'objet d'un enseignement.

Également en 1987, J. Hillel et C. Kieran, [47], s'intéressent aux choix faits par les élèves qui veulent dessiner une figure en Logo : sur quelles bases choisissent-ils les commandes à utiliser, ainsi que les paramètres à transmettre à ces commandes ? Ils distinguent deux schémas de choix : un schéma *visuel* et un schéma *analytique* ([8]). Dans le premier cas, l'élève n'analyse pas la figure géométrique à réaliser, mais se base uniquement sur sa perception visuelle de la portion de figure déjà réalisée sans tenir compte des propriétés géométriques de celle-ci. Dans le second cas, la démarche de l'élève est basée sur un raisonnement géométrique. Les auteurs constatent que, pour ce qui concerne le choix des paramètres angulaires, les élèves ont tendance à utiliser spontanément un schéma visuel et ne se résolvent à une approche analytique qu'en cas d'échec.

En 1990, D. Clements et M. Battista, [17], s'intéressent à leur tour aux effets du Logo sur la formation des concepts d'angle et de polygone et reviennent sur les deux schémas, visuel et analytique, distingués par Hillel et Kieran. Leurs conclusions sont différentes : *Les données suggèrent que les expériences Logo, particulièrement celles qui sont enrichies d'activités et de discussions appropriées, peuvent améliorer les résultats scolaires en aidant les enfants à abandonner leurs conceptions intuitives originelles au profit des idées mathématiquement plus sophistiquées d'angle, de mesure d'un angle et de rotation.*

À travers ce rapide et très partiel parcours de la littérature concernant l'usage de Logo, nous voyons se dégager quelques idées fortes.

- Le sujet géométrique à l'apprentissage duquel Logo contribue le plus semble être le concept d'angle (orienté). Il n'y a là rien d'étonnant compte tenu du rôle joué par ce concept en Logo.
- Plusieurs des travaux mentionnés parlent d'*environnement Logo* ou de micro-monde dans lequel situer les activités proposées aux élèves. En d'autres termes, pour que ces activités soient pleinement profitables, les commandes accessibles aux élèves seront — au moins dans un premier temps — restreintes. La marge de manœuvre des enfants sera donc limitée de façon à favoriser certaines procédures et certains types de raisonnement.
- Le fait d'utiliser Logo ne constitue pas une panacée. Les activités avec ordinateur recevront donc un accompagnement important de la part de l'instituteur afin qu'elles ne conservent pas un côté superficiel mais au contraire favorisent un progrès durable pour l'enfant.
- La motivation de l'élève pourrait être renforcée si l'activité qui lui est proposée apparaît comme un défi à relever, plutôt que comme une activité de type scolaire traditionnel.

([8]) Cette distinction est à rapprocher des modes de vision *iconique* et *non iconique* analysés par R. Duval dans [34].

1.7 Cabri

Commençons par signaler que nous ne considérerons ici Cabri-Géomètre ([9]) que comme un représentant — sans doute le plus complet et certainement le plus fréquemment utilisé dans les pays francophones — d'une classe de logiciels basés sur le même principe et partageant un grand nombre de fonctionnalités. On trouvera au chapitre 4 une description et une analyse de plusieurs de ces logiciels.

Si Logo a été utilisé et expérimenté dans des écoles primaires (de nombreux pays), par contre Cabri a surtout été utilisé dans l'enseignement secondaire. On ne s'étonnera donc pas que les observations dont nous ferons état se rapportent essentiellement à ce niveau d'enseignement.

Notons d'abord des caractéristiques communes à Cabri ([10]) et Logo. D'une part, les commandes accessibles aux élèves peuvent être restreintes dans chacun de ces logiciels. Nous avons déjà rencontré l'intérêt et même la nécessité de cette possibilité en vue de favoriser certaines démarches chez l'élève. D'autre part, Logo et Cabri sont également susceptibles d'être étendus par l'élaboration de macros ou la définition de fonctions. Une telle possibilité n'est peut-être que peu nécessaire au début d'un apprentissage, mais elle s'avère particulièrement intéressante lorsque l'élève a atteint un niveau de conceptualisation suffisant, en lui permettant alors de transposer la structure de sa pensée dans son activité informatique.

Nous avons aussi relevé que la géométrie accessible à travers Logo n'était pas vraiment la même que celle de l'école (primaire ou secondaire). Par contre, Cabri a été conçu pour coller au mieux à la géométrie (plane) du secondaire, ce qui devrait aider le professeur à l'intégrer à son enseignement. C'est ainsi que Cabri permet de positionner des points à vue dans le plan, de les joindre par des segments ou des droites, de tracer des parallèles, des perpendiculaires, de dessiner des cercles (un cercle est déterminé par son centre et un de ses points), de placer des points aux intersections de droites et de cercles... Bref, Cabri permet de réaliser sur un écran d'ordinateur toute construction effectuée usuellement à la règle et au compas ([11]), et cela sans que l'élève doive recourir à une démarche de type numérique analogue à celle qui est indispensable avec Logo.

Il est donc évident que les démarches mentales favorisées ou suscitées par les environnements Logo et Cabri ne peuvent être que différentes. Il en est de même sur le plan du développement des concepts.

Par ailleurs, plus un logiciel s'intègre à l'enseignement usuel, moins il est aisé d'apprécier son impact réel sur le développement des connaissances. À la limite, si Cabri n'était utilisé que comme instrument de dessin particulièrement efficace, sans amener aucun changement ni dans les activités proposées aux élèves, ni dans les développements mathématiques du cours, on pourrait s'interroger sur son utilité réelle. À moins de montrer que la réalisation

([9]) Depuis peu, il existe un logiciel Cabri3d utilisable dans un cours de géométrie spatiale. Dans tout cet ouvrage, quand nous ferons référence à Cabri, il s'agira toujours du logiciel de géométrie plane.
([10]) Pour une introduction détaillée à l'usage de Cabri, on pourra se référer notamment au premier tome de la référence [23].
([11]) Et même quelques autres !

de dessins convenables facilite la conceptualisation. Quoi qu'il en soit, grâce à sa capacité d'animation, Cabri N'EST PAS qu'un instrument de dessin.

1.7.1 Une géométrie dynamique

Par « capacité » d'animation, nous entendons la possibilité que donne Cabri de modifier de façon continue la position d'un point du plan tout en préservant l'intégrité des figures auxquelles ce point appartient. Par exemple, un triangle abc ayant été dessiné, quand on déplace à la souris le point a, les côtés ab et ac « suivent » et le triangle se déforme.

De cette manière, l'élève interagit en direct avec la représentation graphique sans avoir besoin ni de recommencer un dessin comme il devrait le faire dans l'environnement papier-crayon, ni de modifier la valeur d'un paramètre numérique, comme il devrait le faire en Logo. De plus, Cabri possède une fonction qui permet à l'élève de déclencher le mouvement d'un point sans devoir « tirer » lui-même le point à la souris.

Ainsi, tant Logo que Cabri donnent à l'élève un accès à une géométrie dynamique, mais ces deux géométries dynamiques ont des points communs et des caractéristiques différentes. Le côté dynamique de Logo est directement lié à un point qui se déplace et engendre des figures en se déplaçant. Il fait également intervenir constamment des aspects numériques : l'utilisateur doit fournir à l'ordinateur des mesures de longueurs et des mesures d'angles. Dans Cabri, ce sont également des points qui se déplacent, mais il faut attendre que l'élève rencontre des études de lieux géométriques pour que ces points mobiles soient utilisés pour engendrer des courbes. Le rôle du dynamisme est donc différent dans les deux logiciels.

Par ailleurs, bien que Cabri possède une calculatrice intégrée et donne accès aux coordonnées et aux équations des différents objets, le cadre numérique ne joue qu'un rôle relativement secondaire, au moins dans un premier temps. L'élève n'a donc que peu d'occasions de procéder à des changements de cadre ou à des conversions de registre, mis à part celles qu'il réalise en transcrivant ses constatations sur un support papier.

Un des principaux avantages de Cabri réside dans le fait que ses possibilités d'animation, manuelle ou automatique, sont de nature à faciliter l'installation chez l'élève de démarches nouvelles.

1.7.2 La démarche de découverte

En présence d'une question ouverte, l'enfant peut utiliser Cabri pour découvrir la réponse ([12]).

Par exemple « Étant donné un segment $[ab]$, où peut-on placer un point q pour que le triangle abq soit rectangle ? » est un problème ouvert pour un élève du début du secondaire.

Avec Cabri, la question se transforme d'abord en un problème de construction.

([12]) Dans [49], M. KITTEL et G. KUNTZ, montrent comment certaines questions ouvertes se prêtent à des démarches de découverte différentes, enrichissant ainsi considérablement la situation au point de permettre des prolongements non recherchés *a priori* par l'enseignant.

Puisque nous ignorons la position du point q, a priori, la droite aq peut être n'importe quelle droite passant par a. Traçons-en une : A.

Puisque le triangle abq doit être rectangle, la droite qb ne peut être que la perpendiculaire à A passant par b. Nous pouvons donc la tracer. Nommons-la B. Le point cherché, q, est l'intersection des droites A et B.
Utilisons à présent la capacité d'animation de `Cabri` *: faisons tourner la droite A autour du point a. Grâce à la fonction* `Trace`*, nous « voyons » que le point q décrit un cercle. La réponse est découverte, le problème est fermé.*

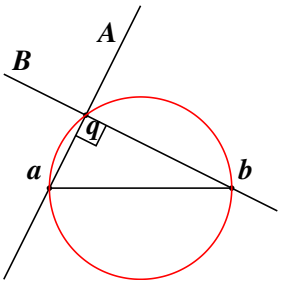


Fig. 1.1

Il reste à **démontrer** par un **raisonnement déductif** que cette réponse est bonne. Cette démonstration demeure nécessaire, car on s'est contenté de « voir » la réponse. Le travail effectué avec `Cabri` ne facilite pas la démonstration proprement dite, mais il contribue à la maîtrise de la situation par l'élève. Un contexte favorable a ainsi été créé.

1.7.3 La démarche de vérification

Dans le cas où la question soumise à l'élève est dès le départ une question fermée, l'élève n'a pas à découvrir la réponse. Mais par sa capacité d'animation, `Cabri` lui permet souvent de se convaincre de la véracité de la réponse proposée, et cette conviction crée le contexte favorable dont nous venons de parler.

Considérons par exemple un des premiers théorèmes de la géométrie euclidienne :

Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

Le tracé sur une feuille de papier d'un seul triangle, permet de vérifier cette propriété pour CE triangle particulier.

Avec `Cabri`, on dessine d'abord un triangle et ses hauteurs ; ensuite on en engendre toute une famille en déplaçant l'un ou l'autre des sommets. On vérifie alors que la propriété reste vraie en permanence. Comme lors d'une activité de découverte, on « voit » ainsi la vérité, avant de la démontrer. On peut aussi rechercher si la propriété est vraiment générale en étudiant des cas extrêmes. Par exemple, que se passe-t-il si l'un des sommets se rapproche très près du côté opposé ? Ou s'il s'éloigne indéfiniment ?

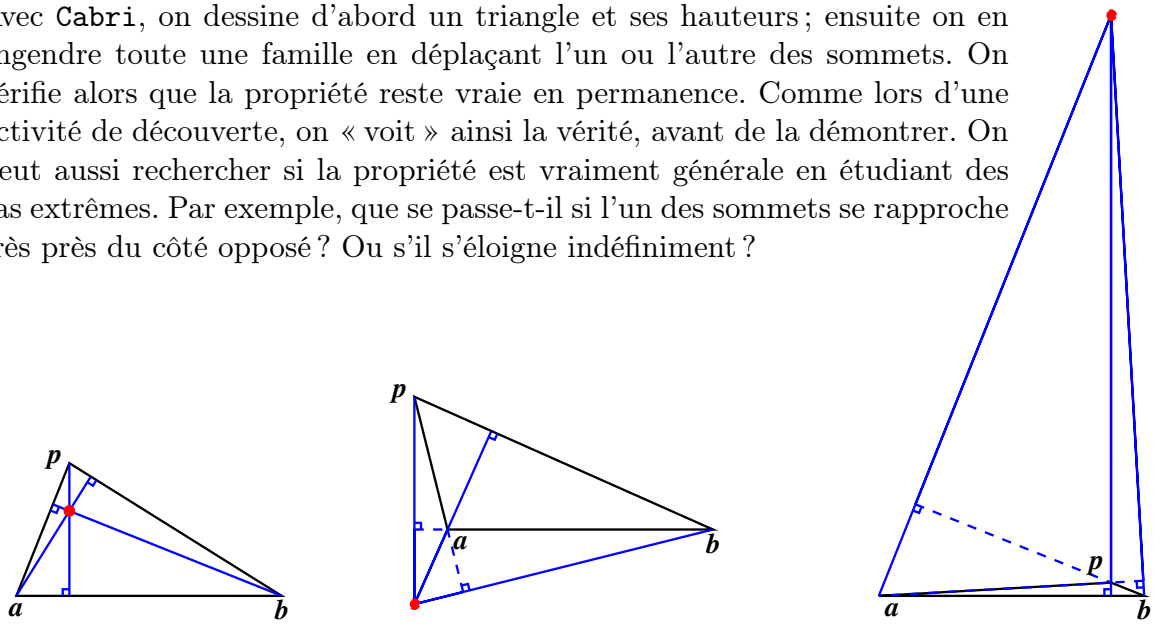


Fig. 1.2

Avec des élèves des 1er ou 2e degrés du secondaire, l'étude de la situation peut s'arrêter là. Plus tard, dans le cadre de l'étude de la notion de fonction et de transformation du plan, elle peut être reprise sous un autre point de vue : celui de la transformation du plan dans lui-même qui applique tout point p (n'appartenant pas à la droite ab) sur l'orthocentre du triangle abp. Cette fois, Cabri sera réutilisé à l'occasion d'une démarche de découverte des propriétés de cette transformation.

1.7.4 La démarche de généralisation

La démarche de vérification se transforme en une démarche de généralisation (cas particulier d'une démarche de découverte) dès que l'on se demande si une propriété rencontrée et démontrée pour une famille de figures, reste vraie pour une famille plus générale.

À titre d'exemple, considérons un quadrilatère convexe abcd.

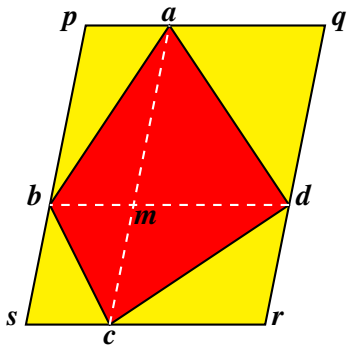


Fig. 1.3

Traçons les diagonales [ac] et [bd]. Par les sommets a et c du quadrilatère, on trace alors les parallèles à la diagonale [bd]. De même, par les sommets b et d, on trace les parallèles à la diagonale [ac]. On détermine ainsi un grand parallélogramme pqrs. Les deux diagonales découpent le quadrilatère abcd en quatre triangles abm, bcm, cdm et dam. Le parallélogramme pqrs est découpé en quatre plus petits parallélogrammes pamb, aqdm, drcm et csbm. Chacun de ces petits parallélogrammes contient l'un des triangles et a une aire double de celui-ci.

L'aire du quadrilatère abcd est donc la moitié de celle du parallélogramme pqrs.

Cette propriété étant établie, on peut se demander si elle se généralise aux quadrilatères non convexes, en commençant par les quadrilatères du type « fer de lance ».

Cabri permet de transformer le quadrilatère $abcd$ jusqu'à faire entrer le point c à l'intérieur du triangle abd. On effectue la même construction que dans le premier cas... mais la figure prend un aspect différent : la diagonale $[bd]$ est à l'extérieur du quadrilatère $abcd$!

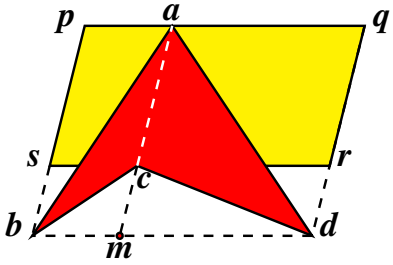


Fig. 1.4

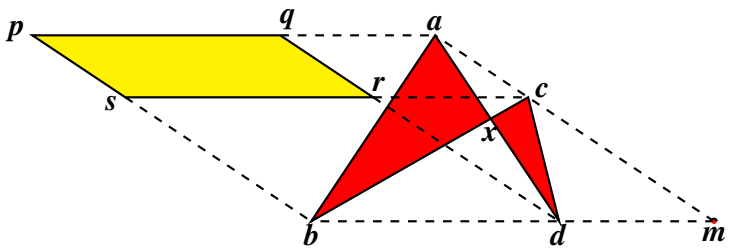


Fig. 1.5

Les triangles abm, bcm, cdm et dam sont toujours là, mais ils ne constituent plus le quadrilatère $abcd$. Celui-ci est formé des triangles abc et acd. Quant au parallélogramme $pqrs$, il n'est plus constitué de $pamb$, $aqdm$, $drcm$ et $csbm$, mais bien de $pacs$ et $aqrc$. Les

pièces se mettent en place si on remarque les égalités suivantes entre aires :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(abcd) &= \text{Aire}(abc) + \text{Aire}(acd) \\
&= (\text{Aire}(abm) - \text{Aire}(cbm)) + (\text{Aire}(amd) - \text{Aire}(cmd)) \\
&= \frac{1}{2}(\text{Aire}(pbam) - \text{Aire}(sbmc)) + \frac{1}{2}(\text{Aire}(amdq) - \text{Aire}(cmdr)) \\
&= \frac{1}{2}\,\text{Aire}(psac) + \frac{1}{2}\,\text{Aire}(acrq) \\
&= \frac{1}{2}\,\text{Aire}(psrq)
\end{aligned}$$

En déplaçant encore le sommet c, on « croise » le quadrilatère. Cette fois, les deux diagonales $[ac]$ et $[bd]$ sont extérieures au quadrilatère $abcd$. Mais rien n'empêche d'effectuer à nouveau la même construction, et de chercher un lien entre l'aire du quadrilatère $abcd$ et celle du parallélogramme $pqrs$, en utilisant le fait que le quadrilatère est constitué des deux triangles abx et cdx, où x est (sur notre figure) le point d'intersection des côtés $[ad]$ et $[bc]$.

Inutile d'essayer de démontrer que la somme des aires de ces deux triangles est la moitié de celle du parallélogramme $[pqrs]$. On s'en rend compte en déplaçant le point c de façon qu'il se rapproche de plus en plus de la droite parallèle à bd qui passe par a : les segments $[pq]$ et $[rs]$ se rapprochent l'un de l'autre, l'aire du parallélogramme $pqrs$ devient de plus en plus petite. À la limite, si c est sur la parallèle à $[bd]$ passant par a, le parallélogramme $pqrs$ est d'aire nulle, alors que les triangles abx et cxd sont toujours bien là ! En poussant encore l'étude, on peut montrer que dans le cas du quadrilatère croisé, l'aire du parallélogramme $pqrs$ est la *différence* des aires des triangles abx et cxd. Ainsi, quand cette différence est nulle, les deux triangles ont même aire : on a découvert un théorème parfois appelé *théorème du papillon*.

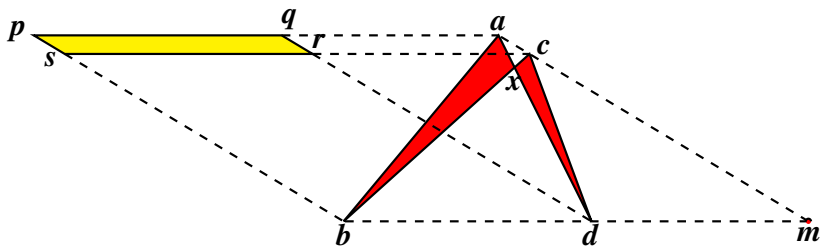


Fig. 1.6

À l'issue de la démarche de généralisation menée avec `Cabri`, nous débouchons donc sur un point d'interrogation. Nous avons trouvé un lien entre l'aire du quadrilatère $abcd$ et celle du parallélogramme $pqrs$ dans les cas « $abcd$ convexe » et « $abcd$ fer-de-lance ». Ce lien disparaît-il dans le cas des quadrilatères croisés, ou change-t-il de nature ? Dans ce cas, c'est en fait le concept d'aire lui-même qui doit être revisité, question qui ne sera pas abordée avant la fin de l'enseignement secondaire, mais que l'usage de Cabri aura permis d'évoquer plus tôt.

1.7.5 La démarche de validation et la validation des démarches

La démarche de vérification évoquée plus haut aurait pu être dénommée « démarche de validation » : l'élève valide ses résultats en vérifiant qu'ils sont valables dans une situation « générique ». Ne confondons pas cette démarche de validation d'un résultat théorique avec la validation des démarches de dessin.

Exemple : *Un élève travaille aux instruments avec papier, crayon, règle et compas. Il doit dessiner la médiatrice d'un segment. Il détermine le milieu de ce segment, puis au lieu de déterminer un point de la médiatrice au compas ou à l'équerre, il dessine « à l'œil » la perpendiculaire au segment passant par le milieu. S'il a « le compas dans l'œil » sa petite supercherie passera inaperçue.*

S'il procède de manière analogue avec `Cabri`*, cela n'est plus possible : n'ayant créé que l'apparence de la perpendicularité entre le segment et sa « médiatrice », la figure tracée ne résistera pas au déplacement d'une des extrémités du segment. Le tracé est donc invalide.*

Ce moyen de valider, ou d'invalider, les démarches n'est pas seulement utile en tant que moyen de contrôle pour l'enseignant. Elle l'est aussi pour l'élève lui-même, car il peut ainsi valider lui-même ses constructions géométriques comme il valide ses résultats en algèbre par exemple lorsqu'il vérifie la solution d'une équation.

1.7.6 Le concept de « figure géométrique »

À la lumière des situations précédentes, on comprend qu'en géométrie dynamique, le concept de « figure géométrique » change de contenu, et qu'il y a lieu de distinguer « dessin » de « figure » : le dessin d'un triangle réalisé par `Cabri` peut se transformer en le dessin de n'importe quel triangle. Dire que la figure géométrique « triangle » possède telle ou telle propriété, c'est dire que tous les dessins de triangle possèdent cette propriété. L'idée d'objet « quelconque » prend ainsi son sens véritable.

C. Laborde et B. Capponi, [51], ont analysé en détail l'impact de l'emploi de `Cabri` sur la question des rapports entre dessins et figures et les comportements possibles d'élèves devant une tâche de production d'une figure.

1.7.7 La démarche d'évaluation et d'auto-évaluation

Une telle démarche se met en place de façon naturelle par le fait que `Cabri` conserve la trace des manipulations effectuées par l'enfant et que celui-ci peut ainsi « visionner le film » de son activité.

1.7.8 Une expérience à l'école primaire

T. Assude et J.-M. Gelis, [4], se sont intéressés au problème de l'intégration des « technologies d'information et de communication éducatives » (tice) dans l'enseignement de

la géométrie à l'école primaire. *Quels usages pédagogiques et didactiques doit-on faire de ces instruments ? Quel est l'impact de l'utilisation de ces outils dans les apprentissages des savoirs géométriques ?*

Les conditions et contraintes « concrètes » de fonctionnement de l'enseignement primaire les amènent à focaliser leur attention sur *la dialectique ancien–nouveau dans les dimensions instrumentales et conceptuelles de l'élève* et sur la gestion du travail par l'enseignant. En d'autres termes, d'une part, ils cherchent à déterminer si les habitudes de travail « anciennes » des élèves s'adaptent facilement — ou non — aux outils informatiques, d'autre part, ils étudient les modifications que l'usage de ces outils provoque dans le travail des enseignants.

Les auteurs notent que *l'une des premières conditions d'intégration dans le quotidien de la classe est de créer la possibilité de travailler dans le cadre du programme et des instructions officielles.* Le travail avec `Cabri` doit être pensé en conséquence. Une marge de manœuvre reste néanmoins disponible.

Il convient aussi que les élèves « jouent le jeu ». En l'occurrence, ceux qui n'avaient rencontré au préalable l'ordinateur que dans un contexte de jeu, doivent accepter de le considérer comme un instrument d'apprentissage à prendre au sérieux.

Pour atteindre cet objectif, des séances d'initiation ont été conçues de façon à faire rencontrer par les élèves le maximum de fonctionnalités du logiciel. Ces séances ne doivent pas viser l'apprentissage d'objets nouveaux. Elles doivent néanmoins « institutionnaliser » des connaissances instrumentales, par exemple, le fait qu'il y ait trois sortes de points (points libres, points sur un objet, points résultant d'une construction). Les élèves sont invités au cours de ces séances à expliquer ce qu'ils remarquent.

Au cours de ces séances d'initiation, les chercheurs ont remarqué la difficulté pour les élèves de suivre les consignes de l'énoncé et les commandes du logiciel d'une manière précise. L'obligation de précision induite par la manipulation de l'ordinateur constitue une nouveauté par rapport aux habitudes antérieures.

Ils constatent aussi que les élèves engagés dans un travail à l'ordinateur ont des réticences à abandonner la souris pour s'engager dans un travail de type « papier-crayon ». Beaucoup d'élèves n'ont rien écrit quand on leur demandait de faire des remarques. Sans doute cela provient-il aussi de ce qu'une telle démarche ne faisait pas partie des habitudes de travail de la classe.

Il apparaît ainsi un conflit entre les anciennes méthodes de travail et celles dues à l'expérimentation. L'enseignant doit en conséquence situer les nouvelles méthodes de travail à une « juste distance » des anciennes. Les chercheurs insistent sur la nécessité d'une interaction entre l'activité papier-crayon et l'activité informatique : *L'entrelacement des tâches et des techniques `Cabri` et papier-crayon permet l'approfondissement conceptuel même lorsqu'on travaille sur des difficultés instrumentales.*

Dans le même ordre d'idées, les auteurs de la recherche font rédiger par les élèves de petites « narrations de recherche ». En couplant l'activité dans les deux registres, symbolique et graphique, le travail de Assude et Gelis renoue donc avec l'une des options de `Logo`.

Pour accomplir les tâches qui leur sont proposées, les élèves utilisent différentes techniques :

Technique perceptive : L'élève est au niveau du dessin. Par exemple, avec `Cabri`, il construit un carré au jugé, en traçant des côtés qu'il essaie de rendre perpendiculaires et de même longueur.

Technique « programme de construction » : La construction de la figure est faite en suivant un programme de construction, élaboré ou non par l'élève, éventuellement à partir de l'historique d'une figure déjà construite.

Technique analytique : On analyse des figures pour dégager des propriétés qui permettent ensuite la construction.

Technique perceptivo-théorique : L'élève est au niveau de la figure. Le tracé est fait en utilisant les commandes du logiciel qui matérialisent les propriétés de la figure. Ces propriétés sont des outils pour la construction.

Ces techniques ont des liens entre elles : par exemple, la technique analytique peut être une composante de la technique perceptivo-théorique et la technique « programme de construction » peut être ou non une technique perceptivo-théorique. Au fil des activités, la technique utilisée évolue, de la technique perceptive jusqu'à la technique perceptivo-théorique en passant par les deux autres techniques.

Chapitre 2

Analyse de didacticiels de géométrie dynamique

Le présent chapitre a été rédigé au début 2006. Il est donc fort probable que certaines des considérations qui y figurent sont désormais obsolètes et qu'une actualisation serait nécessaire... tou en n'étant à son tour valable que durant une période limitée !

2.1 Deux modes de fonctionnement

Dans le deuxième rapport de recherche, [19], accompagnant *Apprenti Géomètre*, nous situions ce logiciel à partir de plusieurs typologies. Ci-dessous, nous nous contenterons de rappeler les deux modes fondamentaux de fonctionnement des logiciels d'aide à l'enseignement, les modes dénommés « réponse » et « commande ». Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter la référence [53].

Un ordinateur fonctionne en *mode réponse* ou en *mode commande* selon que l'activité de l'élève consiste à entrer une *réponse* suite à un questionnement de l'ordinateur ou à *commander* à celui-ci d'effectuer une action.

Cette classification est quelque peu réductrice car il peut arriver qu'un logiciel fonctionne dans des modes différents en fonction du contexte. Ainsi un logiciel à *mode réponse* peut ouvrir une fenêtre en *mode commande* afin que l'élève vérifie une conjecture avant de répondre, ou observe une justification de la réponse à partir d'une *monstration* réalisée dans la fenêtre.

Toutefois, nous pouvons considérer que pour l'essentiel, les logiciels de géométrie dynamique ([1]) se situent parmi les logiciels à mode commande. En particulier, ces logiciels permettent à l'utilisateur de programmer une situation, de tester des démarches, d'émettre des hypothèses et de les vérifier. La situation d'interaction est importante et, surtout, l'initiative est laissée à l'utilisateur.

([1]) Nous utiliserons parfois l'abréviation *DGS*, *Dynamic Geometry Software*, dans la suite de ce document pour désigner ces logiciels.

2.2 Analyse de logiciels

Dans cette section nous analysons brièvement quelques didacticiels de géométrie dynamique. Précisons d'emblée que tous les didacticiels analysés peuvent être considérés comme étant *interactifs* : ils permettent à l'utilisateur de choisir le chemin de résolution, en mettant à sa disposition les outils et les informations nécessaires à son travail.

Nous pouvons donc nous contenter d'un canevas d'analyse en quatre points — convivialité, ouverture, pertinence, service — définis comme suit :

Convivialité : un didacticiel est considéré comme *convivial* s'il est adapté au public visé en ce qui concerne la difficulté de prise en mains et de l'utilisation. La conception de l'interface et son ergonomie doivent aussi correspondre aux besoins du logiciel et au public cible.

Ouverture : un didacticiel est dit *ouvert* s'il peut être modifié et adapté à l'évolution des besoins de l'apprentissage. Un facteur d'ouverture est la possibilité de création de macros ou de modification des menus. La possibilité de travailler en réseau est aussi un facteur pouvant influencer l'apprentissage dans sa dimension collaborative.

Pertinence : la *pertinence* d'un didacticiel se mesure à l'aune de sa conformité aux programmes, aux compétences à installer, aux comportements à mettre en place chez les élèves, ainsi qu'aux méthodes d'enseignement-apprentissage préconisées dans les textes officiels. Ces caractéristiques influencent l'intégration du logiciel dans les pratiques quotidiennes.

Service : un *service* de réponse aux questions des utilisateurs est un atout supplémentaire pour un didacticiel. Ce service peut prendre diverses formes : rubrique d'aide dans la barre des menus, documents d'accompagnement, site Internet... Des mises à jour régulières ou la mise à disposition de nouvelles versions, en fonction des évolutions conceptuelles et instrumentales, des remarques et questionnements des utilisateurs, des observations lors d'expérimentations... ou de la révision des curricula officiels, sont autant de services qui augmentent l'intérêt d'un didacticiel.

Dans les analyses qui suivent, en ce qui concerne l'adéquation des didacticiels aux curricula, nous nous sommes référés aux documents officiels en Communauté française de Belgique, en particulier le décret *Missions*, [1997], et les *Socles de compétences*, [1999].

2.3 Cabri II+

Cabri Géomètre II Plus est considéré comme le logiciel de référence pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Le public cible est principalement constitué des élèves de l'enseignement secondaire et des étudiants de l'enseignement supérieur.

Des applications à l'enseignement primaire ont été tentées, mais ce didacticiel n'est pas spécifiquement adapté à ce niveau d'enseignement.

Cabri II+ est disponible sous Mac et Windows. Il peut être utilisé en français, anglais, espagnol, allemand, italien ou portugais.

Ce logiciel peut être commandé auprès de la société Cabrilog et est, dans ce cas, livré dans un coffret standard comprenant un CD-Rom, un manuel de l'utilisateur et un contrat de licence d'utilisation. Au moment de la rédaction de ce texte, son prix était de 120 euros pour une utilisation sur un seul poste ou de 300 euros pour un maximum de dix postes. Il est possible de télécharger une version de démonstration du logiciel à l'adresse www.cabri.com/v2/pages/fr/logiciel.php#cabri2d.

Convivialité

L'interface de Cabri II+ nous semble sobre et agréable. Les possibilités de modification des menus ainsi que l'ajout d'icônes personnalisées aux macros renforcent la facilité d'utilisation et le sentiment de satisfaction.

Cabri II+ est clairement annoncé comme un logiciel de géométrie dynamique et possède nombre de fonctionnalités adaptées à cet usage. Pour l'utiliser dans l'enseignement primaire, un menu spécialement conçu pour ce niveau devrait être construit. Un tel menu peut très facilement être réalisé par l'enseignant et chargé au lancement du logiciel.

Notons aussi que Cabri II+ offre la possibilité d'insérer des images d'objets réels.

Ouverture

L'ouverture du logiciel est assurée par la possibilité de création de macros et de modification des menus. Une version dénommée « Cabri-Java » permet de placer des activités du même genre sur des sites Internet. Il est aussi possible de lui adjoindre une version en trois dimensions.

Dans la version utilisée, Cabri II+ permet d'activer ou de désactiver certaines des fonctionnalités. Il est donc possible de diversifier fortement le logiciel suivant le public visé ou l'activité réalisée.

Pertinence

Ce logiciel permet d'envisager une nouvelle façon de concevoir la géométrie :

1. une phase d'exploration, d'investigation qui permet à l'élève de s'approprier la situation,
2. une mise en forme de propositions géométriques exprimant les constatations effectuées,
3. une phase de justification, de démonstration des propriétés énoncées.

L'élève sera, de ce fait, plus souvent amené à découvrir et à formuler lui-même les énoncés.

Les fonctionnalités principales servant à la construction des figures sont présentes dans Cabri II+. Les seules procédures de dessin de polygones particuliers concernent les polygones réguliers.

Cabri II+ permet d'accéder aux transformations du plan telles que les symétries axiales et centrales, les rotations, les translations ou encore les homothéties.

Cabri II+ fournit aussi de nombreuses fonctionnalités extrêmement intéressantes. Par exemple, outre la possibilité de créer des macros déjà signalée, Cabri II+ permet de vérifier l'alignement de points, le parallélisme ou la perpendicularité de droites. La création d'animations est également possible. Il permet aussi d'exporter les constructions réalisées vers une calculatrice Texas Instrument.

Cabri II+ est également un des rares logiciels qui proposent de mesurer des aires. Cette fonctionnalité devrait permettre à l'élève d'aborder avec plus d'aisance certains problèmes de mesure ou de construction. Il est en effet très difficile pour un élève de faire des conjectures dans des problèmes d'aires sans cette possibilité de les mesurer. Le logiciel permet également de distinguer l'aire algébrique de l'aire arithmétique (aire classique) ; ceci permet de généraliser certaines situations-problèmes, sans ignorer ou escamoter les polygones croisés.

La faculté d'animation (d'un ou plusieurs objets) est appréciable et devrait permettre à l'élève de se concentrer sur le phénomène, la propriété à découvrir plutôt que sur la technique d'animation de la figure. Cabri II+ comporte également une calculatrice dont les résultats peuvent être intégrés aux étapes suivantes d'une construction.

Enfin, la possibilité de construire des macros permet à l'élève de se débarrasser des tâches répétitives et l'oblige à organiser une construction de façon rigoureuse à partir des objets de départ.

Le logiciel semble donc fort pertinent au niveau de l'enseignement secondaire et supérieur.

Service

Le site officiel — http ://www-cabri.imag.fr/ — est assez complet et donne la possibilité de nombreux contacts. D'autres sites permettent de se rendre compte de l'impact de ce logiciel dans l'enseignement : cours, échange d'idées, résolutions de problèmes... Tout (ou presque !) peut s'y trouver. En particulier, le site www.cabri.com/v2/pages/fr/cabri.php est très bien documenté.

2.4 Chamois

Le logiciel Chamois est distribué en shareware. Une licence limitée à une utilisation de 40 jours est accordée afin de l'essayer. Passé ce délai, le logiciel bloque certaines fonctionnalités. Une licence est nécessaire pour avoir accès à l'ensemble des fonctionnalités. Nous avons testé la version 1.59 en shareware.

Chamois est disponible sous Windows, mais aussi sur Mac à condition d'utiliser un émulateur PC. Nous n'avons pu le trouver qu'en français.

Ce logiciel est destiné aux élèves de l'enseignement secondaire.

Convivialité

Le logiciel est bien adapté au public visé. Les fonctionnalités principales sont pratiquement

toutes présentes. De plus, une fenêtre sur la gauche de l'écran permet de proposer aux élèves un énoncé de problème à résoudre. Chamois offre une grande diversité dans le choix des couleurs, le style et l'épaisseur des lignes, ce qui peut le rendre assez convivial lors de son utilisation. La taille de la page peut également être modifiée.

Ouverture

Chamois permet de modifier la configuration en activant ou en désactivant certaines des fonctionnalités.

Pertinence

La majorité des fonctionnalités importantes que l'on retrouve sur la plupart des logiciels sont également présentes dans Chamois. En plus de toutes les figures classiques de géométrie, Chamois permet

- de vérifier analytiquement l'alignement de trois points, la perpendicularité ou le parallélisme de deux droites ou si une figure est bien un carré, un losange, un triangle isocèle, ...
- de travailler sur des lieux de points,
- d'effectuer des calculs avec des longueurs ou avec des nombres,
- de tracer des coniques et de faire varier l'excentricité,
- d'appliquer les transformations classiques de la géométrie : rotations, homothéties, symétries centrales et axiales,... à tous les objets de base (polygones, droites,...)

De plus, Chamois offre la possibilité de conversion des informations d'un registre symbolique vers un registre graphique, et vice-versa. Il nous semble donc pertinent au niveau de l'enseignement secondaire.

Service

Une rubrique d'aide en français est incluse à la barre des menus. Un site Internet est également disponible à l'adresse : membres.lycos.fr/bourit/.

On peut y trouver des explications ainsi qu'une banque d'exercices. En outre, si un besoin de fonctionnalités supplémentaires se fait ressentir, il est possible d'en faire part sur le site et, si c'est réalisable, une nouvelle version est alors envoyée par l'auteur.

2.5 Cinderella

Il est possible de télécharger une version de démonstration de Cinderella sur le site www.cinderella.de/tiki-index.php?page=Download+Cinderella&bl. Cette version cesse de fonctionner après environ 45 minutes. Pour obtenir la version complète du logiciel, une licence est nécessaire. Nous avons testé la version de démonstration 1.41.

Cinderella se définit comme un logiciel de géométrie interactive. Il a été créé et développé par Jürgen Richter-Gebert et Ulrich Kortenkamp. La traduction en français est l'œuvre de Daniel Amiguet.

Cinderella est disponible sous Mac, Windows et Linux. À notre connaissance, il peut

être utilisé en français, allemand, anglais, japonais, coréen, italien et portugais.

`Cinderella` se destine aux élèves de l'enseignement secondaire.

Convivialité

`Cinderella` possède un design agréable avec des couleurs bien choisies que l'on peut modifier à souhait et des icônes bien nettes. Le design offert et la possibilité de modifier l'apparence des points, des traits des figures ou encore du fond augmentent la convivialité de ce logiciel.

Ouverture

L'ouverture de `Cinderella` est assez limitée, car il est impossible de modifier les menus en désactivant des fonctionnalités. Tout est en permanence à l'écran. Par contre, `Cinderella` permet de travailler en géométrie euclidienne, hyperbolique ou elliptique, ce que l'on ne retrouve dans aucun des autres logiciels étudiés.

Pertinence

La plupart des fonctionnalités principales de construction de figures sont présentes dans ce logiciel. Cependant, le logiciel nous semble surtout pertinent au niveau des dernières années de l'enseignement secondaire. Il ne dispose pas de fonctionnalités permettant d'accéder directement aux transformations du plan.

Service

Un site Internet fournissant des informations sur le logiciel ainsi que des exemples et un forum est à disposition à l'adresse `http://cinderella.de/tiki-index.php/`. Plusieurs articles intéressants sont également à disposition sur d'autres sites. Il en est par exemple ainsi d'un texte très instructif de Ed Sandifer pour la Mathematical Association of America à l'adresse `http://www.maa.org/reviews/cinderella.html`, dans lequel il effectue une comparaison entre `Cinderella` et `Sketchpad`.

2.6 Déclic

`Déclic` est un logiciel libre et gratuit destiné à l'enseignement secondaire. Nous avons testé la version 5.2 disponible à l'adresse : `www.emmanuel.ostenne.free.fr/declic.htm`. Elle est disponible sous Windows et Linux en version française ou italienne.

Convivialité

Le design de `Déclic` n'est pas des plus agréables, les icônes ne sont pas très explicites et la palette de couleurs est assez limitée. De plus, la façon d'y accéder est peu claire.

Les menus sont peu clairs : le critère de rassemblement des fonctionnalités dans chacun des menus n'est pas très lisible pour l'utilisateur. Une rubrique d'aide est disponible dans le menu supérieur.

L'organisation des commandes est assez complexe : certaines sont insérées dans les menus. Parfois, elles sont répétées dans une boîte à outils à la droite de l'écran. Des indications apparaissent aussi en bas de l'écran. Tout ceci laisse à l'utilisateur une impression de peu de cohérence au niveau de la gestion des informations.

Il est impossible d'appliquer une même opération à plusieurs objets. Il faut repasser par le menu et sélectionner à nouveau l'opération à effectuer puis l'objet suivant, ce qui est relativement fastidieux.

Des raccourcis clavier sont disponibles.

Ouverture

Le menu « Préférences » permet de modifier certaines fonctionnalités comme le fait de nommer des points, mais il n'est pas possible de désactiver les différentes fonctionnalités qui restent en permanence dans les menus mis à la disposition de l'utilisateur.

Les figures éditées sont incorporables en format vectoriel dans les traitements de texte sous Windows. D'autres formats d'images sont proposés : `bmp`, `gif`, `png`, `jpeg` ainsi que `eps`. Il est aussi possible de composer des pages `html` en association avec une applet Java.

Pertinence

La majorité des fonctionnalités rencontrées dans les autres logiciels de géométrie dynamique sont également présentes dans `Déclic`.

Service

L'auteur a construit son propre site qui lui permet de mettre en ligne des informations en français : `www.emmanuel.ostenne.free.fr/declic.htm`

Ce site propose aussi des liens variés vers des sites consacrés à des activités mathématiques. Le site de l'éditeur des ouvrages de la collection *Espace-Math* propose également quelques usages du logiciel : `www.espace-mathematiques.com/site/index.php`

2.7 GeoGebra

`GeoGebra` est un logiciel libre pouvant être redistribué gratuitement sous les termes de la licence `GNU`, *General Public License*. Destiné aux élèves du secondaire, il réunit géométrie, algèbre et calcul. Il a été développé pour l'école secondaire par Markus HOHENWARTER à l'Université de Salzburg.

Il est disponible sous Mac, Windows et Linux. Il peut être utilisé aussi bien en français qu'en anglais, allemand, espagnol, italien, néerlandais, portugais, ou encore en chinois, croate, hongrois, danois, slovène ou catalan.

`GeoGebra` a reçu plusieurs distinctions internationales dont les prix européen et allemand pour les logiciels éducatifs. Nous avons testé la version 2.6b, 2005, disponible gratuitement à l'adresse `www.geogebra.at/`

Convivialité

GeoGebra est un logiciel convivial tant au niveau de ses performances que de son design. Une de ses particularités tient au fait que, dans le menu contextuel, l'icône s'adapte à la fonctionnalité choisie. Une liste des commandes par ordre alphabétique est également disponible, ce qui permet d'aller directement à la fonction voulue si on ne se souvient plus de sa situation dans le menu principal.

Ouverture

Le didacticiel GeoGebra peut être considéré comme un logiciel ouvert.

En effet, il est de conception Java et fonctionne sur tout navigateur acceptant ce langage. Il est donc possible de l'utiliser sur Internet sans devoir le télécharger. Ce format permet aussi de placer les figures construites avec GeoGebra sur l'Internet via une Applet Java.

La fenêtre de travail peut également être exportée sous forme de page web ou comme image en format png ou eps. Cette possibilité permet par exemple à chacun de placer des réalisations dans la banque de données accessible à tous sur le site de GeoGebra.

Dans la version distribuée, GeoGebra permet d'activer ou non certaines des fonctionnalités qu'il contient. Cependant, aucune de ses modifications possibles n'a trait aux constructions proprement dites, mais bien à la présence de la fenêtre « algèbre » ou encore du protocole de construction.

Pertinence

Le logiciel permet d'élaborer des constructions comprenant des points, des vecteurs, des segments, des droites, des coniques et même des courbes représentatives de fonctions diverses et modifier tout cela interactivement. Par ailleurs, les équations et coordonnées peuvent être entrées directement. GeoGebra est capable de travailler avec des variables numériques ou vectorielles ainsi qu'avec des points, peut trouver les dérivées et intégrales de fonctions et propose des commandes comme Racine ou Extremum.

GeoGebra met à la disposition de l'utilisateur deux registres d'expression, l'un graphique, l'autre algébrique, associés à des fenêtres différentes. À une expression dans la fenêtre « algèbre » correspond un objet dans la fenêtre « géométrie » et vice versa.

GeoGebra permet aussi à l'élève de revoir, sous forme d'animation, les différentes étapes d'une construction qu'il a réalisée.

La pertinence de GeoGebra est certaine au niveau de l'enseignement secondaire.

Service

Une rubrique d'aide en français est incluse dans la barre des menus.

De plus, le site www.geogebra.at/ est bien documenté et fournit de nombreuses explications sur le logiciel ainsi que des exemples d'activités réalisées à l'aide de celui-ci. Il contient également un forum sur lequel les utilisateurs peuvent échanger des informations au sujet du logiciel, de leurs pratiques,...

2.8 GeoLabo

GeoLabo est un logiciel libre et gratuit. Nous avons testé la version 1.16 téléchargeable à l'adresse : www.bibmath.net/geolabo/index.php3

GeoLabo peut être utilisé sous les trois environnements courants que sont Linux, Mac et Windows. À notre connaissance, Geolabo n'est disponible qu'en français.

GeoLabo a été conçu par Frédéric Bayart.

Convivialité

Facile à prendre en main et à utiliser, le logiciel est destiné aux élèves du secondaire et possède une interface assez conviviale. Il offre une grande diversité dans le choix des couleurs, dans le style et l'épaisseur des lignes ou dans les motifs de remplissage des figures. Ces possibilités de paramètrage des constructions concourent à la qualité du logiciel.

La relative facilité de GeoLabo à construire des objets complexes et la possibilité qu'il offre de créer des macros sont des caractéristiques très intéressantes. Il est également possible de créer des animations à partir de GeoLabo.

Ouverture

Le didacticiel GeoLabo peut être considéré comme un logiciel ouvert.

En effet, il est de conception Java et fonctionne dès que la machine virtuelle java (gratuite elle aussi) est installée sur l'ordinateur. Il permet de communiquer avec les logiciels de traitement de texte comme Word ou LaTeX. Grâce à son extension Geoweb, on peut intégrer les figures sur une page web en gardant leur aspect dynamique. Il est aussi possible d'imprimer directement les figures, avec une grande précision.

Grâce à son système de macro-constructions, GeoLabo permet, d'ajouter les objets dont on a besoin. Par contre, l'absence de possibilité de désactiver certaines de ses fonctionnalités dans cette version (ce n'est plus le cas dans les versions futures) est plutôt un frein à la diversification.

Pertinence

La majorité des fonctionnalités importantes que l'on retrouve sur des logiciels largement répandus comme Cabri sont également présentes dans GeoLabo. À côté de constructions comprenant des points, des vecteurs, des segments ou encore des droites, il permet assez facilement de construire des objets complexes comme des suites récurrentes, des tangentes à des courbes, des figures avec des bords composés de diverses courbes...

L'utilisation de GeoLabo semble donc être pertinente au niveau de l'enseignement secondaire. En ce qui concerne l'enseignement fondamental, la convivialité et la facilité de création des figures pourraient constituer un atout. Le nombre fort important de fonctionnalités inconnues des enfants de cet âge pourrait provoquer des problèmes d'utilisation par ces enfants. Toutefois, dans les dernières versions, il est possible de désactiver certaines de ces fonctionnalités, ce qui rend le logiciel tout à fait utilisable dans le fondamental.

Service

Une rubrique d'aide en français est incluse dans la barre des menus.

Le site officiel de ce didacticiel présente plusieurs pages aidant tant à sa prise en main qu'à son utilisation en classe de collège et de lycée, correspondant à l'enseignement secondaire en Communauté française de Belgique. Ce site est organisé clairement et contient en plus une page `FAQ`.

- Tutoriel : `www.bibmath.net/geolabo/tutoriel/index.php3`
- Activités en classe :
  `www.bibmath.net/geolabo/geotheque/enseignement/enseignement.php3`

2.9 Geonext

`Geonext` est un didacticiel allemand conçu par l'Université de Bayreuth en 1999 dans sa première version. Ce didacticiel se définit comme étant destiné aux élèves des enseignements primaire et secondaire. Des applications à l'enseignement supérieur sont aussi prévues par ses concepteurs.

Nous avons testé la version 1.12 [juillet 2005], mise gratuitement à disposition des utilisateurs à l'adresse `www.http ://geonext.uni-bayreuth.de/`.

`Geonext` peut être utilisé sous Mac, Windows et Linux. Il est disponible en vingt-et-une langues dont les plus courantes comme le français, l'anglais, l'allemand, l'espagnol et l'italien, mais aussi, par exemple, en russe, norvégien ou encore albanais.

Convivialité

`Geonext` possède un design agréable pour les élèves du primaire et du secondaire. Les couleurs choisies et la netteté des icônes concourent à la convivialité de ce logiciel.

Ouverture

Deux aspects essentiels de `Geonext` montrent combien il peut être considéré comme un logiciel ouvert.

D'une part, il permet de préparer de nouvelles barres de menu à partir d'un éventail de fonctionnalités. Ceci permet donc à l'utilisateur de choisir ce dont il a besoin pour réaliser sa tâche. Cela permet aussi à l'enseignant de contraindre un élève à travailler plutôt avec un menu restreint qu'avec un menu étendu.

D'autre part, comme `GeoLabo`, `Geonext` est de conception `Java` et fonctionne donc sur tout navigateur qui accepte ce langage. Il est donc possible d'utiliser `Geonext` directement sur Internet sans devoir le télécharger. Ce format permet aussi de placer les figures construites avec `Geonext` sur l'Internet via une Applet Java.

`Geonext` est donc un logiciel qui peut être utilisé aisément dans des applications de cours programmé et dans des formations à distance via un site *web*, que ces formations soient

destinées à des enseignants ou à des étudiants. Différentes expériences en cours en France l'utilisent par ailleurs dans le cadre du « cartable électronique ». De même, au Canada, des enseignants l'utilisent dans le cadre de collaborations entre étudiants via un réseau intranet.

Pertinence

Tout comme dans `Cabri Géomètre`, seuls les polygones réguliers peuvent être construits en utilisant des commandes du logiciel, ce qui est peu adapté à l'enseignement primaire.

Par contre, en ce qui concerne l'enseignement secondaire, `Geonext` semble tout à fait adapté aux possibilités des élèves et aux curricula de ce niveau.

Une fonctionnalité intéressante et originale de `GeoNext` est la possibilité de faire apparaître à l'écran le compte-rendu d'une construction. Ce texte succinct et séquentiel reprend à la fois les icônes employées, le type de construction et les coordonnées des points tracés. La figure 2.1 montre un compte-rendu de la construction d'un parallélogramme à partir de trois points et de parallèles. Cette fonctionnalité est d'un intérêt indéniable dans le cadre d'un travail d'évaluation formative, d'une réflexion sur le travail effectué ou d'une narration de recherche.

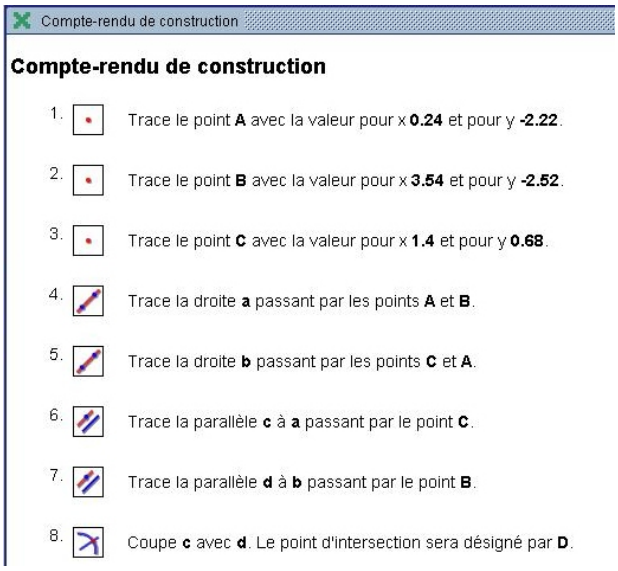


Fig. 2.1

Une autre fonctionnalité intéressante est la possibilité de réaliser des captures d'écran successives. Ces images seront utilisées par la fonctionnalité « exporter au format vignette » qui permet de réaliser des animations « pas à pas » à partir d'un interpréteur `html`. Cette fonctionnalité est très intéressante dans le cadre d'un travail de narration de recherche. Il faut cependant que l'élève réalise les captures d'écran au fur et à mesure de son travail.

Un bouton permet ensuite d'activer l'animation, soit au pas à pas en avant ou en arrière, soit de manière automatique comme dans un film. La documentation accompagnant ce logiciel présente cette fonctionnalité comme une aide précieuse au niveau des enseignements supérieur et universitaire.

`Geonext` possède donc des caractéristiques intéressantes de dynamisme, d'analyse du travail effectué et de collaboration.

Service

Une rubrique d'aide est incluse dans la barre des menus. À ce jour, il faut cependant déplorer que cette rubrique soit exclusivement accessible en allemand.

Par contre, plusieurs sites Internet fournissent des explications en français.

`www.framasoft.net/IMG/GEONExT.pdf`
`www.recitmst.qc.ca/geonext/doc/wakka.php?wiki=PagePrincipale`
`www.recitmst.qc.ca/maths/article.php3?id_article=8`

2.10 Sketchpad

Sketchpad est un logiciel destiné aux élèves de l'enseignement secondaire. Il est surtout utilisé aux Etats-Unis et au Canada. Sketchpad doit être commandé auprès de la société Keypress. Son prix au moment de l'étude était de 129,95 dollars (environ 107 euros) pour un poste et de 449,95 dollars (372,5 euros) pour dix postes. Une version de démonstration peut cependant être téléchargée. Nous avons testé la version 4.06.

Sketchpad est disponible sous Mac et Windows. À notre connaissance, les seules langues disponibles sont l'anglais et l'espagnol.

Convivialité

Le design de Sketchpad est agréable. Les couleurs sont bien choisies. Le nombre d'icônes est limité et celles-ci sont agréables.

Une des particularités de Sketchpad est de ne donner accès dans la barre des menus qu'aux fonctionnalités pouvant s'appliquer aux objets sélectionnés. Les autres restent grisées.

Les fonctionnalités généralement présentes dans ce type de logiciel sont pratiquement toutes présentes chez Sketchpad.

Ouverture

Sketchpad fournit de nombreuses fonctionnalités intéressantes comme la possibilité de créer des macros.

Les menus présents dans Sketchpad permettent de réaliser de nombreuses constructions et transformations. Il n'est cependant pas possible d'ajouter ou de retirer des fonctionnalités à l'écran. C'est le logiciel qui génère directement ce dont l'utilisateur peut disposer.

Pertinence

Sketchpad possède les fonctionnalités principales servant à la construction de figures. En plus, Sketchpad propose des fonctionnalités moins courantes telles la grille polaire, les dérivées, le rapport entre deux longueurs, ...

Sketchpad offre aussi la possibilité de prévisualiser les mouvements que l'on veut appliquer à une figure, ce qui permet de modifier ceux-ci en cas d'erreur. La création d'animations fort diversifiées est également possible. Un point moins important est l'absence de possibilité de marquer des segments. Le logiciel semble donc fort pertinent pour le niveau visé.

Service

La rubrique d'aide renvoie vers un site Internet qui propose des explications complètes en anglais. Quelques sites fournissent des explications en anglais, notamment

`www.keypress.com/sketchpad/`
`archives.math.utk.edu/software/msdos/geometry/geom_sketchpad/.html/`

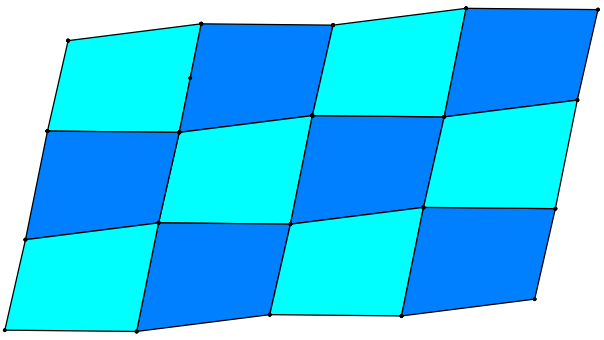
Il est également possible de trouver des explications en français sur

`pilat.free.fr/pilat/sketchpad/sketchpad.htm/`

Signalons aussi que le site `www.dlcmcgrawhill.ca/scolaire_quebec/cyberg/` propose une version française de `Sketchpad` sous le nom de `Cybergéomètre`.

2.11 En situation

Pour obtenir une comparaison plus complète, nous avons décidé de réaliser une même activité à l'aide de chacun des logiciels étudiés afin de voir comment chacun permet d'arriver à la construction finale. Comme activité, nous avons choisi de paver le plan à l'aide de quadrilatères quelconques coloriés alternativement en deux couleurs différentes. Cette activité a été choisie à titre d'exemple et ne peut être à la base d'un jugement global des logiciels étudiés. Dans le cadre d'autres activités, le niveau de performance des logiciels pourrait, en effet, être assez différent. Cette construction est représentée ci-dessous.



La réalisation de ce pavage a été possible avec chacun des logiciels. Cependant, le chemin de résolution varie fortement de l'un à l'autre.

Ainsi, avec `Cabri II+`, il faut, dans l'ordre :

1. construire le quadrilatère,
2. construire le milieu d'un de ses côtés,
3. appliquer une rotation de 180 degrés du quadrilatère autour de ce point,
4. créer des vecteurs joignant les sommets d'un de ces quadrilatères,
5. appliquer une translation des quadrilatères désirés à l'aide du vecteur désiré,
6. répéter l'opération en sélectionnant à chaque fois le quadrilatère et le vecteur voulu,

7. choisir la première couleur désirée et colorier les différents quadrilatères auxquels elle s'applique,
8. répéter l'opération avec la seconde couleur.

Avec `Chamois`, il faut :

1. construire le quadrilatère,
2. construire le milieu d'un de ses côtés,
3. créer le nombre correspondant à l'angle de rotation, en l'occurrence 180 degrés,
4. appliquer la rotation en choisissant successivement le quadrilatère, le centre et le nombre,
5. créer des vecteurs joignant les sommets d'un de ces quadrilatères,
6. appliquer une translation des quadrilatères désirés à l'aide du vecteur désiré,
7. répéter l'opération en sélectionnant à chaque fois le quadrilatère et le vecteur voulu,
8. choisir la première couleur désirée et remplir un des quadrilatères de cette couleur,
9. répéter à chaque fois l'opération pour les autres quadrilatères que l'on désire remplir de cette couleur,
10. faire de même avec la seconde couleur.

Avec `Cinderella`, il faut :

1. créer les quatres sommets du quadrilatère,
2. construire le quadrilatère en reliant ces sommets,
3. construire le milieu d'un de ses côtés,
4. à partir du menu réflexion, appliquer une symétrie ayant pour centre ce milieu de côté à chacun des sommets du polygone,
5. construire le nouveau quadrilatère en reliant les points ainsi créés,
6. répéter les trois précédentes opérations autant de fois qu'il est nécessaire,
7. choisir les différents quadrilatères auxquels on veut appliquer une couleur,
8. modifier la couleur de ces quadrilatères à partir du menu « éditer les apparences »,
9. faire de même avec la seconde couleur.

Avec `Déclic`, il faut :

1. construire le quadrilatère,
2. construire le milieu d'un de ses côtés,
3. appliquer une rotation d'un des sommets du quadrilatère par ce milieu de côté en choisissant, dans l'ordre, le point à modifier, le centre et l'angle,
4. réitérer l'opération pour chacun des sommets du quadrilatère en resélectionnant à chaque fois rotation, point, centre et angle,

5. construire le quadrilatère suivant à partir de ces sommets,
6. appliquer une translation à point en le sélectionnant puis en indiquant l'origine et l'extrémité du vecteur (qu'il ne faut pas dessiner),
7. répéter l'opération pour chacun des points en choisissant dans l'ordre translation, point, origine et extrémité du vecteur,
8. construire le quadrilatère,
9. répéter les deux opérations précédentes autant de fois que nécessaire,
10. pour colorier un quadrilatère, choisir aspect, puis le quadrilatère, sélectionner la couleur et le type de remplissage désiré et l'appliquer,
11. répéter l'opération pour les autres quadrilatères que l'on colorier,

Avec `Geogebra`, il faut :

1. construire le quadrilatère,
2. construire le milieu d'un de ses côtés,
3. appliquer une rotation en choisissant l'objet, le centre et l'angle,
4. créer des vecteurs joignant les sommets d'un de ces quadrilatères,
5. appliquer une translation des quadrilatères désirés à l'aide du vecteur désiré,
6. répéter l'opération en sélectionnant à chaque fois le quadrilatère et le vecteur choisi,
7. dans le menu propriétés, choisir le quadrilatère auquel on veut donner une nouvelle couleur, définir cette couleur et l'appliquer,
8. répéter l'opération pour chaque quadrilatère à colorier.

À noter que les côtés des quadrilatères se colorent aussi lorsqu'on modifie une couleur. Pour garder la couleur noire d'origine, il faut choisir le côté et lui appliquer cette couleur.

Avec `Géolabo`, il faut :

– construire le quadrilatère,
– construire le milieu d'un de ses côtés,
– créer une rotation en choisissant le centre et l'angle,
– dans le menu action, choisir transformer et appliquer la rotation créée au quadrilatère désiré,
– créer des vecteurs joignant les sommets d'un de ces quadrilatères,
– créer les différentes translations que l'on voudra appliquer,
– dans le menu action, choisir transformer et appliquer une des translations créées au quadrilatère choisi,
– répéter l'opération en choisissant à chaque fois la bonne translation jusqu'à obtenir tous les quadrilatères translatés voulus,

En ce qui concerne la couleur des objets, celle-ci doit être déterminée avant la création de la figure. Si on n'y pense pas, il n'est plus possible de la modifier par la suite.

Avec `Geonext`, il faut :

1. construire le quadrilatère,
2. construire le milieu d'un de ses côtés,
3. appliquer une symétrie ayant pour centre ce milieu de côté à un sommet du quadrilatère,
4. réitérer l'opération en sélectionnant à chaque fois le centre de symétrie puis le point auquel la symétrie s'applique,
5. construire le nouveau quadrilatère en reliant les points ainsi créés,
6. répéter les quatre précédentes opérations autant de fois qu'il est nécessaire,
7. dans le menu propriétés, choisir le quadrilatère auquel on veut donner une nouvelle couleur, définir cette couleur et l'appliquer,
8. répéter l'opération pour chaque quadrilatère à colorier.

Avec `Sketchpad`, il faut :

1. créer les quatre sommets du quadrilatère, les sélectionner,
2. construire le quadrilatère intérieur à ces sommets,
3. créer un segment reliant deux de ces sommets,
4. construire le point milieu de ce segment,
5. choisir ce point comme centre de rotation,
6. appliquer une rotation de 180 degrés au quadrilatère,
7. marquer un vecteur,
8. appliquer une translation des quadrilatères choisis par le vecteur construit,
9. répéter les deux opérations précédentes pour obtenir le pavage complet,
10. sélectionner les quadrilatères auxquels on veut appliquer la première couleur,
11. appliquer cette couleur,
12. faire de même pour la seconde couleur.

Nous constatons que les logiciels les plus performants pour réaliser cette construction sont `Cabri II+`, `Chamois` et `Geogebra`, puis `Geolabo`. Les constructions à partir de `Cinderella`, `Déclic` et `Geonext` se révèlent beaucoup moins efficaces. À titre de comparaison, avec *Apprenti Géomètre* (version 2), il faut :

1. construire le quadrilatère,
2. le dupliquer,
3. retourner la copie, successivement autour d'un axe horizontal et d'un axe vertical,
4. colorier les deux quadrilatères de couleurs différentes
5. les juxtaposer et les sélectionner simultanément,
6. par duplication simultanée, les reproduire ensemble autant de fois qu'on le désire et assembler les différentes pièces par glissement.

De plus, la méthode de duplication utilisée a pour conséquence que toute modification apportée à l'un des quadrilatères s'applique également aux autres, ce qui signifie qu'on a créé non un seul pavage, mais une famille infinie de « dessins à motif répétitif » [2].

2.12 Conclusions

Nous avons synthétisé les résultats de l'analyse effectuée en plusieurs points repris dans les tableaux ci-dessous. Nous y avons ajouté deux appréciations concernant l'usage de chacun des logiciels dans les niveaux d'enseignement primaire et secondaire. Force est par ailleurs de constater que la plupart des *DGS* sont destinés à l'enseignement secondaire. Il y a donc un réel besoin de concevoir pour l'enseignement primaire des logiciels spécifiques qui permettent d'approcher les concepts géométriques de manière dynamique.

Cette constatation a été à la base de la réalisation d'*Apprenti Géomètre*, lequel a été complété de manière à être également pertinent pour l'enseignement secondaire. Nous détaillerons les fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre* au chapitre 3. Pour l'instant, notons simplement que ce didacticiel propose les *mouvements* dans le plan en plus des *transformations* du plan, ainsi que les opérations de duplication, découpage et fusion des formes géométriques.

Nous avons incorporé une ligne concernant *Apprenti Géomètre* aux tableaux qui suivent, de manière à faciliter les comparaisons.

2.12.1 Tableaux récapitulatifs

Caractéristiques générales

	Convivialité	Ouverture	Pertinence	Service	Global primaire	Global secondaire
Cabri 2+	+	+−	++	++	−	+
Chamois	+	−	+	+	−	+
Cinderella	+−	−	+−	+	−	+
Declic	−	++	+−	+	−	+
Geogebra	+	++	+	+	−	+
Geolabo	+	++	+−	+	+−	+
Geonext	+ −	++	+	−	−	+
Sketchpad	+	+−	++	+	−	+
Apprenti Géomètre V2	+	+	++	+	+	+−

[2] La modification du motif de base peut entraîner le chevauchement de motifs voisins, ce qui ne nous permet plus de parler de *pavage*.

Fonctionnalités instrumentales

	Nouvelle feuille	Ouvrir	Imprimer	Enregistrer (sous)	Format image	Format eps	Capture d'écran	Importer/Exporter	Vers calculatrice	Vers page WEB	Annuler/Refaire	Supprimer	Cacher/Montrer	Colorier	Nommer les objets	Texte/Police	Action – Objet	Objet – Action	Fonc. actives	Répéter	Fichier historique	Param./Préfér.	Menus mobiles	Zoom écran	Zoom sur sélection	Déplacer champ	Cascade/Mosaïque	Aide	Mise à jour	Infos en ligne
Apprenti Géomètre V2	+	+	+	+		+					+	+	+	+			+		+			+			+					+
Cabri II+	+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+			+	+	+		+
Chamois	+	+	+	+	+			+			+	+	+	+	+		+		+			+	+	+		+		+	+	+
Cinderella	+	+	+	+		+		+		+	+	+		+	+		+	+	+					+	+	+	+	+	+	+
Déclic	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		+	+		+		−	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
GeoGebra	+	+	+	+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+		+−		+	+		+		+	+	+	+	+
Geolabo	+	+	+	+	+	+					+	+		+	+	+	+		+		+	+		+	+	+		+	+	+
Geonext	+	+	+	+	+		+	+		+	+	+	+	+	+		+		+		+	+		+	+	+	+	+	+	+
Sketchpad	+	+	+	+	+		+			+	+	+	+	+	+	+		+	+			+		+	+	+	+	+		+

Légende

Pour une question de lisibilité du tableau, certains termes ont été abrégés. Nous les reprenons ici dans leur intégralité.
Format image : enregistrer dans des formats images tels que bmp, jpg, gif, png ou wmf.
Format eps : enregistrer au format eps.
Importer/Exporter : importer une image et exporter vers un logiciel de texte.
Vers calculatrice : exporter vers une calculatrice.
Vers Web : exporter en html et inclure dans une page WEB.
Fonc. actives : fonctionnalités toujours actives.
Répéter : répéter l'opération.
Fichier historique : la description de la construction avec présence d'un fichier historique.
Param./Préfér. : la possibilité de modifier les paramètres et les préférences.
Menus mobiles : la possibilité de déplacer la barre des menus ou la boîte à outils.
Déplacer champ : déplacer le champ visuel.
Mise à jour : possibilité de mettre le logiciel à jour via l'Internet.
Infos en ligne : possibilité d'obtenir des informations via l'Internet.

	Système d'axes	Grille triangulaire	Grille carrée	Grille magnétique	Compte-rendu	Point	Point milieu	Point d'inter.	Segment	Demi-droite	Droite	Bissectrice	Droite parallèle	Droite perp.	Marquer un angle	Projection ortho.	Point sur objet	Médiatrice	Triangle	Polygone	Polygone régulier	Cercle	Arc	Portion de cercle	Demi-cercle	Mesures	Paral./perpend.	Conique
Apprenti Géomètre V2		+	+	+		+	+	+	+	+	+		+	+			+		+	+	+	+	+					
Cabri 2+	+		+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+			+	+	+
Chamois	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+			+	+	+
Cinderella	+		+	+		+	+	+	+		+	+	+	+						+		+				+		+
Déclic	+					+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			+	+	
GeoGebra	+		+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			+		+		+	+	+	+	+	+		+
Geolabo	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+			+	+	
Geonext	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			+	+		+	+	+		+			
Sketchpad	+		+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+			+		+	+			+			

	Trace	Vecteur	Somme vect.	Compas	Lieu	Symétrie axiale	Symétrie centr.	Translation	Rotation	Homothétie	Similitude	Inversion	Réflexion	Barycentre	Fonction	Orthocentre	Cercle inscrit	Cercle circ.	Parabole	Ellipse	Arc elliptique	Tangente	Composition	Polaire	Groupes	Courbe	Projection obl.	Ligne brisée
Apprenti Géomètre V2	+					+	+	+	+					+														
Cabri2+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+															
Chamois		+	+	+	+	+	+	+	+	+				+	+					+				+				
Cinderella				+	+								+															
Déclic		+			+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		+	+	+								+	
Geolabo		+	+		+	+	+	+	+	+	+			+	+	+						+	+			+		
GeoGebra		+			+	+	+	+	+	+												+		+				
Geonext	+	+			+	+	+								+		+	+							+			
Sketchpad	+	+				+	+	+	+				+		+									+				

Légende

Compte-rendu : compte-rendu de construction.
Point d'inter. : point d'intersection.
Projection ortho. : projection orthogonale.
Paral./perpend. : vérification du parallélisme et de la perpendicularité.
Somme vect. : somme de deux vecteurs.
Symétrie centr. : symétrie centrale.
Cercle circ. : cercle circonscrit.
Composition : composée de deux transformations.
Projection obl. : projection oblique.

2.12.2 Géométrie, arithmétique et algèbre

Globalement et paradoxalement, nous constatons que les logiciels de géométrie dynamique comportent souvent des fonctionnalités permettant une approche arithmétique et/ou algébrique des problèmes de géométrie. Ceci est particulièrement vrai pour les logiciels destinés à l'enseignement secondaire et peut être considéré comme un atout à condition d'éviter un effet pervers bien connu de certains cours de géométrie analytique au cours desquels les élèves perdent de vue l'interprétation géométrique de leurs calculs. Pour éviter ce problème, des retours explicites dans le registre géométrique (voir [33]) doivent être exécutés lors des différentes étapes du travail.

2.12.3 Dimension collaborative

La plupart des logiciels que nous avons utilisés ne contiennent pas d'origine de routines permettant le travail en réseau et le partage d'un fichier sur plusieurs postes. Globalement, le travail doit être effectué en local. Cependant, l'utilisation de logiciels spécifiques au partage en réseau — de type `MSN-Messenger` — permet ce partage de fichier et l'accession à la dimension collaborative à distance.

Ceci n'empêche cependant pas le travail collaboratif à partir d'un même poste. Comme nous l'avons montré dans les recherches précédentes à partir du logiciel *Apprenti Géomètre* et comme d'autres recherches l'ont montré, le travail à plusieurs sur un même ordinateur est facteur d'interactions pertinentes.

2.12.4 Formation et suivi

La plupart des logiciels sont fournis avec une rubrique d'aide qui permet d'appréhender les connaissances instrumentales. Il faut cependant reconnaître que l'information ou la formation à l'usage de ces *DGS* est inégalement présente. Nous pensons plus particulièrement à la didactique spécifique pour leur usage.

Chapitre 3

Apprenti Géomètre

3.1 Un micro-monde évolutif

Apprenti Géomètre est un logiciel de géométrie conçu pour être utilisé dès le début de la scolarité. S'adressant ainsi à un public très large, le *micro-monde* d'*Apprenti Géomètre* se doit de respecter le principe énoncé par Balacheff et Kaput, [5] :

Évoluer avec les connaissances de l'élève

Deux méthodes sont utilisées en vue de régir cette évolution.

1. Un premier réglage est fourni d'origine aux utilisateurs sous la forme de fichiers de configuration prédéfinis. Depuis la version 2, ces configurations prédéfinies, appelées « niveaux » sont au nombre de 3.
   – Le niveau A est destiné aux plus jeunes enfants. La géométrie qui y est présentée aux enfants relève essentiellement des niveaux 0 et 1 de van Hiele (voir page 472). L'enfant y a accès à des familles de formes géométriques prédéfinies et indéformables ([1]). Il apprend à reconnaître ces formes et à les déplacer à l'écran. Il peut aussi les dupliquer et leur appliquer des opérations diverses. Le tout permet à l'enseignant de construire des séquences d'activités qui souvent débordent de la géométrie. Ainsi, le thème *grandeur, fractions* et *mesures* est intervenu de façon récurrente dans les développements repris dans les documents [18], [19], [20].
   L'élève peut aussi créer de nouvelles formes — toujours indéformables — par des opérations telles que découper et fusionner. C'est essentiellement la perception qui guide les activités de l'enfant. Il peut néanmoins déjà reconnaître certaines propriétés.
   Si l'on se réfère au texte [34] de R. Duval, les « manières de voir » mises en œuvre par l'élève à ce niveau relèvent de la perception immédiate (point de vue du *botaniste* dans le vocabulaire de Duval) pour certaines activités, mais aussi des points de vue du *constructeur* lors des activités nécessitant d'assembler des figures variées. Les découpages et réassemblages intervenant dans l'étude des fractions (par exemple) relèvent, eux, du point de vue de l'*inventeur-bricoleur*.

([1]) On trouvera dans [65] l'énoncé des principes selon lesquels ces familles ont été constituées.

Ce sont ainsi des activités cognitives très différentes qui sont réalisées dès le début de l'apprentissage de la géométrie.

– Au niveau B l'élève dispose d'outils plus élaborés, notamment la possibilité de créer des formes déformables à volonté. Ces formes sont néanmoins préprogrammées et regroupées en familles (la famille des triangles, celle des quadrilatères, etc) de manière à ce que l'environnement soit organisé rationnellement. L'élève peut de plus réaliser des constructions basées sur le parallélisme et la perpendicularité. Il peut aussi placer des points sur des objets et — en plus des mouvements — utiliser des transformations géométriques telles que *translation*, *rotation* et *symétrie axiale*. Les possibilités d'animation liées à la déformabilité des formes élémentaires, ainsi qu'à la possibiité de déplacer un point placé sur un objet, permettent les démarches de découverte, de vérification, de généralisation décrites au chapitre 1.
  Ce niveau, qui correspond plus ou moins aux niveaux 2 et 3 de van Hiele est destiné à des activités à réaliser à la fin de l'enseignement primaire ou au début de l'enseignement secondaire.
  Il fait à nouveau intervenir les points de vue du constructeur et de l'inventeur-bricoleur défini par Duval, à travers des activités de construction et de « déconstruction dimensionnelle » [(2)].
– Au niveau C (absent dans la version 1 du logiciel), l'élève a accès à des objets de taille infinie : droites, demi-droites, bandes, secteurs angulaires. Ce niveau correspond au niveau 3 de van Hiele, l'élève a atteint le stade de la démonstration, il a besoin des concepts géométriques fondamentaux.
  D'après Duval, c'est aussi le stade où il est capital d'exercer l'élève aux activités de « déconstruction dimensionnelle » destinées par exemple à compléter des figures par des éléments supplémentaires en vue de résoudre des problèmes difficiles. Pour ces activités d'extension de figures, la disponibilité d'objets tels que des droites est indispensable.

2. Un réglage plus fin de la configuration du logiciel est atteint par la possibilité offerte à l'enseignant de décider lui-même des outils et des formes géométriques accessibles à l'élève. À cette fin, presque chaque item des menus de commandes ou des menus de formes peut être à volonté retiré ou réintroduit. De plus, ces configurations « à la carte » peuvent être sauvegardées et réutilisées ultérieurement.

   Une possibilité existe aussi de créer de nouvelles commandes (communément appelées « macros »). L'enseignant peut ainsi étendre les possibilités du logiciel. Il est encore plus fructueux de proposer aux élèves de construire eux-mêmes leurs propres macros. Le but n'est pas seulement d'éviter dans la suite des pertes de temps provoquées par la répétition stéréotypée d'une séquence d'instructions identiques, il est aussi d'obliger l'élève à analyser de façon précise la séquence d'instructions en question. Les macros sont tout naturellement reprises dans les menus et sauvegardées en même temps que la configuration.

(2) Duval appelle « déconstruction dimensionnelle » d'une figure le fait de la compléter, mentalement ou non, par des traits supplémentaires qui permettent de faire apparaître d'autres formes géométriques (*voir page 474*).

3.2 Un instrument d'auto-évaluation

Depuis la version 2 d'*Apprenti Géomètre*, il est possible à l'élève de « relire » le travail qu'il a effectué avec le logiciel en faisant réexécuter une à la fois toutes les opérations qu'il avait lui-même réalisées, et cela bien entendu en ménageant une pause après chaque opération. Cette relecture est rendue possible du fait que le travail de l'élève est enregistré automatiquement dans un fichier *historique* que l'élève et l'enseignant peuvent consulter à tout moment.

L'élève revoyant son propre travail peut ainsi en faire une analyse *a posteriori*, détecter des maladresses, voire des erreurs, imaginer des séquences d'opérations différentes ou plus performantes pour aboutir au même résultat. Ou plus généralement, il peut rechercher quels autres résultats — peut-être imprévus — résulteraient de l'une ou l'autre modification.

Une telle approche — qui relève de la *métacognition* — n'est pas monnaie courante. Elle est quasi-impossible dans un environnement non informatisé, et même dans un tel environnement, elle nécessite un entraînement approprié.

3.3 Le langage d'*Apprenti Géomètre*

On connaît l'importance du symbolisme et plus généralement des représentations d'objets mathématiques : il n'y a pas de raisonnement possible sans un moyen d'expression adéquat. La section 2 de l'annexe A rappelle les concepts de base à ce sujet. Comme les autres logiciels de géométrie dynamique, le registre de base d'*Apprenti Géomètre* est un registre graphique.

À la différence de ces autres logiciels, ses éléments de base sont constitués de formes géométriques prédéfinies. Il est ainsi possible de former des représentations parfaitement identifiables de la plupart des objets géométriques élémentaires, et cela conformément à des règles précises qui ne laissent pas de place à l'erreur puisqu'elles sont prises en charge par le logiciel lui-même.

Les traitements applicables à ces représentations correspondent aux commandes du logiciel. On peut ainsi

- déplacer (glisser, tourner, retourner) les objets à l'écran. Ces opérations ne constituent pas à proprement parler des traitements de ces objets, mais bien des relations inter-objets.
- diviser et découper des objets.
- fusionner des objets.
- appliquer des transformations géométriques (rotation, translation, symétrie axiale) aux objets.
- déformer certains objets de façon à en considérer des cas particuliers ou au contraire à vérifier des propriétés, des invariances.

On sait aussi que l'appropriation de concepts mathématiques passe par l'intermédiaire de *conversions* d'un registre de représentation dans un autre. À cet égard, on peut considérer

que, à la différence de `Logo`, les logiciels de géométrie dynamique sont généralement un peu pauvres. On a vu au paragraphe 1.7.8 que T. Assude et J.-M. Gélis ont compensé cette pauvreté en « entrelaçant » des activités à l'ordinateur et des activités papier-crayon. Ils ont ainsi réalisé des conversions entre le registre graphique de `Cabri` et le registre écrit ou dessiné usuel.

Cette technique est certainement à encourager. Lors des expériences réalisées précédemment avec *Apprenti Géomètre*, une conversion analogue a été réalisée à plusieurs reprises en demandant aux élèves (dans ce cas, comme dans le travail de Assude et Gélis, il s'agissait d'élèves d'école primaire) de rédiger de petites *narrations de recherche*, (voir [20]). Les élèves étant peu habitués à une telle activité, celle-ci doit être soigneusement préparée.

Pour faciliter la réalisation de narrations de recherche, *Apprenti Géomètre* permet à l'utilisateur d'accéder à un mini-traitement de texte. Les textes ainsi rédigés peuvent être sauvegardés en format `rtf` récupérable par `Word`. Ils peuvent alors être complétés par des figures, des tableaux...

Cette possibilité peut être considérée comme un complément utile du fichier historique dont il a été question au paragraphe précédent : l'élève peut rédiger sa narration de recherche au fur et à mesure de sa relecture du fichier historique, sans devoir changer d'outil de travail.

Une autre piste est partiellement présente dans *Apprenti Géomètre*. Les fichiers de sauvegarde des figures réalisées, ainsi que le fichier historique dont il a été question sont en effet rédigés dans un langage compréhensible et obéissent à une syntaxe rigoureuse. Le tout constitue bel et bien un registre de représentation symbolique presque congruent au registre graphique d'*Apprenti Géomètre*. Il serait donc possible d'imaginer une utilisation d'*Apprenti Géomètre* suivant une démarche semblable à `Logo` : des dessins seraient réalisés par l'introduction au clavier de commandes symboliques. Aucune expérience n'ayant été réalisée dans ce sens, et le logiciel ne s'y prêtant que malaisément dans sa forme actuelle, nous n'examinerons pas plus cette possibilité.

3.4 Des objectifs d'*Apprenti Géomètre* à l'école primaire

3.4.1 Le cadre légal

Le logiciel *Apprenti Géomètre* a été conçu par l'équipe de chercheurs du CREM suite à une demande du Ministère de la Communauté française en 2002, demande concernant la mise au point d'un logiciel de mathématiques pour les enfants de 8 à 12 ans.

Cette demande et ce travail s'inscrivaient d'une part dans la perspective du développement d'outils pédagogiques utilisant les nouvelles technologies (*voir* [27], *article 8, alinéa 7*) et d'autre part dans la perspective de la pédagogie différenciée ([27], *article 15*).

La version 1 a fait l'objet d'un contrat avec une firme privée qui l'a réalisée en quelques mois. La deuxième version respecte les objectifs initiaux et développe certaines fonctionnalités qui n'avaient pu être incorporées à la version 1. De plus, comme on l'a déjà signalé au paragraphe 3.2 elle s'incrit dans la perspective de l'évaluation formative, de l'autoévaluation et de la métacognition.

Ainsi, *Apprenti Géomètre* s'intègre dans le cadre légal défini par le document « Décret Missions » de la Communauté française de Belgique, [27].

La volonté des concepteurs est également de répondre aux prescrits des « Socles de compétences », [28].

3.4.2 Le cadre instrumental

L'objectif principal de l'équipe du CREM est de fournir aux enseignants et aux élèves du niveau primaire un contexte de travail qui soit original, stable, adapté aux apprentissages, facilement accessible, complémentaire des contextes que nous appelerons *anciens* que sont le papier–crayon, les formes en carton, le géoplan... et dépourvu de tout distracteur.

Les aspects ergonomiques ont été pensés pour répondre essentiellement à des questions mathématiques et didactiques en évitant les « gadgets » peut-être spectaculaires, mais qui détournent l'attention de l'essentiel. *Apprenti Géomètre* est résolument centré sur l'apprentissage des notions mathématiques et offre donc un cadre de travail centré sur celles-ci.

Apprenti Géomètre a aussi l'objectif d'être innovant. En effet, une simple transposition des outils utilisés dans les contextes *anciens* au contexte informatique serait pauvre en apports conceptuels et procéduraux. *Apprenti Géomètre* offre donc des possibilités de manipulation de formes géométriques difficilement envisageables dans les contextes *anciens*. Les plus importantes sont :
- la disponibilité explicite des formes et des outils
- le caractère stable des formes standards
- la déformation continue des formes libres propice à l'étude de leurs caractéristiques et à l'observation des familles de figures.

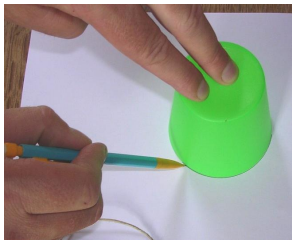
Nous reviendrons sur ces caractéristiques aux sections suivantes. Remarquons cependant que cette mise à disposition explicite d'outils correspond bien à l'enseignement par situations-problèmes exposé dans le document « Socles de compétences » ([28], *page 23*). Selon la théorie des situations didactiques, [14], il est opportun de placer les élèves dans un environnement qui leur permet de choisir les outils les plus pertinents pour résoudre une situation-problème. C'est précisément ce qu'*Apprenti Géomètre* permet de réaliser. Un ensemble de concepts mathématiques accessibles aux élèves du primaire est disponible dans les différents menus. Ces concepts peuvent être utilisés comme outils de résolution des problèmes proposés dans une perspective correspondant à la description faite par R. Douady, [31], en termes de *dialectique outil-objet*.

3.4.3 Le cadre conceptuel

À l'école primaire, ce logiciel est particulièrement adapté à la construction des concepts de *grandeurs géométriques*, de *fractions* et de *mesures*, ainsi que pour l'apprentissage des premiers éléments de géométrie euclidienne. Cet objectif peut être atteint sans que le logiciel comporte des fonctionnalités permettant une mesure directe, dans une unité conventionnelle, comme tous les autres logiciels que nous avons rencontrés au chapitre 2.

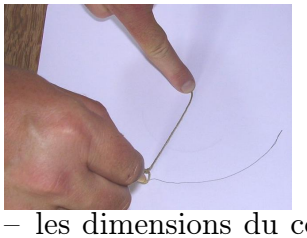
À la section précédente, nous avons mentionné le fait que *Apprenti Géomètre* est conçu comme un complément aux contextes anciens et est centré essentiellement sur les savoirs mathématiques. Prenons un exemple pour expliciter ceci : le *cercle*. Dans l'enseignement primaire, les élèves apprennent à tracer des cercles, d'abord sans doute en contournant des gabarits, ensuite en utilisant peut-être une ficelle, certainement un compas. Ces procédures confrontent-elles les élèves aux mêmes savoirs, aux mêmes représentations des cercles ?

Lorsque l'élève contourne un gabarit,



- le cercle est défini par avance par le gabarit qui en fixe les dimensions ;
- le cercle se dessine progressivement, il « prend forme » au fur et à mesure du tracé ; ainsi l'élève perçoit le cercle comme un arc qui s'allonge progressivement puis se referme ;
- le positionnement du cercle s'effectue en fonction de son contour ;
- l'outil ne permet de tracer que des cercles d'une dimension donnée ;
- le savoir liés à ces tracés est la reconnaissance de la forme générale des cercles.

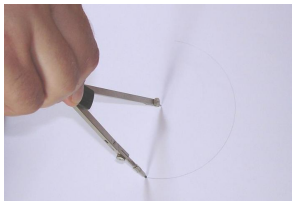
Lorsque l'élève trace un cercle avec une corde,



- les dimensions du cercle sont définies par avance par l'élève qui choisit la longueur de la ficelle ;
- comme dans le cas du gabarit, l'élève perçoit le cercle comme un arc qui s'allonge progressivement puis se referme ;
- le cercle est positionné en fonction de son centre ;
- les dimensions du cercle sont bien fixées *a priori* car pour débuter le tracé de l'arc il faut avoir défini au préalable les dimensions du cercle, en l'occurence son rayon ;
- le même outil — la ficelle — permet de tracer des cercles de dimensions différentes ;
- les savoirs liés à ces tracés sont la reconnaissance du rayon des cercles — représenté par le morceau de corde et la présence d'un centre.

Notons une autre différence entre le gabarit et la corde, à l'école en tout cas : ces dernières permettent de tracer des cercles de rayon assez grand. Par exemple, un cercle dans la cour de récréation pour tracer un terrain de basket.

Lorsque l'élève trace un cercle avec un compas,

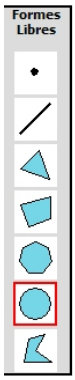


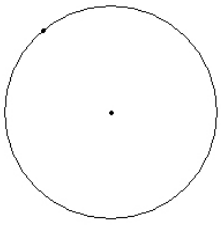
– les dimensions du cercle sont définies par avance par l'élève qui fixe l'écartement des branches du compas ;
– comme dans le cas du gabarit et de la corde, l'élève perçoit le cercle comme un arc qui s'allonge progressivement puis se referme ;
– le cercle est positionné en fonction de son centre ;
– le même outil — le compas — permet de tracer des cercles de dimensions différentes ;
– les savoirs liés à ces tracés sont la reconnaissance du rayon des cercles — représenté par la distance entre la pointe sèche du compas et le crayon et la présence d'un centre.

À la différence de la ficelle, le compas ne possède pas d'élément concret représentant le rayon. L'élève ne le voit plus. Il s'agit ici d'un niveau d'abstraction supplémentaire du concept de rayon.

L'utilisation de la ficelle ou du compas augmente donc le champ d'expérimentation des cercles. L'élève peut tracer des cercles en choisissant lui-même leurs dimensions.

Ces outils peuvent également être utilisés dans le cadre de la comparaison ou du report de longueurs comme nous le montrons au chapitre 8.1. Cependant, ce sont bien la corde ou le compas qui servent au report ou à la comparaison, non pas les cercles. Et c'est précisément l'égalité de la distance du centre à n'importe quel point du cercle qui constitue la définition mathématique de cet objet.





Observons maintenant un élève qui trace un cercle à l'aide d'*Apprenti Géomètre*,
– le choix s'effectue sur l'objet mathématique lui-même, non sur l'outil utilisé pour le tracer ;
– les dimensions du cercle ne sont pas définies *a priori* — avant que le tracé ne débute — si ce n'est dans l'intention ;
– le cercle se trace directement, ce n'est plus un arc qui s'allonge mais un cercle qui grandit ;
– le cercle est positionné en fonction de son centre ;
– l'élève augmente ou diminue la longueur du rayon de manière continue jusqu'à ce que son cercle ait la grandeur désirée ;
– le savoir associé est la détermination d'un cercle par deux points plutôt que par un point et un nombre.

Signalons un second outil informatique qui permet également de desiner un cercle : le langage `Logo`. Dans ce cas
– l'élève s'exprime dans un langage formalisé ;
– la longueur du cercle est fixée *a priori* ;
– le cercle est un arc qui s'allonge et se referme ;
– le cercle est positionné par un de ses points et la tangente en ce point.

Pour plus de détails, on consultera la section 6.3.4.

3.4.4 Le cadre didactique

Les recherches, les expérimentations et les rapports des différents utilisateurs de logiciels dynamiques semblent montrer que dès qu'un recours au calcul est possible pour résoudre un problème de géométrie, les élèves ont tendance à choisir cette voie plutôt que de s'investir dans une démarche géométrique. Il en va de même lors de l'étude de situations ayant pour objectif la construction du concept de mesure.

Par ailleurs, il apparaît (voir par exemple les résultats du pré-test mentionnés au chapitre 10) que certains élèves éprouvent des difficultés à appliquer de façon pertinente les formules de calcul de périmètre et d'aire qui leur ont été enseignées. Dès lors, il peut être opportun de préparer l'enseignement de ces formules en proposant à l'élève des activités qualitatives de comparaison des aires de diverses figures, par découpage et assemblage. L'aspect quantitatif ne pouvant être négligé, son introduction reposerait sur l'utilisation de quadrillages constitués à l'aide d'une unité d'aire. Ces différentes activités permettraient d'asseoir solidement la transition vers les formules traditionnelles de périmètre et d'aire.

Apprenti Géomètre permet aisément à l'instituteur de construire des séquences d'activités prenant en compte les objectifs qui viennent d'être décrits. On consultera à cet égard les chapitres 7 et 8.

3.5 Des objectifs d'*Apprenti Géomètre* à l'école secondaire

Voici plusieurs années que les programmes des différents réseaux d'enseignement secondaire préconisent le recours aux nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques. A titre d'exemples, voici ce que l'on peut lire dans le programme du premier degré des écoles de la Communauté Française, [30] :

> *(...) il est urgent que les professeurs de mathématiques adaptent leur enseignement aux nouvelles technologies. L'ordinateur et la calculatrice sont devenus des piliers de notre société, le mathématicien ne peut échapper à leur utilisation.*
>
> *L'utilisation de l'ordinateur comme outil pédagogique permettra au professeur d'apporter un éclairage nouveau sur les mathématiques.*

et dans celui des écoles de l'enseignement libre confessionnel, [29] :

> *Actuellement, l'utilisation de logiciels peut contribuer efficacement à la formation géométrique. Cette utilisation ne peut cependant pas se substituer complètement aux constructions manuelles.*

L'utilisation d'*Apprenti Géomètre* est donc parfaitement dans l'esprit des textes officiels. Elle permettra en outre d'exercer bon nombre de compétences inscrites dans les programmes et dans le document *Socles de compétences* [28] commun à tous les réseaux.

3.5.1 Les socles de compétences

Les directives officielles, [30], énoncent clairement

> *L'enseignement au premier degré du secondaire devra se poursuivre dans la cohérence et la continuité en se référant au Socles de compétences*

Parmi les compétences-socles qui doivent être certifiées à la fin du premier degré de l'enseignement secondaire ou qui doivent être entretenues au cours de celui-ci, nous avons relevé celles pour lesquelles l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* nous semble particulièrement pertinente ([3]).

Dans le domaine des solides et des figures :

1. *Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer sur base des éléments de symétrie pour les figures et sur base de leurs éléments caractéristiques pour les solides.*
2. *Tracer des figures simples en lien avec les propriétés des figures et des instruments y compris le rapporteur.*
3. *Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.*
4. *Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.*
5. *Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités, reconnaître et caractériser une translation, une symétrie axiale et une rotation.*
6. *Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.*
7. *Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures, en s'appuyant sur des propriétés de proportionnalité et de parallélisme.*
8. *Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.*
9. *Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie pour énoncer et argumenter.*

Dans le domaine des grandeurs :

1. *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*
2. *Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.*

([3]) De façon à nous concentrer sur la géométrie, nous avons choisi de nous limiter aux rubriques des socles de compétences intitulées *Les solides et les figures* et *Les grandeurs*. Rappelons toutefois qu'*Apprenti Géomètre* trouve également des applications dans le domaine des nombres (les activités élaborées pour l'enseignement primaire le montrent à suffisance).

3. Fractionner des objets en vue des les comparer.

Précisons maintenant le rôle qu'*Apprenti Géomètre* peut jouer par rapport à ces exigences décrétales.

3.5.2 Les figures et les transformations du plan

Dans la publication du CREM intitulée *Formes et Mouvements*, [55], nous pouvons lire :

> *Les figures et les transformations nous semblent être, d'un bout à l'autre de l'enseignement, et dans le fond de la géométrie elle-même, les deux faces indissociables de la géométrie. (...)*
>
> *La géométrie est un dialogue ininterrompu entre les figures et les transformations*

Il n'est donc pas surprenant que les formes géométriques et leurs propriétés ainsi que les transformations du plan occupent une place de choix dans le programme de géométrie du début du secondaire. Voyons comment *Apprenti Géomètre* s'insère dans un enseignement pensé selon ces deux grands axes.

Les figures

Construire des figures planes, organiser leurs propriétés et démontrer sont des objectifs communs aux différents programmes. Notre logiciel, et particulièrement son niveau B, pourra contribuer à leur réalisation grâce à la possibilité qu'il offre d'explorer rapidement et à volonté les différentes familles de figures. Il sera un outil efficace pour dégager les principales propriétés de celles-ci et découvrir les liens qui unissent les figures d'une même famille, ainsi que pour parcourir l'ensemble de tous les rectangles, l'ensemble de tous les triangles isocèles...

Plus concrètement, on trouvera dans *Formes et Mouvements* une proposition d'enseignement de la géométrie à laquelle *Apprenti Géomètre* pourra parfaitement s'intégrer. Elle est basée sur les acquis du primaire, dont les élèves sortent généralement avec une connaissance satisfaisante des figures, étant capables de les reconnaître et de les nommer. Néanmoins, beaucoup de travail reste à faire quant à leurs propriétés. C'est pourquoi l'ouvrage susmentionné propose des situations problèmes partant des propriétés élémentaires des figures et de quelques mouvements simples pour aborder une géométrie plus structurée, plus argumentée. Les figures sont analysées en profondeur et leurs propriétés déterminantes sont clairement mises en évidence. Le travail débouche sur un large éventail de propriétés constituant un bagage utile à l'apprentissage de la démonstration ([4]).

Une des séquences d'activités proposées pour réaliser une synthèse des propriétés importantes des figures planes est l'assemblage de triangles isométriques (les triangles de départ

([4]) Ce type de travail permet à l'évidence d'exercer les compétences transversales reprises sous la rubrique « Structurer, synthétiser »

peuvent être quelconques, rectangles, rectangles isocèles...) Les différents quadrilatères obtenus sont décrits minutieusement et leurs conditions déterminantes énoncées. Il est possible d'entreprendre ce genre de travail avec le logiciel seul. Toutefois, il semble bien plus souhaitable de considérer *Apprenti Géomètre* comme un constituant parmi d'autres d'un environnement pédagogique tant il est vrai que les manipulations et les constructions sont essentielles dans l'apprentissage de la géométrie, ainsi qu'on le souligne dans [55] :

> *Cet apprentissage doit d'abord passer par les mains. (...)*
>
> *La manipulation, l'observation et la construction d'objets sont des modalités normales et bien souvent incontournables de la pensée géométrique.*

Remarquons encore que les conditions déterminantes des différents quadrilatères apparaissent bien dans le logiciel, ainsi que le soulignent Rouche et Skilbecq dans [66] :

> *Le mode de construction des polygones dans le kit libre met en évidence les conditions déterminantes de ceux-ci.*

Tout au long du parcours d'apprentissage proposé dans [55], il est régulièrement fait appel aux constructions à l'aide des instruments traditionnels. Elles restent en effet nécessaires car elles obligent l'élève à observer, à analyser afin de découvrir et de s'approprier les propriétés d'une figure. Celles-ci sont ensuite mises en oeuvre, dans une confrontation avec les propriétés des instruments, pour réaliser la construction demandée. Ici encore, *Apprenti Géomètre* peut s'avérer être un auxiliaire précieux, un soutien appréciable aux techniques de constructions à la règle et au compas. Un élève en difficulté avec les instruments peut en effet réaliser la construction à l'aide du logiciel et ainsi trouver un fil conducteur pour son travail sur papier. Inversement, le logiciel peut servir d'outil de vérification d'une construction achevée manuellement.

Enfin, comme nous pouvons encore le lire dans un des textes officiels, [29] :

> *Il est intéressant de confronter les différentes techniques possibles et le choix des instruments pour une même construction. A cet effet, l'utilisation d'un logiciel de constructions géométriques qui fournit un choix d'outils limité est particulièrement recommandé.*

Les menus d'*Apprenti Géomètre* étant entièrement configurables, l'enseignant pourra choisir quels outils il donne aux élèves.

Les transformations

Traduire des mouvements et des agrandissements de figures géométriques en termes de transformations est un autre grand objectif des programmes.

Il s'agit là d'un terrain sur lequel *Apprenti Géomètre* peut encore être efficace de différentes façons. Tout d'abord, grâce aux mouvements (`Glisser, Tourner, Retourner`) auxquels on adjoindra `Zoomer`, il est possible d'aborder les transformations sur un mode concret. Cette démarche est d'ailleurs explicitement encouragée dans [29]

> *On apprend à reconnaître toutes les isométries et à les décrire en termes de mouvements tels que glisser ou tourner.*

et dans [30]

> *Reconnaître l'isométrie qui permet de passer de l'objet à son image. On aura recours au travail expérimental (pliage, papier calque, pavage ...) et à l'outil informatique pour faciliter ces découvertes.*

L'étape suivante est l'utilisation des transformations du niveau B (`Translation, Rotation` et `Symétrie axiale`). Elles se situent dans un autre cadre que les mouvements, permettent de changer de « lieu », et sont aussi plus techniques : l'élève doit saisir quels sont les éléments déterminants de chacune d'elles.

Avec *Apprenti Géomètre* les transformations sont surtout saisies en extension. En effet, il est possible de visualiser beaucoup de cas de figures grâce aux possibilités de déformation continue offertes par le logiciel. Ces déformations peuvent être appliquées à la forme de départ mais aussi aux éléments déterminants de la transformation. A nouveau, le parcours rapide et à volonté de ces cas par l'élève peut l'amener à comprendre les effets d'une transformation et l'aider à réaliser des constructions aux instruments.

Pour permettre aux élèves de s'approprier plus avant les isométries, il est également intéressant de leur demander d'utiliser les transformations pour amener une forme sur une autre forme superposable à la première, avec ou sans retournement (le logiciel ayant été préalablement configuré de façon à permettre l'usage du menu `Transformations` mais non du menu `Mouvements`).

A un stade encore plus élevé, *Apprenti Géomètre* permettra aussi, à l'aide de fichiers dynamiques ([5]) , d'explorer toutes les compositions des isométries du plan. Voir de nombreux exemples aidera les élèves à émettre des conjectures au sujet des théorèmes de compositions (pour une présentation détaillée de ces théorèmes, on consultera par exemple l'ouvrage *L'Archipel des isométries*, [41], du Groupe d'Enseignement Mathématique).

Dans sa version actuelle, *Apprenti Géomètre* se prête moins à l'étude des homothéties que des isométries. Toutefois, la fonctionnalité `Zoomer` permet d'explorer cette transformation dans l'esprit des programmes :

> *On approche les homothéties par le biais d'agrandissements et de réductions [...] [29]*

> *Montrer l'influence subie par le périmètre et l'aire d'une figure lorsqu'on multiplie ses dimensions par un certain coefficient,* [30].

La comparaison d'une figure avec une de ses reproductions à l'échelle peut en effet mener à des constatations en termes de rapports de longueurs et d'aires, ainsi qu'à la détermination du centre d'une homothétie.

([5]) Un fichier dynamique est défini dans [66] comme étant une « figure construite en enchaînant (en liant) des créations de figures et des transformations, de sorte que le résultat puisse à la fin se transformer comme un tout »

3.5.3 La présente recherche : les formules d'aires

Une autre intention des programmes, [30], est d'amener les élèves à

> *Déterminer les aires en s'aidant de décompositions, de découpages et de recollements, de quadrillages et d'outils informatiques*

Apprenti Géomètre, avec ses outils de découpage, d'ajustage et de fusion de formes géométriques vient à point nommé. Dans le cadre de l'apprentissage des formules d'aires, ces fonctionnalités sont fondamentales. Elles permettent en effet de transformer une figure en une autre dont l'aire est plus facile à calculer (par exemple, en découpant un trapèze selon la médiane parallèle aux bases, on peut construire un parallélogramme de même aire). Cette approche est développée au chapitre 9 en vue d'établir les formules relatives aux formes géométriques élémentaires.

De façon plus générale, le but est d'amener l'élève à élaborer une stratégie de calcul pour trouver l'aire d'une figure complexe. Amener le jeune à imaginer une suite de découpes et de recompositions et à la présenter dans un ordre logique est un objectif plus ambitieux et sans doute difficile à atteindre. Le travail demandé s'apparente en effet à une démonstration et rompt avec une pratique encore trop souvent présente de mémorisation passive et d'application automatique de formules. Encourager ce comportement est certainement possible grâce à *Apprenti Géomètre* et à des activités bien choisies. Nous espérons ainsi susciter d'autres réactions que « quelle est la formule ? » lorsque l'élève se trouve devant une forme inhabituelle (ou même habituelle : pensons à l'exemple du trapèze...).

A l'instar d'un des programmes, [30], où l'on peut lire

> *apprendre à définir est plus important qu'apprendre de multiples définitions*

nous écrivons volontiers

> *apprendre à construire une formule est plus important qu'apprendre de multiples formules*

L'apprentissage des décompositions et recompositions de figures pourra être réinvesti plus tard dans le parcours scolaire, lors des démonstrations « chinoises » (par puzzles) du théorème de Pythagore .

3.5.4 Géométrie et esthétique

Apprenti Géomètre pouvant être vu comme un outil de création artistique (voir à ce sujet [66]), nous pouvons aussi lui attribuer comme objectif de contribuer à développer le sentiment esthétique chez les jeunes et de leur faire prendre conscience des liens étroits entre l'art et la géométrie. *Apprenti Géomètre* peut ainsi parfaitement faire partie de l'environnement d'un cours d'arts plastiques.

3.5.5 Conclusion

Les objectifs attribuables à *Apprenti Géomètre* dans le secondaire sont nombreux et variés ainsi que nous avons tenté de le montrer ci-dessus. Au-delà de ses spécificités, essentiellement liées aux opérations sur les formes géométriques, nous pouvons conclure qu'*Apprenti Géomètre* peut se voir attribuer les objectifs décrits au chapitre 1 dans le paragraphe consacré à `Cabri` : il s'agit d'amener l'élève à exercer des démarches de *découverte*, de *généralisation*, de *vérification*, de *validation*...

3.6 *Apprenti Géomètre* résiste-t-il au test ?

Ayant au chapitre précédent soumis à notre critique plusieurs logiciels de géométrie dynamique, nous avons joué le jeu et analysé *Apprenti Géomètre* selon les mêmes critères.

Les caractéristiques techniques d'*Apprenti Géomètre* ayant été à maintes reprises explicitées dans les rapports de recherche précédents et dans différentes publications, nous ne les reprendrons pas ici. Ajoutons néanmoins que *Apprenti Géomètre* n'est pas un logiciel libre tout en étant gratuit. Il peut être téléchargé à l'adresse `www.crem.be`.

Comme les autres logiciels de géométrie dynamique, *Apprenti Géomètre* est interactif : il permet à chaque utilisateur de choisir sa stratégie de résolution d'un problème proposé. Seule la limitation des fonctionnalités accessibles peut exercer une influence sur la stratégie choisie par l'utilisateur. C'est donc plus l'activité en elle-même et l'obligation formulée éventuellement par l'enseignant de travailler à partir de tel ou tel environnement qui peuvent restreindre les possibilités de choix de stratégies.

Convivialité

L'interface du logiciel a été définie pour être la plus épurée possible afin d'éviter tout élément pouvant perturber la réflexion de l'utilisateur. Nous pensons particulièrement à des images animées, des sons... Au niveau A, les noms des différentes formes géométriques sont associés à des icônes qui aident l'élève à les mémoriser. La présence d'icônes associées aux noms de mouvements pourait se révéler également utile.

Les expérimentations menées précédemment laissent penser que *Apprenti Géomètre* est assez convivial. La prise en main de ce didacticiel se réalise aisément et dans un temps relativement réduit, tant pour les élèves que pour les enseignants.

Ouverture

Ainsi qu'il a été signalé au paragraphe 3.1, *Apprenti Géomètre* peut être considéré comme un logiciel « ouvert » car il offre la possibilité de constuire son propre environnement de travail, en supplément des niveaux déjà prévus à l'origine. Tout enseignant peut ainsi construire un nouvel environnement de travail adéquat à l'objectif qu'il s'est fixé et au public d'apprenants concernés.

Par ailleurs, comme pour la plupart des logiciels de géométrie dynamique que nous avons expérimentés, l'application, intrinsèquement, ne permet pas le travail collaboratif sur un

même fichier à partir de plusieurs postes.

Pertinence

Comme nous l'avons déjà explicité dans les rapports précédents, *Apprenti Géomètre* a été conçu au départ d'un cahier des charges précisant le public ciblé et les concepts mathématiques à rencontrer. Ce cahier des charges a été rédigé en tenant compte des curricula officiels en Communauté française de Belgique. Cependant, bien que les concepts visés par le logiciel soient effectivement présents dans ces curricula, la manière avec laquelle ils peuvent être rencontrés par le logiciel est relativement éloignée des pratiques quotidiennes des enseignants. Ceci influence pour une part importante l'intégration du logiciel dans les classes, comme celle de tous les logiciels de géométrie dynamique.

Les fonctionnalités présentes dans *Apprenti Géomètre* sont adaptées à une appréhension intuitive des mathématiques. Les deux niveaux A et B permettent de rencontrer des apprentissages propres au niveau d'enseignement initialement ciblé, à savoir les quatre dernières années de l'enseignement primaire. Le niveau C permet d'atteindre ce résultat pour l'enseignement secondaire.

Apprenti Géomètre contient plusieurs menus dans lesquels sont rassemblées des fonctionnalités correspondant aux concepts visés. Ainsi, pour construire les concepts de grandeurs, fractions et mesures, des fonctionnalités telles que `Diviser`, `Découper`, `Fusionner` et `Dupliquer` sont mises à la disposition des utilisateurs.

De même, dans une approche intuitive des concepts géométriques, plus particulièrement des déplacements dans le plan, *Apprenti Géomètre* contient deux menus proposant l'un des *mouvements* tels que `Glisser`, `Tourner` et `Retourner`, l'autre des *transformations* du plan telles que `Translation`, `Rotation` (notamment `Demi-tour` et `Quart de tour`) et `Symétrie axiale`.

Service

Un site Internet a été mis en ligne afin que tout utilisateur puisse télécharger à la fois le logiciel et les documents d'accompagnement associés. Ces derniers peuvent être des rapports de recherche, de nouvelles activités à réaliser en classe, de nouveaux fichiers informatiques,... Ces documents sont assez complets puisqu'ils comprennent un mode d'emploi, des études épistémologiques, des activités à réaliser en classe pour des élèves de 8 à 12 ans...

Une adresse courriel permet également de poser des questions, d'émettre un avis...

3.7 Des activités d'initiation

La première rencontre d'un utilisateur avec un logiciel ne se déroule normalement pas dans un contexte de travail normal. L'utilisateur doit d'abord « prendre en mains » ce logiciel qu'il ne connaît pas. En d'autre termes, il doit en apprendre le mode d'emploi.

Aussi, dans cette section nous commenterons quelques séances d'initiation qui ont eu

lieu, certaines dans des classes d'école primaire, d'autres dans des classes de première secondaire. Dans chaque cas, il n'a pas été nécessaire que l'initiation s'étende sur plus de deux heures de cours.

Précisons que ces séances se sont déroulées durant l'année scolaire 2005–2006, alors que la version 2 d'*Apprenti Géomètre* n'était pas encore disponible. Elles ont été donc été réalisées avec la version 1. Dans les paragraphes qui suivent, nous avons cependant éliminé les éléments qui ont perdu leur pertinence dans le cadre d'une initiation à la version 2.

3.7.1 À l'école primaire

Le niveau A

L'activité d'initiation aux fonctionnalités du niveau A a été réalisée dans des classes de sixième primaire à La Louvière et à Seraing.

Dans la classe de Seraing, il a été proposé aux élèves dans un premier temps de faire apparaître à l'écran le plus de formes géométriques différentes possible, ensuite de créer un dessin figuratif au choix. Les élèves en sont venus très vite à poser des questions qui leur permettent d'aller au-delà des activités proposées.

Dans la classe de La Louvière, nous avons proposé aux élèves quelques figures parmi lesquelles ils choisissaient celles qu'ils voulaient reproduire. Les figures étaient les suivantes ([6]) :

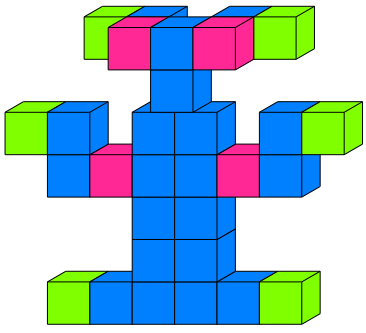


Fig. 3.1

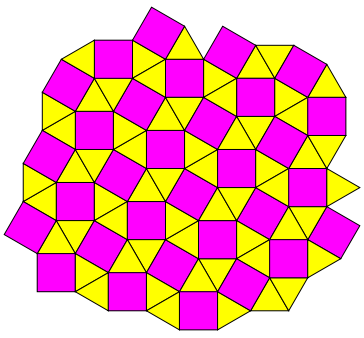


Fig. 3.2

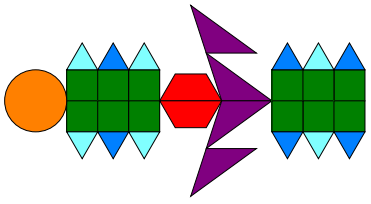


Fig. 3.3

([6]) Nous éliminons de la liste une « figure impossible » qui a posé trop de difficultés conceptuelles pour les élèves et ne peut donc être présentée comme modèle.

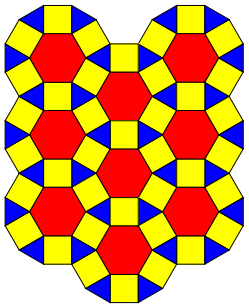


Fig. 3.4

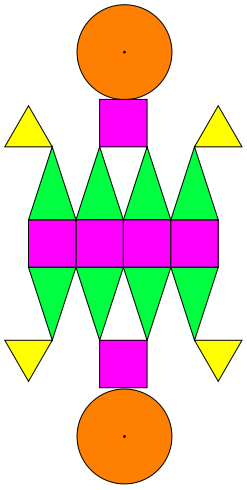


Fig. 3.5

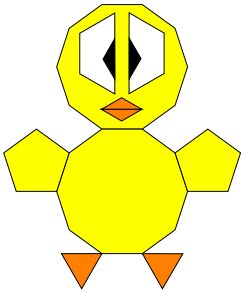


Fig. 3.6

Les constats effectués dans ces deux classes correspondent à trois dimensions que nous avons déjà eu l'occasion de mettre en évidence dans les recherches précédentes (7) : une première s'intéresse au domaine affectif, une deuxième au domaine instrumental et la troisième au domaine conceptuel.

La dimension affective

Globalement, *Apprenti Géomètre* est bien accepté et apprécié par les élèves. Ils aiment cet environnement informatique coloré qui leur permet de déplacer et modifier des formes géométriques. Cette activité constitue une rupture importante avec leur contexte habituel de travail dans les domaines mathématiques concernés. Entre autres conséquences, elle nourrit leur intérêt pour ce didacticiel. Cet aspect affectif s'exprime aussi par le fait que beaucoup d'élèves choisissent de reproduire des dessins figuratifs comme le canard.

Tout ceci n'est cependant pas mesurable dans l'état actuel de nos recherches.

La dimension instrumentale

Nous constatons à nouveau que la prise en main du didacticiel est assez simple et rapide. Dès la première séance, les élèves posent des questions qui permettent de dépasser les activités proposées.

En dehors du repérage des fonctionnalités dans les menus, la principale difficulté rencontrée est de comprendre et mémoriser qu'une fonctionnalité reste active aussi longtemps que l'on n'en choisit pas une nouvelle.

La dimension conceptuelle

Aucun objectif conceptuel particulier n'est associé à l'activité d'initiation au logiciel. Cependant, celui-ci peut mettre les élèves en présence de concepts mathématiques qu'ils ne maîtrisent pas toujours convenablement.

(7) Pour plus de détails, on pourra se référer aux documents [18], [19] et [20]

Ainsi, les deux modèles de cubes accessibles au niveau A ont posé quelques difficultés à certains élèves.
Le premier modèle est connu sous le nom de « perspective cavalière » (*Fig. 3.7*). Il se caractérise par le fait que la face avant du cube ainsi que la face arrière, quand elle est visible, sont représentées en vraie grandeur.

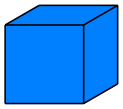


Fig. 3.7

Le seconde modèle (*Fig. 3.8*) obéit à des règles très différentes : le cube est placé « sur sa pointe » et vu d'en haut ou de côté. Cela revient à le projeter orthogonalement sur un plan passant par le centre et perpendiculaire à une diagonale.

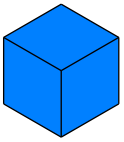


Fig. 3.8

Il n'est pas étonnant que les élèves confondant des représentations aussi différentes aient éprouvé de grosses difficultés. Ils ont essayé, sans succès, de les résoudre en utilisant les fonctionnalités « arrière-plan » et « avant-plan ».

D'autres difficultés sont apparues lors de la réalisation de pavages « semi-réguliers », dans lesquels il est nécessaire de reconnaître une structure géométrique récurrente.

Ainsi un élève tente de reproduire le pavage de la figure 3.4 non pas en juxtaposant des formes géométriques mais en partant d'un dodécagone alors que les dodécagones de cette figure ne sont pas juxtaposés. Bien au contraire, ils se chevauchent. Ce sont donc des triangles, carrés et hexagones qu'il convient d'assembler.

Les difficultés qui viennent d'être mentionnées posent aussi la question de savoir ce que les élèves voient ou distinguent lorsqu'on leur présente une figure géométrique. Nous reviendrons sur cette question au chapitre 10.

Le niveau B

L'activité d'initiation au niveau B été réalisée dans la classe de La Louvière. Les élèves ayant été répartis en « trios », le travail demandé consistait à reproduire la figure suivante :

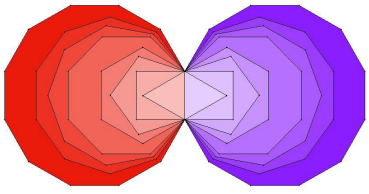


Fig. 3.9

Outre le côté affectif mis en évidence lors de l'activité d'initiation au niveau A, ce sont plus particulièrement les difficultés instrumentales et conceptuelles qui ont retenu notre attention lors de cette séance de travail.

La construction de la figure proposée est facilitée si on y reconnaît une structure géométrique. Cependant cette reconnaissance est liée à des connaissances mathématiques,

notamment les notions de symétrie axiale et d'axe de symétrie.

De plus, l'intérêt de reconnaître la symétrie de la figure n'apparaît réellement que si l'on sait que le didacticiel possède une fonctionnalité qui permet de construire une forme géométrique symétrique d'une forme donnée.

L'activité proposée est donc quelque peu plus complexe que celle utilisée pour l'initiation au niveau A. Les difficultés qu'elle contient sont plus nombreuses et relèvent des domaines conceptuel et instrumental, dans ce cas intimement liés. Pour ces raisons, nos commentaires ne seront pas répartis dans deux sections différentes mais toucheront aux deux domaines simultanément.

- En ce début d'utilisation des formes libres, il est nécessaire de préciser aux élèves que, contrairement au contexte « papier-crayon » où l'on trace des lignes pour construire des figures, dans *Apprenti Géomètre*, les formes régulières s'obtiennent directement en cliquant sur l'écran afin d'en déterminer la position, la grandeur et l'orientation. Il ne s'agit donc pas de construire des formes géométriques en assemblant des segments, comme un groupe le suggérait au départ.
- Il est également nécessaire de mettre en évidence que les polygones réguliers se construisent dans un sens particulier, le sens trigonométrique (ou anti-horlogique). Par exemple, dessiner un carré en parcourir un segment vertical de haut en bas place le carré à droite du segment ; en le parcourant le segment de bas en haut le carré est placé à gauche.
- Quatre trios sur sept commencent la construction de la figure par l'extérieur (dodécagone), deux groupes par l'intérieur (triangle) ; dans le septième groupe, les élèves veulent construire le rectangle central à l'aide de segments.
- La structure géométrique de la figure n'est pas appréhendée de la même manière par tous les groupes d'élèves. Plus particulièrement, deux situations sont rencontrées.
  - D'abord celle d'un trio qui souhaite construire le rectangle central constitué par les deux carrés juxtaposés. La difficulté principale résulte de ce qu'une dimension de ce rectangle doit être double de l'autre.
  - Un autre élève souhaite construire d'abord le losange constitué des deux triangles équilatéraux. Une difficulté analogue à la précédente résulte de ce que ce losange doit être décomposable en deux triangles équilatéraux. Sa petite diagonale doit donc avoir même longueur que ses côtés.

  Pour ces deux constructions, l'usage des carrés est une voie intéressante et assure un résultat correct. Notons que dans ce cas, le dessin du rectangle n'est plus nécessaire.
- Une autre procédure a été proposée par les élèves. Il s'agit (*Fig. 3.10*)
  1. de dessiner un rectangle et de marquer le point milieu d'une longueur à l'aide de la fonctionnalité « diviser en 2 » ;
  2. de tracer un cercle dont le centre est un sommet du rectangle et qui a pour rayon la largeur du rectangle ;
  3. de modifier la longueur du rectangle pour placer le point milieu de la longueur sur le cercle.

Fig. 3.10

Cette procédure ne peut être validée car placer le point milieu du grand côté sur le cercle se fait au jugé. La construction ne résisterait donc pas à une modification de la figure.

- Trois trios réalisent d'abord la moitié de la figure située d'un des côtés de l'axe de symétrie. Trois autres réalisent les deux côtés simultanément. Nous ne pouvons argumenter en faveur du choix de l'une ou l'autre de ces démarches. Choisir la procédure qui consiste à commencer la reproduction par un côté uniquement n'implique pas systématiquement que la symétrie de la figure soit perçue *a priori*.
- La plupart des dessins manquent de précision : les polygones n'ont pas exactement un côté commun. Ceci peut aisément être mis en évidence lorsque l'on déplace un sommet d'une des formes : la figure générale n'est pas conservée.

3.7.2 En première secondaire

L'initiation décrite ci-dessous a été réalisée en mai 2006, dans une classe de première année de l'Institut Sainte-Marie de La Louvière. Le groupe comptait 18 élèves, uniquement des filles.

Lors de la première période de cours, l'animateur présente brièvement le logiciel aux élèves. En effet, ne disposant que de peu de temps en cette fin d'année scolaire, son intention est de les amener rapidement à utiliser le logiciel.

La présentation, réalisée dans la salle de projection du centre cybermédia de l'école, dure environ un quart d'heure. Tant le niveau A que le niveau B sont montrés aux élèves avec une attention particulière pour les outils des menus *Opérations* et *Mouvements*. L'aspect dynamique du logiciel est mis en évidence.

Les jeunes filles se rendent ensuite dans une salle attenante, équipée de huit ordinateurs. Leur premier travail consiste à reproduire un dessin de leur choix parmi les suivants.

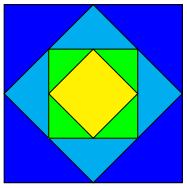


Fig. 3.11

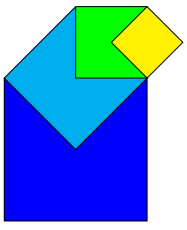


Fig. 3.12

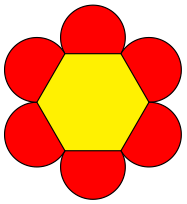
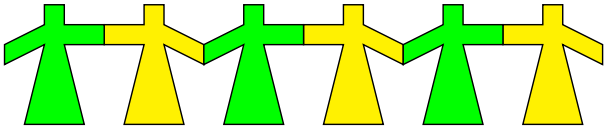


Fig. 3.13



La seconde séance a lieu deux semaines plus tard et consiste en deux périodes consécutives

de cinquante minutes.

En interaction avec la classe, l'animateur rappelle d'abord les principales caractéristiques d'*Apprenti Géomètre*. Il explique ensuite l'utilisation des fonctionnalités du menu `Transformations`. Cette première phase dure un peu moins d'une demi-heure.

Avec pour consigne d'utiliser les transformations du plan, les élèves se rendent ensuite dans la salle des ordinateurs pour reproduire la ribambelle de bonshommes.

Une fiche de travail, où sont dessinées une rosace et une ronde, est ensuite distribuée aux élèves. Nous leur demandons de reproduire la rosace et la ronde de personnages en utilisant les rotations.

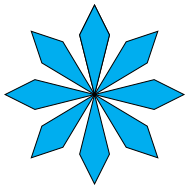


Fig. 3.14

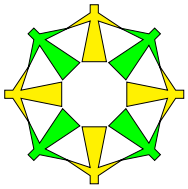


Fig. 3.15

La dimension affective

Les élèves sont très attentives lors de la présentation du logiciel – avec quelques exclamations d'étonnement devant ses possibilités – et assimilent bien ses principales fonctionnalités. Lors de la seconde séance, deux semaines après la première, les souvenirs sont toujours vivaces : l'animateur ayant décidé de procéder à quelques rappels, les élèves répondent bien à ses questions et le groupe peut rapidement aller de l'avant.

Les jeunes filles apprécient globalement les activités proposées et l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*. Lors de la reproduction de dessins, elles souhaitent toutes colorier leur réalisation. Certaines s'amusent avec le dynamisme du logiciel en déformant les constructions obtenues.

La dimension instrumentale

La prise en main du logiciel ne pose aucun problème et est assez rapide. Comme l'on pouvait s'y attendre, ces élèves de première année du secondaire manipulent *Apprenti Géomètre* avec au moins autant d'aisance que ceux que nous avons pu observer dans des classes de sixième primaire.

Les élèves rencontrent néanmoins quelques difficultés instrumentales directement liées aux activités proposées. Voici ce que nous avons pu observer.

- Parmi les dessins proposés lors de la première séance, la fleur est choisie par trois groupes d'élèves sur huit ([8]). Assez rapidement, ces élèves changent d'avis et s'orientent vers une suite de carrés. Ce changement est clairement dû aux difficultés instrumentales liées à la réalisation de la fleur :
  - diviser une circonférence (en trois par exemple)
  - découper le disque correspondant par deux points de subdivision

([8]) Les dix-huit élèves sont réparties en six duos et deux trios. Cinq groupes choisissent d'emblée une suite de carrés

– dupliquer le morceau de disque obtenu cinq fois pour obtenir tous les pétales
– ajuster un hexagone régulier à un des pétales
– tourner et ajuster les autres pétales à l'hexagone

Même avec l'aide des animateurs, cette démarche est manifestement trop complexe pour un premier travail.

- Lorsque nous proposons aux élèves, à la fin de la première séance, de réaliser la ribambelle de personnages, la première difficulté qu'elles rencontrent est de réaliser un des ceux-ci. En effet, il est représenté par un dodécagone non convexe et sa réalisation nécessite donc l'ajustage et la fusion de figures plus petites (car la première version d'*Apprenti Géomètre* ne permettait pas de construire directement un polygone quelconque de plus de dix côtés). C'est pourquoi une découpe du personnage est proposée sur une fiche d'aide.

  À l'aide de figures libres, reproduis le personnage ci-contre. Pour le réaliser, tu dois fusionner des figures qui ont un côté commun et qui sont bien ajustées.

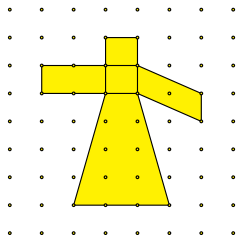
  

  Fig. 3.16

  Ici, la rigueur est de mise quant à l'ajustement des figures pour pouvoir les fusionner. C'est une petite difficulté pour certaines élèves. Une fois le personnage de base construit, les élèves utilisent les fonctionnalités `Dupliquer` et `Retourner` pour réaliser la ribambelle. Aucune élève n'utilise spontanément le menu `Transformations`.
  Une fois « lancées », les élèves réalisent bien la rosace et certaines prennent plaisir à la déformer. Les groupes plus rapides arrivent à réaliser la ronde de personnages de la fiche (notons que le personnage de base est ici un décagone directement réalisable à l'aide du logiciel).

La dimension conceptuelle

Dans cette phase d'initiation, l'objectif principal est la prise en main du didacticiel. Il n'y a pas d'objectif mathématique particulier. Toutefois, les reproductions de dessins demandées aux élèves ont permis de déceler quelques difficultés d'ordre conceptuel.

- Pour la réalisation de la suite de carrés emboîtés, nous observons d'abord un comportement analogue à celui des enfants de 6e primaire : les élèves tracent les carrés intérieurs « à vue ». A ce moment, les animateurs insistent sur la nécessité d'avoir un dessin précis. Ils montrent aussi qu'un dessin réalisé de cette façon ne résiste pas à un changement de taille du carré initial. Les élèves comprennent alors qu'il faut déterminer les milieux des côtés d'un carré pour pouvoir construire le suivant. De plus, elles observent que leur dessin reste semblable après agrandissement ou réduction du carré de départ.
  Dans un des groupes, le plus grand carré est dessiné d'abord, le plus petit carré ensuite (*Fig. 3.17*). Cette méthode assez particulière semble témoigner de l'absence

d'une perception globale du dessin et de sa structure.

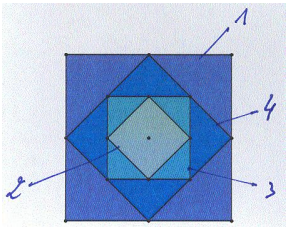


Fig. 3.17

Signalons encore que l'attention de certains élèves ne se porte pas en premier sur les carrés de la suite mais sur les triangles rectangles que l'on peut aussi y voir.

En ce qui concerne la suite sortante, pour trouver le centre d'un carré, les élèves tracent plus volontiers ses médianes que ses diagonales. Nous retrouvons là un comportement déjà observé à l'école primaire.

- La réalisation du premier personnage de la ribambelle est un écueil que peu d'élèves arrivent à franchir seules. La difficulté est de voir comment décomposer une forme complexe en formes plus petites ayant chacune exactement un côté en commun avec chacune de ses voisines. Après une mise en point avec toute la classe, cette difficulté est surmontée et chaque élève est capable de construire le premier bonhomme.
- Une fois le premier personnage réalisé, les élèves utilisent aisément la `Symétrie axiale` pour prolonger la ribambelle. La translation n'est pas spontanément utilisée. Lorsqu'un des animateurs demande à une élève, qui a déjà réalisé deux personnages symétriques, de prolonger la ribambelle à l'aide de cet outil, c'est un peu plus laborieux : les deux points déterminant la translation ne sont pas toujours choisis de façon adéquate. L'élève éprouve des difficultés à anticiper l'image du personnage. Comme erreurs, on relève le choix des deux points à la base du premier personnage (*Fig. 3.18*) ou le choix du point de base gauche du premier personnage et du point de base gauche du second (*Fig. 3.19*)

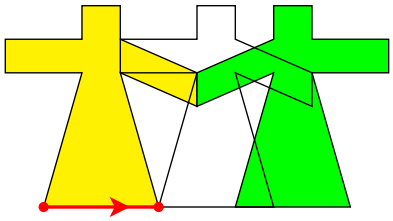


Fig. 3.18

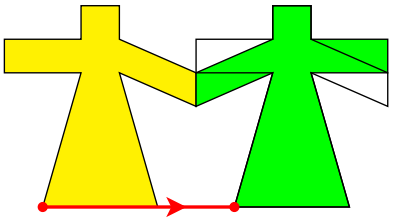


Fig. 3.19

Quelques essais infructueux sont nécessaires avant d'utiliser correctement la translation.

Deuxième partie

La mesure des aires

Chapitre 4

Aperçu de l'histoire de la mesure

Le présent chapitre n'est pas un cours de mathématique. On y trouvera donc à l'occasion sans démonstration des résultats non triviaux. Ce n'est pas non plus un cours d'histoire des mathématiques. Nous ne proposons donc pas au lecteur un exposé systématique et exhaustif de l'évolution du concept de mesure. Nous avons plutôt voulu, à travers quelques points particuliers, montrer l'influence réciproque des concepts de mesure et de nombre. Compte tenu de ce que les mathématiques arabes ont trop longtemps été méconnues, nous avons également saisi cette occasion pour attirer l'attention des lecteurs sur leur importance historique, en leur accordant une place assez importante. Pour plus de détails, le lecteur intéressé se rapportera à la bibliographie.

4.1 Grandeurs et nombres

Dans l'esprit des élèves, le nombre est prépondérant, au point de parfois faire oublier le contexte dans lequel il apparaît. Il est donc essentiel de se rappeler que *le nombre* est du domaine de l'abstraction, et n'existe que dans notre esprit. Personne n'a jamais vu « 7 » passer dans la rue... L'étude des nombres relève de l'arithmétique, de l'algèbre, de l'analyse.

Par contre, la « réalité concrète » est caractérisée par des *grandeurs* (longueur, aire, volume, intensité d'un son, d'une lumière, d'un courant électrique, ...).

Il est essentiel que l'élève qui calcule l'aire d'un triangle en multipliant « sa » base par « sa » hauteur, et trouve 15 cm^2, ait bien présent à l'esprit la signification de ce résultat : *le triangle donné a la même aire que 15 carrés de 1 cm de côté.*

De plus, c'est précisément cette association entre le nombre et la réalité concrète qui a créé et fait évoluer le concept même de nombre (en tout cas jusqu'aux rationnels et certains irrationnels comme par exemple le nombre π ou les radicaux). On ne s'étonnera donc pas que dans le présent chapitre, les développements des concepts de nombre et de mesure soient intimement mêlés.

La théorisation de la géométrie — c'est-à-dire le courant d'idées menant des résultats

strictement empiriques à une théorie raisonnée — résulte du désir de modéliser numériquement les grandeurs physiques particulières que sont la longueur, l'aire, le volume. Décrire l'évolution du concept de mesure, c'est donc aussi décrire — fût-ce sommairement — l'évolution de la géométrie, comme c'est décrire celle du concept de nombre.

4.2 À l'origine

Si l'on accepte la définition étymologique du mot *géométrie* (la mesure de la terre, des terrains), l'histoire de la géométrie commence très tard. Selon l'historien grec HÉRODOTE (env. 484 – 420 av. J.-C.), c'est en Égypte que la géométrie a été inventée :

> *Les prêtres me dirent encore que ce même roi* (1) *fit le partage des terres, assignant à chaque Égyptien une portion égale de terre, et carrée, qu'on tirait au sort ; à la charge néanmoins de lui payer tous les ans une certaine redevance, qui composait son revenu. Si le fleuve enlevait à quelqu'un une partie de sa portion, il allait trouver le roi, et lui exposait ce qui était arrivé. Ce prince envoyait sur les lieux des arpenteurs pour voir de combien l'héritage était diminué, afin de ne faire payer la redevance qu'à proportion du fonds qui restait. Voilà, je crois, l'origine de la géométrie, qui a passé de ce pays en Grèce. Car pour l'usage du polos, du gnomon et de la division du jour en douze parties, c'est des Babyloniens que les Grecs les apprirent.([45], livre* II*, § 109).*

Ce texte est susceptible de plusieurs lectures. La plus fréquente se limite à l'intervention des arpenteurs en vue de redélimiter les parcelles de terrain après chaque crue du Nil. Michel SERRES, [68], fait remarquer que ces crues ne sont évoquées nulle part par HERODOTE. Pour lui, le mot important est le mot *proportion*, qui marque l'apparition d'un *raisonnement*. L'origine de la géométrie ne résiderait pas tant dans un besoin de *mesurer* que dans un besoin d'établir des *proportionnalités* : entre les biens des paysans et leurs impôts d'une part, entre les mêmes biens et ce que nous appellerions des plans cadastraux d'autre part. Ces deux aspects ne sont pas nécessairement liés aux crues du Nil.

Pour G. BARTHÉLEMY, [9], ce sont ces crues qui ont fait naître le besoin de représenter l'emplacement des champs par des dessins géométriques. Les géomètres égyptiens utilisaient un quadrillage régulier pour retrouver le bien de chaque propriétaire après l'inondation annuelle du Nil. Le quadrillage s'appuyait sur les berges du fleuve. Des piquets étaient placés sur les rives, et permettaient de retracer les parallèles aux mêmes endroits, de crue en crue.

Les géomètres égyptiens ne connaissaient pas le théorème de PYTHAGORE sous sa forme générale, mais utilisaient ce qu'on appelle des triplets pythagoriciens. Le triplet 3, 4, 5, par exemple, leur permettait de construire, de manière empirique, un angle droit.

En Mésopotamie, en Inde, tout comme en Égypte, on utilisait des cordes à nœuds pour obtenir des angles droits.

(1) *Il s'agit de* SESOSTRIS*, pharaon de la douzième dynastie, 1800 ans avant Jésus-Christ.*

Par exemple, une corde à 13 nœuds régulièrement espacés (et donc comptant 12 intervalles égaux) permet de tracer un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 (*Fig.4.1*). On retrouve un triplet qui est en fait, un cas particulier du théorème de PYTHAGORE.
Cet outil permet également de tracer des triangles isocèles (*Fig.4.2*), sans utiliser d'unités de mesure algébriques.

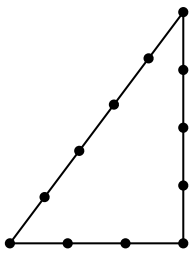


Fig. 4.1

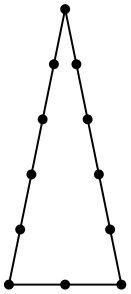


Fig. 4.2

Cependant, d'après les vestiges aujourd'hui en notre possession, nous savons que, tant les Égyptiens que les Babyloniens, utilisaient ces résultats, mais nous ne sommes pas en mesure d'affirmer qu'ils en avaient établi des démonstrations, [25]. Jean-Pierre FRIEDELMEYER, [37], estime qu'il serait parfaitement arbitraire d'accepter le savoir-faire des Indiens, Babyloniens ou des Égyptiens, comme un commencement : la mesure au sens le plus simple associe un nombre à un segment de droite, une surface ou un volume, et présuppose donc les concepts nullement spontanés de segment de droite, d'angle droit et surtout de figures standard qui servent d'unités. L'association faite par la mesure n'est pas une simple correspondance immédiate : il faut, en règle générale, changer la forme de l'objet à mesurer pour la ramener à un segment de droite, à des carrés ou à des cubes, et donc la manipulation des formes (compositions et décompositions) précède dans l'histoire la mesure des grandeurs et en est un élément fondamental. À ces manipulations succèdent et s'associent ensuite des comparaisons numériques et des calculs divers.

On peut aussi penser que les concepts de segment, d'angle… sont apparus et se sont développés en concomitance avec les premières mesures et que la géométrie n'a pas eu un commencement, mais plusieurs !

De nombreux historiens s'accordent à penser que THALÈS DE MILET (env. 625–547 av. J.-C.) est le premier *mathématicien* connu. En effet, il semble être le premier à avoir énoncé ou démontré des propriétés générales vraies pour TOUS les éléments d'une même classe. Une anecdote — incontrôlable — rapporte que, confronté au sommet inacessible de la pyramide de Kheops, THALÈS aurait dit : *Puisque ma main ne peut effectuer la mesure, ma pensée le fera.* C'est ce pari extraordinairement fou qui l'aurait conduit au fameux « Théorème de THALÈS [(2)] », connu de tous.

PLUTARQUE (40–120), qui vivait 600 ans après THALÈS, relate la mesure de la pyramide par celui-ci, [60] :

> *Ainsi, vous,* THALÈS, *[…] vous avez mesuré la pyramide sans le moindre embarras et sans avoir eu besoin d'aucun instrument. Après avoir dressé votre bâton à l'extrémité de l'ombre que projetait la pyramide, vous construisîtes deux triangles par la tangence d'un rayon, et vous démontrâtes qu'il y avait la même proportion entre la hauteur du bâton et la hauteur de la pyramide qu'entre la longueur des deux ombres.*

(2) La dénomination « théorème de Thalès » désigne dans les pays anglo-saxons le fait qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit. Dans les pays francophones, elle désigne la propriété de proportionnalité dont il est question ici, mais n'est pas attestée avant la fin du XIXe siècle.

Comment mesurer la hauteur d'une pyramide à l'aide d'un bâton ?
Le rapport entre la hauteur réelle de la pyramide et son ombre, est le même que le rapport entre la hauteur de n'importe quel objet et son ombre. En particulier, il est égal au rapport entre la taille du bâton et son ombre (*Fig. 4.3*).

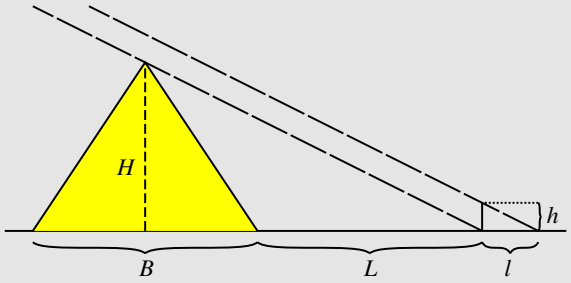


Fig. 4.3 : La pyramide de Thalès.

On en déduit la proportion, que nous écrivons en notations modernes

$$\frac{H}{\frac{1}{2}B + L} = \frac{h}{l}$$

On obtient ainsi la hauteur H de la pyramide.

Dépouillé de tout contexte historique, le théorème « de Thalès » devient :

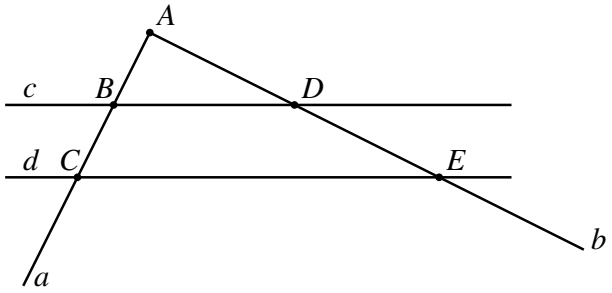


Fig. 4.4

Si deux droites sécantes a et b sont coupées par deux parallèles c et d, les segments déterminés sur a sont dans le même rapport que ceux déterminés sur b :

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

Ce résultat, qu'il soit ou non dû à Thalès, remonte certainement aux débuts de la géométrie et n'est qu'une manifestation du concept de proportionnalité dont nous avons vu l'importance que lui accorde M. Serres. Ainsi, quelle que soit la chronologie précise des débuts de cette science, il n'y a aucun doute que la proportionnalité en est un élément fondateur.

4.3 Des entiers aux réels

4.3.1 Les nombres entiers chez les Pythagoriciens

Pour les Pythagoriciens (env. 500 av. J.-C.), les nombres permettent de *dénombrer*. Ce sont donc des entiers positifs qu'on appellera plus tard *nombres naturels*. Leur ensemble est le prototype des ensembles dénombrables. Il est aussi *discret* ([3]).

Par ailleurs, les Pythagoriciens considèrent qu'un segment de droite est une juxtaposition

([3]) L'ensemble des rationnels n'est pas discret : entre deux rationnels, on peut toujours en trouver un autre.

de *monades* ([4]) ([5]). La mesure du segment est alors donnée par le nombre de monades qui le composent. Cette mesure est donc toujours un nombre naturel.

On peut ainsi établir un premier lien entre la géométrie et l'arithmétique :

Considérons une demi-droite d'origine O. À chaque entier n, associons un segment d'origine 0 et de mesure n, c'est-à-dire comportant n monades :

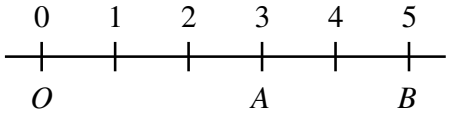


Fig. 4.5

Cela nous permet de comparer les longueurs de deux segments différents.

Les Pythagoriciens disaient, [37] : *« OA est à OB comme* 3 *est à* 5 *»* , ce que nous pouvons écrire aujourd'hui $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{3}{5}$.

Les rapports en cause sont donc homogènes : à gauche, des longueurs et à droite, des nombres. Il est important de noter qu'on peut ainsi remplacer des rapports de grandeurs dont *nous* savons qu'elles sont *continues*, par des rapports de nombres entiers qui, rappelons-le, constituent un ensemble *discret*.

4.3.2 La théorie des Proportions d'Eudoxe

Eudoxe de Cnide (408–355 av. J.-C.) s'est penché sur les propriétés des égalités de deux rapports, c'est-à-dire les propriétés des proportions. Un des traits essentiels de sa théorie est qu'elle s'applique à tout rapport de grandeurs indépendamment d'une quelconque mesure de celles-ci. Il définit l'égalité de deux rapports de la façon suivante ([6]), d'après [3] :

> *Si a, b, c, d sont des quantités arbitraires où a et b sont de même nature, et de même, c et d sont de même nature, alors le rapport entre a et b, $\frac{a}{b}$ est égal au rapport entre c et d, $\frac{c}{d}$ si et seulement si, quels que soient les entiers positifs m et n, nous avons :*
>
> - *$m.a > n.b$ si et seulement si $m.c > n.d$,*
> - *$m.a = n.b$ si et seulement si $m.c = n.d$,*
> - *$m.a < n.b$ si et seulement si $m.c < n.d$.*

Comme on le constate, si cette définition ne nécessite pas de *mesurer* les grandeurs a, b, c, d, elle nécessite néanmoins de pouvoir multiplier une grandeur par un naturel. Il s'agit donc bien d'une extension de la mesure par des nombres entiers.

([4]) La monade est l'élément ultime, c'est une unité indivisible qui est le véritable élément de la composition de toutes choses, la monade présente une unité organique enveloppant tous ses états passés et futurs, [67]. De la même manière, les Grecs considéraient que l'atome (du grec « a-tomos », « in-divisible ») est l'élément ultime, indivisible, de la matière. Les Grecs ne concevaient pas notre point sans dimension.

([5]) Selon la définition du *Dictionnaire de l'Académie française (8e édition de 1932–1935)*, dans le système pythagoricien, la monade est une unité parfaite qui est le principe générateur de tous les composés.

([6]) Aucun ouvrage d'Eudoxe ne nous étant parvenu, c'est dans les *Éléments* d'Euclide (livre V) que l'on peut retrouver cette définition.

Via le théorème de Thalès, une proportion telle que $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$, permet de construire un segment sans recourir à des mesures : pour obtenir un segment OD dont la longueur est à celle de OC comme celle de OB est à celle de OA, il suffit de tracer la figure ci-contre.

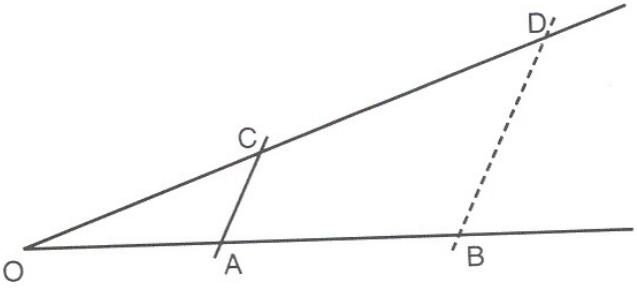


Fig. 4.6

4.3.3 Extension de la notion de nombre

Dans son livre X, [35], Euclide d'Alexandrie (IIIe siècle av. J.-C.) traite le type de relation, déjà rencontrée chez les Pythagoriciens, qui remplace un rapport entre grandeurs par un rapport entre nombres entiers. Il appelle *commensurables* les grandeurs concernées. En effet, l'établissement d'une telle égalité de rapport sous-entend l'existence d'une unité commune de mesure.

Deux grandeurs a et b sont *commensurables* s'il existe une unité u et deux entiers m et n tels que

$$\begin{aligned} a &= n.u \\ b &= m.u \end{aligned}$$

En d'autres termes, a et b sont commensurables s'il existe deux entiers m et n tels que $m.a = n.b$, ou si leur rapport $\frac{a}{b}$ est égal au rapport d'entiers $\frac{n}{m}$.

S'il n'est pas possible de trouver ces entiers m et n, les grandeurs a et b sont dites *incommensurables* ou irrationnelles ([7]). Nous trouvons en particulier dans le livre X d'Euclide la proposition 5 :

> *Les grandeurs commensurables ont comme* rapport *(« raison ») l'une relativement à l'autre celui d'un nombre relativement à un nombre.*

Les raisonnements exposés ci-dessus relatifs aux nombres naturels peuvent sans peine être étendus aux fractions d'entiers, c'est-à-dire les nombres que nous appelons aujourd'hui rationnels. Tout comme les naturels, les rationnels forment un ensemble dénombrable.

Le gros problème lié à cette vision des choses est qu'il existe effectivement des grandeurs *incommensurables* ! Par exemple, il n'existe aucune unité commune de mesure entre le côté d'un carré et sa diagonale (dont le rapport est, on le sait, $\sqrt{2}$). Cela implique que, si on connaît exactement la mesure de l'un (c'est-à-dire si la mesure est un nombre entier), on ne peut pas connaître exactement la mesure de l'autre.

Dans le même livre X, Euclide présente une classification rigoureuse de 13 espèces de lignes droites incommensurables avec une ligne droite de référence, [35].

L'idée révolutionnaire suivant laquelle il existe, d'une part des grandeurs commensurables, et d'autre part des grandeurs exclues de cet ensemble, induit une grande perplexité, voire un malaise, qui se traduit actuellement encore par le double sens qu'ont pris les mots

([7]) Définition 3 du livre X des Éléments d'Euclide

rationnel et *irrationnel*, [37]. Ces mots proviennent tous deux du mot latin *ratio*, lui-même équivalent au mot grec *logos*.

Logos est un mot « diamant » aux facettes multiples, désignant notamment la parole, le discours, la raison (c'est-à-dire l'ensemble des facultés intellectuelles) mais aussi pour certains philosophes, la Rationalité suprême gouvernant le monde, ainsi que le Verbe éternel dans l'Évangile de Saint Jean... *Logos* nous a donné le mot *logique* qui désigne aussi bien la science du raisonnement en lui-même (dont le développement a permis la formalisation des mathématiques) qu'une manière de raisonner juste, méthodique, dotée de cohérence interne.

La version latine, *ratio*, nous a quant à elle apporté notamment les mots *raison* et *rationnel*. Le mot raison désigne aussi bien la faculté propre à l'homme grâce à laquelle il peut penser, que le rapport existant entre deux quantités. Quant au mot rationnel, dit le *Larousse*, il qualifie ce qui manifeste de la raison, de la logique, du bon sens.

Remarquons qu'il est impossible de définir ces mots sans les utiliser « l'un dans l'autre ». Remarquons également que la dernière définition donnée ci-dessus implique que ce qui n'est pas rationnel n'est pas logique, est hors du bon sens. C'est bien cette seconde signification qu'a pris le mot irrationnel pour les non-mathématiciens.

Les nombres rationnels, ainsi appelés parce qu'ils proviennent d'un rapport entre entiers, sont donc des nombres qui ne dérangent pas le « bon sens ». Ils illustrent parfaitement la double signification du mot raison. Les irrationnels, au contraire, sont dérangeants.

On retrouve cette idée dans « Le sens de la mesure » de Nicolas Rouche, [64], qui parle « du difficile mariage des grandeurs et des nombres ». J.-P. Friedelmeyer, [37], écrit que *la rationalité est une construction laborieuse toujours inachevée qui tente de mettre en adéquation la pensée rationnelle abstraite et une réalité concrète et phénoménale qui lui est a priori étrangère.*

C'est donc cette nécessité de rendre compte de la réalité physique liée aux longueurs qui a conduit les mathématiciens à revoir leur définition de ce qu'est un nombre en le liant à la mesure des grandeurs, c'est-à-dire au continu.

4.3.4 Ératosthène de Cyrène

Ératosthène (284–192 av. J.-C.) vivait à Alexandrie, [24]. Il fut le premier à mesurer le méridien terrestre. Son raisonnement est une nouvelle application de la proportionnalité :

L'angle x est à 360° comme la longueur de l'arc AB est à celle du méridien terrestre.

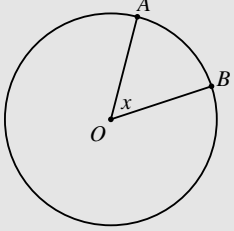


Fig. 4.7

En notations modernes, cela donnerait :

$$\frac{x}{360°} = \frac{|AB|}{\text{méridien}}$$

Les mesures respectives de l'angle x et de l'arc AB nous fournissent donc la longueur du méridien.

Si mesurer une longueur sur la terre ne présente pas de difficultés majeures, il n'en va pas de même pour mesurer un angle dont le sommet O est au centre de la terre.

L'histoire rapporte qu'Ératosthène aurait utilisé le procédé suivant (*Fig. 4.8*).

Il avait observé qu'à midi, le jour du solstice d'été, les rayons du soleil atteignaient le fond d'un puits situé à Syène (Assouan), ce qui signifie qu'à ce moment, le soleil se trouve exactement à la verticale de Syène, dans la direction BE, [50] et [73].

Au même moment, à Alexandrie, il fut mesuré que l'angle DAF, formé par la direction DA des rayons du soleil et la verticale AF en cet endroit, était de $\frac{1}{50}$ de 360°, soit $7,2°$.
Or Syène et Alexandrie se trouvent sur le même méridien et sont distants d'environ 1000 km, ce qui était nécessaire pour que l'angle au centre obtenu soit suffisamment grand pour que les inévitables erreurs de mesure soient négligeables.

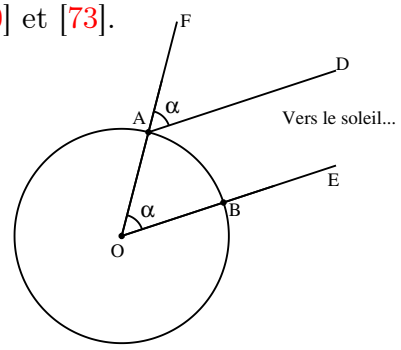


Fig. 4.8

Comme le soleil est tellement éloigné de la terre qu'on peut considérer qu'au même instant, les rayons qu'il nous envoie sont parallèles et donc que AD est parallèle à BE, l'angle AOB est égal à l'angle DAF et vaut également $7,2°$.

Cette mesure, effectuée plus de deux siècles avant notre ère attribue à la terre une circonférence de 250000 stades, soit de 39600 kilomètres, [24].

4.3.5 Archimède et la méthode d'exhaustion

Archimède, (*voir [24] ou [9]*) vivait à Syracuse (Sicile), au cours du IIe siècle avant J.-C. Il fut tué lors de la prise de sa ville par les Romains pendant la deuxième guerre punique, à l'issue d'un siège long de deux ans.

La résistance exceptionnelle de Syracuse qui mit à mal la flotte romaine était due essentiellement aux inventions guerrières d'Archimède. Citons simplement les diverses machines capables de lancer des projectiles extrêmement pesants tant à longue portée qu'au pied même des remparts de la ville, grâce à l'utilisation ingénieuse de leviers dont Archimède maîtrisait parfaitement les principes.

Pour mesurer l'aire de domaines limités par des courbes, Archimède utilisa la méthode dite « d'*exhaustion* », ainsi nommée par allusion à l'idée que l'on épuise progressivement le domaine à mesurer. Le principe est de construire une succession illimitée de polygones remplissant de mieux en mieux le domaine à mesurer. Cette méthode équivaut à un passage à la limite, sans invoquer la notion d'*infini* mal maîtrisée à cette époque.

Par cette méthode, Archimède réalise la « quadrature de la parabole » : en calculant successivement les aires des polygones AEB, $AA'EB'B\ldots$ il démontre que l'aire limitée par la parabole et l'horizontale AB (*Fig. 4.9*) ne peut être ni inférieure ni supérieure aux $\frac{2}{3}$ de l'aire du rectangle $ABCD$. L'aire hachurée est donc exactement égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire de ce rectangle.

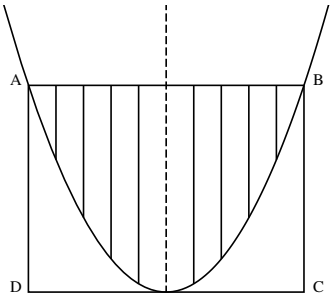


Fig. 4.9

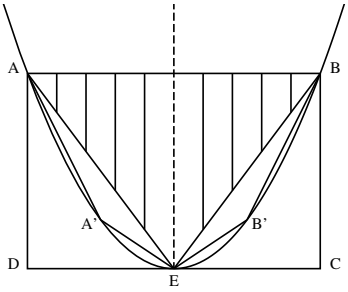


Fig. 4.10

Dans « *La mesure du cercle* », grâce à la méthode d'exhaustion, ARCHIMÈDE obtient l'approximation « classique », $\frac{22}{7}$, du nombre π, c'est-à-dire du rapport entre la circonférence C et le diamètre $|AB|$ du cercle.

Pour obtenir la circonférence ([8]), d'une part, il inscrit au cercle des polygones réguliers à un nombre croissant de côtés et calcule leurs périmètres, et d'autre part, il circonscrit au même cercle une autre suite de polygones et calcule également leurs périmètres.

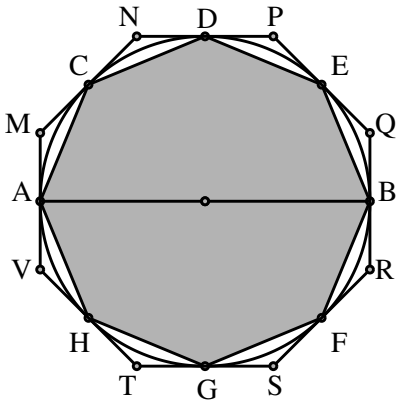


Fig. 4.11

$ACDEBFGH$ est un polygone inscrit au cercle.
$MNPQRSTV$ est un polygone circonscrit au cercle.

Quels que soient les polygones inscrit et circonscrit, on a :

périmètre d'un polygone inscrit $<$ circonférence $<$ périmètre d'un polygone circonscrit

Grâce à cela, ARCHIMÈDE obtient l'encadrement : $3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$. En écriture décimale, cela donne :

$$3,14084507\ldots < \pi < 3,142857143\ldots$$

4.3.6 Les Mathématiques chez les Arabes (VIIIe–XVe siècles), panorama

Unifiées par l'Islam dès le début du VIIIe siècle, les tribus des territoires arabes partent à la conquête du monde et étendent leur domination de l'Espagne à la Chine, et de la Russie à l'Afrique Centrale, incluant l'Inde et les pays Méditerranéens. Conquérants, mais relativement tolérants, ils assimilent les cultures et les connaissances des peuples conquis.

On peut distinguer (*voir [78] et [26]*) trois grandes étapes dans les Mathématiques arabes.

1. La première est l'assimilation de l'héritage de la culture grecque (prédominante) et de la culture orientale. C'est sans doute grâce à leurs contacts avec l'Inde que les

([8]) Circonférence : pourtour d'un espace plan (*Larousse*).

Arabes s'intéressent à l'astronomie et mesurent les déplacements relatifs des étoiles, l'inclinaison de l'écliptique... et sont ainsi conduits à développer la trigonométrie en établissant des tables de mesures de sinus. Par ailleurs, ce sont les *Éléments* d'Euclide qui ont joué le rôle le plus important dans la culture mathématique des pays islamiques.

2. Dès la fin du IXe siècle, on voit se former une culture mathématique originale, au travers notamment de l'École de Bagdad. Les connaissances et méthodes des Grecs sont appliquées à la résolution de problèmes de calculs numériques.
3. Du XIe au XVe siècles, on note une intensification de cette tendance, notamment par l'utilisation d'approximations et de calculs trigonométriques. Par exemple, en utilisant les sections coniques, les Arabes ont créé une théorie géométrique très développée permettant de résoudre des équations du troisième degré. Ceci est peut-être dû à l'influence de la Chine. Cependant, grâce aux acquis de la culture grecque, les Arabes vont plus loin que les Chinois et les Indiens.

   Il définissent également une nouvelle approche de la notion de « nombre ». Dans quasiment tous les ouvrages d'auteurs arabes, on trouve un procédé d'extraction des racines carrées. Il est vrai que l'établissement de tables astronomiques de plus en plus précises, le développement des calculs trigonométriques et de mesures planes, ont placé les mathématiciens de l'Islam dans l'obligation de calculer constamment avec des nombres irrationnels.

   Les nombres irrationnels sont ainsi utilisés aussi bien que les rationnels comme coefficients ou solutions d'équations.

4.3.7 La notion de nombre dans les Mathématiques Arabes

Parmi les nombreux mathématiciens arabes dont l'influence fut considérable, épinglons les noms suivants :

1 Al-Huwarizmi (780 – 850) réunit ce qu'il y avait de plus important à son époque pour les hommes de sciences et les praticiens et est ainsi un peu « l'Euclide » arabe. On lui doit le premier traité connu sur l'usage du système décimal et du zéro. Dans ce traité, il expose en fait la méthode indienne, [26].
Notons également que le mot *algorithme* qui désigne aujourd'hui un schéma donnant la suite des opérations à effectuer pour résoudre un problème, est une déformation du nom d'Al-Huwarizmi.

De plus, le titre de son traité *Al-jabr wal muqabalah* est à l'origine de notre mot « Algèbre ».

L'œuvre d'Al-Huwarizmi contient trois parties, [78] :

– une partie algébrique où figurent également des études de contrats commerciaux,
– une partie géométrique sur les mesures et l'utilisation de l'algèbre,
– une partie consacrée à des questions testamentaires.

Al-Huwarizmi explique comment résoudre des équations du premier et du deuxième degré dont les coefficients sont positifs. Il distingue trois sortes de termes, [26] :

– Le *dirham* : c'est le nombre simple.

– Le *gizr* : il signifie « racine », ou encore « fondement », « ce qui est caché ». En fait, il désigne notre inconnue actuelle. Al-Huwarizmi l'appelle aussi *say*, c'est-à-dire « la chose ».
– Le *mãl* : c'est ce que les mathématiciens arabes recherchaient comme étant l'inconnue et c'est le carré de notre inconnue actuelle.

Ces termes viennent peut-être du sanscrit.

Al-Huwarizmi donne les démonstrations des procédés applicables aux différents cas. Elles sont basées sur la géométrie et consistent à compléter des carrés par des rectangles ou d'autres carrés.

Afin d'illustrer sa méthode, montrons comment il s'y prenait pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$. [26], [13]

– Construisons un carré d'aire x^2 (*Fig. 4.12*).
– Sur ses côtés, plaçons des rectangles de largeur $\frac{10}{4}$.
L'aire totale obtenue a pour mesure

$$x^2 + 4 \times \left(\frac{10}{4} \times x\right) = x^2 + 10x.$$

D'après notre énoncé, cette mesure doit faire 39.
– Complétons la figure par les quatre petits carrés de côté $\frac{10}{4}$.
Le grand carré ainsi obtenu a donc une aire de mesure

$$39 + 4 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + 25 = 64$$

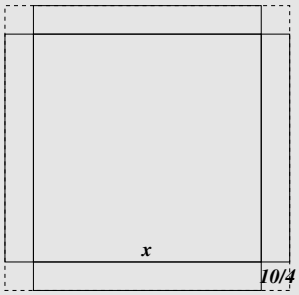


Fig. 4.12
$x^2 + 10x = 39$

– Puisque la mesure de l'aire du grand carré est 64, la mesure du côté est 8.
– Le côté du petit carré central a donc pour mesure $x = 8 - 2 \times \frac{10}{4} = 3$.

Insistons sur le fait que le raisonnement d'Al-Huwarizmi est basé sur la notion d'Aire et non sur celle de Longueur.

Il semble, [48], que Al Huwarizmi ait trouvé l'idée de ces résolutions dans un ouvrage plus ancien, intitulé « *Algèbre d'arpentage* ». On ne les retrouve ni dans les mathématiques indiennes antérieures, ni dans les éléments d'Euclide.

Toutefois, une lecture « arithmétique » des propositions établies dans le livre ii des *Éléments* conduit à des raisonnements semblables à ceux décrits par Al Huwarizmi.

Notons que dans ses exemples, Al-Huwarizmi ne considère que les solutions positives qu'il interprète comme étant la mesure du côté d'un carré.

Il est sans aucun doute intéressant de constater que les *nombres* obtenus comme solutions des équations, dont la résolution est basée sur des procédés du type décrit ci-dessus, sont des racines carrées positives de nombres naturels. En mettant la notion d'aire au cœur du raisonnement (contrairement aux Grecs, qui privilégiaient celle de longueur), Al-Huwarizmi évite le malaise engendré par la considération de nombres irrationnels en donnant d'emblée à ceux-ci un sens concret.

Ailleurs, Al-Huwarizmi utilise lui aussi les longueurs des segments afin d'illustrer les opérations d'addition et de soustraction. Il souligne alors qu'il faut respecter l'homogénéité des dimensions.

La partie géométrique de son œuvre réunit les règles servant à calculer les aires et les éléments de figures géométriques, et les applications les plus simples de l'algèbre aux problèmes concernant les triangles, les quadrilatères et les cercles. Sa géométrie est assez proche d'un ancien traité hébreu, *la théorie de la mesure*, rédigé probablement dans la première moitié du IIe siècle. Ce traité est lui-même proche des écrits de Héron d'Alexandrie. Avant Al-Huwarizmi, les arpenteurs ne disposaient que de formules relativement grossières, et parfois même fausses, donnant donc une marge d'erreur non négligeable. Malgré sa brièveté, le chapitre d'Al-Huwarizmi consacré aux mesures a apporté aux praticiens un matériau extrêmement important, exposé sous une forme très compréhensible et suffisamment correcte.

2 Abu Kamil, Égypte (env. 850 – env. 930), va plus loin que Al-Huwarizmi (voir [78]). Pour lui, des segments ou des surfaces peuvent représenter aussi bien des nombres que la première ou deuxième puissance de l'inconnue. On trouve par exemple le problème suivant :

> *Quelle est la hauteur x d'un triangle équilatéral dont la somme de l'aire et de la hauteur est 10 ?*

Il ne suit donc plus l'exigence classique du respect de l'homogénéité des dimensions dans les démonstrations géométriques. Mais les mathématiciens du Proche et Moyen-Orient n'ont pas persévéré dans cette voie (il faudra attendre Descartes).

Malgré l'utilisation de démonstrations géométriques, l'algèbre d'Abu Kamil est caractérisée par une tendance à l'arithmétisation. Il se base très souvent sur la théorie des proportions, et ne fait aucune différence entre les grandeurs commensurables et incommensurables.

3 Abu Sahl Al-Quhi (né entre 908 et 922, mort à la fin du Xe siècle), s'il est originaire de la montagne du Tabaristan, au bord de la mer Caspienne (Iran), a surtout travaillé à Bagdad.

Grâce à une connaissance approfondie du traité d'Apollonius sur les coniques, Al-Quhi participe à la généralisation de méthodes de résolution de problèmes par construction géométrique. La multiplication des résolutions de problèmes par l'intersection de coniques, caractéristique de l'activité géométrique de son époque, amène Al-Quhi à concevoir un instrument (le compas parfait) permettant de tracer toute conique de manière continue.

Il utilise donc l'héritage hellénistique, mais va bien plus loin et inaugure même un nouveau chapitre, celui de la géométrie projective. Dans son traité « *Sur l'art de l'astrolabe* », on trouve en effet le premier énoncé général d'une théorie de la projection de la sphère. Cette innovation a été rendue possible par l'application des coniques à la tradition des études sur l'astrolabe, qui se limitaient auparavant à la projection stéréographique.

L'œuvre d'Al-Quhi a marqué le Xe siècle et elle contribue à l'invalidation de la doctrine selon laquelle la géométrie a stagné entre le Ve et le XVe siècle. Selon Woepcke, [77], cette œuvre se distingue par une élégance remarquable. Cependant, celle-ci ne le met pas à l'abri d'erreurs fondamentales, comme le montre l'exemple suivant.

Les mathématiciens arabes de cette époque vouaient une admiration particulière à Archimède, dont pourtant fort peu d'œuvres leur étaient parvenues. Bon nombre d'entre-eux ont donc repris les travaux d'Archimède, afin de les complèter, ou de tenter de retrouver les méthodes qu'il avait utilisées. Il en va ainsi des études relatives à la quadrature de la parabole, aux mesures des volumes de révolution engendrés par des coniques, à la recherche des centres de gravité d'objets plans ou de solides.

Al-Quhi s'est ainsi intéressé à la statique pour laquelle il a rédigé un ouvrage « *Sur les centres de gravité* », qui est malheureusement perdu, mais dont nous connaissons l'existence par la correspondance qu'Al-Quhi entretenait avec un de ses amis, préoccupé lui-aussi par la géométrie, Abu Ishaq Al-Sabi. Dans cette correspondance, nous trouvons la proposition suivante :

Étant donné un demi-cercle de diamètre AC et de centre D, considérons le triangle ABC et la parabole de sommet B, d'axe BD et passant par les points A et C. Si on fait tourner les trois figures autour de l'axe BD, elles engendrent une demi-sphère, un cône et un paraboloïde.

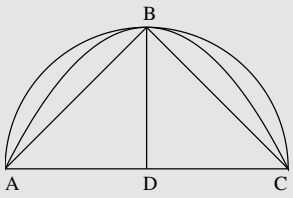


Fig. 4.13

Alors :

- *Si on considère les solides, le centre de gravité du cône est le point G_c tel que $DG_c = \frac{1}{4}DB$, celui du paraboloïde est G_p tel que $DG_p = \frac{2}{6}DB$, celui de la demi-sphère est G_s tel que $DG_s = \frac{3}{8}DB$.*
- *Si l'on considère les figures planes, le centre de gravité du triangle est G_t tel que $DG_t = \frac{1}{3}DB$, celui de la parabole est G_{pr} tel que $DG_{pr} = \frac{2}{5}DB$, et celui du demi-cercle est G_{cr} tel que $DG_{cr} = \frac{3}{7}DB$.*

Ainsi, Al-Quhi obtient deux suites tout à fait particulières. Les rapports sont $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{8}$ pour les solides, et $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ pour les figures planes.

Dans la correspondance qui nous est parvenue, Al-Quhi ne donne ni démonstrations, ni explications relatives à la méthode qu'il a utilisée. Mais il précise qu'il a déterminé les cinq premiers rapports par une démonstration géométrique (et ils sont effectivement exacts), tandis qu'il n'y est pas parvenu pour le sixième. Il écrit, [1] :

> *Cependant, il est très probable et vraisemblable qu'il fasse partie de cet agencement, plutôt qu'il en soit exclu, au nom de l'ordre et du principe naturel.*

Pour des raisons d'esthétique dans les suites obtenues, Al-Quhi considère donc le dernier rapport comme exact (ce qui n'est pas le cas !) et utilise celui-ci pour calculer le nombre π. À partir de ce rapport (faux !), il obtient pour π la valeur rationnelle $\frac{28}{9} = 3 + \frac{1}{9} \cong 3,11$. Or, Al-Quhi connaissait les résultats d'Archimède qui, rappelons-le (section 4.3.5) avait démontré que π était compris entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$, c'est-à-dire entre $3,1408$ et $3,1428$. Convaincu d'avoir démontré que π est égal à $\frac{28}{9}$ ($\cong 3,11$), et ne pouvant douter de l'infaillibilité d'Archimède, Al-Quhi en déduit que ces travaux relatifs à π sont faussement attribués à celui-ci !

Évoquons une dernière remarque intéressante à propos de la correspondance entre Al-Quhi et son ami Al-Sabi. On y trouve le lemme suivant :

Le rapport du cylindre de base circulaire au cylindre de base carrée est égal au rapport de la base à la base, si les hauteurs sont égales.

Or, Al-Sabi conteste cela car les deux cylindres ne sont pas du même genre, selon lui, et donc ne sont pas comparables. Ainsi Al-Sabi ne maîtrisait certainement pas la notion d'aire elle-même ([9]).

4 Dans son *Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands*, Abu-l-Wafa (940–998) traite notamment des aires des figures planes, de la mesure des distances, des unités de mesure... Tout comme Euclide, il y définit le rapport de deux nombres comme étant « la mesure de l'un comparé à l'autre ». On retrouve ici le lien fondamental liant le nombre et la mesure.

Par ailleurs, toutes les règles pratiques pour scribes et marchands se ramènent à des procédés permettant de comparer une grandeur à une autre à l'aide de fractions sexagésimales. C'est probablement dû à l'héritage babylonien, augmenté de techniques originales liées aux influences arabes locales.

5 On doit à Al-Karagi (mort entre 1019 et 1029, originaire de Karag, en Iran), le *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique.*

Ce livre est destiné aux scribes et calculateurs, et s'appuie sur l'œuvre d'Abu-l-Wafa. Al-Karagi va jusqu'à résoudre des équations du 7e degré. Il utilise fréquemment la notion d'aire dans ses démonstrations, y compris dans des démonstrations de propriétés arithmétiques.

Démontrer l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Pour établir cette identité, Al-Karagi construit un carré de côté

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

L'aire de ce carré a donc pour mesure

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Il s'agit de montrer que l'aire vaut aussi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

([9]) Nous avons retrouvé cet argument chez des élèves à qui on demandait de comparer les aires de deux figures et qui répondaient : « Elles sont différentes, puisqu'elles n'ont pas la même forme ».

Pour ce faire, Al-Karagi *partage le carré de façon à faire apparaître un petit carré de côté 1, puis le gnomon $ABCDE$ de base 2, et ainsi de suite jusqu'au gnomon $PQRST$ de base n.*
L'aire du dernier gnomon $PQRST$ a pour mesure

$$2 \times n \times (1 + 2 + 3 + \cdots n) - n^2 = n^3$$

De même, l'aire du gnomon précédent a pour mesure $(n-1)^3$. On montre de cette façon que la suite des aires des gnomons est la suite des cubes, de n^3 à 2^3.

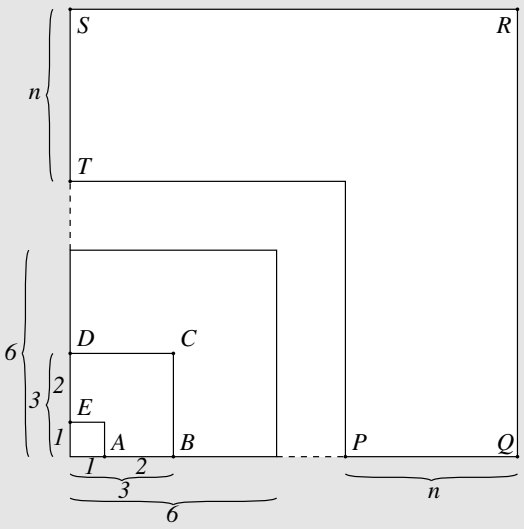


Fig. 4.14

L'aire du grand carré vaut donc bien : $n^3 + (n-1)^3 + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

6 Omar Khhayam ou Umar Al-Hayyam (1047–1122), poète et mathématicien de Nichapour (Khorassan), est célèbre notamment pour ses poèmes, les *Rubaiyats*, qui célèbrent la vie, le vin, l'amour ([10])...

Omar Khhayam, comme tous les mathématiciens et philosophes de son temps, accordait une importance toute particulière aux *Éléments* d'Euclide. Ceci s'explique par l'importance qu'y joue l'analyse des concepts fondamentaux de la géométrie et de l'arithmétique, concepts qui tenaient déjà une place importante dans l'œuvre d'Aristote. Pour ce dernier, les concepts mathématiques sont tirés par abstraction des propriétés des choses réelles, [2].

Les mathématiciens des pays islamiques se sont constamment penchés sur les problèmes fondamentaux des *Éléments* à savoir la théorie des parallèles, la théorie des proportions et la théorie relative aux radicaux du second degré. Ils ne se contentèrent pas (comme les Indiens) d'utiliser les nombres irrationnels, mais en firent un objet d'études théoriques. Pour cela, ils utilisèrent la théorie des proportions des mathématiciens grecs, l'analysèrent, la critiquèrent et développèrent ensuite leur propre théorie en étendant la notion de nombre à l'ensemble des nombres réels positifs.

Dans ses *Commentaires des difficultés se trouvant dans les introductions du Livre d'*Euclide (1077), Omar Khhayam présente une théorie élaborée des proportions.

Pour lui, comme pour Euclide, le véritable sens d'un rapport consiste à mesurer une grandeur par une autre, c'est-à-dire en fait, à diviser un nombre par un autre. Dans le cas de grandeurs commensurables, et en particulier de nombres entiers, il est ainsi tout à fait en accord avec Euclide ([11]).

Omar Khhayam envisage également le rapport de grandeurs incommensurables. De plus,

([10]) Certains auteurs considèrent qu'il n'est pas avéré que le poète Omar Khhayam et le mathématicien Omar Khhayam soient la même personne, mais rien non plus ne permet d'affirmer le contraire, [62].
([11]) Euclide 10/12 Livre VII, Définition 21

il définit une proportion, c'est-à-dire rappelons-le, une égalité de rapports, en disant qu'une telle égalité est correcte si on peut exprimer ces deux rapports en deux fractions continues dont les quotients partiels sont égaux ([12]).

Ainsi donc, la proportion $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ est correcte si on a

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \cdots}}} \text{ et } \frac{C}{D} = \frac{1}{q'_1 + \frac{1}{q'_2 + \frac{1}{q'_3 + \cdots}}}$$

avec $q_i = q'_i$ pour tout i.

Illustrons cette définition par un exemple. Pouvons-nous affirmer que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$?

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= \frac{3}{3\times 2+2} \\ &= \frac{3}{3\times q_1+2} \\ &= \frac{1}{q_1+\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{q_1+\frac{2}{2\times 1+1}} \\ &= \frac{1}{q_1+\frac{2}{2\times q_2+1}} \\ &= \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{1\times 2+0}}} \\ &= \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}} \end{aligned}$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} \frac{6}{16} &= \frac{6}{6\times 2+4} \\ &= \frac{6}{6\times q'_1+4} \\ &= \frac{1}{q'_1+\frac{4}{6}} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{q'_1+\frac{4}{4\times 1+2}} \\ &= \frac{1}{q'_1+\frac{4}{4\times q'_2+2}} \\ &= \frac{1}{q'_1+\frac{1}{q'_2+\frac{2}{4}}} \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{q'_1+\frac{1}{q'_2+\frac{2}{2\times 2+0}}} \\ &= \frac{1}{q'_1+\frac{1}{q'_2+\frac{1}{q'_3}}} \end{aligned}$$

Nous constatons que $q_1 = q'_1 = 2$, $q_2 = q'_2 = 1$ et $q_3 = q'_3 = 2$.
Par conséquent, nous pouvons affirmer que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$.

Remarquons que si, dans chaque rapport, les grandeurs en présence sont commensurables, la suite des quotients partiels q_i est finie.

En raisonnant de façon similaire, Omar Khhayam élargit la définition euclidienne de la relation « est plus grand que » figurant dans l'inégalité $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, en envisageant des rapports de grandeurs incommensurables, ainsi que le cas où un seul des rapports fait intervenir des grandeurs incommensurables. Ce faisant, il donne un critère permettant de comparer un nombre irrationnel et un nombre rationnel.

De plus, Omar Khhayam veille à établir l'équivalence entre sa théorie et celle défendue par Euclide et Eudoxe. Il démontre que des rapports égaux ou inégaux au sens d'Euclide, le sont aussi dans son sens à lui, et inversement. Il peut alors sans problème utiliser les propriétés des proportions présentées dans les *Éléments*.

Omar Khhayam soulève la question essentielle du lien existant entre les notions de rapport (de grandeurs) et de nombre. Ce problème est, selon lui, de nature philosophique : un rapport de grandeurs est-il lié à un nombre, ou est-il un nombre ? Laissant à d'autres

([12]) Vers 1950, les fractions continues faisaient partie des programmes de l'enseignement secondaire.

le soin d'en débattre, il estime quant à lui nécessaire d'appeler « nombre » tout rapport de grandeurs, commensurables ou non. Les opérations relatives à ces nombres sont alors interprétées comme la composition des rapports de grandeurs correspondants.

7 Al-Tusi (150 ans après Omar Khhayam), dans son *Recueil d'arithmétique à l'aide d'une planche et de la poussière* (1265), décrit un procédé général d'extraction des racines carrées ainsi que la formule générale du développement de $(a+b)^n$, reprise plus tard par Al-Kashi, et que nous connaissons sous le nom de « binôme de Newton ». Il s'est vraisemblablement inspiré des travaux d'Omar Khhayam, mais peut-être également a-t-il obtenu ces résultats de savants chinois rencontrés à cette époque. Dans son *Exposé d'*Euclide et son *Traité du quadrilatère complet*, il reprend et développe les théories d'Omar Khhayam sur les proportions (et donc les nombres). Il exprime avec encore plus de précision l'idée que *tout rapport peut être appelé nombre, mesuré par l'unité, de même que le premier terme d'un rapport est mesuré par le second.*

En d'autres mots, que les grandeurs A et B soient commensurables ou non, le rapport $\frac{A}{B}$ est égal à un rapport $\frac{D}{1}$ où D est un nombre.

Ceci définit, en fait, *les nombres réels positifs.* Cette conquête théorique remarquable fut connue en Europe à la fin du XVIe siècle seulement, grâce à une édition, à Rome, de l'exposé d'Euclide rédigé par Al-Tusi.

8 Al-Kashi (fin XIVe siècle – mort en 1429 à Samarcande) est surnommé *Gyat ad-din*, ce qui signifie approximativement « Auxiliaire de la foi ».

Il nous fournit *La clé de l'arithmétique*, excellent guide de mathématiques élémentaires, qui tient une place unique dans la littérature du Moyen Âge. C'est une véritable encyclopédie mathématique qui entendait répondre à tous les besoins : ceux des calculateurs, des astronomes, des architectes, des fonctionnaires ou des marchands. Ce sera l'ouvrage de référence pour les siècles suivants, [24]. Il écrit : *l'arithmétique est le moyen de déterminer des grandeurs numériques inconnues à partir de grandeurs connues.* Notons qu'Al-Karagi avait dit la même chose de l'algèbre.

En ce qui concerne la technique et l'exactitude des calculs, Al-Kashi a dépassé de loin ses prédécesseurs. Il résout de nombreux problèmes en n'utilisant que l'algèbre et quelques formules de trigonométrie. Pour les aires des polygones réguliers à n-côtés ($n = 5, 6, \ldots, 16$), il dresse des tables dont l'exactitude va jusqu'à 60^{-5} pour des fractions sexagésimales, et 10^{-6} pour des fractions décimales. Il établit des tables astronomiques d'une extraordinaire précision, les « Zig Ulugh Bek », qui comportent les sinus et les tangentes pour des arcs variant de minute en minute.

De plus, il expose non seulement l'arithmétique sexagésimale, mais pour la première fois aussi méthodiquement la théorie des fractions décimales en vue d'établir que les opérations peuvent s'effectuer de la même façon que pour les entiers.

Dans le « *Traité de la circonférence* », il donne une détermination de π avec 16 décimales exactes. Il calcule par approximation, en se servant, comme Archimède, de la méthode d'exhaustion. Mais son utilisation des approximations se distingue par la simplicité et l'élégance, et dépasse de très loin toutes les tentatives antérieures.

Au XIXe siècle, Hankel écrit que « sa méthode ne le cédait ni en finesse ni en élégance à toutes les méthodes d'approximation découvertes en Occident depuis Viète. Il affirme en

outre que c'est la première méthode par approximations numériques successives rencontrée en histoire des mathématiques, [24].

Al-Kashi calcule les volumes de solides élémentaires, mais aussi les volumes du cylindre oblique, du cône oblique, et de solides partiellement creux.

Une table particulière donne les caractéristiques numériques des cinq solides réguliers ainsi que celles de deux des 13 polyèdres semi-réguliers découverts par Archimède et qu'Abu-l-wafa avaient déjà construits. Il s'agit du cuboctaèdre (polyèdre à 14 faces, 8 triangles et 6 carrés), et de l'icosidodécaèdre (polyèdre à 32 faces, 20 triangles et 12 pentagones).

Notons que beaucoup plus tard Stevin et Kepler s'intéressèrent à nouveau aux polyèdres semi-réguliers.

Al-Kashi a également réalisé des calculs et des constructions complexes d'ogives, de voûtes, de coupoles, et de divers éléments caractéristiques de l'architecture arabe appelés « stalactites ». Ce mot désigne plusieurs rangées de prismes suspendus les uns au-dessus des autres, limités par plusieurs surfaces planes ou courbes et qui servent d'ornements sur les corniches, les encorbellements, les portails...

Grâce notamment à Al-Kachi, et à son protecteur, le sultan Ulugh Bek, les mathématiques arabes d'Orient ont atteint leur apogée dans les ouvrages de l'école de Sarmacande, qui était devenue le centre scientifique le plus important de l'Est. Mais, après le meurtre d'Ulugh Bek en 1449, celle-ci tomba en décadence et la recherche mathématique périclita, [24].

4.3.8 Le nombre chez Stevin

Il serait intéressant de savoir s'il existe des liens directs entre les Mathématiques Arabes et la théorie des proportions développée en Europe au XVIe siècle. En effet, à cette époque, afin d'éliminer la dichotomie « discret-continu », Simon Stevin (Bruges, 1548 – 1620.) redéfinit le nombre de la manière suivante, [70] :

> *Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chaque chose.*

Il en résulte que

> *Nombre n'est point quantité discrète.*

Ainsi, toute grandeur peut être associée à un nombre et inversement, [76]. Nous retrouvons donc l'idée défendue par Al-Tusi et Al-Khhayam. Par analogie avec les grandeurs de la géométrie, il définit nombres commensurables et incommensurables, et introduit donc l'ensemble des nombres que nous appelons aujourd'hui *les nombres réels*. Il devient ainsi possible de raisonner sur les nombres définis de la sorte sans passer par le support des grandeurs. Notons que pour Stevin, le nombre est *continu* au sens d'Aristote, c'est-à-dire qu'il est indéfiniment divisible. De plus, cette évolution s'accompagne de la suppression du principe d'homogénéité dans les proportions.

On attribue à Stevin, [21], [9], l'invention des décimales. Dans son livre « De Thiende » (La Disme) publié en 1585, à Leyden par Plantijn, il montre comment procéder aux opérations sur ce que nous appelons aujourd'hui les nombres décimaux. Il préconise également l'usage du degré décimal, à la place du degré sexagésimal inventé par les Mésopotamiens.

De plus, il reprend et allège considérablement la méthode d'exhaustion d'ARCHIMÈDE pour déterminer notamment, les centres de gravité de figures curvilignes planes, [24].

4.3.9 DESCARTES

Nous venons de le voir, l'élargissement du concept de nombre proposé par STEVIN s'est vu accompagné de la suppression du principe d'homogénéité. DESCARTES (1596-1650) applique cet acquis en définissant la vitesse comme le rapport d'une distance à un temps.

Par ailleurs, puisque toute grandeur peut être représentée par un nombre et réciproquement, tout nombre (réel) peut être représenté par un segment de droite, et l'ensemble des nombres a pour image la droite graduée, que nous appelons aujourd'hui *la droite réelle*.

DESCARTES développe également la notion d'équation de courbe, qui permet de caractériser les coordonnées de ses points. La courbe se retrouve dès lors entre la physique et les mathématiques comme étant un objet physique qui peut s'étudier au moyen de l'algèbre tout en intégrant l'idée de variabilité lorsqu'on la considère comme une trajectoire, [37].

L'introduction de la variabilité et de l'algébrisation va permettre d'établir le *théorème fondamental de l'analyse* : les opérations de *dérivation* (qui permet de déterminer la tangente à une courbe) et d'*intégration* (qui permet de déterminer l'aire limitée par une courbe) sont des opérations réciproques l'une de l'autre.

Étant donné une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$ ($[0, 2]$ sur la figure ci-dessous), la fonction F définie sur le même intervalle par la condition

> *$F(x_0)$ est l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les verticales d'abscisses a et x_0*

est dérivable, et sa dérivée est f.

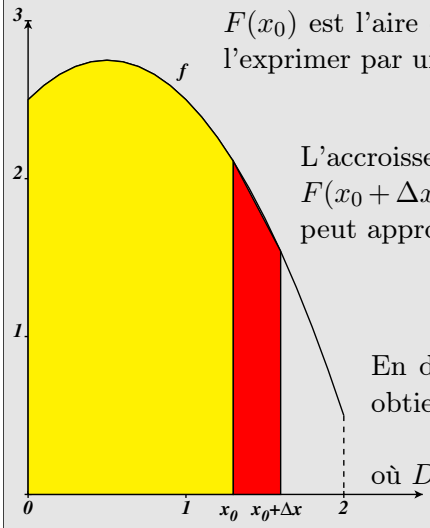


Fig. 4.15

$F(x_0)$ est l'aire de la zone coloriée en jaune de la figure ci-contre. On peut l'exprimer par une intégrale :

$$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

L'accroissement de F lorsque la variable x passe de x_0 à $x_0 + \Delta x$ est $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. C'est l'aire de la plage coloriée en rouge, que l'on peut approcher par l'aire d'un trapèze :

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \approx \Delta x \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)$$

En divisant par Δx et en faisant tendre ensuite Δx vers 0, on obtient le théorème fondamental de l'analyse :

$$DF(x_0) = f(x_0)$$

où DF désigne la dérivée de F.

Le calcul différentiel et le calcul intégral sont nés.

4.4 De la décomposition infinie au calcul intégral

4.4.1 L'infini et l'indéfiniment divisible

C'est dans la démonstration de l'incommensurabilité des mesures d'un côté du carré et de sa diagonale que Maurice Caveing, [15], voit l'origine même de la géométrie grecque, une géométrie du raisonnement qui s'oppose à la géométrie des arpenteurs.

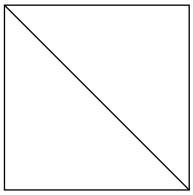


Fig. 4.16

En effet, si on dessine un carré et une de ses diagonales, celle-ci a la même réalité que le côté du carré. L'observation de la figure ne permet en rien d'augurer du fait que la diagonale et le côté sont incommensurables, c'est-à-dire, qu'il n'existe aucun nombre rationnel égal au rapport de leurs mesures. Il faut donc bien une démonstration pour pouvoir l'affirmer. Paradoxalement, cette démonstration qui se trouve à l'origine de bien d'autres, est une démonstration de non-existence.

> *C'est dans l'opération de mesure que s'est dévoilée la vraie nature de l'objet droite, son essence idéale, plus précisément dans le processus de mesure d'un segment incommensurable à l'unité de mesure : le caractère illimité du processus [. . .] révèle, au sein même de la finitude du segment, une infinité qui, même conçue comme potentielle, ne peut appartenir qu'à un objet idéal, qui se trouve défini en tant que tel par ce processus même. (Pour un objet empirique, on atteint le seuil de la perception en un nombre fini d'étapes).* [37]

Cette infinité, qui est la marque du caractère incommensurable de certaines grandeurs, met en évidence leur caractère *continu* au sens d'Aristote. Elles sont donc divisibles en parties toujours divisibles.

Notons cependant que la définition d'Aristote s'applique également à la droite rationnelle et qu'il faudra attendre le XIXe siècle pour que ces notions soient clarifiées par les mathématiciens. Nous dirions aujourd'hui que cette infinité montre que ces grandeurs sont indéfiniment divisibles.

Pour les Grecs, « être infini » signifie qu'il est toujours possible de faire un pas de plus, de telle sorte que « le terme postérieur se détermine d'après le terme antérieur ». Ainsi, en partant de 0, on peut atteindre des nombres naturels aussi grands qu'on le veut, simplement par des additions successives du nombre 1. Mais on n'atteint jamais de cette façon l'infini. En langage moderne, on dit qu'il s'agit d'un *infini potentiel*.

Par contre, lorsque nous affirmons que l'ensemble des nombres réels, est *infini*, nous considérons simultanément tous ces nombres. Cet infini est réalisé. On parle alors d'*infini actuel*. Ainsi donc, en tant qu'ensembles de points une droite et un segment de droite sont des infinis actuels.

Les Grecs distinguent le caractère indéfiniment divisible (la continuité au sens d'Aristote) des grandeurs, du mouvement et du temps, suivant l'enchaînement suivant, [37].

Nous savons que toute grandeur est continue. Or, en géométrie, une grandeur s'appréhende par son *étendue*. La modification de celle-ci traduit le mouvement, et à son tour, celui-ci

définit le temps. La continuité de la grandeur induit ainsi la continuité du mouvement, qui induit celle du temps. La distinction de ces trois continuités permet de contourner certains problèmes liés à la continuité du mouvement et du temps (paradoxe de Zénon...) en n'étudiant les grandeurs que sous leur forme statique.

4.4.2 Physique et Mathématiques dans l'Antiquité grecque

Pour les Grecs, *la Physique* est la science de « ce qui se transforme ». Elle étudie donc les mouvements, les changements d'états, la modification des grandeurs... La Physique étudie « ce qui se passe sur Terre ».

Les *Mathématiques* constituent la science qui étudie les objets idéaux. Selon ARISTOTE, [2], ceux-ci sont séparables par la pensée, c'est-à-dire qu'ils peuvent être soumis à un processus d'abstraction qui n'affecte en rien l'exactitude de leur étude. Outre, par exemple, la droite, on peut aussi faire figurer parmi ces objets les corps célestes, parfaits, sphériques, soumis à des mouvements eux aussi parfaits, circulaires uniformes et donc immuables, évoluant dans un cosmos fini (« image mobile de l'éternité » selon PLATON). Les Mathématiques étudient « ce qui se passe au Ciel ». Elles sont réparties dans :

- l'arithmétique, pour les nombres,
- la géométrie, pour les grandeurs,
- l'astronomie,
- la musique.

Pour les Grecs, il y a donc une nette séparation entre ces deux sciences, et il n'est pas question, par exemple, d'imaginer l'existence d'une loi commune expliquant le mouvement des astres et la chute des corps.

Cependant, certains domaines établissent déjà « des passerelles » entre les deux sciences grâce au caractère statique des sujets traités. Citons ARCHIMÈDE, avec ses travaux sur *L'équilibre des plans ou des centres de gravité des plans*, son *Traité des corps flottants*, ou son *Traité de la Méthode*, dans lequel il montre comment, après avoir découvert *physiquement* la solution d'un problème géométrique, on peut l'établir *mathématiquement*. De même, la musique, l'optique géométrique, l'astronomie sont étudiées mathématiquement, mais dans un contexte de géométrie euclidienne, sans mettre en jeu le concept de mouvement.

4.4.3 La Physique mathématique

Ainsi donc, les mathématiques grecques n'ont traité des grandeurs, et en particulier mesuré celles-ci, que sous un aspect statique.

GALILÉE (1564–1642) est le premier à avoir eu l'idée audacieuse de tenter d'étudier *le mouvement* grâce aux Mathématiques, [37], [39].

> *La philosophie est écrite dans ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire : l'Univers), mais on ne peut le comprendre si l'on*

> *n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot.*

Or, l'étude du mouvement en termes mathématiques suppose de savoir traiter comme une grandeur quelque chose qui jusque là ne rentrait pas dans cette catégorie : la vitesse. Notons d'emblée que la vitesse, tout comme les grandeurs usuelles (longueur, aire, intensité lumineuse...) appelle la comparaison : un mobile ne va pas vite en soi. Il va *plus vite que... moins vite que...* ou *aussi vite que...* Pour faire de la vitesse une grandeur, et de plus, une grandeur mesurable, Galilée procède en deux étapes.

Dans un premier temps, il élabore la notion de vitesse constante. En six théorèmes, il lui donne un sens en précisant sa relation avec le temps et l'espace grâce à l'application de la théorie des proportions.

Proposition 1 *Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.*

Proposition 2 *Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.*

Proposition 3 *Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.*

Proposition 4 *Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.*

Proposition 5 *Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.*

Proposition 6 *Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.*

L'écriture formelle allège considérablement ces théorèmes (ainsi que leur démonstration !). Toutefois, ce type d'écriture n'était pas encore établi à l'époque de Galilée. La traduction de ces théorèmes nous donne :

Proposition 1 *Pour v donné* $\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2}$

Proposition 2 *Si* $t_1 = t_2$*, alors* $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$ *et réciproquement.*

Proposition 3 *Pour* e *fixé* $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$.

Proposition 4 $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$.

Proposition 5 $\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{v_2}{v_1}$.

Proposition 6 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{t_2}{t_1}$.

Le concept de vitesse constante étant ainsi clairement dominé, Galilée traite ensuite le problème plus général d'une vitesse variable.

Ces travaux conduisent à supprimer la cloison qui sépare les grandeurs statiques et celles liées au mouvement, et ouvrent la porte à la Physique mathématique. Par la suite, le développement historique vers le calcul symbolique et la construction de l'algèbre ont totalement modifié notre perception des choses en permettant notamment de supprimer la contrainte d'homogénéité des grandeurs intervenant dans les proportions. Ceci nous permet, par exemple, de résumer beaucoup plus simplement les six théorèmes de Galilée cités plus haut par la relation bien connue

$$e = v \times t$$

Notons cependant que cette simplicité n'est qu'apparente car elle suppose, en fait, pour chacune des mesures des grandeurs intervenant dans la relation, l'établissement d'une proportionnalité par rapport aux unités. En clair donc, le « décodage » d'une formule telle que $e = v \times t$ suppose l'existence et l'utilisation d'un système cohérent d'unités.

En effet, si je roule en voiture pendant 10 minutes à une vitesse de 120 km/h, j'ai parcouru non pas 120 km/h $\times$ 10 min mais bien 120 km/h $\times \frac{10}{60}$ h = 20 km.

4.4.4 Vers le calcul infinitésimal et le calcul intégral

Les concepts du continu, de l'infiniment divisible, et de l'infini, intimement liés comme nous l'avons vu par la notion de mesure, ont toujours été au cœur des raisonnements mathématiques, mais ont été traités au fil du temps de façons très différentes.

J.-P. Friedelmeyer expose cette évolution en montrant les diverses approches du problème posé par la mesure de l'aire de la lunule d'Hippocrate de Chio, qu'il traite dans un cas particulier : il s'agit de démontrer que la lunule et le carré de la figure ci-contre ont la même aire.

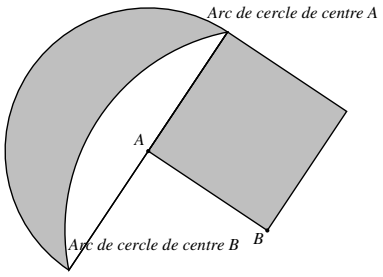


Fig. 4.17

Cette démonstration a un caractère emblématique en ce que c'est la plus vieille démonstration connue de l'histoire des Mathématiques dont on ait des références précises, [16].

1. La manière euclidienne.

   Chaque figure est faite de blocs délimités et finis, statiques. Ils sont ensuite traités globalement par des démonstrations logiques.

2. La méthode de Cavalieri (manière pré-infinitésimale, ou méthode des indivisibles)

   La lunule est découpée en un nombre infini d'éléments indivisibles infiniment petits.

   À ces indivisibles, on substitue des éléments équivalents dont la réunion donne une aire aisément mesurable. C'est encore une vision statique. Cette méthode a été proposée à Leibniz par Tchirnhaus.

3. Utilisation d'un élément variable.

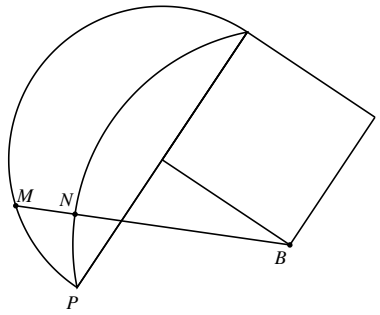


Fig. 4.18

   On utilise une droite variable issue de B, coupant la lunule en M et N. On mesure ensuite l'aire variable du triangle curviligne PMN.
   Cette méthode a été mise en œuvre par Artus de Lionne en 1610, dans un article intitulé *Amoenior curvilineorum contemplatio* et imprimé en 1654. Leibniz en a eu connaissance lors de son séjour à Paris.

4. Le calcul différentiel et intégral.

   Leibniz (1646–1716) mesure la variation infinitésimale de l'aire du triangle curviligne PMN. Celle-ci est infinitésimale. Le calcul intégral, en sommant ces variations, fournit la mesure de l'aire de la lunule.

   Ainsi, au 17e siècle, le continu (dans le sens que nous donnons actuellement à ce terme) est abordé par le biais d'une division à l'infini, suivie d'une recomposition. C'est donc un traitement local, suivi d'un traitement global.

4.4.5 La théorie de la mesure

Le concept de mesure au sens utilisé actuellement pour ce terme en mathématique consiste à affecter à certains sous-ensembles d'un ensemble E un nombre réel positif satisfaisant à certaines conditions (mesure d'un segment...) On peut aussi voir la théorie de la mesure comme une étude des formes linéaires sur certains espaces vectoriels de fonctions.

À l'origine de la théorie de la mesure, nous trouvons notamment Émile Borel (1871–1956) et Camille Jordan (1838–1922).

La théorie de l'intégration, développée par Bernhardt Riemann (1826–1866) sur base de la théorie de Jordan fut par la suite profondément remaniée par Henri Lebesgue (1875–1941). Celui-ci étendit la théorie de la mesure en vue d'agrandir l'ensemble des fonctions intégrables. La théorie subit encore de nombreux développements ultérieurs, permettant ainsi au calcul intégral de nous fournir un outil puissant.

4.5 Histoire rapide des étalons de mesure

4.5.1 Idée générale

Les premières unités de mesure dont on ait des traces sont dérivées des membres de l'homme. On retrouve ainsi cinq mesures-membres : la coudée, l'empan, le doigt, la palme et la brasse. Ces mesures étaient utilisées dans de nombreuses civilisations anciennes, bien qu'elles varient d'une région à l'autre.

Une variation de la coudée, le *double remen*, a été le standard de mesure égyptien. Le double remen est la longueur de la diagonale d'un carré d'une coudée de côté.

Les Romains ont été les premiers à utiliser le pied comme unité de mesure. Ils l'ont divisé en douze pouces.

L'évolution des diverses civilisations a conduit à l'élaboration de mesures-étalons dont l'utilisation était toutefois spécifique de l'époque et des régions concernées. Babylone, l'Égypte et les cités grecques utilisaient déjà des étalons de mesure pour comparer et valider les instruments de mesure commerciaux. Dès 3000 ans avant J.-C., les Égyptiens utilisaient une tige de bois étalonnée selon les unités de mesure en vigueur. Sur certaines fresques d'Égypte ancienne, on peut voir que des cordes à nœuds espacés l'un de l'autre d'une coudée, étaient utilisées.

Il est certain que *l'art de la mesure* est antérieur aux Grecs. Cependant, c'est à eux que nous devons *la science de la mesure*. Grâce à leur connaissance de la géométrie et leur expérimentation des poids et mesures, ils ont pu donner à leur système de mesures, des assises scientifiques.

Toutes les grandes civilisations ont mis au point des ensembles d'étalons fondés sur le monde physique, et au fur et à mesure de l'évolution de la science et des techniques, les étalons se sont complexifiés.

À la fin du XVIIIe siècle, peu après la révolution française, des scientifiques français ont élaboré le système d'unités que nous appelons *universel*, parce qu'il est utilisé aujourd'hui dans presque toutes les parties du monde (à l'exception notable de certains pays anglophones).

L'idée de base était de choisir un étalon inaltérable dans le temps. Par exemple, l'étalon de longueur choisi fut la $\frac{1}{10.000.000}^{\text{e}}$ partie du quart du méridien terrestre, et fut appelé *le mètre*. Depuis la première Conférence générale des poids et mesures (Paris, 1889), et jusqu'en octobre 1960, il était représenté par la distance, à la température de 0 °C, de deux traits parallèles tracés sur une barre en platine iridié déposée au pavillon de Breteuil, à Sèvres. Cependant, les scientifiques ayant démontré que le platine est lui aussi altérable au cours du temps, la définition du mètre a changé, et de 1960 à 1983, le mètre a été défini à partir d'une des radiations émises par une lampe à décharge contenant l'isotope 86 du krypton. Depuis, l'utilisation de lasers ayant permis une détermination très précise de la vitesse de la lumière, la nouvelle définition du mètre a été rattachée à la valeur de

cette grandeur ([13]). Ainsi donc à l'heure actuelle, le mètre est égal à la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée de $\frac{1}{299.792.458}^{\text{e}}$ de seconde.

4.5.2 La complexité des unités d'aires ([14])

La mesure des aires a toujours préoccupé les hommes en raison, notamment, de ses implications économiques. Cependant, comprendre la manière dont nos ancêtres s'y prenaient pour mesurer un bien, et surtout pour en calculer la superficie, reste un problème difficile, en raison tout d'abord, du flou que l'on retrouve dans les unités utilisées. Il n'est pas toujours aisé, par exemple, de distinguer les unités de mesure d'aire et les unités de longueur. De plus, les unités utilisées pour mesurer différentes grandeurs, n'étaient pas toujours cohérentes.

Parmi les documents retrouvés datant de la fin du Moyen Âge (14e–16e siècles), certains sont exclusivement consacrés aux mesures d'aires. Ce sont les *compoix*, qui sont en fait, les ancêtres de nos cadastres. D'autres mélangent des mesures de longueur et d'aire. Dans ceux-ci, lorsqu'il y a ambiguïté, il nous incombe d'évaluer ce qui provient d'une absence de règles mathématiques, et ce qui relève de conventions et d'usages locaux. Aussi, dès le 15e siècle et jusqu'après la Révolution, mathématiciens et théoriciens des techniques de mesurage se sont appliqués à exposer dans des traités, des méthodes simples pour effectuer des mesures, et en déduire des calculs.

Pour ce qui est de la mesure des longueurs, et particulièrement de *l'arpentage*, la situation semble claire, quoique variable suivant les régions. Dans le Languedoc, par exemple, on utilisait uniquement *la canne*, et son sous-multiple, *le pan* appelé aussi *la palm*.

$$1\ \textit{canne} = 8\ \textit{pans}$$

Remarquons qu'il est facile de diviser 8 par 2 ou par 4.

Ailleurs, dans les domaines royaux par exemple, on utilisait *la toise*. Celle-ci se subdivise de la sorte :

$$\begin{aligned} 1 \text{ toise} &= 6 \text{ pieds} \\ 1 \text{ pied} &= 12\text{pouces} \\ 1 \text{ pouce} &= 12 \text{ lignes} \\ 1 \text{ ligne} &= 12 \text{ points} \end{aligned}$$

Il y a ici, plus de possibilités de divisions : 12 se divise par 2, 4, 3, 6.

Les mesures obtenues reposent donc sur des rapports simples, concrets, et facilement manipulables dans les additions et les soustractions, à l'aide des doigts de la main, ou des phalanges.

On rencontre également *le destre*. C'est l'unité utilisée par les arpenteurs, tandis que les charpentiers utilisent, eux, la canne et le pan. On considère généralement que

$$\begin{aligned} 1\ \textit{destre} &= 2\ \textit{cannes} \\ &= 16\ \textit{pans}. \end{aligned}$$

([13]) Résolution de la 17e Conférence internationale des poids et mesures, octobre 1983.
([14]) ***Voir [61]***

Le « décodage » des mesures de longueur anciennes ne pose pas trop de problèmes. Les mesures d'aire, par contre, utilisent des unités et surtout des sous-unités, nommées et interprétées diversement.

- Certains documents, à usage local, fournissent des mesures sans aucune mise au point préalable. Elles sont le reflet des pratiques en usage à cette époque et cet endroit précis.
- Les *expertises* et les *cannages*, réalisés en vue du paiement des travaux effectués, comportent beaucoup plus de mentions. Toutefois, là encore, leur interprétation n'est pas toujours aisée.
  Ainsi, un mur de « 158 cannes et 7 pans » peut signifier un mur dont la longueur mesure 158 cannes et 7 pans. Mais cela peut signifier aussi un mur dont l'aire mesure (158 cannes et 7 pans) carrés. Ou encore un mur dont l'aire mesure (158 cannes) carrées et 7 sous-unités définies différemment...
  Au mieux, nous pouvons trouver sur le document étudié les types d'unités spécifiques à l'objet de l'ouvrage, souvent dans une formulation hermétique pour les non-initiés.
- Parmi les unités de mesures d'aire, on rencontre également :
  - la *céterée*, c'est la superficie d'un carré de 10 destres de côté ;
  - le *quarton*, il vaut 1/5 d'une céterée. En fait, il est équivalent à une bande de terrain rectangulaire de 2 destres de large et 10 destres de long.

  Le parallèle qui vient d'être établi entre une superficie et « une bande de terrain rectangulaire d'aire équivalente » simplifie l'approche de la question des unités sous-multiples dans la mesure des aires.
- Cela nous permet, par exemple, de définir une autre unité rencontrée dans les documents anciens : *le pan (ou palm) simple*. Contrairement à ce qu'indique son nom, c'est une unité de mesure d'aire. Il vaut 1/16 de destre carré.

Il ne faut pas le confondre avec le *pan carré*. En effet,

1 destre carré = 16 pans simples

1 destre carré = 256 pans carrés.

En fait, le pan simple équivaut à la superficie d'une bande de terrain rectangulaire de 1 pan de large et 1 destre de long (*Fig. 4.19*).

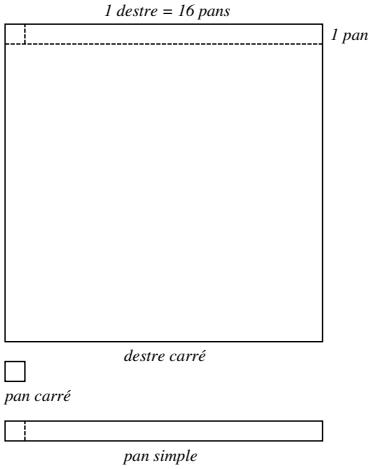


Fig. 4.19 Destre et pans

Cela semble clair ? Mais attention ! Derrière cette apparente simplicité se cachent des pièges sournois tels que celui-ci :

> Le destre carré utilisé pour mesurer un labour est plus grand que celui utilisé pour mesurer une vigne... !

Le premier est appelé *destre carré long*, et le second *destre carré court*. Le pan simple doit alors plutôt être défini comme la mesure de l'aire d'une bande de terrain rectangulaire

de largeur égale à 1 pan équivalent à une fraction de l'unité d'aire principale considérée, celle-ci étant imposée par le contexte.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{1 pan simple} &= 1/16 \text{ de destre carré long} \\ &= 1/13 \text{ de destre carré court} \\ &= 1/8 \text{ de canne carré} \end{aligned}$$

C'est donc une unité de mesure qui ne peut s'interpréter que dans un contexte préalablement défini.

– En gardant l'image des bandes rectangulaires, on peut définir également la *toise-pied*, la *toise-pouce*...

Chapitre 5

Une grandeur de base : l'aire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous élaborons un fil conducteur relatif aux concepts d'aire et de mesure des aires, en nous plaçant d'un strict point de vue mathématique. Il s'agit donc de décrire ces concepts dans leur évolution de situations familières simples vers des situations de plus en plus sophistiquées. Compte tenu du public cible de notre recherche, nous nous abstiendrons néanmoins d'aller jusqu'à envisager le stade ultime de cette évolution, à savoir celui de la théorie de l'intégration sur un espace mesuré.

Nous partirons donc de l'observation des objets et de leurs relations, et envisagerons ensuite la manipulation et la mesure de *grandeurs* telles que *longueur* et *aire*.

Les grandeurs permettent de comparer des objets. Elles induisent l'idée de mesure qui elle-même conduit à la nécessité d'établir des unités conventionnelles. On peut ainsi, dans la communication, remplacer la grandeur considérée par une expression associant un nombre et une unité de mesure. Ce passage permet de se *simplifier la vie* en remplaçant une manipulation concrète par une manipulation formelle.

Les mesures de certaines grandeurs s'obtiennent par un mesurage direct.

Exemples : Mesurer les dimensions d'un meuble. Mesurer la capacité d'une bouteille en la remplissant d'eau puis en transvasant celle-ci dans un récipient gradué.

D'autres s'obtiennent par un mesurage d'autres grandeurs suivi d'un calcul.

Exemples :
- Calculer la vitesse et l'éloignement d'un objet en mouvement en mesurant la durée entre le moment d'émission et le moment de réception d'un signal radar.
- Calculer le volume d'une pièce d'habitation en mesurant ses dimensions.

Comme l'exprime Stella Baruk,

> *Depuis des millénaires, l'homme s'est ingénié à remplacer les mesures directes... par des opérations et des calculs ne mettant en jeu que des nombres.*

Notre programme est donc tracé : partant du concept de grandeur « à l'état brut », il

nous revient de décrire son évolution jusqu'à l'établissement des formules d'aire les plus courantes.

5.2 Au début était le verbe...

La langue maternelle ne s'apprend pas à l'aide de définitions. Toute tentative de définition d'une grandeur telle que l'aire d'une partie du plan « à partir de rien » revient à remplacer un mot par un autre, et est susceptible d'entraîner d'innombrables quiproquos, comme le montrent les exemples suivants :

- *La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions : longueur, largeur et hauteur, [54].*
- *L'aire d'une surface est l'étendue de celle-ci, [63].*
- *L'aire d'une portion de plan limitée par une ligne fermée est obtenue par quantification de son étendue, [10].*

Toutes ces « définitions » n'ont de sens que pour ceux qui n'ont pas besoin d'une véritable définition parce qu'ils savent de quoi on parle.

Notre approche dans ce chapitre étant strictement mathématique, nous considérerons donc les termes « grandeur » , « longueur » , « aire » , « mesure » ... comme étant des termes primitifs ne nécessitant aucune définition. Par contre, il nous appartient de leur attribuer des propriétés et de les impliquer dans des opérations.

Insistons encore sur le fait que le concept de grandeur est ce qui permet de **comparer** deux objets.

5.3 Perception qualitative de l'aire

5.3.1 Comparaison directe d'aires

Dans un premier temps, nous pouvons comparer les aires de deux portions de plan sans faire intervenir aucune mesure. Cette perception correspond au niveau 0 de Van Hiele qui considère les objets de façon globale, sans intervention de propriétés particulières.

La comparaison de deux objets consiste à établir une relation d'ordre entre leurs aires. Il faut donc déterminer si l'aire de A est plus ou moins grande que celle de B, ou si elles sont égales. Dans ce contexte, les expressions « plus étendu que » et « moins étendu que », spécifiques à la grandeur *aire*, seront privilégiées. En effet, les termes « plus grand que » et « plus petit que » peuvent être utilisés pour toutes les grandeurs. Par contre, l'usage des termes spécifiques aide l'apprenant à prendre conscience de la notion d'aire.

Dans les premiers exemples rencontrés, cette comparaison se fera

- par superposition directe [(1)]

(1) R. Bkouche, [12], mentionne ce principe comme étant *le principe premier de la géométrie.*

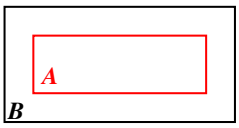


Fig. 5.1
Aire (A) < Aire (B)

– à l'œil : on déplace mentalement un objet de façon à le visualiser superposé à une partie de l'autre.

Si trois objets A, B, C sont mis en comparaison, on peut aboutir à une expression telle que
Aire (A) < Aire (B) < Aire (C)

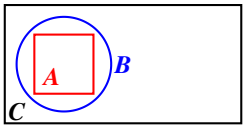


Fig. 5.2

L'expression ci-dessus fournit un encadrement de l'aire de B par celles de A et C. De plus, bien qu'elle ne mette en évidence que deux comparaisons, une troisième est sous-jacente du fait que la comparaison des aires possède la principale propriété d'une relation d'ordre : la *transitivité*. Cette dernière est très « naturelle » : *Si l'aire de A est plus petite que celle de B et si l'aire de B est plus petite que celle de C, alors l'aire de A est plus petite que celle de C.*

5.3.2 Comparaison indirecte d'aires

Par « comparaison indirecte » des aires d'objets A et B, nous entendons un processus constitué d'une suite d'opérations (fusion, décomposition) s'appliquant à l'objet A, donnant un objet A' qui peut *in fine* être comparé directement à B.

A. Précautions préalables

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons utiliser une propriété spécifique des opérations évoquées ci-dessus afin de faire émerger le caractère additif de l'aire qui assure sa conservation lors du processus de comparaison.

Aires et fusion :

L'assemblage de deux formes géométriques dans le but d'en créer une troisième par fusion permet de faire apparaître le caractère additif de l'aire.

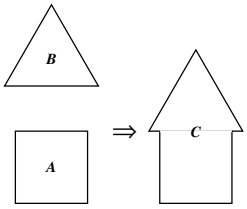


Fig. 5.3
Aire (A) + Aire (B) = Aire (C)

Une manipulation de ce type et son expression par une formule situent l'activité au niveau 1 de Van Hiele.

Aires et décomposition :

La décomposition d'une forme géométrique dans le but d'en créer deux relève également du caractère additif de l'aire.

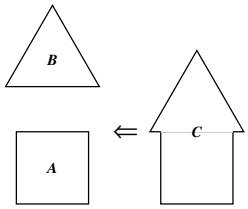


Fig. 5.4
Aire (C) = Aire (A) + Aire (B)

Conclusion :

Le caractère additif de l'aire assure sa conservation aussi bien lors de la décomposition que de la recomposition.

B. Les puzzles ou le procédé d'*équidécomposition*

Si nous devons comparer deux formes géométriques différentes, nous pourrons mettre en évidence l'égalité éventuelle de leurs aires via un découpage d'un des objets suivi d'une recomposition permettant d'obtenir l'autre. Nous venons de montrer que la fusion et la décomposition de surfaces conservent l'aire totale, ce qui légitime le procédé.

Le découpage d'un objet A en morceaux ne doit pas être effectué de manière aléatoire mais bien de manière raisonnée, en vue de reconstituer un objet B à la façon d'un puzzle.

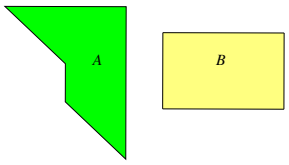


Fig. 5.5

Les objets A et B ne sont pas superposables. La relation d'ordre entre leurs aires respectives n'étant pas évidente à l'œil nu, il faut décomposer l'une pour obtenir une forme comparable à l'autre. Dans l'exemple choisi, il est possible de décomposer l'objet A en deux pièces permettant de recomposer l'objet B comme illustré ci-dessous.

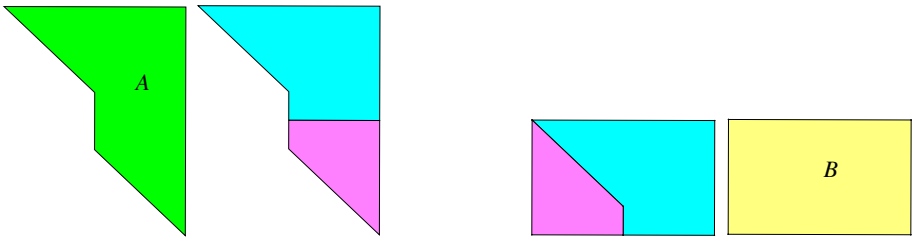


Fig. 5.6

Les puzzles constituent donc un outil permettant d'établir l'égalité d'aire de formes différentes. De plus, notons dès à présent qu'ils vont nous conduire également à l'élaboration de *formules* de calcul d'aires (*voir section 5.8*).

Remarque :

Nous touchons ici à une des compétences fondamentales du raisonnement mathématique : l'aptitude à trouver les outils et les procédures nécessaires pour passer d'une situation initiale à une situation finale imposée sans disposer d'un algorithme donné. Ce type de démarche nous amène au niveau 2, voire 3, de Van Hiele.

En fait, lorsque l'élève se trouve devant l'objet A, il faut qu'il parvienne à **voir** les propriétés qu'il recèle, les différents éléments qui lui sont associés, déjà tracés ou non, et dont l'usage lui permettra de décomposer l'objet A pour reconstituer l'objet B. Il faut pour cela que l'esprit fasse un aller-retour constant entre les objets A et B, pour évaluer le *chantier* A en le comparant avec l'*objectif* B.

« **Voir** les propriétés que les objets recèlent » signifie notamment :

– repérer les côtés de même longueur, les angles de même amplitude...
– imaginer les diagonales, les médianes, les hauteurs...
– visualiser les axes et les centres de symétrie, les milieux des segments...
– élaborer toute découpe utile
– ...

Cette capacité à **voir** est primordiale dans l'apprentissage des mathématiques et dans leur usage car elle est notamment à la base de la compétence « démontrer » et elle permet la perception de « patterns ([2]) ». Elle a été étudiée en détails par R. Duval (*voir l'annexe A.4*).

Ce sujet, bien qu'abordé dans la présente recherche, s'étend bien au-delà des objectifs que nous nous sommes fixés.

B. Le procédé d'*équicomplémentarité*

Le principe est le suivant : Les objets A et B sont de même aire si on peut les englober chacun dans un même objet C, de telle façon que les compléments à apporter pour obtenir C soient identiques ([3]).

([2]) *Pattern* : mot anglais signifiant *exemple, modèle*. Par **pattern**, nous entendons *élément répétitif*, *structure commune* permettant la généralisation. Par exemple la structure qui sous-tend les abaques du système métrique permet d'imaginer une extension à plus de trois dimensions. De même, la structure commune aux polynômes obtenus en développant des puissances de binômes conduit au binôme de Newton e au triangle de Pascal.

([3]) Cette notion est déjà présente chez Euclide. En effet, au début du livre I des « Eléments », on trouve dans les notions communes (c'est-à-dire communément admises)

– 2. *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
– 3. *Et si, à des choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*

Exemple 1

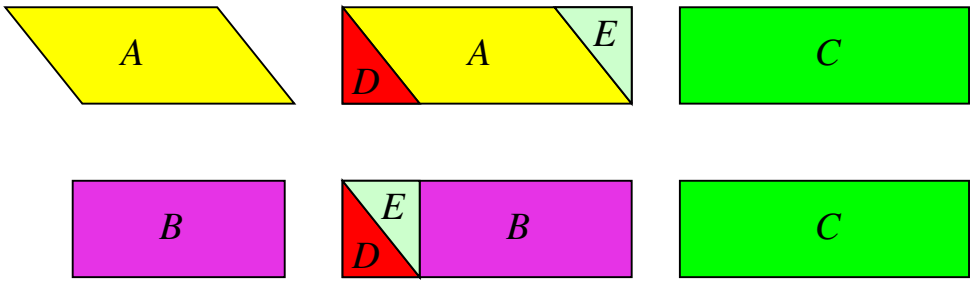


Fig. 5.7

A et B peuvent tous deux être englobés dans C, et on a

$$\begin{cases} \text{Aire } (A) + \text{Aire } (D) + \text{Aire } (E) = \text{Aire } (C) \\ \qquad\qquad et \\ \text{Aire } (B) + \text{Aire } (D) + \text{Aire } (E) = \text{Aire } (C) \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que Aire (A) = Aire (B).

Exemple 2

On peut appliquer ce procédé pour comparer les aires de X et Y.

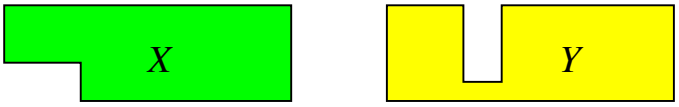


Fig. 5.8

En effet

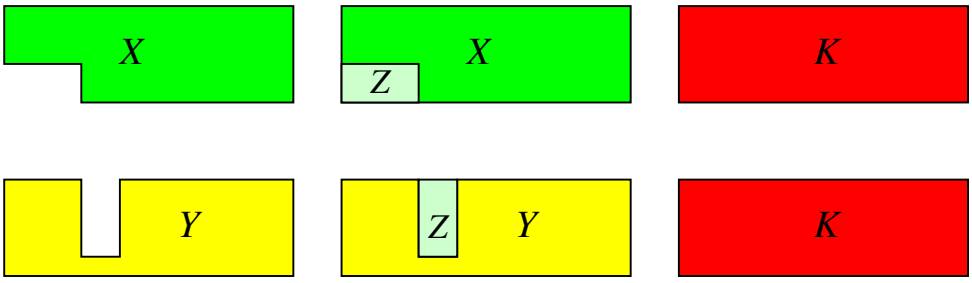


Fig. 5.9

On voit que

$$\begin{cases} \text{Aire } (X) + \text{Aire } (Z) = \text{Aire } (K) \\ \qquad\qquad et \\ \text{Aire } (Y) + \text{Aire } (Z) = \text{Aire } (K) \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que Aire (X) = Aire (Y).

Remarque :

Le procédé d'équicomplémentarité nous fournit un second outil permettant non seulement d'établir l'égalité d'aire de formes différentes, mais conduisant également à l'élaboration de *formules* de calcul d'aires.

D. Une application « historique »

On trouve dans EUCLIDE, Livre 1 des Eléments, proposition 35 :

> *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

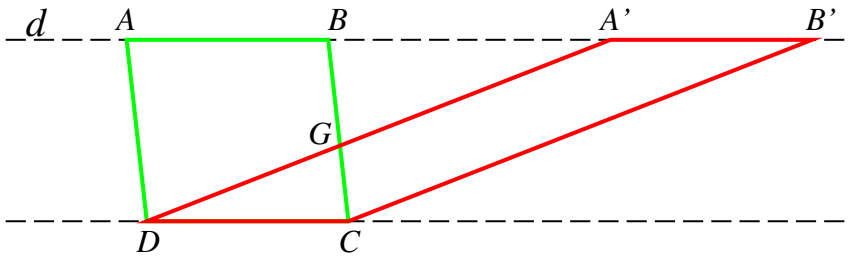


Fig. 5.10

Dans la démonstration de cette proposition, EUCLIDE utilise déjà le procédé d'équicomplémentarité.

Partons des éléments suivants :

– $ABCD$ est un parallélogramme,
– $[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments de même longueur de la droite d.

Démontrons que l'aire de $(ABCD)$ est égale à l'aire de $(A'B'CD)$.

En effet :

Les deux triangles (ADA') et (BCB') sont égaux ([4]). Ils ont donc la même aire.

Ceci peut se traduire en disant que la somme de l'aire du trapèze $(ABGD)$ et de l'aire du triangle (GBA') est égale à la somme de l'aire du trapèze $(CGA'B')$ et de l'aire du triangle (GBA') (*propriété d'additivité de l'aire appliquée à la décomposition*).

Donc, l'aire du trapèze $(ABGD)$ est égale à l'aire du trapèze $(CGA'B')$ (*par le principe d'équicomplémentarité*).

Par conséquent, la somme de l'aire du trapèze $(ABGD)$ et de l'aire du triangle (DGC) est égale à la somme des aires du trapèze $(CGA'B')$ et du triangle (DGC).

([4]) Cas d'égalité des triangles C-A-C :
– $|AD| = |BC|$
– $|AA'| = |AB| + |BA'| = |A'B'| + |BA'| = |BB'|$
– $\widehat{DAB} = \widehat{CBB'}$

Autrement dit, l'aire du parallélogramme $(ABCD)$ est égale à l'aire du parallélogramme $(A'B'CD)$ (*propriété de l'additivité de l'aire appliquée à la fusion*).

5.4 Perception mixte de l'aire

Dans la section précédente nous avons traité de la comparaison de deux aires d'un point de vue purement qualitatif. En allant plus loin dans l'utilisation des outils rencontrés, nous nous acheminons vers une quantification de l'aire. En effet, dans cette section, des nombres naturels d'abord, des rapports de naturels ensuite, interviennent lors de comparaisons d'aires.

5.4.1 Multiplication d'une aire par un naturel

Si nous assemblons plusieurs formes identiques, nous obtenons une nouvelle forme dont l'aire est obtenue par additions répétées des aires de la forme de base, ce qui peut être regardé comme la multiplication de l'aire de cette forme de base par un nombre naturel. Il s'agit bien de travailler avec un opérateur multiplicatif agissant sur une grandeur et non pas avec un nombre pur.

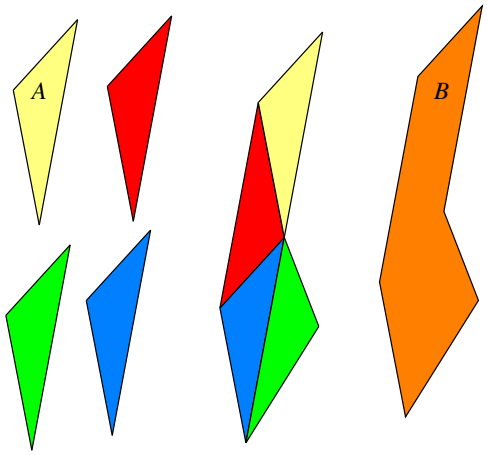


Fig. 5.11

Il apparaît clairement que
$$\text{Aire}\,(A) + \text{Aire}\,(A) + \text{Aire}\,(A) + \text{Aire}\,(A) = 4\ \text{Aire}\,(A) = \text{Aire}\,(B).$$

Ce passage à l'utilisation d'un opérateur multiplicatif nous permet d'aborder deux autres notions fondamentales :
– la **décomposition d'une forme en fragments identiques**,
– le **rapport d'aires**.

5.4.2 Décomposition d'une forme en fragments identiques

a) Utilisation de l'opérateur multiplicatif en lecture inverse Certaines formes peuvent se décomposer en une juxtaposition de fragments identiques. Soit, par exemple :

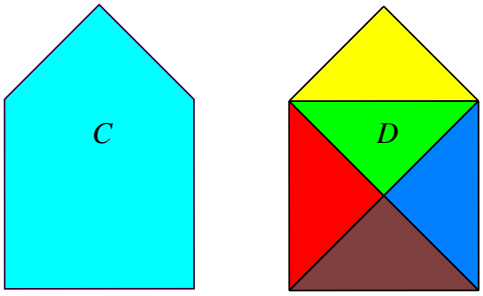


Fig. 5.12

On voit clairement que Aire $(C) = 5$ Aire (D).

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Aire } (D) &= \frac{1}{5} \text{ Aire } (C) \\ &= \frac{\text{Aire } (C)}{5} \end{aligned}$$

b) Une deuxième « application historique » : Euclide I 37

> *Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

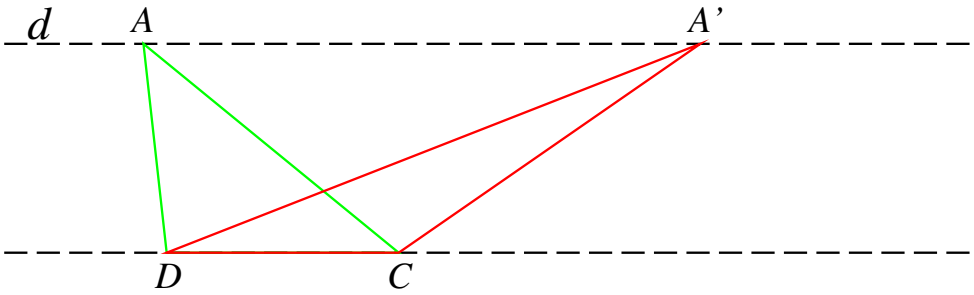


Fig. 5.13

Si A et A' sont deux points d'une droite parallèle à DC, alors les triangles (ADC) et $(A'DC)$ ont la même aire.

En effet, chaque triangle est la moitié d'un parallélogramme dont le quatrième sommet se trouve sur la droite AA'.

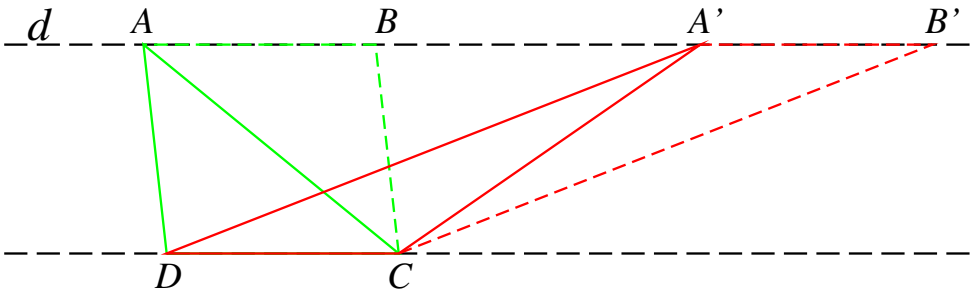


Fig. 5.14

On sait que les aires de $(ABCD)$ et de $(A'B'CD)$ sont égales (EUCLIDE I 35).

Or, l'aire de $(ABCD)$ est le double de celle de (ADC), tout comme l'aire de $(A'B'CD)$ est le double de celle de $(A'DC)$.

Par conséquent l'aire de (ADC) est égale à celle de $(A'DC)$ ([5]).

5.4.3 Rapport de deux aires

La comparaison simple ([6]) de deux formes d'aires différentes peut parfois être affinée dans le cas où un multiple de l'une a la même aire qu'un multiple de l'autre.

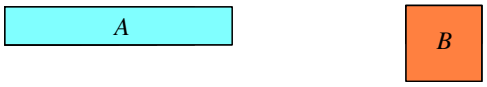


Fig. 5.15

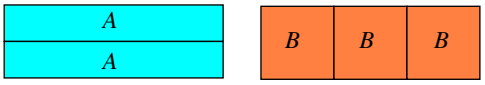


Fig. 5.16

La comparaison des multiples des deux formes A et B tels qu'on les voit à la figure 5.16 montre que $2 \times A$ est aussi étendu que $3 \times B$, ou 2 Aire $(A) = 3$ Aire (B).

Ceci nous conduit à exprimer la comparaison des aires de A et B sous la forme : « *L'aire de A est à l'aire de B comme 3 est à 2.* »

Attention, cette approche de la notion de rapport se fait sans que la **mesure** d'aire ne soit nécessaire !

([5]) Dans cette démonstration, EUCLIDE utilise encore une des notions communes présentent au début du livre I (voir la note en bas de page 111). En effet, on trouve au numéro 6. *Et les moitiés des choses égales sont égales entre elles.*

([6]) Nous appelons comparaison simple une relation du type Aire $(A) <$ Aire (B).

5.4.4 Remarques

Notion de bande

L'approche développée dans les deux propositions d'EUCLIDE précitées permet de donner une justification au vocabulaire qui sera utilisé plus loin lorsqu'on établira les formules de calcul d'aire d'un parallélogramme ou d'un triangle.

En effet, les deux droites parallèles envisagées dans ces deux propositions permettent de définir ce que nous appellerons une *bande*. Nous entendons par *bande* la portion de plan comprise entre ces deux parallèles.

Notons que tout parallélogramme peut être inscrit dans deux bandes et que tout triangle peut être inscrit dans trois bandes.

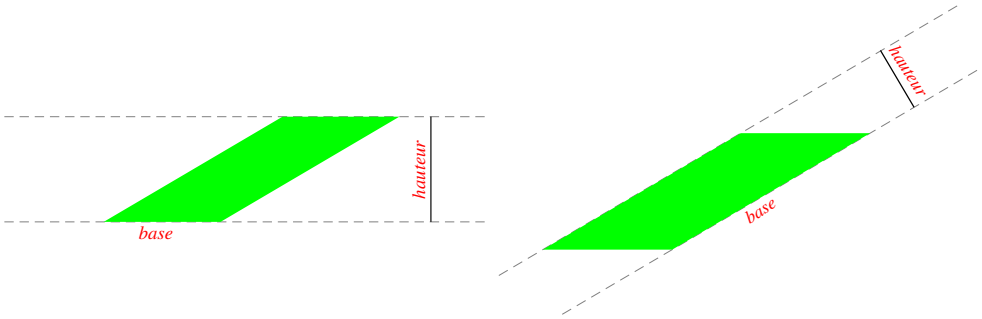


Fig. 5.17

Une bande étant choisie, on appellera *base* d'un parallélogramme ou d'un triangle un côté appartenant à un des bords de la bande, et *hauteur* (relative à cette base) la largeur de la bande.

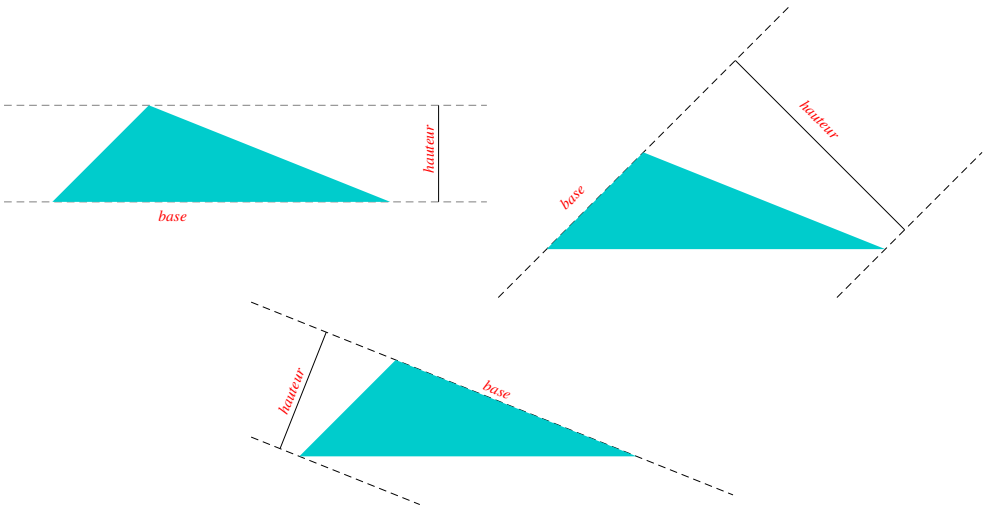


Fig. 5.18

On peut voir que la largeur de la bande change si on change de base, et donc que la hauteur dépend de la base choisie.

Autre regard

On peut aussi envisager la déformation continue du triangle ADC (*fig. 5.13*) ou du parallélogramme $ABCD$ (*fig. 5.10*) obtenue en « tirant » leur sommet A en A' de telle sorte que AA' soit parallèle à DC. On peut déduire de ce qui précède que l'aire de tous les triangles et de tous les parallélogrammes obtenus tout au long de cette déformation est constante.

Extension du procédé

L'objet X peut être déformé de façon continue pour obtenir le rectangle Y.

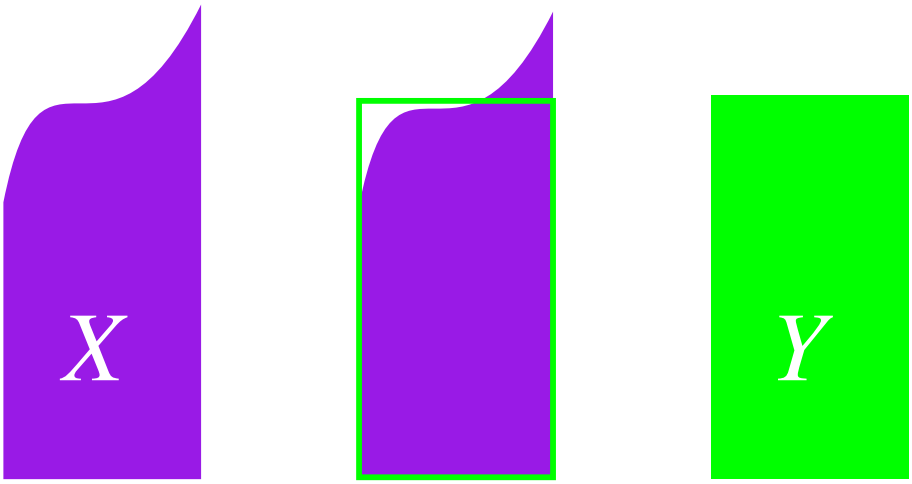


Fig. 5.19

Notons que la hauteur du rectangle Y est la valeur moyenne de la hauteur des points de la courbe limitant l'objet X. Cette valeur moyenne peut être obtenue par les techniques du calcul intégral. Mais ceci sort du cadre de cette recherche.

5.5 Quantification de l'aire

Le caractère additif de l'aire et la décomposition d'une forme en fragments identiques, rencontrés à la section précédente, nous fournissent les outils justifiant la **quantification** de l'aire d'une figure.

Etablissons une distinction entre **quantifier** et **numériser** une grandeur.

a) **Quantifier une grandeur** revient à l'exprimer en tant que multiple ou partie d'une unité qui est elle-même une grandeur de même nature choisie comme référence. La quantification associe donc un **nombre** à la grandeur étudiée. Ce nombre sera appelé **mesure** de cette grandeur pour l'unité choisie. Ceci nous ouvre le chemin de la numérisation.

b) **Numériser une grandeur** consiste à *remplacer* cette grandeur par une quantité nu-

mérique qui se substitue à elle. On quitte donc alors une notion et un objet géométriques pour s'occuper essentiellement de quantités, c'est-à-dire de nombres. On remplace donc un objet « matériel » (qui peut être touché, dessiné, colorié, ...) par un nombre qui relève d'une autre forme d'abstraction. Ce remplacement constitue un changement de **cadre** au sens de R. DOUADY ([7]). En effet, on passe d'un objet géométrique à un objet numérique.

Ce remplacement peut être perçu comme une facilitation des opérations. Notons cependant qu'il conduit parfois à une perte du sens des opérations que l'on mène et des résultats obtenus. C'est particulièrement visible dans les problèmes de « calcul de grandeurs » qui sont quelquefois pratiqués et dans lesquels les données sont numériques, les manipulations utilisent des formules et des nombres et les résultats sont purement numériques et n'ont plus de signification liée au contexte concret qui sert de *prétexte* au problème ([8]).

La déviance qui vient d'être exprimée est un effet pervers de la **prégnance du nombre** sur la forme géométrique dans l'apprentissage des mathématiques.

Abordons donc maintenant la notion, ainsi clarifiée, de quantification de l'aire.

Celle-ci repose toujours sur le **pavage** de la surface à quantifier par des figures identiques. Un pavage est un recouvrement sans chevauchement et sans espace libre.

La figure répétée sera l'**unité**.

5.5.1 Recouvrement exact

Envisageons tout d'abord le cas où l'aire à quantifier est recouverte par un nombre entier de figures identiques à l'unité.

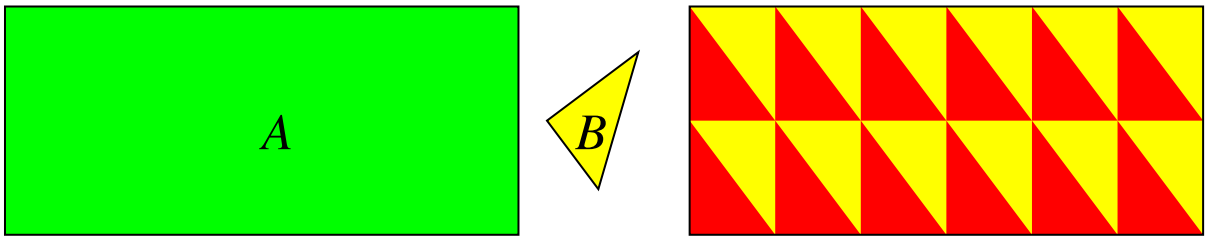


Fig. 5.20

Le rectangle A est pavé par le triangle B. L'aire de A s'exprime donc par comptage de ces triangles. Dans la figure ci-dessus, l'aire de A est égale à 24 fois l'aire de B. On peut écrire ceci de cette manière :

$$\text{Aire } (A) = 24 \text{ Aire } (B)$$

([7]) Voir l'annexe A.2

([8]) Un exemple parmi de nombreux autres : il est fréquent que des élèves soient incapables de donner la signification du résultat numérique d'un calcul d'aire obtenu par une application correcte d'une formule, parce qu'ils ne *voient* pas ce que représente l'unité d'aire.

5.5.2 Recouvrement par l'unité et fractions de celle-ci

Considérons maintenant une surface dont le recouvrement fait apparaître des fractions de la figure unité. Dans ce cas, le dénombrement entier ne suffit plus, les parties fractionnaires doivent aussi être prises en compte.

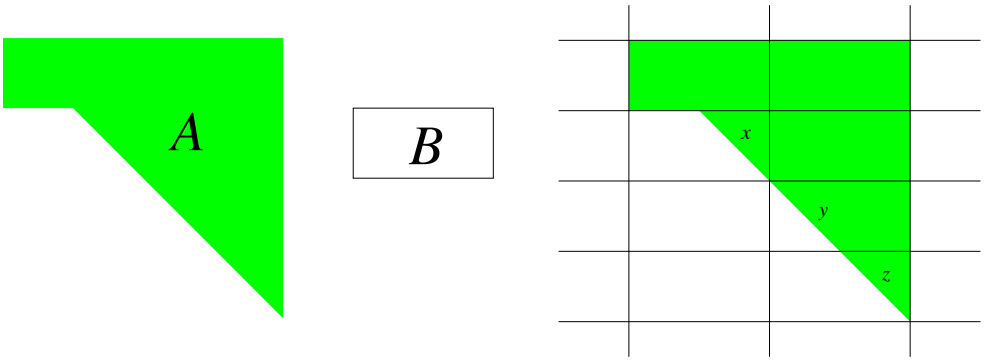


Fig. 5.21

Si nous voulons quantifier l'aire de A grâce à l'unité B, nous constatons que le pavage par des figures B fait apparaître 3 pièces entières et 3 pièces qui sont des fractions de B. Les pièces x et z ont une aire égale au quart de l'aire de B tandis que l'aire de y est égale aux trois quarts de celle de B.

Ainsi donc :

$$\text{Aire } (A) = 3 \text{ Aire } (B) + \frac{1}{4} \text{ Aire } (B) + \frac{3}{4} \text{ Aire } (B) + \frac{1}{4} \text{ Aire } (B) = \left(4 + \frac{1}{4}\right) \text{ Aire } (B)$$

5.5.3 Quantification par encadrement

Lorsqu'il n'est pas possible d'évaluer les fractions d'unité qui recouvrent la surface, un pavage permet cependant de fournir un encadrement quantifié de l'aire de la figure étudiée. Quelle que soit la forme A et quelle que soit l'unité B choisie, nous obtenons l'encadrement suivant :

Appelons k le nombre maximum d'éléments du pavage entièrement recouverts par A.

Appelons r le nombre minimum d'éléments entiers du pavage nécessaires pour recouvrir totalement A.

Nous avons alors

$$k \text{ Aire } (B) < \text{ Aire } (A) < r \text{ Aire } (B)$$

Illustrons ceci par un exemple :

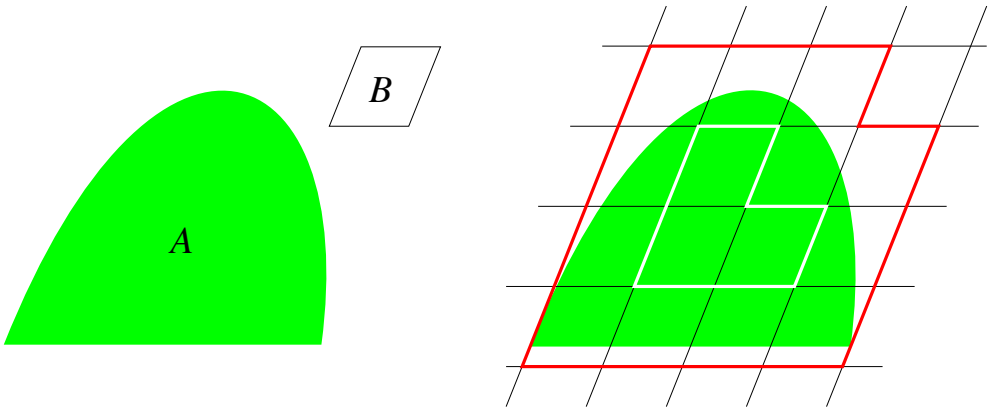


Fig. 5.22

Nous constatons que l'aire de A est comprise entre 3 et 15 fois l'aire de B.

$$3 \text{ Aire } (B) < \text{ Aire } (A) < 15 \text{ Aire } (B)$$

Remarques importantes :

1. Toute forme géométrique qui pave le plan peut être choisie comme unité et permet d'établir un encadrement de l'aire d'une figure.
2. La fourchette d'encadrement obtenue est dépendante de l'unité choisie.
3. La fourchette d'encadrement peut être améliorée, c'est-à-dire resserrée, en choisissant une unité plus petite, par exemple une fraction de l'unnité de départ.
   Appliquons ceci à la figure 5.22, en utilisant un pavage où la nouvelle unité B' est un quart de l'unité B.

$$\text{Aire } (B') = \frac{1}{4} \text{ Aire } (B)$$

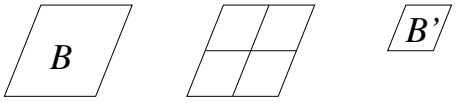


Fig. 5.23

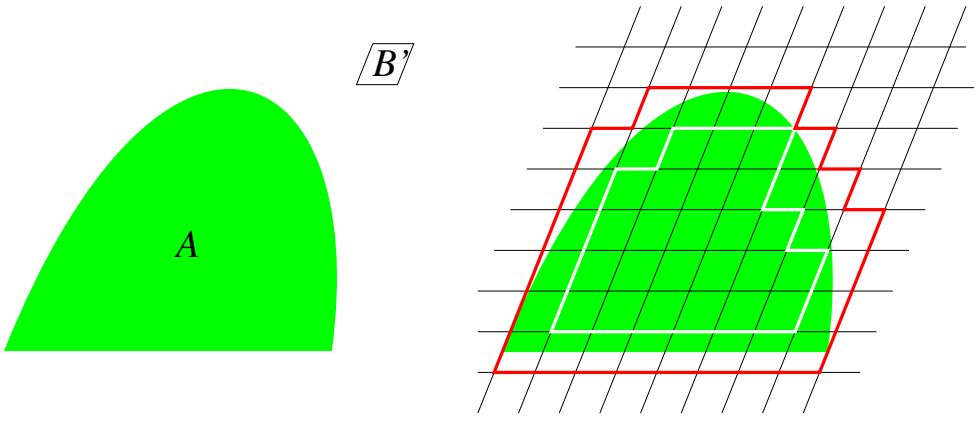


Fig. 5.24

Nous avons vu plus haut que l'aire de A est comprise entre 3 et 15 fois l'aire de B. Avec le nouveau pavage construit à l'aide de B', on voit que l'aire de A est comprise entre 24 et 49 fois l'aire de B'.

$$24 \text{ Aire } (B') < \text{ Aire } (A) < 49 \text{ Aire } (B')$$

Pour pouvoir comparer ces encadrements, il faut les exprimer à l'aide de la même unité :

$$24 \text{ Aire } (B') < \text{ Aire } (A) < 49 \text{ Aire } (B')$$

$$\Longleftrightarrow 6 \text{ Aire } (B) < \text{ Aire } (A) < (12 + \frac{1}{4}) \text{ Aire } (B)$$

$$\text{En effet } 4 \text{ Aire } (B') = \text{ Aire } (B)$$

L'aire de A se situe dans une fourchette dont la largeur est égale à 12 ($= 15 - 3$) fois l'unité B. Ce nombre 12 reflète l'erreur maximale « possible » sur la mesure de l'aire de A. Par contre, en utilisant B', la largeur de la fourchette devient $6 + \frac{1}{4}$ $(= 12 + \frac{1}{4} - 6)$ fois l'unité B. L'erreur maximale « possible » a donc diminué.

On peut réitérer ce processus afin d'améliorer l'encadrement jusqu'à atteindre la précision voulue, ou une largeur de fourchette nulle, ce qui nous ramènerait à un recouvrement exact.

5.5.4 Importance de la quantification sur la compréhension de la notion d'aire

Rappelons que l'**aire** est une grandeur et qu'elle correspond à ce que nous appelons familièrement l'**étendue**.

La grandeur aire d'une figure ne peut donc être considérée comme assimilée que lorsque l'élève est capable de « voir » la relation qui existe entre l'aire de la figure considérée et l'aire de l'unitéchoisi.

C'est précisément ce qui est réalisé lorsque l'élève a pu quantifier l'aire d'une figure.

Le travail de quantification de l'aire devrait absolument précéder la numérisation, et être longuement développé. Ceci devrait se faire au cours de multiples activités utilisant aussi bien les puzzles matériels que les recouvrements de figures-dessins par un unitéchoisi. Ce travail n'est nullement une perte de temps et nous paraît être la meilleure sinon la seule manière de donner du sens à la grandeur.

5.5.5 Choix du carré comme unité

Si dans le système conventionnel l'unité de longueur est u, alors l'unité d'aire sera l'aire du carré dont le côté est de longueur u.

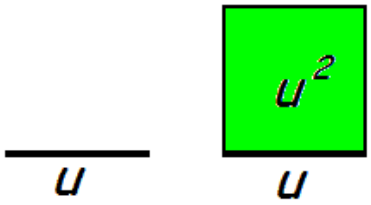


Fig. 5.25

Pourquoi l'unité « carré » s'est-elle imposée ?

Nous allons tenter de répondre à cette question par des éléments qui n'engagent toutefois que les auteurs de cette recherche. Il nous semble que deux arguments essentiels ont orienté ce choix.

Premier argument : la perpendicularité

Remarquons tout d'abord que la direction verticale est une direction fondamentale pour la perception visuelle de l'être humain. Divers facteurs justifient la prédominance naturelle de la verticale. Parmi ceux-ci, citons les observations suivantes :

- D'un point de vue physique, l'attraction gravitationnelle se manifeste suivant une direction que nous avons nommée la **verticale**. Cette force conditionne tous nos faits et gestes ainsi que notre milieu de vie (géotropisme).
- D'un point de vue physiologique, l'être humain posséde un plan de symétrie **vertical** (nous avons deux yeux, deux oreilles, etc.). Notons que, en terme d'évolution, c'est le passage à la bipédie qui a rendu la direction verticale prégnante.
- A un endroit donné, sur terre, la **verticale** est unique, contrairement aux horizontales et aux obliques, et est indépendante de l'observateur.

L'horizontalité, quant à elle, découle naturellement de la verticale comme conséquence de la gravitation, qui, à notre échelle humaine, fait apparaître le plan horizontal au niveau des étendues d'eau. Nous avons également une perception physiologique de l'horizontalité, ou, en tout cas, nous sentons assez vite, lors de déplacements, si un terrain est horizontal ou non. La confrontation de l'horizontalité et de la verticalité fait apparaître toute l'importance de **l'angle droit**.

Les mouvements simples (demi-tour, quart de tour) associés à l'orientation (devant, derrière, à gauche, à droite) mènent également à l'angle droit.

Parmi les formes géométriques qui pavent le plan, celles qui utilisent l'angle droit vont donc être privilégiées.

Deuxième argument : l'isotropie

Parmi les figures géométriques munies d'angles droits, le carré présente l'avantage supplémentaire d'utiliser la même longueur selon les deux directions déterminées par ses côtés.

Opposons à cela certains étalons d'aire utilisés autrefois, tels que le « pouce par toise », ou « pouce par aune » dont l'usage était spécifique à **une** activité donnée. Ces étalons étaient certes utiles dans le cadre de cette activité, mais leur utilisation très ciblée limitait leur intérêt.

Le carré, au contraire, est universel. L'usage du quadrillage s'est donc naturellement imposé. De plus, il a une conséquence essentielle qui est de permettre l'usage d'une même unité de longueur dans toutes les directions. Or, nous allons montrer plus loin que les calculs d'aire reposent en fait sur des mesures de longueur.

5.6 Numérisation de l'aire

5.6.1 Intérêt de la numérisation

Comme nous l'avons dit précédemment (p. 118), numériser l'aire consiste à lui attribuer une valeur numérique, c'est-à-dire une mesure, et ainsi à **remplacer** la grandeur géométrique par un **nombre**.

Pour faire ressortir la différence entre une aire quantifiée et une aire numérisée, à partir de maintenant nous adopterons les notations suivantes :

– Une aire numérisée à l'aide d'une unité U se notera $\text{Aire}_{U}(A) = n$

– Une aire quantifiée par un unité U sera toujours, comme précédemment, notée $\text{Aire}\ (A) = n\ \text{Aire}\ (U)$

Grâce à l'usage de l'unité universelle « carré », l'interprétation de ce **nombre** n est, elle aussi, universelle dès que la longueur u du côté de ce carré unité est donnée.

En pratique donc la quantité numérique donnant la mesure de l'aire doit être exprimée par un nombre accompagné de la dimension du carré unité.

Dès lors, tous les raisonnements et manipulations relatifs aux aires peuvent être remplacés par des raisonnements et calculs sur des nombres.

5.6.2 Etablissement de l'étalon conventionnel

Pour obtenir un étalon conventionnel utile, c'est-à-dire utilisé par tous (ou par un maximum de personnes), il reste à choisir ou à imposer l'unité de longueur u présentée figure 5.25. A l'heure actuelle le S.I. (système international) choisit le mètre et est quasi universellement accepté.

Une unité ayant acquis de la sorte un statut légal est généralement désignée sous le nom d'*étalon*.

5.7 Calcul de la mesure de l'aire par les mesures de longueurs

5.7.1 Un pont entre le monde des aires et le monde des longueurs

Le but de cette section est de montrer un cheminement mental qui va permettre de remplacer le processus de comptage des unités d'aire par un calcul numérique sur des mesures de longueur.

Comme l'écrit Stella Baruk [10] :

> *On pourrait compter les* cm^2*, mais étant donné la forme de A, il est plus commode, parce que plus rapide, de prévoir ce que donnerait le comptage, plutôt que de le faire en vrai... On ne mesure donc plus l'aire d'un rectangle, mais on la prédit à l'aide d'un calcul !*

La mesure de l'aire par comptage simple

Choisissons le rectangle comme figure de départ de notre raisonnement. Comme nous l'avons vu précédemment, l'aire du rectangle peut être quantifiée en fonction du carré unité par comptage. Commençons par envisager le cas simple du recouvrement exact.

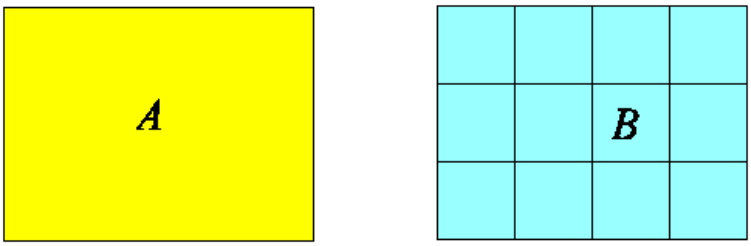


Fig. 5.26

Ici, on a Aire $(A) = 12$ Aire (B)

ou $\text{Aire}_B(A) = 12$

Si nous choisissons le cmcomme unité de longueur, nous avons pour notre exemple $\text{Aire}_{\text{cm}^2}(A) = 12$.

La mesure de l'aire par comptage groupé par rangées

Le comptage peut être accéléré par le processus suivant :

a) on compte le nombre de carrés par rangée ;
b) on compte le nombre de rangées ;
c) le nombre total de carrés est bien entendu égal au nombre de carrés d'une rangée multiplié par le nombre de rangées.

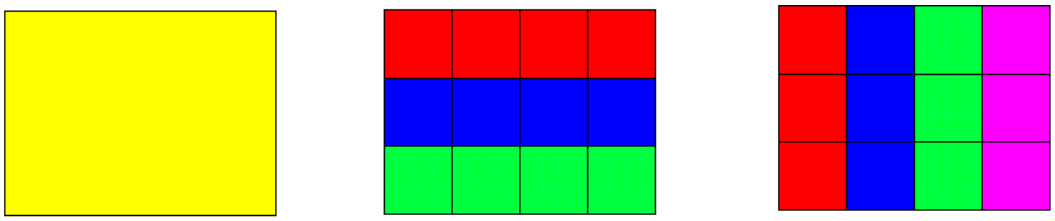


Fig. 5.27

On voit bien que le nombre de carrés couvrant A est égal à 4 carrés $\times 3$ ou 3 carrés $\times 4$.

$$\begin{aligned} \text{Aire}(A) &= (4\text{Aire}(B)) \times 3 \\ &= (3\text{Aire}(B)) \times 4 \end{aligned}$$

Si l'unité d'aire est le cm^2, nous pouvons également écrire

$$\text{Aire}(A) = 4\ \text{cm}^2 \times 3 \text{ ou } 3\ \text{cm}^2 \times 4.$$

Dans un sens comme dans l'autre, on a bien $\text{Aire}_{\text{cm}^2}(A) = 12$

Le comptage : une technique en (perpétuelle) voie de disparition

Ces deux manières de numériser l'aire (globalement ou par rangées) sont aisées à utiliser lorsque le nombre de carrés à compter est relativement petit, et elles sont d'une efficacité équivalente.

Mais qu'en est-il lorsque le rectangle grandit ?

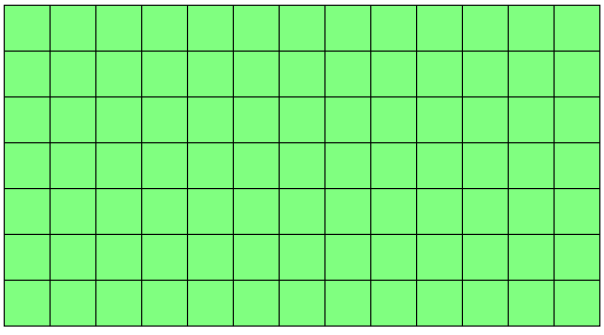


Fig. 5.28

Dans ce cas, le comptage individuel des carrés unités devient fastidieux, et donc le comptage par rangées devient rapidement plus efficace.

Et lorsqu'on arrive à un rectangle comme ci-contre, même le comptage du nombre de carrés d'une seule rangée devient lourd !
Notre paresse naturelle nous conduit alors à nous tourner vers les instruments.
Envisageons le matériel usuel de l'écolier. Avec un peu de chance, il aura à sa disposition crayon, gomme, équerre, compas, latte graduée, rapporteur...
Parmi ceux-ci, il n'y a **aucun instrument** lui permettant d'obtenir directement le nombre total de carrés. Par contre, avec une latte graduée suivant l'unité de longueur u, on peut aisément **lire** le nombre de carrés d'aire u^2 d'une rangée, aussi bien que le nombre de rangées.

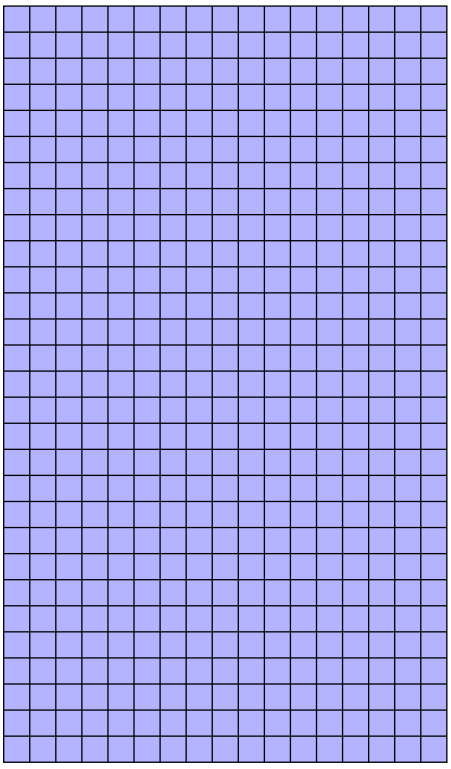


Fig. 5.29

La mesure de l'aire par les mesures de longueurs

Par ailleurs, la latte graduée est un instrument de mesure de longueur. Donc, elle donne à la fois le nombre de carrés (d'aire u^2) d'une rangée et la mesure de la longueur (en unité u) du côté correspondant. De même, le nombre de rangées correspond à la longueur (en unité u) de l'autre côté.

Donc, la mesure de l'aire du rectangle A (en unité u^2) peut être obtenue en multipliant les mesures de longueur (en unité u) de ses deux côtés.

Sous forme symbolique :

$$\mathcal{A}_{u^2} = L_u \times \ell_u$$

ou plus simplement $\mathcal{A} = L \times \ell$.

Nous en sommes donc arrivés à remplacer la quantification de l'aire du rectangle par un **calcul** numérique basé sur le produit des mesures de **deux** longueurs.

5.7.2 Remarques importantes

1. L'idée que le comptage du nombre de carrés par rangée puisse être remplacé par la mesure de la longueur de cette rangée est un passage relativement délicat pour les élèves. Il nous apparaît indispensable que ce passage soit rendu clairement perceptible par les élèves au moyen d'exercices multiples et variés.

2. Le développement que nous venons de faire dans le cas d'un recouvrement exact d'un rectangle peut s'étendre facilement au cas d'un encadrement de l'aire de ce rectangle. Il peut également s'étendre au cas d'un recouvrement fractionnaire.
3. L'idée essentielle qui vient d'émerger est le remplacement de la quantification de l'aire par un produit de mesures de deux longueurs.

   Par conséquent, nous établissons un pont entre « le monde des aires » et celui « des longueurs ». C'est cette démarche qui va nous conduire vers la construction de **formules** de calcul d'aire, et donc vers l'algébrisation.

5.8 Etablissement de formules du calcul de la mesure de l'aire de quelques polygones

5.8.1 Préliminaires

1. L'établissement des formules par et avec les élèves constitue un des meilleurs moyens de leur donner du sens !
2. Dans cette section, nous ne considérons plus que la mesure de l'aire sous sa forme numérisée, ce qui implique par exemple, que nous ne ferons plus apparaître de quadrillage. Néanmoins, il nous apparaît important de rappeler aussi souvent que possible aux élèves le sens des nombres utilisés.
3. De plus, attirons l'attention sur le fait que les formules qui vont suivre n'ont de sens que si toutes les mesures de longueur étant exprimées dans une même unité u, les mesures d'aire sont alors exprimées dans l'unité d'aire associée u^2.
4. Pour ne pas alourdir les formules, nous n'indiquerons pas les unités utilisées en regard de chacune des grandeurs.

   $\mathcal{A}$ est écrit en lieu et place de $\text{Aire}_{u^2}(\text{forme})$

   L ou ℓ est écrit en lieu et place de $\text{Longueur}_u(\text{segment})$

5.8.2 Le rectangle

Nous avons établi à la section 7 les formules suivantes ([9])

$$\mathcal{A} = L \times \ell = \ell \times L$$

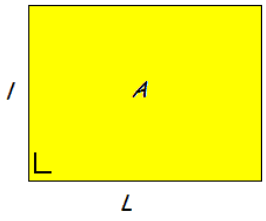


Fig. 5.30

([9]) Ce résultat obtenu lors de la quantification de l'aire du rectangle justifie la commutativité du produit de nombres.

5.8.3 Le carré

Ce n'est qu'un cas particulier du rectangle, car ici, on a $L = \ell = c$, donc, $\mathcal{A} = c \times c = c^2$.

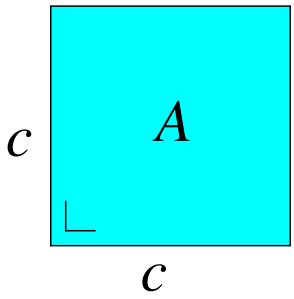


Fig. 5.31

Notons au passage que la lecture même de cette formule justifie l'utilisation du mot **carré** pour désigner la puissance 2.

5.8.4 Le parallélogramme

Utilisation du rectangle

Le parallélogramme peut, par décomposition et recomposition, être transformé en un rectangle.

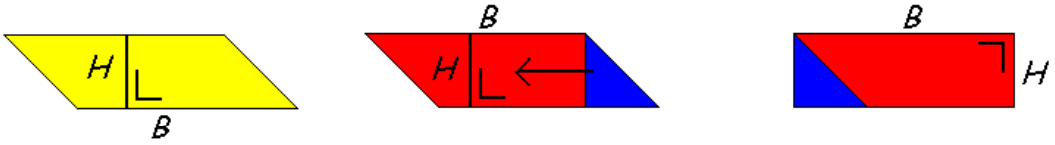


Fig. 5.32

L'aire du parallélogramme $\mathcal{A}$ est égale à celle du rectangle $\mathcal{C}$ dont les côtés ont pour longueur B et H.

$$\mathcal{A} = B \times H$$

Cette formule ressemble fort à celle qui permet de calculer la mesure de l'aire du rectangle et pourrait être confondue avec celle-ci. Cependant, pour le rectangle, les longueurs « utiles » sont directement disponibles sur la figure en étant fournies par les côtés de celui-ci. Par contre, pour le parallélogramme, la hauteur doit être **tracée** perpendiculairement au côté choisi comme base.

Utilisation des bandes

Rappelons ici qu'il est fort pratique d'inscrire le parallélogramme dans une **bande** (*voir page 117*), le choix de celle-ci déterminant quel côté est choisi comme base.

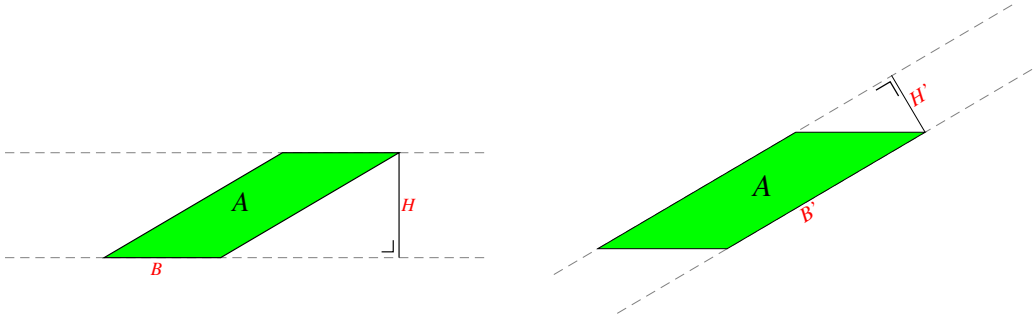


Fig. 5.33

On voit que $\mathcal{A} = B \times H$ ou $\mathcal{A} = B' \times H'$.

Donc, le résultat est identique quel que soit le côté choisi comme base, à condition de lui associer la hauteur correspondante.

5.8.5 Le triangle

La formule permettant de calculer la mesure de l'aire du triangle peut être obtenue au travers de différentes manipulations géométriques de manière à nous ramener à ce qui a déjà été établi précédemment.

Première approche

Deux exemplaires d'un même triangle peuvent être assemblés pour former un parallélogramme.

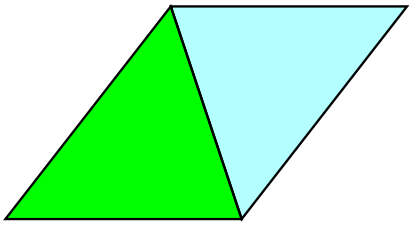


Fig. 5.34

Ainsi, l'aire d'un triangle est toujours égale à la moitié de l'aire du parallélogramme obtenu de cette manière. Remarquons que le triangle et le parallélogramme ont même base et même hauteur.

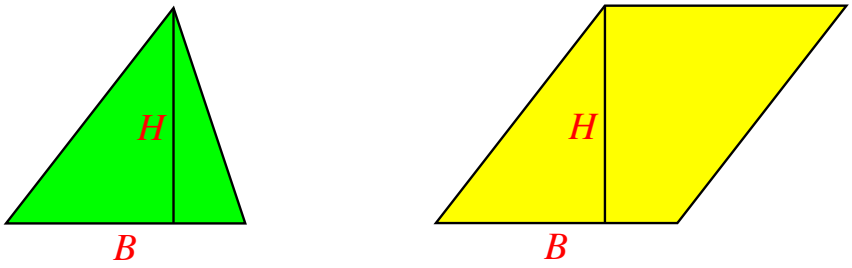


Fig. 5.35

Donc, la mesure de l'aire du triangle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{B \times H}{2}$$

Utilisation des bandes

De la même manière que pour les parallélogrammes, la hauteur H doit correspondre à la base B choisie. Ainsi donc, comme nous l'avons montré précédemment (*voir page 117*), l'inscription d'un triangle dans une bande fait clairement apparaître la hauteur correspondant à chacun des choix de base possible.

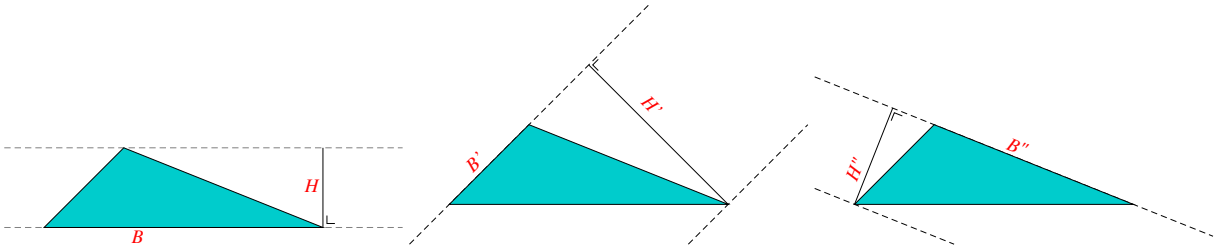


Fig. 5.36

L'aire étant constante quelle que soit la bande choisie, nous avons donc

$$\mathcal{A} = \frac{B \times H}{2} = \frac{B' \times H'}{2} = \frac{B" \times H"}{2}$$

Deuxième approche

La formule donnant la mesure de l'aire du triangle peut aussi s'obtenir en procédant par décomposition de celui-ci pour le ramener à un parallélogramme de même aire.

Le triangle de la figure suivante peut être vu comme ayant B comme base et H comme hauteur, mais aussi comme ayant B' comme base et H' comme hauteur.

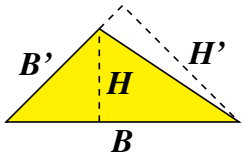


Fig. 5.37

Joignons les milieux de deux côtés et découpons le triangle en deux pièces, l'une triangulaire, l'autre trapézoïdale. Ensuite, faisons pivoter la partie triangulaire pour la placer dans l'alignement de la partie trapézoïdale. On obtient un parallélogramme qui peut être considéré comme étant de base B et de hauteur $\frac{H}{2}$ ou comme étant de base $\frac{B'}{2}$ et de hauteur H' :

Fig. 5.38

$$\mathcal{A}_{\text{ triangle}} = \mathcal{A}_{\text{ parallélogramme}} = B \times \frac{H}{2} = \frac{B'}{2} \times H'$$

Nous pouvons recommencer en joignant deux autres milieux de côtés :

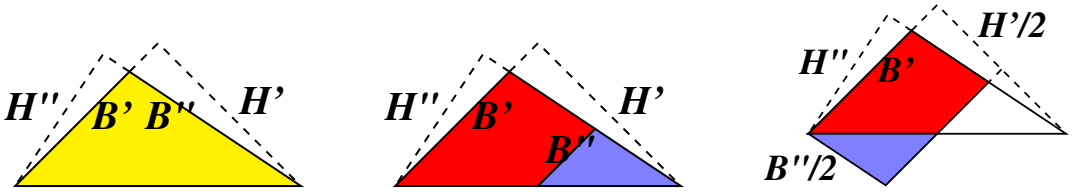


Fig. 5.39

$$\mathcal{A}_{\text{ triangle}} = \mathcal{A}_{\text{ parallélogramme}} = B' \times \frac{H'}{2} = \frac{B''}{2} \times H''$$

Appliquons le même procédé une troisième fois :

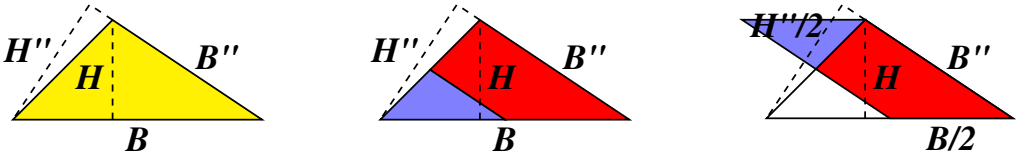


Fig. 5.40

$$\mathcal{A}_{\text{ triangle}} = \mathcal{A}_{\text{ parallélogramme}} = B'' \times \frac{H''}{2} = \frac{B}{2} \times H$$

Résumé

– Ainsi donc, nous avons obtenu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{triangle}} &= \frac{B \times H}{2} = B \times \frac{H}{2} = \frac{B}{2} \times H \\ &= \frac{B' \times H'}{2} = B' \times \frac{H'}{2} = \frac{B'}{2} \times H' \end{aligned}$$

$$= \frac{B'' \times H''}{2} = B'' \times \frac{H''}{2} = \frac{B''}{2} \times H''$$

Notons au passage que ces relations peuvent donner du sens aux règles de calcul des fractions.

– Rappelons encore que chacun des côtés du triangle peut être choisi comme base et qu'il faut alors lui associer la hauteur correspondante. Il nous paraît important d'organiser un grand nombre d'activités mettant cet aspect des choses en évidence. Ce n'est que de cette manière que les élèves pourront se convaincre du fait que la base n'est pas nécessairement horizontale.

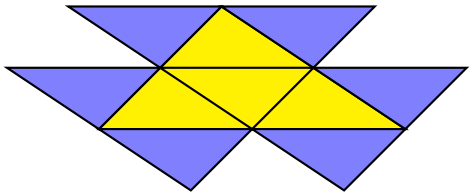


Fig. 5.41

Combien cette figure comporte-t-elle de parallélogramme ayant même aire que le grand triangle jaune ?

5.8.6 Le trapèze

En raisonnant comme pour le triangle, nous pouvons obtenir la formule donnant la mesure de l'aire du trapèze par divers procédés.

Procédé 1

Dupliquons le trapèze :

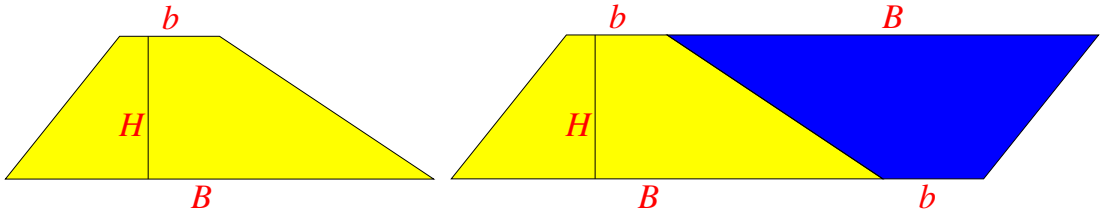


Fig. 5.42

L'aire du trapèze vaut la moitié de l'aire du parallélogramme dont la base est $B + b$ et la hauteur H.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{(B + b) \times H}{2}$$

Procédé 2

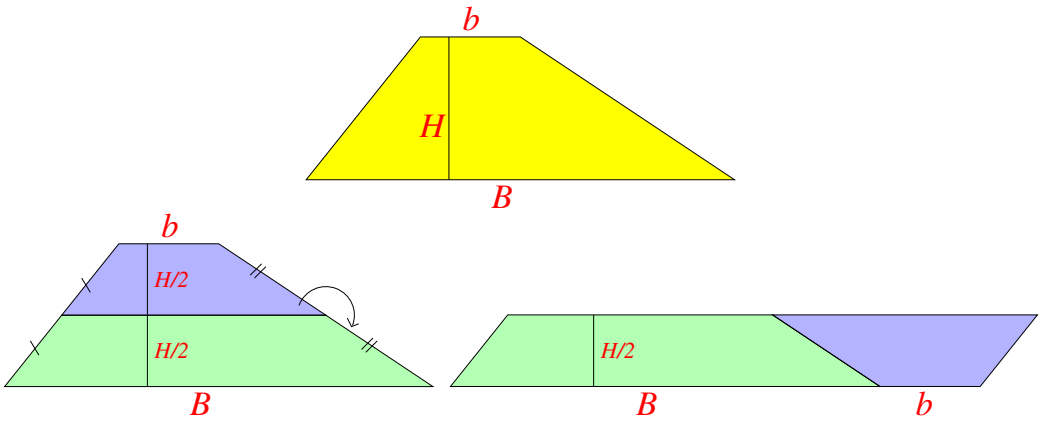


Fig. 5.43

Coupons le trapèze en deux parties en menant une parallèle aux bases à mi-hauteur. Amenons la partie supérieure à droite de la partie inférieure. Nous obtenons un nouveau parallélogramme de base $B + b$ et, cette fois, de hauteur $\frac{H}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = (B + b) \times \frac{H}{2}$$

Procédé 3

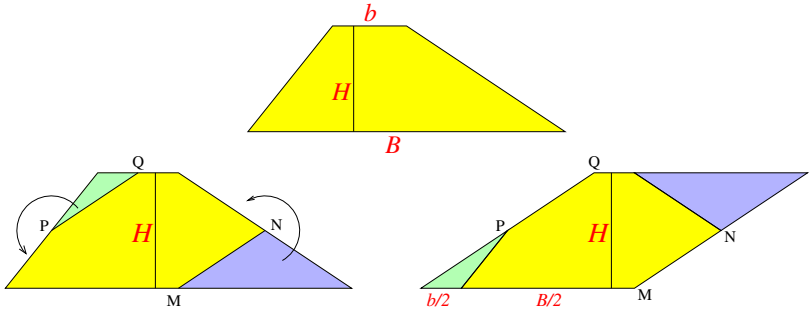


Fig. 5.44

Dans la figure ci-dessus, M, N, P et Q sont les milieux des côtés auxquels ils appartiennent. En faisant pivoter les deux triangles indiqués, on obtient un parallélogramme de hauteur H et de base $\frac{b}{2} + \frac{B}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \left(\frac{b}{2} + \frac{B}{2}\right) \times H$$

Procédé 4

Le trapèze peut également être partagé en 2 triangles de hauteur H et de bases respectives B et b.

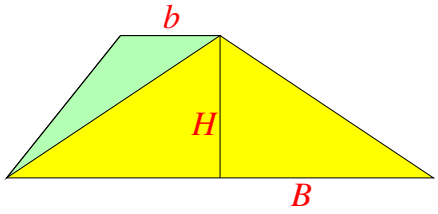


Fig. 5.45

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{B \times H}{2} + \frac{b \times H}{2}$$

Résumé

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b) \times H}{2} = (B+b) \times \frac{H}{2} = \left(\frac{b}{2} + \frac{B}{2}\right) \times H = \frac{B \times H}{2} + \frac{b \times H}{2}$$

De nouveau, nous retrouvons une illustration de certaines règles de calcul algébrique relatives aux fractions et à la distributivité.

5.8.7 Généralisation

Tout polygone peut toujours être décomposé en triangles. Ceci permet de calculer la mesure de son aire par sommation des mesures de l'aire de ces triangles.

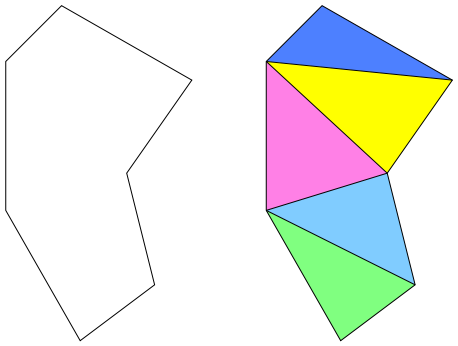


Fig. 5.46

Remarquons que cela débouche rarement sur une formule exploitable.

Cas particulier des polygones réguliers

Tout polygone régulier peut se décomposer en triangles isocèles isométriques. Par exemple, le pentagone, ou l'hexagone où les triangles sont de plus équilatéraux.

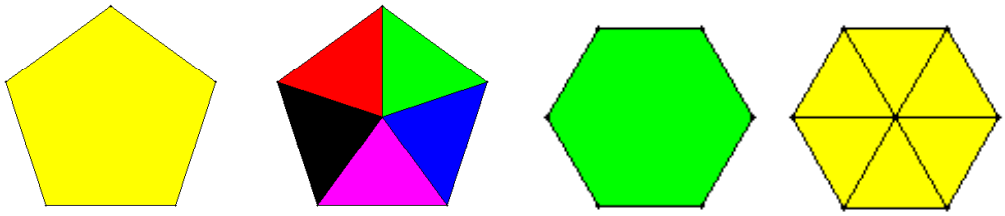


Fig. 5.47 : Pentagone et hexagone décomposés en triangles isométriques.

Contrairement à ce qui se passe avec les polygones irréguliers, la régularité des formes considérées permet d'aboutir à une formule de calcul de la mesure de leur aire.

En effet, comme la figure ci-dessus l'illustre, un polygone régulier à n côtés est décomposable en n triangles isométriques isocèles. L'aire du polygone est donc égale à n fois l'aire d'un de ces triangles.

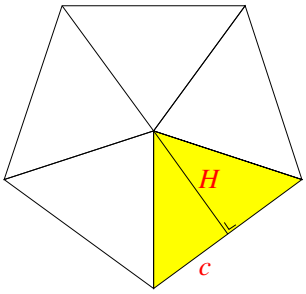


Fig. 5.48

Pour calculer la mesure de l'aire d'un de ces triangles, choisissons pour base celui de ses côtés qui coïncide avec le côté du polygone. Appelons c la mesure de celui-ci. La hauteur du triangle donne également la distance entre le centre du polygone et les côtés de celui-ci. Cette distance constante est appelée *apothème* du polygone régulier.

La mesure de l'aire du triangle est donc $\frac{c \times H}{2}$. Par conséquent la mesure de l'aire du polygone est égale à

$$\mathcal{A} = n \times \frac{c \times H}{2}$$

5.8.8 Utilisation de diagonales

Bien sûr, comme nous l'avons déjà dit, tous les polygones peuvent se décomposer en triangles. Cependant, il existe parfois d'autres approches possibles de formules permettant de calculer des aires. Parmi celles-ci, envisageons le cas particulier des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires ([10]).

([10]) C'est notamment le cas du losange et du cerf-volant

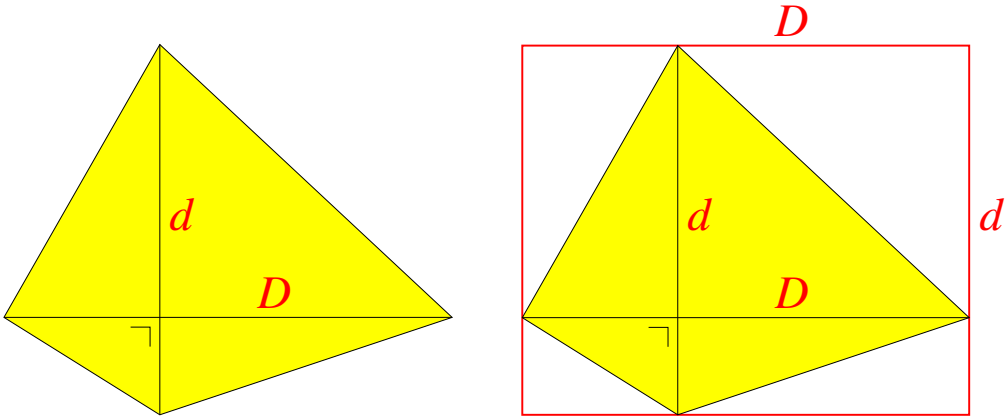


Fig. 5.49

Appelons d et D les mesures des deux diagonales. Un tel quadrilatère est toujours inscriptible dans un rectangle dont les côtés ont pour mesure d et D. Comme on le voit sur la figure ci-dessus, il est clair ([11]) que l'aire de ce rectangle vaut le double de l'aire du quadrilatère.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}$$

Nous retrouvons ainsi la formule bien connue de la mesure de l'aire du losange.

5.9 Une autre voie vers le calcul des aires

Nous venons de voir que tout polygone peut être décomposé en triangles et que donc son aire est aisément mesurable. Cependant, il existe bien d'autres surfaces quarrables. Pour celles-ci, il faut utiliser une toute autre technique que la décomposition. Il s'agit du calcul intégral.

Il faut distinguer trois catégories :

1. Les surfaces dont l'aire peut être mesurée exactement
   Exemples :
   (a) Considérons l'arc de sinusoïde qui va de 0 à π. L'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses et cet arc a pour mesure 2. Et pourtant, elle dépend bien de l'irrationnel π .
   (b) L'aire de la lunule comprise entre les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ a pour mesure $\frac{1}{3}$.
2. Les surfaces dont l'aire ne peut être calculée exactement, même si on peut obtenir une précision aussi grande que l'on veut.
   Exemple : L'aire du disque se calcule à l'aide de la formule bien connue : $A = \pi \times R^2$. La précision de la valeur obtenue dépend de la précision choisie pour π.

([11]) Il suffit en effet de comparer les aires des triangles apparaissant sur la figure.

3. Les surfaces auxquelles il n'est pas possible d'attribuer une aire. On les dit *non-mesurables*. En donner un exemple n'est pas possible dans le cadre de ce travail.

Chapitre 6

Une approche épistémologique

La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

6.1 Un préalable : la géométrie

Aborder les problèmes de l'enseignement de la géométrie, c'est d'abord parler — fût-ce sommairement — de la géométrie. La définition donnée par LEGENDRE ne fait que confirmer l'étymologie du mot. Les développements historiques résumés au chapitre 4 attestent que les premières activités géométriques relèvent de l'arpentage.

6.1.1 L'ouvrage de LEGENDRE

Une bonne partie de l'ouvrage de LEGENDRE, *Éléments de géométrie* [54], dont est extraite la définition, pourrait être qualifiée de « transposition didactique du texte d'EUCLIDE ». Cet ouvrage a de plus servi de base à quasiment tous les manuels de géométrie qui ont été utilisés dans notre enseignement secondaire jusqu'en 1968 ([1]). C'est donc la lettre et l'esprit de ce document qui ont inspiré durant très longtemps l'enseignement de la géométrie chez nous, ce qui justifie que nous lui accordions quelque attention.

L'ouvrage est divisé en huit *livres*

1. Les principes.
2. Le cercle et la mesure des angles.
3. Les proportions des figures.
4. Les polygones réguliers et la mesure du cercle.
5. Les plans et les angles solides.
6. Les polyèdres.
7. La sphère.
8. Les trois corps ronds.

([1]) Année de la généralisation des programmes dits de « mathématique moderne ».

Le livre 1 comporte trente-et-une propositions dont une bonne vingtaine font intervenir des comparaisons de longueurs ou d'angles. Citons les propositions I et XXXI :

Proposition I *: Les angles droits sont tous égaux entre eux.*

Proposition XXXI *: Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Ainsi, dès le premier livre, la comparaison de certaines grandeurs est au cœur des préoccupations. Les autres propriétés (parallélisme, perpendicularité) apparaissent plutôt comme des *outils* permettant d'obtenir des résultats concernant les grandeurs. Il en est de même dans les livres suivants.

Le livre 2 est tout entier consacré à la comparaison des angles. Malgré l'emploi occasionnel du mot « mesure », jusqu'à la fin de ce livre il n'est nullement question de « mesurer » des grandeurs géométriques au sens que nous donnons à ce terme, c'est-à-dire « *après avoir choisi une grandeur unité, attribuer une valeur numérique à la grandeur considérée* ».

Le livre 3 traite des propriétés de proportionnalité entre longueurs (notamment le théorème de Thalès) ([2]) ainsi que des propriétés élémentaires relatives aux aires.

L'exposé progresse lentement en commençant toujours par des affirmations *relatives* avant de passer à des affirmations *dans l'absolu*. Voici par exemple les propositions III à IV de ce livre 3 :

Proposition III *: Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Proposition IV *: Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits des bases multipliées par les hauteurs.*

Après la proposition IV, LEGENDRE prend la peine d'expliquer :

Donc on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres, qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la base,et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur.

Cette mesure, d'ailleurs, n'est pas absolue, mais seulement relative ;[...]

Par exemple, si la base du rectangle A est de trois unités et sa hauteur de dix, le rectangle sera représenté par le nombre 3×10*, ou* 30*, nombre qui, ainsi isolé, ne signifie rien ; mais si on a un second rectangle B dont la base soit de douze unités et la hauteur de sept, le second rectangle sera représenté par le nombre* 7×12*, ou* 84 *: de là on conclura que les deux rectangles A et B sont entre eux comme* 30 *est à* 84*. [...]*

Il est plus ordinaire et plus simple de prendre le carré pour l'unité de surface, et on choisit le carré dont le côté est l'unité de longueur ; alors la mesure que nous avons regardée simplement comme relative devient absolue [...]

Après ces considérations, LEGENDRE se sent autorisé à introduire (sans d'ailleurs le définir) le mot *aire* :

Proposition V *: L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base*

([2]) Sans que cette dénomination soit utilisée.

par sa hauteur.

Le livre 3 se poursuit par l'établissement des propriétés relatives au triangle rectangle (théorème de Pythagore sous ses différents habits), puis aux proportionnalités liées au parallélisme (théorème de Thalès) et à la comparaison des polygones quelconques. Le livre 4 est le dernier consacré à la géométrie plane. Ses différentes propositions amènent aux propriétés relatives aux rapports des périmètres et aires des polygones réguliers, puis aux rapports des circonférences de cercles et d'aires de disques, avec le calcul d'une approximation du nombre π.

Les livres 5 à 8 sont consacrés à la géométrie de l'espace. Ils sont organisés selon les mêmes principes que les quatre premiers livres et débouchent sur des propriétés relatives aux aires et volumes des différents corps solides. Ainsi, après que le livre 5 ait fixé les outils — les propriétés concernant les positions relatives des plans et droites de l'espace, ainsi que quelques résultats sur l'égalité des *angles solides* — le livre 6 s'intéresse aux polyèdres, le livre 7 à la sphère et le livre 8 aux « Corps ronds » (cylindre, cône et — à nouveau — sphère). Citons simplement les propositions terminales de ces trois livres :

Livre 6, Proposition XXVII *: Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.*

Livre 7, Proposition XXVII *: De tous les triangles sphériques formés avec un côté donné, le plus grand est celui dans lequel les deux côtés non déterminés sont égaux.*

Livre 8, Proposition XVIII *: Tout segment de sphère, compris entre deux plans parallèles, a pour mesure la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus la solidité* ([3]) *de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre*

Pour conclure ce parcours de l'ouvrage de LEGENDRE, retenons d'abord le fait que le corpus théorique de la géométrie élémentaire s'est développé autour de problèmes concernant des mesures de longueurs, aires et volumes.

Remarquons au passage que lorsqu'il passe du point de vue relatif au point de vue absolu (voir ci-dessus), LEGENDRE suppose que l'on choisit une unité de longueur (et en conséquence des unités d'aire et de volume) sans pour autant effectuer ce choix lui-même. Un tel choix relève en effet de la physique, non de la mathématique. Heureusement, les résultats théoriques ne dépendent pas de ce choix d'une unité de longueur, ce qui permet au mathématicien d'assimiler les mesures à des nombres. Par contre pour le physicien, ou le technicien, une mesure n'a aucune signification si l'unité n'est pas mentionnée.

Retenons également la séparation en géométrie plane et géométrie de l'espace et le fait que les propriétés établies en géométrie plane sont souvent à la base des raisonnements effectués en géométrie spatiale. Exceptionnellement, il peut arriver qu'une propriété du plan nécessite un détour par l'espace afin d'être établie.

([3]) *Synonyme de « volume ».*

6.1.2 Après Legendre

L'enseignement de la géométrie a relativement peu évolué entre l'ouvrage de Legendre et l'introduction dans les années 1960–1970 des mathématiques « modernes ». Notons quand même la prise de conscience progressive de la nécessité d'introduire la notion de droite *illimitée*. Pour Legendre, une *ligne droite* est définie comme étant *le plus court chemin d'un point à l'autre* et deux lignes sont *parallèles* si *elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre*. Il n'opère donc aucune différence entre *segment* et *droite*.

Si l'enseignement de la géométrie ne progresse guère durant la période mentionnée, la géométrie elle-même avance à grands pas, notamment à la suite de la construction de la géométrie hyperbolique par Bolyai et Lobachevsky et à l'apparition en algèbre du concept de *groupe*. Après les travaux de Riemann, Hilbert, Klein... toute géométrie est associée à un groupe de transformations, la géométrie euclidienne en particulier est associée au groupe des *similitudes*. Les *isométries* (cas particulier de similitudes) sont les concepts géométriques qui formalisent les mouvements physiques. L'introduction de ces concepts dans les programmes de mathématiques constitue l'apport principal et durable du courant « mathématique moderne » des années 1960–1980.

6.2 La conceptualisation

Reprenons maintenant ces diverses questions en les considérant du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage. Nous ne pouvons plus adopter un ordre de présentation des divers sujets géométriques qui serait uniquement basé sur leur enchaînement logique. Les types d'activités que nous pouvons proposer aux élèves dépendent fortement de leur âge et de leur environnement.

À côté des aspects géométriques, nous devons tenir compte d'aspects relevant de la psychologie cognitive, liés à la formation des concepts.

6.2.1 Un point de vue constructiviste

Nous adopterons dans la suite un point de vue résolument *constructiviste* qui peut se résumer en un slogan :

> Les concepts ne sont pas enseignés par les professeurs, ils sont construits par les élèves.

Ce point de vue, qui remonte au moins à Piaget, [58], nécessite quelques commentaires.

1. Notons d'abord que le point de vue de Piaget, pour qui c'est à travers d'actions qu'« un enfant construit un concept », rejoint celui d'auteurs plus modernes tels que D. Tall, [71], pour qui la conceptualisation se réalise par l'application de *procédures*

à des objets encore incomplètement conceptualisés. La conceptualisation va de pair avec une structuration des connaissances. Elle se réalise progressivement à travers une suite d'activités.

2. Un concept est une abstraction qui n'existe que dans le cerveau et n'acquiert de signification qu'à travers un tissu de relations avec d'autres concepts.

   > Considérons par exemple le nombre 2. Personne ne l'a jamais mis en vente dans un magasin. Le petit enfant perçoit d'abord les deux mains de sa mère, puis deux chaussettes ou deux souliers... Progressivement, il perçoit une qualité commune à toutes les paires d'objets. Une qualité « insaisissable » mais à laquelle les adultes associent un mot : « deux ».
   > Ensuite, il constate que ce « deux » apparaît aussi quand on place deux « un » l'un à côté de l'autre. Et que si on place un « un » à côté d'un « deux », on obtient un « trois », etc.
   > Dès lors que les propriétés de l'objet « deux » font partie intégrante du concept « deux », il est difficile d'affirmer qu'un concept puisse atteindre une forme définitive. Par exemple, savoir que 2^{10} est proche de 1000 est une propriété que tout informaticien intègre à « son » concept « deux ».

   De plus, des analogies permettent d'établir des liens entre des concepts relevant de domaines différents et entraînent éventuellement l'apparition de *compétences transversales*. Ces relations aussi s'intègrent aux concepts eux-mêmes.

3. Piaget affirme aussi que c'est le *besoin* qui engendre une action et que ce besoin est la manifestation d'un déséquilibre. Illustrons cette idée de *besoin* par un exemple simple : l'apparition du nombre 0.

   > On trouve des traces d'activités de comptage dès l'époque sumérienne, 3500 ans avant J.-C., et cette activité débouche sur la conceptualisation des nombres 1, 2, 3... Encore que le nombre 1 ne résulte pas d'un comptage, mais de l'opposition à *plusieurs*. Quant à 0, il ne correspond à aucune activité de comptage. Les Sumériens n'avaient pas besoin du *nombre* 0 et ne l'ont pas inventé. Par contre, leur système de numération aurait bénéficié de l'utilisation d'un *chiffre* 0 qu'ils n'ont pas inventé non plus. Le besoin est *nécessaire* mais pas toujours *suffisant*...
   > Les Indiens inventèrent le *chiffre* 0 au Ve siècle après J.-C. Comme chacun sait, ce *chiffre* 0 sert à marquer l'absence d'unités d'un rang donné dans l'écriture d'un nombre. Deux siècles plus tard, Brahmagupta assimilait pour la première fois 0 à un nombre : le résultat de la soustraction de tout nombre à lui-même. Avec l'apparition des nombres négatifs, il devenait indispensable d'accorder à zéro un vrai statut de nombre. Mais tout le monde n'a pas été convaincu immédiatement... ([4]).

([4]) La consultation de quelques manuels d'arithmétique montre que dans notre enseignement secondaire, le statut de 0 a été controversé jusqu'aux environs de 1960. Les citations suivantes illustrent le malaise de certains auteurs : *Zéro est regardé comme un nombre* (N. J. Schons, Traité d'arithmétique, La Procure, Namur, édition 1947), *Zéro est considéré comme un nombre, bien que, d'après les définitions, le zéro n'en soit pas un* (Th. Gos, Traité d'arithmétique, revu par E. Vandepoel, L'Élan, Liège, édition 1960).

4. Ainsi les concepts mathématiques ne sont pas des objets statiques bien définis et immuables. Si un concept a été introduit en vue de résoudre une catégorie de problèmes précis, la rencontre d'un problème apparenté, mais auquel le concept se révèle inadapté, crée un déséquilibre et amène une modification du concept afin de lui rendre son efficacité. C'est ce que PIAGET appelle *l'équilibration majorante*. La conceptualisation passe donc par une série de seuils que les élèves rencontrent à des moments différents et qu'ils franchissent grâce aux actions qu'ils effectuent.
5. Le fait que les concepts se construisent de façon dynamique et progressive a pour première conséquence qu'il est illusoire de vouloir enseigner directement un concept donné sous la forme que l'on espère voir acquise par l'enfant à la fin de sa scolarité. Quelles que soient les précautions prises par l'enseignant pour assurer la correction de son discours et son adaptation à des situations générales, l'élève n'intègre à ses schémas mentaux que les aspects qu'il a effectivement utilisés lors des activités qui lui ont été effectivement proposées.

   Une autre conséquence est le fait que l'activité de l'enfant peut faire débuter certaines conceptualisations avant tout enseignement spécifique. L'enfant crée alors lui-même un ensemble de représentations et procédures qu'il utilise comme outils. VERGNAUD, [75], les considère comme des « théorèmes implicites » et les appelle des *théorèmes en actes* :

   > *Le concept de « théorème en acte » désigne les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est pour autant capable de les expliciter ou de les justifier.*

6. Ainsi, le rôle de l'enseignant est de confronter l'élève à des situations nouvelles pour lui, de façon à créer des déséquilibres qui entraîneront des besoins nouveaux et des progrès dans la conceptualisation. C'est alors dans le cadre du travail personnel de l'élève que les explications fournies par l'enseignant prendront du sens.

On pourra certainement objecter à ce qui précède qu'il s'agit là d'une conception utopiste de l'enseignement, qu'il n'est pas possible à un élève de redécouvrir par lui-même tout le corpus mathématique qui lui est soumis et de franchir seul tous les seuils difficiles qu'il rencontrera. C'est sans doute vrai. Toutefois il ne fait aucun doute que ce sont les concepts qu'il aura manipulés effectivement à travers des activités bien choisies qu'il maîtrisera le mieux. En témoigne le fait qu'il arrive à chacun d'entre nous de ne comprendre la signification réelle d'un concept mathématique que bien longtemps après l'avoir rencontré au niveau scolaire.

6.2.2 Représentations et perception

Si l'apprentissage des mathématiques passe nécessairement par la formation de concepts, il ne faut pas oublier que *personne ne manipule jamais ces concepts eux-mêmes*. Des *manipulations* ne peuvent en effet s'exercer que sur des objets concrets, y compris des taches d'encre sur des feuilles de papier ou des « pixels » allumés sur un écran d'ordinateur.

Autrement dit, l'être humain ne manipule que des *représentations* des concepts, qui servent en quelque sorte d'*interface*. Mais beaucoup de représentations peuvent exister pour un même concept.

Par exemple au concept « six », on peut associer les représentations suivantes.

1. Le mot « six ».
2. Le chiffre décimal 6.
3. L'écriture binaire **110**.
4. L'écriture « romaine » VI.
5. L'expression $4+2$.
6. Le nombre « figuré » :

L'existence de plusieurs représentations pour un concept donné peut correspondre à des besoins différents. Ainsi l'écriture romaine se prête peu au calcul écrit. Les représentations décimale et binaire sont liées à l'utilisation d'algorithmes différents, adaptés aux propriétés physiques des machines qui les réalisent.

Certaines représentations peuvent avoir plusieurs interprétations. Ainsi, pour le mathématicien, $4+2$ désigne aussi bien une opération d'addition que le résultat de cette opération. Une telle flexibilité n'apparaît que progressivement mais est une composante indispensable de la réussite en mathématique car elle permet une *compression* des informations à stocker en mémoire de travail (voir à ce sujet [44]).

Pour plus de détails à propos des représentations des concepts mathématiques, le lecteur pourra consulter l'annexe A.2 et la bibliographie qui y est mentionnée.

Les représentations principalement utilisées relèvent de plusieurs types : symbolique, graphique... Par exemple le « nombre figuré » rencontré plus haut est une représentation graphique du concept « six ». Par la force des choses, les objets géométriques font très souvent l'objet de représentations graphiques.

Aux représentations graphiques peuvent être associés des problèmes de perception. « Voir » une figure de géométrie, qu'il s'agisse de géométrie plane ou de géométrie spatiale, n'est pas toujours simple. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans la suite. Le lecteur pourra aussi consulter l'annexe A.4.

6.3 Le cas de la mesure

Après ces généralités, examinons de plus près quels sont les seuils à franchir dans la construction de la mesure des longueurs et des aires. Une grande partie du travail a été faite pour nous par J. PIAGET dans son ouvrage *La géométrie spontanée de l'enfant* ([5]), [59]. Plusieurs phases peuvent être distinguées.

([5]) Cet ouvrage est beaucoup moins contesté que *La représentation de l'espace chez l'enfant* dans lequel PIAGET met en relation le développement mental du petit enfant avec les structures fondamentales décrites par BOURBAKI.

6.3.1 La mesure de segments sur une droite

La première phase — la plus élémentaire — porte sur l'apprentissage de la mesure de la longueur de segments situés sur une même droite.

Dans une approche qualitative, on peut y associer des activités de comparaison par emboîtement et/ou juxtaposition. Le compas à pointes sèches peut être utilisé à cet effet. Il convient non seulement pour des segments situés sur une même droite, mais plus généralement pour des segments situés dans un même plan, voire dans l'espace.

L'approche quantitative passe par le choix d'une unité de mesure. Elle peut déboucher sur des mesures exactes : « ce segment vaut autant de fois l'unité », ou sur des encadrements : « la longueur de ce segment est comprise entre ... et ... » À ce stade, il est peu probable que l'on puisse faire apparaître l'impossibilité de mesurer tout segment de manière exacte avec la même unité de mesure.

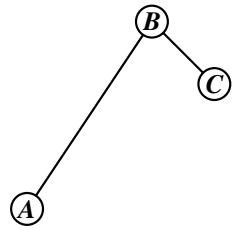
La propriété fondamentale de toute activité de mesure peut dès ce stade être mise en évidence : *si un segment est obtenu par juxtaposition de deux autres, sa mesure est la somme des mesures des deux autres.* C'est ce que l'on appelle l'*additivité* de la mesure.

L'activité réciproque de « mesurer un segment » est « dessiner un segment de mesure donnée ».

Pour mesurer ou dessiner des segments situés sur une droite à l'aide d'une latte graduée, on est amené à déplacer la latte au long de la droite, réalisant ainsi des mouvements physiques correspondant à des translations. Il s'agit là d'une première rencontre avec ces transformations qui met déjà en œuvre leur réversibilité.

La latte n'est pas le seul instrument de mesure possible. Par exemple, via le langage `Logo` et les instructions `Avance` et `Recule`, l'enfant peut piloter une tortue au long d'une droite. Il dessine donc des segments de mesures données et retrouve dans un autre contexte la propriété d'additivité de la mesure. Notons aussi que si les instructions `Avance 10` et `Recule 10` engendrent des déplacements de même mesure, ces déplacements ont lieu en sens contraire et constituent une première rencontre avec des grandeurs orientées. On n'est pas loin des nombres négatifs.

6.3.2 La mesure de segments dans le plan ou l'espace



Piaget analyse cette deuxième phase de façon très fouillée. En fait on passe du concept de longueur d'un segment à celui de longueur de ce que l'on appelait jadis une *ligne brisée*, nous dirons une *ligne polygonale*.
Mais comment mesurer une ligne polygonale ABC constituée par exemple de deux segments $[AB]$ et $[BC]$?

1. *Ou bien on mesure successivement les deux segments* $[AB]$ *et* $[BC]$ *et on additionne les deux mesures. Dans ce cas, on est amené à déplacer la latte dans le plan en lui*

imprimant un mouvement qui n'est pas seulement un glissement,

2. *ou bien on suppose que la ligne polygonale ABC est articulée en B et on fait pivoter un des deux segments, par exemple $[BC]$ autour de B de façon que les deux segments soient situés dans le prolongement l'un de l'autre. On peut alors mesurer directement le segment $[AC]$.*

Dans les deux cas, la procédure fait appel à des mouvements physiques, soit de la latte graduée, soit d'un segment à mesurer, et suppose que l'enfant maîtrise suffisamment ces mouvements, en particulier qu'il ne met pas en doute la conservation des longueurs par ces mouvements.

Nous désignons les mouvements physiques par « glisser » et « tourner » pour les distinguer des transformations mathématiques correspondantes, « translation » et « rotation » .

Analysant plus finement cette question de mouvements, PIAGET fait remarquer que leur maîtrise suppose des éléments fixes de référence qui permettent d'apprécier leur amplitude en changement de direction (des angles) et en déplacement (des longueurs).

L'analyse de PIAGET montre que la mesure des longueurs des segments est déjà une opération conceptuellement fort complexe. Cela ne signifie pas que les mouvements dans le plan (ou dans l'espace) doivent faire l'objet d'un enseignement spécifique, car la plupart des schémas qui les gouvernent s'implantent de façon naturelle dès les premiers pas d'un petit enfant.

Néanmoins le contexte naturel des mouvements de l'enfant dans l'espace est différent de celui des mouvements d'une latte ou d'une tige quelconque au long d'une droite ou dans le plan. Il n'est donc pas mauvais de proposer à l'enfant des situations qui lui permettent d'utiliser ces mouvements de façon consciente, en tant qu'outils en vue de réaliser des projets variés (dessins ou autres). À nouveau, `Logo` par l'intermédiaire des instructions `Gauche` et `Droite` permet d'utiliser des mouvements et de se repérer par rapport à des directions de référence. En suggérant à l'enfant de mimer avec son propre corps les mouvements de la tortue, `Logo` établit un lien entre deux contextes différents (*voir le chapitre 1*). On reste néanmoins fort éloigné de l'utilisation des mouvements dans l'espace ([6]).

Bien entendu, le micro-monde d'*Apprenti Géomètre* en mettant les mouvements à la disposition des enfants — plus explicitement encore que `Logo` — est propre à aider à la conceptualisation de la mesure des segments dans le plan.

6.3.3 Les formules de calcul du périmètre d'un polygone

D'un point de vue procédural, le périmètre s'obtient en additionnant des longueurs, ce qui signifie d'abord additioner les mesures des côtés.

Pour un polygone quelconque, ayant n côtés, la seule formule de calcul possible du périmètre s'écrit

$$\ell_1 + \cdots + \ell_n$$

([6]) À notre connaissance le `Logo3D` — le pilotage d'une tortue marine — n'a guère rencontré de succès.

Pour des polygones particuliers, la formule prend un aspect particulier. Par exemple, pour connaître le périmètre d'un carré de 4 centimètres de côté, nous effectuons une addition que nous pouvons exprimer sous les deux formes suivantes : 4 cm $+4$ cm $+4$ cm $+4$ cm ou $4 + 4 + 4 + 4$ cm. Rapidement dans la pratique scolaire ces formules additives sont remplacées par des formules multiplicatives ($C \times 4$ pour les carrés, $(L + \ell) \times 2$ pour les rectangles...), ce qui amène certains élèves à en oublier l'origine. Par la suite, cet usage d'une structure multiplicative amène aussi un risque de confusion entre le périmètre et l'aire.

En utilisant plus longtemps une structure additive en vue de calculer des périmètres, nous pensons que la distinction entre ces deux grandeurs sera renforcée.

Remarquons aussi que la mutliplication présente, par exemple, dans la formule du carré est ce que les mathématiciens appellent une opération *externe* : les deux facteurs du produit sont de natures différentes, un nombre naturel et une longueur. Par contre la multiplication utilisée pour calculer une aire est une opération *interne* : les deux facteurs sont deux longueurs.

Dans les activités expérimentées qui suivent nous avons parlé d'*addition* dans le cas des périmètres et de *multiplication* dans le cas des aires.

6.3.4 La longueur d'une courbe

Le problème de la mesure de la longueur d'une courbe est très complexe du fait de l'obligation d'utiliser un passage à la limite, sous une forme ou une autre. Nous nous limiterons à quelques remarques concernant la longueur du cercle, dont il n'est pas possible de faire l'économie.

Le seul résultat important dans ce cas est le fait que le rapport de la longueur d'un cercle à celle de son diamètre est une constante, et que la valeur de cette constante est approximativement 3,14159... Ce résultat peut être obtenu de manière expérimentale, par la mesure de divers objets circulaires et de leurs rayons ou diamètres.

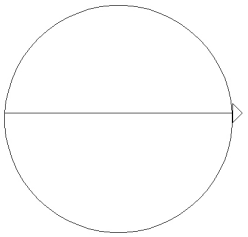
À des élèves entraînés à la pratique du `Logo`, et au repérage à l'aide de coordonnées, on peut proposer de réaliser un *projet* consistant à mesurer le diamètre d'un cercle à l'aide de l'instruction DISTANCE qui retourne la distance de la tortue à un point donné par ses coordonnées `[x y]`.

La méthode consiste à dessiner un cercle de façon approchée par une instruction du type `Repete 60 [Avance 20 Ga 6]`. Ce qui est dessiné est en réalité un polygone régulier à soixante côtés, mais le dessin est perçu comme un cercle. Et ce cercle a une longueur : 1200 (l'unité est le pas de la tortue).

Après avoir dessiné ce cercle, on fait un demi-tour supplémentaire par l'instruction `Repete 30 [Avance 20 Ga 6]`. La tortue est alors positionnée au point diamétralement opposé du point de départ. Si celui-ci est, par exemple, le point `[0 0]`, l'instruction `Montre Distance [0 0]` fournit alors le diamètre du cercle. Ensuite les deux instructions `Ga 90`

`Avance Distance [0 0]` produisent le dessin de ce diamètre, ce qui permet de valider la démarche en constatant que la tortue est bien revenue à sa position initiale.

```
Repete 60 [Avance 20 Ga 6]
Repete 30 [Avance 20 Ga 6]
Montre Distance [0 0]
Ga 90 Avance Distance [0 0]
```



Avec la version `MswLogo`, on a obtenu pour le diamètre la valeur 382,146451380082 ce qui fournit le rapport $\frac{1200}{382,146451380082} \approx 3,14015$. Il est normal que ce rapport soit légèrement inférieur à π puisque le numérateur 1200 est en réalité la longueur d'un polygone inscrit au cercle.

En appliquant la méthode à des cercles différents (faire varier la longueur du côté du polygone régulier inscrit), on peut à nouveau constater que le rapport varie peu, et — avec une bonne approximation — peut être considéré comme constant.

6.3.5 Les aires de polygones

Remarquons d'abord que si le concept de longueur d'un segment est relativement facile à appréhender, car deux segments ont toujours même forme, il n'en est pas du tout de même en ce qui concerne le concept d'aire d'un polygone. Nous avons d'ailleurs déjà noté à la section 5.2 que la plupart des définitions de l'aire d'une figure plane reviennent à remplacer un nouveau mot par un ancien qui n'est pas nécessairement mieux compris. Reprenons donc notre slogan dans ce cas particulier :

On n'enseigne pas aux élèves ce qu'est une aire, c'est à eux de construire ce concept.

Nous pensons qu'il n'est pas possible de construire le concept d'aire, sans construire simultanément le concept de *mesure de l'aire*. Plus précisément, le concept de mesure de l'aire est une partie intégrante du concept d'aire. Autrement dit, les aspects qualitatifs et quantitatifs qui ont été décrits en détail au chapitre 5 doivent être associés et coordonnés pour que l'enfant puisse construire un concept d'aire efficace. Nous rejoignons ainsi le point de vue du physicien pour qui une grandeur physique n'a d'intérêt et de signification qu'à condition de définir une unité de mesure et une procédure (mesurage ou calcul) en vue de déterminer la mesure de cette grandeur.

L'égalité d'aires

Le concept d'aire ne peut être construit qu'à travers la constatation que des polygones peuvent avoir des formes très différentes tout en ayant « quelque chose en commun ». Autrement dit le concept d'*égalité d'aires* précède celui d'aire, ce qui montre bien l'inutilité d'une définition de celui-ci.

Il s'agit donc d'organiser des activités de comparaison d'aires, débouchant sur des relations telles que *telle forme est plus grande (ou plus petite) que telle autre* et *telle forme a même grandeur que telle autre*. Dans cette phrase, le mot « grandeur » doit être pris au départ dans un sens très général et peut éventuellement être remplacé par un autre. L'important est que l'enfant sache que ce ne sont pas des longueurs que l'on compare.

Nous avons décrit aux paragraphes 5.3 à 5.5 divers aspects mathématiques des activités susceptibles d'être organisées. Ajoutons ici quelques remarques :

1. La première rencontre avec des formes de même aire se fait inévitablement par la *superposabilité*, par la superposabilité *parfaite* vaudrait-il mieux dire, mais les mathématiciens n'utilisent le mot « superposable » que pour des objets *parfaitement* superposables ([7]). Et pour vérifier que deux objets sont superposables, on les amène l'un sur l'autre... et revoici un principe de conservation par les mouvements.

   Déplacer ou retourner une forme géométrique plane est donc une activité de base. Tout au moins, elle l'est si elle est mise en œuvre consciemment.
2. Les activités de découpage et de recomposition combinent l'invariance de l'aire par déplacement et retournement et le principe d'additivité de la mesure.
3. Si la comparaison de deux formes géométriques met en œuvre des découpages des deux formes, un technique de mise en correspondance (biunivoque) entre les composantes de l'une et les composantes de l'autre interviendra souvent en vue de dégager la conclusion. Il s'agit cette fois que les composantes ainsi appariées soient clairement de même aire.
4. Découper une forme géométrique donnée en vue de montrer qu'elle a même grandeur qu'une autre forme géométrique donnée *a priori* pose des problèmes difficiles de perception. Il s'agit en effet de découper la forme mentalement selon des traits non dessinés mais choisis afin de permettre la reconstitution de la seconde forme. Le projet doit être entièrement conçu mentalement avant d'être exécuté. L'expérimentation que nous avons réalisée (voir les sections 10.4.2 et 11.4.2) montre que les élèves qui disposent d'une perception globale des figures géométriques ont un plus grand nombre de comportements de réussite que les autres. On constate ainsi le rôle important de la perception visuelle dans la conceptualisation.

La capacité à *voir* que nous venons d'évoquer comporte plusieurs composantes, notamment :

1. reconnaître des formes,

([7]) En fait, les mathématiciens utilisent de préférence le mot « isométrique » .

2. décomposer une forme en éléments constructibles aux instruments,
3. visualiser des traits non dessinés d'une figure et sélectionner ceux dont le tracé peut faire progresser la réflexion,
4. visualiser la transformation d'une forme en une autre.

La construction du concept d'égalité d'aires est, comme on le voit, un des aspects de l'approche qualitative du concept d'aire. Un autre aspect est le classement de formes géométriques selon leur grandeur. Dans certains cas, il sera également nécessaire de passer par l'intermédiaire de découpages et recompositions pour pouvoir déterminer laquelle de deux formes est la plus petite.

La quantification de l'aire

Aborder l'étude quantitative de l'aire — c'est-à-dire apprendre à mesurer les aires— n'aurait guère de sens tant que le concept d'égalité d'aires est insuffisamment élaboré. Que signifie en effet une expression telle que « l'aire de cette forme géométrique vaut 5 cm^2 » sinon que cette forme a même aire qu'une forme de référence ?

Mais avec la mesure de l'aire, nous faisons intervenir simultanément des considérations de natures très différentes, les unes géométriques, les autres arithmétiques ou même algébriques. Ces changements de cadre constituent des difficultés nouvelles pour les enfants. Un parcours très rapide, une « course à la formule » ne peuvent qu'avoir des conséquences négatives sur leur appropriation de ces questions.

1. Une première approche de la quantification des aires peut être réalisée en travaillant sur du papier quadrillé ([8]) ou — en cas de travail sur ordinateur — avec un réseau de points en arrière-plan. Le traditionnel *géoplan* fera aussi l'affaire. Dans les cas simples, la quantification se réduit alors à un *comptage*.

   Comme le fait remarquer Piaget, dans cette situation le « carré unité » n'est nullement perçu comme le « produit de deux longueurs ». C'est seulement par la grande disponibilité du papier quadrillé que ce support apparaît plus fréquemment dans ce contexte.

   Les tableaux croisés sont courants dans divers jeux (combat naval, mots croisés...) et activités quotidiennes. Ils sont également plus faciles à dessiner que leurs équivalents triangulaires. Ces différents aspects interviennent dans le choix d'un carré comme unité conventionnelle, mais nous n'en sommes encore qu'à l'acquisition du concept d'aire.

([8]) Le papier quadrillé se prête moins bien au travail sur les longueurs, sauf si on décide d'utiliser la *distance du chauffeur de taxi*. Sans doute vaut-il mieux attendre que la distance euclidienne soit maîtrisée avant d'envisager cette autre distance, dont l'intérêt n'est pas négligeable.

Bien entendu, le comptage d'unités carrées dans un rectangle peut se faire en lignes ou en colonnes, et des activités de ce type font naturellement apparaître des multiplications. Mais — répétons-le — ce ne sont pas des longueurs qui sont multipliées, ce sont des nombres.

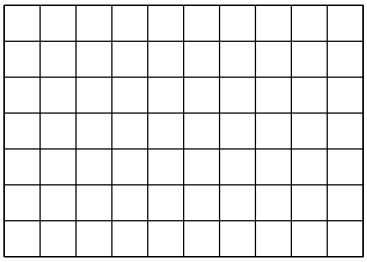


Fig. 6.1

Rien n'empêcherait d'utiliser de la même manière du papier triangulé et constater que le comptage de petits triangles à l'intérieur d'un grand débouche aussi sur une multiplication.

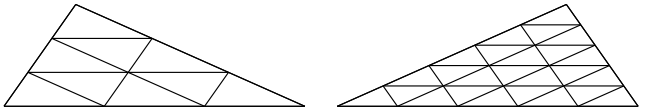


Fig. 6.2

Mais il s'imposerait dans ce cas de faire remarquer immédiatement que la géométrie de la figure impose plutôt des additions :

$$1+3+5=9 \qquad 1+3+5+7+9=25$$

2. Dans les situations précédentes, on voit apparaître simultanément des considérations géométriques et numériques. Le dessin sur papier quadrillé de formes polygonales dont les côtés ne sont pas parallèles aux lignes du quadrillage pousse les choses plus loin en faisant intervenir des fractions : tout segment oblique coupe en deux parties superposables un rectangle dont les côtés sont parallèles aux directions du quadrillage.

   Dans le polygone de gauche de la figure ci-contre, on distingue rapidement un carré 2×2 et un demi-rectangle 1×2. Il reste alors deux triangles dont l'un est un demi-rectangle 1×3 amputé d'un demi-carré jaune, et l'autre un demi-rectangle 1×4, également amputé d'un demi-carré jaune.

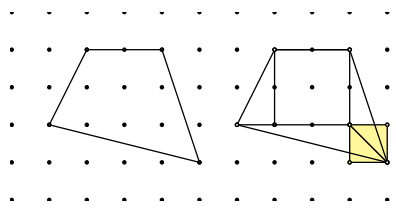


Fig. 6.3

   Dès que ces décompositions et recompositions ont été perçues, le dénombrement peut être effectué par application des principes déjà rencontrés (invariance et additivité). Une fois de plus, la principale difficulté est la lecture de la figure, en tenant compte de traits non dessinés afin de percevoir comment compléter cette figure de façon efficace.

   On constate néanmoins un effet pervers de l'usage du papier quadrillé chez certains enfants qui « comptent les points » au lieu de « compter les intervalles » (voir par exemple l'item 4 du pré-test réalisé en première secondaire en 2006–2007, page). Trois points étant marqués sur un segment de longueur 2, pour dessiner un segment de longueur double, ces enfants comptent six points en enfilade ! On peut considérer qu'il s'agit là d'un dénombrement qui ne s'appuie pas sur une perception correcte.

3. Le concept d'*unité commune de mesure* intervient dès que l'on veut comparer quantitativement les aires de deux formes géométriques.

   Il met en jeu la décomposition des deux formes en parties identiques, avec le problème de visualisation qui a déjà été mentionné à plusieurs reprises. Ce n'est qu'après avoir découvert ces décompositions que l'on distingue effectivement quelle est l'unité commune de mesure.

   Si on en trouve une — le plus souvent, ce n'est pas possible — le rapport des deux aires s'exprime par une fraction à termes entiers. Chacune des deux aires peut aussi s'exprimer comme un multiple entier de l'unité commune de mesure (voir le chapitre 5).

La systématisation

Nous distinguerons deux phases dans la systématisation : l'introduction d'unités *conventionnelles* et la construction de *formules de calcul*. Du point de vue didactique, il n'est pas clair qu'une de ces deux phases doive nécessairement être abordée avant l'autre. Pour la clarté de notre texte, nous les décrirons néanmoins successivement.

L'introduction d'unités conventionnelles

Cette introduction se justifie par des raisons économiques et sociales uniquement. On a rappelé à la section 4.5 quelques-uns des faits ayant conduit les responsables de la Première République française ([9]) à la décision de remplacer le système de mesures de l'époque par un nouveau système qui devait être rationnel et universel.

Dans le cadre de ce travail, nous devons mettre l'accent sur deux aspects essentiels.

1. Le lien entre l'unité conventionnelle d'aire et celle de longueur.

   Le cm^2 est l'aire du carré dont le côté mesure 1 cm.

   Notons au passage, que l'unité conventionnelle principale de longueur, c'est-à-dire celle d'où dérivent les autres unités de longueur est le mètre et non le centimètre. Nous nous limiterons néanmoins dans ce qui suit à nous exprimer en cm et cm^2, la transposition de ces remarques au cas du mètre ou d'autres unités étant immédiate.

   Bien entendu, la définition ci-dessus repose sur le fait que tous les carrés dont le côté mesure 1 cm sont superposables. Elle n'est donc possible que si l'invariance des aires par déplacement est acquise.

   Cette définition ne présente pas le cm^2 comme le produit 1 cm $\times$ 1 cm, expression qui n'apparaîtra que dans le cadre de l'utilisation de formules.

2. Si le point précédent est relativement banal, les choses se compliquent lorsqu'une aire n'est pas égale à un nombre entier de cm^2. Pour augmenter la précision, on est alors obligé d'utiliser une unité plus petite : le mm^2, ce qui pose directement

([9]) En fait, l'Académie des Sciences avait entamé des travaux dans cette direction dès avant la Révolution de 1789.

le problème du lien entre cm^2 et mm^2. On sait qu'il s'agit là d'un seuil difficile à franchir.

Comme tous les véritables seuils *épistémologiques*, il n'y a pas de méthode miracle pour amener l'élève à surmonter l'obstacle. C'est à force d'activités qu'un déclic peut se produire.

Plusieurs éléments compliquent la situation.

(a) À la base, on trouve un changement d'unité de longueur : le cm est remplacé par le mm, unité dix fois plus petite.

(b) Cette unité de longueur ne sert aucunement à mesurer des aires. Mais le changement d'unité de longueur entraîne un changement pour l'unité d'aire et pour l'unité de volume (il est difficile d'isoler l'unité d'aire dans cette question).

(c) Les changements d'unités (longueur, aire et volume) sont gouvernés par la dimension. L'enfant doit être conscient de la dimension 2 du plan, 3 de l'espace. C'est à nouveau un phénomène de perception.

(d) Le concept de dimension n'est pas nécessairement facile à percevoir. On peut l'associer aux questions de repérage, dont PIAGET affirme qu'elles interviennent dans la maîtrise des mouvements plans ou spatiaux. Pour repérer un point dans le plan on utilise par exemple ses projections sur *deux* droites perpendiculaires. Pour l'espace, il en faut *trois*.

Des activités de repérage sur le terrain ou sur une carte peuvent donc jouer un rôle dans l'acquisition du concept de dimension. Elles contribuent à améliorer la perception du plan et de l'espace.

(e) Au cours d'activités de ce genre, il est assez naturel d'utiliser des plans ou des cartes d'échelles différentes, ou encore des photographies à des agrandissements différents. Combien de feuilles de papier A4 faut-il assembler pour pouvoir faire le plan au 10e d'une pièce rectangulaire de 3 m sur 4 m ? Quelles sont l'aire de la pièce et celle du plan ?

On revient ainsi à des changements d'unités. Mais ce qui est au cœur de tous ces éléments, c'est *un nouveau principe qui généralise le principe d'invariance par déplacement.*

Par *agrandissement* ([10]), les aires sont multipliées par le carré du rapport d'agrandissement (et les volumes par le cube de ce rapport).

(f) Une autre difficulté peut provenir de l'ordre de grandeur des nombres manipulés. Exprimer 1 m^2 en cm^2, c'est remplacer le coefficient 1 par le coefficient 10 000. Les enfants ne sont pas nécessairement habitués à travailler avec des nombres aussi grands.

La construction des formules de calcul d'aire

Dans tout ce texte, nous avons voulu mettre en évidence que l'apprentissage des mesures de grandeurs géométriques ne se limite pas à la mise en place de formules, mise en place

([10]) Les mathématiciens diraient « par homothétie ».

parfois réalisée avant que le concept d'aire soit installé réellement. Dans un tel cas, il est fréquent de constater chez l'enfant une confusion l'amenant à l'incapacité d'utiliser à bon escient ces formules qu'il connaît. Par exemple, il confond les formules relatives au périmètre et celles relatives à l'aire.

De plus la remédiation — qui consisterait à revenir sur le concept d'aire lui-même, puis à reconstruire les formules — risque d'être inopérante, l'enfant ne comprenant plus le sens de ces activités. Partant du principe qu'il vaut mieux prévenir que guérir, consacrons le temps nécessaire à la construction du concept d'aire avant d'aborder les formules.

Cela étant dit, il faut arriver quand même à ces fameuses formules. Ici aussi quelques remarques s'imposent.

1. La première porte sur le fait qu'il existe plusieurs façons d'énoncer ces formules et que ces différences d'énoncés révèlent des habitudes de travail.

   Par exemple, un losange est un parallélogramme, mais la formule donnant l'aire du losange fait intervenir les diagonales et celle donnant l'aire du parallélogramme se réfère à une base et une hauteur.

   Ce vocabulaire peut être associé à des présentations stéréotypées des formes géométriques qui privilégient les directions horizontale et verticale.

   Depuis longtemps, on demande d'éviter ces présentations stéréotypées qui ont des effets pervers. Ainsi quand l'aire d'un triangle est exprimée sous la forme $\frac{\mathrm{b} \times \mathrm{h}}{2}$ et associée à des dessins de triangles dont un côté est toujours horizontal, il y a un risque non négligeable que l'enfant soit détourné d'une démarche consistant à placer la base sur un côté non horizontal.

2. Certes, l'horizontale et la verticale jouent effectivement un rôle privilégié dans notre perception. Par exemple, nous reconnaissons plus facilement les angles droits ayant un côté horizontal et un côté vertical que les autres. Cela n'implique pas que nous devions systématiquement les placer dans cette position.

   Une façon d'améliorer notre perception d'une figure est précisément de faire pivoter la feuille de papier, le géoplan, ou même l'écran de l'ordinateur, jusqu'à amener certains éléments de la figure à avoir une orientation privilégiée, puis, après examen, de remettre le support de la figure dans sa position initiale.

3. La formule donnant l'aire d'un triangle peut être appliquée de trois façons différentes, selon le côté qualifié de base, à la différence de celle donnant l'aire d'un rectangle qui donne lieu au même calcul quel que soit le côté qualifié de longueur et celui qualifié de largeur.

   La formule donnant l'aire d'un parallélogramme peut être appliquée de deux manières différentes, selon le côté qualifié de base, celle donnant l'aire d'un carré d'une seule manière.

4. Encore faut-il faire attention à ce que des formules telles que $\frac{b \times h}{2}$, $b \times \frac{h}{2}$ et $\frac{b}{2} \times h$ soient bien perçues comme équivalentes par les élèves. (Si ce n'est pas le cas, il y a trois formules différentes qui donnent l'aire d'un triangle et qui peuvent toutes être écrites de trois façons différentes.)

Autrement dit, la maîtrise des formules d'aires suppose une maîtrise des propriétés de la multiplication et de la division.

5. Du point de vue géométrique, le fait important dans toutes ces formules est qu'elles comportent le *produit de deux longueurs de segments perpendiculaires*.

6. Nous venons de parler de produit de deux longueurs de segments perpendiculaires. Sont-ce des longueurs que l'on multiplie ou des nombres ?

   Si A est l'aire d'un rectangle et que L et ℓ sont les longueurs de deux côtés consécutifs, la formule $A = L \times \ell$ n'a de sens que si ce sont des longueurs que l'on multiplie.

7. L'installation de la formule de l'aire du rectangle s'accompagne donc du remplacement d'une formulation du type $A = (6 \times 7) \times (1\ \text{cm}^2)$ par $A = (6\ \text{cm}) \times (7\ \text{cm})$.

   La première formulation correspond à un dénombrement des petits carrés unités inclus au rectangle, la seconde à la mesure des longueurs de deux côtés suivie d'une multiplication.

   Cette transition doit être explicitée. Il ne doit pas être considéré comme anormal que l'on multiplie des longueurs. Plus tard, on calculera même une vitesse en divisant une longueur par une durée.

8. Du point de vue de l'arithmétique, lorsque l'enfant rencontre pour la première fois les formules de périmètres ou d'aires, quel sens donne-t-il aux lettres qui y figurent ? N'ayant jamais rencontré le concept de *variable*, le seul sens qu'il puisse donner à ces lettres est celui de « marqueur » : ce sont des symboles à remplacer par des valeurs. C'est là un emploi rudimentaire des lettres qui ne sera dépassé qu'au début de l'apprentissage de l'algèbre.

Pour terminer ce chapitre, nous pourrions encore évoquer le rôle important du langage dans l'apprentissage des mathématiques. Nous sommes en effet convaincus que plus un domaine est abstrait — et les mathématiques sont nécessairement abstraites — plus son apprentissage dépend de la verbalisation. Mais développer ce sujet nous conduirait trop loin.

Troisième partie

Activités pour le cycle 10/12 ans

Présentation

Les séquences d'activités présentées dans cette partie de notre rapport portent sur les formules d'aire de quelques polygones ([11]). Il ne s'agit pas de l'*application* de ces formules mais de leur *construction*. Nous exploiterons les contextes de pavage, de découpage et d'assemblage de formes, de modification de formes et de comparaison de formes par superposition ou équidécomposition. Nous utiliserons à cette occasion les possibilités dynamiques du logiciel *Apprenti Géomètre*.

Il nous a paru opportun d'intégrer dans un seul ensemble des activités nouvelles et des activités anciennes réinterprétées avec un objectif plus spécifiquement conceptuel.

Ces séquences d'activités ont été expérimentées durant les années scolaires 2005–2006 et 2006–2007. La première année, l'expérimentation a été menée dans des classes de sixième primaire. La seconde année, nous avons choisi de réaliser l'expérimentation dans des classes de cinquième primaire, de façon à être en présence d'élèves ayant au préalable eu moins de contacts avec les sujets que nous désirions aborder.

Lors de chaque expérimentation, nous avons constitué un groupe de classes dites « expérimentales » auxquelles nous soumettions des activités utilisant le logiciel *Apprenti Géomètre* et un groupe de classes dites « témoins » auxquelles nous proposions de réaliser les mêmes activités dans un contexte « papier-crayon » plus traditionnel.

La comparaison des résultats des deux groupes a été réalisée à l'aide de pré-tests et post-tests dont on trouvera les résultats à la partie de ce rapport.

Dans la présente partie, nous présentons les activités telles qu'elles ont été préparées et réalisées. Les fiches didactiques qui ont été distribuées aux élèves sont rassemblées dns le tome 7 de ce rapport. Pour chaque activité (laquelle peut couvrir plusieurs séances d'enseignement), on trouvera dans la suite les *objectifs* à atteindre, sous forme d'*enjeux*, et une *analyse a priori* qui détaille les comportements prévisibles de l'élève tant du point de vue *procédural* que du point de vue *conceptuel*.

Une rubrique *Échos des classes* rend compte des réactions des élèves. Lorsque cela paraissait pertinent, elle a été structurée de manière à mettre en évidence les aspects affectifs, instrumentaux, conceptuels et perceptifs.

Dans les classes, le travail en binôme a été privilégié en vue de favoriser la collaboration et la confrontation entre élèves.

([11]) Certaines d'entre elles pourraient être utilisées dans le cadre de la construction du concept de fraction. Le lecteur intéressé pourra consulter le document [18].

Chapitre 7

L'expérimentation en cinquième primaire (2006–2007)

L'expérimentation rapportée dans ce chapitre a été réalisée dans huit classes de cinquième primaire : trois du Collège Saint-Marie à Rêves, deux de l'Institut Saint-Joseph à La Louvière, une de l'École St-Rémy à Ecaussines, une à l'École communale de Thoricourt et une à l'École St-Martin à Horrues. Certaines d'entre elles jouaient le rôle de classes témoins et travaillaient sur une version « papier-crayon » des activités. Les autres utilisaient *Apprenti Géomètre*.

L'organisation des activités

Lors de la mise en place du programme d'expérimentation, différents paramètres ont été pris en compte : le temps disponible au niveau des classes, le temps disponible pour les chercheurs, les notions à faire acquérir, les apprentissages conceptuels et instrumentaux, ... Le nombre de séances possibles a ainsi été défini en fonction de ces paramètres. Douze séances ont été programmées, préparées et réalisées dans chacune des classes.

Vu le nombre limité de séances à notre disposition et à raison d'une seule séance par semaine, nous savions qu'il ne serait pas possible de connaître suffisamment les élèves pour pouvoir différencier les activités selon leurs besoins.

Pour ces mêmes raisons, il n'était pratiquement pas possible de proposer des activités qui exploitent tous les liens existant entre les trois facettes fondamentales du domaine considéré : la géométrie, la mesure et les nombres. En conséquence, nous avons opté pour une approche limitée par situations-problèmes.

Les situations choisies proposent des tâches de construction, d'assemblage, de découpage, de simulation, d'observation. Aucune séance n'a pu être consacrée ni à une narration de recherche, ni à la prise en charge *individualisée* de certains élèves.

La préparation des activités

Le travail de construction des formules de périmètre et d'aire par les élèves est assez complexe. De la *simple* comparaison de longueurs ou d'aires à leur calcul à l'aide d'une formule et d'une unité conventionnelle, il y a un long chemin conceptuel à parcourir, chemin qui a été, au moins partiellement, décrit dans le chapitre 6.

À titre d'illustration, analysons les démarches nécessaires pour calculer l'aire d'un parallélogramme. L'organigramme ci-dessous montre les changements de cadres ([1]).

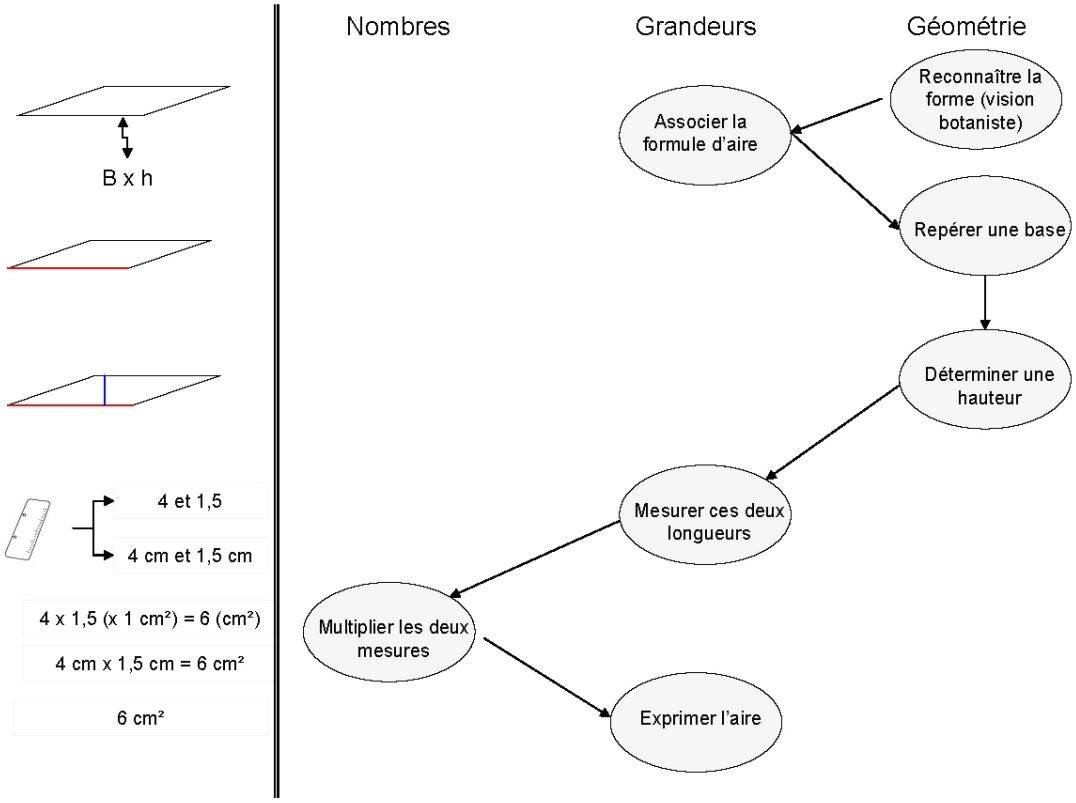


Fig. 7.1

Remarquons que celui-ci pourrait être plus long si les mesures des longueurs ne sont pas opérées dans un même temps mais disjointes. Ainsi l'élève peut reconnaître une base et mesurer sa longueur d'abord et ensuite reconnaître une hauteur et la mesurer.

Du point de vue perceptif, la reconnaissance de la forme puis celle d'une base relèvent de la seule observation (point du botaniste dans la terminologie de Duval, *voir l'annexe A.4*). Par contre celle de la hauteur se situe au point de vue du constructeur.

([1]) Voir les annexes A.1 et A.2.

7.1 Comparer des aires

La séquence contient douze fiches : fiches 1.1 à 1.14 pour les classes expérimentales et fiches 4.1 à 4.14 pour les classes témoins. Celles-ci se répartissent en quatre séances d'activités comme suit :
– séance 1 : fiches 1.1, 1.2 et 1.3 ;
– séance 2 : 1.4 et 1.5 ;
– séance 3 : 1.8 ;
– séance 4 : 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 et 1.14.

De quoi s'agit-il?	Les élèves comparent les aires de formes géométriques en utilisant différentes démarches qualitatives.
Enjeux	• Comparer les aires de différents polygones à partir de différentes démarches qualitatives ; • mettre en évidence et utiliser différentes démarches pour comparer des aires ; • construire le concept d'*aire*, le différencier du concept de *périmètre*.
Compétences	• *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.* • *Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).* • *Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...].* • *Fractionner des objets en vue de les comparer.*
De quoi a-t-on besoin?	Les fiches 1.1 à 1.14 pour les classes expérimentales et les fiches 4.1 à 4.14 pour les classes témoins. Pour ces mêmes classes, l'enseignant devra photocopier les fiches 4.2, 4.5, 4.6 et 4.8 sur du papier cartonné et découper les formes pour qu'elles soient distribuées aux élèves au cours de l'activité.

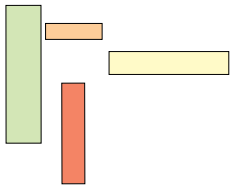
7.1.1 Comparer des aires (1)

Cette fiche possède deux objectifs : permettre aux élèves de prendre en main le logiciel *Apprenti Géomètre* et rencontrer la superposition comme outil de comparaison des aires de formes.

Le travail sur cette fiche ne devrait pas excéder 15 minutes.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 1.1 aux élèves. Il explique l'objet de chacun des cadres et icônes présents sur cette fiche. Il s'assure que tous les groupes d'élèves peuvent ouvrir le fichier demandé.

`Fiche 1.1`.
Voici quatre formes géométriques. Classe-les de la plus petite à la plus grande en comparant leurs aires.



Analyse procédurale

Pour réaliser la comparaison des formes, les élèves doivent les superposer ou les juxtaposer en ayant pris quelques précautions.

En classe expérimentale

Pour manipuler les formes, les élèves utilisent les fonctionnalités `Glisser` et `Tourner` dans le menu contextuel situé à la gauche de l'écran.

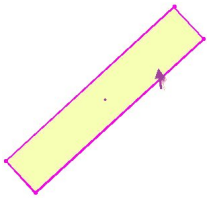


Fig. 7.2

Pour déplacer une forme géométrique sans changer son orientation, l'élève sélectionne le mouvement `Glisser` puis saisit cette forme par un simple clic de souris à partir de n'importe quel point situé à l'intérieur de la forme, dont le contour a changé de couleur. Il tient enfoncé le bouton de la souris et déplace la forme jusqu'à l'endroit souhaité. En relâchant le bouton, l'action s'interrompt. L'élève peut alors déplacer une autre forme sans devoir sélectionner à nouveau ce mouvement.

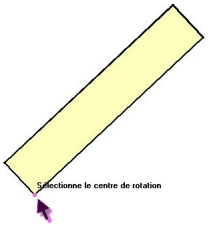


Fig. 7.3

Pour faire tourner une forme, l'élève sélectionne le mouvement `Tourner` dans le menu de gauche. Il peut ensuite choisir entre deux procédures.

- Soit il saisit la forme en cliquant à l'intérieur de celle-ci : le pourtour de la forme change de couleur et le centre de la forme apparaît. En déplaçant la souris, la forme tourne autour de son centre (*Fig. 7.2*).
- Soit il saisit un des sommets par un clic de souris : ce sommet change alors de couleur. En déplaçant la souris, la forme tourne autour du sommet choisi (*Fig. 7.3*).

Notons que le retournement des rectangles n'est pas nécessaire.

En classe témoin

La manipulation des formes en carton peut être plus intuitive et inconsciente de la part des élèves que dans le cas de la manipulation à l'aide du logiciel qui confronte les élèves aux outils mathématiques tels que les mouvements. Ainsi, même si les actions des élèves sont guidées par l'objectif à atteindre, la réflexion consciente sur ces actions n'est pas aussi nécessaire, l'action ne doit pas être explicitée par le choix d'un verbe comme dans le cas de l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*.

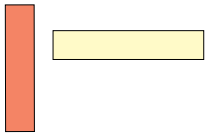


Fig. 7.4

Par exemple, si l'élève souhaite comparer les deux rectangles de la figure 7.4,

• dans le cas de la manipulation de pièces en carton, l'élève saisira probablement les deux pièces en même temps, les rassemblera dans un mouvement « global » pour les juxtaposer. Il réalise son action dans un cadre que nous pourrions qualifier de « naturel », sans être confronté ni au symbolisme mathématique, ni à la nécessité d'identifier les actions géométriques réalisées.

• dans le cas de la manipulation des pièces à l'écran, l'élève doit au préalable identifier et définir comment il va agir sur un des deux rectangles. En l'occurrence, il choisit le mouvement `Tourner` et le centre de rotation, soit le centre du rectangle, soit l'un de ses sommets (*Fig. 7.2* et *7.3*). Par la suite, il choisit le mouvement `Glisser` pour juxtaposer des côtés. Les actions sont ici réalisées dans un cadre géométrique.

Globalement, en imposant l'usage d'un symbolisme linguistique ou mathématique, l'activité avec un logiciel de géométrie dynamique, aide à la formation de la rigueur et de la pensée mathématique. Les contraintes instrumentales et procédurales obligent l'élève à réfléchir sur son activité en termes mathématiques. L'apprentissage n'en est que plus efficace.

Analyse conceptuelle

La superposition de formes géométriques est un outil important. Nous dirons de deux formes qui se superposent *parfaitement* qu'elles sont superposables. Dans ce cas, nous pouvons affirmer que ces deux formes possèdent la même aire, le même périmètre...

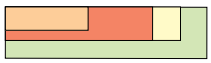


Fig. 7.5

Dans l'activité proposée, les formes ne se superposent pas parfaitement mais leur superposition partielle permet la comparaison. Elle peut être réalisée de deux façons. Soit les élèves les superposent de telle manière qu'elles possèdent au moins un côté ou un sommet commun. Soit ils les superposent sans côté ou sommet commun.

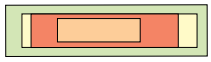


Fig. 7.6

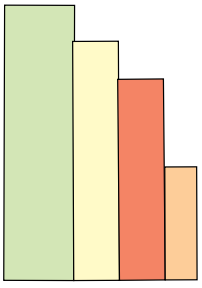


Fig. 7.7

Certains élèves peuvent également utiliser la juxtaposition des formes géométriques par un côté comme le montre la figure 7.7. Dans ce cas, afin de comprendre l'activité cognitive des élèves, l'enseignant les invite à expliquer leur démarche de comparaison.

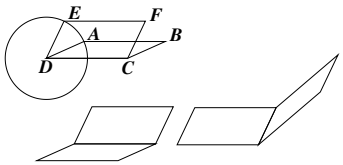
– S'ils comparent les hauteurs des formes, ils ne tiennent pas compte de l'aire.
– S'ils ont préalablement comparé les « largeurs » des formes, puis les hauteurs, la démarche est correcte même s'ils n'ont comparé directement que des longueurs et non des aires. Encore doivent-ils expliciter leurs conclusions.

Fig. 7.8

Les élèves peuvent également essayer de juxtaposer les formes par leurs petits côtés, comme le montre la figure 7.8. Cependant, tant sur la hau-

teur que sur la largeur de l'écran, il ne leur sera pas possible de juxtaposer les quatre formes.

Les démarches utilisant la juxtaposition des côtés ne sont pas généralisables à toutes les situations de comparaison d'aires de formes géométriques. Par exemple, si les formes sont des parallélogrammes, la juxtaposition des côtés n'est pas une démarche adaptée comme le montre la figure ci-dessous.



Les deux parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$ possèdent le même périmètre mais par contre, de toute évidence, ne possèdent pas la même aire.

Fig. 7.9

La mise en commun gérée par l'enseignant se réalise en trois temps :
- d'abord l'énoncé de la réponse, en l'occurrence le classement des formes de la plus petite à la plus grande ;
- ensuite, la justification de ce classement, ce que nous appellerons « la validation de la réponse ». Durant cette phase, la superposition des formes sera énoncée comme un outil géométrique permettant de comparer des aires, des formes, des périmètres... Des formes qui ne sont pas superposables ne peuvent cependant pas être systématiquement définies comme ne possédant ni la même aire, ni le même périmètre, ni la même forme... ;
- enfin, l'explication de la démarche utilisée, en l'occurrence l'explication de l'utilisation des mouvements `Tourner` et `Glisser` pour superposer les formes.

Il est fort probable que dans un premier temps, ces trois *énoncés* soient produits par les élèves dans la même phrase : « C'est la verte la plus grande parce que quand j'ai superposé les formes j'ai vu qu'elle était plus grande que les autres ! », par exemple.

L'enseignant veille dans un second temps à mettre séparément en évidence les trois *énoncés* cités ci-dessus. C'est au cours de cette clarification que l'enseignant veille également à la correction des arguments utilisés par les élèves pour justifier leur réponse.

Cette démarche sera reproduite lors des mises en commun réalisées après chaque fiche.

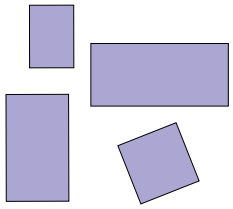
7.1.2 Comparer des aires (2)

Remarque liminaire : cette deuxième activité propose une tâche identique à partir de formes différentes : trois rectangles et un carré.

Cette activité permet d'exercer les savoirs rencontrés précédemment. Sa durée ne devrait pas non plus excéder 15 minutes. Elle n'a pas été proposée aux classes témoins.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 1.2 aux élèves. Il s'assure cette fois que les élèves accèdent aux informations contenues sur la fiche et qu'ils peuvent ouvrir le fichier proposé.

`Fiche 1.2`.
Voici quatre formes géométriques. Classe-les de la plus petite à la plus grande en comparant leurs aires.



Analyse procédurale

Les connaissances instrumentales rencontrées sont d'une part celles déjà exercées lors de l'activité précédente – `Glisser` et `Tourner` – et d'autre part la fonctionnalité `Colorier` disponible dans le menu `Outils`.

En classe expérimentale

Les élèves superposent les quatre formes pour pouvoir les comparer comme dans la tâche précédente (*Fig. 7.10*). Notons que la forme la plus petite peut être orientée de deux manières différentes. Ceci n'influence cependant ni le résultat de la comparaison ni fondamentalement la démarche de comparaison.

Pour faciliter les comparaisons et les échanges verbaux, les élèves peuvent colorier les formes (*Fig. 7.11*).

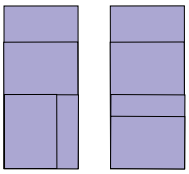


Fig. 7.10

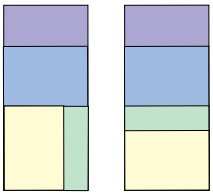


Fig. 7.11

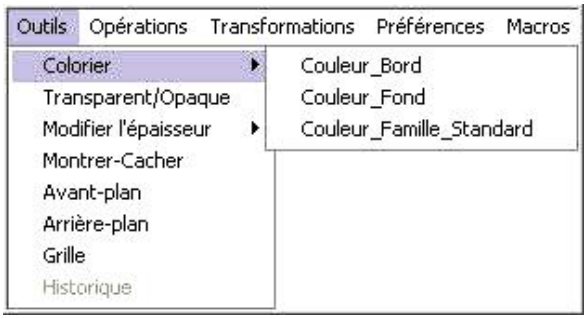


Fig. 7.12

Avec *Apprenti Géomètre*, les élèves peuvent colorier soit le bord des formes, soit leur fond. Pour ce faire, après avoir réalisé la sélection adéquate dans le menu `Outils` (*Fig. 7.12*), les élèves choisissent la couleur dans la palette graphique puis cliquent sur la forme. Notons que si la forme est sélectionnée au préalable, celle-ci est coloriée dès la sélection de la couleur.

Notons que comme pour l'activité précédente, les élèves peuvent également orienter les formes horizontalement.

Analyse conceptuelle

Par rapport à la première activité, cette deuxième n'a pas pour objectif d'appréhender de nouveaux concepts mathématiques.

La mise en commun se réalise à nouveau en trois temps :
– d'abord l'énoncé de la réponse ;

– ensuite, la justification de la réponse ;
– enfin, l'explication de la démarche utilisée.
Comme à la fin du travail avec la fiche précédente, l'enseignant veille à bien distinguer et mettre en évidence ces trois `énoncés` dont les rôles sont différents.

7.1.3 Comparer des aires (3)

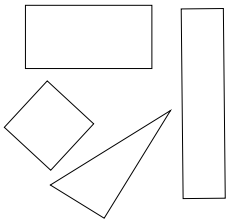
Remarque liminaire : les formes proposées sont à nouveau de formes différentes, sauf pour les deux rectangles. Notons que pour chaque paire de formes possédant la même aire, les périmètres sont différents.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 1.3 ou les fiches 4.1 et 4.2 aux élèves.

Cette activité se compose de deux tâches. La première consiste à classer les formes en fonction de leurs aires. Durant la seconde, les élèves comparent les périmètres du carré et du triangle.

Une troisième partie de l'activité est consacrée à la mise en commun et aux discussions ainsi qu'à la synthèse.

`Fiche 1.3 ou 4.1.`
Voici quatre formes géométriques. Classe-les de la plus petite à la plus grande en comparant leurs aires.



Pourrais-tu dire qui du carré et du triangle possède le plus grand périmètre ? Ou bien peut-être ont-ils tous les deux le même périmètre !

Analyse procédurale

La superposition des formes s'effectue à nouveau en utilisant les mouvements `Glisser` et `Tourner`.

En classe expérimentale

D'autres fonctionnalités sont à utiliser pour comparer les aires des formes : `Copier/Coller` ou `Dupliquer` pour obtenir une copie d'une forme ; `Diviser` pour créer des points de division ; `Découper` pour découper des formes ; `Points` pour placer un point à l'intersection de côtés de deux formes.

Pour dupliquer une forme, deux démarches sont possibles :
– soit utiliser les fonctionnalités `Copier` et `Coller` ;
– soit utiliser la fonctionnalité `Dupliquer`.

`Copier/Coller` – Cette fonctionnalité permet d'obtenir un duplicata d'une forme sans conserver de lien entre ces deux formes. Pour y parvenir, l'élève doit sélectionner `Copier` dans le menu `Édition`, ensuite cliquer sur la forme à copier, ensuite sélectionner la fonctionnalité `Coller`

dans le même menu et cliquer à un quelconque endroit de l'écran. Le duplicata obtenu est une forme identique à la première mais totalement indépendante de celle-ci.

`Dupliquer` – Cette fonctionnalité permet avec moins de manipulations de créer un duplicata d'une forme. L'élève doit sélectionner la fonctionnalité `Dupliquer` dans le menu `Opérations` puis cliquer sur la forme à dupliquer. En maintenant le bouton enfoncé, l'élève déplace le duplicata. Cette nouvelle forme est cependant liée à la première, à savoir que toute modification de l'une entraîne la même modification de l'autre.

Au cours de l'activité, la nécessité de découper des formes pourrait apparaître. Pour ce faire, l'élève doit déterminer les points à partir desquels cette opération doit se réaliser. Ces points peuvent-être des sommets de la forme, son centre ou des points situés sur son pourtour ou à l'intérieur de celle-ci.

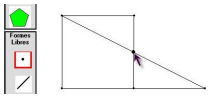


Fig. 7.13

Ainsi, dans certains cas, est-il nécessaire de créer des points de découpe, différents des sommets ou du centre. Pour ce faire, deux démarches sont possibles :

– soit créer des points de division à partir de la fonctionnalité *Diviser* ;
– soit placer des points sur une forme et s'en servir comme point de découpe (*Fig. 7.13*).

En classe témoin

Comme pour d'autres activités de manipulation, il se peut que les actions menées par les élèves soient plus inconscientes que dans la situation des élèves des classes expérimentales, en ce sens qu'ils n'ont pas besoin d'un quelconque symbolisme pour réaliser la tâche proposée. Et à l'inverse de ce qu'espérait Le Corbusier, *la main ne sera pas guidée par la tête.*

Analyse conceptuelle

La comparaison des aires peut mobiliser au moins trois démarches complémentaires : la superposition, la duplication (multiplication de grandeur) ou la découpe (division de grandeur).

La première démarche peut être de vouloir les superposer. Ceci peut amener les élèves à observer des lignes de découpe dont ils se servent pour constater l'égalité des aires des deux rectangles d'une part, du carré et du triangle d'autre part (*Fig. 7.14*).

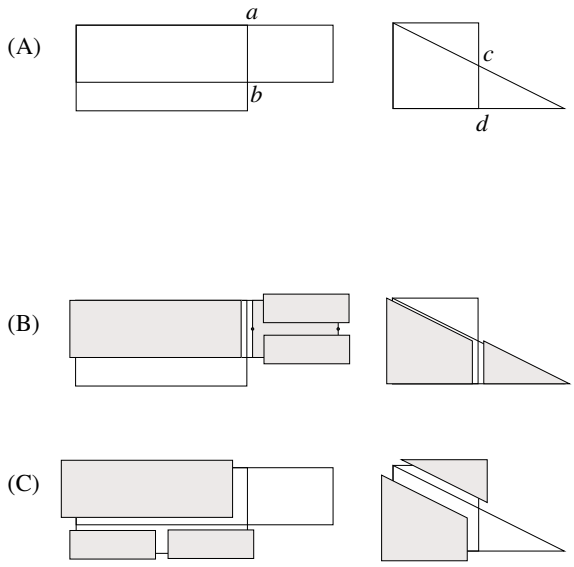


Fig. 7.14

(A) Les élèves superposent les formes deux à deux. Ils observent des parties communes, un rectangle pour les deux rectangles, un trapèze pour le carré et le triangle, et des parties « qui dépassent ». Notons que pour les rectangles ces parties ne sont pas directement superposables alors qu'elles le sont dans le cas du carré et du triangle.

(B) Dans la perspective d'une découpe des pièces, les élèves placent les points aux intersections des côtés de formes (a, b, c et d). Apparaissent alors clairement les parties communes et celles « qui dépassent », (qui ne sont pas communes). Pour les rectangles, les élèves peuvent choisir de découper l'autre rectangle. Fondamentalement, la démarche reste cependant la même.

Dans le cas des deux rectangles, la partie non commune doit encore être découpée en deux. Pour ce faire, les élèves doivent diviser chaque petit côté du rectangle en deux, puis découper la forme à partir de ces deux points.

(C) Enfin, les différentes parties découpées peuvent être assemblées et superposées pour montrer l'égalité des aires.

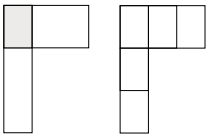


Fig. 7.15

Une autre démarche peut être utilisée pour montrer l'égalité des aires des deux rectangles. En superposant ceux-ci comme le montre la figure ci-contre, et en découpant un des rectangles à partir des points d'intersection, apparaît une unité de mesure commune de forme rectangulaire. Celle-ci est contenue trois fois dans chacun des rectangles de départ.

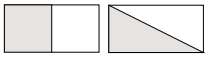


Fig. 7.16

Une autre démarche peut encore être utilisée pour montrer l'égalité des aires du carré et du triangle. En superposant successivement le carré sur le rectangle le moins allongé et le triangle sur ce même rectangle, les élèves constatent que le carré comme le triangle recouvrent la moitié du rectangle. Donc, même s'ils sont de forme différente, ils possèdent la même aire.

En classe témoin

Comme pour les classes expérimentales, les démarches de superposition et de découpe de formes sont utilisables, même si les découpes sont moins précises.

Par contre, le procédé de multiplication ne peut être directement utilisé sauf si l'enseignant a prévu des duplicata pour chacune des formes et que les élèves observent la nécessité de posséder des formes supplémentaires.

La mise en commun se réalise à nouveau en trois temps :
– l'énoncé de la réponse (l'énoncé du produit attendu) ;

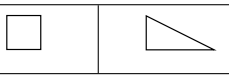
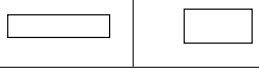
– l'énoncé de la justification de la réponse (la validation de la réponse) ;
– l'énoncé de la démarche utilisée.

Durant la synthèse, l'enseignant veille à énoncer clairement, ou à faire énoncer par un ou plusieurs élèves, les problèmes posés et les démarches utilisées pour les résoudre. De même la distinction entre *périmètre* et *aire* doit être clairement mise en évidence.

Le recours à la « monstration » à partir de la manipulation des fichiers permet de lier argumentation discursive et argumentation visuelle. Ceci constitue aussi une première approche des narrations de recherche qui pourraient être régulièrement proposées par la suite aux élèves.

Échos des classes

Au cours des sept séances d'expérimentation, cette activité a produit des résultats très différents, certaines classes percevant rapidement le classement en deux paires de formes, d'autres percevant nombre de classements très différents comme en témoigne le tableau ci-dessous pour une classe témoin.

1	2	3	4	Élèves
				10
				6
				5
				2
				1
				1
				1
				1

Un élève a affirmé que si le carré et le triangle avaient même aire, ils devaient avoir même périmètre. Cette assertion n'a cependant pas fait l'unanimité dans la classe. Nous avons donc comparé les périmètres de ces deux formes.
Les quatre côtés du carré ont été reportés tout le long du périmètre du triangle. On a ainsi constaté que celui-ci est plus long que le périmètre du carré de même aire.

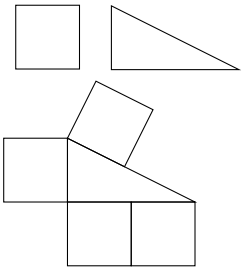


Fig. 7.17

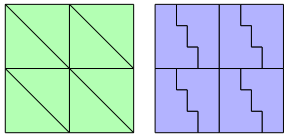
7.1.4 Comparer des aires (4)

Remarque liminaire : cette activité peut être réalisée à partir de pièces en carton identiques à celles proposées pour le travail avec *Apprenti Géomètre*.

Les fiches 1.4 et 1.5 peuvent être imprimées en *recto/verso*. De même pour les fiches 4.3 et 4.4 dans le contexte papier-crayon.

Situation initiale. L'enseignant soumet aux élèves la fiche 1.4 ou la fiche 4.3.

`Fiche 1.4 ou 4.3.`
Alex et Marc viennent de construire deux puzzles carrés de même dimension. Ils se demandent si une pièce verte possède une plus petite aire, une plus grande ou une même aire qu'une pièce bleue. Peux-tu les aider ?
Explique comment tu as procédé.



Ma réponse :

Mes explications :

Analyse procédurale

En classe témoin

Pour permettre les comparaisons de forme, l'enseignant distribue à chaque élève ou à chaque paire d'élèves une bandelette de papier ou une bandelette transparente sur laquelle ont été photocopiés les deux puzzles (*voir fiche 4.5*).

Notons qu'il y a une différence importante entre ces deux supports. Le travail avec un transparent rapproche l'activité de celle effectuée à partir d'*Apprenti Géomètre*.

En classe expérimentale

La bandelette papier ou transparente (voir fiche 1.6) est distribuée dans un second temps aux élèves, lors de la phase d'explication et de justification sur le support papier.

Pour comparer les formes, les élèves utilisent principalement les mouvements `Glisser, Tourner` et `Retourner`. Ils peuvent également découper les formes après les avoir superposées. Pour ce faire, soit ils utilisent un sommet (*Fig. 7.18*-(a)), soit ils placent un point sur une forme. Ce point sert de point de découpe (*Fig. 7.18*-(b)).

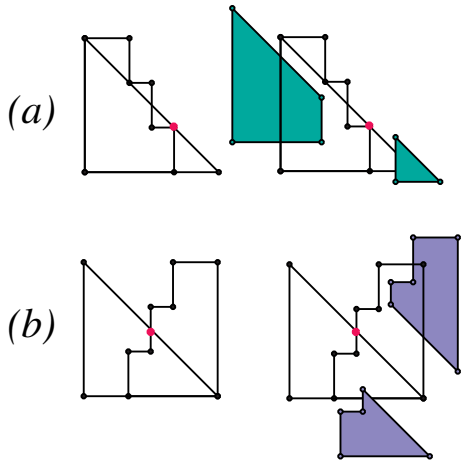


Fig. 7.18

Analyse conceptuelle

Plusieurs démarches correctes peuvent apparaître en classe. Certaines se situent dans les cadres géométriques et numériques, d'autres uniquement dans le cadre géométrique. Celles-ci peuvent toutes être apparentées à une vision de type « puzzle ».

– Une comparaison par découpage et dénombrement (démarche géométrique et numérique).

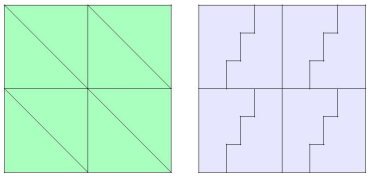


Fig. 7.19

Nous constatons que les deux puzzles carrés ont la même aire. Et nous constatons qu'ils contiennent chacun huit triangles de même aire ou huit escaliers de même aire. Donc chacun de ces triangles possède la même aire que chacun de ces escaliers.

Le même raisonnement peut être appliqué à un petit carré contenant soit deux escaliers soit deux triangles.

Ces deux premières démarches peuvent être argumentées en utilisant un raisonnement dit « par contraposition ». Ainsi on peut demander aux élèves ce qui se passerait si triangles et escaliers possédaient des aires différentes. Serait-il possible dans ce cas de construire deux petits carrés identiques en assemblant d'une part deux triangles, d'autre part deux escaliers ? Non : si les triangles n'ont pas la même aire que les escaliers, l'assemblage de deux triangles ne pourrait avoir la même aire que l'assemblage de deux escaliers.

– Une comparaison par superposition et découpage (démarche géométrique).

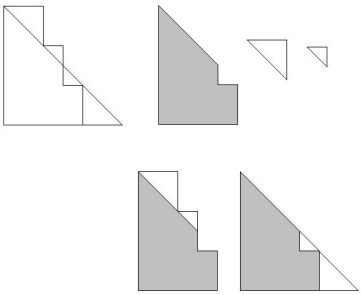


Fig. 7.20

Quand on superpose un grand triangle à un escalier, une partie commune apparaît (partie grisée). De plus il reste quatre triangles, deux à deux identiques. Deux d'entre eux sont des morceaux du grand triangle, les deux autres, identiques aux deux précédents sont des morceaux de l'escalier. Le triangle et l'escalier sont ainsi formés de pièces identiques. Donc le grand triangle possède la même aire que l'escalier.

– Une autre comparaison par superposition et découpage (démarche géométrique).

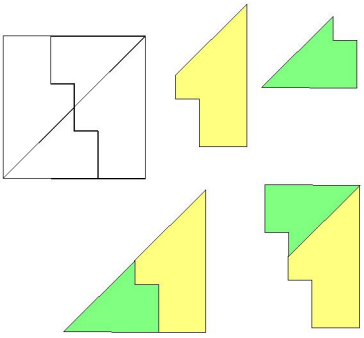


Fig. 7.21

En superposant un triangle à un escalier, nous constatons que quatre formes sont dessinées, identiques deux à deux (formes jaunes et formes vertes) Nous constatons aussi qu'un triangle et un escalier sont, chacun, composé d'un exemplaire de chacune de ces formes. Donc un triangle possède la même aire qu'un escalier.

– Une autre comparaison par mesurage (démarche géométrique et numérique).

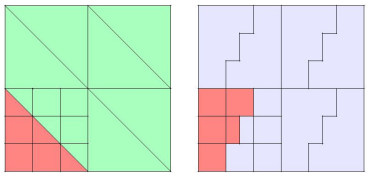


Fig. 7.22

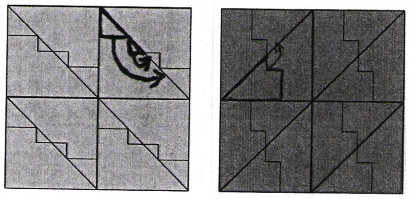
Nous constatons qu'en quadrillant deux petits carrés de la même manière, après avoir divisé chaque côté en trois, que le triangle et l'escalier contiennent chacun quatre carreaux et demi. Donc un triangle possède la même aire qu'un escalier.

Après leur travail de résolution, les élèves notent leur réponse et leurs explications sur la fiche. Ils peuvent utiliser le transparent (découper, colorier, annoter, coller) pour illustrer l'explication et la justification de leur démarche de résolution.

La mise en commun réalisée en fin d'activité a pour objectifs :
– d'abord d'énoncer la réponse – « les pièces de puzzle ont même aire » quelle que soit leur forme (« escalier » ou triangle) ;
– ensuite de mettre en évidence les différentes démarches possibles pour parvenir à cette conclusion (certaines peuvent être notées au *verso* de la fiche de travail) ;
– enfin de catégoriser ces différentes démarches (voir analyse conceptuelle).

Échos des classes

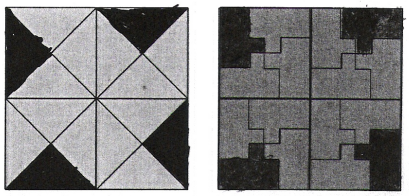
Nous proposons ci-dessous quelques copies d'explications produites par les élèves et relatives à des procédés différents.



Ma réponse : Il ont tout les deux la même aire

Mes explications : Ji ont met une pièce verte sur une pièce bleu il reste deux morceaux qui dépasse et deux morceaux qui manque, si ont met les morceaux qui dépasse dans les morceau qui manque sa fait la même chose qu'i un carré bleu.

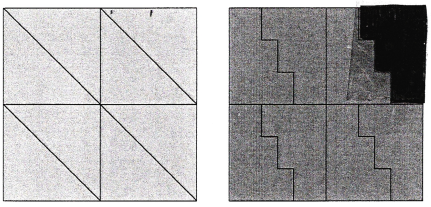
Fig. 7.23



Ma réponse : Elles ont les mêmes aires.

Mes explications : J'ai mis la pièce bleue à l'ensoire et j'ai vu que il y avait 4 morceaux alors j'ai fait la même chose avec l'autre et j'ai vu que s'était la même et sais la même aire.

Fig. 7.24



Ma réponse : Ils sont tout les deux les même

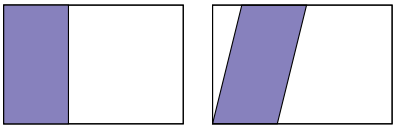
Mes explications : Le 2 escalier font un carré et que 2 triangle font un carrés de même mesure que le carré que les escalier ont fait ca veut dire que les escalier et les triangle ont la même aire mais pas le même périmètre

Fig. 7.25

7.1.5 Comparer des aires (5)

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 1.8 ou la fiche 4.7 aux élèves. Il s'assure que les élèves ont accès au fichier proposé ou, pour les classes témoins, qu'ils disposent du matériel nécessaire à la réalisation de la tâche.

`Fiche 1.8 ou 4.7.`
Alex et Marc ont peint ces deux bandes dans deux rectangles identiques.
Alex prétend que c'est lui qui a peint le plus ! Marc n'est pas d'accord ! Peux-tu les aider à établir la vérité ?
Explique ensuite ci-dessous comment tu as procédé.



Marc *Alex*

Ma réponse :

Mes explications :

Analyse procédurale

Quel que soit le contexte de travail, les assemblages de formes sont indéformables. De même, le parallélogramme et le rectangle ne peuvent être extraits directement du rectangle qui les contient.

En classe expérimentale

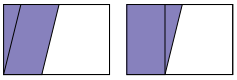


Fig. 7.26

La superposition des deux assemblages est possible. L'utilisation de la fonction `Avant plan/Arrière plan` est utile pour juger des parties de parallélogramme et de rectangle qui se superposent (*Fig. 7.26*).

Pour comparer les aires du parallélogramme et du rectangle, les élèves superposent les deux assemblages et observent des lignes de découpe possible pour transformer le parallélogramme en un rectangle ou l'inverse. Ensuite, plusieurs procédures sont utilisables, dont :

– *dupliquer* les deux formes ;
– extraire chaque forme de son support rectangulaire en *découpant*.

Il s'agit maintenant de vérifier si les aires sont égales. Pour ce faire, les élèves superposent les deux formes et utilisent des sommets de formes comme point de découpe pour transformer une forme en une autre. Nous expliquons ci-après la découpe du parallélogramme.

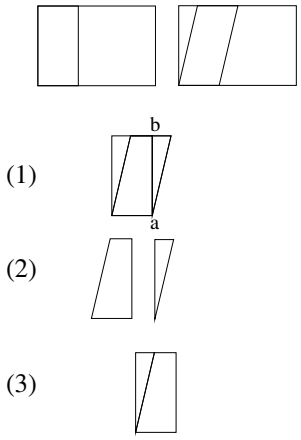


Fig. 7.27

(1) Superposer le rectangle et le parallélogramme.

(2) Découper le parallélogramme à partir d'un sommet (a) et du sommet du rectangle situé « à la verticale » de celui-ci (b).

(3) Assembler les deux morceaux de forme ainsi obtenus pour former le rectangle. Les fusionner si nécessaire.

(4) Superposer le rectangle de départ à ce nouveau rectangle obtenu par découpage et assemblage. Constater l'égalité des aires.

En classe témoin

Les formes sont imprimées sur la fiche de travail. Un transparent avec les mêmes formes est distribué aux élèves (*voir fiche 4.8*). Pour comparer les aires, les élèves peuvent soit utiliser les représentations du parallélogramme et du rectangle en transparent, les découper et les superposer ; soit utiliser une représentation sur transparent et une représentation sur papier.

La procédure de repérage des lignes de découpe est similaire à la classe expérimentale et provoqué par la superposition des formes. Cependant, dans le contexte papier-crayon, les élèves ressentent sans doute davantage le besoin de tracer une ligne de découpe que dans le contexte *Apprenti Géomètre*. En effet, dans ce cas, la ligne de découpe ne doit pas être tracée, seuls les points de découpe doivent être précisés.

Analyse conceptuelle

Montrer l'équivalence des aires du parallélogramme et du rectangle peut être réalisé par superposition, découpage et assemblage de pièces comme nous venons de l'expliquer. Pour ce faire, les élèves doivent *voir* les lignes de découpe de l'une ou l'autre forme. Cette procédure correspond à la vision de type *inventeur* (*voir l'annexe A.4*).

Notons cependant que cette vision n'est pas totalement indépendante de la vision du *bricoleur* ou de celle du *mécanicien*. En effet, à l'inverse de la transformation d'un parallélogramme en un rectangle par découpage, il est intéressant de demander aux élèves de dessiner un parallélogramme de même aire qu'un rectangle donné. Dans ce cas, bien souvent, les élèves seront amenés à dessiner le parallélogramme soit sur le rectangle en s'appuyant sur les traits de celui-ci (*Fig. 7.28*) soit en recopiant les éléments du rectangle nécessaire au dessin du parallélogramme que sont la base et la hauteur, c'est-à-dire la ligne de découpe (*Fig. 7.29*).

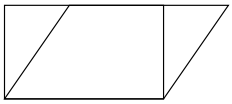


Fig. 7.28

Fig. 7.29

Une deuxième démarche est possible. Elle correspond à la mise en évidence de la partie commune qui apparaît lors de la superposition des deux formes. Des parties non superposées apparaissent également. Ainsi, comme le montre la figure 7.30, la superposition du rectangle et du parallélogramme met en évidence un trapèze intersection des deux formes et deux triangles.

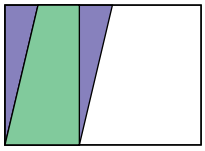


Fig. 7.30

La comparaison des aires des deux formes (rectangle et parallélogramme) est ainsi amenée à la comparaison des deux triangles non encore superposés.

Cette procédure a également été mise en évidence dans l'activité précédente (page 173).

Une troisième démarche est également possible, sans doute moins utilisée par les élèves. Elle postule que les deux rectangles supports sont identiques, ce qui est précisé dans l'énoncé de la situation (*voir encadré sur la fiche*).

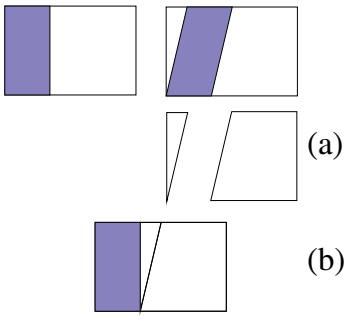


Fig. 7.31

La démarche consiste à montrer que les éléments non peints sont de même aire et donc d'admettre que les éléments peints sont également de même aire.
Pour ce faire, les élèves découpent les éléments non peints dans le rectangle contenant le parallélogramme (*Fig. 7.31*-(a)). Ils superposent le triangle et le trapèze ainsi obtenus sur le rectangle non peint et constatent que les aires sont égales (*Fig. 7.31*-(b)).

La synthèse de l'activité s'organise autour de deux moments importants :
– d'abord, l'énoncé de la réponse et des justifications par les élèves. Ces justifications s'appuient principalement sur les démarches de résolution (superposition, découpage, assemblage...) ;
– ensuite, le rappel de l'intérêt des procédés utilisés, particulièrement de la superposition et du découpage. Le fait que des formes de même aire peuvent ne pas avoir la même forme est aussi à mettre en évidence.

7.1.6 Comparer des aires – Synthèse

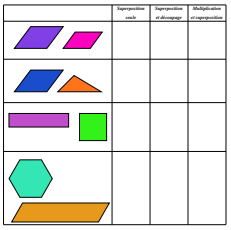
Situation initiale. L'enseignant distribue les fiches 1.9 à 1.12 aux élèves (ou 4.9 à 4.12).

Cette activité de synthèse peut se dérouler de différentes manières. Par exemple,
- dans un premier temps, les élèves sont invités à composer les textes de synthèse individuellement ou en groupe ; dans un deuxième temps, la synthèse est construite de manière collective à partir des réflexions des élèves ;
- ou l'enseignant distribue les « bandelettes » pré-écrites (fiche 1.13 ou 4.13) et les élèves, individuellement ou en groupe, associent les bandelettes au dessin.

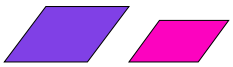
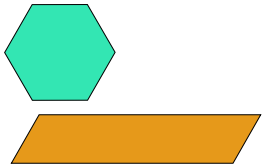
7.1.7 Comparer des aires - Exercices

Situation initiale : L'enseignant soumet la fiche 1.14 ou 4.14 aux élèves.

`Fiche 1.14 ou 4.14.`
Voici des paires de formes géométriques. Pour chacune d'elles, indique par une croix le ou les procédés utilisable(s) pour comparer leurs aires.



La correction est organisée collectivement. L'enseignant demande de justifier les choix opérés. Il demande également de situer l'activité réalisée précédemment qui correspond à la situation proposée.

	Superposition seule	*Superposition et découpage*	*Multiplication et superposition*
	***X*** ***1e et 2e activités***		
	X ***3e activité : comparer le rectangle et le triangle***		
	3e activité : comparer les 2 rectangles	***X***	***X***
	***3e activité : comparer le carré et le triangle***	***X***	

7.2 Périmètres et aires des carrés et des rectangles

La séquence contient sept fiches : fiches 2.1 à pour les classes expérimentales et fiches 5.1 à pour les classes témoins. Elles se répartissent en six séances d'activités comme suit :
– séance 1 : fiche 2.1 ;
– séance 2 : fiche 2.2 ;
– séance 3 : fiche 2.3 ;
– séance 4 : fiche 2.4 ;
– séance 5 : fiche 2.5 ;
– séance 6 : fiches et .
Les objectifs essentiels de ces fiches sont de numériser les périmètres et aires des carrés et des rectangles et de cette manière renforcer la distinction entre ces deux grandeurs. Au terme de cette séquence, les formules de calcul des aires pour les carrés et les rectangles seront considérées comme connues et serviront de socles pour le travail futur.

De quoi s'agit-il?

Les élèves construisent des formes à l'aide de gabarits (carrés, triangles rectangles isocèles et parallélogrammes). Ils déterminent par comptage ou calcul les périmètres et les aires de celles-ci. Ils comparent ces valeurs numériques. Ils différencient périmètre et aire et donnent sens aux formules.

Enjeux

- À partir de démarches quantitatives, comparer les caractéristiques de deux grandeurs associées aux carrés et aux rectangles : le périmètre et l'aire ;
- constater que ces deux grandeurs sont indépendantes l'une de l'autre ;
- construire le concept d'*aire*, le différencier du concept de *périmètre* ;
- rappeler et fonder les procédés et les formules de calcul du périmètre et de l'aire pour les carrés et les rectangles.

Compétences

- *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*
- *Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).*
- *Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...].*

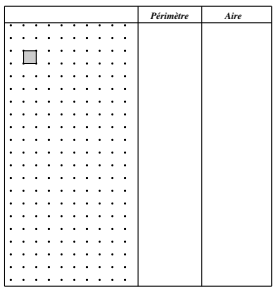
De quoi a-t-on besoin?

Les fiches 2.1 à 2.5 pour les classes expérimentales et les fiches 5.1 à 5.6 pour les classes témoins. Pour ces mêmes classes, l'enseignant devra photocopier les formes de la fiche 5.2 sur du papier cartonné et les découper pour qu'elles soient distribuées aux élèves.

7.2.1 Assembler des carrés – Périmètre et aire

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 2.1 ou 5.1 aux élèves. Si nécessaire, suite à l'observation des élèves ou à leur demande explicite, il explique la consigne.

`Fiche 2.1 ou 5.1.`
Assemble plusieurs exemplaires de carré standard pour construire 3 carrés de grandeurs différentes. Dessine ces carrés sur le papier pointé quadrillé et note le périmètre et l'aire de chacun d'eux.



Analyse procédurale

De manière générale, il faut constater que la manipulation et la réalisation des carrés sont plus aisées avec *Apprenti Géomètre* qu'avec les formes de papier. Nous nous sommes déjà expliqués à ce sujet, nous serons donc succincts dans à ce sujet. Dans l'environnement *Apprenti Géomètre*, par rapport à l'environnement papier-crayon :

- les formes apparaissent toujours dans la même orientation ;
- la construction est plus précise ;
- les formes restent en place tant qu'il n'y a pas un déplacement volontaire de celles-ci ;
- la construction toute entière peut être déplacée si nécessaire en une seule opération ;
- ...

En classe expérimentale

Après avoir choisi le niveau A, les élèves peuvent utiliser différentes démarches pour réaliser la tâche proposée.

Soit, ils amènent plusieurs carrés standards à l'écran et ils les assemblent. S'ils l'estiment nécessaire, par la suite ils en amènent de nouveaux également de manière aléatoire.

Soit, ils déterminent à l'avance le nombre de carrés standards nécessaires pour construire un carré, les amènent à l'écran puis les assemblent. Ils réitèrent l'opération autant de fois qu'ils le souhaitent.

Certains élèves peuvent également procéder avec une démarche intermédiaire, signe d'une conceptualisation en marche : ils amènent à l'écran un certain nombre de carrés qu'ils assemblent. Puis, s'il leur en manque, ils déterminent le nombre de carrés manquant et amènent à l'écran exactement ce nombre de carrés.

Ces deux dernières démarches témoignent déjà d'une certaine forme de compréhension et d'acquisition du concept d'aire et de recouvrement. Elles dénotent également une certaine organisation instrumentale chez les élèves.

Au cours de l'activité, l'enseignant veille à conduire les élèves dont la démarche est presqu'exclusivement tâtonnante vers une démarche réfléchie, prévoyant le nombre de carrés standards à utiliser. Ce cheminement sera guidé par une réflexion sur le concept d'aire d'une part et par une réflexion sur le pavage d'une forme par des carrés d'autre part. Diverses questions peuvent aider l'élève à progresser dans cette direction, par exemple :

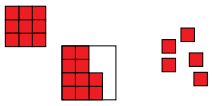


Fig. 7.32

– Tu as déjà construit ce grand carré, combien de petits carrés contient-il ?
– Tu as commencé à construire un nouveau carré, combien de petits carrés devrait-il contenir ? Comment pourrais-tu le savoir ? Peux-tu t'imaginer le carré terminé, complété ?
  À ce stade, l'enseignant peut, par exemple, utiliser un carré du niveau B pour encadrer le début de construction de l'élève et faire apparaître le carré la contenant (*Fig. 7.32*).
– Pourrais-tu connaître le nombre de carrés manquant pour terminer la construction ?

Durant cette réflexion, les démarches de calcul du nombre de carrés unités devraient évoluer du comptage vers la multiplication du nombre de carrés unités sur une ligne par le nombre de carrés unités sur une colonne. La référence à la formule d'aire des carrés rencontrées dans les années antérieures pourrait aussi apparaître à ce moment.

– Pourrais-tu prévoir maintenant le nombre de carrés nécessaires pour la construction du carré suivant ? Comment peux-tu le savoir ?
– ...

Le lien avec le nombre de carrés unités sur le côté de la forme à construire, en l'occurrence un carré, est à mettre en évidence lors de ces réflexions. Le lien avec la formule d'aire peut aussi être utile.

Notons qu'une autre démarche est possible, engendrée principalement par les caractéristiques instrumentales d'*Apprenti Géomètre*. Lorsque l'élève doit construire un carré plus grand que le précédent, il lui est possible de *dupliquer* ce carré et de le compléter en y ajoutant une bande de carrés sur un demi périmètre (*Fig. 7.35*), comme le montrent les figures ci-dessous. Il s'agit d'abord de `sélectionner` successivement tous les carrés composant la forme à dupliquer (*Fig. 7.33*). Ensuite il faut `dupliquer` cet assemblage (*Fig. 7.34*).

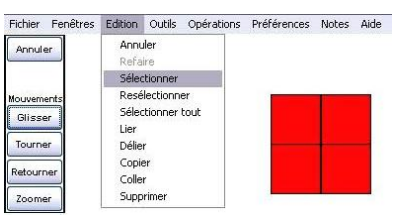


Fig. 7.33

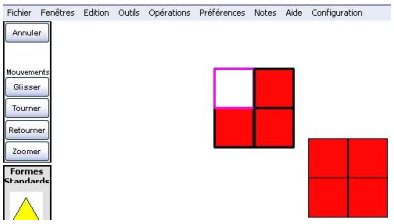


Fig. 7.34

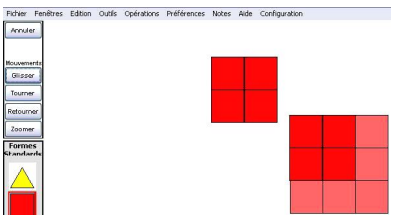
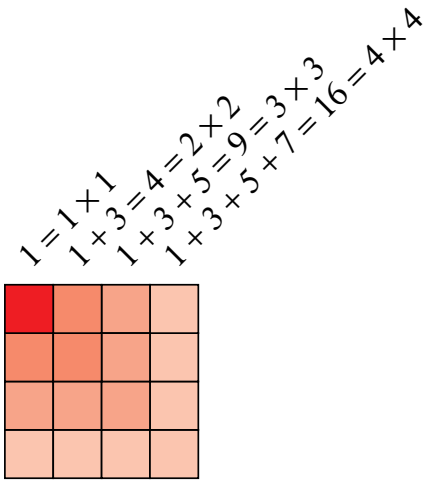


Fig. 7.35



Cette démarche, située dans le cadre géométrique, correspond dans le cadre numérique au théorème d'après lequel le carré de tout nombre naturel n est égal à la somme des n premiers nombres impairs.

Fig. 7.36

En classe témoin

La situation est quelque peu différente de la classe expérimentale. En effet, pour des questions de gestion de classe, chaque élève ou paire d'élèves reçoit d'emblée un ensemble de carrés unités. Bien souvent, ceux-ci sont déjà disposés sur la table avant que ne commence le travail de construction. Les élèves sont donc déjà en présence d'un nombre important de carrés, sans qu'ils aient eu à effectuer une quelconque action. Lors de la réalisation de la tâche, la phase d'anticipation du nombre de carrés unités nécessaires à une construction est donc peu utilisée.

Une autre distinction d'ordre instrumentale est que le nombre de possibilités de construction de formes est limité par les carrés de papier disponibles, ce qui n'est pas le cas avec *Apprenti Géomètre*. Dans ce cas c'est la grandeur de l'écran qui limite les productions, si l'on souhaite les voir toutes simultanément.

Analyse conceptuelle

Outre les aspects liés à la détermination anticipée du nombre de carrés nécessaires à une construction, ce sont la distinction entre les concepts de *périmètre* et d'*aire* et les changements de cadre mathématique et de registre sémiotique (*voir l'annexe A.2*) qui sont au cœur de cette activité. Ainsi, l'exploitation des activités de manipulation est quasiment identique quel que soit le contexte de travail.

Le tableau ci-dessous (où les notations « ul » et « ua » désignent, comme chacun l'aura compris, les « unité de longueur » et « unité d'aire ») expose quelques résultats à mettre en évidence avec les élèves. Au cours de l'élaboration collective de ce tableau, les unités de mesure doivent être précisées tant du point de vue géométrique (correspondance visuelle surface-unité d'aire et côté-unité de longueur) que du point de vue des grandeurs (notation ul et ua). Le lien entre ces deux registres de représentation doit aussi faire l'objet d'une discussion au sein de la classe pour s'assurer de la compréhension de tous les élèves.

Longueur du côté du carré	Périmètre	Aire
1 ul	4 ul	1 ua
2 ul	8 ul	4 ua
3 ul	12 ul	9 ua
4 ul	16 ul	16 ua
5 ul	20 ul	25 ua
...		

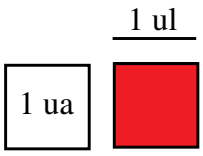


Fig. 7.37

Les formules de calcul du périmètre et de l'aire sont à utiliser au cours de la construction du tableau, en vue soit d'anticiper une réponse soit de la valider.

L'enseignant veillera particulièrement à renforcer ces deux usages par des questionnements du type :

- Anticipation – Si le carré est construit en juxtaposant 5 carrés unités sur son côté, combien de carrés unités contiendra son aire ?
- Validation – (Tel élève) nous dit que l'aire du « carré de 5 unités de côté » contient 25 unités d'aire ! Comment savoir si cela est correct ?

Cette activité a notamment pour objectif de différencier le périmètre et l'aire. Cette différenciation peut s'opérer soit au niveau géométrique (une ligne pour le périmètre, une surface pour l'aire), soit au niveau des unités de grandeurs (unité de longueur pour le périmètre, unité d'aire pour l'aire), ... et au niveau numérique lorsqu'on observe les progressions des valeurs du périmètre et de l'aire. Ainsi, il est possible de mettre en évidence les faits suivants pour des carrés dont la mesure du côté est un nombre entier :

- la valeur du périmètre augmente de 4 ul chaque fois que la mesure du côté augmente de 1 ul, il s'agit d'une progression arithmétique ;
- la valeur de l'aire augmente plus rapidement que celle du périmètre.

L'enseignant organise la synthèse pour institutionnaliser les formules du périmètre et de l'aire des carrés. Dans un premier temps, nous optons pour les expressions suivantes :

$P = C + C + C + C$, qui correspond à la réalité géométrique (*voir la section 6.3.3*) ;

$A = C \times C$.

Il est sans doute également utile de rappeler les progressions différentes du périmètre et de l'aire.

Prolongements et liens

S'il le juge possible, l'enseignant peut exploiter la progression des valeurs des aires d'un point de vue numérique au cours d'une autre activité. Il peut par exemple proposer aux élèves de trouver une *règle* qui permet d'exprimer la progression de ces valeurs. L'expression de la règle peut se faire à partir des registres verbal et numérique.

Par exemple : la suite des carrés des nombres naturels peut se construire en additionnant les nombres impairs.
Au-delà, on peut dire que « tout carré d'un nombre naturel peut être décomposé en nombres impairs ».

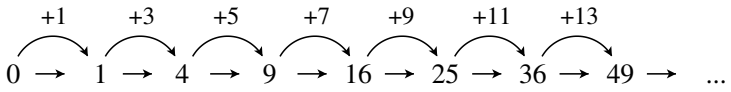


Fig. 7.38

Échos des classes

Au cours des expérimentations, nous avons modifié les outils initiaux accessibles aux élèves. Ainsi, nous avons proposé, à une classe expérimentale et à une classe témoin de réaliser le travail à partir de la trame quadrillée, au lieu des formes « standards » comme initialement prévu. Les élèves de la classe expérimentale ont utilisé les formes libres d'*Apprenti Géomètre* sur une grille quadrillée, les élèves de la classe témoin ont tracé des carrés sur une trame quadrillée. Nous avons pu constater que les productions des élèves sont sensiblement différentes dans cette configuration de travail.
Nous avons explicité ci-dessus que les formes construites par les élèves à partir de formes « standards » possèdent une aire que l'on peut calculer aisément. La réponse s'exprime en multiples entiers de carrés unités. L'exploitation de ces constructions et des valeurs des périmètres et aires est alors assez aisée pour mettre en évidence les variations de ces deux grandeurs.
Il n'en va pas systématiquement de même lorsque les élèves débutent leur recherche à partir de la trame quadrillée si la consigne d'utiliser le carré unité pour les constructions n'est pas clairement perçue. Dans ce cas, apparaissent des dessins comme ceux de la figure 7.39. Pour certains d'entre eux, la détermination des périmètres et aires en multiples entiers de l'unité est plus problématique que pour d'autres.

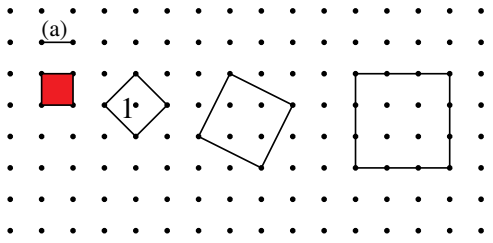


Fig. 7.39

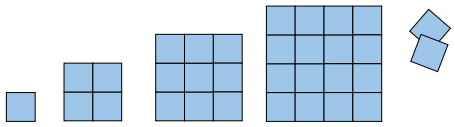
Prenons par exemple le carré « sur pointe » (*Fig. 7.39*-(1)) et déterminons son périmètre et son aire par rapport au carré unité tracé à partir de la trame carrée. Un côté de ce carré a même longueur que la diagonale du carré unité . De ce fait, la longueur de ce côté vaut $\sqrt{2} \times a$. Force est de constater que ceci est peu accessible aux élèves de l'enseignement fondamental.

7.2.2 Les carrés de Pierre – Problème

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 2.2 ou 5.3 aux élèves. Si nécessaire, suite à l'observation des élèves ou à leur demande explicite, il explique la consigne.

Pour aider des élèves en difficulté, il peut rappeler l'activité précédente au cours de laquelle la formule d'aire du carré avait été mise en évidence. Il peut aussi rappeler les différentes démarches exposées pour construire une suite de carrés de plus en plus grands.

Fiche 2.2 ou 5.3.
Pierre possède 32 petits carrés unités. Il affirme qu'en assemblant certains petits carrés unités il peut construire au maximum quatre carrés différents et qu'il lui restera deux petits carrés unités, comme le montre le dessin ci-dessous.



Et si Pierre possédait 320 petits carrés, combien de carrés différents, au maximum, pourrait-il construire ?

Analyse procédurale

Pour cette activité, la manipulation d'objets géométriques réels ou virtuels n'est pas nécessaire, elle peut même paraître lourde à gérer par les élèves. Cependant, il ne faut pas leur interdire toute manipulation. D'aucuns peuvent éprouver le besoin, en tout cas dans un premier temps, de manipuler les carrés unités et de construire ou dessiner les carrés demandés. Cela étant, il n'y a pas de connaissances ou démarches instrumentales particulières à maîtriser pour résoudre le problème posé.

Analyse conceptuelle

Les variables didactiques : le choix du nombre 320 n'est pas innocent. Nous pourrions choisir un nombre plus petit mais ceci n'aurait pas le même effet chez les élèves.
320 étant le décuple de 32, certains élèves émettront des hypothèses du type : « Pierre a fait 4 carrés avec 32 unités, il en fera 40 avec 320 ! ». Le traitement de la situation, par dessin ou calcul, devrait permettre d'invalider cette affirmation.

Cette *illusion de proportionnalité* pourrait être expliquée aux élèves dans la partie de mise en commun et de synthèse, ou lors d'une autre séance de travail. Il faut cependant garder à l'esprit que la notion de proportionnalité est complexe et en construction tout au long de la scolarité. Les illusions de proportionnalité sont aussi assez courantes et peu reconnues en général par les élèves.

320 est aussi un nombre suffisamment grand pour que le dessin ou l'assemblage de ces carrés devienne rapidement lassant et qu'une autre démarche soit nécessaire.

La résolution du problème : la difficulté majeure de ce problème réside dans les changements de cadres mathématiques nécessaires à sa résolution. En effet, ce problème concerne les aires, il est situé dans le domaine des grandeurs. Cependant pour le résoudre deux procédures sont possibles : l'une concerne la géométrie dessinée, l'autre concerne les géométries mesurée et raisonnée.

Selon les procédures choisies, consciemment ou inconsciemment, le problème peut prendre plus au moins de temps pour le résoudre. Le nombre des erreurs possibles peut également rapidement augmenter.

• Les élèves qui veulent dessiner tous les carrés s'engagent dans une procédure de géométrie dessinée. Bien souvent, ils vont passer d'un carré à un autre sans véritable stratégie. Ces élèves dessineront par exemple un carré de 3 ul de côté, puis un autre de 5 ul, puis un de 2 ul... Ce n'est qu'après quelques essais qu'ils vont observer leur travail et tenter de le valider en comptant les carrés unités utilisés. À ce moment, ils se rendront compte qu'il faut dessiner les plus petits carrés possibles pour en dessiner un maximum.

L'efficacité de cette procédure de géométrie dessinée dépend fortement du choix de l'unité de mesure pour dessiner les carrés et de la qualité des dessins effectués. Dans le cas où les élèves utilisent *Apprenti Géomètre* pour dessiner les carrés, l'activité risque d'être longue si les élèves ne modifient pas leur démarche comme annoncé ci-dessus.

• Certains élèves, peu nombreux, vont par contre réaliser une analyse *numérique* de la situation, choisissant ainsi la voie de la géométrie mesurée et raisonnée. L'activité directrice sera donc de déterminer le nombre de carrés à dessiner. Connaissant la façon de calculer l'aire d'un carré et sachant que la somme des aires ne peut dépasser 320 carrés unités, la recherche du nombre de carrés peut s'effectuer en utilisant un tableau comme support de la réflexion :

Longueur du côté	Aire du carré	Aire totale
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
7	49	140
8	64	204
9	81	285
10	100	385

Comme Pierre ne dispose que de 320 petits carrés unités, il ne pourra construire que 9 carrés différents et il lui restera 35 petits carrés.

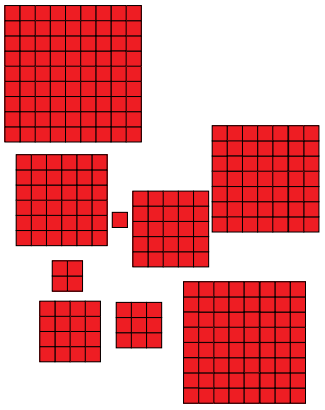
Les élèves ayant choisi cette voie sont probablement ceux qui sont les plus proches du concept d'aire tel qu'il devrait être compris à l'issue de l'école fondamentale, c'est-à-dire à la fois relié aux caractéristiques des formes géométriques, aux caractéristiques des grandeurs associées (mesure ou calcul du périmètre et de l'aire) et aux propriétés des nombres et des opérations.

Bien sûr, des élèves peuvent se situer entre ces deux démarches typées. Par exemple, ils débuteront leur recherche en dessinant des carrés auxquels ils associeront directement la valeur de leur aire. Et sans doute,

au fur et à mesure que les carrés seront plus grands, ils s'achemineront vers une démarche faisant la part belle aux nombres et aux opérations, abandonnant progressivement le dessin, support des premiers essais.

La mise en commun est organisée en deux phases. D'abord l'expression des réponses et l'explication des démarches par les élèves.

Ensuite, la mise en évidence des liens entre les différentes démarches, notamment ceux liés aux représentations utilisées : dessin géométrique, suite de nombres, tableau.



$$
\begin{array}{lll}
C \times C & 1 \times 1 & 1 \\
 & 2 \times 2 & +\ 4 \\
 & 3 \times 3 & +\ 9 \\
 & 4 \times 4 & +\ 16 \\
 & 5 \times 5 & +\ 25 \\
 & 6 \times 6 & +\ 36 \\
 & 7 \times 7 & +\ 49 \\
 & 8 \times 8 & +\ 64 \\
 & 9 \times 9 & +\ 91 \\
 & & \hline \\
 & & 285
\end{array}
$$

Côté	Aire carré	Aire totale
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
7	49	140
8	64	204
9	81	285
10	100	385

Prolongements et liens

L'enseignant peut proposer d'autres situations similaires afin d'exercer l'utilisation des différentes représentations rencontrées.

La situation de fausse proportionnalité (32 à 320, donc 4 à 40) peut aussi être rappelée. Cependant, nous insistons sur le fait que le raisonnement proportionnel et la reconnaissance des situations de proportionnalité s'installent progressivement. Il ne faut donc pas souhaiter une compréhension complète et de tous les élèves à ce sujet.

Échos des classes

Comme prévu dans les analyses conceptuelles, cette activité a posé problème à la plupart des élèves. Peu d'entre eux l'ont réalisée correctement. La plupart ont été confrontés à la difficulté d'utiliser les différents cadres mathématiques auxquels l'activité fait référence. Les deux cadres de résolution (géométrie dessinée et géométrie raisonnée et mesurée) apparaissent sur leurs feuilles à partir de représentations diverses. La géométrie dessinée est cependant privilégiée par rapport à la géométrie raisonnée et mesurée.

Nous avons également constaté que la majorité des élèves ne pensent pas à compléter la suite des aires des carrés entamée dans la mise en situation (32 petits carrés). Ainsi, pour résoudre le problème proposé, les élèves commencent à dessiner ou à compter à partir d'une situation vierge. Peu pensent à démarrer de 4 carrés et 30 carrés unités.

En début d'activité, l'un ou l'autre élève a exprimé l'ampleur de la tâche : assembler 320 carrés unités ! À cet égard, une élève s'est exclamée : « On est encore là demain » ! Ces quelques réflexions ont amené certains élèves à imaginer une autre voie que le dessin pour résoudre le problème.

Globalement, les élèves se lancent dans le dessin de carrés composés de petits carrés unités avec plus ou moins de réussite.

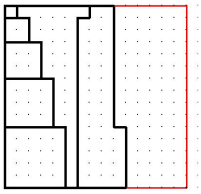


Fig. 7.40

Un élève dessine sur le papier pointé un carré de 16 sur 16 (points). Ce carré est censé représenter l'ensemble des 320 carrés unités. Ensuite il dessine dans ce grand carré les cinq premiers carrés de la suite géométrique des aires, les uns en dessous des autres (voir figure ci-contre). Cependant, constatant qu'il ne peut dessiner de la même manière les autres carrés, il décide de tracer des formes non carrées mais dont l'aire équivaut à celle des carrés de la suite (36, 49). Il n'a pu cependant achever sa réalisation.

De fait, cet élève s'est focalisé sur l'aire en tant que grandeur plutôt que sur sa représentation à partir d'une forme particulière, en l'occurrence des carrés.

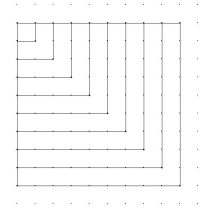


Fig. 7.41

Un autre élève a dessiné sur sa feuille une suite de carrés emboîtés.

D'autres élèves essayent de résoudre le problème à partir d'une démarche numérique, mais en adoptant le raisonnement erroné suivant : « Si, en assemblant 32 petits carrés, Pierre a construit 4 carrés différents et qu'il restait 2 petits carrés, alors, avec 320 petits carrés, il lui sera possible de construire 40 carrés différents et il lui restera 20 petits carrés ».

Les élèves, par la comparaison des nombres 32 et 320, ont *vu* un rapport de 10 et ont appliqué celui-ci au résultat. Ce sont les notions d'*unité commune de mesure* et de *proportionnalité* qui se trouvent en jeu dans cette situation.

Une autre démarche a pu être observée chez quelques élèves : celle de la résolution numérique du problème. Celle-ci prend la forme soit d'une résolution additive soit d'une résolution soustractive à partir de la suite numérique des aires des carrés explorée au cours des expérimentations. Les tableaux ci-dessous exposent cette démarche à partir des deux types de résolution.

Résolution additive.

	1	4	9	16	25	36	49	64	100
+	1	5	14	30	55	91	140	204	304

Résolution soustractive.

	320	319	315	306	290	265	229	180	116	35
-	1	4	9	16	25	36	49	64	100	

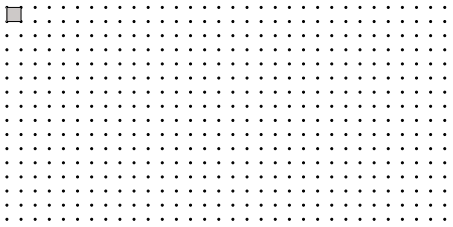
7.2.3 La collection de rectangles

Remarques liminaires : cette activité est sensiblement la même que la précédente. Il s'agit en effet d'utiliser des connaissances relatives aux caractéristiques géométriques des formes et aux nombres pour résoudre le problème proposé. De ce fait, il n'est pas nécessaire de proposer l'activité à partir du contexte informatique.

Jusqu'à présent les situations proposées aux élèves ne faisaient pas appel aux unités de mesure conventionnelles. L'enseignant qui le désire peut cependant proposer celle-ci à

partir d'une grille quadrillée dont la distance entre deux points voisins est d'un centimètre. L'unité d'aire est alors naturellement le cm^2.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 2.3 ou 5.4 aux élèves. Ceux-ci utilisent des outils classiques pour résoudre le problème : crayon, gomme, latte.

> `Fiche 2.3 ou 5.4.`
> Pierre possède 32 petits carrés unités. Il affirme qu'en les assemblant il peut construire au maximum 8 carrés ou rectangles différents, et qu'il lui restera 1 petit carré unité. Peux-tu dessiner ces 8 formes ?
> Et si Pierre possédait 64 petits carrés unités, combien de carrés ou rectangles différents, au maximum, pourrait-il construire ?
>
> 

L'enseignant explique la consigne à la demande explicite des élèves. En cas de difficulté de certains, il met en évidence le lien avec le problème précédent : *Les carrés de Pierre*. Les démarches employées pour résoudre ce problème peuvent être rappelées.

Analyse procédurale

L'utilisation d'*Apprenti Géomètre* n'est pas nécessaire pour résoudre le problème proposé, le papier quadrillé suffit. Cependant il est possible de réaliser les essais à partir du logiciel en choisissant le niveau B et en utilisant la `grille carrée` (dans le menu `Outils`) et le *rectangle* proposé dans les `formes libres`.

Analyse conceptuelle

Comme pour l'activité précédente, les élèves peuvent résoudre le problème soit à partir de la géométrie raisonnée et mesurée, soit à partir d'une géométrie dessinée. Mais avant, quelques connaissances doivent être activées, notamment celles liées aux carrés et aux rectangles.

Ces connaissances peuvent relever de la vision de type *botaniste* ou des caractéristiques géométriques des formes géométriques. Dans le premier cas, seules des caractéristiques visuelles liées au contour seront activées. Dans le second, en plus des caractéristiques visuelles du contour, les propriétés à réactiver sont le fait que les quatre côtés d'un carré ont même longueur et que les côtés d'un rectangle sont deux à deux égaux.

Il est raisonnable de penser que ces activations sont liées aux démarches mises en œuvre par la suite. Ainsi, il est probable que les élèves qui ont pensé aux caractéristiques géométriques des formes auront plus rapidement accès à des démarches de géométrie mesurée liées à ces caractéristiques. Alors que les élèves ayant activé plutôt des caractéristiques visuelles, auront tendance à utiliser par la suite des démarches liées à la géométrie dessinée.

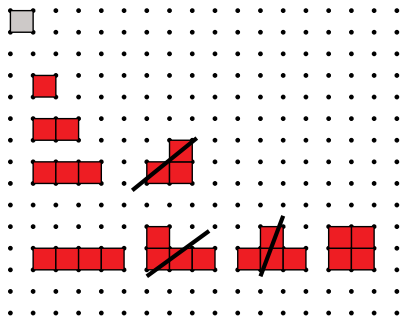


Fig. 7.42

Il est certain qu'il existe nombre de démarches intermédiaires entre celles indiquées ci-dessus. Par exemple un élève peut se servir de la géométrie dessinée et de la géométrie mesurée simultanément mais avec le dessin comme support principal. La recherche des carrés et des rectangles se réalise alors en ajoutant un carré unité à la forme précédente. Les formes ne correspondant pas au critère visuel de carré ou de rectangle sont alors rejetées (*Fig. 7.42*).

Cependant, lorsque les élèves doivent assembler plus de 5 carrés unités, le nombre de possibilités d'assemblages augmente rapidement. La démarche doit alors évoluer. Les élèves doivent rechercher le carré et les rectangles dont l'aire équivaut au nombre atteint à partir d'une démarche numérique.

Nous explorerons plus particulièrement ci-dessous la démarche de géométrie raisonnée et mesurée. Elle s'appuie sur la connaissance de la formule de l'aire des carrés et des rectangles ou à tout le moins sur la connaissance d'un procédé « *lignes* × *colonnes* ». Ce procédé fait également appel à la connaissance des nombres et plus particulièrement à la connaissance de la décomposition d'un nombre en un produit de deux facteurs, ou encore à celle des diviseurs d'un nombre.

La résolution du problème peut ainsi s'effectuer comme suit :

- d'abord comprendre qu'avec un seul carré unité, on ne peut constituer qu'un seul « carré ou rectangle » ;
- ensuite se demander combien de carrés et rectangles différents nous pouvons construire avec deux carrés unités. Se rendre compte qu'il n'y a qu'une seule solution qui est le rectangle de 2 ul × 1 ul ;
- de même pour trois carrés unités ;
- pour quatre, se rendre compte que deux solutions sont possibles car 4 peut-être décomposé de deux manières : 1×4 et 2×2 ;
- ainsi de suite...

Cette démarche peut aussi se représenter sous la forme d'un tableau :

Aire	Dimensions	Forme
1	1×1	carré
2	1×2	rectangle
3	1×3	rectangle
4	1×4 2×2	rectangle carré
5	...	...

À ce tableau est associé le dessin des formes sur le papier pointé quadrillé.
Simultanément, les élèves doivent contrôler le nombre de carrés unités utilisés et s'assurer de ne pas dépasser les 32 unités annoncées. Comme dans la situation des « carrés de Pierre », une procédure additive ou soustractive peut être employée. La figure 7.43 expose la procédure additive.

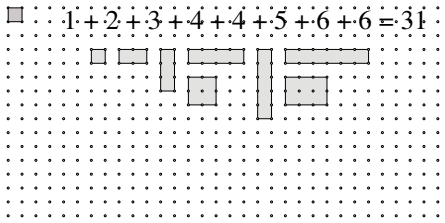


Fig. 7.43

Une première mise en commun permet d'exposer la solution au premier problème. Les formes peuvent être dessinées au tableau. Les démarches des élèves sont énoncées. Les élèves sont aussi invités à justifier leurs réponses ou démarches. Ces justifications s'appuient sur les propriétés des formes, des nombres et des opérations (voir analyse conceptuelle ci-dessus).

La résolution du second problème est sensiblement pareille à celle du premier. Il est souhaitable que les élèves s'appuient également sur le résultat de celui-ci pour débuter ce second problème. Ainsi, comme pour les « *carrés de Pierre* », les élèves peuvent commencer à partir des 8 formes et 31 unités d'aire comme le montre la figure ci-dessous.

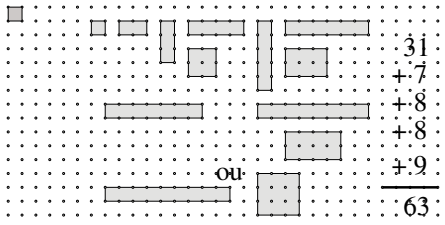


Fig. 7.44

La recherche des carrés et des rectangles à partir d'une démarche de géométrie dessinée uniquement est particulièrement fastidieuse car comme nous l'avons énoncé ci-dessus, à partir de 5 carrés, le nombre d'assemblages possibles s'accroît rapidement. Il est donc souhaitable de rappeler les démarches de géométrie mesurée aux élèves en difficulté. Le lien avec les démarches notées au tableau et utilisées pour le premier problème doit être mis en évidence.

La mise en commun s'organise en deux phases. Au cours de la première, les réponses et les démarches des élèves sont énoncées. Les deux solutions sont mises en évidence. Des dessins peuvent être réalisés au tableau. Les élèves sont aussi invités à justifier leurs réponses ou démarches. Ces justifications sont énoncées également à partir des propriétés des formes, des nombres et des opérations (voir analyse conceptuelle ci-dessus).

Au cours de la deuxième phase, l'enseignant met en évidence le recours au nombre pour résoudre la situation concernant des aires de formes géométriques.

7.2.4 Périmètres et aires des carrés et rectangles

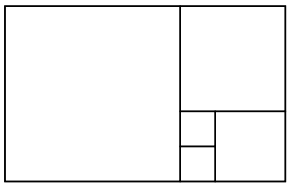
Remarques liminaires : cette situation est une adaptation d'un problème proposé lors de la deuxième épreuve de la quatorzième édition du *Rallye Mathématique Transalpin*, pour les classes de troisième et quatrième primaires.

Il est intéressant de proposer aux élèves de reproduire cette construction sur papier vierge. Les connaissances instrumentales et conceptuelles à activer pour réaliser cette activité sont assez nombreuses : l'emploi de la latte, de la règle et du compas, l'analyse géométrique de l'assemblage, la réflexion sur les caractéristiques des carrés... Une activité similaire a été proposée lors de la première année de recherche aux élèves de 6e primaire. Il s'agit de l'activité concernant une suite des carrés.

L'enseignant qui le souhaite peut modifier l'énoncé en proposant que la longueur du côté du petit carré soit 1 cm ou 2 cm. Pour notre part, nous avons préféré ne pas utiliser une unité conventionnelle. D'une part, pour éviter le problème d'échelle qui pourrait en résulter et compliquer la situation. D'autre part, pour ne pas transformer la situation en un simple problème de mesure de longueur dans le contexte papier.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 2.4 ou 5.5 aux élèves. Il veille à ce que les élèves puissent accéder au fichier proposé ou qu'ils possèdent les outils nécessaires à la réalisation de la tâche.

`Fiche 2.4 ou 5.5.`
Cinq carrés ont été assemblés pour former un rectangle. Quel est le périmètre de ce rectangle et quelle est son aire ?
Le côté du plus petit carré mesure deux unités de longueur.



Le côté du petit carré mesure

2 unités de longueur.

Analyse procédurale

La résolution de ce problème ne nécessite pas nécessairement de connaissances instrumentales nouvelles.

En classe expérimentale

C'est principalement en `dupliquant` des carrés que les élèves résolvent le problème.

Toutefois, l'usage des `segments parallèles` et `perpendiculaires` peut être envisagé pour tracer le quadrillage ou une partie de celui-ci. Ces segments sont disponibles dans le pavé de `formes libres`.

En classe témoin

La duplication des carrés n'est pas possible. Il s'agit donc de reporter des longueurs, plutôt que des surfaces.

Une première possibilité est de mesurer la longueur à reporter et de reporter cette mesure le long des côtés du rectangle ou des carrés. Ceci n'est pas toujours simple ou très exact car les mesures des côtés des formes ne sont pas toujours des nombres entiers.

Une autre possibilité est de reporter les longueurs à l'aide du compas en traçant des arcs de cercle. Cependant si les élèves n'ont jamais utilisé le compas pour reporter des longueurs, il a peu de chance pour qu'ils y pensent. Dans ce cas, l'enseignant devra suggérer cette possibilité.

Analyse conceptuelle

Les variables didactiques : nous avons volontairement fixé la longueur du côté du plus petit carré à 2 unités de longueur. De cette manière, l'aire de ce carré est 4 unités d'aire. Si nous avions fixé la longueur du côté du carré à 1 unité, l'aire aurait été de 1 unité et nous ne pourrions vérifier si l'élève calcule l'aire à partir d'une formule ou s'il *voit* UN carré donc UNE unité d'aire.

La résolution du problème : deux grands types de résolution peuvent

être distingués selon qu'on utilise une démarche de géométrie *mesurée* ou une démarche de géométrie *raisonnée*.

La résolution à partir d'une démarche de géométrie mesurée.

Il est difficile de discerner le rôle de la formule dans cette démarche. Il se peut qu'elle soit à son origine et que pour connaître le périmètre et l'aire du rectangle, les élèves en mesurent les côtés. Il se peut aussi que leur démarche soit guidée uniquement par l'idée de recouvrir le rectangle par des carrés et utilisent un quadrillage.

En classe témoin

S'ils cherchent à mesurer les côtés du rectangle, les élèves doivent reporter la mesure du côté du petit carré tout le long du périmètre du rectangle, ou le long d'un demi périmètre, soit à l'aide de la latte, soit à l'aide du compas. Ce travail peut être fastidieux et peu précis. Ensuite, ils déterminent par comptage les mesures de chaque côté du rectangle. Enfin ils utilisent des formules pour calculer le périmètre et l'aire.

S'ils cherchent à utiliser un quadrillage, dans un premier temps, les élèves peuvent prolonger les côtés de carrés comme le montre la figure 7.45. Ensuite, ils doivent placer des points tout le long du périmètre du rectangle pour pouvoir poursuivre le quadrillage. Ils reportent donc la longueur du côté du petit carré soit à l'aide de la latte, soit à l'aide du compas (arc de cercle) comme le montre la figure 7.46. Ensuite, ils terminent le quadrillage et ils en comptent les carreaux pour trouver le périmètre et l'aire du rectangle.

Il est possible que certains utilisent à ce moment une formule, en multipliant le nombre de carrés sur une ligne (longueur du rectangle) par le nombre de carrés sur un colonne (largeur du rectangle).

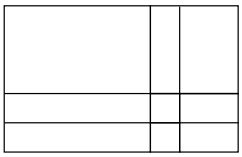


Fig. 7.45

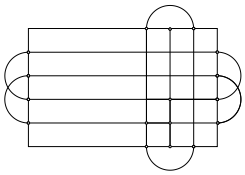


Fig. 7.46

En classe expérimentale

Les élèves peuvent procéder comme dans les classes témoins : mesurer les côtés du rectangle en reportant des copies du petit carré le long du périmètre ou du demi-périmètre à l'intérieur ou à l'extérieur du rectangle (*Fig. 7.47*). Ensuite, appliquer une formule pour connaître le périmètre et l'aire.

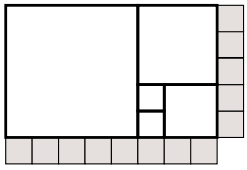


Fig. 7.47

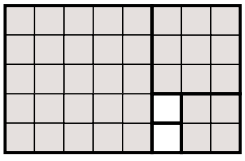


Fig. 7.48

En ce qui concerne le quadrillage, trois démarches au moins sont possibles. Soit le quadrillage entier du rectangle à l'aide du petit carré (*Fig. 7.48*). Soit le quadrillage incomplet, juste le long de deux côtés des carrés pour déterminer les deux longueurs à multiplier (*Fig. 7.49*). Soit un quadrillage mixte, à l'aide de copies du petit carré et du « carré de 4 » (*Fig. 7.50*).

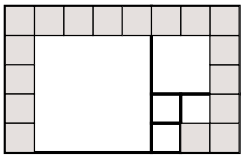


Fig. 7.49

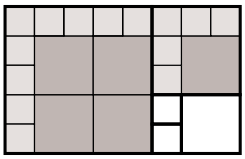


Fig. 7.50

Dans le premier cas, la détermination des périmètre et aire du rectangle se réalise à l'aide d'une démarche de quantification par comptage.

Dans le deuxième cas, il s'agit de déterminer l'aire de chacun des carrés et de les additionner pour obtenir l'aire du rectangle. Pour le périmètre, il faut compter le nombre de carrés tout le long du demi-périmètre et le multiplier par deux. Dans le troisième cas, il s'agit à nouveau d'une démarche additive pour connaître l'aire du rectangle à partir des aires des carrés. Pour le périmètre, la démarche est similaire à celle explicitée pour le cas précédent.

La résolution à partir d'une démarche de géométrie raisonnée.

Cette démarche est probablement guidée par la volonté d'utiliser une formule ou à tout le moins une structure multiplicative de type « longueur d'un côté × longueur d'un côté ».

Quel que soit le contexte de travail, la démarche est sensiblement la même. Il s'agit de faire appel aux caractéristiques géométriques des formes dans un premier temps. Celles contenues dans le rectangle sont toutes carrées, donc possèdent chacune quatre côtés isométriques. Ainsi les quatre côtés du petit carré mesurent 2 unités de longueur (*Fig. 7.51*).

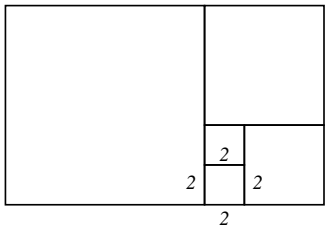


Fig. 7.51

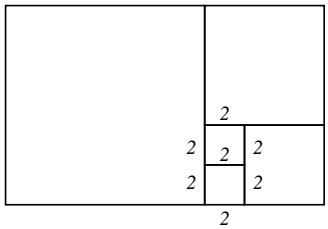


Fig. 7.52

Ensuite, il s'agit de « *voir* » que l'autre petit carré est juxtaposé au premier, donc que les deux côtés juxtaposés ont même longueur. Les autres côtés valent aussi 2 unités de longueur (*Fig. 7.52*).

Enfin, il reste à « *voir* » que le carré juxtaposé à ces deux petits carrés

possède un côté de longueur 4 unités. De même pour les trois autres côtés. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les mesures de tous les côtés.

À partir de ces mesures, on détermine le périmètre et l'aire du rectangle par une démarche de numérisation en employant les formules par exemple.

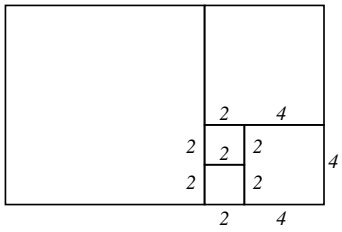


Fig. 7.53

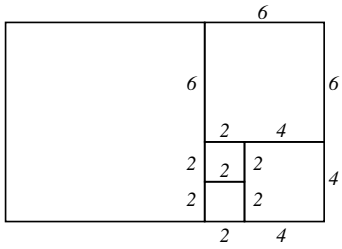


Fig. 7.54

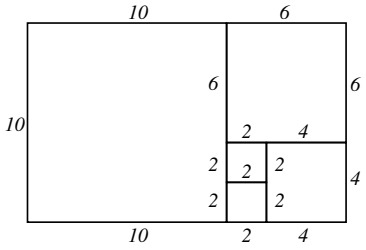


Fig. 7.55

Entre les deux démarches qui viennent d'être décrites, il existe bien évidemment des voies *médianes* dans lesquelles, les élèves utilisent parfois des démarches de géométrie mesurée, parfois des démarches de géométrie raisonnée.

Ainsi, selon la ou les démarches utilisées par les élèves l'enseignant peut évaluer la stabilité et la prégnance de leurs connaissances.

La mise en commun servira à énoncer les solutions (mesures du périmètre et de l'aire), et à mettre en évidence les différentes démarches possibles.

La verbalisation de ces démarches, ainsi que leurs justifications, est une phase importante de cette mise en commun.

Une synthèse écrite présentant les différents démarches et plus particulièrement celle concernant la géométrie raisonnée peut être réalisée par les élèves.

Échos des classes

Cette activité, lorsqu'elle a été proposée aux élèves, s'est déroulée en deux phases. La première consistait en la reproduction des cinq carrés inscrits dans un rectangle. Pour la seconde, les élèves étaient amenés à calculer les périmètre et aire de ce rectangle. La distinction entre ces deux phases nous paraît importante à signaler en raison des procédures de résolution différentes apparues au cours de l'une ou l'autre étape.

• En ce qui concerne la reproduction des formes, l'expérience nous a révélé que peu d'élèves remarquent les relations existantes entre les différents carrés ; ce qui les conduit à privilégier le tâtonnement expérimental à une autre démarche. Les élèves se lancent rapidement dans le *faire* en

regard de leurs premières impressions visuelles basées sur la comparaison des carrés entre eux (en terme de plus grand ou plus petit carré), nous apparaît-il. Ils n'ont pas suffisamment exercé leur *voir* avant de passer au *faire*. Mais les y a-t-on exercés ?

L'observation nous a aussi montré que beaucoup d'élèves reproduisent d'abord le grand carré. D'autres réalisent aussi le rectangle pour commencer. Enfin, quelques-uns pensent à construire, en premier lieu, les deux petits carrés. Selon la démarche privilégiée, la qualité de la reproduction des différentes formes est différente.

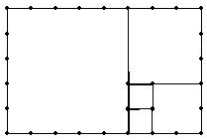


Fig. 7.56

Débuter par le rectangle amène beaucoup d'élèves à se tromper car ils ne songent pas souvent à utiliser l'opération `Diviser` après avoir élaboré le rectangle. Ils ont plutôt tendance, après avoir construit le rectangle, à y insérer des carrés en tâtonnant. Les élèves utilisent majoritairement la famille des quadrilatères dans les `formes libres` pour construire le rectangle. Néanmoins, l'un ou l'autre élève s'est servi de segments à cette fin. Ce comportement relève d'une vision de mécanicien.

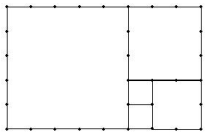


Fig. 7.57

La majorité des élèves pensent d'abord à réaliser le grand carré, puis y juxtaposent les autres carrés par ordre décroissant avec plus ou moins de réussite. Cette technique, si elle n'est pas conjuguée à l'opération `Diviser`, provoque des erreurs, même en utilisant la grille quadrillée à moins que l'élève ait compris les rapports entre les carrés. Mais pour `Diviser`, il faut également que l'élève ait vu également ces rapports au préalable.

Dans cette phase de reproduction, la plupart des élèves restent cantonnés dans le cadre géométrique, ce qui paraît évident au vu de la demande qui leur a été faite. Une précision doit être apportée : au sein de ce cadre, les élèves se limitent aux formes elles-mêmes sans s'occuper de leurs caractéristiques. Très peu d'élèves accèdent aux rapports entre les carrés et les accèdent et les formulent adéquatement.

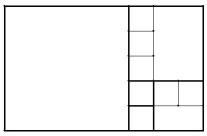


Fig. 7.58

Le fait de *voir* les deux petits carrés juxtaposés et de reconnaître leur conformité semble leur avoir permis d'y parvenir. En effet, du point de vue des longueurs, le carré 3 (de 3 sur 3) se construit à partir des carrés 1 (de 1 sur 1) et 2 ainsi qu'en sachant que les côtés d'un carré ont même longueur. Quand on connaît les carrés 3 et 1 en plus de l'isométrie des côtés, il est possible de réaliser le carré 4. À ce stade, la réflexion ne se situe plus uniquement dans le cadre géométrique mais aussi dans le cadre numérique.

Il est intéressant aussi de noter qu'un élève, parmi ceux qui ont commencé par les petits carrés, s'est référé explicitement à une activité précédente.

Dans une classe témoin, nous avons constaté que certains élèves recourent à la latte pour prendre des mesures en vue de reproduire le rectangle

composé de l'assemblage des 5 carrés ; ce que nous n'avons pas observé, à une exception près, pour les élèves utilisant *Apprenti Géomètre*.

• Concernant les calculs des périmètre et aire (la seconde phase de l'activité), les élèves privilégient le recouvrement du rectangle à l'aide du petit carré. De cette manière, une majorité d'entre eux arrivent sans trop de difficultés à trouver un périmètre égal à 26 ul et une aire à 40 ua. Toutefois, très peu calculent le périmètre et l'aire corrects car ils ne tiennent pas compte de ce que « le côté du petit carré mesure 2 unités de longueur ». Ils devraient donc encore multiplier le périmètre par 2 et l'aire par 4, ce qui donne 52 ul pour le périmètre et 160 ua pour l'aire du rectangle.

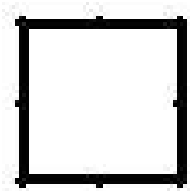


Fig. 7.59

Nous avons rencontré l'un ou l'autre élève qui ont `divisé` en deux les côtés du petit carré. Cela leur a permis de résoudre plus facilement le problème.

Certains élèves recouvrent le grand rectangle à partir d'un autre carré que le petit carré. Mais cette technique nécessite à un moment ou à un autre d'utiliser l'opération `Diviser`. Le résultat donne des morceaux du carré utilisé pour paver qui ne sont pas toujours faciles à évaluer.

Le recouvrement ne constitue pas l'unique procédure utilisée par les élèves. Certains ont fait appel à une grille quadrillée. Mais son emploi, dans cette situation, n'est pas très aisée car il requiert que l'élève manipule correctement la grille. Il faudrait que l'élève ait au départ construit le rectangle et les carrés à l'aide de la grille quadrillée, paramétrée selon ses *desiderata*.

7.2.5 Un puzzle de carrés et de rectangles

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 2.5 ou 5.6 aux élèves. Il explique la consigne à la demande explicite des élèves.

> `Fiche 2.5 ou 5.6.`
> Pierre a construit un carré ayant une aire de 25 unités. Il affirme qu'il peut découper ce carré en trois carrés et deux rectangles tous différents.
> Peux-tu réaliser ce puzzle ? Imprime ta construction et colle-la ou reproduis-la ci-dessous.

Analyse procédurale

La réalisation de la tâche est très différente selon que l'on utilise un contexte classique papier-crayon ou le logiciel *Apprenti Géomètre*. Une première différence fondamentale se situe au niveau de la mesure. Dans le contexte papier-crayon, les élèves ont accès à la mesure à partir d'unités conventionnelles, généralement le *centimètre*. Par contre, avec *Apprenti Géomètre*, les élèves n'ont pas accès à ces mesures. Ils doivent travailler à partir d'unités relatives.

• Pour dessiner le puzzle carré, quel que soit le contexte, les élèves doivent déterminer la longueur de son côté, en l'occurrence 5 unités.

En classe expérimentale

Le dessin de ce puzzle peut se réaliser à partir d'une grille quadrillée disponible dans le menu `Outils` (*Fig. 7.60*). Cette démarche se rapproche assez fort du papier pointé quadrillé que nous décrivons ci-dessous.

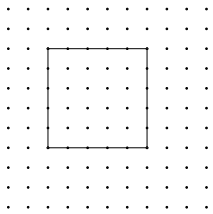


Fig. 7.60

L'écartement entre deux points de la grille est accepté comme unité de longueur. Le choix de l'unité de longueur apparaît donc avant le dessin du carré et conditionne la grandeur de celui-ci.

La réalisation de la tâche peut démarrer à l'inverse : le puzzle carré est dessiné en premier à l'écran à partir d'un `carré` disponible dans les `formes libres`.

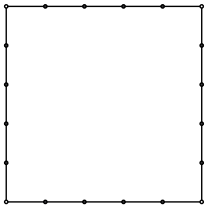


Fig. 7.61

Ensuite chacun de ses côtés est divisé en cinq à l'aide de la fonctionnalité `Diviser` disponible dans le menu `Opérations` (*Fig. 7.61*). La distance entre deux points de division consécutifs ou entre un sommet et un point de division voisin constitue l'unité de longueur. Dans ce cas, c'est la grandeur du carré qui conditionne l'unité de longueur.

En classe témoin

Ici aussi deux possibilités existent. Soit le puzzle est dessiné sur du papier pointé quadrillé. Le quadrillage sert alors de support au dessin et détermine l'unité de longueur. Cette unité est bien souvent le centimètre.

Soit le dessin est réalisé sur papier vierge. Dans ce cas, le côté du carré aura 5 cm de longueur. La difficulté du dessin résidera principalement dans le respect des angles droits. Le recours à l'équerre ou au compas est nécessaire.

• Pour dessiner les pièces carrées et rectangulaires du puzzle, soit les élèves déterminent au préalable les dimensions de chacune des pièces, soit ils utilisent une procédure de dessin qui correspond davantage dans ce cas à une procédure par essai-erreur. L'emploi du papier pointé quadrillé devrait inciter les élèves à utiliser cette procédure dessinée. En effet le quadrillage correspond aux unités d'aire et permet donc directement de visualiser et de prendre connaissance de l'aire de la pièce dessinée.

En classe expérimentale

Le dessin se réalise à l'aide des `carrés` et des `rectangles` disponibles dans le pavé des `formes libres`. Selon les outils utilisés pour construire le puzzle carré (voir description ci-dessus), les pièces du puzzle sont construites soit à partir des points du quadrillage soit à partir des points de division.

En classe témoin

Si le puzzle carré a été construit sur du papier pointé quadrillé, le dessin des pièces est facilité. Cependant la procédure dessinée, par essai-erreur, oblige les élèves a gommer régulièrement leur dessin ou à le recommencer pour qu'il reste lisible.

Analyse conceptuelle

Pour réaliser la tâche, les élèves doivent au préalable déterminer les dimensions du puzzle carré. Sachant que son aire vaut 25 unités (d'aire), son côté est de 5 unités (de longueur).

La recherche des pièces du puzzle peut à nouveau se dérouler soit à partir de la géométrie dessinée, soit à partir de la géométrie raisonnée et mesurée. Ces deux voies ne permettent pas une résolution aussi rapide l'une que l'autre.

À ce stade, l'enseignant veille à ce que les élèves tendent vers une résolution s'appuyant sur la géométrie mesurée, plutôt que sur des essais de dessins. Le rappel des activités précédentes et des démarches mises en évidence peut aider les élèves en difficulté.

La détermination des mesures des carrés et des rectangles peut s'opérer à l'aide d'un tableau de nombres tel que celui qui suit. Cette démarche est similaire à celle utilisée au cours de l'activité « La collection de rectangles », page 189.

Carrés	C		Aire
	1		1
	2		4
	3		9
	4		16
	5		25
Rectangle	L	ℓ	Aire
	2	1	2
	3	1	3
	3	2	6
	4	1	4
	4	2	8
	4	3	12
	5	1	5
	5	2	10
	5	3	15
	5	4	20

La distinction entre *carré* et *rectangle* n'est pas obligatoire pour la recherche des dimensions des figures. Les élèves peuvent rechercher l'aire de toutes les figures possédant 1 ul pour une dimension et faire varier la mesure de l'autre dimension de 1 à 5 ; puis faire de même avec 2, 3... pour obtenir l'ensemble des possibilités.

Notons que les élèves doivent comprendre que les dimensions des formes doivent être inférieures ou égales à 5 cm ou 5 unités de longueur puisqu'elles doivent s'inscrire dans le carré de 25 ua.

Tout comme dans les activités « Les carrés de Pierre » (page 185) et « La collection de rectangles », les élèves doivent comprendre qu'il est préférable de commencer avec les figures plus petites. Ils doivent donc combiner la recherche d'une somme de 5 nombres équivalente à 25 avec la nécessité d'obtenir 3 carrés et 2 rectangles.

Ensuite, soit après avoir élaboré le tableau, soit au cours de son élaboration, les élèves éliminent les formes qui ne peuvent être utilisées car leur aire est trop importante en fonction de l'énoncé du problème. Par exemple, le carré de 5 ul ne peut être utilisé car à lui seul il recouvre le puzzle. De même pour le carré de 16 ua, car même en choisissant les quatre plus petites formes, l'aire totale est supérieure à 25 ua : 16 ua + 1 ua + 2 ua + 3 ua + 4 ua = 26 ua.

Il ne reste donc plus que trois carrés (1 ul, 2 ul et 3 ul) qu'il faut utiliser pour répondre à l'énoncé qui stipule que le puzzle est construit à partir de 3 carrés.

La démarche relatée ci-dessus revêt un caractère linéaire et structuré qui ne reflète certes pas, pour une grande majorité d'élèves, celles que l'on devrait observer dans les classes. Les élèves vont très probablement alternativement travailler sur les nombres et sur la représentation géométrique. Ces deux représentations complémentaires devraient par ailleurs permettre des validations ou invalidations de solutions avancées par les élèves.

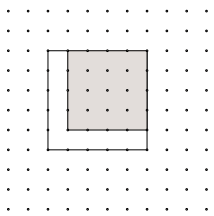


Fig. 7.62

Par exemple, choisir le carré de 16 ua, le dessiner sur le puzzle et se rendre compte qu'il n'y a plus de place pour dessiner deux autres carrés différents.

Pour ce qui est des deux rectangles, l'aire disponible est égale à 25 ua moins l'aire des trois carrés, soit : 25 ua − 9 ua − 4 ua − 1 ua = 11 ua. Les élèves doivent donc déterminer les deux rectangles pour lesquelles la somme de leur aire est égale à 11 ua. Deux solutions sont possibles à ce stade : soit un rectangle d'aire égale à 8 ua et un rectangle de 3 ua, soit un rectangle de 6 ua et un autre de 5 ua . Les autres solutions doivent être écartées car elles contiennent un carré (10 et 1 ; 9 et 2 ; 7 et 4).

À cette dimension numérique de la détermination des rectangles, il faut encore ajouter la dimension géométrique. En effet, il faut pouvoir insérer les deux rectangles choisis dans le puzzle. Ainsi si plusieurs solutions numériques apparaissent, une seule sera exploitable au niveau géométrique. Il est donc nécessaire maintenant de dessiner les formes sur le puzzle pour déterminer les rectangles.

Le dessin doit débuter par les carrés, seules formes déterminées assurément. Leur positionnement sur le puzzle doit être guidé par la vision anticipée des rectangles. Ainsi les figures ci-dessous exposent des positionnements erronés des carrés car la surface encore disponible, bien que possédant une aire de 11 ua ne permet pas de déterminer deux formes rectangulaires.

Pour la figure 7.65, quel que soit le positionnement du plus petit carré, il sera impossible de placer deux formes rectangulaires dans les deux plages restantes.

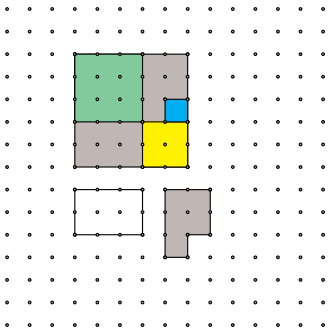


Fig. 7.63

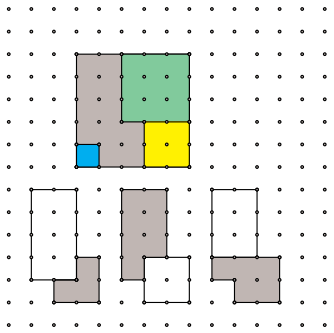


Fig. 7.64

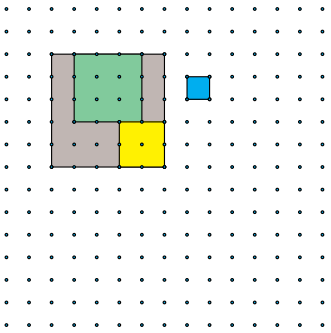


Fig. 7.65

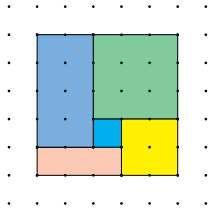


Fig. 7.66

La solution de ce problème est exposée à la figure 7.66 ci-contre.

Notons que tout au long de la résolution du problème les cadres numérique et géométrique ont été employés alternativement soit pour déterminer des formes ou leur positionnement, soit pour valider la démarche en cours.

Tout au long de l'activité, l'enseignant proposera aux élèves en difficulté de se référer à ces cadres mathématiques. Le rappel des activités précédentes devrait aussi aider ces élèves.

En fin d'activité, l'enseignant organise la mise en commun et la synthèse de l'activité. L'énoncé de la solution tant dans le cadre numérique que dans le cadre géométrique est une phase importante de la mise en commun. Les explications que les élèves peuvent fournir à propos de leur démarche peuvent aussi aider des élèves ayant eu des difficultés. Pour ces derniers, de nouveaux problèmes du même type seront peut-être à programmer.

La synthèse devrait mettre en évidence les savoirs employés durant la résolution de ce problème et les démarches utilisées, notamment :
– la démarche de calcul de l'aire des carrés et la formule associée ;
– de même pour les rectangles ;
– la démarche numérique de détermination des aires possibles.

Échos des classes

La majorité des élèves entament ce défi en situant leur activité dans le cadre géométrique, que ce soit dans l'environnement *Apprenti Géomètre* ou dans l'environnement papier–crayon. Ils construisent un grand carré — qui n'a pas toujours 25 unités d'aire — et viennent y intégrer des rectangles et des carrés. Néanmoins, ceci semble plus vrai encore dans le contexte papier–crayon où des élèves réalisent un grand carré mais ne se soucient pas de son aire.

En terme de genèse instrumentale, l'usage des outils pour résoudre la situation problème comporte des différences dans les deux environnements.

Avec *Apprenti Géomètre*, très peu d'élèves utilisent les formes standards et encore moins conservent cette configuration tout au long de la résolution du défi. À un moment donné (variable selon l'élève mais inférieur à dix minutes), à peu d'exception près, tous passent aux formes libres. Ce choix pourrait être guidé par l'habitude d'utiliser ces formes et par une méconnaissance des différences entre les deux configurations, comme cela nous a été explicitement dit dans une classe. D'après d'autres élèves, l'absence d'un rectangle standard et d'une grille (non activable sous *Apprenti Géomètre* 1) les avait incités à passer aux formes libres. Parmi ces derniers, après avoir activé la grille quadrillée, quelques-uns se sont servis des deux types de formes.

Ils ont fait apparaître à l'écran le grand carré de 25 ua et l'ont pavé avec des carrés unités (correspondant à la configuration standard de la grille c'est-à-dire de taille 50). Ces carrés ont ensuite été coloriés pour obtenir les formes souhaitées. Quelques rares élèves ont pu le faire avec les carrés standards. D'autres ont construit un grand carré et ont utilisé l'opération `Diviser` (en 5).

Plus rare, un groupe a tracé le grand carré à partir de segments.

Un autre groupe a réalisé des allers et des retours entre *Apprenti Géomètre* et le contexte papier–crayon. Sur une feuille blanche, un enfant du groupe a employé une latte et un compas pour tracer les formes recherchées.

Dans cet environnement, lorsque le choix est laissé aux élèves entre une feuille blanche et une feuille quadrillée, plus de la moitié d'entre eux optent d'emblée pour la feuille blanche (qui peut correspondre aussi à la fiche distribuée). En cours d'activité, parmi ceux-ci, quelques-uns changent de support. Une élève a recouru même aux deux supports superposés l'un sur l'autre (la feuille blanche sur la feuille quadrillée utilisée comme quadrillage).

Par contre, l'utilisation de la latte est généralisée quel que soit le type de feuille utilisée. Il est exceptionnel de voir un élève reproduire des formes à main levée, faisant fi de la précision du tracé.

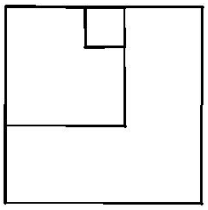


Fig. 7.67

Au lieu de juxtaposer les carrés de 1 et de 3, une élève les a superposés pour commencer.

Si, ainsi que nous l'avons écrit plus haut, la plupart des élèves situent au départ leur activité dans le cadre géométrique, ils sont ensuite amenés à combiner trois cadres différents : les cadres géométrique, numérique et des grandeurs mesurées.

Ainsi, pour construire un carré ayant une aire de 25 unités d'aire, la connaissance de 25, comme nombre faisant partie de la suite numérique des aires des carrés (cadre des nombres), de son analogie avec le carré de 5 sur 5 (cadre de la géométrie) et de l'aire de celui-ci (cadre des grandeurs) sont nécessaires.

Dans la juxtaposition des trois carrés et des deux rectangles différents à l'intérieur du carré de 25 ua, la réflexion sur les nombres (suite numérique 1, 4, 9, 16, 25) doit s'agencer avec celle sur la géométrie (Est-il possible de placer dans le carré de 5 sur 5, en plus de deux rectangles, trois carrés différents parmi les carrés d'aire 25, 16, 9, 4 et 1 ?). C'est par des va-et-vient entre ces deux cadres et celui des grandeurs que les carrés de 5 et 4 vont être éliminés.

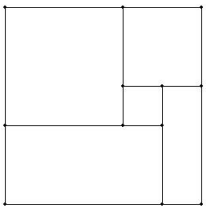


Fig. 7.68

Quand les carrés de 1 sur 1, 2 sur 2 et 3 sur 3 sont sélectionnés, il faut encore les agencer dans le carré de 5 sur 5 de sorte qu'il soit possible d'inclure aussi des rectangles de 3 sur 1 et de 4 sur 2 ?

Un quatrième cadre, graphique celui-là, a aussi fait l'objet d'un travail avec les élèves pour comparer les périmètre et aire des carrés. Les élèves ont pu observer graphiquement avec le logiciel `Excel` les suites numériques des périmètres et aires des carrés jusqu'au carré de 20 sur 20.

Ils ont constaté (*Fig. 7.69*) que les courbes ont un point commun, correspondant au carré de 4 sur 4 et que la courbe de l'aire monte beaucoup plus vite que celle du périmètre, ce qui leur a fait dire qu'elles ne se rencontreront plus par la suite.

Mesure d'un côté	Périmètre	Aire
Unité de longueur	Unité de longueur	Unité d'aire
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25
6	24	36
7	28	49
8	32	64
9	36	81
10	40	100
11	44	121
12	48	144
13	52	169
14	56	196
15	60	225
16	64	256
17	68	289
18	72	324
19	76	361
20	80	400

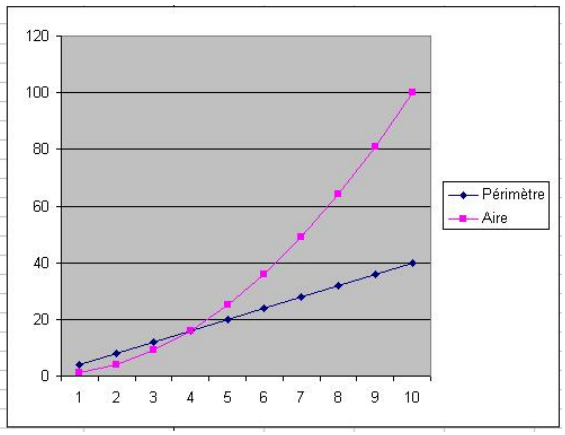
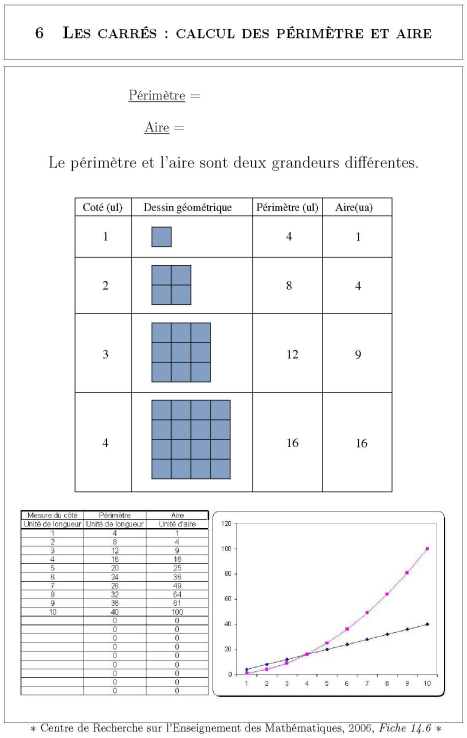


Fig. 7.69

7.2.6 Périmètre et aire - Synthèse

L'enseignant soumet les fiches et aux élèves. Les liens entre les différents registres de représentation et les différents cadres de résolution sont à nouveau mis en évidence par l'enseignant ou les élèves.



6 Les carrés : calcul des périmètre et aire

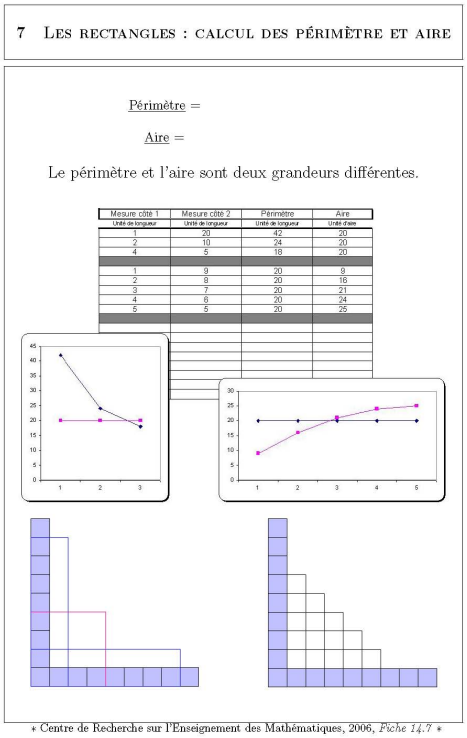
Périmètre =

Aire =

Le périmètre et l'aire sont deux grandeurs différentes.

Coté (ul)	Dessin géométrique	Périmètre (ul)	Aire(ua)
1		4	1
2		8	4
3		12	9
4		16	16

∗ Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2006, *Fiche 14.6* ∗



7 Les rectangles : calcul des périmètre et aire

Périmètre =

Aire =

Le périmètre et l'aire sont deux grandeurs différentes.

∗ Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2006, *Fiche 14.7* ∗

Les formules de périmètre et d'aire sont notées sur la fiche.

7.3 L'aire des parallélogrammes

La séquence comporte les quatre fiches 3.1 à 3.4. Notons que les fiches 3.1 et 3.2 peuvent être imprimées en *recto/verso*. En classe témoin, ce sont les fiches 6.1 à 6.2 qui sont utilisées.

L'objectif essentiel de ces fiches est de mettre en évidence les éléments communs et les éléments différents entre les rectangles et les parallélogrammes, principalement pour ce qui concerne leurs périmètres et leurs aires.

De quoi s'agit-il? Les élèves manipulent des pièces de puzzle pour construire des rectangles et des parallélogrammes de même aire mais de formes et de périmètres différents. Ils manipulent des fichiers dynamiques pour observer et prendre conscience des variations des périmètres et des aires. Ils donnent sens à la formule $B \times H$ pour les parallélogrammes et les rectangles.

Enjeux

- Comparer les aires du rectangle et du parallélogramme, préciser les dimensions utiles pour la comparaison ;
- comparer les périmètres du rectangle et du parallélogramme, préciser les dimensions utiles pour la comparaison ;
- comparer les variations des périmètres et des aires de ces formes ;
- prendre conscience qu'un parallélogramme peut se ramener à deux rectangles de même aire ;
- déterminer les dimensions nécessaires au calcul de l'aire du parallélogramme et cela de deux façons différentes ;
- prendre conscience que ces dimensions se relèvent sur des segments perpendiculaires ;
- établir les formules de l'aire d'un parallélogramme.

Compétences

- *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*
- *Construire des démarches pour calculer [...] des aires [...].*

De quoi a-t-on besoin? Les fiches 3.1 à 3.6 pour les classes expérimentales ; les fiches 6.1 à 6.6 pour les classes témoins. Pour ces mêmes classes, l'enseignant devra photocopier les fiches 6.3 et 6.6 sur du papier cartonné et découper les formes pour qu'elles soient distribuées aux élèves au cours de l'activité. De la colle.

7.3.1 Puzzles et « vrai ou faux »

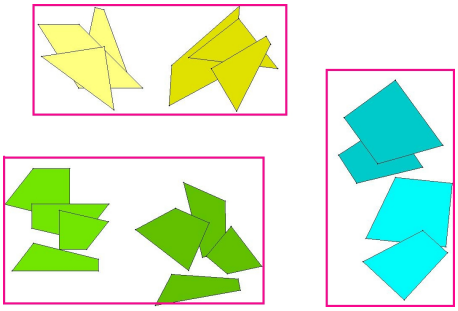
Remarque liminaire : Cette activité peut être réalisée à partir de pièces en carton identiques à celles proposées pour le travail avec *Apprenti Géomètre*. Si nécessaire, les pièces semblables pourront être superposées pour constater leur isométrie.

Cependant, vu les propriétés physiques des pièces en carton, il sera plus complexe, après la réalisation des puzzles, de superposer les rectangles et les parallélogrammes formés par

assemblage. Ainsi, la comparaison des dimensions de chacune des formes — rectangles et parallélogrammes — sera plus complexe. Nous expliciterons cela plus en détails dans la description ci-dessous.

Situation initiale : L'enseignant soumet les fiches 3.1 (et 3.2 au verso) ou 6.1 (et 6.2 au verso)aux élèves.

`Fiche 3.1 ou 6.1.`
Avec chacune de ces trois paires de puzzles, reconstitue un rectangle et un parallélogramme. Imprime tes puzzles et colle-les au verso.



Réponds ensuite par « vrai » ou « faux » aux propositions ci-dessous. Explique au verso comment tu as trouvé ces réponses.
Tous ces rectangles et parallélogrammes ont même périmètre.
Tous ces rectangles et parallélogrammes ont même aire.

Analyse procédurale

Peu de connaissances instrumentales sont à investir dans cette situation. En particulier, aucun outil ne doit être utilisé dans les classes *témoins*. Pour les classes utilisant *Apprenti Géomètre*, seuls les mouvements `Glisser` et `Tourner` sont nécessaires.

Analyse conceptuelle

Chaque paire de puzzles colorés est constituée des mêmes pièces. Cette affirmation peut être vérifiées en superposant les pièces. Notons que les puzzles peuvent être reconstitués sans `retourner` les formes. La situation peut donc être complexifiée par l'enseignant qui retournerait quelques formes au départ.
Pour reconstituer les puzzles, plusieurs démarches peuvent être utilisées, des plus empiriques aux plus « raisonnées ».

La démarche empirique correspond à une recherche de type « puzzle unicolore ». Il s'agit de la démarche utilisée pour assembler dont les pièces sont pratiquement toutes de la même couleur. Elle consiste à essayer tous les assemblages possibles sans véritable réflexion *a priori*. En l'occurrence, les élèves recherchent des arrangements de pièces qui pourraient conduire à la construction d'un rectangle ou d'un parallélogramme sans objectif précis ni plan de construction.

Une démarche quelque peu plus raisonnée est celle qui consiste à décider au préalable de la pièce à réaliser, soit un rectangle, soit un parallélogramme. Dans ce cas, la recherche d'assemblage est guidée par ce choix,

mais, comme précédemment, peu de réflexion *a priori* sur la forme et ses caractéristiques n'est réalisée par les élèves. Ceux-ci n'analysent pas les pièces pour repérer des angles droits, des côtés parallèles, des côtés isométriques...

Une démarche encore plus raisonnée consiste, après avoir choisi la forme à construire, à observer les caractéristiques des pièces à assembler et à les comparer entre elles ainsi qu'avec les caractéristiques de la forme à réaliser.

Nous observerons plus particulièrement deux cas dans la section suivante : celui de la construction du rectangle avec le puzzle de trois pièces et la construction du parallélogramme avec le puzzle de quatre pièces.

Une première mise en commun débute par l'exposé des puzzles à réaliser. Si l'enseignant dispose d'un projecteur, il pourra montrer toutes les solutions en un seul écran rapidement à toute la classe. Sinon, soit certains élèves se déplacent pour observer les réalisations des autres paires d'élèves, soit l'enseignant expose les solutions au tableau à partir de dessins ou d'affiches. Voici quelques solutions .

Puzzle de deux pièces.

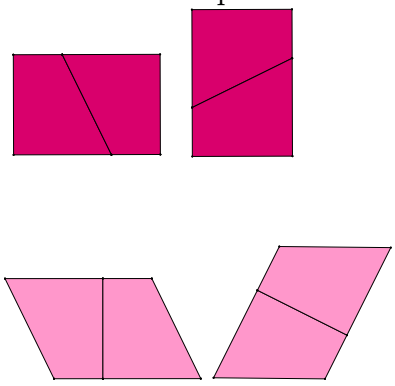


Fig. 7.70

Puzzle de trois pièces.

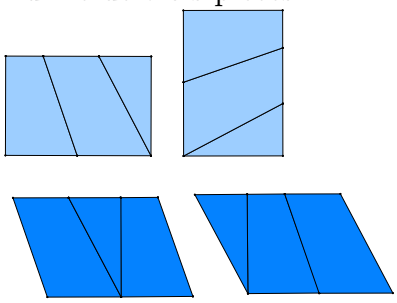


Fig. 7.71

Le puzzle de quatre pièces est plus complexe à réaliser.

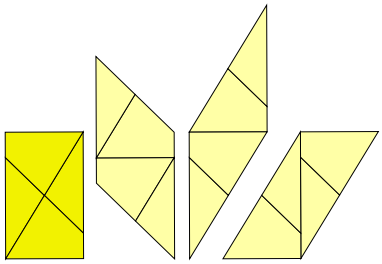


Fig. 7.72

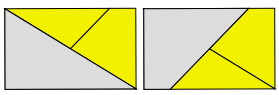


Fig. 7.73

L'égalité des aires des trois rectangles peut facilement être montrée et acceptée par superposition. Ceci suppose au préalable que les pièces ont été fusionnées (*Fig. 7.74*).

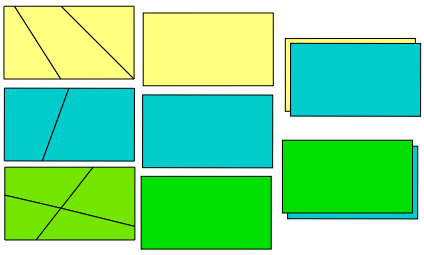


Fig. 7.74

Lorsque les élèves doivent exprimer si les propositions sont vraies ou fausses,

– pour comparer les périmètres, les élèves doivent tenir compte de ce que les formes manipulées ont une dimension commune. Après `fusion` des pièces, ils peuvent soit déplacer les pièces pour juxtaposer des côtés (*Fig. 7.75*(A)), soit utiliser des cercles comme lors de l'activité avec les suites de carrés (*Fig. 7.75*(B)).

  Après avoir dessiné un cercle ayant pour centre le point C et pour rayon le segment $[C, R]$, les élèves dupliquent ce cercle et le déplacent pour porter son centre sur le point Z, par exemple. Ils constatent ensuite que le cercle ne passe pas par le point S. Donc le segment $[Z, S]$ est plus grand que le segment $[C, R]$.

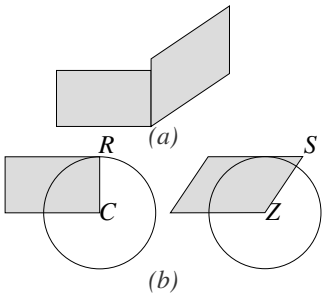


Fig. 7.75

De ce fait, sachant que les grands côtés sont de même longueur, ils peuvent conclure que les périmètres sont différents.

Par transitivité, les aires des trois parallélogrammes peuvent être reconnues comme égales. En effet, à partir de la figure 7.76,

- les aires du rectangle A et du parallélogramme B sont égales, puisque ces deux formes sont construites à partir des mêmes pièces,
- il en va de même pour les formes C et D,
- les aires des rectangles A et C sont égales (il est possible de le montrer en superposant les formes)
- donc les aires des deux parallélogrammes B et D sont égales.

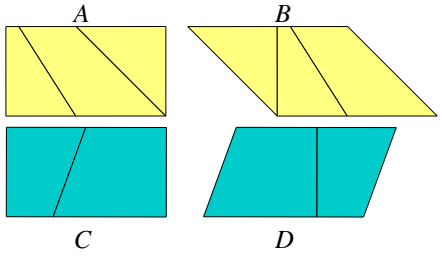


Fig. 7.76

Après cette première phase de manipulation, une mise en commun permet d'exprimer et de justifier que ces formes ont même aire, malgré des périmètres différents et des formes différentes. L'enseignant propose ensuite la consigne suivante.

> Ces formes ont une grandeur commune qui est l'aire, nous venons de le montrer et de le justifier. Possèdent-elles d'autres grandeurs communes ?

La juxtaposition des rectangles et des parallélogrammes, après fusion, permet de « voir » et d'exprimer que les rectangles et les parallélogrammes possèdent deux autres grandeurs communes :

- deux côtés opposés du rectangle ont même longueur que deux côtés opposés du parallélogramme ;
- la distance entre ces côtés du rectangle est égale à la distance entre ces côtés du parallélogramme (*Fig. 7.77*).

C'est à dessein que nous employons (provisoirement) ces termes *côté* et *distance* et non ceux couramment employés que sont *base* et *hauteur*. Dans une première approche, nous souhaitons que les élèves prennent conscience du concept avant de lui donner un nom. Notons également qu'en parlant de *distance* entre deux côtés qui sont ici parallèles, il est possible à l'enseignant et aux élèves de comparer cette situation à celle de la mesure de la largeur d'une bande (*voir le chapitre 5*). Un travail avec *Apprenti Géomètre* ou avec des bandes transparentes peut supporter cette réflexion (*Fig. 7.78*).

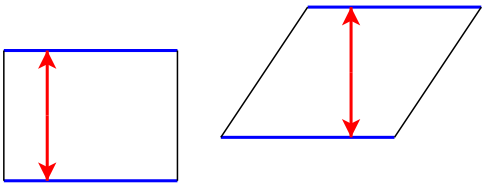


Fig. 7.77

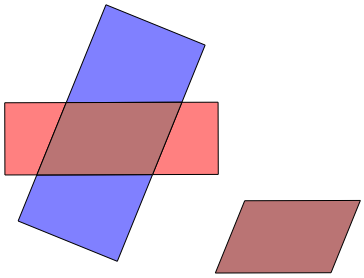


Fig. 7.78

C'est à partir de ce travail que peuvent également émerger les différences entre ces formes de même aire : leurs angles sont différents ainsi que les longueurs d'une paire de côtés opposés. Les périmètres sont donc aussi différents.

Une première synthèse des observations permet d'émettre certaines conjectures qui seront à confirmer à partir d'autres cas :

- il est possible de former des rectangles et des parallélogrammes de même aire ;
- ou il est possible de transformer un rectangle en un parallélogramme et vice-versa, en les découpant et en assemblant autrement les fragments obtenus par ce découpage (notons que dans cette activité, nous avons choisi de ne pas traiter les cas où le parallélogramme est très « incliné » de telle sorte que sa hauteur « sort » de la forme) ;
- en juxtaposant le rectangle et le parallélogramme qui lui correspond, on observe qu'outre l'aire, ces deux formes ont en commun les longueurs de deux côtés et les distances entre ces côtés ;
- des parallélogrammes peuvent avoir même aire, même s'ils ne sont pas superposables (ce

constat a par ailleurs pu être réalisé précédemment pour d'autres formes géométriques, comme par exemple des rectangles).

Échos des classes

Au cours des expérimentations, assez rapidement, deux variables ont émergé pour dissocier les classes *témoins* et *expérimentales* : d'une part le temps de réalisation de la tâche proposée, d'autre part le degré de réalisation de la tâche.

• La variable *temps*.

Nous avons pu constater pour l'ensemble des huit classes que la tâche était plus rapidement terminée dans les classes *témoins* que dans les classes *expérimentales*. Dans ces dernières, la tâche n'était pas toujours terminée au terme du temps imparti (plus ou moins 30 minutes).

• La variable *degré de réalisation de la tâche*.

Nous avons également constaté que le degré de finition de la tâche n'était pas identique dans les deux types de classes. Dans les classes *témoins*, à de rares exceptions près, les paires d'élèves ont achevé les six puzzles dans un temps relativement court (plus ou moins quinze minutes). Alors que dans les classes *expérimentales*, seulement les puzzles de deux et de trois pièces sont terminés avec, souvent, le rectangle du puzzle de quatre pièces.

• Une tentative d'explication.

Comment se fait-il que globalement les élèves n'atteignent pas le même degré de finition au terme de l'activité ?

La réponse à cette question est à rechercher dans les caractéristiques instrumentales de ces environnements. Le tâtonnement expérimental est de loin le processus de résolution qui est privilégié par le plus grand nombre, tant dans les classes *expérimentales* que dans les classes *témoins*. Cependant, les processus mis en œuvre diffèrent en fonction de l'environnement.

Le contexte papier-crayon favorise plutôt un processus de type visuel–manuel plus intuitif où les mains prennent le pouvoir sur le cognitif et où plusieurs actions sont possibles simultanément. À l'opposé, le contexte *Apprenti Géomètre* favorise plutôt un processus de type *visuel–cognitif* imposant une réflexion préalable sur l'action à réaliser et la réalisation d'actions successives et non simultanées.

De plus, il nous semble que l'usage d'*Apprenti Géomètre* nécessite, plus ou moins fréquemment selon le degré d'expertise instrumentale, des verbalisations intériorisées et/ou extériorisées des tâches à réaliser.

Il apparaît ainsi raisonnable d'expliquer les différences au niveau du temps de réalisation et de la finition de la tâche par ces éléments : les processus de type *visuel–manuel* ou de type *visuel–cognitif*, la simultanéité ou la succession des actions, la nécessité d'un recours au verbal ou non.

• Quelles influences sur l'activité des élèves ?

Il est particulièrement éclairant d'analyser l'activité à partir de deux logiques généralement à l'œuvre dans l'enseignement : celle liée à l'obtention d'un *produit fini* et celle liée au

processus qui conduit à ce produit fini.

En terme de *produit fini*, les élèves des classes *témoins* ont clairement mieux réussi la tâche proposée que les élèves des classes *expérimentales*. Les six puzzles demandés sont réalisés pour une majorité de paires d'élèves.

Par contre, en terme de *processus* mis en œuvre pour réaliser la tâche, les observations et les questionnements des élèves nous laissent penser que ce sont ceux des classes *expérimentales* qui ont mis en œuvre le plus grand nombre de démarches.

• Analyse des démarches des élèves.

Lors du démarrage de l'activité, les premières actions des élèves se portent, globalement, sur les puzzles de deux pièces, voire de trois pièces. C'est le critère de « facilité d'assemblage » qui apparaît prépondérant quand les élèves sont interrogés sur le choix des paires de puzzles. Celles-ci sont choisies par ordre croissant de difficulté.

Néanmoins, quelques paires d'élèves commencent par assembler l'un des puzzles de quatre pièces. Mais ils ne persistent pas plus de dix minutes, particulièrement avec *Apprenti Géomètre* où la complexité de la situation paraît plus importante que dans le contexte papier-crayon.

Quel que soit le contexte, généralement les élèves ne « voient » pas les combinaisons de paires de pièces qui facilitent la construction du rectangle et du parallélogramme. Pour cela, l'identification de deux pièces identiques au sein du puzzle de quatre pièces est indispensable. Dès ce constat opéré, deux configurations différentes peuvent se détacher.

Soit juxtaposer le triangle et le quadrilatère en un triangle rectangle (la figure 7.79 expose deux assemblages possibles), ce qui débouche sur des agencements de rectangle et de parallélogramme du type de ceux présentés ci-contre. (*Fig. 7.80*).

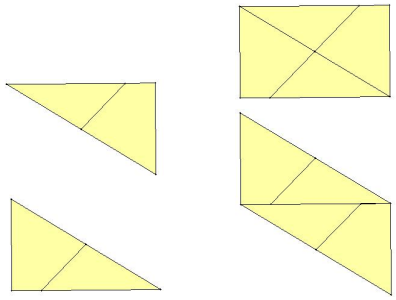


Fig. 7.79 *Fig. 7.80*

Soit juxtaposer le triangle et le quadrilatère en un trapèze rectangle (la figure 7.81 expose deux assemblages possibles), ce qui débouche sur des agencements de rectangle et de parallélogramme du type de ceux présentés ci-contre. (*Fig. 7.82*).

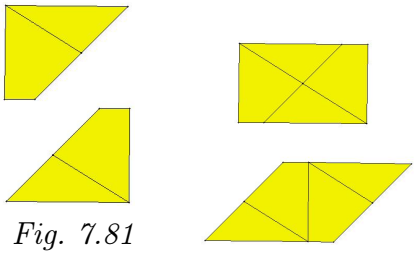
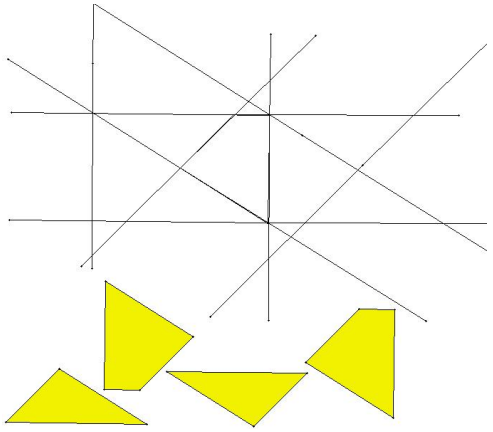


Fig. 7.81 *Fig. 7.82*

Remarquons que les caractéristiques visuelles de contour du rectangle ne changent pas, ce qui est le cas pour le parallélogramme. Deux types de parallélogrammes ressortent. Pour le rectangle, c'est uniquement, la visualisation, à l'intérieur de celui-ci, de l'agencement de deux paires de triangle et quadrilatère en un triangle ou un trapèze rectangle qui varie. Le passage d'un type de regroupement à un autre s'effectue à partir de la fixation du regard

sur une diagonale ou sur un segment oblique qui coupe le rectangle de part en part dans le sens de sa longueur.

Réaliser ce type de travail, c'est passer d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique. Autrement dit, la manière de voir du botaniste se transforme en manière de voir de constructeur ou d'inventeur-bricoleur. Dans cette dernière perception, l'établissement d'une trame de droites (d'un réseau) plus complexe que la forme de départ permet d'obtenir un résultat similaire voire supérieur.



C'est ce que nous avons tenté de représenter ci-contre.

Fig. 7.83

La plupart des élèves ont privilégié une visualisation iconique. Plusieurs faits font pencher la balance vers ce choix.

Il faut d'abord noter que la visualisation non iconique, basée sur la détection de traits non dessinés sur la figure, représente un stade de perception plus élaboré que la visualisation iconique. La plupart des élèves (et la plupart des adultes) n'ont pas atteint ce stade.

La méthode de travail adoptée par les élèves en vue de réaliser les puzzles intervient également. En effet, après avoir sorti de l'enveloppe et disposé les paires de puzzles sur leur banc ou ouvert le fichier dans *Apprenti Géomètre*, la plupart des élèves tâtonnent en ajustant les pièces.

De plus la saisie d'une ou plusieurs pièces n'est généralement pas guidée par un raisonnement quelconque. C'est dans l'action que progressivement se dessine l'une ou l'autre forme géométrique. Dans cette action, la perception joue un rôle fondamental et la manière de voir favorisée nous paraît être celle du botaniste.

Ainsi, lorsque les élèves déplacent des formes préexistantes en vue de reconstituer un rectangle ou un parallélogramme, ils cherchent à reconnaître des formes (par ressemblance à une forme typique) et à identifier les objets correspondant aux formes reconnues. Cette perception est purement qualitative : les formes sont reconnues à partir d'indices visuels.

Toutefois, la manière de voir opérant dans les deux environnements diffère sur certains aspects. Selon l'environnement dans lequel les élèves sont placés, les dimensions des formes prises en compte varient : des pièces matérielles 3D (formes 2D/3D) à manipuler physiquement pour les élèves des classes témoins et des formes 2D « virtuelles » (formes 2D/2D) pour les élèves des classes expérimentales.

En outre, dans le contexte papier-crayon, la main est l'instrument privilégié alors que dans le contexte *Apprenti Géomètre*, le logiciel en lui-même constitue l'instrument mais aussi, intégré à celui-ci, les mouvements `Glisser` et `Tourner`. Automatiquement, le *mode d'activité* est différent. Cependant, *Apprenti Géomètre* permet d'accéder plus directement aux manières de voir du constructeur et de l'inventeur-bricoleur que l'environnement papier-crayon grâce à l'intégration d'objets et d'outils tels que le segment et le point et le parallélisme du menu `Outils`. La perception, attachée à l'usage d'un instrument déterminé, est affectée quand l'instrument change.

Une modulation supplémentaire a déjà été évoquée : le nombre d'actions concomitantes réalisées par chaque élève. L'observation nous a montré que dans l'environnement papier-crayon, les élèves manipulent simultanément au moins deux pièces, mais les deux élèves d'une paire travaillent sur le même puzzle, augmenterait la probabilité de reproduction d'une même action. Toutefois, la manipulation de plusieurs morceaux à la fois permet une visualisation plus globale et dynamique. Dans l'environnement *Apprenti Géomètre*, une seule action est possible à la fois. De ce fait, la perception s'en trouve limitée.

L'une des premières actions que réalisent un certain nombre d'élèves avec *Apprenti Géomètre* consiste à utiliser le mouvement `Retourner`. C'est moins vrai dans le contexte papier-crayon car une seule face de chaque pièce est coloriée. Peut-être aussi le langage courant induit-il une confusion entre `Tourner` et `Retourner`. L'action de `Retourner` une pièce, et non les autres, amène une difficulté supplémentaire : le puzzle ne peut plus être réalisé. Ainsi, on assiste à une complexification de la situation initiale.

La reconnaissance d'un parallélogramme est aussi une source de difficultés pour certains élèves. Les élèves ne disposent pas d'un « parallélogramme-type » auquel ils peuvent confronter leur production. Ainsi, ils peuvent ne pas reconnaître un parallélogramme.

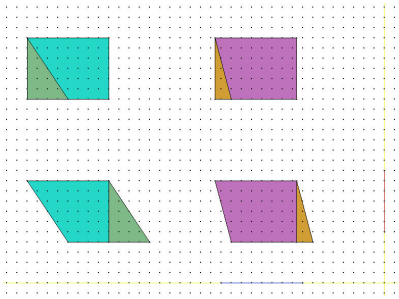
Le fait que le mot « parallélogramme » n'évoque pas grand-chose pour certains est à relier aussi avec le registre du langage. Ce mot n'existe que dans le langage mathématique. Il ne peut être bien compris que si la conceptualisation de l'objet est suffisamment avancée.

7.3.2 Rectangles et parallélogrammes : éléments communs

Remarque liminaire : cette activité a pour objet de vérifier si les constats réalisés précédemment à partir de situations déterminées, fixées *a priori*, sont vraies pour un ensemble plus vaste de situations. L'usage d'un fichier dynamique permet de confronter les élèves à ces situations plus générales.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 3.3 aux élèves.

Fiche 3.3.
Fais varier la longueur de la ligne rouge et de la ligne bleue situées au bord du quadrillage.
Observe à l'écran les variations correspondantes des rectangles et des parallélogrammes.
Explique ces variations.



Ces quatre formes possèdent-elles le même périmètre ? OUI / NON
Explique

Ces quatre formes possèdent-elles la même aire ? OUI / NON
Explique

Avant de faire varier quoi que ce soit, l'enseignant invite les élèves à observer les formes présentes à l'écran et à émettre d'emblée quelques constatations :
– deux rectangles et deux parallélogrammes sont présents à l'écran ;
– chaque parallélogramme peut être obtenu à partir du rectangle correspondant par décomposition et recomposition, et réciproquement ;
– les deux rectangles sont « les mêmes », ils ont donc même aire. Donc les deux parallélogrammes ont même aire.

En modifiant les formes, les élèves vérifient si les conjectures émises au cours de l'activité précédente sont confirmées :

– il est possible de transformer un parallélogramme en un rectangle de même aire ;
– des parallélogrammes de formes différentes peuvent avoir même aire ;
– les rectangles et les parallélogrammes construits à partir de ceux-ci par découpage et assemblage ont des dimensions communes :

La mise en commun permet aux élèves d'exposer leurs réponses aux deux questions posées et d'expliquer, voire de justifier, ces réponses.

Les caractéristiques et rôles respectifs des deux segments déformables doivent également être mis en évidence, notamment leur orthogonalité.

En faisant varier la longueur des segments horizontaux et verticaux, la question du vocabulaire va inévitablement surgir. En effet, la tendance étant d'appeler « longueur » la longueur du plus grand côté d'un rectangle, et largeur celle du plus petit côté, les varia-

tions vont vite transformer le plus grand côté en plus petit, et vice-versa, ce qui risque de créer de la confusion. Par ailleurs, les élèves — ou au moins certains d'entre eux — emploient pour un parallélogramme le vocabulaire « base » et « hauteur ».

On leur rappelle alors que n'importe quel côté du parallélogramme peut être choisi comme base. Le rappel de ce qu'un parallélogramme peut être inscrit dans deux bandes différentes peut être opportun.

Pour poursuivre l'activité sans difficulté, on se met d'accord sur le choix des côtés horizontaux des parallélogrammes comme bases, les hauteurs étant alors naturellement déterminées. Il convient aussi de fixer le vocabulaire à employer *dans cette activité* à propos des rectangles. On peut alors faire remarquer que les rectangles sont des parallélogrammes particuliers et que de plus, les parallélogrammes peuvent se transformer en rectangles. On peut donc utiliser le vocabulaire « base–hauteur » également pour le rectangle. On convient donc d'appeler « bases » les cotés horizontaux des rectangles et « hauteurs » leurs côtés verticaux.

Analyse procédurale

Sur la fiche et à l'écran, aux bords de la plage tramée, apparaissent deux segments orthogonaux — l'un horizontal, l'autre vertical. Le segment horizontal détermine la longueur des bases des rectangles et parallélogrammes. Le segment vertical a même longueur que les hauteurs de ces rectangles et parallélogrammes.
En faisant varier la longueur des segments horizontaux et verticaux, les élèves peuvent observer que les bases et hauteurs des quatre formes se modifient en conséquence. Pour faire varier la longueur de ces segments, les élèves doivent sélectionner la fonctionnalité `Modifier` dans le menu vertical à gauche de l'écran et saisir une des deux extrémités du segment à l'aide du pointeur de la souris.

Analyse conceptuelle

Les figures 7.84 à 7.86 présentent trois variations.

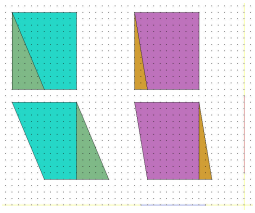


Fig. 7.84

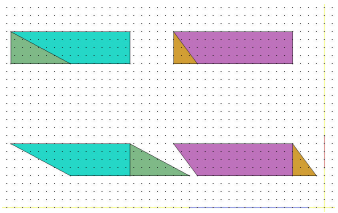


Fig. 7.85

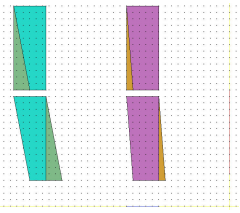


Fig. 7.86

Dans un premier temps, au cours de ces variations continues, les élèves prennent conscience du rôle de chacun des deux segments. L'un, horizontal, modifie la longueur des bases ; l'autre, vertical, modifie les hauteurs des formes.

Regardons d'abord la situation concernant l'inégalité des périmètres : les côtés obliques des parallélogrammes sont plus longs que leurs hauteurs, donc aussi que les hauteurs des rectangles. (*Fig. 7.87* et *7.88*).

Les périmètres des parallélogrammes sont donc plus grands que ceux des rectangles de même base et de même hauteur.

Cette activité se situe au niveau de la généralisation, tout comme la situation de manipulation. Il s'agit de prendre conscience des concepts de mesure et de périmètre et de les expliquer dans un contexte général et plutôt qu'à partir de situations particulières.

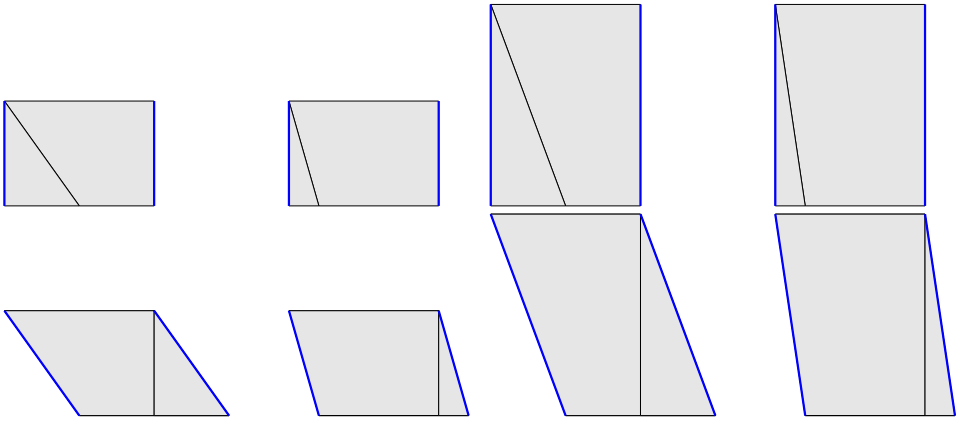


Fig. 7.87

Fig. 7.88

Observons maintenant l'égalité des aires. Ces quatre formes possèdent la même aire parce qu'elles possèdent des dimensions communes : leur base et leur hauteur.

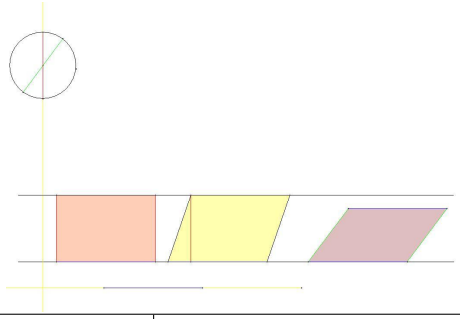
7.3.3 Rectangles et parallélogrammes : périmètres et aires

Remarque liminaire : au cours des deux premières activités, nous avons tenté de mettre en évidence les éléments communs entre les rectangles et les parallélogrammes, notamment les deux dimensions perpendiculaires nécessaires au calcul de leurs aires.

L'activité qui suit a pour objectif de montrer les différences de variations entre les périmètres et les aires et plus particulièrement de mettre en évidence le rôle des côtés dans les parallélogrammes. En effet, si dans les rectangles les deux dimensions perpendiculaires nécessaires au calcul de l'aire sont les longueurs de deux côtés directement visibles, ce n'est pas le cas pour les parallélogrammes. Le calcul de l'aire des parallélogrammes nécessite la mesure d'une hauteur, donc un tracé préalable.

Situation initiale. L'enseignant soumet la fiche 3.4 aux élèves.

`Fiche 3.4`.
Voici trois formes : un rectangle (orange) et deux parallélogrammes (l'un jaune, l'autre brun). Compare les périmètres et aires de ces trois formes. Complète le tableau ci-dessous. Tu peux faire varier les dimensions de ces formes en agrandissant le cercle ou en le faisant tourner (`Tourner` dans le menu `Mouvements`).



Périmètre → P Aire → A	Rectangle	Parallélogramme jaune	Parallélogramme brun
Rectangle	_____		
Parallélogramme jaune		_____	
Parallélogramme brun			_____

Les élèves doivent comparer les périmètres et les aires des formes proposées et inscrire leurs résultats dans le tableau.

Après quelques minutes d'observations et de manipulations libres, une première analyse collective du fichier informatique permet d'émettre des constats tant d'ordre instrumental que conceptuel :

- ce fichier ressemble au précédent (paradynamique1) où en faisant varier des segments, nous constations des variations au niveau des formes ;
- les formes possèdent des côtés de couleur correspondant aux segments de couleur situés dans le cercle ;
- les deux premières formes ont même aire car elles possèdent même base et même hauteur ;
- le deuxième parallélogramme n'a pas la même aire que les deux autres formes car il n'a pas la même hauteur ;
- les segments inscrits dans le cercle ont même mesure car ils sont tous les deux diamètre du cercle (ceci a déjà été rencontré lors des activités concernant les carrés) ;
- en modifiant la grandeur du cercle, la dimension des segments varie ;
- en faisant tourner le cercle, l'orientation du segment vert varie et modifie par conséquent le deuxième parallélogramme...

L'enseignant explicite la manière dont les élèves doivent compléter le tableau si nécessaire.

Analyse procédurale

Le fichier proposé aux élèves est à nouveau de type *dynamique* : plusieurs éléments se modifient en fonction d'un autre, auquel les élèves ont accès. Il leur est donc possible de modifier la situation proposée, dans les limites du fichier informatique.
Ce fichier dynamique utilise des couleurs pour que les élèves puissent repérer aisément les segments de même longueur. Ainsi, le segment bleu, horizontal, est fixé et correspond aux bases de chacune des trois formes ; le segment rouge correspond aux hauteurs du rectangle et du premier parallélogramme et aux deux côtés obliques du premier parallélogramme ; le segment vert, de même longueur que le segment rouge puisque inscrit dans le même cercle, correspond aux deux côtés obliques du deuxième parallélogramme.

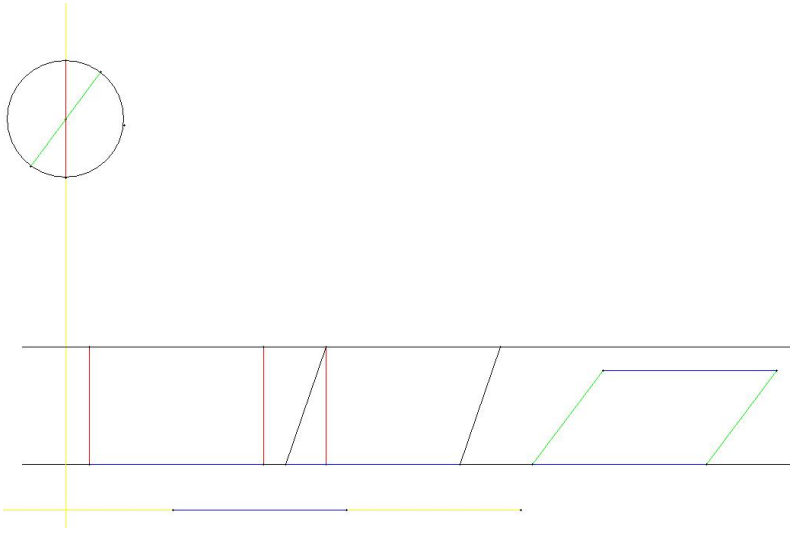


Fig. 7.89

Les bases des trois formes sont fixées, les élèves ne peuvent modifier ni leur dimension ni leur orientation. Ils peuvent cependant modifier la dimension des deux autres côtés ainsi que la position relative de deux côtés adjacents du deuxième parallélogramme.

Pour réaliser ces modifications, les élèves utilisent soit la fonctionnalité `Modifier` pour modifier la dimension du diamètre du cercle (*Fig. 7.90* et *7.91*), soit le mouvement `Tourner` pour faire tourner le cercle et ainsi changer l'orientation d'un des deux segments inscrits dans le cercle (*Fig. 7.92* et *7.93*).

Ces modifications apportées au cercle et aux segments qui y sont inscrits entraînent des modifications des deux côtés verticaux du rectangle, de la hauteur du premier parallélogramme, de la deuxième paire de côtés du deuxième parallélogramme ainsi que la position relative de deux côtés adjacents du troisième parallélogramme en faisant tourner le cercle.

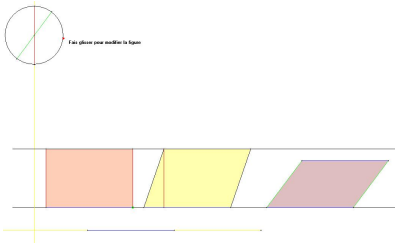


Fig. 7.90

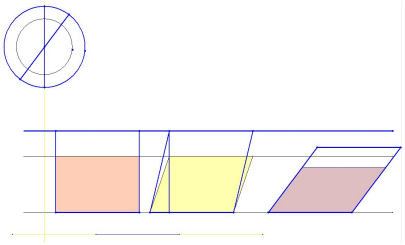


Fig. 7.91

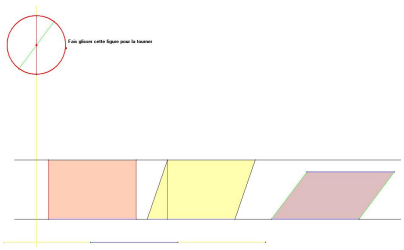


Fig. 7.92

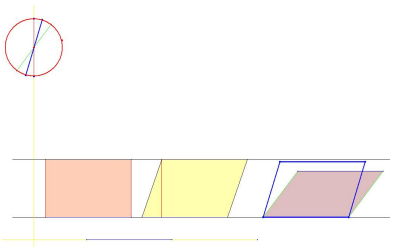


Fig. 7.93

Analyse conceptuelle

Lors des deux premières activités, les élèves ont pu observer des similitudes entre les rectangles et les parallélogrammes. L'égalité des aires a notamment été liée soit à la possibilité de décomposer une forme et de recomposer l'autre avec les morceaux ainsi obtenus, soit à la mise en évidence d'égalité des mesures de deux segments orthogonaux (base et hauteur).

Le fichier présenté aux élèves a pour objet d'insister sur le fait qu'il ne s'agit pas de calculer l'aire d'un parallélogramme à partir de la mesure de deux côtés adjacents. L'usage d'un fichier dynamique permet, à partir de déformations continues, d'une part de montrer le rôle essentiel de segments orthogonaux dans le calcul des aires, d'autre part d'insister sur la distinction entre périmètre et aire ainsi que sur les éléments géométriques nécessaires à leur calcul respectif.

Ce fichier dynamique permet deux types de variation :

- l'une au niveau de la dimension des segments inscrits dans le cercle, ce qui aura une influence sur le périmètre des formes, sans altérer l'égalité des aires des deux premières (*Fig. 7.91*) ;
- l'autre au niveau de l'angle des côtés adjacents pour la troisième forme. De ce fait, le périmètre de la forme ne varie pas mais son aire augmente ou diminue (*Fig. 7.93*).

Au cours des variations de la position relative des deux segments inscrits dans le cercle, ceux-ci peuvent se superposer. Dans ce cas, le rectangle et le parallélogramme brun possèdent à la fois un même périmètre et une même aire. Et par transitivité, les deux parallélogrammes possèdent une même aire mais pas un même périmètre. Notons que ceci est aussi vrai lorsque le parallélogramme brun se dessine par dessous la ligne horizontale (*Fig. 7.95*).

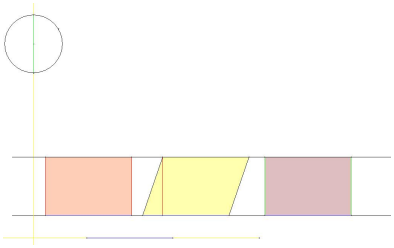


Fig. 7.94

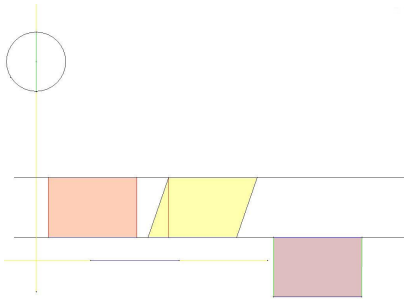


Fig. 7.95

Le tableau proposé aux élèves peut être complété comme suit :

Périmètre → P Aire → A	Rectangle	Parallélogramme jaune	Parallélogramme brun
Rectangle		Périmètres différents, Aires égales	Périmètres égaux, Aires différentes sauf si deux rectangles
Parallélogramme jaune	Périmètres différents Aires égales		Périmètres différents Aires différentes sauf si la forme brune est un rectangle
Parallélogramme brun	Périmètres égaux Aires différentes sauf si deux rectangles	Périmètres différents Aires différentes sauf si la forme brune est un rectangle	

L'exception présente dans ce tableau correspond à la situation où les deux segments inscrits dans le cercle sont superposés comme le montre la figure 7.94.

Une mise en commun des réponses est organisée lorsque les élèves ont complété leur tableau. Lors de cette mise en commun ces constats sont justifiés. C'est éventuellement l'occasion de revenir sur les questions de vocabulaire.

L'enseignant donne ensuite la consigne suivante.

> À partir des manipulations réalisées et des constats émis, établir la formule de l'aire d'un parallélogramme.
> Expliquer sa démarche.

Ce travail peut être réalisé seul puis en groupe. La mise en commun permet de structurer le raisonnement.

Par exemple :

Par découpage et réassemblage, nous avons construit des rectangles à partir de parallélogrammes, et des parallélogrammes à partir d'un rectangle. A chaque fois, des *dimensions*

communes ont été observées. Un côté du rectangle avait même longueur qu'un côté du parallélogramme, et l'autre côté du rectangle avait même longueur que la *hauteur* du parallélogramme.

Comme nous savons que l'on peut calculer l'aire du rectangle à partir de la formule $L \times \ell$, on peut conclure que la formule de l'aire d'un parallélogramme est $B \times h$, où la hauteur h est perpendiculaire à la base B.

Prolongements et liens

Ces activités durant lesquelles les deux dimensions nécessaires au calcul de l'aire des parallélogrammes ont été mises en évidence doivent se prolonger par des activités de construction de parallélogrammes à la règle et au compas, par des activités de calcul d'aire à l'aide de la formule établie...

Par exemple, l'enseignant peut proposer aux élèves de dessiner aux instruments un parallélogramme de même aire qu'un rectangle donné, de même périmètre, de même aire et de même périmètre... Ce travail peut aussi être proposé dans le contexte informatique.

Des fichiers dynamiques simplifiés peuvent aussi être employés pour *montrer* les variations de hauteur des parallélogrammes aux élèves en difficulté en ce qui concerne la compréhension de ce concept (*Fig. 7.96* et *7.97*).

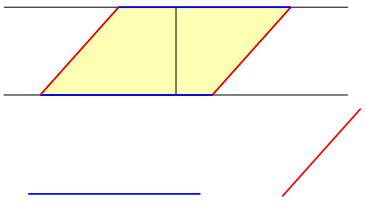


Fig. 7.96

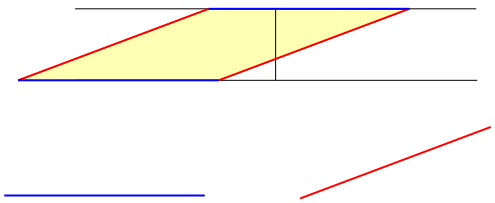


Fig. 7.97

Chapitre 8

L'expérimentation en sixième primaire (2005–2006)

La première séquence expérimentale de notre travail a été réalisée de mars à mai 2006. Cinq classes de sixième primaire ont été impliquées, peu ou prou, dans l'expérience. Il s'agit de trois classes du Collège Saint-Marie à Rêves, d'une classe de l'Institut Saint-Joseph à La Louvière et d'une classe de l'Athénée Royal Lucie Dejardin à Seraing. Nous tenons à remercier particulièrement les chefs d'établissement et les instituteurs concernés qui ont accepté notre présence parmi eux. Merci également aux élèves sans lesquels aucune expérimentation ne serait possible.

Le schéma expérimental a été le suivant :

1 Une à deux séances d'initiation au logiciel *Apprenti Géomètre* dans les classes de La Louvière et de Seraing. Ces séances n'étaient pas nécessaires à Rêves où les élèves étaient déjà familiarisés avec le logiciel.

2 Un pré-test destiné à déterminer certaines conceptions et perceptions des élèves. Ce pré-test a été réalisé dans les cinq classes.

3 Cinq à six séances consacrées aux séquences d'activités *L'aire des carrés* et *L'aire des rectangles et parallélogrammes*.

   Dans les classes de Seraing, de La Louvière et dans la classe de sixième C de Rêves, les élèves avaient l'occasion d'utiliser *Apprenti Géomètre* lors de certaines de ces séances.

   Dans les classes de sixième A et de sixième B de Rêves, les élèves n'avaient pas accès au logiciel. Ces classes sont donc à considérer comme des classes témoins.

4 Un post-test, construit sur le modèle du pré-test, dont l'objectif était d'étudier les difficultés d'apprentissage des élèves ainsi que leur évolution en fonction de l'enseignement reçu.

Précisons aussi que lors de ces activités, nous avons utilisé *Apprenti Géomètre* dans sa version 1 du fait que la version 2 n'était pas encore disponible. Certaines des considérations relatives à l'utilisation du logiciel ou au vocabulaire utilisé ne sont donc pas transposables à cette version 2.

8.1 L'aire de carrés

La séquence comporte les fiches 7.1 à 7.13, consacrées à une même situation. Celle-ci est traitée à l'aide de différents matériels (cartons découpés, ordinateur, papier-crayon). Certaines des fiches sont destinées à être remplies par l'élève notamment sous forme de narration de recherche.

Notons cependant que l'objectif essentiel des ces fiches n'est pas de construire avec les élèves la formule d'aire des carrés. En effet ce travail a dû être effectué dans les années précédentes.

Un des objectifs est de familiariser les élèves avec l'usage des outils de dessin, d'utiliser les côtés, les sommets, les médianes et les diagonales d'un carré comme outils de construction ou de justification. Un autre objectif est d'entraîner les élèves à « voir » ce qui n'est pas directement « visible » dans un dessin.

De quoi s'agit-il?

Les élèves analysent deux suites de carrés. Dans chacune de ces suites, chaque carré a une aire double ou moitié du carré précédent, selon le sens de parcours de la suite. (*figures 8.1 et 8.2*).

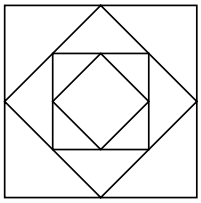


Fig. 8.1

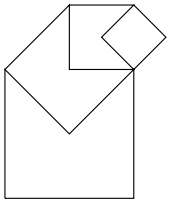


Fig. 8.2

Ils analysent les positions relatives des carrés dans chacune des suites. Ils reproduisent ces deux suites sans recourir à des mesures. Ils comparent, sans les mesurer, les aires des différents carrés, soit en les superposant, soit en imaginant des découpages.

Dans la partie « Narration de recherche », les élèves relatent par écrit leur démarche de reproduction de la suite de carrés. Ils justifient celle-ci à l'aide des propriétés géométriques des carrés et des outils utilisés.

Enjeux

- Découvrir que, dans un carré, chaque diagonale découpe ce carré en deux triangles superposables (par déplacement ou par retournement). L'aire de chaque triangle vaut la moitié de l'aire du carré ;
- découvrir que, dans un carré, les deux diagonales découpent le carré en quatre triangles superposables que l'on peut assembler pour construire deux carrés d'aire égale à la moitié du carré de départ ;
- découvrir que le côté d'un carré a la même longueur que la diagonale du carré qui le précède ou qui le suit, selon le sens de parcours de la suite ;
- aborder la notion d'aire indépendamment du calcul de sa mesure ;
- déterminer le matériel nécessaire à la résolution d'un problème.

Compétences

- *Fractionner des objets en vue de les comparer.*
- *Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.*
- *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*
- *Tracer des formes simples, en lien avec les propriétés des formes et au moyen de [. . .] l'équerre et du compas.*
- *Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.*
- *Résoudre, raisonner et argumenter.*
- *Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie, pour décrire, comparer, tracer.*

De quoi a-t-on besoin?

- Des modèles de suite de carrés en papier de couleur ;
- des fiches 7.1 à 7.13 ;
- des séries de carrés découpés (fiche 7.2) ;
- des crayons ; des compas ; des équerres ; des gommes ;
- l'imprimante.

8.1.1 Fiche 7.1 : manipuler des cartons découpés

Remarque liminaire : Cette première activité n'utilise pas l'ordinateur et peut sembler, en première analyse, peu productive d'apprentissage. En effet, les élèves manipulent des carrés — formes qu'ils connaissent depuis la première année de leur scolarité primaire — pour reproduire des assemblages assez simples. Cependant, cette situation est à l'origine de nombreux apprentissages *a posteriori* qui seront développés dans les activités qui suivent.

Situation initiale

L'enseignant place au tableau plusieurs modèles en carton des figures 8.1 et 8.2. Il est important de présenter des suites de différentes grandeurs, construites à partir d'un carré initial différent. En effet, les enfants doivent se rendre compte que les quatre carrés de chacune de ces suites ne sont pas choisis au hasard. Au contraire les rapports entre les dimensions des différents carrés de la suite ont de l'importance. On veillera aussi à utiliser des couleurs différentes pour éviter que les enfants ne se centrent sur la reproduction d'une suite de couleurs.

L'enseignant distribue à chaque élève la fiche 7.1 et une série de six carrés (voir fiche à photocopier 7.2), seuls quatre de ceux-ci permettent de construire les suites.

> Choisis une suite puis construis-la avec quatre des six carrés en carton à disposition.
> Essaie ensuite de réaliser la deuxième suite.
> Colle une suite géométrique dans le cadre ci-dessous.

Analyse procédurale

Les élèves choisissent une suite et déterminent par essai-erreur les quatre carrés permettant de la construire. Ensuite, ils essaient de réaliser la seconde suite avec ces quatre mêmes carrés.

La procédure à utiliser pour réaliser la tâche de reproduction est différente selon la suite que l'élève choisit.

En ce qui concerne la suite des carrés emboîtés (*Fig. 8.1*) :

- les élèves doivent observer que les sommets d'un carré plus petit doivent être placés sur les milieux des côtés du carré plus grand ;
- les élèves doivent donc situer ces milieux de côtés, soit en pliant les carrés, soit en utilisant leur compas ; nous déconseillons de laisser les élèves utiliser leur latte pour mesurer, cette démarche n'apportant aucune connaissance fondamentale en géométrie.

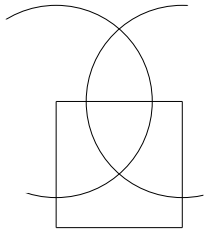


Fig. 8.3

La recherche du milieu d'un côté du carré peut être réalisée à l'aide du compas. Cette technique peut avoir été rencontrée par les élèves auparavant. Cependant, elle consiste généralement à tracer quatre arcs de cercle, deux au-dessus de la ligne, deux en dessous comme le montre la figure 8.3. Ce tracé, facilement réalisable sur une feuille de papier, est plus difficile sur une forme découpée comme celles proposées aux élèves. La technique doit donc être adaptée à la situation (*Fig. 8.4*) et une réflexion sur la technique elle-même peut nourrir certains apprentissages.

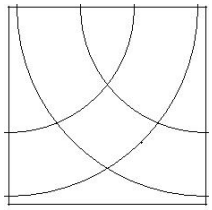


Fig. 8.4

En ce qui concerne la suite des carrés sortants (*Fig. 8.2*) :

- les élèves doivent observer que deux sommets opposés d'un carré plus petit peuvent être placés sur deux sommets consécutifs du carré plus grand ;
- ou, que deux sommets consécutifs d'un carré plus petit peuvent être placés sur un sommet et le centre du carré plus grand ;
- aucune mesure ou tracé supplémentaire n'est nécessaire pour cette seconde suite.

Le centre d'un carré est obtenu en traçant les diagonales du carré ou est directement présent si les médianes apparaissent suite à un pliage.

Notons que pour cette tâche réalisée à partir de formes en carton, un seul sens est utilisé : de la plus grande vers la plus petite forme. En effet, les formes n'étant pas transparentes, il est nécessaire de placer d'abord la plus grande, puis une plus petite, ainsi de suite.

centre de forme sont ici employés dans une perspective « outil » au sens de R. Douady, [31]. Il n'est nullement nécessaire de les définir avant de les employer dans l'activité. Ils prennent sens dans l'action et leur dénomination mathématique est précisée lors de la réalisation d'une tâche.

Commentaires

Sans doute, sera-t-il nécessaire pour l'enseignant de questionner les élèves durant l'activité, individuellement ou collectivement, quant à la démarche utilisée pour construire ces suites. C'est de ces questionnements que naîtront des interrogations du type :

- pour la suite de carrés emboîtés (*Fig. 8.1*), comment être certain que ces carrés sont placés correctement les uns par rapport aux autres ?

– comment trouver le milieu d'un côté ?
– pour la suite sortante (*Fig. 8.2*), y a-t-il des traits communs à deux carrés successifs ?

Lorsque le travail d'assemblage est terminé, les élèves collent une de ces deux suites sur leur fiche de travail.

Une discussion en groupe aura pour objet, dans un premier temps, d'exposer les réalisations finales des élèves et de mettre en avant certaines constatations, entre autres :

– certains carrés ne s'intègrent pas (« ne vont pas ») dans les suites à construire. Ils sont soit trop grands, soit trop petits. Dans les deux cas, il est impossible de placer leurs quatre sommets sur les milieux des côtés d'un carré plus grand ;
– les carrés qui s'intègrent dans une suite, s'intègrent aussi dans l'autre suite ;
– les carrés des suites ne sont donc pas choisis au hasard ;
– les modèles exposés au tableau n'ont pas tous la même grandeur, les carrés qui les composent non plus. Il est donc possible de construire des suites de différentes grandeurs ;
– pour construire la suite des carrés emboîtés, il est nécessaire de connaître les milieux des côtés du carré plus grand ;
– pour construire la suite des carrés sortants, il faut placer deux sommets opposés d'un carré plus petit sur deux sommets consécutifs d'un carré plus grand.

Ces constats peuvent faire l'objet d'une synthèse écrite. Ils seront exploités dans les activités suivantes.

Prolongements et liens

Selon les constats opérés et les questionnements survenus lors de cette activité, les prolongements suivants peuvent être envisagés :

– construction à la règle et au compas de la médiatrice et du milieu d'un segment ou d'un côté de polygone, tracé des médianes d'un carré, d'un rectangle, d'un losange, d'un parallélogramme avec constat que les médiatrices ne correspondent pas toujours avec les médianes ;

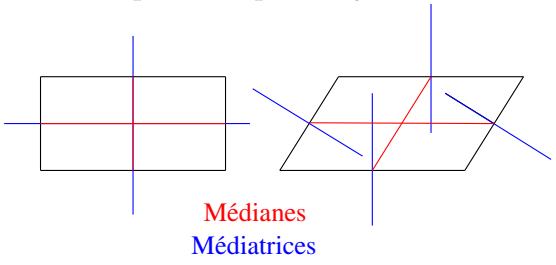


Fig. 8.5

– utilisation du compas pour comparer des longueurs [1] ;
– rencontre de l'inégalité triangulaire si des élèves ont comparé la longueur des médianes ou des côtés avec celle des diagonales.
Par exemple, « si l'on dispose de deux baguettes de même longueur et d'une troisième dont la longueur est égale à la somme des deux autres, est-il possible de construire un triangle ? » ...

[1] Notons que le mot *compas* provient du mot latin *compassare*, [12e siècle], qui veut dire *mesurer avec le pas*. Nous retrouvons dans l'étymologie du mot *compas* une de ses utilisations premières qui est de mesurer avec précision et de reporter des longueurs.

Vers où cela va-t-il?	Les notions que nous venons de rencontrer dans cette activité, et celles contenues dans les prolongements possibles, seront utilisées à nouveau dans l'enseignement secondaire, par exemple en ce qui concerne : – le théorème de Pythagore ; – tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.
Échos des classes	Cette première activité a été réalisée dans toutes les classes d'expérimentation.

Les deux suites de carrés ne sont pas choisies à parts égales par les élèves. Dans une majorité de cas, les élèves ou les groupes d'élèves choisissent de réaliser la suite de carrés emboîtés. Les raisons sont essentiellement d'ordre esthétique, « c'est plus joli », ou pratique, « ça paraît plus facile ».

A contrario, certains élèves, minoritaires, nous disent avoir choisi les carrés extérieurs parce que cela paraissait plus compliqué. Toutefois, après quelques essais infructueux, certains y renoncent. Observons que les élèves ayant poursuivi dans la construction de cette suite « sortante » constatent et expliquent que celle-ci est plus facile à réaliser, « parce qu'on n'a pas besoin des milieux [. . .] Il suffit de placer deux sommets opposés du carré plus petit sur deux sommets consécutifs du carré plus grand ».

Dimension affective

Globalement, les élèves ont apprécié cette activité du fait que les pièces sont colorées et que les suites de carrés forment de jolis assemblages.

Nous avons également remarqué que cette activité de construction géométrique constitue un véritable défi à leurs conceptions et perceptions premières. Ce que nous expliciterons ci-dessous plus longuement.

Dimension conceptuelle

Les concepts rencontrés dans cette activité sont nombreux : suite géométrique au sens mathématique du terme : l'aire de chaque carré est double de celle du précédent, mesure de longueur, orientation, formes géométriques et familles de formes, lignes remarquables telles que médiane et diagonale.

Ces concepts sont utilisés tant par les élèves que par l'enseignant dans la phase discursive pour expliciter et justifier les actions réalisées. L'apprentissage et l'utilisation du vocabulaire précis est ainsi réalisé en situation de communication. Les constats les plus fréquents sont les suivants :

- Un changement de vocabulaire : les carrés sont baptisés *carrés* ou *losanges* selon leur orientation. On rencontre fréquemment dans les classes les « définitions » suivantes assimilées par les élèves :
  – *un carré est une forme qui a quatre côtés égaux et quatre angles droits*
  – *un losange est une forme qui a quatre côtés égaux, deux angles obtus et deux angles aigus.*

  Cette dernière définition n'est évidemment pas celle du mathématicien pour qui un carré est un losange particulier. Néanmoins, si les élèves en tenaient compte, le carré ne devrait pas changer de nom lorsqu'il est « mis sur pointe ».

Constatons donc que les formes sont identifiées et dénommées en fonction d'une perception visuelle et que celle-ci est plus *forte* que les connaissances acquises et oralisées.

Constatons également l'incohérence entre la définition — erronée — du losange et l'inclusion de la famille des carrés dans celle des losanges. Constatons enfin que ces incohérences ne gènent guère les élèves sans que nous puissions expliquer pourquoi.

- Une confusion entre médiane et diagonale d'un carré, ainsi que l'usage plus fréquent des médianes au détriment des diagonales. Ceci peut surprendre car les diagonales sont des lignes remarquables directement données par les quadrilatères proposés : il s'agit de joindre deux sommets opposés.

8.1.2 Fiche 7.3 : utiliser *Apprenti Géomètre*

Situation initiale

Cette activité nécessite l'utilisation du didacticiel *Apprenti Géomètre*. L'enseignant distribue la fiche 7.3.

> Dessine ces deux suites de carrés.
> Indique ensuite de quels éléments géométriques tu as eu besoin pour réaliser chacune de ces deux constructions.

Analyse procédurale

L'analyse qui suit suppose que les élèves ont réalisé l'activité précédente avec les carrés de carton. Ils ont donc déjà observé les deux suites et connaissent leurs particularités géométriques telles que la coïncidence de certains points remarquables (sommet, milieu, centre).

Comme dans le cas de la reproduction à partir de formes en carton, la démarche à utiliser pour réaliser la tâche est différente selon la suite que l'élève va choisir. Des différences existent aussi entre la réalisation à l'aide des formes en carton et avec le logiciel.

Notons cependant que contrairement à l'activité précédente, du fait de la transparence des formes, la réalisation de la tâche peut se faire dans les deux sens : de la plus grande vers la plus petite ou de la plus petite vers la plus grande. Ce choix du sens de reproduction influera également sur la démarche à utiliser. Nous explicitons ceci ci-dessous.

En ce qui concerne la suite des carrés emboîtés (*Fig. 8.1*) :

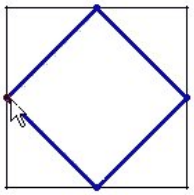


Fig. 8.6

il est plus commode de dessiner un grand carré et de pousuivre par les carrés intérieurs, plus petits, en utilisant les points milieux des côtés. En effet, pour tracer un carré à l'aide du kit libre, on en sélectionne deux sommets consécutifs. Pour cette première suite, il suffit donc de déterminer deux milieux de côtés consécutifs et de pointer les deux points obtenus après avoir activé l'icône carré, en veillant à l'ordre dans lequel

on montre les deux points, vu que les formes se construisent dans le sens antihorlogique. On obtient la figure 8.6.

Il reste à répéter l'opération deux fois.

Si les élèves souhaitent reproduire la suite dans le sens inverse, du plus petit vers le plus grand, la construction est plus complexe. Elle utilise notamment un fractionnement du carré le plus petit le long de ses diagonales (*Fig. 8.7* (*a*)). Les quatre triangles sont ensuite juxtaposés au carré initial (*Fig. 8.7* (*b*)), l'ensemble est enfin fusionné (*Fig. 8.7* (*c*)).

Ensuite, on assemble et on fusionne quatre duplicatas du carré le plus petit afin d'obtenir le troisième carré (*Fig. 8.8*).

Enfin, on fusionne quatre duplicatas du deuxième carré pour obtenir le quatrième, le plus grand.

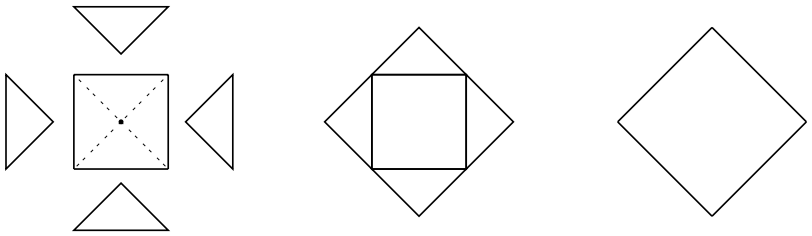


Fig. 8.7

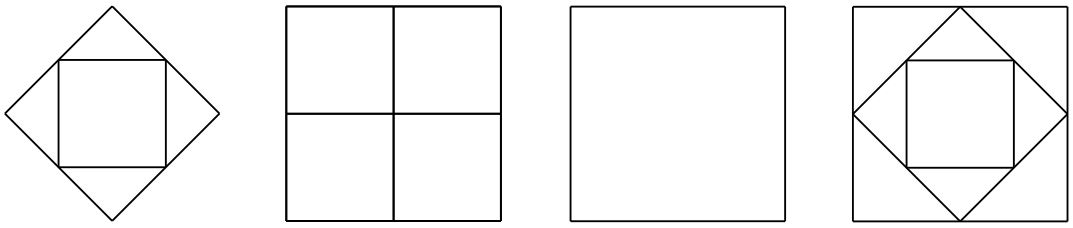


Fig. 8.8

En ce qui concerne la suite des carrés sortants (*Fig. 8.2*), le sens n'influence pas vraiment la difficulté de la construction. Il est cependant intéressant que des élèves choisissent des sens différents afin de susciter la discussion.

Si le sens de reproduction va du plus grand vers le plus petit carré,

- vu la manière dont les carrés se construisent dans *Apprenti Géomètre*, les élèves ont besoin du centre des carrés (ce qui n'était pas nécessairement le cas avec les carrés en carton) ;
- pour obtenir le centre des carrés, il est possible d'activer la fonctionnalité `Montrer le centre` dans le menu `Préférences` ;
- les élèves peuvent aussi dessiner les deux diagonales, le centre du carré est situé à l'intersection de ces deux lignes ;
- les élèves construisent les carrés plus petits en cliquant sur un sommet puis sur le centre du carré plus grand.

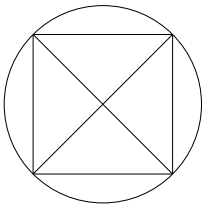


Fig. 8.9

Le cercle peut servir d'outil pour montrer que le centre du carré est bien situé au milieu des diagonales (*Fig. 8.9*). En effet, en traçant un cercle centré au centre du carré et passant par un sommet, on montre que chaque demi-diagonale est un rayon du cercle. Leurs longueurs sont donc égales.

Si les élèves souhaitent reproduire la suite dans le sens inverse, du plus petit vers le plus grand, la construction est quelque peu différente.

- Les élèves doivent construire le petit carré de départ ;
- ensuite, ils construisent le carré plus grand en cliquant sur deux sommets opposés du carré plus petit.

Dans cette construction, il apparaît que la longueur de la diagonale d'un carré plus petit vaut la longueur du côté d'un carré plus grand.

Analyse conceptuelle

Les notions de milieu de côté, de sommet de forme et de centre de forme sont à nouveau employées dans la perspective « outil ».
Un des intérêts de la reproduction de cette suite à l'aide du logiciel réside dans la transparence des formes qui met en évidence différentes caractéristiques de la construction, telles que :

- dans la suite sortante, la longueur d'une diagonale d'un carré plus petit vaut la longueur d'un côté du carré plus grand ; ou la moitié de la longueur d'une diagonale d'un carré plus grand vaut à la longueur du côté d'un carré plus petit (*Fig. 8.10*) ;
- des triangles apparaissent dans la construction, certains ont même aire, d'autres non (*Fig. 8.11*) ;
- des comparaisons d'aire de ces triangles montrent par exemple que le plus petit carré est composé de deux triangles verts que l'on retrouve dans le carré juste plus grand ;
- deux triangles verts ont ensemble la même aire qu'un triangle bleu ;
- deux triangles verts et un triangle bleu ont ensemble la même aire que le carré composé de deux triangles bleus et du triangle rose ;
- le plus petit carré a une aire qui vaut la moitié du carré juste plus grand ;
- dans la suite de carrés emboîtés, les sommets des quatre carrés sont situés soit sur une médiane soit sur une diagonale du carré le plus grand (*Fig. 8.12*).

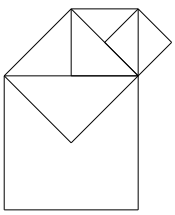


Fig. 8.10

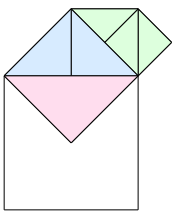


Fig. 8.11

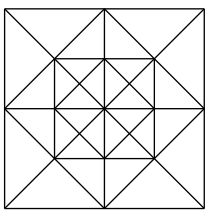


Fig. 8.12

Commentaires

Lors de la mise en commun des écrits des élèves, les éléments géométriques nécessaires à la construction des deux suites sont mis en évidence.

Pour la suite de carrés de la figure 8.1, il est nécessaire de construire les points milieux des côtés des carrés. Notons que dans *Apprenti Géomètre*, deux milieux de côtés successifs suffisent pour tracer un carré.

Pour la suite de carrés de la figure 8.2, ce sont les centres des carrés et leurs sommets qui sont nécessaires.

Grâce à la transparence des carrés, l'égalité entre la longueur du côté d'un carré et la diagonale du carré qui le précède (ou qui le suit, toujours suivant le sens de parcours de la suite) peut aussi être abordée.

L'ensemble de ces constats fait l'objet d'une première mise au point écrite à laquelle les élèves pourront ensuite faire référence.

Prolongements et liens

Nous avions indiqué dans l'activité précédente que les suites de carrés exposées devaient être de grandeurs différentes afin que les élèves n'associent pas à la notion de suite une grandeur définie. Le logiciel apporte une aide substantielle pour bien comprendre que la grandeur des suites n'a pas d'importance. En effet, on peut faire varier de manière continue la dimension du carré de départ. La suite de carrés évolue ainsi au gré des modifications apportées à ce premier carré (*Fig. 8.13*).

Cette caractéristique dynamique de la construction permet, par, exemple d'aborder la notion de suite infinie. En effet, les facilités de manipulation du logiciel permettent de poursuivre la construction suffisamment loin pour approcher ce concept : à chaque étape, on peut reproduire les mêmes opérations (*Fig. 8.14*). Si la forme à dessiner devient trop petite ou trop grande, on peut toujours agrandir ou diminuer la taille du carré de départ pour poursuivre la construction. La fonction zoom peut aussi apporter une aide appréciable pour les carrés très petits. Seules les dimensions de l'écran deviennent un obstacle, mais l'aspect répétitif des opérations permet aux enfants d'imaginer que ce processus ne s'arrête jamais.

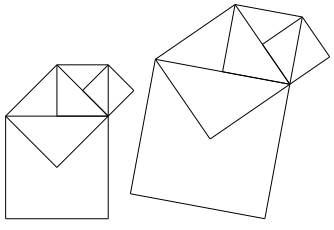


Fig. 8.13

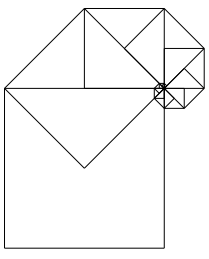


Fig. 8.14

8.1.3 Fiche 7.4 : dessiner à la règle et au compas

Cette activité nécessite l'emploi d'un compas, d'une équerre et d'une règle facultativement.

Remarque liminaire : Étant donné les notions mathématiques — propriétés des carrés, propriétés des cercles — et les aptitudes instrumentales — usage du compas, de l'équerre — à mettre en œuvre pour réaliser la tâche, il nous paraît important que les élèves aient été confrontés à l'usage de ces outils lors d'une activité antérieure. Sinon, ils risquent d'être trop absorbés par ces apprentissages et de perdre le fil de l'activité.

Cependant, la maîtrise de ces notions mathématiques n'est pas requise pour réaliser la tâche proposée. Celle-ci permet aux élèves de les rencontrer ou de les (re)découvrir dans un nouveau contexte.

Le travail collaboratif par groupe de deux élèves ou le tutorat peuvent aussi contribuer, dans un premier temps, à aider des élèves « en difficulté » face à cette tâche de reproduction.

Cette activité a pour objectif de construire des savoirs relatifs à l'action de « voir » que nous avons évoquée au chapitre 10. L'intérêt des constructions aux instruments réside particulièrement dans l'attention portée sur les propriétés instrumentales des outils, les caractéristiques des formes et le réinvestissement des notions rencontrées au cours des deux premières activités, notamment l'utilisation des médianes et des diagonales comme outils de construction.

En effet, le matériel classique utilisé dans le contexte *papier–crayon* (règle, compas, rapporteur) impose des contraintes telles que :
– les reports de longueur se réalisent au compas ;
– les contructions de perpendiculaires se réalisent au compas ou au rapporteur ;
– la recherche d'un milieu se réalise au compas ou au rapporteur.
Ces tracés sont donc réalisés sans aucune mesure de longueur. Les élèves sont ainsi obligés à utiliser des propriétés géométriques découvertes au cours des activités précédentes ou à les (re)découvrir dans le cadre d'une tâche de reproduction.

Situation initiale

L'enseignant distribue la fiche 7.4 aux élèves qui travaillent individuellement ou par groupes de deux comme proposé ci-dessus.

> À l'aide de ta règle, de ton compas et de ton équerre, reproduis une des suites de carrés.

L'enseignant insiste sur le fait que la reproduction d'une suite doit être réalisée sans mesurer aucune longueur. Avant de débuter la reproduction, il veille également à ce que chaque élève ait déterminé :
– la suite à reproduire ;
– le sens de la suite ;
– la dimension du premier carré, son orientation et sa disposition sur la feuille en fonction des choix précédents.
Selon les habitudes de classe, cette analyse *a priori* de la tâche peut être réalisée soit à partir d'une phase de réflexion collective qui met en évidence ces aspects essentiels du

dessin, suivie d'une phase individuelle, soit sous la forme d'un simple rappel collectif ou de notes au tableau, soit encore sous la forme d'interventions individualisées consécutives à l'observation des élèves.

Analyse procédurale

La dimension du premier carré dépend à la fois de la surface de papier disponible, de la suite à réaliser et du sens choisi. Par exemple, si l'élève choisit de reproduire une suite du plus grand carré vers le plus petit, la taille du premier carré doit être suffisante pour que le dernier carré ne soit pas trop petit. À l'inverse, s'il choisit de dessiner d'abord le plus petit, il doit veiller à ce qu'il ne soit pas trop grand de sorte que le plus grand carré puisse encore être dessiné sur la surface disponible. C'est là un travail d'approximation fort intéressant car il demande à l'élève de repérer approximativement les rapports entre les carrés. Ceci apparaît particulièrement si l'élève réalise le dessin du plus petit carré vers le plus grand.

Quel que soit le choix de la suite et quel que soit le choix du sens de la suite, la tâche de reproduction commence par le dessin d'un carré. Celui-ci peut être réalisé comme suit :

- d'abord tracer un segment sur lequel se situe un des côtés du carré ;
- ensuite, tracer une perpendiculaire à ce segment à l'aide de l'équerre (ou du compas) en un point que l'on considère comme un des sommets de ce carré ;
- ensuite déterminer la longueur du côté du carré et la reporter à l'aide du compas sur les deux segments déjà dessinés (*Fig. 8.15*) ;
- enfin, tracer les deux derniers côtés à l'aide de l'équerre (*Fig. 8.16*) ou déterminer le quatrième sommet à l'aide du compas et joindre ce sommet aux deux autres (*Fig. 8.17*).

Notons que ces deux dernières procédures ne font pas appel aux mêmes propriétés des carrés :

- dans le cas de la construction des deux côtés avec l'équerre, c'est la perpendicularité des côtés qui est utilisée ;
- dans le cas de la construction du quatrième sommet au compas, c'est l'isométrie des côtés qui est utilisée.

Fig. 8.15

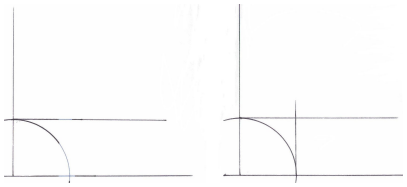


Fig. 8.16

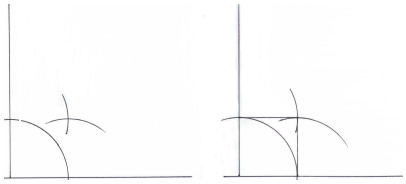


Fig. 8.17

Une autre procédure peut être utilisée, elle s'appuie sur la notion de carré inscrit dans un cercle.

– D'abord tracer un cercle au compas ;
– ensuite tracer deux lignes perpendiculaires passant par le centre du cercle ;
– joindre les quatre points d'intersection des perpendiculaires avec le cercle.

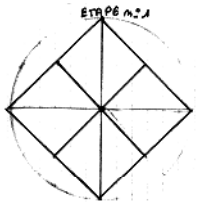


Fig. 8.18

La figure ci-contre présente le dessin réalisé par un élève de 6e année au cours d'une expérimentation.

Ce premier carré dessiné, la procédure de dessin dépend du choix de la suite et du sens de parcours de celle-ci.

1. Pour la suite de carrés emboîtés, du grand carré vers le petit.

- d'abord reconnaître que les sommets des carrés plus petits sont situés au milieu des côtés des carrés plus grands ;
- marquer les milieux des côtés en traçant d'abord les médianes :
  – tracer les diagonales pour obtenir le centre du carré, puis à l'aide de l'équerre, tracer les médianes ;
  – ou à l'aide du compas et de la règle, tracer les médiatrices de deux côtés ;
- joindre les quatre milieux à l'aide de la règle pour tracer le carré intérieur au premier ;
- utiliser les diagonales du premier carré pour obtenir le point milieu de chacun des côtés du carré plus petit ;
- tracer le troisième carré à partir de ces quatre points ;
- utiliser la même procédure pour le dernier carré.

2. Pour la suite de carrés emboîtés, du petit carré vers le grand

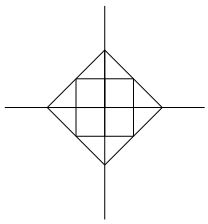


Fig. 8.19

- d'abord reconnaître que les sommets des carrés plus grands sont situés sur le prolongement des médianes de carrés plus petits ;
  – à l'aide du compas et de la règle, tracer les médiatrices de deux côtés perpendiculaires (*Fig. 8.19*) ;
  – à l'aide du compas, prolonger chaque médiane dans les deux sens de la moitié de sa longueur (*Fig. 8.20*) ;

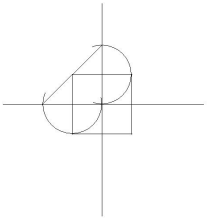


Fig. 8.20

  – joindre les quatre points ainsi obtenus ;

  ou

  – tracer les diagonales et construire, à partir des quatre sommets du petit carré, les perpendiculaires aux diagonales (*Fig. 8.21*) ;
  – les intersections de ces perpendiculaires sont les sommets du carré plus grand ;

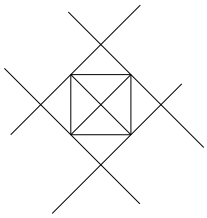


Fig. 8.21

- reproduire la procédure.

3. Pour la suite sortante, du grand carré vers le petit :

- d'abord reconnaître que deux sommets opposés d'un carré plus petit sont situés sur deux sommets consécutifs du carré plus grand et qu'un troisième sommet de ce petit carré est situé au centre du carré plus grand ;

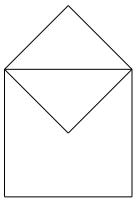


Fig. 8.22

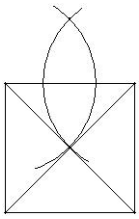


Fig. 8.23

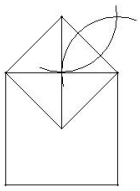
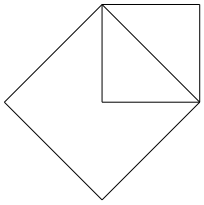


Fig. 8.24

- tracer les diagonales du grand carré pour obtenir son centre ;
- à l'aide du compas, construire le symétrique de ce point par rapport à un côté du carré (*Fig. 8.23*) ;
- joindre les points pour obtenir le petit carré ;
- tracer la diagonale de ce nouveau carré afin d'obtenir le point milieu du côté du carré précédent ;
- de nouveau, à l'aide du compas, construire le symétrique de ce point par rapport au côté adéquat du petit carré (*Fig. 8.24*) ;
- poursuivre la procédure.



4. Pour la suite sortante, du petit carré vers le grand :

- d'abord reconnaître que la diagonale d'un carré plus petit est le côté d'un carré plus grand ; (*Fig. 8.25*) ;
- tracer une diagonale ;

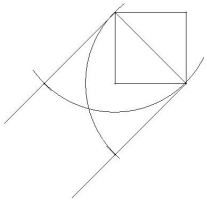


Fig. 8.26

- à l'aide de l'équerre, à partir des deux extrémités de cette diagonale, tracer deux perpendiculaires sur lesquelles se trouvent deux côtés du carré plus grand ;
- à l'aide du compas, reporter la mesure du côté (diagonale du petit carré) sur ces deux perpendiculaires ;
- joindre les deux points qui viennent d'être marqués ;
- répéter la procédure.

Analyse conceptuelle

Les choix initiaux influencent la difficulté de la reproduction et les notions mathématiques utilisées. Le tableau ci-dessous indique les notions mathématiques utilisées selon la suite choisie et le sens du dessin. Cependant, nous distinguerons l'usage de ces outils mathématiques dans la description des constructions ci-après.

	Grand carré vers petit	Petit carré vers grand
Suite de carrés emboîtés	Perpendiculaire, médiane (médiatrice), diagonale	Perpendiculaire, médiane (médiatrice), diagonale
Suite sortante	Perpendiculaire, diagonale, centre du carré	Perpendiculaire, diagonale

Au terme de l'activité de reproduction, l'enseignant organise une synthèse durant laquelle les élèves peuvent exposer leurs travaux afin de mettre en évidence :

- les quatre types de reproduction possible (deux suites, deux sens) ;
- les démarches utilisées
- les notions mathématiques rencontrées
- les liens entre les démarches et les notions, c'est-à-dire la justification des démarches par les notions mathématiques.

Par exemple, pour la construction du premier carré, nous avons noté que

- dans le cas de la construction des deux côtés avec l'équerre, c'est la perpendicularité des côtés qui est utilisée ;
- dans le cas de la construction du quatrième sommet au compas, c'est la propriété d'isométrie des côtés dans les carrés qui est utilisée.

Échos des classes

Cette activité a été réalisée dans toutes les classes d'expérimentation.

Dans deux des cinq classes, une large majorité d'élèves choisissent de reproduire la suite sortante. On peut imaginer que les activités qui ont précédé leur ont permis de réaliser que la construction de cette suite sortante était plus facile.

Dans les autres classes, la suite des carrés emboîtés garde la faveur d'une majorité d'élèves. Néanmoins, la reproduction de ce dessin est loin d'être toujours concluante. Pour certains élèves, on peut émettre l'hypothèse que cette suite leur semble plus évidente à reproduire sans respecter les consignes.

Dimension affective

Globalement bien accueillie par les élèves, l'attrait pour cette activité a néanmoins été variable d'une classe à l'autre. Pour certains élèves, le travail proposé n'engendre pas le même enthousiasme que l'activité informatique. Au premier abord, il apparaît comme plus traditionnel d'autant plus qu'il se déroule dans le cadre habituel de leur local. D'aucuns le trouvent même plus rébarbatif eu égard à la manipulation des instruments, des exigences de précision formulées par les animateurs et de l'interdiction d'effectuer des mesures.

Dans une des cinq classes testées, l'activité n'a pas donné de bons résultats. Plusieurs raisons peuvent être invoquées :

- l'instituteur titulaire de la classe ne se sent pas concerné par l'activité ;
- le travail revêt un caractère trop inhabituel : les élèves ne travaillent que rarement avec l'équerre et le compas (la plupart d'entre eux ne disposent d'ailleurs pas de ce matériel au moment d'entamer l'activité) ;
- une certaine lassitude face à un thème abordé pour la troisième fois.

D'un point de vue plus individuel, le degré de confiance en soi que possède un élève influence son implication dans l'activité. Dans une des classes, un élève s'est ainsi porté volontaire pour réaliser une des suites au tableau. Il s'est très bien acquitté de sa tâche en utilisant l'équerre et le compas de l'instituteur.

Dimension conceptuelle

Du point de vue du développement des aptitudes au dessin géométrique sans mesure, les enjeux de cette activité sont multiples :

- savoir construire un carré,
- savoir construire le milieu d'un segment,
- savoir trouver le centre d'un carré,
- savoir construire une médiane d'un carré.

Ces objectifs ne sont pas faciles à atteindre car beaucoup d'enfants ressentent le besoin de mesurer : c'est une démarche plus habituelle et sans doute plus rassurante pour eux. Ainsi, pour construire le premier carré d'une suite, le réflexe est de choisir une longueur pour un côté, d'utiliser l'équerre et ensuite la latte graduée pour reporter la longueur choisie. La démarche de construction du milieu d'un segment sans mesurer sa longueur n'est pas acquise non plus.

Il est à noter que dans une classe où l'activité a entièrement été gérée par l'institutrice, sans animateur extérieur, c'est la mesure qui a été utilisée pour reproduire les suites de carrés.

L'interdiction de mesurer peut en outre engendrer

– un blocage (que nous aurions peut-être pu inclure dans la dimension affective de l'activité) : « si je ne peux pas mesurer, je ne sais pas dessiner un carré » prétend une élève.
– une défiance vis-à-vis de la consigne : « si on ne peut pas mesurer, on ne sera pas très précis « conteste un élève, exprimant de cette façon qu'il considère la mesure comme une condition nécessaire à la précision.

Le premier problème rencontré par les enfants est de construire un carré sur une feuille blanche pour pouvoir démarrer la construction de la suite. Ce problème se résout progressivement par une discussion avec la classe qui débouche sur la démarche suivante :

1. tracer un segment
2. à l'équerre, tracer deux angles droits en utilisant les extrémités du segment comme sommets
3. avec le compas, reporter la longueur du segment sur chacune des perpendiculaires ainsi obtenues (au besoin, prolonger celles-ci)
4. relier les points d'intersection des perpendiculaires et des arcs de cercles pour terminer le carré

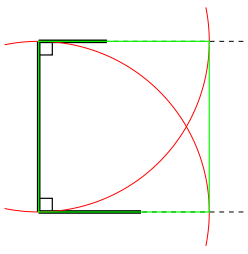


Fig. 8.27

Au moment de construire une suite de carrés, cette démarche n'est pas toujours res-

pectée. Certains enfants retournent à leurs « anciens » comportements de mesures et de constructions approximatives des carrés. Toutefois, on observe des constructions originales et efficaces. Ainsi, pour la suite de carrés emboîtés, certains élèves utilisent la procédure décrite à la page 235 (*Fig. 8.18*).

Dimension instrumentale

Travailler avec précision est une réelle difficulté pour beaucoup d'élèves, tant pour des raisons liées à l'outillage (compas défectueux, crayon mal taillé), que pour des raisons liées à son utilisation (manque d'habileté pour manipuler le compas, mauvais placement de l'équerre pour tracer une perpendiculaire). Ces difficultés expliquent en partie le non respect de la consigne et le recours à la mesure. Un élève a d'ailleurs eu un comportement amusant : il a mesuré les côtés d'un carré pour en trouver les milieux et il a ensuite ajouté des arcs de cercle sur son dessin (à main levée) pour faire croire qu'il avait utilisé le compas.

Dimension perceptive

Il semble bien qu'elle puisse évoluer avec la succession des activités. Ainsi, la suite sortante finit-elle par être choisie plus souvent que la suite des carrés emboîtés.

8.1.4 Fiches 7.5 à 7.7 : Narration

Remarque liminaire : La narration de recherche est bien souvent un texte explicatif dans lequel l'élève décrit et explique comment il a procédé pour réaliser la tâche proposée. Bien souvent, ce texte est écrit en respectant la chronologie de l'action.

La tâche qui est proposée aux élèves est cette fois plus complexe. En effet, en plus de décrire leur démarche de reproduction de la suite de carrés, les élèves doivent justifier leurs actions à l'aide des propriétés des formes géométriques ou des outils.

Pour les aider dans cette tâche, un texte ancré dans un autre contexte disciplinaire mais présentant les caractéristiques de celui que les élèves doivent réaliser peut être analysé avec eux. Cette analyse devrait mettre en évidence la structure temporelle et argumentative du récit.

La fiche 7.7 présente un texte de type explicatif, similaire à celui que les élèves doivent rédiger, ancré dans un contexte scientifique, écrit par des élèves de 1re et de 3e années primaires, avec l'aide de leur enseignant.

Situation initiale

L'enseignant distribue la fiche 7.4 aux élèves qui travaillent individuellement ou par groupes selon le dispositif adopté reproduire la suite de carrés aux instruments. Il invite les élèves à compléter leur écrit par des dessins.

La rédaction de cet écrit explicatif–argumentatif repose à la fois sur des connaissances mathématiques et sur des connaissances linguistiques. Tout comme pour l'usage de l'outil informatique, le travail mathématique sera d'autant facilité que les élèves maîtrisent la langue. À l'inverse, un déficit au niveau de l'acte d'écrire pourrait être à l'origine d'une

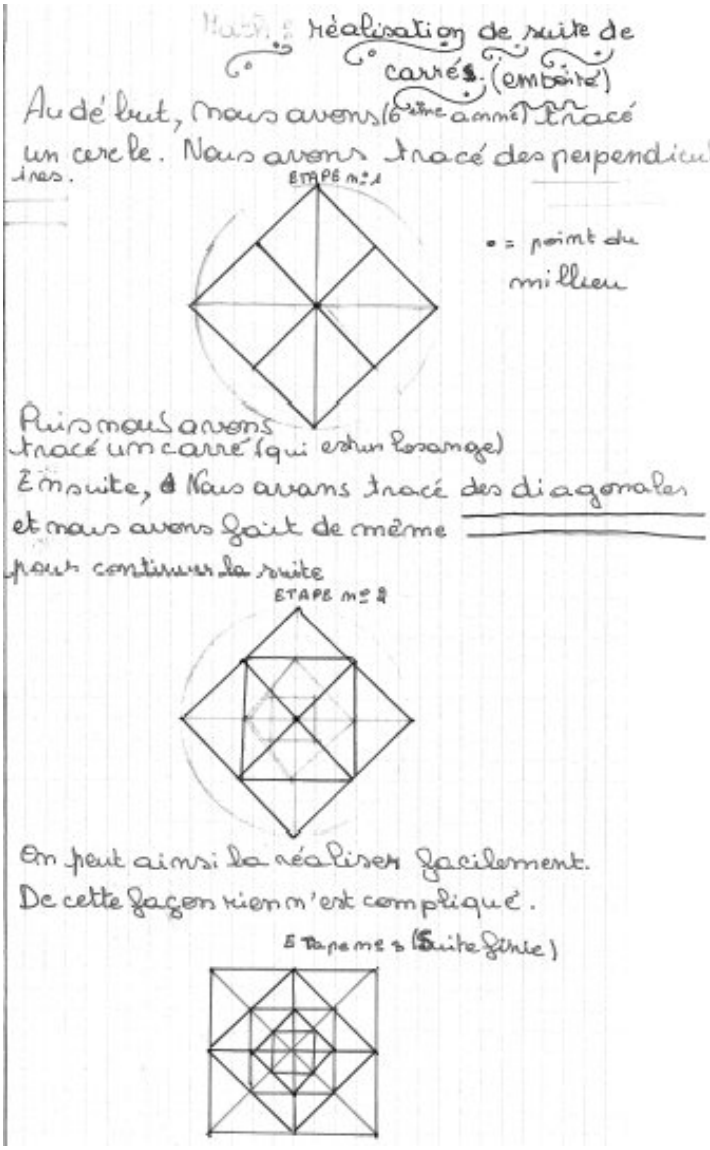
rédaction difficile. L'enseignant veille donc à apporter les informations nécessaires, soit de type mathématique, soit de type linguistique. Ceci peut également faire l'objet de deux ou de trois séances de rédaction, entrecoupées par des séances d'apprentissage et d'entraînement de notions linguistiques (syntaxe, orthographe, lexique, conjugaison,...).

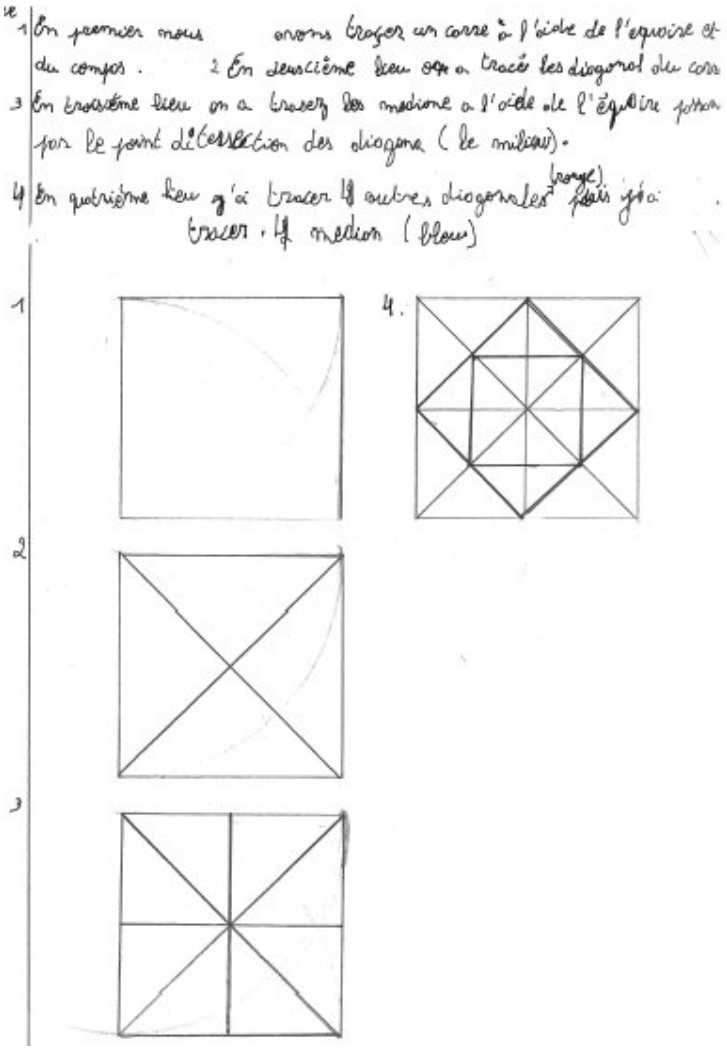
Échos des classes

Lors de la réalisation de cette activité dans les classes expérimentales, pour initier ce travail, nous avons présenté aux élèves la fiche 7.7.

Nous avons analysé le texte collectivement de manière à mettre en évidence les actions et les objets de celles-ci, les mots indiquant la succession des actions, leurs relations de cause à effet, les buts et les moyens utilisés.

Les élèves devaient ensuite réaliser leur narration en étant attentifs à ces aspects grammaticaux. Nous présentons ci-dessous deux exemples de première rédaction de ce type de texte (6e année primaire).





8.1.5 Fiches 7.10 et 7.12 : comparer des aires

Remarque liminaire : Dans cette activité, les élèves doivent comparer des aires de carrés en utilisant l'équidécomposition. En effet, pour comparer l'aire de deux carrés, ils doivent avoir recours à une unité d'aire non conventionnelle de forme triangulaire.

Il ne s'agit donc plus de *voir* les formes essentiellement comme des ensembles de lignes, ce qui était le cas lors des activités précédentes. Plus exactement, pour comparer les aires, les élèves devront à la fois voir les formes comme des ensembles de traits liés par des propriétés géométriques et comme des surfaces.

– La vision des formes comme des ensembles de traits, y compris les médianes et les diagonales, doit permettre de reconnaître des triangles à l'intérieur des les carrés.
– La vision des formes comme des surfaces permet de comparer et de déterminer le rapport de leurs aires.

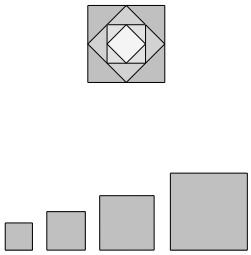
Situation initiale

Cette activité s'organise à partir d'*Apprenti Géomètre*. L'enseignant propose aux élèves de

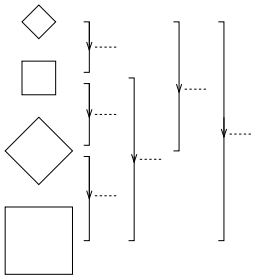
comparer les aires des différents carrés d'une même suite géométrique. Pour ce faire, il leur distribue les fiches 7.10 et 7.12.

Voici les quatre carrés qui ont servi à construire la suite de carrés ci-dessous. Compare les aires de ces carrés.

Compléte la fiche 7.12 au fur et à mesure de tes constats.



Complète ce qui suit en notant les rapports entre les aires des différents carrés de la fiche .



Analyse conceptuelle

La comparaison des aires de carrés s'appuie notamment sur les reproductions des suites réalisées précédemment par les élèves et sur les différents constats qui ont pu être émis lors des moments de mise en commun et de synthèse. Ainsi, des triangles « intérieurs » ont-ils pu être mis en évidence durant ces activités (*Fig. 8.11*). Ce sont principalement ces triangles qui sont utilisés comme unité de mesure pour comparer les carrés (*Fig. 8.28*).

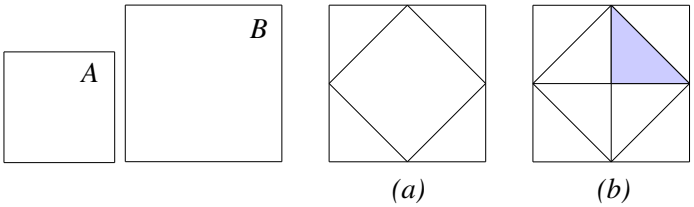


Fig. 8.28

Dans le cas de la figure 8.28, nous souhaitons comparer les aires des formes A et B. La superposition directe des deux carrés, même en faisant

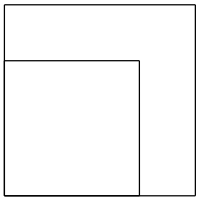


Fig. 8.29

correspondre deux sommets, ne permet qu'une comparaison qualitative, évidente dès le départ : le carré A et plus petit que le carré B (*Fig. 8.29*). Par contre, la superposition des deux carrés comme dans la suite de carrés emboîtés (*Fig. 8.28*(a)) permet de faire apparaître des triangles utilisés comme unité de mesure ou unité de comparaison. Nous pourrons dire ou écrire avec les élèves :

aire de $A = 4\times$ aire du triangle,
aire de $B = 8\times$ aire du triangle,
donc l'aire de A vaut la moitié de l'aire de B,
ou l'aire de B vaut le double de l'aire de A.

Notons de suite les interprétations possibles et inverses en termes de *moitié* — notée $\frac{1}{2}$ — et de *double* — notée 2. Ceci devrait être constaté également dans les productions des élèves (voir tableaux ci-dessous). À ces notations numériques on associe un signe de multiplication ou de division (*Fig. 8.30*).

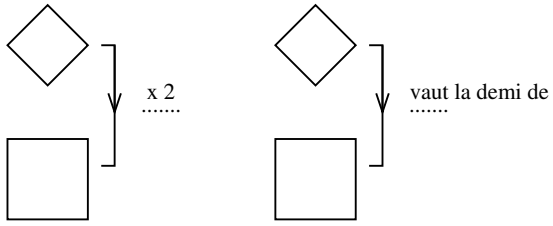


Fig. 8.30

Les élèves transcrivent leurs résultats au fur et à mesure de leurs comparaisons sur la fiche 7.12. Selon la signification que les élèves donnent aux flèches reliant les carrés, ils obtiennent l'un des tableaux suivants (*figures 8.31 ou 8.32*) :

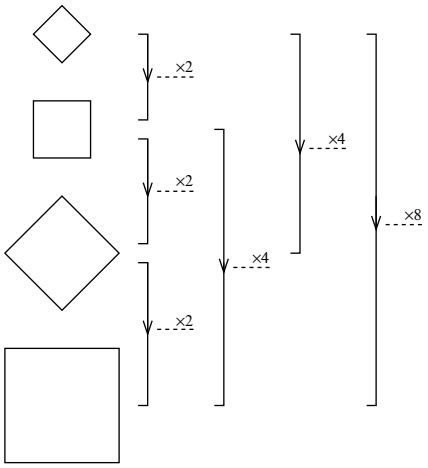


Fig. 8.31

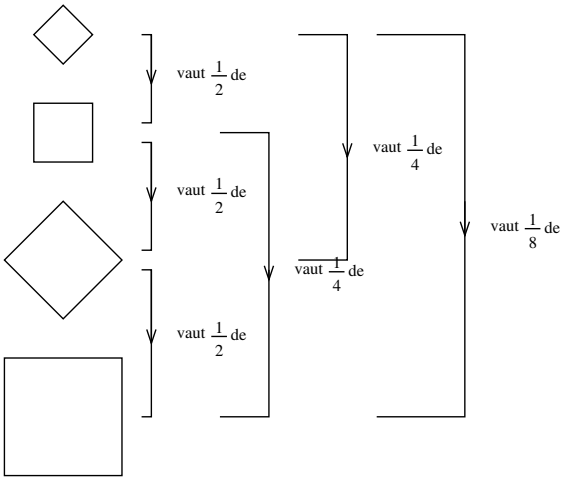


Fig. 8.32

Notons que certains élèves peuvent utiliser les deux notations dans le même graphe, interprétant et exprimant ainsi, inconsciemment sans doute, les rapports entre les carrés de deux manières différentes. La mise en commun devrait mettre en évidence, donc rendre conscient, cet usage des deux interprétations.

Une mise en commun des résultats permet à l'enseignant de conclure :

- en passant d'un carré à son voisin dans la suite, l'aire est multipliée (ou divisée) par deux selon le sens de parcours de la suite ;
- les comparaisons d'aire sont effectuées sans recours aux unités ;
- les carrés ont été décomposés en triangles à partir de leurs diagonales ;
- les nombres obtenus dans les deux tableaux 8.31 et 8.32 sont inverses ; ceci s'explique par le choix des opérateurs ($\times 2$ d'une part, *vaut* $\frac{1}{2}$ *de* d'autre part) ;
- le rapport entre les aires de deux carrés peut s'exprimer par deux nombres inverses l'un de l'autre.

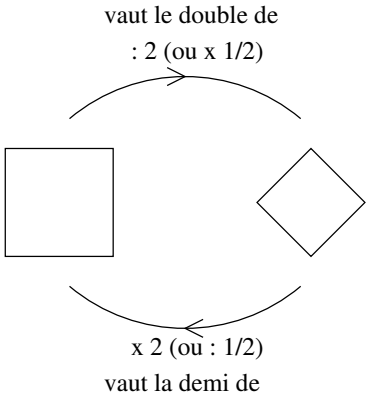


Fig. 8.33

Prolongements et liens

Cette activité de géométrie peut se poursuivre avec un travail sur les nombres naturels et rationnels à partir de la fiche 7.13.

Complète le tableau ci-dessous en y plaçant les rapports obtenus à la fiche 7.12.

↗	◇	□	◇	□
◇				
□				
◇				
□				

Ce tableau peut-être complété de deux manières différentes et ainsi faire l'objet d'une réflexion sur les nombres naturels et leurs inverses. Des réflexions concernant les opérations sur les fractions peuvent être également entamées à partir de ces tableaux.

×	◇	□	◇	□
◇	1	2	4	8
□	$\frac{1}{2}$	1	2	4
◇	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
□	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

:	◇	□	◇	□
◇	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
□	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
◇	4	2	1	$\frac{1}{8}$
□	8	4	2	1

Le lien entre les suites peut aussi être mis en évidence : la suite de carrés peut être représentée par la suite numérique (*Fig. 8.34*). Ce constat peut donner lieu à d'autres activités de transformation telles que celles des nombres carrés (*Fig. 8.35* (a)), des nombres cubiques (*Fig. 8.35* (b))...

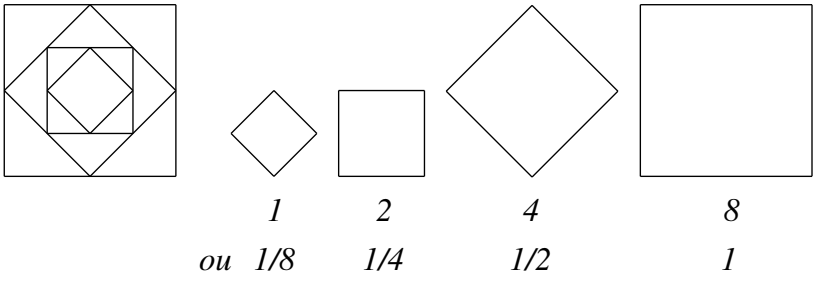


Fig. 8.34

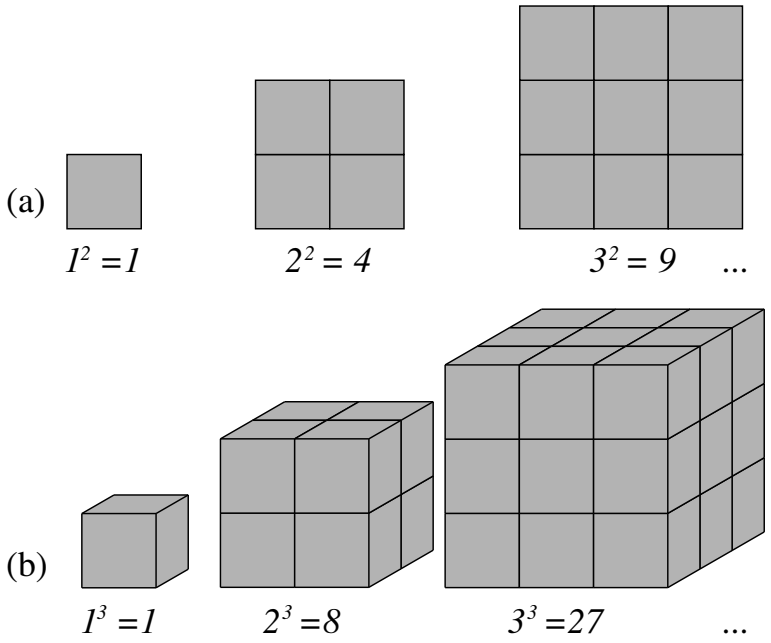


Fig. 8.35

Commentaires

Une des configurations géométriques rencontrées dans cette séquence d'activités est largement présente dans les cours de récréation. En effet, la suite de carrés emboîtés est incluse dans les pliages de « cocottes » en papier que les élèves construisent. La figure **??** montre le développement d'une cocotte dans laquelle on peut reconnaître d'une part la configuration de la suite de carrés emboîtés, d'autre part des triangles qui permettent de comparer les aires des carrés.

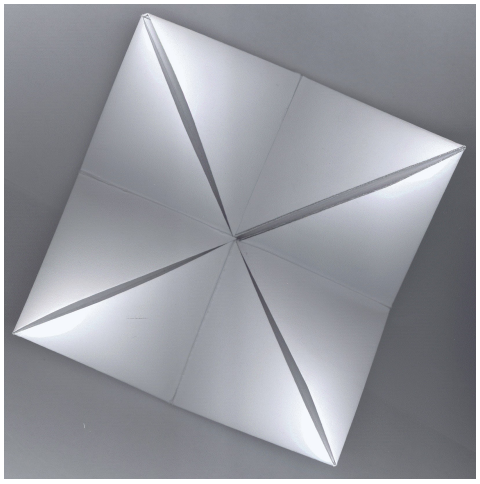


Fig. 8.36

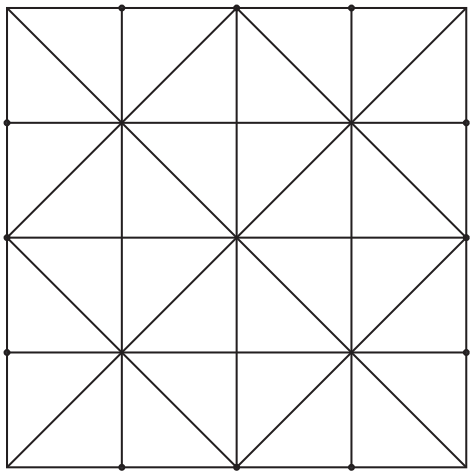


Fig. 8.37

8.1.6 Fiches 7.8 et 7.9 : technique de traçage

Dans chacune des classes, les élèves ont reçu deux fiches de synthèse. L'objectif était de fixer des techniques utiles pour

– déterminer le centre d'un carré
– déterminer le milieu d'un côté d'un carré (plus généralement, d'un segment)

Dans une des classes, les élèves ont reçu ces fiches avant la construction aux instruments des suites de carrés. Dans les autres classes, les fiches constituaient plutôt une synthèse apportant des réponses aux problèmes rencontrés lors de la construction des suites.

Trouver le centre du carré ne pose guère de difficultés. Il est à noter que les médianes sont plus souvent invoquées que les diagonales. Les animateurs attirent l'attention des élèves sur le fait que les diagonales d'un carré sont données d'emblée, alors que les médianes demandent d'abord de construire les milieux des côtés. Les élèves complètent ensuite leur fiche par des phrases comme

« Pour trouver le centre d'un carré, je trace ses diagonales. Leur intersection est le centre du carré. »

« Pour trouver le centre d'un carré, il suffit de tracer les diagonales ou les médianes. »

Lors du tracé des diagonales, les élèves prennent conscience du fait que le carré est ainsi découpé en quatre triangles rectangles isocèles. Il est encore mis en évidence que les diagonales sont des axes de symétrie du carré.

Trouver le milieu d'un côté pose davantage de problèmes. Le premier réflexe de beaucoup d'élèves est de mesurer la longueur du côté et de diviser en deux.

L'interdiction de mesurer étant rappelée, la technique qui apparaît en premier pour une majorité d'élèves n'utilise que l'équerre et est exprimée par la phrase suivante :

« Pour trouver le milieu d'un côté d'un carré, je trace une perpendiculaire à ce côté passant par le centre du carré ».

La seconde technique, utilisant le compas, est inconnue de beaucoup d'élèves et sa mise en oeuvre est laborieuse pour certains d'entre eux (par exemple parce qu'ils partent de deux sommets situés aux extrémités d'une diagonale, ou qu'ils se croient obligés de tracer des arcs de cercle dont le rayon est égal au côté du carré).

La fiche est complétée par la phrase suivante :

« Pour trouver le milieu d'un côté, on trace deux cercles de même rayon. On joint les deux points d'intersection ainsi obtenus ».

Certains élèves relèvent que les points d'intersection des deux cercles sont situés à égale distance des sommets choisis et observent aussi un triangle isocèle.

Lorsqu'un carré est « mis sur sa pointe » ou « de travers », certains enfants sont perturbés : dans leur esprit, les diagonales « deviennent » des médianes.

8.2 L'aire des rectangles et des parallélogrammes

Cette séquence d'activités a été reprise et retravaillée en 2006–2007 lors de l'expérimentation en cinquième primaire (*voir la section 7.3*). Aussi, nous renvoyons le lecteur à cette section pour les énoncés, les analyses et les commentaires y associés.

Quatrième partie

Activités pour le cycle 12/14 ans

Présentation

Au mois de mai 2006, une première expérimentation — très limitée — avec la version 1 d'*Apprenti Géomètre* a été réalisée dans l'enseignement secondaire. Nous remercions la direction, l'enseignante et les élèves d'une classe de première année de l'Institut Sainte-Marie de La Louvière, d'avoir accepté de se prêter à cette expérience.

Au travers de ce premier contact, nous voulions surtout observer comment des élèves de première année du secondaire abordent le logiciel et si des différences marquantes peuvent être observées par rapport au primaire.

Trois périodes de cours ([2]) ont été consacrées à la découverte du logiciel et à une première activité selon la répartition suivante :

1. présentation du logiciel et reproduction de dessins par les élèves,
2. dans le « kit libre », présentation du menu `Transformations` (`Translation, Symétrie miroir et Rotation`) et reproduction de dessins par les élèves,
3. activité d'assemblage de deux triangles isométriques pour obtenir des quadrilatères (avec *Apprenti Géomètre* et avec des triangles en papier).

Faisant suite aux activités réalisées en 2005–2006, nous avons organisé une expérimentation plus importante en 2006–2007, utilisant cette fois la version 2 d'*Apprenti Géomètre*, malgré des problèmes de mise au point non entièrement réglés à cette époque. Cette fois, huit classes de première secondaire ont été associées à l'expérimentation, certaines jouant un role de classe témoin, d'autres un rôle de classe expérimentale, suivant le schéma appliqué pour l'expérimentation dans des classes d'école primaire. Nous tenons à remercier les professeurs du Collège Saint-Marie à Rêves, de l'Institut Sainte-Marie à La Louvière, l'Institut Saint-Joseph à La Louvière, l'Athénée Royal Lucie Dejardin à Seraing, et de l'Athénée Royal d'Auderghem qui ont accepté de participer à cette aventure.

Les activités réalisées en 2006–2007 ont repris et considérablement amplifié celles de l'année 2005–2006. En conséquence, il ne nous a pas semblé utile de consacrer un chapitre particulier à ces dernières.

Les trois premières sections de ce chapitre constituent un exposé assez détaillé des objectifs visés par l'expérimentation en première secondaire et exposent les observations qui peuvent être faites quant aux *compétences* acquises par les élèves au moment de la transition primaire–secondaire. Les conditions de l'expérimentation sont ensuite décrites, ainsi

([2]) Une période de cours dure 50 minutes.

que les réactions des élèves. Les activités proprement dites sont présentées à partir de la quatrième section, selon le schéma déjà employé pour les activités réalisées en primaire. Les fiches didactiques auxquelles il est fait référence sont rassemblées dans le tome 8 de ce rapport.

Chapitre 9

Vers les formules d'aires en première année du secondaire

9.1 Objectifs généraux

9.1.1 Les formules d'aires

Les activités décrites ci-après ont pour but premier la construction des formules d'aires des polygones usuels et du disque.

Les élèves sortant du primaire ont certainement rencontré ces formules d'aires pour le parallélogramme (avec les cas particuliers du rectangle, du losange et du carré), le triangle et le trapèze. Néanmoins, lorsqu'on interroge les enfants, les formules sont parfois restituées un peu au hasard (celle du triangle en lieu et place de celle du trapèze par exemple) voire même confondues avec celles qui donnent un périmètre.

Un travail de réactualisation et de reconstruction des formules, dépassant la seule mémorisation, est donc certainement utile.

Ajoutons toutefois que la confusion entre aire et périmètre, couramment observée du point de vue des formules, n'existe pas nécessairement du point de vue des concepts (celui de périmètre est généralement bien perçu — le contour d'une forme géométrique — et bien différencié du concept d'aire).

Les activités présentées ici ne font pas double emploi avec celles qui visent à établir les formules d'aires dans l'enseignement primaire. En effet, elles « revisitent » l'élaboration de ces formules, dans le cadre d'un enseignement en spirale, par l'apport de nouvelles images géométriques, notamment par l'utilisation des *bandes*.

Améliorer la capacité des élèves à « voir » en géométrie reste ainsi une de nos principales préoccupations.

Au primaire, les activités s'attachent surtout à faire appréhender le concept d'aire via des activités de comparaison par superposition, découpage et recomposition. La mesure intervient lors du report d'une même aire à l'intérieur d'une autre.

Au secondaire, on prolongera les activités du primaire pour aboutir à la mesure d'une aire à l'aide d'une unité d'aire conventionnelle.

Enfin, bien que notre but soit la construction des formules d'aires, les activités viseront aussi à enrichir le bagage géométrique des élèves afin de se rapprocher d'objectifs prioritaires au premier degré du secondaire, à savoir :

– la mise en place des *conditions déterminantes* des figures ;
– l'élaboration d'outils pour *justifier, argumenter, démontrer*.

9.1.2 L'aire comme outil de visualisation et de preuve

Dans la perspective d'une géométrie déductive, la notion d'aire peut être un outil de démonstration très utile. À cet égard, aborder la notion d'aire indépendamment de son calcul permet peut-être plus aisément d'en faire un outil de visualisation et de preuve.

Les exemples suivants sont classiques :

- *Le théorème de Pythagore* : un découpage adéquat du carré de gauche permet de montrer que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux autres carrés ([1]).

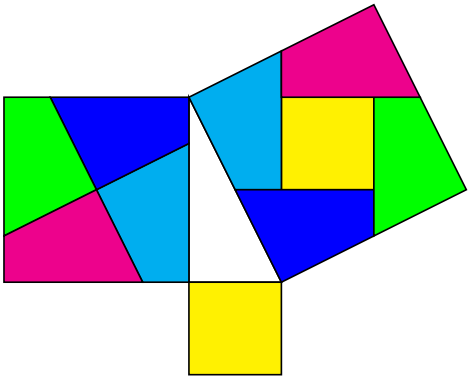


Fig. 9.1

- *Le théorème de Thalès* (Voir par exemple [32]) : une preuve exploitant
  – le fait que si deux triangles sont de même hauteur, les aires sont dans le même rapport que les bases ;
  – l'égalité des aires de triangles de même base et de même hauteur.

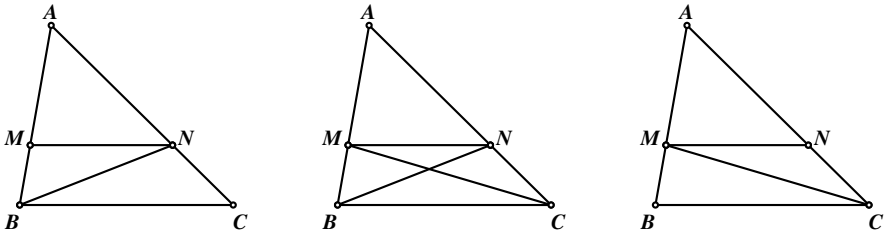


Fig. 9.2

([1]) Il s'agit là d'un exemple, parmi beaucoup d'autres, de preuve « par puzzles » du théorème de Pythagore.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{Aire(AMN)}{Aire(MBN)} = \frac{Aire(AMN)}{Aire(MCN)} = \frac{AN}{NC}$$

- *Égalité des aires de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur* (Voir par exemple [8] : une preuve inspirée d'EUCLIDE, déjà mentionnée au chapitre 5 (*page 113*) et qui sera détaillée plus loin dans ce document (*page 287*).

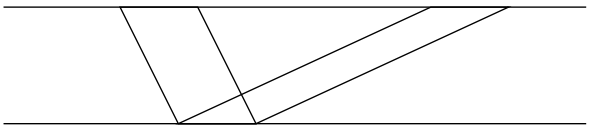


Fig. 9.3

- *Visualisation* : trouver des triangles de même aire dans cette figure

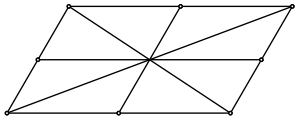


Fig. 9.4

Les raisonnements basés sur les aires, sans recours au numérique, relèvent d'une méthode que développe EUCLIDE tout au long du Livre I de ses *Éléments*. Elle est trop souvent négligée dans l'enseignement actuel et mériterait sans doute d'être remise à l'honneur ainsi que le préconisent certains auteurs comme FRIEDELMEYER, [36].

> *(...) le thème des aires est un outil performant et irremplaçable tant dans l'apprentissage de la démonstration géométrique, que pour une compréhension claire de ce qui dans un problème relève du géométrique, et de ce qui relève du numérique* ([2])

Les activités proposées dans ce document tentent de revaloriser le recours à l'aire comme outil de preuve et de liaison entre le géométrique et le numérique.

9.2 La transition primaire - secondaire

9.2.1 Les socles de compétences comme guide

Pour élaborer les activités et pour les inscrire dans un passage aussi harmonieux que possible du primaire au secondaire, nous nous sommes informés sur les capacités des élèves à l'issue de l'enseignement fondamental, particulièrement en géométrie.

([2]) L'auteur poursuit en dénonçant deux conséquences négatives de la tendance « tout au calcul » : 1) un éventail restreint de configurations géométriques pour les élèves, tant que le champ des nombres disponibles et l'outil algébrique ne sont pas suffisamment développés. (...) 2) un apprentissage retardé de l'étude des configurations, qui fait que beaucoup d'élèves perdent l'habitude acquise en primaire d'observer les figures géométriques, et sont incapables, quelques années plus tard de faire une démonstration géométrique, ou de résoudre un problème de géométrie.

Il nous a notamment été utile de nous imprégner des contenus et de l'esprit des *socles de compétences*.

Citons un passage révélateur de cet esprit à propos de l'enseignement des mathématiques en général.

> *La formation mathématique s'élabore au départ d'objets, de situations vécues et observées dans le réel, de questions à propos de faits mathématiques. Le cours de mathématiques ne se limite pas à transmettre des connaissances. De l'école fondamentale à la fin du premier degré du secondaire, solliciter l'imagination, susciter la réflexion et développer l'esprit critique à propos de ces observations, conduisent l'élève à comprendre et à agir sur son environnement.*

Ensuite, un second passage relatif à la formation géométrique en particulier.

> *Des manipulations et l'observation d'objets, de dessins, contribuent à caractériser des transformations du plan. Agrandir, réduire des figures associent un phénomène géométrique à la notion de proportionnalité. Des activités concrètes comme par exemple assembler des tiges articulées, croiser des bandes de papier, construire des figures et les classer, ouvrent à la découverte des propriétés des quadrilatères et des triangles. Plus tard on compare ces propriétés, on les relie à celles des transformations. On en arrive ainsi à enchaîner des énoncés et on apprend progressivement à démontrer.*

Concernant les attentes qu'un professeur de première secondaire peut avoir vis-à-vis des enfants qu'il accueille en début d'année scolaire, il nous a semblé utile de relever les sujets de géométrie plane figurant dans les programmes, liés à notre recherche, et devant déjà être certifiés à l'école primaire ([3]).

Compétences à certifier à la fin de la deuxième étape de la scolarité obligatoire

– **Reconnaître, comparer, construire, exprimer**
  - Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer (sur base de la perception et de la comparaison avec un modèle, sur base de propriétés de côtés, d'angles pour les figures).
  - Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié.
  - Tracer des figures simples (sur du papier tramé ; en lien avec les propriétés des figures et au moyen de la règle graduée, de l'équerre et du compas).
– **Dégager des régularités, des propriétés, argumenter**
  - Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.

([3]) C'est-à-dire à la fin de la deuxième étape de l'enseignement obligatoire. Rappelons que la première étape de la scolarité obligatoire coïncide avec la fin de la deuxième année primaire, la deuxième avec la fin de la sixième année primaire et la troisième avec la fin de la deuxième année secondaire. Notre propos concerne les deuxième et troisième étapes.

- Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités (reconnaître la présence d'un axe de symétrie).
- Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures (en s'appuyant sur des quadrillages).
- Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie (pour décrire, comparer, tracer).

– **Comparer, mesurer**

- Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet.
- Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat (longueurs, capacités, masses, aires, volumes, durées, coût).
- Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels.
- Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.

– **Opérer, fractionner**

- Fractionner des objets en vue de les comparer (en deux et en quatre à l'issue de la première étape, et en général à l'issue de la deuxième étape).

Compétences à amorcer à l'école primaire

- Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.
- Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.
- Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est un (par exemple, prendre le tiers du quart d'un objet).
- Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

9.2.2 La situation à l'issue du primaire

Les ambitions affichées dans les socles de compétences, aussi louables qu'elles soient, doivent cependant être envisagées avec prudence. Ce que nous avons observé dans les classes témoigne de l'écart existant entre ces objectifs « idéaux » et la réalité du terrain. Il ne s'agit pas de remettre ces objectifs en cause mais bien de les considérer comme des guides qui orienteront encore largement le travail du début du secondaire.
En résumé, un enseignant de première secondaire ne peut considérer que les compétences qui doivent être certifiées en sixième primaire soient acquises par la majorité de ses élèves. Un important travail d'entretien voire d'élaboration doit encore être réalisé.

Pour illustrer et étayer notre propos, voici quelques observations concernant les compétences évoquées ci-dessus.

– La reconnaissance des formes géométriques ne pose guère de difficultés. Elle repose essentiellement sur la perception et la comparaison avec l'image que les élèves se font d'une figure donnée.

Ainsi, lorsque deux bandes ([4]) se coupent (figure ci-dessous), la question « Pourquoi la forme observée est-elle un parallélogramme ? » leur semble incongrue (« On le voit bien ! »).

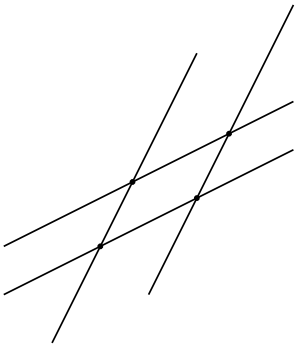


Fig. 9.5

Bien qu'ils soient capables de citer bon nombre de propriétés des formes, il est prématuré de demander aux enfants de les évoquer pour justifier leurs réponses.
Il est normal que les élèves se situent au stade de la reconnaissance visuelle des formes à l'issue du primaire. Pour qu'ils puissent passer au stade suivant, celui de la justification, il faudra les y préparer.

– Du point de vue du classement des figures, des énoncés tels que « un carré est un rectangle » ou « un rectangle est un parallélogramme » ne sont généralement pas bien assimilés par les élèves. Un important travail logique basé sur les propriétés reste à faire au premier degré du secondaire et même au-delà.
Voici une petite anecdote témoignant de cette difficulté. En fin de première secondaire, deux élèves travaillent sur le même ordinateur avec *Apprenti Géomètre*. L'un d'eux crée un losange à l'écran, après avoir sélectionné cette forme dans les `Formes libres`. Il le construit de façon telle que deux côtés du losange se retrouvent en position horizontale (figure ci-dessous). Son collègue s'exclame « C'est un parallélogramme, pas un losange ! ».

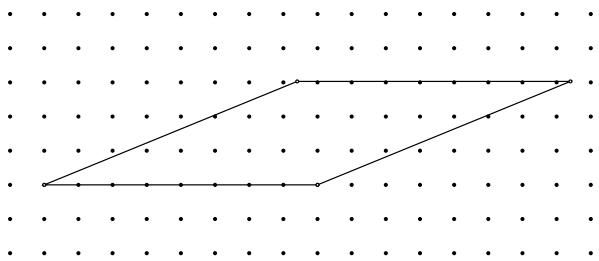


Fig. 9.6

– De la même façon, la construction de figures simples se fait le plus souvent en référence à une image et à des propriétés relatives aux mesures. La construction d'un carré sur une feuille vierge par exemple se fera fréquemment au moyen de la seule règle graduée, l'élève se basant exclusivement sur la propriété d'égalité des longueurs des côtés et non sur la perpendicularité. Les côtés sont tracés approximativement, en respectant tant bien que mal l'égalité des longueurs, sans l'aide de l'équerre.

([4]) Une bande étant définie comme un paire de droites parallèles. La `Bande` est proposée dans les `Formes libres` du logiciel.

Le compas a généralement encore moins de succès, peu d'élèves le manipulant avec aisance.

– Les propriétés des côtés et des angles des figures sont globalement bien connues des élèves mais leur utilité pour les constructions est rarement bien perçue. C'est pourquoi elles y sont peu réinvesties.

– La reconnaissance des axes de symétrie d'une figure se limite souvent aux axes verticaux.

– Reconnaître et construire des agrandissements (réductions) de figures sur un quadrillage est une compétence assez bien maîtrisée. Dans quelques cas, nous avons pu observer que la similitude faisait défaut. Ainsi, un élève qui avait créé un parallélogramme avec *Apprenti Géomètre* et qui souhaitait le reproduire à l'échelle 2 :1, s'est référé à la base et à la hauteur en oubliant les angles. Il a ainsi obtenu la figure ci-dessous.

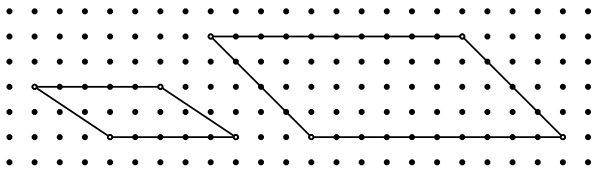


Fig. 9.7

– En début de première, les élèves ne sont pas encore capables de *définir* et c'est normal. Ainsi, lorsqu'on leur demande de définir une forme, il est courant qu'ils se contentent de citer des caractéristiques de celle-ci.
Voici trois exemples :
  – si l'on demande de définir un carré, certains répondront « une forme qui a quatre angles droits » sans réaliser qu'il ne s'agit pas d'une condition suffisante ([5]) mais seulement d'une propriété ;
  – si l'on demande ce qu'est un parallélogramme, une réponse fréquente est « un quadrilatère avec des côtés parallèles deux à deux » (ce qui est suffisant) à laquelle certains ajoutent aussitôt « et des côtés deux à deux de même longueur » sans réaliser que la première propriété implique la seconde ;
  – si l'on demande ce qu'est un losange, une réponse erronée courante est « un quadrilatère avec deux angles aigus et deux angles obtus », excluant ainsi le carré.

  En définitive, il est de peu d'intérêt de demander à de jeunes enfants de définir : il s'agit d'un activité descriptive trop complexe à leur niveau. Il vaut mieux mettre au point avec eux des formulations « fonctionnelles » utilisables pour leurs activités de justification ([6]).
  Toutefois, il faudra veiller à préciser certains termes usuels propres à la géométrie. Des mots comme *intersection, perpendiculaire, circonférence, périmètre, aire ...* ne sont pas

([5]) La notion de *condition suffisante* est à installer avec beaucoup de précaution. Pour des enfants de douze ans, on se contentera de signaler que la propriété « quatre angles droits » ne permet pas d'être sûr que l'on parle d'un carré : il peut s'agir d'un rectangle.
([6]) Ainsi, on préférera « Si le quadrilatère a deux paires de côtés parallèles, alors c'est un parallélogramme » à « Un parallélogramme est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles ».

utilisés spontanément, voire mal compris ou méconnus. Ce problème est certainement à resituer dans le cadre plus large des difficultés de maîtrise de la langue française. Les difficultés à lire des consignes et à les respecter font également partie de cette problématique.

– En ce qui concerne les compétences relevant de *Comparer, mesurer*, les démarches utilisant le mesurage sont clairement celle qui sont les mieux maîtrisées. L'importance qui leur est accordée se fait toutefois au détriment de la conceptualisation, notamment en ce qui concerne l'aire. Peu d'élèves semblent avoir assimilé que l'aire peut être évaluée par le recouvrement d'une figure à l'aide d'une unité d'aire conventionnelle.
Le recours quasi systématique aux mesures de longueurs pour calculer l'aire explique d'ailleurs en partie la confusion qui peut exister dans l'esprit de certains enfants entre aire et périmètre.

– Les démarches d'estimation (évaluation approximative) semblent peu présentes.

– Les calculs de périmètres, d'aires et de volumes sont essentiellement vus comme des applications de formules avec tous les dangers de confusion que cela comporte (« aire du rectangle égale à deux fois la largeur plus deux fois la longueur » ou autres réponses du même genre).
Ces formules n'ont généralement pas été construites mais apprises, les rendant ainsi plus volatiles dans la mémoire de certains enfants puisqu'ils seront incapables de mettre en œuvre une démarche pour les retrouver. C'est ainsi que beaucoup d'élèves se retrouvent démunis lorsqu'ils doivent calculer l'aire d'une forme plus complexe que les formes de bases usuelles, faute de savoir élaborer une stratégie de calcul via une décomposition de la surface en formes familières.

L'énumération de difficultés qui précède ne vise aucunement à dresser un sombre tableau des compétences des enfants à l'issue du primaire. Ce serait d'ailleurs manquer injustement de respect vis-à-vis de l'excellent travail mené par la grande majorité des instituteurs. Notre intention est plutôt de souligner que la plupart des compétences qui doivent être certifiées en fin de primaire sont toujours des compétences en devenir.

La transition primaire-secondaire étant délicate, une des tâches des enseignants du début du secondaire est de créer les conditions pour qu'elle se déroule sans trop de heurts. Ils doivent faire preuve de prudence dans leurs exigences vis-à-vis de leurs élèves en évitant de « mettre la barre trop haut » et en ayant un regard lucide sur leurs compétences.

Leur rôle consiste aussi à assurer le difficile passage d'une géométrie faite essentiellement d'observations et de collectes de propriétés vers une géométrie où l'argumentation et la justification prennent une place de plus en plus importante.

En effet, dans la majorité des cas, les activités géométriques menées à l'école primaire débouchent sur des « portraits » de figures, des synthèses descriptives rassemblant des faits et des propriétés. Ces synthèses résultent généralement d'observations, de mesures et de vérifications mais plus rarement de déductions. Quelques instituteurs amènent toutefois leurs élèves à exprimer certains résultats en termes d'implications et à ébaucher des

synthèses fonctionnelles : « si j'effectue telle action, j'obtiens tel résultat ».

Les élèves atteignant ce stade à l'issue du primaire ne constituent cependant qu'une petite minorité. Il faut plutôt s'attendre à ce qu'un enfant qui entre en première secondaire se contente d'attacher un ensemble de faits aux formes géométriques, sans nécessairement distinguer définition et propriété. En principe, il ignore ce qu'est une condition déterminante d'une figure.

Les tableaux suivants présentent, pour les triangles d'abord, pour les quadrilatères ensuite, des portraits qui devraient être familiers pour des enfants de douze ans.

Triangle isocèle	Deux côtés de même longueur
Triangle équilatéral	Trois côtés de même longueur
Triangle rectangle	Un angle droit et deux angles aigus

Parallélogramme	Deux paires de côtés parallèles Deux paires de côtés de même longueur
Rectangle	Quatre angles droits Deux paires de côtés parallèles Deux paires de côtés de même longueur
Losange	Quatre côtés de même longueur
Carré	Quatre angles droits Quatre côtés de même longueur
Trapèze	Au moins une paire de côtés parallèles

Remarquons que, selon la définition du tableau, un parallélogramme est un trapèze. Chaque fois que nous évoquerons un « trapèze non parallélogramme », nous parlerons simplement de « trapèze quelconque ».

Dans certains cas, les portraits peuvent être plus étoffés et comporter des propriétés relatives aux diagonales, aux médianes, aux axes de symétrie et aux angles :

- pour le triangle isocèle : deux angles de même amplitude, un axe de symétrie, ...
- pour le triangle équilatéral : trois angles de même amplitude, trois axes de symétrie, ...
- pour le parallélogramme : diagonales se coupant en leur milieu, deux angles aigus et deux angles obtus s'il n'est pas rectangle, médianes se coupant en leur milieu, ...
- pour le rectangle : diagonales de même longueur, deux axes de symétrie (les médianes), ...
- pour le losange : diagonales perpendiculaires, deux axes de symétrie (les diagonales), ...
- pour le carré : diagonales perpendiculaires et de même longueur, quatre axes de symétrie (les diagonales et les médianes), ...

9.2.3 Quel est le rôle du premier degré du secondaire ?

Rappelons d'abord les compétences de géométrie plane à certifier au premier degré du secondaire.

- Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer (sur base des éléments de symétrie pour les figures et sur base de leurs éléments caractéristiques pour les solides)
- Tracer des figures simples (en lien avec les propriétés des figures et des instruments y compris le rapporteur)
- Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.
- Reconnaître et caractériser une translation, une symétrie axiale et une rotation, relever la présence de régularités (dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins)
- Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations
- Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures (en s'appuyant sur les propriétés de proportionnalité et de parallélisme)
- Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables
- Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie (pour énoncer et argumenter)
- Mesurer des angles

Notons encore les deux compétences suivantes, concernant directement notre recherche, et signalées comme « à entretenir », car elles doivent déjà être certifiées en fin de sixième primaire.

- Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat (longueurs, capacités, masses, aires, volumes, durées, coût).
- Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.

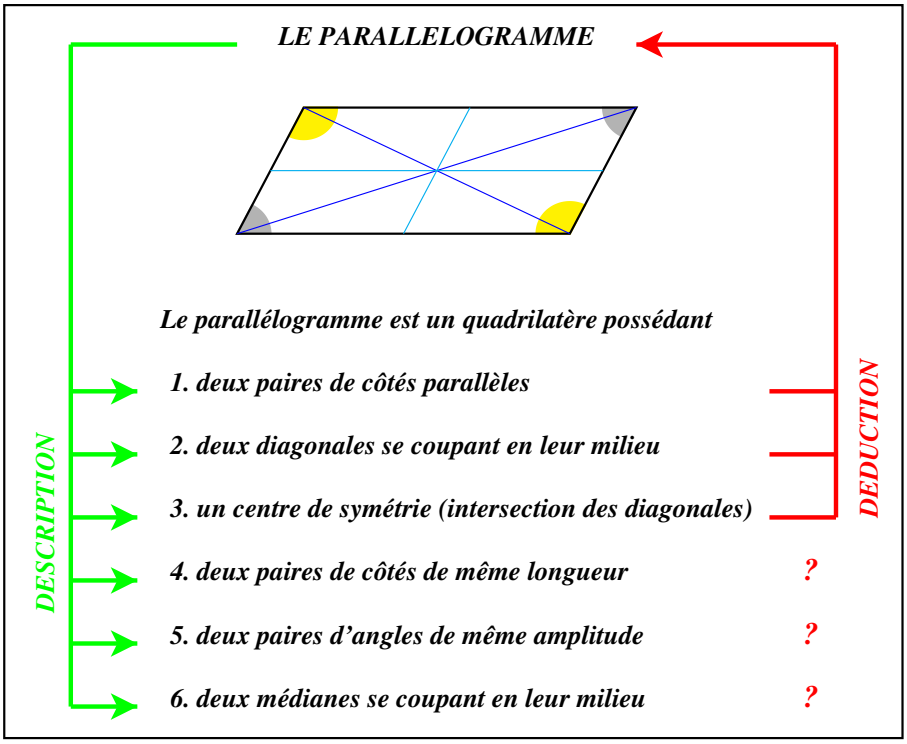
En première année du secondaire, il s'agit d'abord de donner un bagage commun à des élèves provenant d'horizons différents. En tout premier lieu, le bagage minimal fourni par l'école primaire doit être réactivé. À cette fin, les activités qui seront mises en oeuvre permettront de reprendre les « portraits » ou « synthèses descriptives » et de les étoffer au fil du temps. Par exemple, le portrait du parallélogramme pourra être enrichi de l'existence d'un centre de symétrie (l'intersection des diagonales) et de deux paires d'angles de même amplitude.

Une fois les portraits réactualisés, les propriétés qui s'y trouvent doivent être rendues opérationnelles pour aboutir à une « synthèse fonctionnelle ». Cet objectif peut être atteint grâce à diverses activités, le plus souvent de construction. Il s'agit à travers elles de mettre en place des outils permettant d'argumenter, de justifier et de distinguer les propriétés déterminantes d'une figure. L'enjeu est la construction d'une géométrie davantage structurée et argumentée.

Avant l'élaboration de tels outils d'argumentation, il n'est guère possible de demander aux élèves de justifier ce qu'ils avancent. Un travail patient est nécessaire pour les amener à

distinguer une déduction du simple énoncé d'une propriété ou caractéristique d'une figure, à utiliser des formulations telles que « je sais que ... je déduis que ... », « si ... alors ... ».

De façon schématique, on peut imaginer une fiche correspondant au portrait d'une figure, par exemple le parallélogramme, que l'on parcourrait de haut en bas au primaire et au tout début du secondaire (description) et de bas en haut lorsque l'élève apprend à argumenter (déduction).



Certaines propriétés permettent de déduire que la forme est un parallélogramme (propriétés déterminantes), alors que d'autres ne sont pas suffisantes car elles peuvent être partagées avec d'autres figures.

Les conditions déterminantes seront utilement reprises dans une « fiche fonctionnelle » avec des formulations du genre : « **je sais que** les diagonales de ce quadrilatère se coupent en leur milieu, **j'en déduis que** c'est un parallélogramme ».

Une synthèse fonctionnelle peut se présenter comme suit :

Si je sais qu'un quadrilatère ...	Je déduis que ce quadrilatère ...
a deux paires de côtés parallèles	est un parallélogramme
a ses diagonales qui ont le même milieu	est un parallélogramme
a deux côtés parallèles de même longueur et est convexe	est un parallélogramme
a ses côtés opposés de même longueur et est convexe	est un parallélogramme
a un centre de symétrie (est invariant par une rotation de 180°) et est convexe	est un parallélogramme

L'insuffisance des autres propriétés peut éventuellement être souligné : « **je sais que** ce quadrilatère a deux paires de côtés de même longueur, **je ne peux pas en déduire que** c'est un parallélogramme (**il est possible** que ce soit un parallélogramme, mais ce peut aussi être un cerf-volant) ».

Quoi qu'il en soit, lors de la rédaction de ces synthèses, on préférera des formulations « actives » telles que « j'ai fait ... j'ai obtenu ... » ou « je sais que ... je peux déduire que ... ». Pour une géométrie déductive, elles sont en effet préférables aux formulations passives telles que « ... si et seulement si ... » ou « un ... est un ... dont ... ».

Voici ce qui pourrait constituer un fil conducteur pour la construction du cours de géométrie du premier degré. Une consigne générale guidant ce travail serait : faire manipuler les élèves, les faire construire et ne pas leur imposer une conceptualisation trop précoce.

1. Se baser sur les acquis suivants :
   - les formes de base et leurs propriétés (carré, rectangle, parallélogramme et losange) ;
   - lorsque deux formes sont superposables, tous les éléments correspondants ont même mesure ;
   - lorqu'on découpe un parallélogramme suivant une de ses diagonales, on obtient deux triangles superposables.
2. Si l'on constate des lacunes au point précédent, mettre en place des activités pout y remédier.
3. Proposer des activités pour fixer le vocabulaire de base : *tourner, retourner, glisser.*
4. L'activité d'assemblage de triangles isométriques permet la mise en place de *figures clés* : triangle isocèle, parallélogramme, cerf-volant, ...
5. Des problèmes de construction sont proposés pour établir les conditions déterminantes de ces figures.
6. Les conditions déterminantes deviennent des outils pour justifier d'autres propriétés et constructions.
7. Les activités sur les pavages permettent d'amener les notions de *plan* et de *transformations du plan.*

Ce plan s'inspire de celui qui est proposé dans la brochure du CREM intitulée *Formes et Mouvements*, [55], ainsi que des activités qui y sont décrites.

9.2.4 Intégration de la présente recherche dans les objectifs du premier degré du secondaire

Notre méthode de travail

Les activités que nous proposons aux élèves font l'objet d'une analyse a priori réalisée avant le travail en classe. Notre souci est en effet d'anticiper au mieux les difficultés, tant

instrumentales que conceptuelles, que les jeunes pourraient rencontrer. Nous avons distingué, lorsque c'était nécessaire, les classes expérimentales (utilisant *Apprenti Géomètre*) des classes témoins (n'utilisant pas *Apprenti Géomètre*).

Les comportements des élèves que nous avons observés étaient semblables dans les différentes classes. Nous n'avons donc pas jugé utile, dans les *Echos des classes*, de distinguer une école d'une autre.

Pour plusieurs activités, nous proposons, dans la rubrique *Prolongements et liens*, des idées pour rencontrer plus amplement les objectifs du cours de géométrie du premier degré.

Dans les classes expérimentales

Les activités qui ont été testées sont celles qui correspondent aux fiches 1.1 (« Je découvre *Apprenti Géomètre* ») à 9.3 (« Agrandir - réduire (synthèse) »). Les autres fiches décrivent des activités qui n'ont pas été testées, constituant des prolongements possibles ou relevant d'approches différentes.

Nous avons régulièrement donné aux élèves la possibilité de travailler avec des formes en carton en plus du logiciel. La simultanéité des activités de découpage et d'assemblage de formes en carton évite que la machine ne devienne le principal centre d'intérêt, en proposant deux pistes différentes pour aboutir au résultat souhaité. Le travail « papier - crayon » détourne l'attention de l'écran qui perd alors un peu de son pouvoir hypnotique.

Les premières activités sont destinées à rappeler les propriétés des quadrilatères, à introduire la notion de *bande*, de *familles de parallélogrammes*, à faciliter la visualisation des *bases* et des *hauteurs* en liaison avec les bandes et... à assurer la genèse instrumentale. On n'entre vraiment dans les constructions des formules d'aires qu'à partir de la fiche 3.1 (« Observer une figure »).

Nous avons consacré une période de cours à la présentation d'*Apprenti Géomètre* et dix périodes aux activités proprement dites.

Généralement, une partie de la leçon se déroule dans le laboratoire informatique et l'autre partie dans la salle de projection.

Lorsque le cours débute dans cette salle, l'animateur demande aux élèves de rappeler l'essentiel de l'activité précédente et il comble les lacunes éventuelles. Il présente ensuite la nouvelle activité et précise les consignes de travail. Cette phase dure plus ou moins longtemps selon la complexité instrumentale ou conceptuelle de la tâche proposée.

Les élèves reçoivent les fiches de travail et le matériel nécessaire (par exemple, des formes géométriques en carton, des ciseaux, de la colle, ...) et se rendent dans la salle informatique pour y commencer leur travail, le plus souvent à deux par machine, entourés de la titulaire de la classe, de l'observateur et de l'animateur.

Dans certains cas, l'animateur laisse la recherche se poursuivre jusqu'à la fin de la période de cours (cinquante minutes) en prévoyant de réaliser une synthèse au début de la séance suivante.

Dans d'autres cas, la leçon débute directement dans la salle des ordinateurs et l'activité

se termine environ vingt minutes avant la fin de la période pour permettre une mise en commun dans la salle de projection.

Tout au long des activités que nous avons proposées aux élèves, nous avons voulu qu'ils soient confrontés tant à la démarche de duplication que de découpage. Le temps qui nous était imparti ne nous permettait toutefois pas de mettre ces deux démarches en œuvre pour chaque forme. Aussi avons-nous choisi d'utiliser la duplication pour le triangle et pour le trapèze et le découpage pour le losange, le cerf-volant et les polygones réguliers.

Après chaque activité, les observations des adultes étaient rassemblées. Les plus intéressantes d'entre elles, décrivant les comportements d'élèves, leurs difficultés et leurs idées originales, débouchaient sur la rédaction de la rubrique *Echos des classes*.

Dans les classes témoins

Les activités qui ont été testées sont celles qui correspondent aux fiches 11.1 (« Deux bandes qui se coupent ») à « Agrandir - réduire (synthèse) ». Elles sont très proches des activités proposées aux classes expérimentales et visent les mêmes objectifs cognitifs. Une dizaine de périodes de cours leurs ont été consacrées.

Dans chaque classe, les leçons se sont déroulées sous la direction de la titulaire sans observateur extérieur. Par la suite, les enseignantes nous informaient des réactions de leurs élèves. Les informations étaient toutefois plus lacunaires car une seule personne devait assurer simultanément le travail d'animation, d'enseignement et d'observation.
C'est pourquoi les *Echos des classes* témoins sont plus maigres que pour les autres.

Les conditions de travail

Pour les classes expérimentales, les conditions de travail sont agréables, chaque école disposant d'un centre cybermédia.
On y trouve notamment :

- une salle de projection avec un grand écran, un seul ordinateur relié à un projecteur et des tables et chaises en nombre suffisant pour y installer toute une classe ;
- des salles équipées de neuf ou dix-huit ordinateurs en réseau.

Nous avons observé trois variantes dans l'aménagement du centre :

- la salle de projection contigue à deux salles équipées de neuf ordinateurs chacune ; dans cette situation, un groupe de plus de dix-huit élèves doit être réparti dans les deux salles de travail ;
- la salle de projection distante d'environ vingt mètres d'une grande salle équipée de dix-huit machines ; le petit inconvénient du déplacement d'une salle à une autre est compensé par l'avantage de pouvoir installer tous les élèves dans le même local.
- une salle équipée simultanément de dix-huit ordinateurs, d'un projecteur, d'un grand écran et du mobilier permettant de rassembler les élèves devant l'écran ; il s'agit là de la situation la plus favorable puisque les présentations et les synthèses peuvent être réalisées dans le laboratoire lui-même.

Les classes témoins travaillent dans leur environnement habituel avec le matériel que nous leur fournissons : essentiellement des formes géométriques en carton et des bandes de plastique transparent.

Les réactions des élèves

L'attitude des élèves face au travail avec l'ordinateur a évolué au fil des séances.

Au début, les enfants qui n'ont jamais travaillé avec un logiciel de géométrie dynamique, c'est-à-dire la grande majorité d'entre eux, sont assez fascinés par les possibilités d'un tel outil. La première séance provoque habituellement un engouement. Lors des premiers ateliers, l'excitation était grande chez certains élèves et cela pouvait nuire à la qualité de leur travail. L'ordinateur n'était pas perçu comme un outil de travail mais plutôt comme un objet de loisir, de jeu. Le retour en salle de projection pour procéder à une synthèse calme le jeu et les élèves apprécient beaucoup le « super - tableau » obtenu grâce à la combinaison ordinateur - projecteur ([7]).

Après quelques leçons, les élèves les plus agités commencent à intégrer l'ordinateur et le logiciel comme des outils permettant des apprentissages et des découvertes. Toutefois, l'autonomie des enfants reste faible et ils demandent souvent de l'aide ([8]).

La titulaire d'une des classes expérimentales, convaincue de l'intérêt des activités proposées mais frustrée de voir ses élèves n'en tirer que peu de profit, faute d'une attitude suffisamment appliquée et autonome, nous a demandé de les soumettre à un exercice coté.

Au départ, il n'était pas dans notre intention d'imposer ce genre travail. Nous avons toutefois estimé que les préoccupations de l'enseignante devaient être entendues et avons élaboré un questionnaire avec elle. Par ailleurs, il nous a semblé intéressant de procéder à cette « expérience dans l'expérience » et d'observer l'évolution du comportement des élèves. Ceux-ci ont donc été prévenus que leur prochain travail serait évalué et que la cote interviendrait dans la rubrique « évaluation formative » de leur bulletin.

Le jour prévu, nous leur avons soumis les exercices figurant sur les fiches en annexe.

Cette séance de travail s'est très bien déroulée . Concernés par leur évaluation, la majorité des élèves se sont bien appliqués à leur tâche. Précisons toutefois qu'il ne s'agissait pas d'une interrogation au sens classique du terme, les élèves travaillant en duos, les deux animateurs et la titulaire circulant dans le local pour donner un coup de pouce aux enfants en difficulté.

Finalement, dix-neuf élèves sur vingt et un ont reçu l'appréciation « bien » ou « très bien » pour leur travail.

([7]) Nous plaidons résolument en faveur de la présence d'un tel matériel dans de nombreux locaux scolaires. Même si les élèves ne sont pas appelés à travailler eux-mêmes à l'ordinateur dans un tel local, disposer d'un tableau animé serait un adjuvant précieux pour le cours de mathématique. Un stade supérieur serait celui du *laboratoire de mathématique* mais c'est un autre débat.

([8]) Cette constatation n'a pas étonné les collègues d'autres disciplines qui se sont intéressés à nos travaux et qui utilisent occasionnellement l'outil informatique. Ils attendent généralement la fin de la deuxième année pour proposer à leurs élèves des tâches nécessitant un travail autonome.

Il ne faudrait donc pas oublier que pour de jeunes enfants peu habitués à l'autonomie, il faut encore proposer de temps en temps des activités bien encadrées et dirigées, voire provoquer un petit choc psychologique en inscrivant l'activité dans une perspective d'évaluation.

Il nous plaît enfin de croire et de rappeler que plus l'apprentissage de l'autonomie sera précoce, plus les enfants se verront proposer des activités de recherche, avec l'outil informatique ou tout autre moyen, plus ils accueilleront positivement ce type de démarche dans la suite de leur scolarité.

Une première approche de la démarche déductive

Au travers des activités proposées, nous avons à plusieurs reprises essayé d'amener les élèves sur le terrain de la déduction et de la preuve.

Voici à quelles occasions nous avons cherché à rencontrer ce qui est un des objectifs les plus ambitieux du premier degré du secondaire : l'apprentissage de la démonstration.

1. Dans la séquence 13, « Voir des quadrilatères à l'intersection de deux bandes », nous proposons l'activité « Deux bandes qui se coupent ». Les élèves doivent nommer les quadrilatères qu'ils observent à l'intersection de deux bandes, justifier pourquoi il s'agit toujours d'un parallélogramme et pourquoi, dans certains cas, il s'agit d'un rectangle, d'un carré ou d'un losange ([9]).

   Sachant que les bandes sont des paires de droites parallèles, les élèves sont invités à dépasser le simple stade visuel, à utiliser les définitions des quadrilatères apprises en primaire et à vérifier si les formes obtenues répondent ou non à ces définitions.

   Cette activité débouche sur une synthèse basée sur les propriétés des bandes et formulée en ces termes (par exemple) : « Je peux obtenir un rectangle à condition que les bandes soient perpendiculaires ».

2. Dans la séquence 14, « L'aire du parallélogramme », nous proposons l'activité « Observer une figure ».
   Il s'agit de deux parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande. Le travail d'observation demandé aux élèves a pour but de leur faire nommer toutes les formes visibles dans cette figure et d'exprimer ensuite l'aire de certaines formes en fonction des aires de formes qui la composent via la propriété d'additivité de l'aire. Cet exercice se termine par une preuve « en images » de l'égalité des aires des deux parallélogrammes.

3. Dans la séquence 17, « L'aire du losange et du cerf-volant », le travail sur les aires apporte une justification géométrique à certaines propriétés algébriques. Par exemple, à partir de la question de l'aire d'un triangle, nous examinons différentes façons de réaliser un parallélogramme d'aire double ou de même aire qu'un triangle donné. Ce travail permet de justifier la double égalité suivante :

([9]) Nous n'avons pas prouvé que si deux bandes sont de même largeur, alors le quadrilatère observé est un losange. Nous nous sommes contentés d'une vérification à l'aide du logiciel : en créant un cercle centré sur un sommet du quadrilatère, on observe que le cercle passe par les deux sommets voisins.

$$\frac{x \cdot y}{2} = x \cdot \frac{y}{2} = \frac{x}{2} \cdot y$$

Le problème de l'aire d'un trapèze débouche quant à lui sur :

$$\frac{(x+y) \cdot z}{2} = (x+y) \cdot \frac{z}{2} = (\frac{x}{2} + \frac{y}{2}) \cdot z$$

Faute de temps, nous n'avons pu pousser ce travail de liaison entre algèbre et géométrie aussi loin que nous l'aurions voulu.

Ces situations fournissent de belles occasions d'initier nos élèves, d'une façon visuelle, à la justification et à la déduction.

9.3 Annexe : exercice coté

Classe de 1ère B — Février 2007

Du triangle au parallélogramme

1. Crée un triangle quelconque (non isocèle, non équilatéral, non rectangle).
2. Construis le milieu de chacun de ses côtés.
3. Découpe le triangle suivant deux de ces milieux.
4. Avec les deux formes que tu as obtenues, réalise un parallélogramme.
5. Compare la base du parallélogramme avec celle du triangle.

   _____

6. Compare la hauteur du parallélogramme avec celle du triangle.

   _____

Relier les milieux d'un quadrilatère

1. Crée un quadrilatère quelconque.
2. Construis le milieu de chacun de ses côtés.
3. Construis le quadrilatère dont les sommets sont les quatre milieux.
4. De quel type de quadrilatère s'agit-il ?

   _____

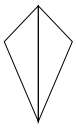
Les hauteurs d'un triangle

1. Crée un triangle isocèle.
2. Construis les trois hauteurs de ce triangle.
3. Que constates-tu ?

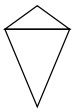
   _____

2 Apprenti Géomètre : ÉVALUATION FORMATIVE (2)

Construire un cerf-volant

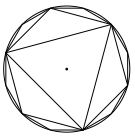


1. Crée un triangle quelconque.
2. Duplique ce triangle.
3. Retourne un des deux triangles.
4. Fusionne les deux triangles pour obtenir un cerf-volant.
5. Le dessin ci-dessous doit te permettre de trouver une autre façon de réaliser un cerf-volant. Explique comment tu procèdes.



Des polygones réguliers dans un cercle

1. Crée un dodécagone régulier.
2. Crée un hexagone régulier dont tous les sommets sont aussi des sommets du dodécagone.
3. Crée un triangle équilatéral dont tous les sommets sont aussi des sommets de l'hexagone.
4. Crée un cercle dont le centre est le centre des polygones précédents et passant par tous les sommets de ces polygones.



9.4 *Voir* des quadrilatères à l'intersection de deux *bandes*

Cette première séquence est basée sur les fiches 2.1 à 2.6. On y utilise l'outil `Bande` proposé dans les `Figures libres` de la version 2 du logiciel *Apprenti Géomètre*.

Son objectif principal est d'identifier les quadrilatères résultant de l'intersection de deux bandes et de rappeler les propriétés des quadrilatères en liaison avec celles des bandes. À

l'issue de cette séquence, l'élève doit pouvoir associer ces quadrilatères aux bandes qui les engendrent et avoir pris conscience des familles de parallélogrammes inscrites dans chaque bande.

Signalons que l'usage des bandes existe à l'école primaire mais qu'il ne semble pas très répandu. Lorsque cet outil est utilisé (voir [63]), les parallélogrammes (y compris les rectangles, les losanges et les carrés) sont vus comme l'intersection de deux bandes (*Fig. 9.8*), tandis que les trapèzes (non parallélogrammes) y sont vus comme l'intersection d'une bande et d'un secteur (*Fig. 9.9*).

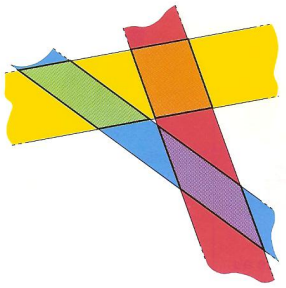


Fig. 9.8

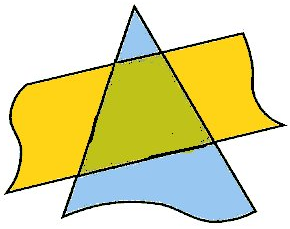


Fig. 9.9

Nous verrons que l'intérêt des bandes réside également dans le fait qu'elles peuvent aider l'élève à trouver les bases et les hauteurs d'un parallélogramme ou d'un triangle.

De quoi s'agit-il?

Les élèves manipulent deux bandes en les faisant glisser, tourner et en modifiant leur largeur. Ils notent sur leur fiche les quadrilatères observés à l'intersection des deux bandes.
L'introduction d'une troisième bande permet de visualiser une famille de parallélogrammes ([10]) à l'intérieur de chacune des deux premières bandes.

Enjeux

- Découvrir que l'intersection de deux bandes est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (parallélogramme, rectangle, losange et carré).
- Découvrir que certains quadrilatères ne peuvent être obtenus par l'intersection de deux bandes (c'est-à-dire, certains trapèzes, cerfs-volants et autres quadrilatères quelconques).
- Entretenir la connaissance des propriétés des quadrilatères.
- Découvrir et visualiser la notion de *famille de parallélogrammes*

Compétences

- *Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer sur base des éléments de symétrie pour les figures et sur base de leurs éléments caractéristiques pour les solides.*

([10]) Nous appellerons *famille de parallélogrammes* un ensemble de parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande (donc, de même hauteur). Euclide utilise l'expression « dans les mêmes parallèles ». Par exemple (livre I, proposition 35) :

> *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

Pour Euclide, « parallélogrammes égaux » signifie « parallélogrammes de même aire ».

- *Tracer des figures simples en lien avec les propriétés des figures et des instruments y compris le rapporteur.*
- *Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.*
- *Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.*
- *Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.*
- *Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie pour énoncer et argumenter.*

De quoi a-t-on besoin?

- Des fiches 2.1 à 2.6.
- Du matériel usuel de géométrie.
- De bandes découpées dans des feuilles de plastique transparent.

9.4.1 Deux bandes qui se coupent.

Situation initiale

Elle est constituée par la fiche 2.1.

> `Fiche 2.1`
> Fais apparaître deux *Bandes* de largeurs quelconques à l'écran. Déplace-les et fais-les tourner en veillant toujours à ce qu'elles se coupent.
> Quelle figure observes-tu à l'intersection des deux bandes ? Pourquoi ?
> Décris ci-dessous les figures que tu as obtenues. Justifie les propriétés des figures à partir de celles des bandes.

Analyse procédurale

Rappelons qu'une bande est la portion de plan comprise entre deux droites parallèles et distinctes ; la distance entre celles-ci est la *largeur* de la bande.

Dans les classes expérimentales.

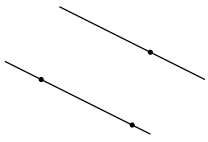


Fig. 9.10

Voyons comment utiliser les bandes. À l'écran, une bande est définie par trois points : les deux premiers points choisis par l'utilisateur déterminent la première droite ; le troisième point emmène avec lui une droite parallèle à la première (*Fig. 9.10*).

Une bande peut être modifiée de deux façons :

– en déplaçant un des deux premiers points à l'aide de la commande `Modifier` : la première droite se modifie en conséquence tandis que la parallèle passant par le troisième point suit le mouvement ;
– en déplaçant le troisième point à l'aide de la commande `Modifier` : la première droite ne bouge pas mais la largeur de la bande est modifiée.

Il est également possible d'appliquer à une bande les commandes `Glisser` et `Tourner`. Après avoir choisi l'une d'elles, il faut cliquer à l'intérieur de la bande. La largeur ne se modifie pas.

En utilisant toutes ces possibilités dynamiques du didacticiel, les élèves font ainsi apparaître des parallélogrammes, des rectangles, des losanges et des carrés.

Dans les classes témoins.

Les élèves disposent de bandes transparentes de différentes largeurs et en nombre suffisant. Parmi les bandes se trouvent également des bandes de même largeur. Ils les croisent, les font tourner et ils voient apparaître, comme avec le logiciel mais de façon plus limitée, des parallélogrammes, des rectangles, des losanges et des carrés.

Pour tous

Analyse conceptuelle

Les élèves doivent compléter le tableau ci-dessous.

Je peux obtenir un ...	À condition que ...
parallélogramme	les bandes se coupent (soient sécantes)
rectangle	les bandes soient perpendiculaires
losange	les bandes soient de même largeur
carré	les bandes soient perpendiculaires et de même largeur

Les élèves doivent justifier — bien que cela soit difficile à leur âge — pourquoi tel quadrilatère est un parallélogramme, tel autre un losange, ...

- Le parallélogramme.

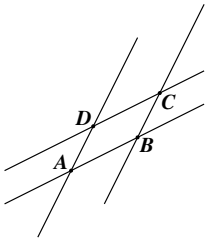


Fig. 9.11

Lorsque deux bandes se coupent de manière quelconque, on justifie que le quadrilatère observé est un parallélogramme en se référant à la définition rencontrée à l'école primaire : un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles. Il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante. Dès lors, comme les bandes sont définies par des paires de droites parallèles, il est clair que AB est parallèle à DC et que AD est parallèle à BC (*Fig. 9.11*).

Lorque l'animateur interroge les élèves sur la définition du parallélogramme, certains élèves pourraient affirmer qu'il s'agit d'un quadrilatère possédant deux paires de côtés de même longueur. C'est l'occasion de leur faire remarquer que cette condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, un quadrilatère vérifiant cette condition peut être un cerf-volant ([11]).

([11]) Si l'élève énonce « un quadrilatère possédant deux paires de côtés *opposés* de même longueur », alors il s'agit bien d'un parallélogramme.

- Le rectangle.
  Lorsque deux bandes sont perpendiculaires, le quadrilatère observé possède quatre angles droits et répond ainsi à la définition du rectangle.

- Le losange.
  Justifier qu'un quadrilatère est un losange est plus difficile au niveau d'une première année, mais peut mener à un échange intéressant et riche d'apprentissages pour la classe. La définition « quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur » sera rappelée ([12]).

  Avec le logiciel, il existe plusieurs façons de vérifier si un parallélogramme $ABCD$ est un losange. La méthode choisie dépendra bien sûr des connaissances des élèves car ils ne sont pas censés maîtriser différentes définitions du losange et ses propriétés.

  – Choisir le losange dans les *Formes libres* ; en créer un à partir des points A, B et de façon dynamique (fonctionnalité `Modifier`), vérifier qu'il passe aussi par le point D (*Fig. 9.12*).

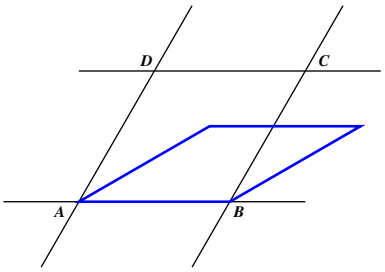


Fig. 9.12

  – Créer un cercle de centre A et passant par B ; s'il comprend aussi le point D (*Fig. 9.13*), alors nous avons bien un losange (car $|AB| = |AD|$ et comme $|AB| = |DC|$ et $|AD| = |BC|$, les quatre côtés ont la même longueur). La figure 9.14 illustre le cas contraire.

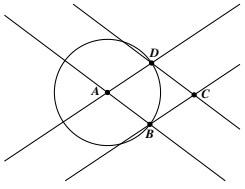


Fig. 9.13

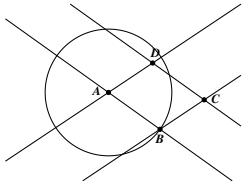


Fig. 9.14

  – Tracer une diagonale (par exemple AC) et tracer un segment perpendiculaire à AC passant par D ; s'il passe aussi par B, cela signifie que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires ce qui en fait un losange (*Fig. 9.15*) ; dans le cas contraire, ce n'est pas un losange (*Fig. 9.16*).

([12]) Si certains élèves ajoutent « ... et ayant deux angles aigus et deux angles obtus », on leur expliquera que cette définition est trop restrictive car elle exclut le carré.

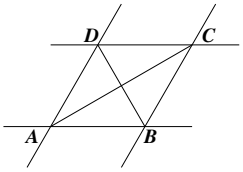


Fig. 9.15

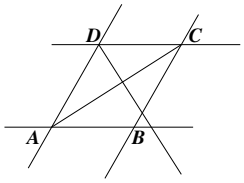


Fig. 9.16

– Vérifier si une diagonale du parallélogramme est axe de symétrie de celui-ci (si tel est le cas, l'autre diagonale est aussi un axe de symétrie). Pour cela, il faut vérifier si le parallélogramme est sa propre image par la symétrie orthogonale d'axe AC (ou BD).

Sans le logiciel, la vérification pourra se faire au compas en traçant un cercle centré en A et passant par B ou à l'équerre pour vérifier la perpendicularité des diagonales.

- Le carré.

Si les bandes sont de même largeur ([13]) et perpendiculaires, elles détermineront un quadrilatère possédant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur, ce qui ne laisse aucun doute sur son caractère carré.

La fiche 2.2 (*Fig. 9.17*) résume les quadrilatères que l'on peut obtenir selon les caractéristiques des deux bandes (angle et largeurs).

Fiche 2.2

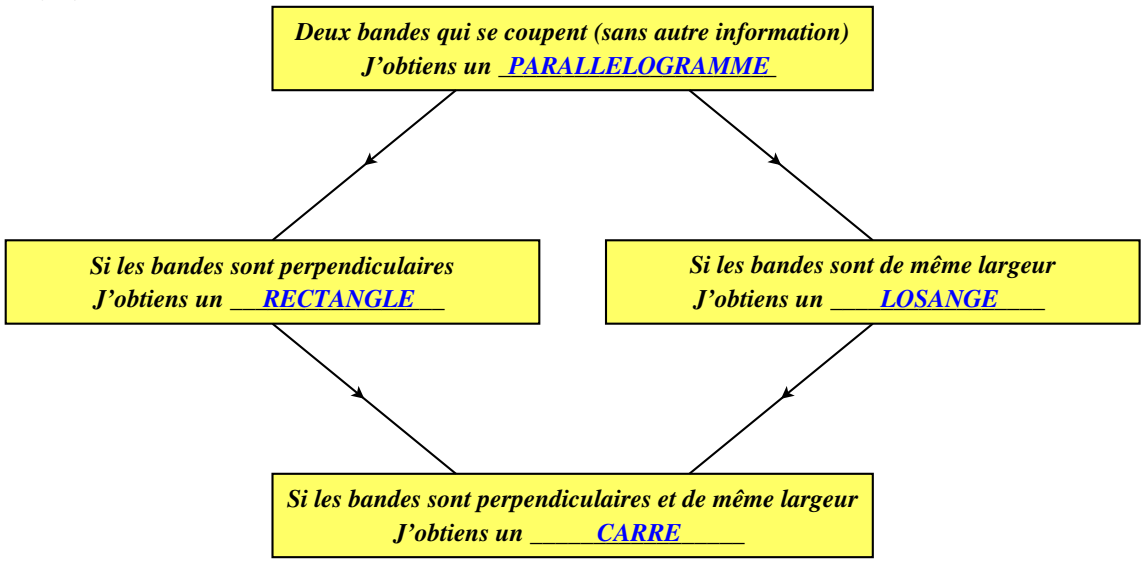
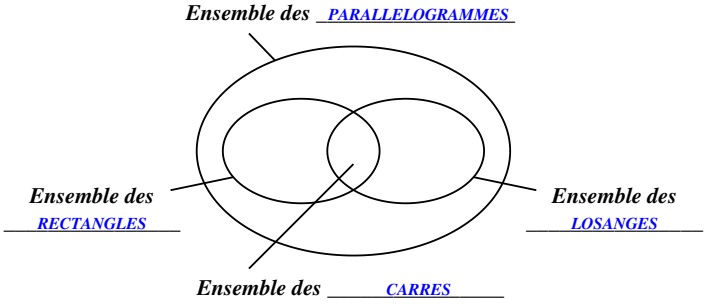


Fig. 9.17

La fiche 2.3 complète cette synthèse notamment avec un diagramme de Venn montrant les ensembles des parallélogrammes, des rectangles, des losanges et des carrés.

([13]) Le fait que la largeur d'une bande se mesure perpendiculairement à ses bords (comme pour la largeur d'un couloir) sera mis en évidence. C'est aussi l'occasion de parler de la distance d'un point à une droite.

Fiche 2.3



Les quadrilatères qu'il est impossible d'obtenir avec deux bandes qui se coupent :

certains trapèzes, cerfs-volants et quadrilatères quelconques

(ceux qui ont une paire de côtés non parallèles)

Avec deux bandes qui se coupent, on obtient toujours un quadrilatère dont

les côtés opposés sont parallèles.

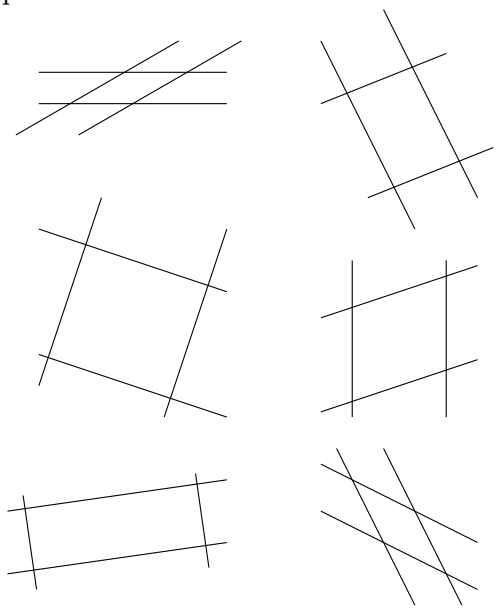
Prolongements et liens Comme exercice, l'enseignant pourra proposer aux élèves la fiche 2.4.

Fiche 2.4

Dans chacune des figures ci-dessous, tu observes deux bandes qui se coupent, déterminant ainsi un quadrilatère.

À l'aide d'une équerre et d'un compas, vérifie si ce quadrilatère est un rectangle, un losange, un carré, ou simplement un parallélogramme. Justifie tes réponses.

Attention : tu ne peux pas mesurer !



Sans mesurer, en utilisant seulement un compas et une équerre, les élèves cherchent quel est le type de chacun des quadrilatères représentés. Nous leur proposons ainsi une démarche sur papier qui se rapproche de la vérification avec le logiciel où l'on ne dispose pas de la mesure mais des outils `Cercle` et `Segment perpendiculaire`.

Comme il est clair dès le départ qu'ils sont tous des parallélogrammes, il reste à préciser s'il s'agit d'un rectangle, d'un losange ou d'un carré (de gauche à droite et de haut en bas : losange, parallélogramme, rectangle, parallélogramme, rectangle et losange).

La fiche 2.5 peut également être proposée comme exercice de construction.

Fiche 2.5

Pour chacune des bandes ci-dessous, construis une deuxième bande de manière à obtenir la figure demandée. Tu peux te servir d'une équerre « Aristo » et d'un compas. Attention : tu ne peux pas mesurer !

Un carré

Un rectangle non carré

Un losange non carré

Un parallélogramme non rectangle et non losange

Un trapèze non parallélogramme

Échos des classes

La leçon consacrée à cette première activité a eu lieu une ou deux semaines après la séance d'initiation au logiciel. Chaque fois, l'animateur a donc procédé à un bref rappel sur grand écran de quelques fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre* (notamment, suivant en cela l'analyse procédurale de la page 272, comment créer une bande et commment la modifier).
Les élèves reçoivent ensuite la fiche 2.1 avec les consignes et s'installent à deux par ordinateur dans la salle informatique. Pour la plupart des enfants, faire apparaître les deux bandes ne pose guère de difficultés. Signalons toutefois que, dans un premier temps, certains semblent confondre bande et droite : voyant les deux bords de la première bande, ils créent deux bandes. Le malentendu est vite dépassé.
Beaucoup d'élèves ne connaissent pas le mot « intersection » et il doit donc être explicité par l'animateur, secondé en cela par la titulaire de la

classe.

Au début de l'activité, peu d'élèves comprennent qu'on leur demande d'utiliser le dynamisme du logiciel et de se livrer à un travail d'exploration en faisant varier la figure. Cela se traduit par le comportement suivant chez certains : une fois les deux bandes créées, ils observent un parallélogramme et s'arrêtent là, satisfaits d'avoir trouvé « la » réponse (*Fig. 9.18*).

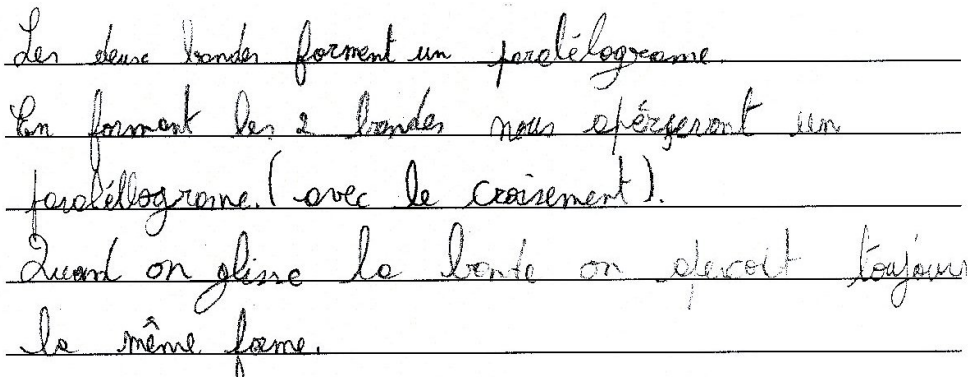


Fig. 9.18

D'autres en revanche, cherchent dès le départ à obtenir une forme plus particulière. Ainsi, certains groupes obtiennent-ils un carré après avoir effectué — à vue — les modifications nécessaires, et s'en tiennent à cela. Les stimulations des enseignants sont nécessaires pour la plupart des élèves afin de les inciter à chercher davantage. Cela nous amène à penser que les élèves que nous avons rencontrés étaient, dans leur majorité, peu familier d'un travail de recherche libre. Il apparaît néanmoins que les élèves ayant déjà travaillé avec *Apprenti Géomètre* (version 1) à l'école primaire, entrent plus vite dans l'esprit de ce type de travail.

En ce qui concerne les formes trouvées, le parallélogramme, le rectangle et le carré finissent par être cités par tous les élèves. Le losange est moins fréquemment cité.

Lorsque l'animateur demande de justifier pourquoi telle forme est un parallélogramme, telle autre un rectangle, les élèves sont assez surpris. En effet, pour eux « cela se voit » ou « on a appris les formes en primaire ! ». Cette réaction est assez naturelle car, le plus souvent, dans l'enseignement fondamental, les élèves ont assimilé les « portraits » des formes ainsi que leurs définitions sans rencontrer de situations où ils devaient fournir des justifications. L'animateur insiste donc : « quand dit-on qu'un quadrilatère est un parallélogramme ? ... un losange ? ». Petit à petit, les enfants comprennent ce qu'il attend d'eux mais leur expression tant orale qu'écrite est laborieuse. Les définitions des différents quadrilatères sont souvent formulées de manière imprécise ou incomplète (*Fig. 9.19*).

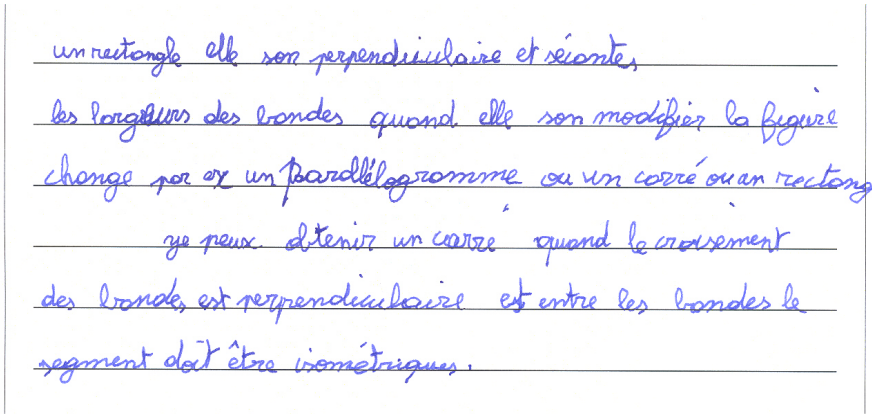

un rectangle elle son perpendiculaire et sécante,
les longueurs des bandes quand elle son modifier la figure
change par ex un parallélogramme ou un carré ou an rectangle,
je peux obtenir un carré quand le croisement
des bandes est perpendiculaire et entre les bandes le
segment doit être isométriques.

Fig. 9.19

Moyennant quelques encouragements, la majorité des enfants cherchent à s'acquitter correctement de leur tâche. Certains font de réels efforts pour être clairs et précis (*Fig. 9.20*, *Fig. 9.21* et *Fig. 9.22*).

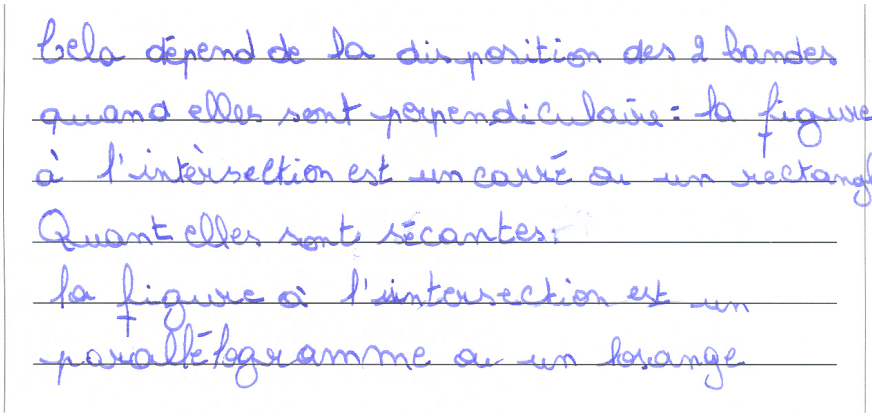

Cela dépend de la disposition des 2 bandes
quand elles sont perpendiculaire : la figure
à l'intersection est un carré ou un rectangle.
Quant elles sont sécantes:
la figure à l'intersection est un
parallélogramme ou un losange

Fig. 9.20

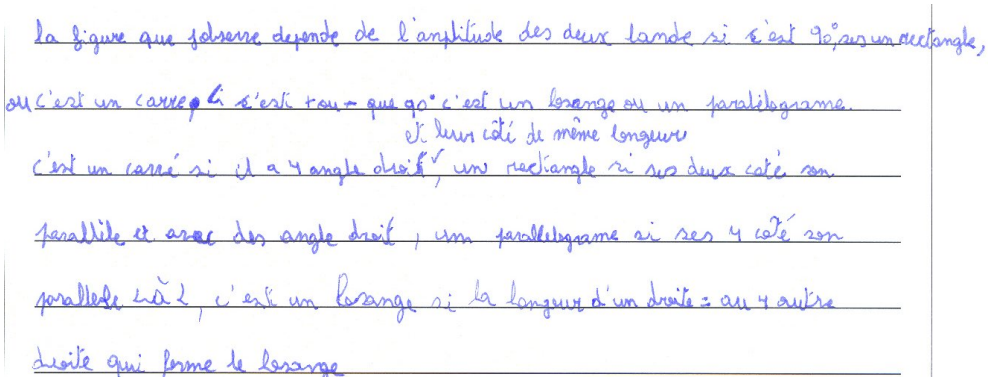

la figure que forment dépende de l'amplitude des deux bande si c'est 90° sa un rectangle,
ou c'est un carré si c'est tous que 90° c'est un losange ou un parallélogramme.
et leurs côté de même longueur
c'est un carré si il a 4 angle droit, un rectangle si ses deux côté son
parallèle et avec des angle droit, un parallélogramme si ses 4 côté son
parallèle entre 2, c'est un losange si la longueur d'un droite = au 4 autre
droite qui forme le losange

Fig. 9.21

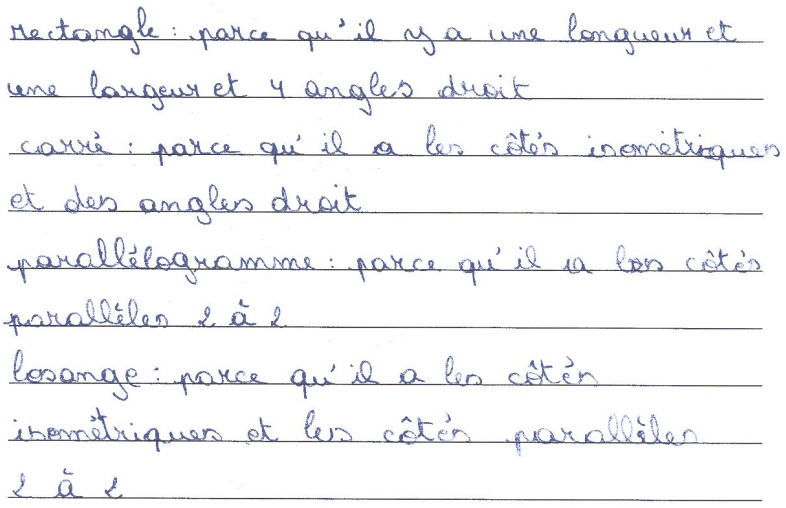

rectangle : parce qu'il y a une longueur et une largeur et 4 angles droit
carré : parce qu'il a les côtés isométriques et des angles droit
parallélogramme : parce qu'il a les côtés parallèles // à //
losange : parce qu'il a les côtés isométriques et les côtés parallèles // à //

Fig. 9.22

La synthèse réalisée en commun, sous la direction de l'animateur, se déroule sans problème, y compris pour le diagramme de Venn, même si très peu d'élèves sont familiers de ce genre de représentation.

En conclusion, cette activité et sa synthèse contribuent à une mise au point bien utile en ce début d'année scolaire sur les caractéristiques de quelques quadrilatères.

9.4.2 Des familles de parallélogrammes.

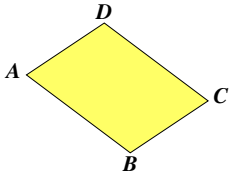
Situation initiale

Dans les classes expérimentales

L'enseignant distribue à chaque élève la fiche 2.6.

Fiche 2.6

1. Reproduis le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous.
2. Crée les deux bandes dont l'intersection est ce parallélogramme.
3. Crée d'autres parallélogrammes de base $[AB]$ et inscrits dans la bande dont les bords sont AB et CD (en particulier, crée le rectangle de base $[AB]$).
   Compare tous ces parallélogrammes.
4. Crée d'autres parallélogrammes de base $[BC]$ et inscrits dans la bande dont les bords sont BC et AD (en particulier, crée le rectangle de base $[BC]$). Compare tous ces parallélogrammes.



Analyse procédurale

Une façon d'obtenir la première bande est de cliquer d'abord sur les points A et B. La droite ainsi obtenue est le premier bord de la bande. Lors du déplacement de la souris, le logiciel fait apparaître le second bord de la bande. Pour le faire passer par le point C, on y amène le pointeur (la flèche) et on clique à cet endroit ([14]). Pour créer la seconde bande, on peut cliquer sur les points B, C et A dans cet ordre. Une fois cette figure obtenue (le parallélogramme et les deux bandes associées), l'élève la sélectionne entièrement (`Edition/Sélectionner tout`), la copie (`Edition/Copier`), ouvre une nouvelle fenêtre de travail (`Fichier/Nouveau`) et la colle dans cette fenêtre (`Edition/Coller`). Il dispose ainsi de deux « feuilles de travail » comme dans les classes témoins.

Dans la première fenêtre, il crée d'autres parallélogrammes de base $[AB]$ et inscrits dans la première bande. À cet effet, il choisit le parallélogramme dans les `Formes libres`, clique sur les points A et B et enfin sur un point de la droite CD. En répétant plusieurs fois cette démarche, il obtient un ensemble de parallélogrammes. Nous dirons qu'il s'agit de représentants d'une « famille de parallélogrammes ». Suivant les consignes, il crée ensuite un rectangle après avoir choisi cette forme dans les `Formes libres`.

Ce travail aboutit à une figure analogue à la figure 9.23.

Le même travail réalisé dans l'autre bande et dans l'autre fenêtre permet de visualiser une famille de parallélogrammes de base BC (*Fig. 9.24*).

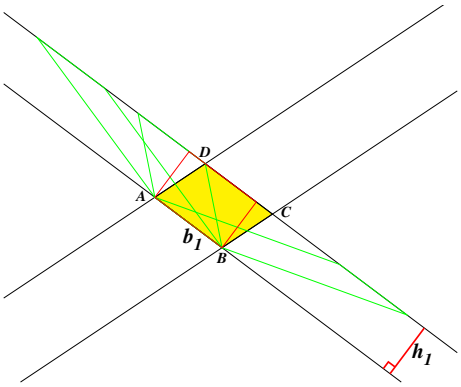


Fig. 9.23

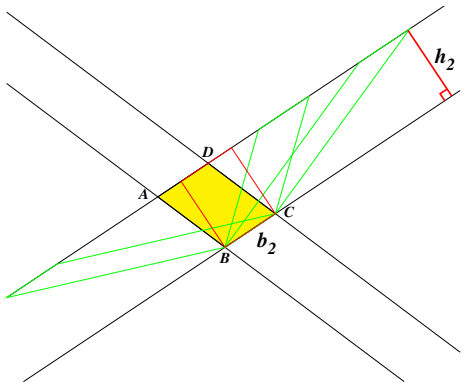


Fig. 9.24

À l'issue de ces constructions, l'élève peut utiliser le dynamisme du logiciel en modifiant le parallélogramme $ABCD$. Il peut alors observer les modifications des autres parallélogrammes, qui conservent néanmoins la même base et la même hauteur que $ABCD$, quelle que soit la famille observée.

Selon le temps disponible, le même travail peut être réalisé sur papier. Les élèves reçoivent alors les feuilles de travail 2.7 et 2.8 comme dans les classes témoins.

([14]) D'autres combinaisons permettent d'obtenir la même bande : cliquer $A - B - D$ dans cet ordre, ou encore $B - A - C$, $C - D - B \ldots$

Dans les classes témoins

L'enseignant distribue à chaque élève la feuille de travail n°1 (fiche 2.7) portant la figure 9.25 et l'enveloppe n°1 contenant des bandes transparentes de différentes largeurs.

Fiche 2.7
Des familles de parallélogrammes : feuille de travail 1.

Dans la bande rouge, construis quelques parallélogrammes de base $[AB]$ (en particulier, le rectangle).
Travaille à la latte et au compas, sans mesurer.

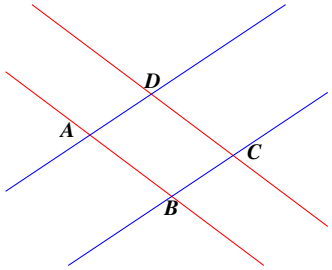


Fig. 9.25

Les élèves reçoivent ensuite la fiche 11.6.

Fiche 11.6
Tu as reçu la feuille de travail n°1 et l'enveloppe n°1 contenant des bandes de différentes largeurs.

1. Sur la feuille de travail, place les bandes de façon à ce qu'un des bords passe par A et l'autre bord par B.
2. Observe les intersections des bandes avec la bande rouge. Quelles figures obtiens-tu ? Qu'ont-elles en commun avec le parallélogramme $ABCD$?
3. Peux-tu obtenir un rectangle dans cette bande ? Comment ?

Dans un second temps, les élèves reçoivent la feuille de travail n°2 (fiche 2.8) ainsi que l'enveloppe n°2 pour représenter une famille de parallélogrammes dans l'autre bande.

Analyse procédurale

Sur la première feuille de travail, l'élève doit placer les bandes transparentes de telle façon qu'un bord passe par A et l'autre bord par B. Parmi les bandes se trouvant dans l'enveloppe, on aura volontairement inclus quelques bandes trop larges et d'autres assez étroites dans un double but :

- faire prendre conscience de l'importance de la largeur (certaines bandes trop larges ne peuvent être utilisées) ;
- faire apparaître des parallélogrammes un peu plus « excentriques », c'est-à-dire qui ne correspondent peut-être pas à l'image que les élèves se font spontanément d'un parallélogramme (*Fig. 9.26*).

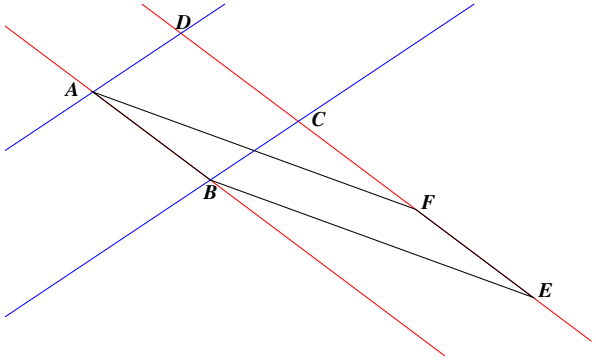


Fig. 9.26

Les élèves réaliseront probablement assez vite l'impossibilité d'ajuster les bandes trop larges. Il est aussi possible que certains d'entre eux écartent des bandes qu'ils jugent trop étroites sans penser à les incliner suffisamment.

Les élèves observent des parallélogrammes, tous de base $[AB]$, à l'intersection de la bande rouge et de la troisième bande. Ils recherchent les caractéristiques communes à tous ces parallélogrammes et pourront citer : même base, même hauteur et peut-être ... même aire.

Un travail analogue est réalisé sur la feuille de travail n°2.

Pour tous

Analyse conceptuelle

L'activité permet de mettre en évidence des *familles de parallélogrammes*. Ce concept nous semble susceptible d'enrichir la vision géométrique des élèves, notamment par la mise en évidence de parallélogrammes tels que $ABEF$ dans la figure 9.26. Dans chaque famille, un rectangle de même base et de même hauteur que le parallélogramme $ABCD$ sera mis en évidence.
Il peut être intéressant de demander aux élèves de comparer les périmètres des différents parallélogrammes. Dans une famille donnée, le rectangle pourra ainsi être vu comme le parallélogramme ayant le plus petit périmètre.

Cette séquence se poursuit par un travail aux instruments. Sur les fiches 2.7 et 2.8, les élèves doivent construire quelques parallélogrammes de la famille basée sur AB et quelques-uns de la famille basée sur BC (*Fig. 9.25*).

Voici une démarche possible utilisant notamment le compas comme outil de report de longueur :

1. marquer un point P sur le bord de la bande opposé à AB ;
2. à l'aide du compas, relever la longueur du segment $[AB]$;
3. reporter cette longueur à partir de P afin d'obtenir un point Q sur le bord de la bande opposé à AB (deux possibilités).

On obtient ainsi les parallélogrammes $ABQP$ ou $ABPQ$ (*Fig. 9.27* et *Fig. 9.28*).

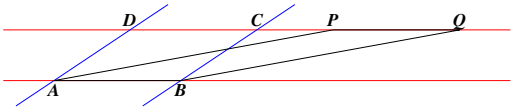


Fig. 9.27

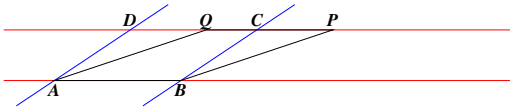


Fig. 9.28

Dans le cadre de l'activité « papier-crayon », on pourra poser les questions suivantes :

- À quelle condition une bande de l'enveloppe peut-elle être utilisée pour réaliser le travail demandé ? Une discussion avec la classe débouchera sur la conclusion suivante : une bande dont la largeur dépasse la plus grande des longueurs $|AB|$ et $|BC|$ ne convient pas ; par contre, toute bande de largeur inférieure convient, aussi étroite soit-elle. Il suffira de l'incliner suffisamment pour faire passer ses bords par deux sommets du parallélogramme $ABCD$.
- À quelle condition obtiendra-t-on un rectangle ? Il faut que la largeur de la troisième bande soit égale à $|AB|$ ou à $|BC|$.

Pour conclure cette séquence, tous les élèves reçoivent la fiche 2.9 reprenant les figures 9.23 et 9.24. Deux familles de parallélogrammes y sont suggérées.

Enfin, pour bien mettre en évidence les différentes façons de choisir une base et une hauteur d'un parallélogramme, ils reçoivent la fiche 2.12 montrant les figures 9.29 et 9.30.

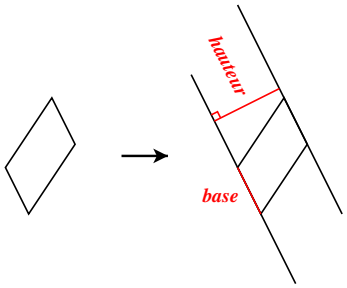


Fig. 9.29

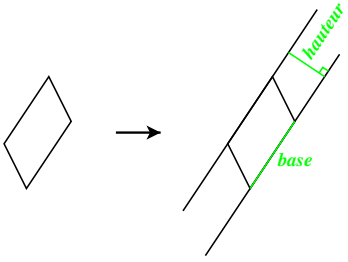


Fig. 9.30

Échos des classes

Notre expérimentation menant de front des activités géométriques et l'apprentissage d'*Apprenti Géomètre*, il nous a souvent semblé opportun de prévoir deux parties dans une leçon de cinquante minutes. La première partie, se déroulant en salle de projection, comportait des rappels et des consignes utiles au travail à venir. La seconde partie était consacrée au travail proprement dit dans le laboratoire informatique.

Ce fut encore le cas pour cette activité car le travail demandé aux élèves était assez complexe d'un point de vue instrumental.

Nous avons d'abord montré sur grand écran la construction du parallélogramme $ABCD$ et des deux bandes associées. Nous avons ensuite détaillé la procédure pour recopier cette figure dans une nouvelle fenêtre (*voir page 281*) et nous sommes allés jusqu'à montrer la construction de quelques parallélogrammes dans une bande.

Lors de cette projection, les élèves sont actifs et donnent les bonnes instructions lorsque l'animateur les interroge. De manière générale, ils semblent d'ailleurs beaucoup apprécier ce tableau animé et coloré qu'ils n'ont pas dans leur local de cours habituel.

D'un point de vue conceptuel, lorsqu'on leur demande de comparer les parallélogrammes qui viennent d'être dessinés dans une bande, les premières réactions relèvent souvent du réflexe conditionné et ne répondent pas à la question posée (par exemple : « ils ont des côtés parallèles deux à deux »). Il faut parfois beaucoup insister pour obtenir la réponse attendue « même base et même hauteur ». Peut-être est-ce le fait de leur demander de *comparer* qui les embarrasse le plus.

À ce stade, nous nous accordons sur la notion de « famille de parallélogrammes ». Nous soulignons le fait que la hauteur commune à tous ces parallélogrammes est la largeur de la bande.

Face à l'ordinateur, le travail de construction demandé ne pose pas de difficulté majeure aux élèves. Comme souvent, les petits écueils proviennent d'un manque d'attention aux consignes données. Ainsi avons-nous observé des élèves qui, ayant terminé leur travail dans la première bande et changé de fenêtre, construisaient à nouveau des parallélogrammes dans la même bande.

Lors de la construction des bandes associées au parallélogramme $ABCD$, il n'est pas rare de voir un élève ignorer les sommets : certains cliquent simplement sur deux autres points du segment $[AB]$ et sur un autre point du segment $[CD]$, ce qui est évidemment correct (*Fig. 9.31*).

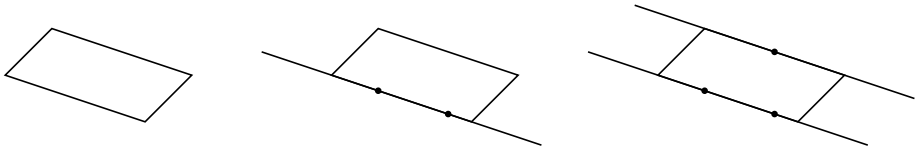


Fig. 9.31

Dès qu'un groupe a terminé sa construction, les animateurs posent à nouveau la question de la comparaison des parallélogrammes. Ils constatent alors que beaucoup d'élèves éprouvent des difficultés à s'exprimer de façon claire et précise.

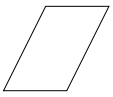
Dans les classes témoins, le travail avec les bandes n'a pas posé de gros problème non plus. Certains élèves se sont pourtant plaints de la complexité des consignes et, comme souvent dans ce cas, ont interrogé l'enseignante sur l'utilité de cette activité. Celle-ci a néanmoins été correctement menée à son terme, l'enseignante montrant au tableau différents parallélogrammes qu'il est possible de dessiner dans chaque bande. Une enseignante pense que cette activité est beaucoup plus facile à mettre en œuvre avec un logiciel que sans. Selon elle, il serait utile de disposer de grandes bandes pour travailler au tableau.

Prolongements et liens

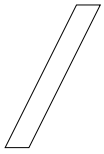
À titre d'exercice, particulièrement pour les élèves qui éprouvent des difficultés à visualiser une base et une hauteur d'un parallélogramme, l'enseignant peut proposer les fiches 2.10 et 2.11.

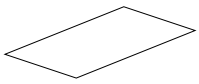
Fiche 2.10
Bases et hauteurs d'un parallélogramme (1)

1. Crée un parallélogramme et les deux bandes dont il est l'intersection.
2. En rouge, trace une première base du parallélogramme et la hauteur correspondante.
3. En vert, trace une deuxième base du parallélogramme et la hauteur correspondante.
4. Modifie le parallélogramme et observe les modifications de ses bases et de ses hauteurs.



Fiche 2.11
Bases et hauteurs d'un parallélogramme (2) Pour chacun des parallélogrammes ci-dessous, trace les deux bandes correspondantes et indique deux possibilités de bases et de hauteurs (note-les b_1 et h_1 pour la première possibilité ; note-les b_2 et h_2 pour la seconde possibilité).





9.5 L'aire du parallélogramme

La formule donnant l'aire du parallélogramme a déjà été vue au primaire et probablement beaucoup d'élèves s'en souviennent-ils. Une image couramment montrée aux enfants est celle du parallélogramme que l'on découpe en deux parties permettant ensuite de réaliser un rectangle (*voir le chapitre 5, page 129*). Cette démarche de découpe reste utile au secondaire. Il est souhaitable de l'entretenir dans l'espoir que les élèves y aient recours lorsqu'ils sont confrontés à une forme complexe ou lorsqu'ils doutent d'une formule d'aire. Les fiches 10.1 à 10.3 constituent une séquence basée sur le découpage et la recomposition (puzzles). Elle peut être choisie par l'enseignant pour montrer comment aboutir à la formule de l'aire du parallélogramme en passant par le rectangle.

Pour rappeler la formule d'aire du parallélogramme, nous sommes allés chercher l'inspi-

ration chez EUCLIDE et sa démonstration de l'égalité des aires de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur.

De quoi s'agit-il? Les élèves observent une figure formée par deux parallélogrammes inscrits dans une même bande. D'autres formes sont visibles et on demande aux élèves de les trouver toutes. La propriété d'additivité de l'aire est ensuite mobilisée pour écrire des égalités d'aires entre ces différentes formes.

Enjeux

- Prouver, par puzzle, l'égalité des aires de deux parallélogrammes d'une même famille. En déduire l'égalité des aires de tous les parallélogrammes d'une même famille, en particulier du rectangle.
- Etablir la formule d'aire du parallélogramme grâce à celle du rectangle.
- Enrichir la vision géométrique de l'élève par de nouvelles images (deux parallélogrammes dans une bande, formes de même aire se recouvrant partiellement, enveloppes convexes de deux polygones ([15])) et par un exercice d'observation où la consigne est d'analyser une figure en profondeur.

De quoi a-t-on besoin? Des fiches 3.1 à 3.3.

9.5.1 Comparer les aires de deux parallélogrammes d'une même famille

Situation initiale

L'enseignant distribue à chaque élève la fiche 3.1 ou son équivalente « papier-crayon » avec les consignes de travail.

Fiche 3.1
Ouvre *Apprenti Géomètre* et choisis le *Niveau B*.

1. Crée une bande dans laquelle tu inscriras deux parallélogrammes de même base.
2. Observe attentivement cette figure. Note ci-dessous toutes les formes que tu vois.
3. Compare l'aire du parallélogramme $ABCD$ à celle du parallélogramme $ABEF$. Explique.

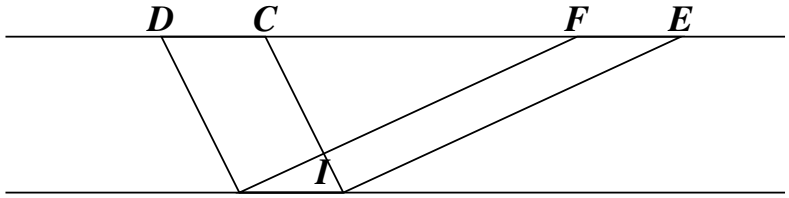


Fig. 9.32

([15]) Les deux dernières relevant d'activités facultatives proposées dans la rubrique *Prolongements et liens*.

Analyse procédurale

Cette rubrique ne concerne ici que les classes expérimentales. Les élèves créent d'abord une bande. Ils choisissent ensuite le parallélogramme dans les `Formes libres`. Ils cliquent deux fois sur un des bords de la bande de façon à déterminer le côté $[AB]$ du premier parallélogramme ; ils cliquent ensuite sur l'autre bord, ce qui a pour effet de placer le point C et automatiquement le sommet D du premier parallélogramme. Le second parallélogramme s'obtient en cliquant à nouveau sur A, puis sur B et enfin sur l'autre bord pour placer le point E. Une fois cette figure réalisée, elle peut être modifiée de plusieurs façons en agissant sur les bandes ou sur les sommets des parallélogrammes.

Analyse conceptuelle

L'enseignant laisse aux élèves le temps d'observer la figure obtenue afin de trouver et nommer les différentes formes que l'on peut y voir.
Une mise en commun est ensuite réalisée et les élèves complètent leur fiche à l'endroit prévu (*Fig. 9.33*).

Les formes que je vois :

les parallélogrammes ABCD et ABEF

les triangles ABI, CIF, AFD et BEC

les trapèzes AICD et BEFI

Fig. 9.33

L'enseignant interroge les élèves sur les rapports existant entre les aires des différentes formes. Pour préciser sa demande, il peut leur donner un exemple et les inviter à écrire d'autres égalités du même genre :

$$Aire(BCE) = Aire(ICF) + Aire(BIFE)$$

Adoptant une attitude plus dirigiste, il les oriente enfin vers l'aire du trapèze $ABED$. Constatant que les triangles AFD et BEC sont superposables, la discussion débouche sur un raisonnement résumé par les égalités ci-dessous (*Fig. 9.34*).

Comparaison des aires des parallélogrammes :

Aire(ABED) = Aire(ABCD) + Aire(BEC)

Aire(ABED) = Aire(ABEF) + Aire(AFD)

comme Aire(BEC) = Aire(AFD)

on trouve que Aire(ABCD) = Aire(ABEF)

Fig. 9.34

À propos des triangles AFD et BEC, *Apprenti Géomètre* permet aisément de vérifier qu'ils sont superposables ([16]) et qu'ils ont donc la même aire.

([16]) Dupliquer le triangle AFD et le glisser sur le triangle BEC, et inversement.

Dans une classe ne disposant pas d'*Apprenti Géomètre*, l'utilisation d'un transparent sur lequel la figure 9.32 aura été reproduite permet d'aboutir à la même conclusion.

Cela n'empêche pas, tant dans les classes expérimentales que dans les classes témoins, de tenir le raisonnement suivant.

Cherchons l'image du triangle AFD par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$:

- l'image du point A est le point B ;

  l'image du point F est le point E car $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}$ (en effet, $ABEF$ étant un parallélogramme, les segments $[FE]$ et $[AB]$ sont parallèles et de même longueur) ;

- l'image du point D est le point C car $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ (en effet, $ABCD$ étant un parallélogramme, les segments $[DC]$ et $[AB]$ sont parallèles et de même longueur) ;
- l'image du triangle AFD est donc le triangle BEC ;
- les triangles AFD et BEC sont superposables (isométriques) et possèdent donc la même aire.

Il reste maintenant à franchir un seuil supplémentaire : faire découvrir aux élèves qu'au sein d'une même famille, tous les parallélogrammes de même base ont même aire. Pour le mathématicien, il est clair que le raisonnement précédent est général. Pour les enfants, il n'est pas évident qu'il le soit pour des cas de figures autres que ceux qu'ils ont sous les yeux. Il serait intéressant de vérifier si l'aspect dynamique du logiciel, permettant de modifier la figure de départ et les formes colorées qui lui sont liées, aide les élèves à généraliser.

Lors de ces modifications, il faut certainement montrer le cas de figure où l'un des deux parallélogrammes est un rectangle (*Fig. 9.35*) et justifier ainsi l'utilisation de la même formule d'aire pour les deux formes.

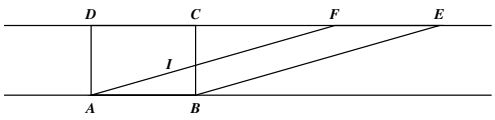


Fig. 9.35

Dans les classes témoins, la généralisation peut être favorisée par la mise à disposition des élèves de feuilles présentant d'autres cas de figures.

Échos des classes

La fiche 3.1 est bien accueillie par les élèves. Cependant, on observe rapidement de nettes différences quant aux nombres de formes trouvées par chacun. Les encouragements des animateurs sont bien nécessaires pour inciter certains enfants à approfondir leur recherche. Nous n'avons pas procédé à un relevé systématique des formes trouvées par chaque élève. Signalons simplement que :

- les triangles AFD et BEC sont souvent oubliés ;

le trapèze $ABED$ est noté en premier lieu par certains enfants, oublié par d'autres ;

- les quadrilatères $AICD$ et $BEFI$ ne sont pas spontanément reconnus comme trapèzes (sans doute parce que leurs bases ne sont pas horizontales) ;
- certains enfants ne pensent pas à inclure les parallélogrammes de départ dans leur liste ;
- dans chaque classe, il s'est trouvé un(e) élève pour noter le pentagone non convexe $AIBED$.

La seconde phase de l'activité est plus délicate. L'animateur demande d'abord comment trouver l'aire d'une forme à partir de celles d'autres formes. Sa demande n'étant pas comprise d'emblée, il donne un exemple : $Aire(BCE) = Aire(ICF) + Aire(BIFE)$. Il demande ensuite comment l'on peut obtenir l'aire du « grand trapèze ». La réponse qui vient le plus rapidement est $Aire(ABED) = Aire(ABI)+Aire(CIF)+Aire(AICD)+Aire(BEFI)$. À partir de là, les questions et réponses s'enchaînent :

– Et avec seulement deux formes ?
– $Aire(ABED) = Aire(ABCD) + Aire(BEC)$
– Et d'une autre façon ?
– $Aire(ABED) = Aire(ABEF) + Aire(AFD)$

L'échange se poursuit de la façon décrite dans l'analyse conceptuelle page 288, y compris pour la justification du fait que les triangles AFD et BEC sont superposables.

Au terme de ce raisonnement, une élève, dont nous avons pu nous assurer qu'elle avait parfaitement compris, s'est exclamée « oui, mais ... c'est compliqué ! ». Un autre : « c'est tout de même plus facile de dire qu'ils ont même base et même hauteur ! ».

Il est clair que, pour beaucoup d'enfants, la formule $base \times hauteur$ étant bien ancrée dans leur esprit, la nécessité de cette preuve n'apparaissait pas ! Comme le suggérait une enseignante participant à notre projet, cette preuve serait peut-être mieux acceptée par des élèves ne connaissant pas encore la formule d'aire du parallélogramme. Il serait intéressant d'interroger un instituteur à ce sujet afin de voir dans quelle mesure ce raisonnement pourrait être adapté pour de plus jeunes enfants.

Cette démarche a également suscité des réticences chez une enseignante d'une classe témoin qui a vu ses élèves en difficulté face à ce raisonnement.

Dans une des classes expérimentales, lors de la comparaison de l'aire des parallélogrammes, un élève a directement répondu « elles sont égales » sans faire allusion à la base ni à la hauteur. Bien qu'ayant des difficultés à l'exprimer, son raisonnement se basait sur un découpage suivant des parallèles aux bords de la bande (*Fig. 9.36*).

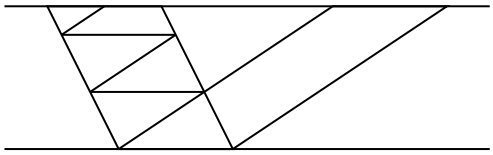


Fig. 9.36

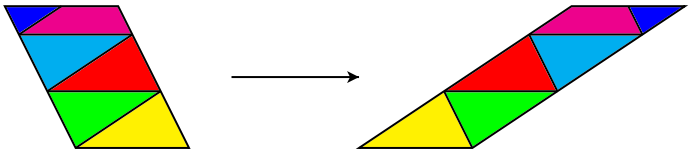


Fig. 9.37

Devant notre surprise, il nous a simplement répondu qu'il avait « toujours fait comme ça avec l'ordinateur ».

Cette leçon, et en particulier les différences importantes entre les observations des élèves confrontés à la figure 9.32 montrent une fois de plus l'importance de la perception visuelle en géométrie. Des activités spécifiques devraient être organisées afin d'entraîner les enfants à regarder une figure.

Prolongements et liens

Encadrer un parallélogramme par un rectangle

Voici une autre façon bien connue de montrer qu'un parallélogramme et un rectangle de même base et de même hauteur ont la même aire.

Un parallélogramme est encadré par un rectangle comme dans la figure 9.38.

En juxtaposant les deux triangles jaunes, on obtient un rectangle de même aire que le parallélogramme.

Fig. 9.38

Le même parallélogramme peut être encadré par un autre rectangle. On met ainsi en évidence un second rectangle de même aire que le parallélogramme (*Fig. 9.39*).

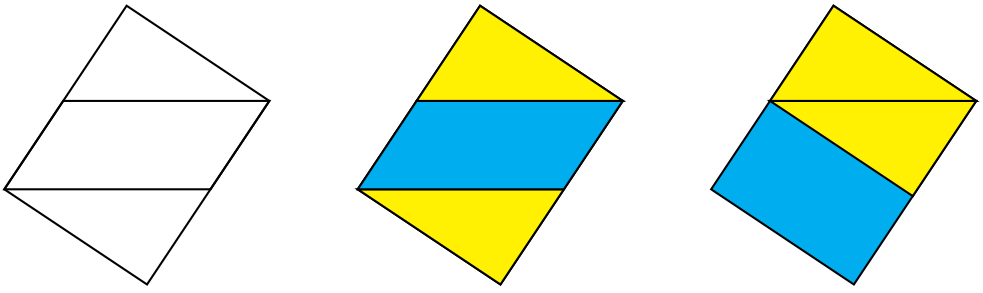


Fig. 9.39

Il peut être intéressant de donner aux élèves un autre outil de comparaison d'aires.

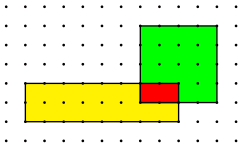
Si deux formes de même aire se superposent partiellement, alors l'aire non couverte de la première forme est égale à l'aire non couverte de la seconde forme.

Pour amener ce résultat, l'enseignant propose aux élèves la fiche 10.6.

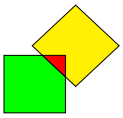
Fiche 10.6

Tu observes ci-dessous des paires de formes qui se recouvrent partiellement. Dans chacun des cas suivants, compare l'aire coloriée en jaune avec l'aire coloriée en vert. Explique.

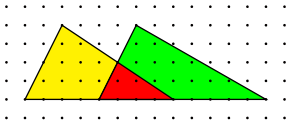
a) Première figure : un carré et un rectangle de même aire dans un quadrillage.



b) Deuxième figure : deux carrés isométriques.



c) Troisième figure : deux triangles d'aires différentes dans un quadrillage.



- Le premier cas (a) permet d'aborder ce problème par le biais du calcul de l'aire. L'unité d'aire U étant celle d'un petit carré du quadrillage, on vérifie que l'aire du grand rectangle et celle du carré valent toutes deux $16U$. Comme l'aire du rectangle rouge vaut $2U$, on en déduit que l'aire de la forme jaune vaut $14U$ tout comme celle de la forme verte.
- Le deuxième cas (b) demande un effort d'abstraction supplémentaire pour arriver à la même conclusion :

$$Aire_{verte} + Aire_{rouge} = Aire_{premier\ carré}$$

$$Aire_{jaune} + Aire_{rouge} = Aire_{second\ carré}$$

Comme les deux carrés ont la même aire :

$$Aire_{verte} = Aire_{jaune}$$

- Le troisième cas (c) invite à la prudence : une observation attentive permet de constater que les deux grands triangles ne sont pas superposables (la base du triangle de gauche est plus petite que celle du triangle de droite).

Les aires de ces deux triangles étant différentes, on en déduit que les aires jaune et verte sont différentes aussi.

Plus précisément : $Aire_{jaune} < Aire_{verte}$.

Les élèves sont maintenant prêts pour le raisonnement suivant, basé sur la figure 9.32.

Les triangles AFD et BEC étant superposables, ils ont la même aire :

$$Aire(AFD) = Aire(BEC)$$

Le travail réalisé avec la fiche 10.6 permet d'en déduire que :

$$Aire(AICD) = Aire(BEFI)$$

Si l'on ajoute l'aire du triangle ABI à chacune de ces deux aires, l'égalité reste vraie :

$$Aire(AICD) + Aire(ABI) = Aire(BEFI) + Aire(ABI)$$

Il en résulte l'égalité des aires des deux parallélogrammes :

$$Aire(ABCD) = Aire(ABEF)$$

Un détour par la notion de polygone convexe

Dans un premier temps, avant de rédiger la fiche 3.1, nous avions pensé attirer l'attention des élèves sur le trapèze $ABED$ d'une autre façon, tout en rencontrant un point des programmes : la notion de polygone convexe. Dans la foulée, nous aurions introduit la notion d'enveloppe convexe d'une paire de polygones.

Notre intention était de favoriser une autre façon de *voir*. En effet, si la démarche de découpage utilisant des lignes internes à une forme semble courante ([17]), celle qui consiste à étendre une forme semble plus rare. Il est souhaitable de la promouvoir également car elle peut amener l'élève à « sortir du cadre » (selon une expression bien connue), à voir au-delà des formes de départ pour faciliter la comparaison ou l'établissement de liens entre celles-ci.

L'enseignant distribue à chaque élève la fiche 10.4 (ou son équivalente « papier-crayon »).

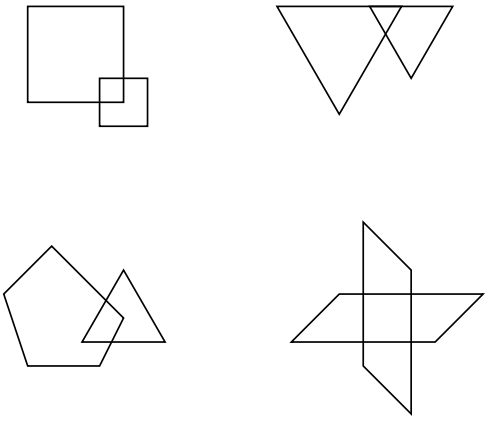
([17]) Elle est proche des activités manuelles de découpages et de collages pratiquées à l'école fondamentale.

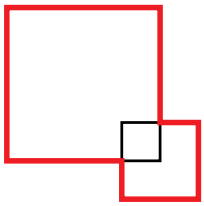
`Fiche 10.4`

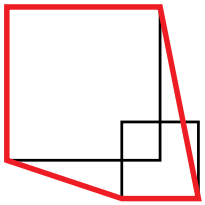
Tu observes des polygones regroupés par paires.

Information : si tu peux toujours te déplacer en ligne droite d'un point à un autre d'un polygone, sans en sortir, on dit que ce polygone est *convexe*.

Pour chaque paire de polygones, construis le plus petit polygone *convexe* qui la recouvre entièrement.







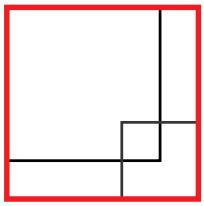


Fig. 9.40

L'enseignant explique d'abord ce qu'est une forme convexe à l'aide des exemples figurant sur la fiche. Au besoin, il donne d'autres exemples et demande aux élèves de venir dessiner au tableau des formes convexes et des formes non convexes. Il peut aussi demander à la classe quelle serait la plus petite enveloppe convexe d'une paire de polygones dessinée au tableau. Les élèves travaillent ensuite seuls à partir de la fiche.

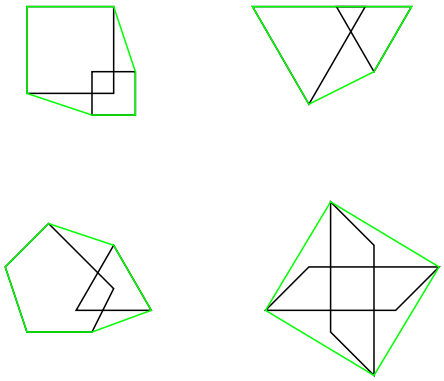
Cette activité ne pose pas de difficulté instrumentale particulière. Avec le logiciel, les élèves choisissent `Polygone quelconque` dans les `Figures libres` pour construire la plus petite enveloppe convexe.

Les élèves doivent tenir compte simultanément de trois critères lorqu'ils cherchent la forme qui répond à la question :

- la convexité ;
- le recouvrement complet des deux polygones ;
- l'aire minimale.

Dans un premier temps, il pourrait ainsi y avoir différents types d'erreurs (*Fig. 9.40*).

Les indications de l'enseignant devraient permettre aux élèves d'aboutir au réponses correctes (*Fig. 9.41*).



Une explication imagée serait de voir l'enveloppe convexe comme un élastique entourant chaque paire de polygones.

Fig. 9.41

Cette activité trouverait son prolongement dans la fiche 10.5, intitulée « Deux parallélogrammes variant dans une bande ». L'élève doit ouvrir un fichier préalablement conçu par les animateurs et utiliser le dynamisme d'*Apprenti Géomètre*.

Fiche 10.5

Ouvre *Apprenti Géomètre* et choisis le *Niveau B*. Ouvre le fichier *deuxparadyna*. Dans la première bande, tu observes un parallélogramme rouge et un parallélogramme bleu.

a) Fais varier chacun des parallélogrammes dans la bande. Observe les autres formes qui varient.

b) Dans la première bande, construis l'enveloppe convexe des deux parallélogrammes. Colorie-la en jaune. De quel type de polygone s'agit-il ?

c) À partir de ce nouveau polygone et des autres formes, comment peux-tu obtenir l'aire du parallélogramme rouge ? Et celle du parallélogramme bleu ?

d) Quelle conclusion tires-tu des réponses précédentes ?

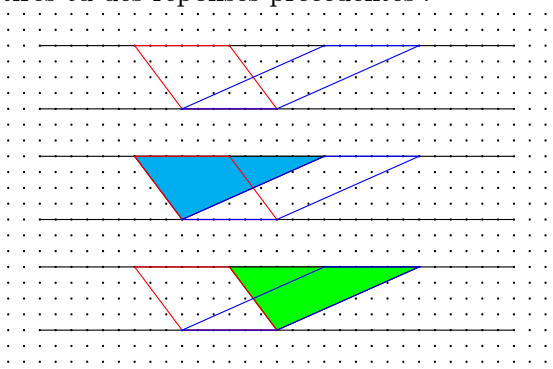


Fig. 9.42

En agissant sur les sommets des parallélogrammes, qui restent sur les bords de la bande, les élèves font varier leur forme. Ils observent les variations simultanées des triangles colorés et constatent ainsi le lien entre les trois figures.

Dans le cadre d'une leçon sans *Apprenti Géomètre*, les élèves ne disposant pas des avantages dynamiques offerts par le logiciel, il se peut que le

lien entre les trois figures n'apparaisse pas aussi clairement et doive être explicité par l'enseignant. Pour enrichir leur perception de la situation, d'autres figures analogues à la figure 9.42, avec deux parallélogrammes de formes différentes, peuvent être fournies aux élèves. On pourra aussi fournir un transparent avec la figure 9.43. Soulignons toutefois que, là où le logiciel permet de parcourir une infinité de cas de figures, l'activité « papier-crayon » ne pourra présenter qu'un nombre limité d'exemples. Elle se différencie en outre de l'activité informatique par un plus grand travail de préparation matérielle demandé à l'enseignant et par un effort d'abstraction supplémentaire demandé à l'élève.

Grâce à la fiche 10.4 (enveloppes convexes), les élèves doivent pouvoir répondre à la question (b) et découvrir le plus petit trapèze qui recouvre les deux parallélogrammes (*Fig. 9.43*). Le trapèze est colorié en jaune pour mettre l'accent sur son aire.

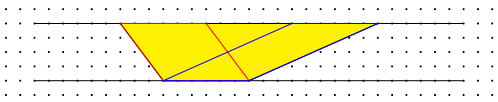


Fig. 9.43

La suite du travail consiste à établir des liens entre les aires de ce trapèze, des deux parallélogrammes et des deux triangles colorés.

La démarche pourrait être la suivante :

- l'aire du parallélogramme rouge est égale à l'aire du trapèze diminuée de l'aire du triangle vert ;
- l'aire du parallélogramme bleu est égale à l'aire du trapèze diminuée de l'aire du triangle bleu ;
- les aires des triangles vert et bleu sont égales car ces triangles sont superposables
- l'aire du parallélogramme rouge est donc égale à celle du parallélogramme bleu.

De façon symbolique, on peut écrire :

$$Aire_{parallélogramme\ rouge} = Aire_{trapèze} - Aire_{triangle\ vert}$$

$$Aire_{parallélogramme\ bleu} = Aire_{trapèze} - Aire_{triangle\ bleu}$$

Comme $Aire_{triangle\ vert} = Aire_{triangle\ bleu}$

On trouve $Aire_{parallélogramme\ rouge} = Aire_{parallélogramme\ bleu}$

9.6 L'aire du triangle

Cette séquence est basée sur les fiches 4.1 à 4.4.

9.6.1 Assembler deux triangles isométriques

Cette activité a été inspirée par celles qui sont décrites dans [55], chapitre 11, « Assembler des figures ».

De quoi s'agit-il? Les élèves cherchent tous les quadrilatères qu'il est possible de réaliser en assemblant deux triangles isométriques (avec le logiciel, il créent un triangle et le dupliquent ; sans le logiciel, ils disposent de triangles isométriques en carton).

Enjeux
- Découvrir que l'assemblage de deux triangles isométriques peut donner des parallélogrammes, des cerfs-volants et des pointes de flèches.
- Découvrir que si l'on découpe un parallélogramme suivant une de ses diagonales, on obtient deux triangles superposables par déplacement.
- Découvrir trois façons différentes d'engendrer un parallélogramme à partir d'un triangle.

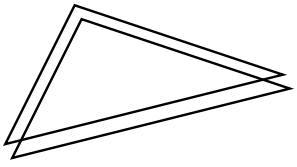
Compétences
- *Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.*
- *Reconnaître et caractériser une tranlation, une symétrie axiale et une translation.*
- *Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.*
- *Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.*
- *Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.*

De quoi a-t-on besoin?
- Des fiches 4.1 et 4.2.
- De triangles isométriques (ni isocèles, ni équilatéraux, ni rectangles) en carton.
- De bâtons de colle.

L'enseignant distribue les fiches 4.1 et 4.2.

`Fiche 4.1`

1. Crée un triangle quelconque et duplique-le.
2. Cherche différentes manières d'assembler ces deux triangles pour obtenir un quadrilatère. Explore toutes les possibilités (tu peux retourner les triangles).
3. Quelles sortes de quadrilatères obtiens-tu ?



Analyse procédurale

Lors de la création du triangle initial à l'écran, on veillera à ce qu'il ne soit pas trop « particulier ». Lors de la recherche avec *Apprenti Géomètre*, afin d'ajuster deux triangles par un côté, les élèves doivent utiliser les fonctionnalités du menu `Mouvements` : `Glisser`, `Tourner` et `Retourner`. Cette recherche se fera également avec les triangles isométriques en carton, chaque triangle possédant une face unie et une face pointée afin de distinguer un triangle retourné d'un triangle qui ne l'est pas. Les quadrilatères réalisés de cette façon sont collés sur la fiche 4.2.

Analyse conceptuelle

La principale difficulté à laquelle on peut s'attendre relève de l'organisation du travail de recherche. Il faut inciter l'élève à élaborer une stratégie pour trouver tous les quadrilatères possibles. Pour lui donner un coup de pouce, on peut lui suggérer :

- d'épuiser toutes les possibilités sans retourner aucun triangle, ensuite en retournant un seul triangle, enfin en retournant les deux ;
- d'assembler les triangles par le « petit côté », par le « côté intermédiaire » et par le « grand côté ».

Une mise en commun a ensuite pour but de dresser la liste de tous les quadrilatères possibles et de les nommer. On compare les aires des quadrilatères ainsi que leurs périmètres. Les aires sont bien sûr toutes égales. Du point de vue des périmètres,

- les quadrilatères résultant d'un assemblage par le « petit côté » ont le périmètre le plus grand (*Fig. 9.44*)

Fig. 9.44

- les quadrilatères résultant d'un assemblage par le « côté intermédiaire » ont un périmètre intermédiaire (*Fig. 9.45*),

Fig. 9.45

- les quadrilatères résultant d'un assemblage par le « grand côté » ont le périmètre le plus petit (*Fig. 9.46*).

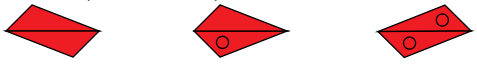


Fig. 9.46

Échos des classes

Comme cela a déjà été observé au cours d'une première expérimentation en mai 2006 dans une autre classe de première, pour beaucoup d'élèves, la recherche avec le logiciel marque le pas après deux ou trois assemblages. Les fonctionnalités qui causent le plus de difficultés sont `Tourner` et surtout `Retourner` (certains enfants ne pensent pas spontanément à cette dernière).

Les animateurs distribuent alors la fiche 4.2 et les triangles en carton, ce qui permet à la plupart des élèves de progresser dans leur travail.

Beaucoup d'élèves ont donc d'abord recherché les différentes façons d'as-

sembler les triangles en carton ; une fois les quadrilatères obtenus, elles les ont reproduits à l'écran. Certaines élèves, qui avaient obtenu six quadrilatères en carton, ne sont pas arrivées à les réaliser tous avec le logiciel. Deux explications sont possibles : le manque de temps ou le fait que les élèves étaient satisfaites par la solution « carton ».

Un comportement mérite selon nous d'être mis en évidence : quelques élèves placent des triangles en carton sur l'écran et agissent ensuite sur les triangles virtuels pour les amener, par un ou plusieurs essais, dans la même position et orientation que les triangles en carton. Au-delà de la difficulté instrumentale, cette façon de faire est sans doute également liée à la difficulté de percevoir l'orientation d'une figure. Il serait intéressant de voir si les mêmes élèves, à qui l'on demanderait de dessiner aux instruments les différents quadrilatères possibles sur une feuille blanche, éprouveraient aussi le besoin de placer les triangles en carton sur la feuille.

Finalement, le travail aboutit au collage sur une feuille de papier pointé quadrillé des différents quadrilatères trouvés par les élèves. Presque toutes trouvent six quadrilatères possibles. Quelques élèves trouvent un septième quadrilatère comme dans le travail reproduit ci-dessous (*Fig. 9.47*)

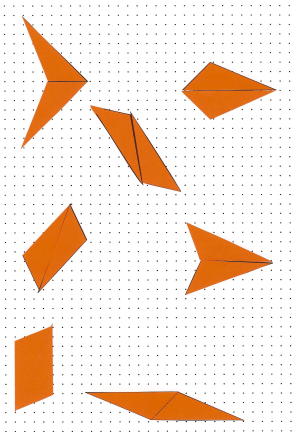


Fig. 9.47

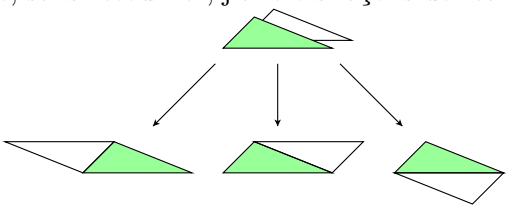
Très peu d'élèves pensent à retourner les deux triangles de départ. Aucune n'arrive à trouver les neuf quadrilatères possibles. En effet, leur raisonnement est le suivant : sur chacun des côtés du premier triangle, je peux amener le côté de même longueur du second triangle, retourné ou non (deux possibilités) ; comme je peux faire cela pour chacun des trois côtés, il y a 3 fois 2 égale 6 possibilités.

9.6.2 Pour trouver l'aire d'un triangle

L'enseignant distribue les fiches de synthèse 4.3 et 4.4 énonçant des propriétés découvertes au cours du travail.

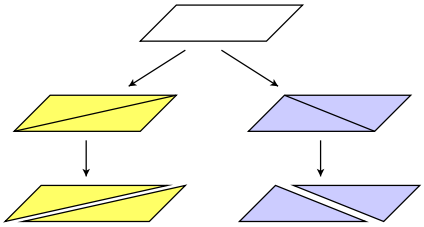
Fiche 4.3

Si je duplique un triangle, sans retourner, j'ai trois façons de réaliser un parallélogramme.



– Le côté commun aux deux triangles est une diagonale du parallélogramme réalisé.
– L'aire du parallélogramme est égale au double de celle du triangle.
– L'aire du triangle est égale à la moitié de celle du parallélogramme.

Si je découpe un parallélogramme le long d'une de ses diagonales, j'obtiens deux triangles isométriques.



La façon de calculer l'aire d'un triangle découle de la façon de calculer l'aire d'un parallélogramme. Chaque côté du triangle peut servir de base (*Fig. 9.48*).

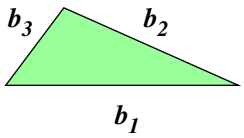


Fig. 9.48

Pour retrouver une position familière d'une base, le logiciel permet de tourner l'écran jusqu'à ce que le côté choisi comme base se retrouve en position horizontale.

Si l'on décide d'utiliser b_1 comme base, on crée une bande comprenant ce côté et l'on peut y voir deux parallélogrammes (*Fig. 9.49* et *Fig. 9.50*).

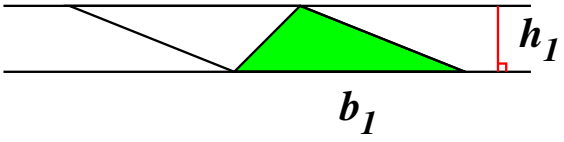


Fig. 9.49

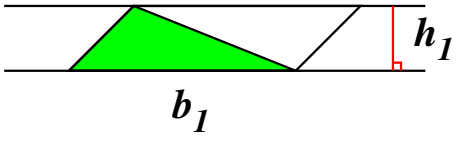


Fig. 9.50

Désignant la largeur de la bande par h_1, chacun d'eux a pour aire $b_1 \times h_1$. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{b_1 \times h_1}{2}$.

Nous pouvons procéder de manière analogue en choisissant b_2 comme base (*Fig. 9.51* et *Fig. 9.52*).

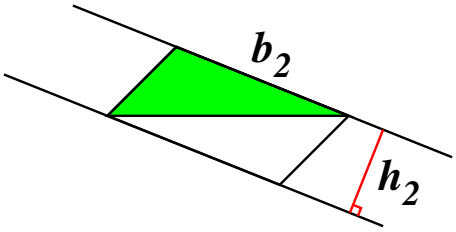


Fig. 9.51

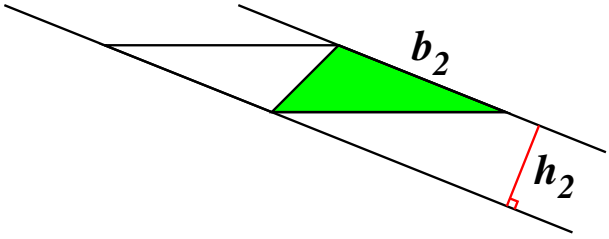


Fig. 9.52

Désignant la largeur de la bande par h_2, chaque parallélogramme a pour aire $b_2 \times h_2$. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{b_2 \times h_2}{2}$.

Et enfin, en choisissant b_3 comme base (*Fig. 9.53* et *Fig. 9.54*).

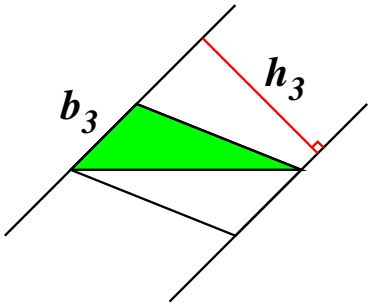


Fig. 9.53

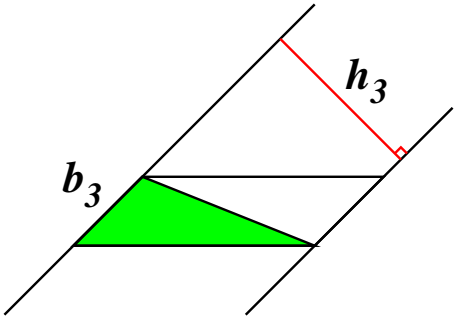


Fig. 9.54

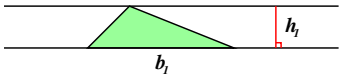
Désignant la largeur de la bande par h_2, chaque parallélogramme a pour aire $b_2 \times h_2$. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{b_2 \times h_2}{2}$.

La fiche 4.4 réunissant ces conclusions est distribuée aux élèves.

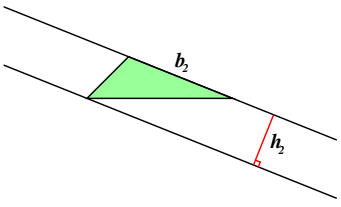
`Fiche 4.4`

Pour trouver l'aire d'un triangle :

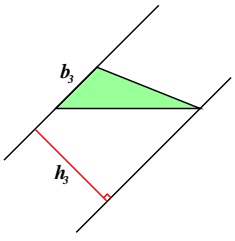
1. je mesure n'importe quelle base ;
2. je mesure la hauteur correspondante ;
3. je multiplie ces deux mesures ;
4. je divise le résultat par 2.



Aire du triangle $= \frac{b_1 \times h_1}{2}$



Aire du triangle $= \frac{b_2 \times h_2}{2}$



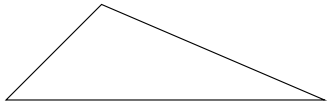
Aire du triangle $= \frac{b_3 \times h_3}{2}$

Prolongements et liens

- **Découper un triangle**

Le problème de l'aire du triangle peut être abordé par le biais du découpage. Ainsi, la fiche 10.7 peut-elle être proposée aux élèves.

Fiche 10.7
Découpe ce triangle (une seule découpe !) pour obtenir deux formes qui permettent de reconstituer un parallélogramme. Explore toutes les possibilités.



La solution de ce problème passe par une « décomposition hétérogène ([18]) » qui n'est pas facile à trouver pour de jeunes élèves.
Il faut donc s'attendre, dans un premier temps, à des découpes par un sommet et un point — éventuellement le milieu — du côté opposé, et à des assemblages qui ne sont pas des parallélogrammes (*Fig. 9.55*).

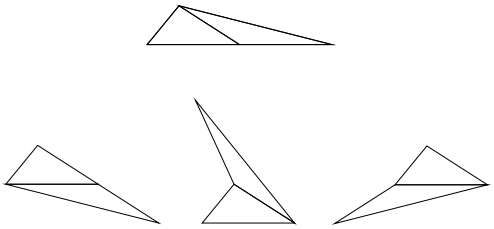


Fig. 9.55

Signalons toutefois qu'un rectangle peut être obtenu en découpant un triangle isocèle suivant la hauteur appropriée (*Fig. 9.56*) et qu'un carré peut être obtenu en découpant un triangle rectangle isocèle (*Fig. 9.57*).

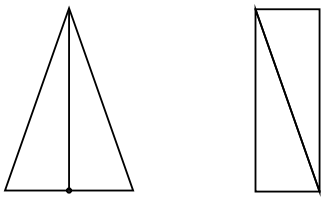


Fig. 9.56

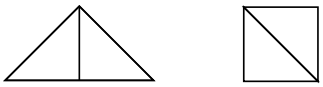


Fig. 9.57

Suivant le temps disponible, on pourra leur proposer une activité destinée à faire émerger l'idée du découpage par les milieux de deux côtés (à préciser).
Une fois installée, cette idée pourra être exploitée de différentes façons. Ainsi, il est possible de réaliser un parallélogramme de même base mais de hauteur égale à la moitié de celle du triangle (*Fig. 9.58*), tout comme il est possible de réaliser un parallélogramme de même hauteur mais de base égale à la moitié de celle du triangle (*Fig. 9.59*) ([19]).

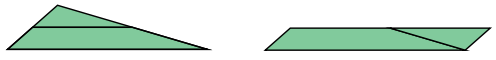


Fig. 9.58

([18]) Au sens de Duval, [34] : la décomposition se fait en unités figurales de formes différentes entre elles.
([19]) Nous admettrons que les nouvelles formes réalisées sont des parallélogrammes. Pour le démontrer, il faudrait disposer du « petit théorème de Thalès » (*voir page 304*).

Fig. 9.59

On en déduit deux façons de calculer l'aire du triangle :

$$b_1 \times \frac{h_1}{2} \text{ et } \frac{b_1}{2} \times h_1$$

Rapprochant cette activité de celle où l'on a dupliqué un triangle, et reprenant la formule d'aire écrite à cette occasion, nous obtenons une conclusion importante du point de vue du calcul algébrique :

$$\frac{b_1 \times h_1}{2} = b_1 \times \frac{h_1}{2} = \frac{b_1}{2} \times h_1$$

Suivant la même idée, d'autres découpages permettent de déduire des formules analogues faisant intervenir b_2 et h_2 ou b_3 et h_3.

Fig. 9.60

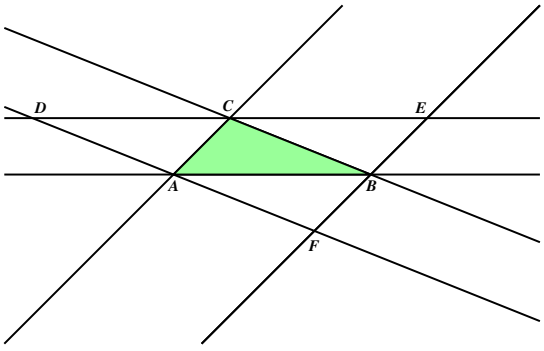
Fig. 9.61

- **Un triangle dans trois bandes**

L'outil *Bande*, déjà utilisé pour les parallélogrammes, peut à nouveau être exploité pour les triangles. On propose aux élèves la fiche 10.9.

Fiche 10.9

1. Crée un triangle quelconque ABC. Utilise les sommets du triangle pour créer des bandes commme dans la figure ci-dessous.
2. Observe attentivement cette figure. Quelles sont les formes que tu vois ?
3. Compare l'aire de chacune de ces formes avec l'aire du triangle ABC.
4. Modifie le triangle ABC. Que constates-tu du point de vue des formes ? Du point de vue des aires ?



Les élèves écrivent leurs réponses sur la fiche 10.10.

Fiche 10.10

La forme que je vois ...	Son aire par rapport à celle du triangle ABC ...
triangle ACD	égale
triangle AFB	égale
triangle BEC	égale
triangle DFE	quadruple
parallélogramme $ABCD$	double
parallélogramme $AFBC$	double
parallélogramme $ABEC$	double
trapèze $ABED$	triple
trapèze $BCDF$	triple
trapèze $AFEC$	triple

On demande ensuite aux élèves de trouver un parallélogramme de même aire que le triangle DFE. La solution la plus naturelle est sans doute de réaliser un parallélogramme formé de quatre triangles isométriques au triangle ABC. Voici trois possibilités (*Fig. 9.62*, *Fig. 9.63* et *Fig. 9.64*).

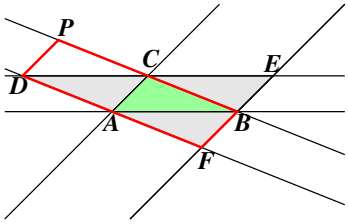


Fig. 9.62

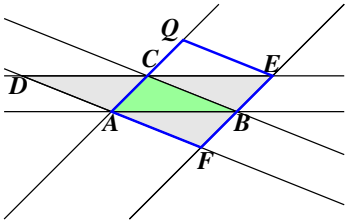


Fig. 9.63

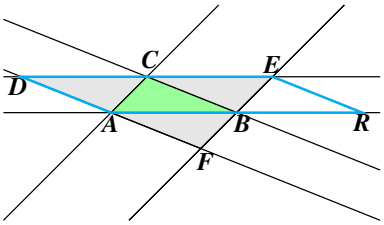


Fig. 9.64

Chaque parallélogramme a une base commune avec le triangle DFE et une hauteur égale à la moitié de celle du triangle. Un travail approfondi sur cette figure pourrait ainsi amener l'élève à découvrir le découpage permettant de résoudre le problème de la fiche 10.7.

Il est également intéressant de remarquer (justifier) que les points A, B et C sont les milieux respectifs des segments $[DF]$, $[FE]$ et $[DE]$. En effet, le quadrilatère $AFBC$ est un parallélogramme (deux bandes qui se coupent) et donc $|AF| = |BC|$. Comme $ABCD$ est aussi un parallélogramme, on a $|AD| = |BC|$. On en déduit que $|AF| = |AD|$ et que A est le milieu de $[DF]$. Un raisonnement analogue peut être tenu pour les points B et C.

Plus tard, cette figure pourrait constituer une approche intéressante pour le « petit théorème de Thales » : le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est la moitié de celle du troisième côté.

9.7 L'aire du trapèze

Cette séquence est basée sur les fiches 5.1 à 5.4.

9.7.1 Assembler deux trapèzes isométriques

De quoi s'agit-il? Les élèves cherchent tous les quadrilatères qu'il est possible de réaliser en assemblant deux trapèzes isométriques. Ils envisagent le cas d'un trapèze quelconque et d'un trapèze rectangle (avec le logiciel, il créent un trapèze et le dupliquent ; sans le logiciel, ils disposent de trapèzes isométriques en carton).

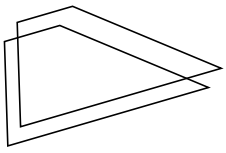
Enjeux Découvrir que l'assemblage de deux trapèzes isométriques peut donner des parallélogrammes, des rectangles, des trapèzes isocèles.

De quoi a-t-on besoin?
- Des fiches 5.1 et 5.2.
- De triangles isométriques en carton.
- De bâtons de colle.

L'enseignant distribue les fiches 5.1 et 5.2.

`Fiche 5.1`

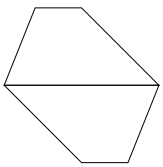
1. Crée un trapèze quelconque et duplique-le.
2. Cherche différentes manières d'assembler ces deux trapèzes pour obtenir un quadrilatère. Explore toutes les possibilités. Tu peux utiliser tous les outils du menu *Mouvements*.
3. Quelles sortes de quadrilatères obtiens-tu ?



Analyse procédurale Comme avec les triangles, on veillera à ce que les trapèzes créés ne soient pas trop « particuliers ». Lors de la recherche avec *Apprenti Géomètre*, afin d'ajuster deux trapèzes par un côté, les élèves doivent utiliser les fonctionnalités du menu `Mouvements` : `Glisser`, `Tourner` et `Retourner`. Cette recherche se fera également avec les trapèzes isométriques en carton, chaque trapèze possédant une face unie et une face pointée afin de distinguer un trapèze retourné d'un trapèze qui ne l'est pas. Les quadrilatères réalisés de cette façon sont collés sur la feuille de travail 5.2.

Analyse conceptuelle Le nombre de possibilités d'assemblage est plus réduit qu'avec les triangles. Il faut pourtant s'attendre à voir certains élèves assembler deux trapèzes par la grande base ou par la petite base, obtenant ainsi des hexagones, convexes ou non (*Fig. 9.65*).

Après que les élèves aient obtenu les parallélogrammes attendus (*Fig. 9.66* et *Fig. 9.67*), on leur demande de comparer leurs dimensions avec celles des trapèzes.



Dans le cas des trapèzes quelconques :

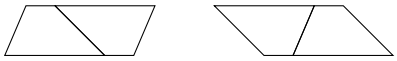


Fig. 9.66

Dans le cas des trapèzes rectangles :

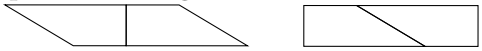
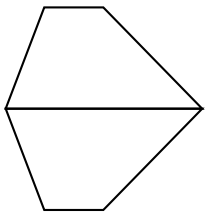


Fig. 9.67

Par rapport au trapèze qui a servi à le construire, on observe que la base d'un parallélogramme est égale à la somme de la petite et de la grande base du trapèze, tandis que la hauteur est la même. Désignant respectivement par b et B la petite et la grande base du trapèze, on écrit que la base du parallélogramme est égale à $b + B$. L'aire du parallélogramme est donc égale à $(b + B) \times h$ et celle du trapèze est égale à $\frac{(b+B)\times h}{2}$.

Échos des classes

Le travail se déroule un peu plus rapidement qu'avec les triangles. Comme nous pouvions nous y attendre, certains enfants oublient la consigne selon laquelle il faut réaliser un quadrilatère et réalisent les assemblages de la figure 9.65.



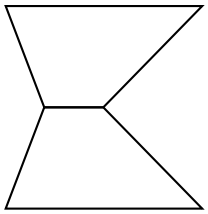


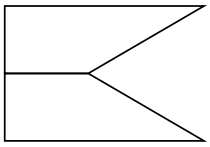
Fig. 9.68

La plupart des élèves ont retenu la leçon de l'activité précédente et pensent cette fois à retourner les formes. C'est ainsi que nous voyons souvent apparaître le trapèze isocèle résultant de l'assemblage d'un trapèze rectangle et de son retourné (*Fig. 9.69*),

Fig. 9.69

ainsi que des parallélogrammes superposables par retournement (*Fig. 9.70*).

Fig. 9.70



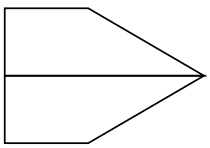


Fig. 9.71

Lorsque l'élève oublie la consigne « quadrilatère » tout en retournant, d'autres formes apparaissent qui ne répondent pas à la question (*Fig. 9.68* et *Fig. 9.71*).

Pendant qu'ils travaillaient avec *Apprenti Géomètre*, les élèves avaient reçu quatre trapèzes quelconques isométriques et quatre trapèzes rectangles isométriques en carton. Contrairement à ce qui s'est passé lors de l'activité d'assemblage de triangles, pour la plupart des élèves, ces formes ont été collées sur la feuille de travail après que les quadrilatères aient été réalisés à l'écran. Ce changement de comportement peut trouver deux explications :

– les possibilités d'assemblage étant plus réduites qu'avec les triangles, il est plus aisé de les découvrir toutes à l'aide du logiciel ;

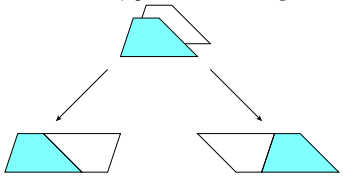
– forts de l'expérience de l'activité précédente, les élèves éprouvent moins le besoin de recourir aux formes en carton.

9.7.2 Pour trouver l'aire d'un trapèze

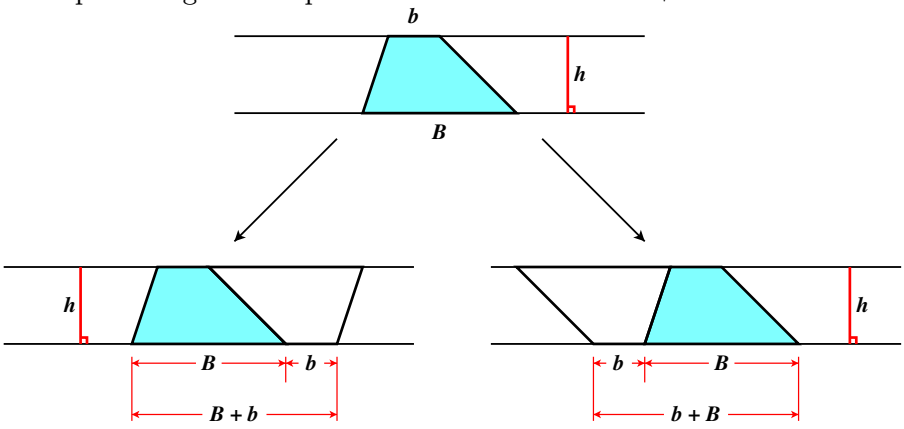
L'enseignant distribue les fiches de synthèse 5.3 et 5.4.

`Fiche 5.3`

Si je duplique un trapèze, sans retourner, j'ai deux façons de réaliser un parallélogramme.



– L'aire du parallélogramme est égale au double de celle du trapèze.
– L'aire du trapèze est égale à la moitié de celle du parallélogramme.
– À partir des côtés parallèles du trapèze, je peux construire une bande.
– J'appelle b la longueur de la *petite base* et j'appelle B la longueur de la *grande base* du trapèze.
– J'appelle h la *hauteur* du trapèze (c'est-à-dire la largeur de la bande).
– Chacun des parallélogrammes précédents a comme base $b + B$ et comme hauteur h.

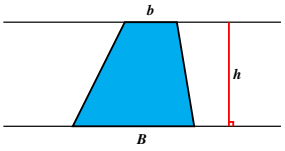


Comme pour un triangle, la façon de calculer l'aire d'un trapèze découle de la façon de calculer l'aire d'un parallélogramme. Cette conclusion est énoncée et illustrée par la fiche 5.4.

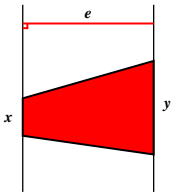
Fiche 5.4

Pour trouver l'aire d'un trapèze :

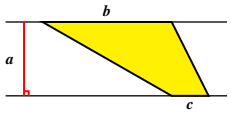
1. je mesure sa grande base, je mesure sa petite base et j'additionne ces deux mesures ;
2. je mesure sa hauteur ;
3. je multiplie la hauteur par la somme des bases ;
4. je divise le résultat par 2.



Aire du trapèze $= \frac{(B+b)\times h}{2}$



Aire du trapèze $= \frac{(x+y)\times e}{2}$



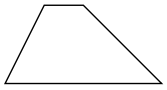
Aire du trapèze $= \frac{(b+c)\times a}{2}$

Prolongements et liens

Tout comme pour le triangle, le problème de l'aire du trapèze peut être abordé par le biais du découpage.
L'enseignant propose alors aux élèves la fiche 10.8.

Fiche 10.8

Découpe ce trapèze (une seule découpe !) pour obtenir deux formes qui permettent de reconstituer un parallélogramme. Explore toutes les possibilités.



Les élèves bénéficiant de l'expérience du découpage d'un triangle par les milieux de deux côtés trouveront sans doute plus rapidement un découpage adéquat du trapèze.

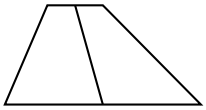


Fig. 9.72

Quoi qu'il en soit, nous pouvons encore nous attendre à des découpages ne permettant pas d'aboutir facilement à un parallélogramme :
– par les milieux des bases (*Fig. 9.72*) ;
– suivant une diagonale (*Fig. 9.73*).

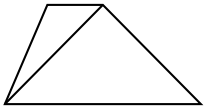


Fig. 9.73

Le second découpage mérite néanmoins que l'on s'y attarde. Il fournit en effet deux triangles de même hauteur h que le trapèze, l'un ayant comme base B (la grande base du trapèze) et l'autre ayant comme base b (la petite base du trapèze).
Les aires de ces triangles sont donc respectivement données par $\frac{B\times h}{2}$ et

$\frac{b \times h}{2}$. L'aire du trapèze étant égale à la somme des aires des deux triangles, elle est donnée par :

$$\frac{B \times h}{2} + \frac{b \times h}{2}$$

L'occasion se présente ici de montrer l'équivalence de cette formule avec celle qui a été obtenue lors de l'activité de duplication du trapèze $\frac{(B+b) \times h}{2}$. La notion algébrique de distributivité bénéficie ainsi d'un support géométrique.

Le découpage efficace qui apparaîtra d'abord sera sans doute celui qui se fait par les milieux des côtés non parallèles du trapèze. Avec *Apprenti Géomètre*, les élèves devront à nouveau penser à construire les milieux des côtés non parallèles en utilisant la fonctionnalité `Diviser en 2`. Ensuite, les fonctionnalités `Découper` et `Tourner` permettront d'aboutir rapidement au résultat souhaité (*Fig. 9.74*).

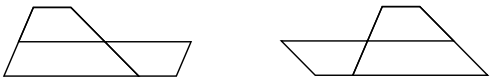


Fig. 9.74

Les parallélogrammes obtenus ont chacun une base égale à la somme des bases du trapèze et une hauteur égale à la moitié de celle du trapèze. Chaque parallélogramme a ainsi pour aire $(B + b) \times \frac{h}{2}$. À nouveau, l'équivalence de cette formule avec les précédentes sera montrée.

Un procédé plus complexe permet encore d'obtenir d'autres parallélogrammes. Le trapèze subit deux découpes : la première par le milieu de la petite base et le milieu d'un des côtés non parallèles, la seconde par le milieu de la grande base et le milieu du dernier côté. La figure 9.75 illustre ce procédé.

Fig. 9.75

Les parallélogrammes ainsi réalisés ont pour base $\frac{B}{2} + \frac{b}{2}$ et pour hauteur h. Leur aire est donc donnée par $(\frac{B}{2} + \frac{b}{2}) \times h$. À nouveau, cette formule sera mise en rapport avec les précédentes.

9.8 L'aire du losange et du cerf-volant

Cette séquence est basée sur les fiches 6.1 à 6.5.

9.8.1 Du losange au rectangle

De quoi s'agit-il? Les élèves cherchent comment découper un losange de façon à réaliser un rectangle de même aire avec les pièces obtenues (avec le logiciel, il utilisent les fonctionnalités `Découper` et `Fusionner` ; sans le logiciel, ils disposent de losanges en carton).

Enjeux Découvrir que si l'on découpe un losange suivant ses diagonales, on peut réaliser un rectangle de même aire avec les pièces obtenues.

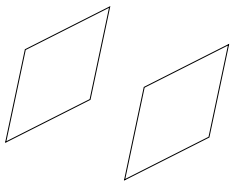
De quoi a-t-on besoin?
- Des fiches 6.1 à 6.2.
- De losanges isométriques en carton.
- De ciseaux et de bâtons de colle.

Situation initiale

L'enseignant distribue les fiches 6.1 et 6.2.

`Fiche 6.1`

1. Crée un losange et duplique-le.
2. Découpe un des losanges de façon à réaliser un rectangle de même aire.
3. Compare les dimensions du rectangle avec celles du losange.



Analyse procédurale Cette activité fait appel aux fonctionnalités `Diviser, Découper et Dupliquer` ainsi qu'à celles du menu `Mouvements`. *A priori*, la découpe la plus naturelle est celle qui se fait suivant les diagonales. Les élèves découpent une première fois afin d'obtenir deux triangles isocèles isométriques. Il reste à découper l'un de ces triangles pour obtenir deux triangles rectangles. Deux méthodes sont possibles :

1. diviser la base d'un triangle isocèle en deux afin de construire son milieu ; découper le triangle par ce nouveau point et le sommet opposé ;
2. construire un segment perpendiculaire à la base et passant par le sommet opposé ; le triangle étant isocèle, le pied de la hauteur est le milieu de la base.

Les deux triangles rectangles obtenus et le triangle isocèle restant sont glissés de manière appropriée pour obtenir un rectangle. Cela peut se faire de deux façons (*Fig. 9.76* et *Fig. 9.77*).

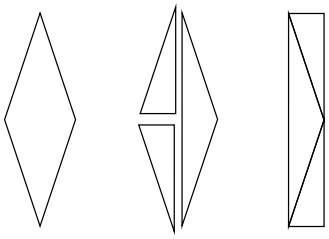


Fig. 9.76

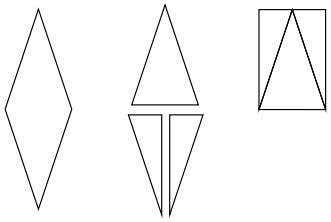


Fig. 9.77

Il est aussi possible, et plus « économique », de procéder de la façon suivante :

1. construire le centre du losange (choisir `Construire le centre` dans le menu `Opérations`) ;
2. découper le losange par un sommet, le centre et un sommet voisin du premier ; un triangle rectangle d'aire égale à un quart de celle du losange est ainsi obtenu ;
3. dupliquer trois fois ce triangle ;
4. glisser et tourner ces quatre formes afin de réaliser l'un ou l'autre des rectangles possibles.

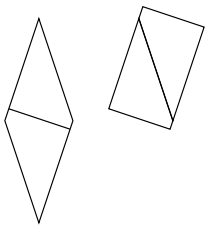


Fig. 9.78

Enfin, le losange étant un parallélogramme, on peut penser au découpage classiquement utilisé pour passer d'un parallélogramme à un rectangle. Il est ainsi possible de construire un segment perpendiculaire à un côté du losange (passant par un sommet ou non) et de découper suivant ce segment (*Fig. 9.78*).

Analyse conceptuelle

À l'école primaire, la formule d'aire couramment enseignée pour le losange est celle qui fait intervenir les longueurs des diagonales : $\frac{d \times D}{2}$ (où d représente la longueur de la petite diagonale et D celle de la grande). Il est donc prévisible que les enfants s'intéressent aux diagonales pour le travail qu'ils doivent réaliser. La principale difficulté, pour beaucoup d'élèves, sera sans doute de lier l'objectif à atteindre — réaliser un rectangle — à la nécessité de créer des formes possédant un ou plusieurs angles droits. Un élève capable d'établir ce lien aura probablement davantage de chances de découper le losange d'une façon adéquate.

Une fois les rectangles réalisés, lorsque l'enseignant demande de comparer leurs dimensions avec celles du losange, son intention est d'amener les élèves à constater que :

– la base et la hauteur du premier rectangle (*Fig. 9.76*) sont respectivement égales à la demi petite diagonale et à la grande diagonale du losange ;
– la base et la hauteur du second rectangle (*Fig. 9.77*) sont respectivement égales à la petite diagonale et à la demi grande diagonale du losange.

	Base	Hauteur	Aire
	d	$\frac{D}{2}$	$d \times \frac{D}{2}$
	$\frac{d}{2}$	D	$\frac{d}{2} \times D$

L'activité a ainsi des retombées sur le plan de l'algèbre en montrant l'égalité des expressions $d \times \frac{D}{2}$ et $\frac{d}{2} \times D$. Il reste à illustrer cela par des exemples numériques. Il est en effet essentiel que l'acquisition du calcul algébrique se fasse dans un va et vient incessant entre les expressions littérales et les calculs numériques.

Échos des classes

Les élèves sont maintenant bien familiarisés avec le logiciel et trouvent rapidement le losange dans les `Formes libres`. Certains créent un losange trop petit ce qui ne facilite pas le travail de découpage. D'autres créent un losange « trop proche d'un carré », voire même un carré (c'est plus rare).

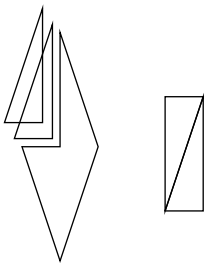


Fig. 9.79

Nous observons là des comportements assez caractéristiques de jeunes enfants : manque d'anticipation dans le premier cas, non conscience de la nécessité d'une solution générale dans le second. Un groupe ayant créé un carré déclare même le travail terminé puisqu'ils ont créé un carré, donc un rectangle ! Il y avait évidemment là une attitude de défi d'élèves plus audacieux, heureux d'avoir trouvé une solution immédiate en court-circuitant les attentes de l'enseignant. Nous devons donc régulièrement reformuler, repréciser celles-ci.

Souvent, l'élève oublie qu'il faut réaliser un rectangle de même aire que le losange. Nous avons ainsi observé :

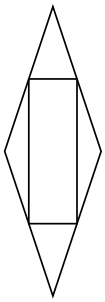


Fig. 9.80

- un élève qui a correctement découpé un quart du losange en passant par son centre, a dupliqué le triangle rectangle ainsi obtenu et réalisé un rectangle avec ces deux triangles (*Fig. 9.79*) ; quand nous lui avons demandé de comparer l'aire du rectangle et celle du losange, il a compris son erreur et a poursuivi sa réflexion pour aboutir à une solution correcte avec quatre triangles rectangles ;
- un élève situe correctement les milieux des côtés du losange mais se satisfait du rectangle obtenu en joignant ces points (*Fig. 9.80*) ;
- un élève utilise la fonctionnalité `Segment perpendiculaire` à partir de deux sommets du losange et nous montre le rectangle réalisé à l'intérieur de celui-ci (*Fig. 9.81*).

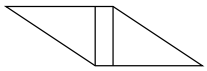


Fig. 9.81

Bien que la consigne d'égalité des aires figure bien sur la fiche 6.1, il est ainsi nécessaire que nous la rappelions oralement, avec insistance.

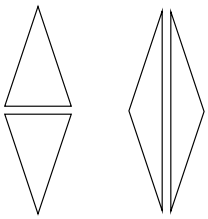


Fig. 9.82

Au début de l'activité, beaucoup d'élèves cherchent à obtenir une solution en réalisant une seule découpe. Ainsi observons-nous plusieurs enfants qui découpent suivant l'une ou l'autre diagonale (*Fig. 9.82*), manipulent les triangles obtenus et, réalisant qu'ils n'obtiendront pas un rectangle de cette façon, nous demandent « on peut encore découper ? ».

Un élève est cependant allé plus loin : fusionnant les deux triangles pour obtenir un parallélogramme, il découpe celui-ci suivant une hauteur afin de réaliser un rectangle (*Fig. 9.83*).

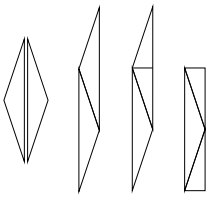


Fig. 9.83

Nous avons observé que pour réaliser ce type de découpage, beaucoup d'élèves ont encore tendance à placer un point à vue sur la base du triangle. L'utilisation de la fonctionnalité `Segment perpendiculaire` (ou `Diviser en 2` qui convient bien dans le cas présent) n'est pas spontanée.

Fig. 9.84

Nous avons été surpris de constater que beaucoup d'élèves découpaient le losange suivant le segment joignant les milieux de deux côtés parallèles (*Fig. 9.84*). Une fois qu'ils disposent des deux parallélogrammes, ils les tournent et retournent ... sans succès.

Certains persistent et découpent les deux parallélogrammes suivant les milieux des plus longs côtés (*Fig. 9.85*) et ne sont pas plus avancés.

Fig. 9.85

Toutefois, un élève ayant réalisé le découpage de la figure 9.84 a compris qu'il pouvait réaliser un rectangle à partir de chaque parallélogramme. Il a correctement construit une hauteur et découpé suivant celle-ci (*Fig. 9.86*).

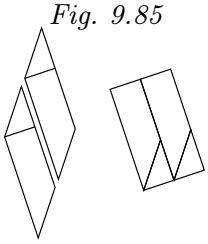


Fig. 9.86

Il nous faut cependant signaler qu'il s'est arrêté après un seul rectangle, cette consigne ayant encore une fois prévalu sur celle qui demandait l'égalité des aires. Dès que nous l'avons questionné sur l'aire, il a correctement terminé son travail.

Toujours en lien avec les difficultés à un trouver un bon découpage, voici une anecdote amusante, en tout début d'activité. Une élève déclare à un animateur « si on doit trouver l'aire (du losange), il faut s'intéresser aux diagonales ». L'animateur lui répond « on n'a pas demandé de trouver l'aire du losange ». De cette réponse, l'élève déduit qu'il faut découper le losange autrement et se détourne alors des diagonales.

Ce malentendu est à nouveau lié à la bonne compréhension des consignes. Cette jeune fille se rappelait sans doute qu'à l'école primaire, on mesurait les diagonales pour calculer l'aire d'un losange. Peut-être est-ce la tournure de phrase négative utilisée par l'animateur qui a influencé son

comportement. En effet, si dans son esprit aire du losange et diagonales étaient intimement liées, le fait de s'entendre dire qu'il ne fallait pas trouver l'aire signifiait du même coup qu'il ne fallait pas s'intéresser aux diagonales. Nous touchons ici au rôle délicat joué par l'animateur dans des situations ouvertes où l'élève doit se livrer à un travail de recherche. La meilleure attitude consiste sans doute à répondre à une question par une autre question, tout en évitant des formules trop affirmatives ou négatives. Par exemple : « Que peux-tu faire avec les diagonales ? » ou « Que veux-tu dire par *s'intéresser aux diagonales* ? ».

Petit à petit, avec notre aide, tous les élèves s'orientent vers les découpes suivant les diagonales. Entre l'utilisation d'un segment perpendiculaire et la division en deux d'un segment pour réaliser les bonnes découpes, les choix sont partagés.

Parmi les élèves qui obtiennent le triangle rectangle d'aire égale à un quart de celle du losange, il en est peu qui pensent à le dupliquer trois fois pour obtenir toutes les pièces du puzzle. Ceci est probablement dû au fait que les quatre triangles rectangles ne sont pas tous dans la même orientation. Si l'on travaille avec quatre exemplaires du même triangle rectangle, il faudra notamment penser à en retourner deux. Il semble donc plus naturel pour les jeunes de découper la forme de façon à ce que chaque pièce du puzzle soit aisément identifiable.

Notons que notre consigne, demandant de découper le losange, a naturellement orienté les élèves vers cette démarche. Il était aussi possible, après avoir construit le centre du losange et choisi `Triangle rectangle` dans les `Formes libres`, d'en créer quatre « sur » le losange et de les dupliquer afin de disposer du puzzle complet.

Un duo d'élèves a réalisé une découpe du losange en s'inspirant de celle du parallélogramme. Il faut souligner que le losange était dans une position tout à fait quelconque et qu'elles ont correctement construit une hauteur avant de procéder au découpage, suivant en cela la démarche illustrée par la figure 9.78, page 311.

Par la suite, le même duo a réalisé sans aide deux rectangles suivant la démarche décrite dans l'analyse procédurale (*Fig. 9.76* et *Fig. 9.77*, page 311). Le comportement de ces deux élèves autonomes, ayant trouvé trois découpages permettant de résoudre le problème, n'a ensuite été observé qu'une seule fois, dans une autre classe. Le plus souvent, après quelques encouragements et suggestions, la plupart des élèves réussissent à obtenir un rectangle avec quatre formes. Fréquemment, ils en restent là et ne pensent pas spontanément à glisser les formes pour obtenir un autre rectangle de même aire.

Dès le début de l'activité, une enseignante a émis des craintes en disant que ses élèves allaient éprouver des difficultés à réaliser ce travail (découper des formes pour en réaliser d'autres en agençant les pièces différemment n'étant pas une activité habituelle pour eux).

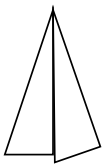


Fig. 9.87

Une autre enseignante a émis l'hypothèse que le travail aurait été mené à bien plus rapidement avec les seules formes en carton. Nous en doutons car les losanges en carton n'ont pas davantage suggéré aux élèves un découpage efficace. Nous avons également vu en enfant en grande difficulté en fin de leçon pour coller correctement les triangles rectangles qui devaient lui permettre de réaliser les deux rectangles : il voyait mal comment faire correspondre les côtés de deux triangles voisins, et tentait d'ajuster l'hypoténuse de l'un avec le grand côté de l'angle droit de l'autre (*Fig. 9.87*). L'aide de sa titulaire a été nécessaire pour qu'il termine sa tâche.

Lors de la séance suivante, une synthèse a été réalisée dans la salle de projection. Nous avons rappelé différentes façons de réaliser un rectangle de même aire qu'un losange et nous avons comparé les dimensions de ces formes. Cette phase de la leçon se déroule conformément notre analyse conceptuelle (*page 311*). Dans la foulée, nous avons ensuite demandé aux élèves comment construire un rectangle d'aire double de celle du losange. Certains d'entre eux suggèrent de dupliquer le losange et d'entreprendre les découpes selon les diagonales : les huit triangles rectangles permettront sûrement de construire un rectangle d'aire double. Il se trouve néanmoins toujours un élève pour suggérer de « mettre des triangles tout autour du losange » (*Fig. 9.88*).

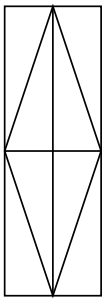


Fig. 9.88

Cet élève accepte d'exécuter les manipulations devant le reste du groupe. Il atteint l'objectif en utilisant à bon escient les fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre*. Interrogés sur les dimensions de ce rectangle, les élèves n'éprouvent aucune difficulté à dire que sa base est égale à la petite diagonale du losange, tandis que sa hauteur est égale à la grande diagonale. Nous en déduisons que l'aire du rectangle est donnée par $d \times D$ et celle du losange par $\frac{d \times D}{2}$. Finalement, l'animateur écrit les égalités suivantes :

$$\frac{d}{2} \times D = d \times \frac{D}{2} = \frac{d \times D}{2}$$

Cette égalité est illustrée par un exemple numérique avec $d = 6$ et $D = 10$:

$$\frac{6}{2} \times 10 = 6 \times \frac{10}{2} = \frac{6 \times 10}{2}$$

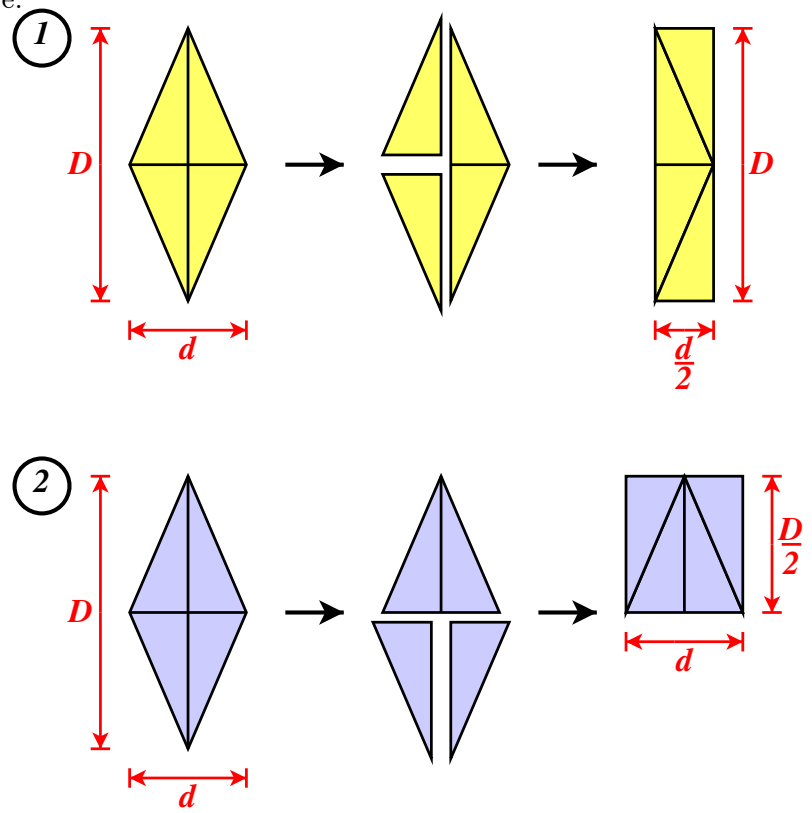
Cette activité de découpage de losanges a donné lieu à un travail assidu de la part de la quasi-totalité des élèves. Toutefois, bon nombre d'entre eux ont dépassé le temps imparti de cinquante minutes et ont terminé le travail à domicile. Lors de la synthèse, la participation était très bonne et aucune difficulté conceptuelle majeure n'a pu être mise en évidence.

9.8.2 Pour trouver l'aire d'un losange

L'enseignant distribue la fiche de synthèse 6.3.

Fiche 6.3

Si je découpe un losange suivant ses diagonales, j'ai deux façons de réaliser un rectangle de même aire.



– J'appelle d la longueur de la petite diagonale et D la longueur de la grande diagonale.
– Le premier rectangle a pour base $\frac{d}{2}$ et pour hauteur D.
– Le second rectangle a pour base d et pour hauteur $\frac{D}{2}$.

Pour trouver l'aire d'un losange :

1. Je mesure sa petite diagonale et sa grande diagonale ;
2. je divise une de ces mesures par deux et je multiplie le résultat par l'autre.

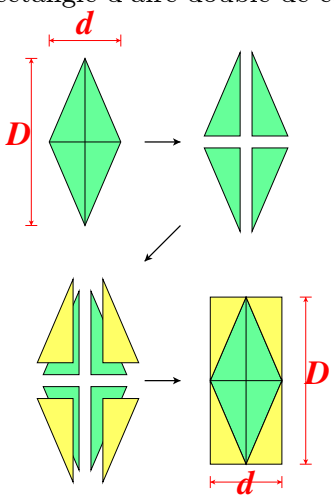
$$\text{Aire du losange} = \frac{d}{2} \times D = d \times \frac{D}{2}$$

Prolongements et liens

Plutôt que de réaliser un rectangle d'aire égale à celle du losange, on peut demander aux élèves de réaliser un rectangle d'aire double. Ce travail débouche sur la synthèse suivante. L'équivalence des formules obtenues suite aux différentes démarches est intéressante du point de vue de l'apprentissage de l'algèbre.

Fiche 6.4

Si je découpe un losange suivant ses diagonales, et si je duplique les triangles rectangles obtenus, je peux réaliser un rectangle d'aire double de celle du losange.



– J'appelle d la longueur de la petite diagonale et j'appelle D la longueur de la grande diagonale du losange.
– Le rectangle a pour base d et pour hauteur D.

Pour trouver l'aire d'un losange :

1. Je mesure sa petite diagonale et sa grande diagonale ;
2. je multiplie ces deux mesures ;
3. je divise le résultat par deux.

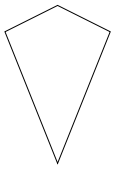
$$\text{Aire du losange} = \frac{d \times D}{2}$$

$$\text{Aire du losange} = \frac{d}{2} \times D = d \times \frac{D}{2} = \frac{d \times D}{2}$$

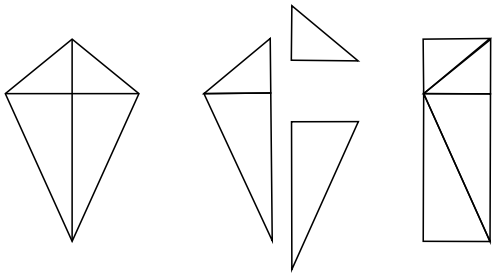
La fiche 6.5 peut être proposée comme exercice. Elle réinvestit la démarche utilisée pour le losange.

Fiche 6.5

1. En fusionnant deux triangles isométriques, crée un cerf-volant tel que celui qui est représenté ci-dessous.
2. Découpe le cerf-volant de façon à réaliser un rectangle de même aire.
3. Compare les dimensions du rectangle avec celles du cerf-volant.



En découpant le cerf-volant selon ses diagonales, il est possible de réaliser un rectangle de la façon suivante :



Il existe d'autres stratégies pour calculer l'aire d'un losange ou d'un cerf-volant et permettant de faire des liens avec le calcul algébrique. Ainsi, pour le cerf-volant par exemple, on peut calculer l'aire du triangle isocèle supérieur et lui ajouter celle du triangle isocèle inférieur. On obtient ainsi :

$$\frac{d \times h_1}{2} + \frac{d \times h_2}{2} = \frac{d}{2} \times (h_1 + h_2) = \frac{d}{2} \times D$$

9.9 L'aire d'un polygone régulier

Cette séquence est basée sur les fiches 7.1 à 7.4.

9.9.1 D'un polygone régulier vers un quadrilatère

De quoi s'agit-il? Les élèves découpent des polygones réguliers de façon à réaliser des quadrilatères de même aire avec les formes obtenues.

Enjeux

- Découvrir qu'un polygone régulier à n côtés peut être découpé en n triangles isocèles permettant de réaliser un trapèze si n est impair, un parallélogramme si n est pair.
- Savoir calculer l'aire d'un polygone régulier en multipliant par n l'aire d'un de ces triangles isocèles.
- Comprendre que ce procédé équivaut à appliquer la formule

$$\frac{\text{Périmètre} \times \text{Apothème}}{2}$$

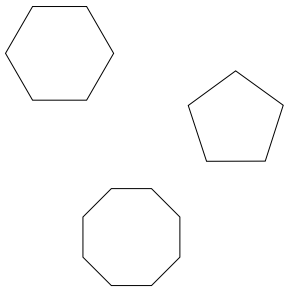
De quoi a-t-on besoin?

- Des fiches 7.1 à 7.4.
- De polygones réguliers en carton.
- De bâtons de colle et de ciseaux.

Situation initiale

`Fiche 7.1`
D'un polygone régulier vers un quadrilatère

1. Crée un hexagone régulier. Découpe-le afin de réaliser un quadrilatère de même aire.
2. Réalise le même travail à partir d'un pentagone régulier.
3. Réalise le même travail à partir d'un octogone régulier.



Analyse procédurale

Cette activité peut mener à l'utilisation de nombreuses fonctionnalités : `Découper, Diviser, Construire le centre, Tourner, Glisser, Dupliquer`.
La démarche à laquelle nous pensons est le découpage d'un polygone régulier à n côtés en n triangles isocèles isométriques. Le découpage se fera par un sommet, le centre et un sommet consécutif au premier. Le triangle ainsi obtenu sera dupliqué $n-1$ fois afin de réaliser un trapèze ou un parallélogramme (la figure 9.89 illustre cela pour le pentagone régulier).

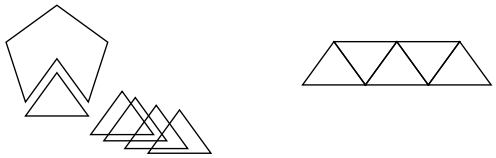


Fig. 9.89

Simultanément au travail avec *Apprenti Géomètre*, chaque élève reçoit deux exemplaires en carton de chaque polygone avec indication du centre. Il en colle un sur la fiche 7.2. À proximité, il colle le quadrilatère qu'il a réalisé en découpant le second polygone.

Analyse conceptuelle

S'il est vrai que la démarche de découpage par le centre et deux sommets consécutifs peut s'appliquer à tout polygone régulier, il faut néanmoins s'attendre à d'autres tentatives de la part des élèves.
Nous leur proposons de commencer par l'hexagone pour lequel la solution est la plus facile à trouver, leur permettant ainsi d'enregistrer rapidement un premier succès. En effet, découper l'hexagone régulier suivant une diagonale — démarche assez naturelle — permet d'obtenir deux trapèzes isométriques qui s'assemblent en un parallélogramme (*Fig. 9.90*).

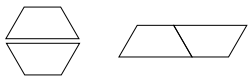


Fig. 9.90

Pour le pentagone régulier, la découpe suivant une diagonale peut s'avérer efficace. Il faut que l'élève tourne correctement le triangle pour l'ajuster à un des côtés non parallèles du trapèze (*Fig. 9.91*).

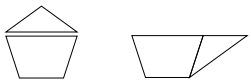


Fig. 9.91

Afin de justifier cette démarche, on pourra calculer des amplitudes d'angles (*Fig. 9.92*).

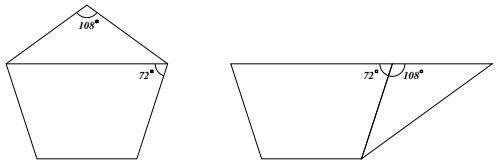


Fig. 9.92

Échos des classes

Nous avons observé de nombreux découpages différents aboutissant à l'objectif. La démarche de découpage en triangles isocèles n'est apparue spontanément que chez très peu d'élèves.
En ce qui concerne l'hexagone régulier, le découpage décrit dans l'analyse conceptuelle est fréquemment réalisé (*Fig. 9.90, page 320*).

Deux jeunes filles ont d'abord découpé l'hexagone suivant une de ses grandes diagonales avant de découper chacun des deux trapèzes obtenus suivant une de leur diagonale également. Elles ont enfin assemblé les quatre triangles de façon à réaliser un losange dont le côté a la même longueur qu'une petite diagonale de l'hexagone (*Fig. 9.93*).

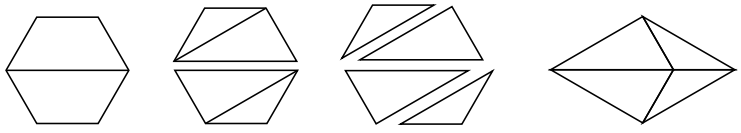


Fig. 9.93

Deux garçons ont préféré découper l'hexagone suivant le segment joignant les milieux de deux côtés parallèles. Ils découpent ensuite les deux pentagones irréguliers obtenus suivant ce qu'ils appellent une hauteur. Les quatre trapèzes isométriques résultant de cette démarche sont enfin assemblés en un rectangle (*Fig. 9.94*).

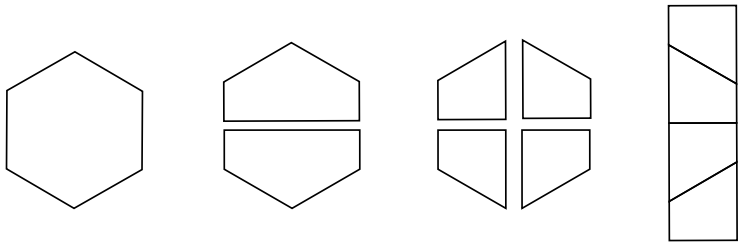


Fig. 9.94

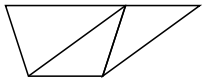


Fig. 9.95

Le duo d'élèves qui avaient réalisé le découpage de la figure 9.93 a utilisé une méthode analogue pour le pentagone. Elles ont découpé le pentagone suivant deux diagonales pour réaliser un trapèze (*Fig. 9.95*; ce procédé est analogue à celui qui a été décrit page 320 avec toutefois une découpe superflue).

Pour l'octogone, nous avons relevé une méthode complexe mais néanmoins fructueuse : les élèves découpent d'abord suivant une grande diagonale. Ensuite, ils amputent chacun des pentagones obtenus d'un triangle. Il reste deux trapèzes qui sont accolés par leur petite base. Les deux triangles viennent combler les lacunes permettant ainsi d'obtenir un rectangle (*Fig. 9.96*).

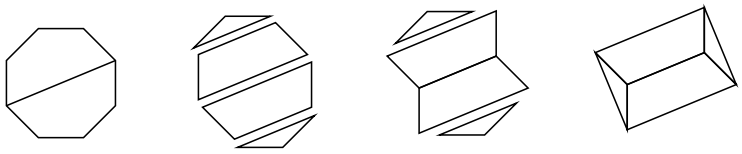


Fig. 9.96

Beaucoup d'élèves, moins audacieux, n'osent pas se lancer dans des découpes multiples. Si leur première tentative n'aboutit pas, leur recherche marque le pas et l'intervention des animateurs est nécessaire. La figure 9.97 donne deux exemples de situations dans lesquelles certains jeunes avaient l'impression d'être dans une impasse.

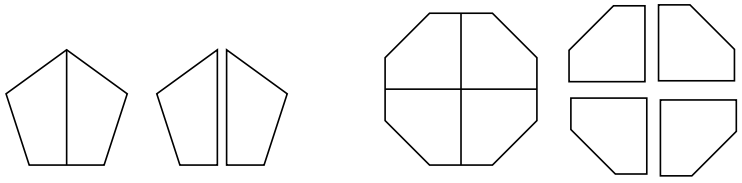


Fig. 9.97

Le carcan des cinquante minutes ne nous permet pas de nous attarder auprès de tous les élèves pour faire aboutir leurs tentatives. Aussi décidons-nous de refermer quelque peu l'activité pour les élèves en difficulté : nous leur suggérons d'utiliser la fonctionnalité `Construire le centre` du menu `Opérations` et de découper « comme on découperait un gâteau en parts égales ». Cette métaphore pâtissière permet aux enfants

de reprendre leur travail mais toutes les difficultés ne disparaissent pas pour autant :

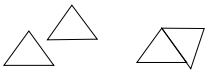


Fig. 9.98

– certains d'entre eux découpent systématiquement tous les triangles à partir du polygone de départ, sans penser à dupliquer le premier triangle obtenu ;
– pour réaliser le quadrilatère, les fonctionnalités `Tourner` et `Retourner` sont généralement bien utilisées mais certains élèves cherchent à ajuster des côtés qui n'ont pas la même longueur (c'est arrivé plusieurs fois pour le pentagone, *Fig. 9.98*) ([20]). Le phénomène peut être accentué si cette méthode vient d'être utilisée pour l'hexagone régulier. En effet, le découpage de ce polygone fournit des triangles équilatéraux qui s'ajustent aisément, sans précaution particulière.

Lors de la synthèse, nous soulignons l'originalité et la pertinence des démarches utilisées. Nous nous limitons ensuite au découpage en triangles isocèles, en expliquant qu'il permet d'atteindre le but visé — un quadrilatère — quel que soit le polygone régulier donné.

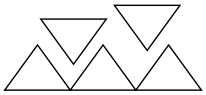


Fig. 9.99

En partant d'un pentagone régulier, nous reprenons toute la procédure décrite à la page 319. Nous veillons à optimiser le nombre d'opérations à effectuer et à nous faciliter le travail en découpant un premier triangle à base horizontale. Après duplications, la construction du trapèze est aisée : il suffit d'aligner trois triangles en les « attachant » par un sommet. Les deux triangles restants sont retournés suivant un axe horizontal afin de compléter la forme (*Fig. 9.99*).

Nous poursuivons par le découpage en triangles d'un hexagone régulier. Les élèves comprennent très vite que si le nombre de côtés du polygone initial est impair, il est possible de réaliser un trapèze (isocèle), tandis que si le nombre de côtés est pair, il est possible de réaliser un parallélogramme.

Nous abordons alors la question du calcul de l'aire d'un polygone régulier. Nous désignons respectivement par c et par a, le côté et l'apothème ([21]) du polygone et nous envisageons deux méthodes :

– calculer l'aire d'un triangle et multiplier le résultat par le nombre n de côtés ;
– calculer l'aire du quadrilatère issu du polygone.

Pour le pentagone, la première méthode donne $5 \times \frac{c \times a}{2}$. Nous calculons ensuite l'aire du trapèze correspondant après avoir remarqué que sa grande base est $3c$, sa petite base $2c$ et sa hauteur a :

([20]) Cette difficulté rappelle celle qui est décrite à la page 315 lorsqu'il s'agit de réaliser un rectangle à partir d'un losange. Pour le pentagone régulier, la confusion peut aisément se comprendre : la base de chacun des triangles isocèles est approximativement égale à la longueur d'un autre côté multipliée par 1,1756. Si de surcroît l'élève a créé de petites formes à l'écran, il a toutes les chances de confondre la base d'un triangle avec les autres côtés.

([21]) Ce terme n'est pas connu de tous les élèves.

$$\frac{(3c+2c)\times a}{2} = \frac{5ca}{2}$$

Les propriétés de la multiplication sont évoquées pour montrer l'équivalence des deux résultats. Nous faisons remarquer que $5c$ n'est autre que le périmètre du pentagone et nous écrivons :

$$\text{Aire du pentagone régulier} = \frac{p\times a}{2}$$

Nous reprenons cette démarche avec l'hexagone régulier et le parallélogramme correspondant. Celui-ci a pour base $3c$ et pour hauteur a. Son aire vaut donc : $3c \times a = 3ca$. On obtient le même résultat en multipliant par 6 l'aire d'un triangle : $6 \times \frac{c\times a}{2}$. Le périmètre étant égal à $6c$, nous écrivons :

$$\text{Aire de l'hexagone régulier} = \frac{p\times a}{2}$$

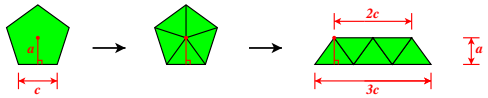
Nous terminons en affirmant que cette formule vaut pour tous les polygones réguliers et qu'elle sera surtout utile pour découvrir celle qui donne l'aire d'un disque. En effet, la question de l'aire d'un polygone régulier était réglée dès que nous avions compris qu'il suffisait de multiplier par n l'aire d'un triangle.

9.9.2 Pour trouver l'aire d'un polygone régulier

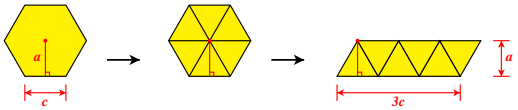
L'enseignant distribue les fiches de synthèse 7.3 et 7.4.

`Fiche 7.3`

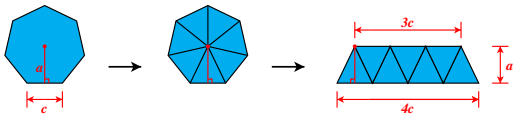
Je peux découper un pentagone régulier en cinq triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un trapèze de petite base $2c$, de grande base $3c$ et de hauteur a.



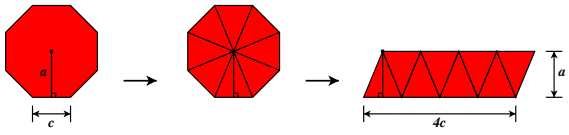
Je peux découper un hexagone régulier en six triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un parallélogramme de base $3c$ et de hauteur a.



Je peux découper un heptagone régulier en sept triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un trapèze de petite base $3c$, de grande base $4c$ et de hauteur a.



Je peux découper un octogone régulier en huit triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un parallélogramme de base $4c$ et de hauteur a.



et ainsi de suite ...

Fiche 7.4

A partir d'un ...	Je peux réaliser un ...	Aire
Pentagone régulier	Trapèze - grande base : $3c$ - petite base : $2c$ - hauteur : a	$5 \times \frac{c \times a}{2}$ ou $\frac{(3c+2c) \times a}{2} = \frac{5c \times a}{2}$
Hexagone régulier	Parallélogramme - base : $3c$ - hauteur : a	$6 \times \frac{c \times a}{2}$ ou $3c \times a$
Heptagone régulier	Trapèze - grande base : $4c$ - petite base : $3c$ - hauteur : a	$7 \times \frac{c \times a}{2}$ ou $\frac{(4c+3c) \times a}{2} = \frac{7c \times a}{2}$
Octogone régulier	Parallélogramme - base : $4c$ - hauteur : a	$8 \times \frac{c \times a}{2}$ ou $4c \times a$
...		
Hendécagone régulier		
Dodécagone régulier		
...		

Pour trouver l'aire d'un polygone régulier de côté c et d'apothème a :

1. Je calcule l'aire d'un triangle déterminé par le centre du polygone et deux sommets voisins : $\frac{c \times a}{2}$.
2. Je multiplie cette aire par le nombre de côtés du polygone : $n \times \frac{c \times a}{2}$.

Je peux aussi écrire : $n \times \frac{c \times a}{2} = n \times c \times \frac{a}{2} = p \times \frac{a}{2} = \frac{p \times a}{2}$
(où $p = n \times c$ est le périmètre).

Aire d'un polygone régulier $= \frac{\text{Périmètre} \times \text{Apothème}}{2}$

9.10 L'aire du disque

Cette séquence est basée sur les fiches 8.1 à 8.3.

De quoi s'agit-il? Les élèves inscrivent dans un disque des polygones réguliers avec un nombre croissant de côtés (triangle équilatéral, hexagone régulier, dodécagone régulier, ...)

Enjeux
- Découvrir que lorsque le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit

dans un disque augmente :

- l'aire du polygone se rapproche de celle du disque ;
- le périmètre du polygone se rapproche de la circonférence du disque ;
- l'apothème du polygone se rapproche du rayon du disque.

- Rappeler la formule de la circonférence d'un disque de rayon r, à savoir $2\pi r$.

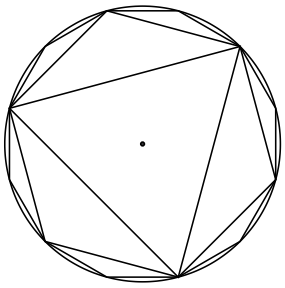
- Retrouver la formule de l'aire d'un disque à partir de celle d'un polygone régulier.

De quoi a-t-on besoin? Des fiches 8.1 à 8.3.

Situation initiale

L'enseignant distribue les fiches 8.1 et 8.2.

`Fiche 8.1`
- Reproduis la figure ci-dessous à l'écran. Il s'agit d'un triangle équilatéral, d'un hexagone régulier et d'un dodécagone régulier inscrits dans un cercle.
- Attention : les sommets du triangle doivent aussi être des sommets de l'hexagone ; ceux de l'hexagone doivent aussi être des sommets du dodécagone.



Analyse procédurale Une première démarche fait essentiellement appel à la fonctionnalité `Diviser`. L'élève crée un cercle et divise sa circonférence pour trouver les sommets des polygones demandés.

- Pour le triangle équilatéral, diviser la circonférence en trois et choisir `Triangle équilatéral` dans les `Formeslibres`. Ensuite, cliquer sur un des points qui viennent d'être construits et puis sur un second. Le triangle équilatéral est ainsi parfaitement inscrit au disque (*Fig. 9.100*).

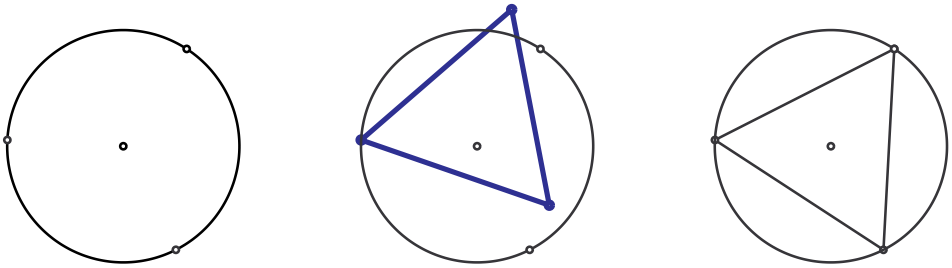


Fig. 9.100

– Pour l'hexagone régulier, la démarche est analogue. Il faut d'abord diviser un tiers de circonférence en deux ([22]). Le nouveau point obtenu et un de ses voisins immédiats permettront de construire l'hexagone (*Fig. 9.101*).

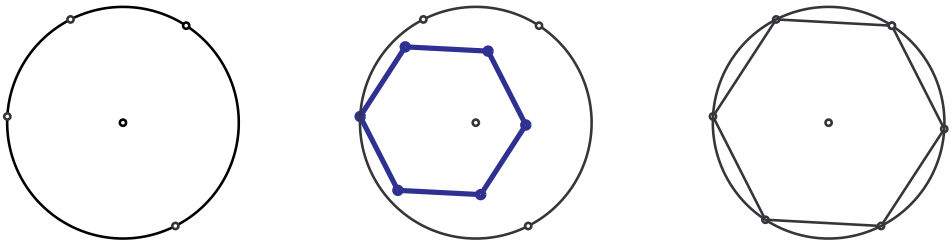


Fig. 9.101

– Pour le dodécagone régulier, il faut d'abord diviser un sixième de circonférence en deux. À nouveau, le point ainsi construit et un des ses voisins immédiats permettront d'inscrire le dodécagone dans le disque (*Fig. 9.102*).

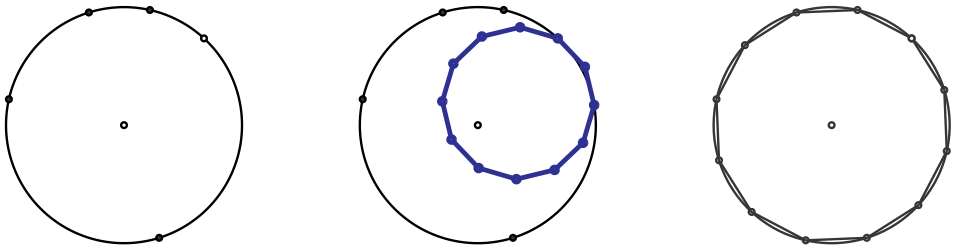


Fig. 9.102

Il n'est donc pas nécessaire de construire tous les sommets pour créer les polygones réguliers précédents. Toutefois, si l'on souhaite tout de même construire tous les sommets (du dodécagone par exemple), il est possible d'optimiser le travail en divisant d'abord la circonférence en trois et

([22]) Placer le pointeur sur une des extrémités de l'arc de cercle de façon à voir apparaître le message « 1 : Clique pour diviser en commençant par ce point » et ensuite placer le pointeur sur l'autre extrémité de l'arc de façon à voir apparaître le message « 2 : Clique pour diviser en finissant par ce point ».

ensuite chaque tiers de circonférence en quatre ([23]) , soit quatre opérations. Il est alors possible de réaliser un dodécagone régulier sans utiliser la forme prédéfinie, en utilisant uniquement des segments pour relier les sommets voisins.

Cette démarche permet aussi de construire des polygones réguliers autres que ceux qui sont proposés dans les `Formes libres` (c'est-à-dire à plus de douze côtés).

Signalons une autre démarche permettant de reproduire rapidement la figure de la fiche 8.1 ([24]).

On réalise d'abord un dodécagone régulier en choisissant cette forme dans les `Formes libres`. Ensuite, un hexagone régulier est construit en s'appuyant sur deux sommets du dodécagone et un triangle équilatéral en s'appuyant sur deux sommets de l'hexagone (*Fig. 9.103*).

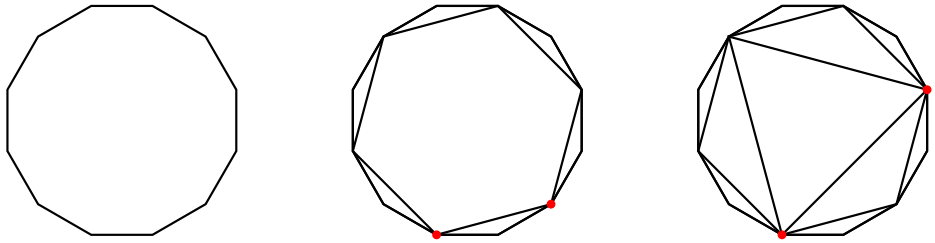


Fig. 9.103

Le centre de gravité commun aux trois polygones peut être obtenu en choisissant `Construire le centre` dans le menu `Opérations`. Ce point est aussi le centre du cercle circonscrit. En créant ce cercle, il faut veiller à le faire passer par un des sommets des polygones (*Fig. 9.104*).

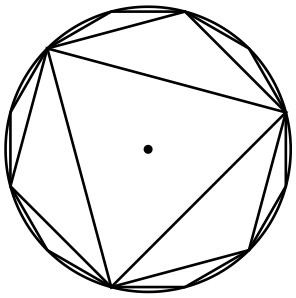


Fig. 9.104

Analyse conceptuelle

Il est prévisible que certains élèves, après avoir créé un cercle, essayent d'y inscrire un des polygones à vue, en plaçant un sommet sur la circonférence et en modifiant progressivement le polygone jusqu'à ce que tous ses sommets soient sur le cercle. La démarche consistant à diviser le cercle ne sera sans doute pas spontanée dans la majorité des cas. Il faudra ainsi demander aux élèves de quelle façon ils pourraient réaliser une figure précise afin de les amener à utiliser l'outil `Diviser`.

([23]) La version 2 d'*Apprenti Géomètre* permet de diviser en 2, 3, 4, 5 et 10.
([24]) Il est peu probable qu'un jeune élève trouve cette procédure seul.

Échos des classes

Familiarisés avec le logiciel, les élèves créent rapidement un cercle et choisissent le triangle équilatéral dans les `Formes libres`. Comme nous pouvions nous y attendre, ils placent un premier sommet sur le cercle et déplacent la souris jusqu'à ce qu'ils voient les deux autres sommets sur le cercle également (*Fig. 9.105*).

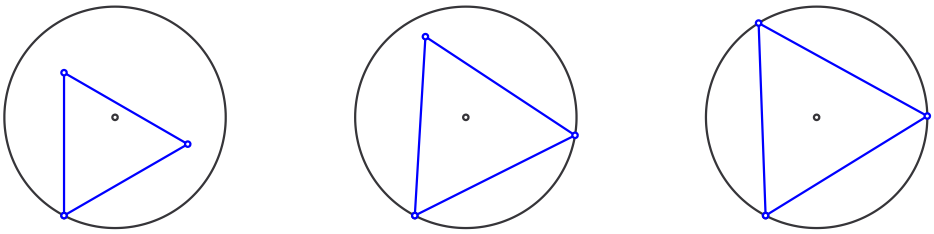


Fig. 9.105

Nous leur montrons que cette construction résiste bien aux modifications du cercle. Toutefois, si l'on modifie le triangle en agissant sur un sommet, les deux premiers restent bien sur le cercle mais le troisième est libre de le quitter. Nous expliquons aux élèves que le troisième sommmet n'a pas été défini comme « point sur » le cercle ([25]) . C'est pourquoi lors de la construction du triangle, une fois les deux premiers sommets placés « sur » le cercle, il faut choisir `Modifier`, déplacer le troisième sommet et l'amener à son tour « sur » le cercle. Cette figure résiste alors tant aux modifications du cercle qu'à celles du triangle équilatéral : si l'on déplace un de ses sommets, il reste sur le cercle ainsi que les deux autres, le triangle tournant ainsi autour de son centre de gravité.

Dans certains groupes d'élèves, nous observons ensuite des hexagones et des dodécagones, construits à vue comme les premiers triangles, sans respecter la consigne des sommets communs (*Fig. 9.106*).

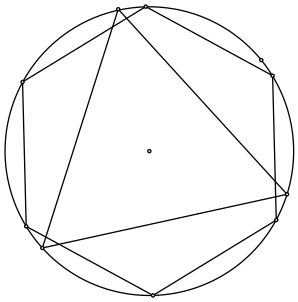


Fig. 9.106

Nous rappelons la consigne. Les élèves recommencent leurs constructions avec davantage de soin mais des problèmes de précision subsistent. Ces imperfections sont parfois « récupérées » par *Apprenti Géomètre* et sa propriété de magnétisme permettant ainsi à la construction de résister aux modifications du cercle.

([25]) La version 2 d'*Apprenti Géomètre*, contrairement à la première, permet de placer un point « sur » un objet. Lorsque l'objet est modifié, le point reste sur l'objet.

Aux élèves qui éprouvent des difficultés à réaliser le travail demandé, nous conseillons de construire soigneusement le dodécagone d'abord (en plaçant deux sommets « sur » le cercle et puis d'utiliser `Modifier` pour amener un troisième sommet « sur » le cercle). Cette idée aide certains enfants qui n'ont plus qu'à choisir parmi les sommets du dodécagone pour construire l'hexagone et le triangle.

Le temps passant, à quelques élèves qui manquaient du calme et de la patience nécessaires pour ajuster les sommets d'un polygone sur le cercle qu'ils avaient créé, nous avons suggéré de créer d'abord un dodécagone régulier sans le cercle. Notre but était de les orienter vers la démarche décrite à la page 327. Ces élèves réussissent à emboîter les trois polygones mais terminent en créant un cercle de façon approximative. Ils ne pensent pas à la fonctionnalité `Construire le centre` et nous la leur rapppelons.

Nous avons encore observé le comportement suivant : après avoir inscrit un triangle équilatéral dans le cercle, certains élèves construisent des triangles isocèles sur ses côtés en veillant à placer un sommet sur le cercle ; cette démarche un peu plus fastidieuse est néanmoins pertinente (*Fig. 9.107* et *Fig. 9.108*).

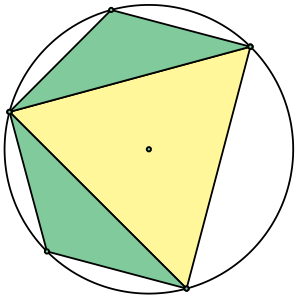


Fig. 9.107

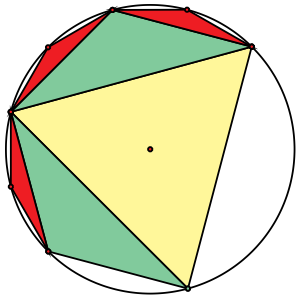


Fig. 9.108

Plus rarement, à certains élèves très à l'aise avec *Apprenti Géomètre*, nous demandons d'inscrire au cercle un dodécagone régulier en utilisant uniquement des segments. Ils utilisent alors, parfois avec notre aide, des divisions successives de la circonférence comme cela est décrit à la page 325.

Un de ces élèves ([26]), après avoir construit le triangle équilatéral, projette de diviser un arc de cercle en deux. Au lieu de cela, après avoir cliqué sur les extrémités de l'arc, le logiciel lui donne le milieu de la corde, c'est-à-dire du côté du triangle. Cela n'arrête pas l'élève : il décide de construire un segment perpendiculaire à cette corde et de le prolonger jusqu'au cercle, obtenant ainsi le point qu'il souhaitait. Il ne lui reste plus qu'à

([26]) L'enfant dont il est question ici était particulièrement actif et motivé lors de nos expérimentations. La titulaire de la classe nous a confié qu'il s'agissait de son attitude habituelle, qu'il avait « réponse à tout », souvent des idées originales, ajoutant enfin « C'est même assez perturbant ... »

créer deux côtés de l'hexagone à l'aide de segments (*Fig. 9.109*).

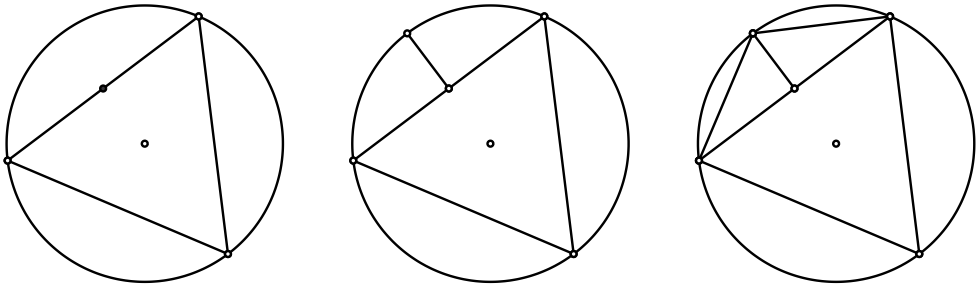


Fig. 9.109

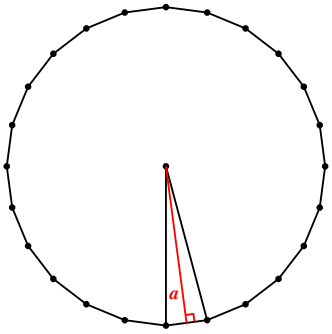
Globalement, cette activité s'est déroulée de façon satisfaisante mais a mis en évidence les difficultés qu'éprouvent de nombreux élèves à réaliser un travail nécessitant de l'organisation, de la précision et de la patience.

De retour dans la salle de projection, l'animateur montre sur grand écran trois cercles de même rayon, le premier circonscrit au triangle équilatéral, le second à l'hexagone régulier et le troisième au dodécagone régulier.

Il aborde avec les élèves le questionnaire de la fiche 8.2.

Fiche 8.2

1. Parmi les trois polygones que tu as construits, quel est celui dont l'aire est la plus proche de celle du disque ? Et celui dont l'aire est la plus éloignée de celle du disque ?
2. Dans un disque de même rayon que les précédents, observe ce polygone régulier à vingt-quatre côtés.



Que peux-tu dire de son aire par rapport à celle des polygones précédents ? Et par rapport à celle du disque ?

3. Imagine des polygones réguliers avec de plus en plus de côtés. De quoi vont s'approcher les périmètres de ces polygones ? De quoi vont s'approcher les apothèmes de ces polygones ?

Les questions sont discutées avec l'ensemble du groupe. En effet, le raisonnement sous-jacent nécessite l'accompagnement de l'enseignant et bénéficie ainsi des apports de chaque élève.

À la première question, les élèves répondent assez rapidement que le dodécagone est celui qui « remplit le mieux » le disque, tandis que le triangle est celui qui « laisse le plus de vide ».

L'animateur fait remarquer que l'hexagone s'obtient en bordant le triangle équilatéral de trois triangles isocèles isométriques (un sur chaque côté), ce qui n'avait pas échappé à certains élèves lors du travail de recherche. De la même façon, le dodécagone s'obtient en bordant l'hexagone de six triangles isocèles isométriques.

Dans la foulée de cette observation, l'enseignant demande s'il y a moyen d'obtenir des polygones qui « remplissent » de mieux en mieux le disque. Les élèves réalisent alors que le processus peut se poursuivre : « ajouter » douze petits triangles isocèles au dodécagone, puis vingt-quatre (encore plus) petits triangles au 24-gone, etc. La réponse à la deuxième question ne pose aucune difficulté : le 24-gone régulier a une aire supérieure à celles des polygones précédents et est encore plus proche de celle du disque, tout en restant inférieure.

La troisième question est plus délicate car les mots *circonférence* et *apothème* n'appartiennent pas au vocabulaire de tous les enfants (du moins ne les citent-ils pas spontanément).

L'animateur explique d'abord que l'apothème est une hauteur d'un triangle isocèle obtenu par découpage d'un polygone régulier. Il ajoute qu'il s'agit de la distance entre le centre du polygone et un de ses côtés.

Il demande ensuite comment évolue le périmètre des polygones lorsque le nombre de côtés augmente. Les élèves répondent qu'il augmente également et qu'il se rapproche « du cercle » (de la *circonférence*).

L'animateur poursuit en expliquant que plus le nombre de côtés augmente, plus les triangles sont « fins » (avec un angle au sommet très aigu) et plus la mesure de l'apothème est proche de celle d'un côté du triangle, qui n'est autre que le rayon.

Les échanges entre élèves et professeur débouchent finalement sur les résultats suivants qui sont notés sur la fiche 8.2 :

- L'aire du dodécagone est la plus proche de celle du disque ; l'aire du triangle est la plus éloignée de celle du disque.
- L'aire du 24-gone est plus grande que celle de tous les polygones précédents ; elle est encore plus proche de celle du disque.
- Les périmètres des polygones vont s'approcher de la circonférence du cercle ; les apothèmes vont s'approcher du rayon du cercle.

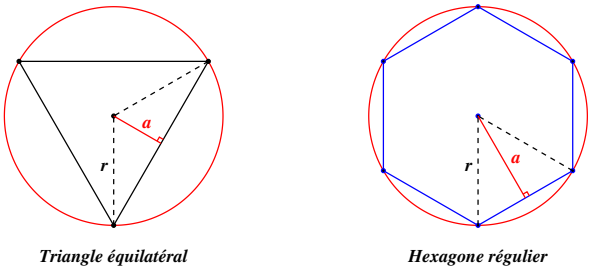
L'enseignant explique qu'il va se servir de la formule de l'aire d'un polygone régulier pour obtenir celle du disque. Il demande d'abord aux élèves de la rappeler. Après les hésitations d'usage, l'expression $\frac{p \cdot a}{2}$ revient.

Les enfants sont ensuite invités à rappeler la formule donnant la circonférence d'un cercle ($2\pi r$) ([27]). L'animateur propose alors le raisonnement suivant : plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus p sera

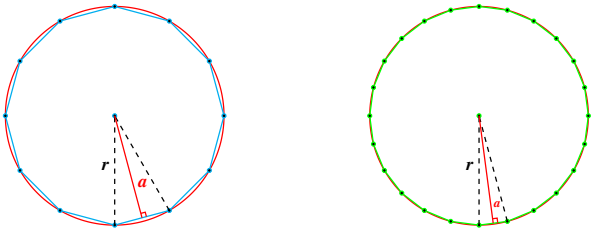
([27]) Il s'agit simplement de rappeler une formule vue en primaire, sans autre forme de justification. Le nombre π y est vu comme un nombre particulier, de valeur approximative 3,14, égal au rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle, quel que soit le cercle. Des activités pour expliquer l'origine de π sont prévues en quatrième secondaire.

proche de $2\pi r$ et plus a sera proche de r. Donc, le résultat du calcul $\frac{p \cdot a}{2}$ sera de plus en plus proche de $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$. Il conclut par : aire du disque $= \pi r^2$.
Ce raisonnement est repris sur la fiche 8.3 qui est distribuée aux élèves.

Fiche 8.3



Triangle équilatéral *Hexagone régulier*



Dodécagone régulier *24-gone régulier*

Dans un disque, j'inscris des polygones réguliers. Plus le nombre de côtés du polygone est grand :

1. plus l'aire du polygone est proche de celle du disque ;
2. plus le périmètre p du polygone est proche de la circonférence $2\pi r$ du disque ;
3. plus l'apothème a du polygone est proche du rayon r du disque.

Je sais que l'aire du polygone est donnée par la formule $\frac{p \times a}{2}$.
Donc, plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus la valeur obtenue à l'aide de cette formule sera proche de $\frac{2\pi r \times r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$.

9.11 Agrandir, réduire

Cette séquence est basée sur les fiches 9.1 à 9.3.

De quoi s'agit-il? Dans une grille de carrés, les élèves créent une forme dont ils calculent l'aire (l'unité d'aire étant celle d'un petit carré de la grille). Ensuite, ils reproduisent la forme à une échelle de leur choix et calculent à nouveau l'aire. Ils calculent enfin le rapport de l'aire de la deuxième forme à celle de la première.

Enjeux

- Découvrir que si toutes les longueurs d'une forme (côtés, bases, hauteurs, ...) sont multipliées par un facteur k, l'aire est multipliée par k^2.
- Entretenir les formules d'aires.

De quoi a-t-on besoin? Des fiches 9.1 à 9.3.

Situation initiale

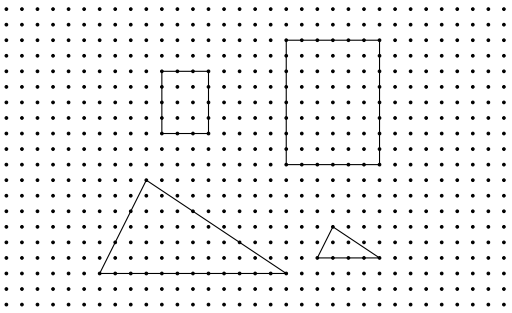
L'enseignant distribue les fiches 9.1 et 9.2.

La première fiche donne d'abord des consignes de préparation de l'écran. En effet, l'activité est conçue sur base d'une grille de carrés afin de pouvoir calculer des aires (l'unité d'aire étant celle d'un petit carré de la grille). Pour ne pas que les élèves créent d'emblée des formes trop grandes, il leur est demandé de travailler sur une grille plus dense que celle qui est donnée par défaut (l'écart entre les points est fixé à 1/2 au lieu de 1).

`Fiche 9.1`
- Ouvre *Apprenti Géomètre* et choisis le *Niveau B*.
- Fais apparaître une grille de carrés à l'écran. Pour cela, choisis `Grille` dans le menu `Outils`. Une fenêtre apparaît. Dans le menu déroulant `Grille`, choisis `Carrés` et dans le menu déroulant `Ecart`, choisis 1/2.

Viennent ensuite les consignes de l'activité proprement dite.

1. Crée une forme (rectangle, triangle, trapèze, ...), note ses dimensions dans le tableau que tu as reçu et calcule son aire.
2. Dessine une forme semblable à la première (agrandissement ou réduction à l'échelle). Note ses dimensions et calcule son aire.
3. Compare les aires des deux formes.
4. Recommence avec d'autres échelles.
5. Recommence avec d'autres formes.



Les élèves devront noter leurs résultats dans le tableau de la fiche 9.2.

`Fiche 9.2`

Forme 1	Dimensions 1	Aire 1	Forme 2 (échelle)	Dimensions 2	Aire 2	Rapport (Aire 2 / Aire 1)
Rectangle	Base : 3 Hauteur : 4	12	2	Base : 6 Hauteur : 8	48	4

Analyse procédurale

Bien que les élèves travailleront sur base d'une grille de carrés pour la première fois, cette activité ne devrait pas poser de difficultés instrumentales particulières.

Analyse conceptuelle

Sur le plan conceptuel, il s'agira pour les élèves de mettre en oeuvre les formules d'aires qui ont été revues tout au long des activités. Nous pouvons nous attendre aux problèmes classiques : oubli de la formule concernant tel ou tel polygone, difficultés à retrouver les dimensions nécessaires à l'application d'une formule.
La notion de reproduction à l'échelle est familière aux élèves et c'est pourquoi nous la préférons à *formes semblables*. Une difficulté possible est que les élèves se contentent de multiplier les longueurs par un facteur k en perdant de vue la similitude des formes.

Échos des classes

Cette leçon, la dernière de l'expérimentation, n'a été menée que dans les classes disposant d'*Apprenti Géomètre*.
L'animateur débute par une brève présentation dans la salle de projection : il montre comment obtenir une grille de carrés et comment modifier l'écart entre les points.
Il explique ce qu'il attend des élèves et illustre le travail demandé par deux exemples (ceux qui figurent sur la fiche 9.1). Il montre comment remplir le tableau sur le modèle de la première ligne, relative au premier exemple (un rectangle 3×4 reproduit à l'échelle 2).
Les élèves se rendent dans la salle des ordinateurs et se mettent au travail. Les consignes sont bien comprises par la grande majorité d'entre eux. Il nous faut toutefois régulièrement rappeler comment remplir correctement le tableau.
Les comportements varient d'un groupe à l'autre :

- certains élèves se cantonnent à des formes simples comme le carré ou le rectangle et en multiplient les reproductions à des échelles entières ; le travail s'engage dans une sorte de routine, correctement menée mais sans que les enfants ne cherchent à en tirer une conclusion ;
- d'autres varient les formes mais pas l'échelle ;
- certains créent d'emblée des formes dont il n'est pas facile d'évaluer l'aire : un triangle équilatéral, un losange, ... (*Fig. 9.110* et *Fig. 9.111*) ;

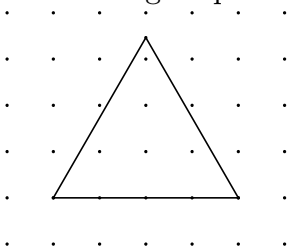


Fig. 9.110

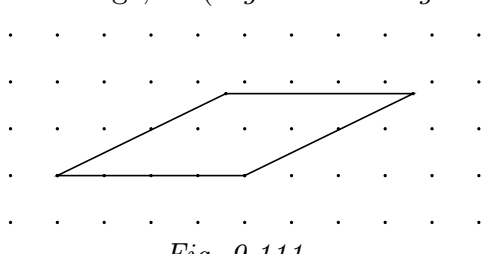


Fig. 9.111

dans de tels cas, nous avons vu certains élèves se contenter d'approximations (hauteur du triangle estimée à 3 ou 3.5, celle du parallélogramme à 2) ;

- une situation plus ambigüe est apparue chez un élève qui avait créé

un décagone de côté 2 et qui avait noté $a = 3$ pour la longueur de l'apothème ; il était proche de la réalité ([28]) mais nous lui avons montré que ce n'était pas tout à fait exact à l'aide de la fonctionnalité `Zoomer` (*Fig. 9.112*) ; si l'on zoome suffisamment, le centre du polygone (ici colorié en rouge) se distingue des points de la grille ;

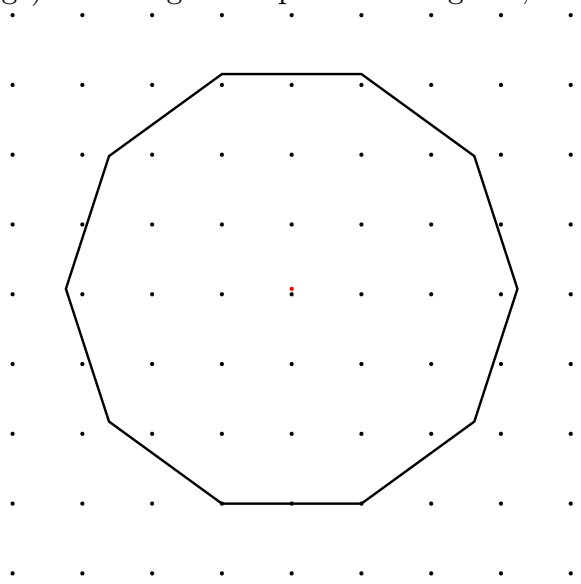


Fig. 9.112

– il arrive que les bases et les hauteurs soient bien dans le même rapport mais que les formes ne soient pas semblables (*Fig. 9.113*).

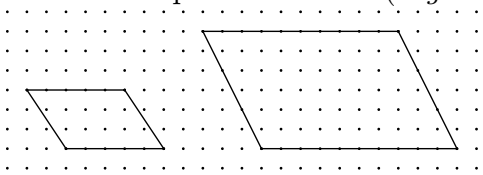


Fig. 9.113

En fonction des comportements que nous observons, nous apportons des aides ou des suggestions adaptées. Ainsi, nous incitons à :

– varier les formes (parallélogrammes et trapèzes, voire triangles ont moins de succès) et à utiliser les échelles 1/2, 1/3, ... ;
– varier davantage les échelles, aller au-delà de $k = 2$ ou $k = 3$;
– débuter par des formes plus simples si l'élève a créé une forme dont l'aire est difficile à évaluer ; ne pas se contenter d'approximations dans de tels cas ;
– conserver des formes semblables.

À mesure que les tableaux se remplissent, à des vitesses très variables, quelques élèves se rendent compte spontanément du lien existant entre l'échelle choisie et le rapport des aires. Il s'agit généralement d'enfants qui ne sont pas gênés par les calculs d'aires et qui appliquent facilement les formules.

([28]) Pour un décagone de côté c : $a = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{cotg} 18°$. Si $c = 2$, l'apothème mesure $\operatorname{cotg} 18° \simeq 3.07768$.

Pour d'autres élèves, une partie du temps est consacrée à retrouver la formule adaptée à une forme ou les dimensions nécessaires au calcul de l'aire. Ceux-là ne sont évidemment pas dans les conditions favorables pour s'interroger sur le but de l'activité ou pour émettre une conjecture. Des difficultés liées au calcul mental apparaissent parfois, par exemple pour calculer l'aire d'un trapèze dont les dimensions sont assez grandes. Certains élèves sont désemparés sans calculette ! ([29])

Certains élèves utilisent des échelles comme 1.5 et trouvent le rapport d'aire correct avec leur calculatrice (2.25) (*Fig. 9.114*).

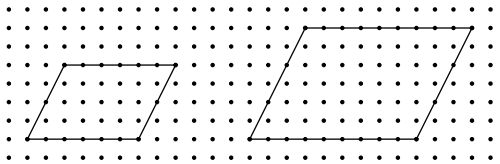


Fig. 9.114

Lors de nos déambulations dans la salle informatique, chaque fois que nous remarquons un duo d'élèves suffisamment avancés dans l'activité, nous leur demandons d'observer le lien existant entre le résultat de la dernière colonne et l'échelle choisie. Petit à petit, l'idée du carré de l'échelle émerge ([30]).

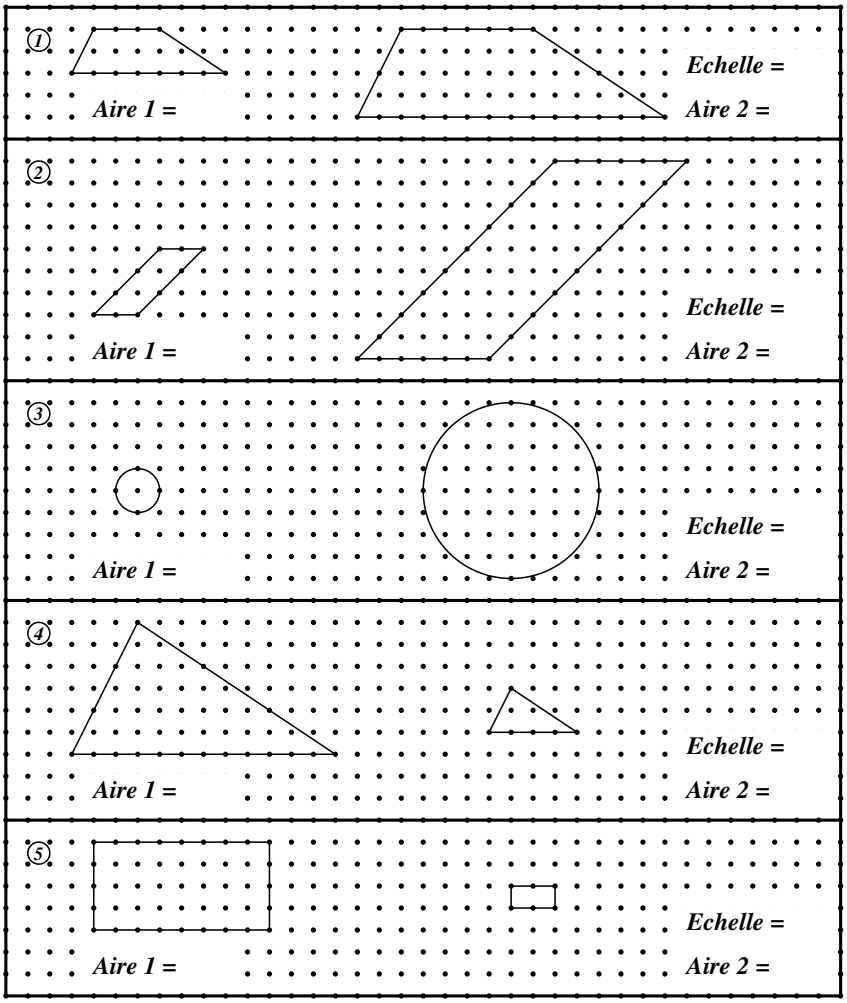
Dans l'ensemble, cette activité s'est bien déroulée malgré le constat, parfois un peu décourageant, de la volatilité des formules d'aires dans l'esprit de beaucoup d'élèves.
Un exercice de ce genre, mélangeant les formes et réactivant ces formules, est donc loin d'être inutile.

Pour conclure cette leçon, les élèves reçoivent la fiche 9.3 sur laquelle ils trouvent encore quelques exemples et le résultat amené par l'activité.

Si une forme est reproduite à l'échelle k, l'aire de la reproduction est égale à celle de l'original multipliée par k^2.

([29]) Nous nous sommes permis de leur glisser dans l'oreille qu'il y avait une calculatrice dans les accessoires de l'ordinateur !
([30]) Nous avons parfois relevé une confusion entre élévation au carré et multiplication par deux.

Fiche 9.3
Encore quelques exemples ...



Conclusion

Si je reproduis une forme à l'échelle en multipliant toutes ses dimensions (base, hauteur, côtés, ...) par ...	Alors, l'aire est multipliée par ...
2	4
3	9
4	16
1/2	1/4
1/3	1/9
...	...
k	k^2

Cinquième partie

Les tests

Préambule

1. La question de recherche à laquelle nous devons répondre est : « quelle influence le didacticiel *Apprenti Géomètre* a-t-il sur les représentations des élèves en géométrie ? » Pour tenter de répondre à cette question, nous avons, chaque année d'expérimentation, fait précéder et suivre les activités avec les élèves de tests qui nous permettent de comparer leurs performances et leurs conceptions avant et après l'usage d'*Apprenti Géomètre*.

De plus, afin d'isoler au mieux la variable « logiciel » dans ce dispositif, nous avons proposé les mêmes activités, ou des activités similaires, à une ou des classes témoins, n'utilisant pas *Apprenti Géomètre*. Ces classes ont donc reçu les mêmes informations en termes de savoirs mais n'ont pas eu accès au didacticiel. Il est aussi arrivé que la participation d'une classe témoin soit essentiellement limitée au pré-test et au post-test.

Des analyses des résultats aux tests à l'aide d'outils statistiques, complétées par des observations qualitatives individuelles doivent permettre de répondre à la question de recherche.

2. Les tests réalisés n'ayant pas pour but d'évaluer les élèves, mais uniquement de collecter des renseignements concernant leur apprentissage, nous n'avons pas hésité à placer les élèves devant des situations éventuellement plus difficiles que celles auxquelles ils seraient confrontés dans le cadre d'une évaluation. En effet, ce ne sont pas des situations faciles à traiter qui permettent de détecter des difficultés d'apprentissage. Les situations trop difficiles ne le permettent d'ailleurs pas non plus. Les questionnaires devaient être conçus de façon à permettre une dispersion des performances individuelles. Il n'est donc pas question dans un tel contexte de se limiter à des « socles », quels qu'ils soient.

3. Dans la même optique, nous nous sommes intéressés à certains comportements dont nous savons très bien qu'ils ne sont accessibles qu'à peu d'élèves des années concernées. Nous pensons en particulier à la demande faite à des élèves d'école primaire de justifier, ou expliquer, leurs réponses. Nous savons que c'est là une tâche insurmontable pour beaucoup d'enfants de cet âge et que ne pas savoir expliquer une réponse n'est pas incompatible avec le fait de raisonner correctement.

Aussi notre but principal en demandant de telles justifications n'était-il pas de vérifier une compétence. Il était plutôt d'obtenir des enfants des informations nous permettant de déterminer quelle(s) démarche(s) ils avaient utilisée(s) en vue de relever les « défis » qui leur étaient proposés. Car étudier les phénomènes d'apprentissage nécessite de connaître ces démarches et comment elles évoluent avec le contexte.

Cela étant, nous avons pu constater que certains enfants sont parfaitement capables d'expliquer correctement ce qu'ils ont fait, mais que ce n'est malheureusement pas le cas de tous, loin s'en faut. Il n'y a pas de doute pour nous que cette situation a aussi des répercussions sur l'apprentissage et que par conséquent, il convient également de s'intéresser à l'aptitude à justifier et expliquer. C'est un domaine que nous n'avons guère pu explorer. Nous nous sommes contentés de distinguer à certains items ce nous avons appelé, faute de mieux, des « réussites », c'est-à-dire des réponses correctes accompagnées de justifications complètes, et des « bonnes réponses » souvent accompagnées de justifications incomplètes, voire d'aucune justification.

4. Il n'est pas mauvais de rappeler que les conclusions obtenues en analysant les résultats d'un questionnaire, n'ont pas nécessairement une portée générale et qu'*a priori*, elles ne sont valables que pour ce questionnaire-là.

Les démarches de pensée, les réactions d'un groupe d'élèves devant des situations qui leur sont parfois peu familières peuvent être influencées par énormément de facteurs difficiles à contrôler. Il suffit parfois d'une petite variation dans un énoncé ou même simplement de permuter l'ordre des questions pour induire des comportements très différents. De plus, chaque classe d'élèves a son histoire propre, qui l'entraîne à utiliser telle méthode plutôt que telle autre ou à être surpris par telle ou telle formulation.

Enfin, au fur et à mesure de la progression des élèves d'un même groupe dans l'étude d'un sujet donné, leur maîtrise de ce sujet augmente, les erreurs commises diminuent et changent de nature, des liens avec d'autres sujets s'élaborent... Après quelque temps, l'analyse est à recommencer !

On voudra donc bien ne voir dans ce qui suit que des photographies de situations temporaires qu'il conviendrait de situer dans une évolution. C'est ce que nous essayerons de faire ensuite.

Chapitre 10

Un pré-test en sixième primaire (2005–2006)

10.1 Les objectifs des tests

L'objectif de ces questionnaires est prioritairement et principalement de déterminer la *capacité* de « voir » comme exposé par R. Duval, [34] (*voir l'annexe A.4*). En effet, si la capacité de voir est un des éléments qui permettent à un élève de devenir performant lors d'une activité géométrique, il paraît opportun de placer cet élève dans des situations contribuant à son acquisition. Nous avons voulu tester si l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* pouvait être efficace de ce point de vue.

Par ses fonctionnalités spécifiques, *Apprenti Géomètre* permet à l'utilisateur de réaliser un plus grand nombre de manipulations des formes géométriques que les supports usuels. De plus ces manipulations ne mettent pas nécessairement en œuvre les mêmes démarches que celles qui sont utilisées lors d'une activité papier-crayon. Par la diversification des démarches, on crée également des relations supplémentaires entre les concepts mathématiques rencontrés.

Le pré-test et le post-test ont été conçus de manière à amener l'élève à user de sa capacité à *voir* une figure, à l'analyser, à la restructurer. On ne s'étonnera donc pas qu'ils ne comprennent pas d'item correspondant à la mesure chiffrée ou au calcul de l'aire d'une figure. Même les items qui demandent de comparer deux aires sont plus faciles à traiter par comptage ou découpage que par l'usage des formules classiques d'aire.

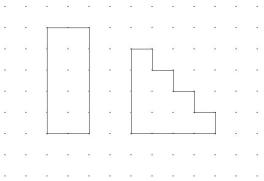
Les auteurs ont voulu que les deux tests soient rigoureusement parallèles. En principe, chaque item du post-test devrait mobiliser les mêmes compétences que l'item de même numéro du pré-test. Bien entendu, il n'en a pas toujours été ainsi de façon stricte. Nous devrons tenir compte de ce fait au moment de tirer des conclusions, qui ne pourront de toutes façons être que provisoires.

10.2 Les énoncés

Le pré-test comprend 6 items. Il a été utilisé dans cinq classes de sixième primaire : trois du Collège Saint-Marie à Rêves, une de l'Institut Saint-Joseph à La Louvière et une de l'Athénée Royal Lucie Dejardin à Seraing. Dans chaque classe, les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Au total, 109 élèves ont participé à ce test.

– Item 1

Défi 1 – Ces deux figures ont-elles la même aire ?



☐ Oui

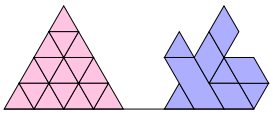
☐ Non

Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures

– Item 2

Défi 2 - Et ces deux nouvelles figures, ont-elles la même aire ?

☐ Oui

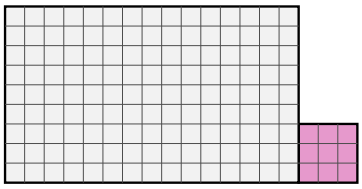


☐ Non

Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 3

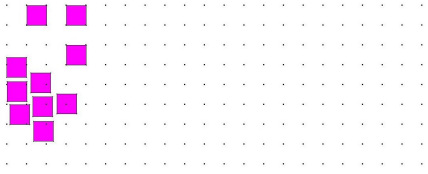
Défi 3 – Le rectangle gris est plus grand que le carré rose. Combien de fois plus grand ? Ou, combien de fois peut-on « mettre » le carré rose dans le rectangle gris ?



Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

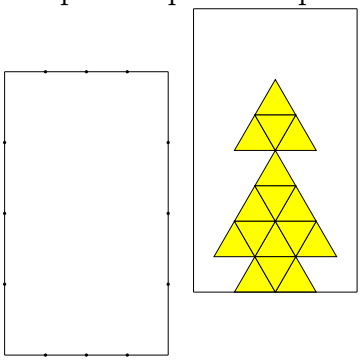
– Item 4

Défi 4 – Voici dix petits carrés. Il est possible de construire d'autres carrés en les assemblant. Dessine tous les carrés que tu que tu peux construire à partir d'un ou plusieurs de ces petits carrés.



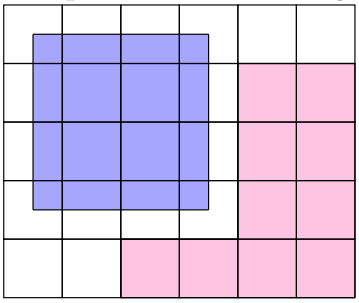
– Item 5

Défi 5 - Ces deux grands rectangles sont identiques. Reproduis dans le rectangle de gauche le dessin contenu dans le rectangle de droite. Fais cela avec le plus de précision possible.



– Item 6

Défi 6 - Laquelle de ces deux figures possède la plus grande aire ?



☐ Le carré bleu

☐ La figure rose

Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

Quelques indications ont été données pour assurer la compréhension de certaines questions, notamment de la question n°3. Nous avons pu constater que le mot *aire* est loin d'être connu de tous les élèves de sixième, même au mois de mars de l'année scolaire en cours.

10.3 Analyse des items

10.3.1 Item 1

Cet item propose deux figures dont il faut comparer les aires, et répondre par OUI ou NON. Les deux figures sont placées sur une grille de points formant un réseau quadrillé.

Trois modes de raisonnement peuvent être utilisés pour répondre à cette question :

1. Le mode **qualitatif**, ou mode puzzle. Il s'agit de décomposer une des figures pour reconstituer l'autre.
2. Le mode **quantitatif**, consistant à compter le nombre de carrés du quadrillage contenus dans chacune des figures. Ceci implique la perception implicite d'une unité commune de mesure d'aire (induite par la grille de points).

3. Le mode **numérique**, ou utilisation de formules d'aire. Notons que si ce mode de raisonnement s'applique aisément à la première figure (rectangle), il faut par contre passer par une décomposition pour calculer l'aire de la seconde.

Dans tous les cas, l'élève doit *voir* ce qui n'apparaît pas directement sur le dessin, et en plus, dans le troisième cas, il doit déterminer les mesures adéquates.

L'analyse qui suit se base sur l'examen des justifications rédigées par les élèves, ainsi que sur la confrontation de celles-ci avec leurs réponses et les éventuelles indications ajoutées.

Nous avons obtenu globalement 94 réponses correctes sur 109 élèves, soit 86% de l'échantillon. Parmi celles-ci, distinguons 20 réponses obtenues par le mode qualitatif (*Fig. 10.1*) et 63 par le mode quantitatif (*Fig. 10.2* et *Fig. 10.3*), aucune par le mode numérique.

Les onze bonnes réponses restantes n'étant accompagnées d'aucune justification, ni graphique, ni écrite, n'ont pas pu être classées.

Tous les élèves ayant choisi le mode puzzle comme mode de fonctionnement ont obtenu la réponse correcte. Parmi les élèves ayant choisi le mode quantitatif (comptage de carrés) comme mode de fonctionnement, un seul s'est trompé.

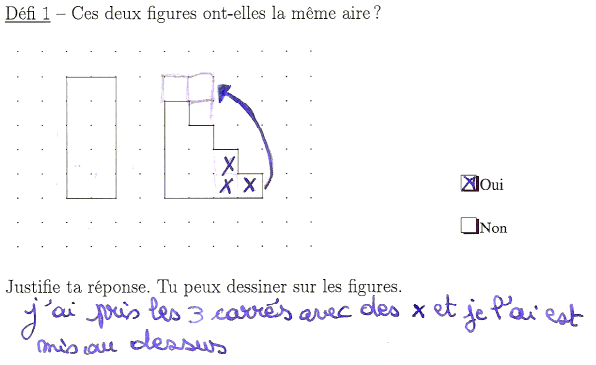


Fig. 10.1 Une démarche qualitative

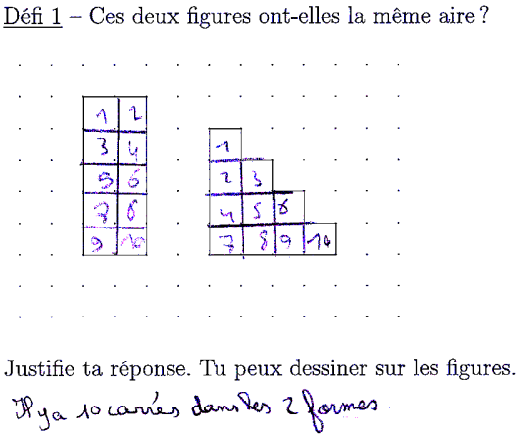


Fig. 10.2 Une démarche quantitative

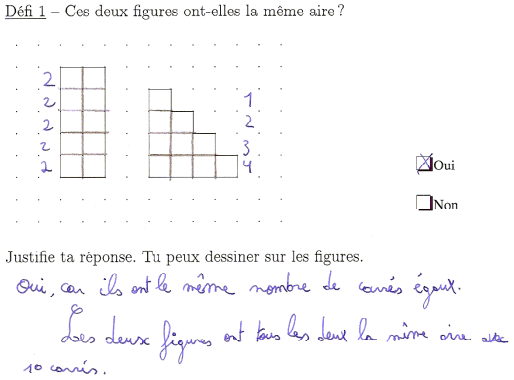


Fig. 10.3 Une démarche quantitative

Onze élèves ont voulu utiliser le mode numérique, c'est-à-dire ont commencé par prendre des mesures de longueur. Parmi ceux-ci, quatre ont ensuite choisi une des méthodes pré-

cédentes (trois ont choisi la méthode qualitative et un la méthode qualitative) et ont alors obtenu la bonne réponse.

Les sept autres ont obtenu des résultats erronés. La source d'erreur la plus répandue est sans conteste la confusion périmètre – aire comme on peut le voir sur la figure 10.4.

Notons encore que parmi les élèves ayant d'abord mesuré, un seul a calculé correctement l'aire du rectangle (qu'il a toutefois exprimée en mm), avant de choisir le mode puzzle pour terminer son raisonnement (*Fig. 10.5*).

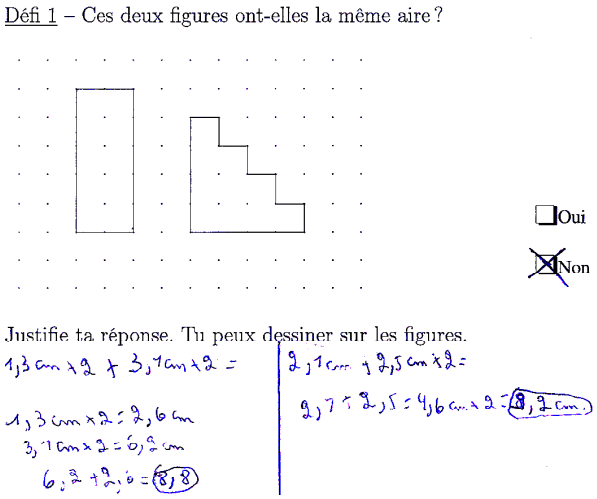


Fig. 10.4

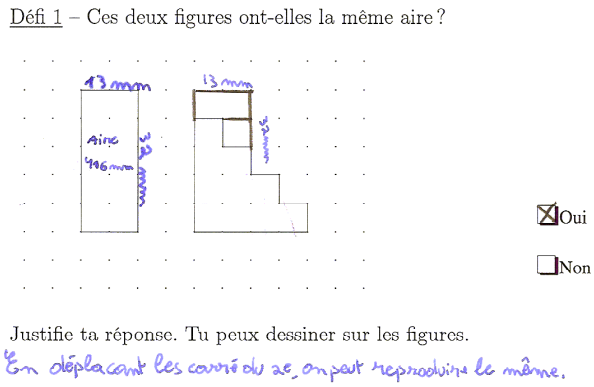


Fig. 10.5

Remarques générales :

Il semble que dans un certain nombre de cas la consigne n'ait pas été comprise. Nous pensons pouvoir mettre dans cette catégorie les enfants qui n'ont pas répondu ou qui ont produit des dessins sans aucun rapport avec le défi.

Parmi les explications possibles, il y a la non-compréhension du mot « *aire* » ou, de manière plus générale, la méconnaissance du français. De plus, nous avons découvert ultérieurement qu'un des enfants présente une déficience auditive grave.

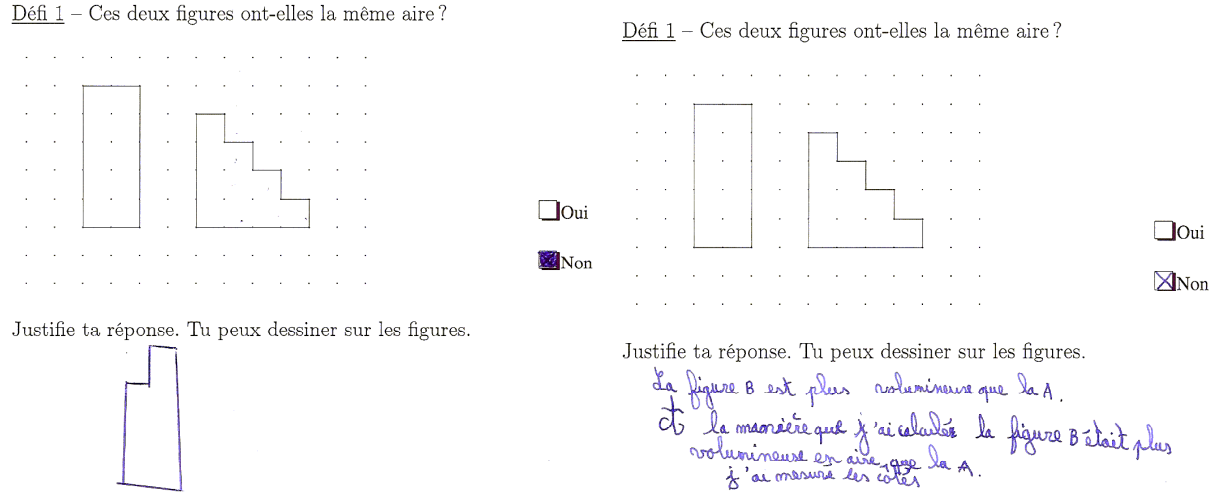


Fig. 10.6 Deux exemples d'incompréhension

10.3.2 Item 2

Cet item demande à nouveau de comparer les aires de deux figures dont la forme générale est différente. Cette fois cependant, au lieu de ne laisser apparaître que le contour des figures comme dans l'item 1, on propose aux élèves une décomposition en formes géométriques élémentaires qui diffèrent d'une figure à l'autre.

Cette fois encore, trois modes de raisonnement sont utilisés pour répondre à cette question.

1. Le mode **qualitatif**, ou mode puzzle,

2. le mode **quantitatif**, ou mode comptage,

3. le mode **numérique**, ou utilisation de formules d'aire.

S'ils utilisent le mode quantitatif, les élèves doivent avoir conscience qu'il ne s'agit pas de comparer des nombres de pièces mais bien des aires. En effet, le triangle rose contient 16 triangles équilatéraux identiques, la figure bleue contient 9 pièces (4 triangles équilatéraux identiques, 4 losanges identiques et 1 parallélogramme).

Pour cet item, il y a deux étalons possibles :
– Les deux figures sont décomposables en 16 triangles équilatéraux, décomposition qui est d'ailleurs apparente dans la figure rose.
– On peut aussi envisager d'utiliser comme étalon un losange obtenu par juxtaposition de deux triangles équilatéraux.

Il faut également remarquer, comme pour le premier item, que si l'utilisation de formules d'aire est envisageable pour la première figure, elle est plus malaisée pour la seconde.

Nous avons obtenu globalement 71 réponses correctes sur les 109 copies, soit 65% de l'échantillon. Parmi celles-ci, nous avons 19 réponses correctes obtenues par puzzle, 45 réponses correctes par comptage et 3 par les procédés originaux suivants :

Cette élève a compté les losanges, en associant deux triangles lorsque c'était nécessaire. Il faut remarquer qu'elle a appelé « carrés » ces associations.

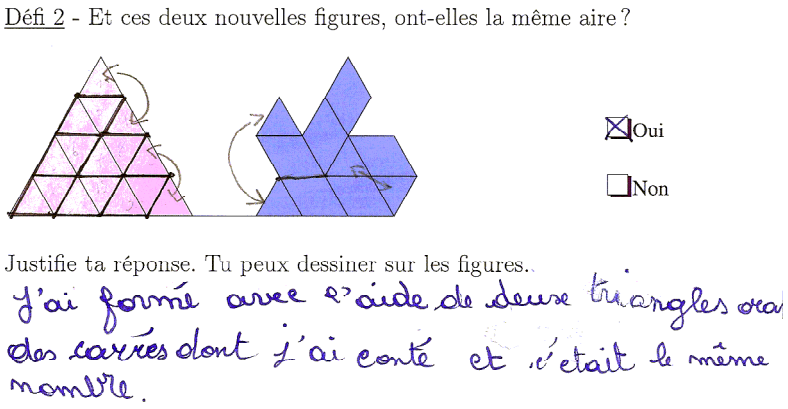
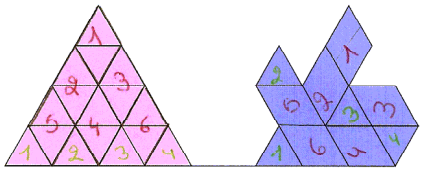


Fig. 10.7

Défi 2 - Et ces deux nouvelles figures, ont-elles la même aire ?



☒ Oui

☐ Non

Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

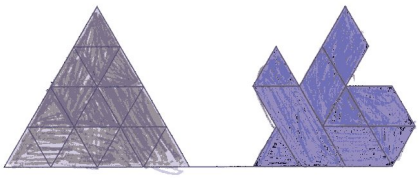
dans la 2ème figure il y a 6 losange alors j'ai tracé 6 losange dans la piramide et 4 triangle que j'ai aussi retracer ca rentrait tout juste alors il son la même air.

Il y a même une élève qui a effectué un comptage mixte comme on le voit très clairement ci-contre.

Fig. 10.8

Dans ce cas, l'élève a colorié dans le triangle rose l'équivalent de chaque pièce du triangle bleu.

Défi 2 - Et ces deux nouvelles figures, ont-elles la même aire ?



☒ Oui

☐ Non

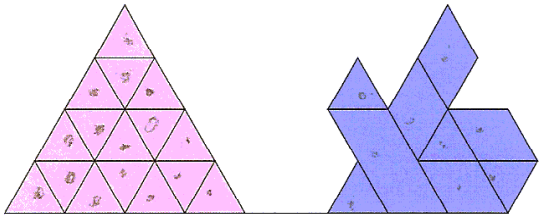
Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

Oui car quand on colorie des parties égales il y a tout qui est colorié des deux côtés

Fig. 10.9

Les quatre dernières réponses correctes ne sont pas accompagnées de justifications adéquates. Parmi les réponses incorrectes, distinguons les catégories suivantes :

– cinq élèves ont un procédé de comptage correct mais fournissent une réponse erronée ;
– deux élèves comptent les pièces sans tenir compte de l'inégalité des aires ;



☐ Oui

☑ Non

Justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

j'ai mis non parce que ils ont pas les même nombre de forme l'un en a 16 tandis que l'autre en a que 9.

Fig. 10.10

– quatre élèves ont tenté le mode puzzle sans y parvenir ;
– dix élèves ont mesuré des longueur ; sept d'entre eux ont tenté de calculer le périmètre des figures. Dans tous les cas, ce type de justification était erroné.
– quinze élèves sont inclassables parce que la justification fournie est trop peu fréquente, incohérente ou inexistante. Une de ces justifications montre la persistance en sixième

primaire d'une méconnaissance du concept d'aire lui-même. La figure 10.11 montre en effet que son auteur confond *avoir même aire* et *avoir même forme*. Ce comportement est plus fréquent en cinquième primaire où il est le fait d'environ 6% des élèves (*voir la section 12.3.2*).

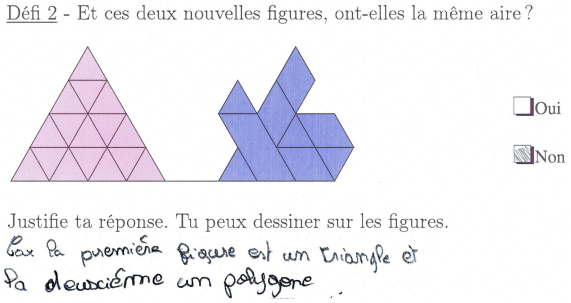


Fig. 10.11

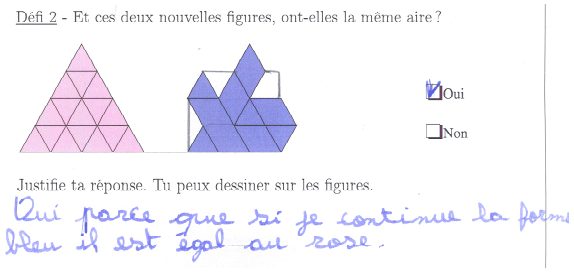


Fig. 10.12

Remarque :

Ces deux items ayant le même objectif, il nous est apparu intéressant de voir si les élèves utilisent la même méthode pour les deux.

62 élèves (sur 109) sont fidèles à leur méthode.

19 élèves ont utilisé deux méthodes différentes.

Pour les élèves restants, les copies ne permettent pas de décider.

10.3.3 Item 3

Dans cet item, il s'agit en quelque sorte de mesurer l'aire d'un rectangle 15×9 en utilisant un carré 3×3 comme unité d'aire.

Comme pour les items précédents, nous avons observé trois modes de raisonnement différents. Nous qualifierons le premier de mode *quantitatif-global*. Dans ce mode, l'élève dénombre directement les carrés 3×3 qui peuvent remplir le rectangle. Le deuxième mode est le mode *numérique* qui, rappelons-le, consiste à utiliser des formules d'aire. Quant au troisième, nous l'avons appelé mode *quantitatif atomisé* pour le distinguer du mode quantitatif-global. Dans ce mode, l'élève ne perçoit pas le recouvrement du rectangle par des carrés 3×3. Il détermine le nombre (135) de carrés élémentaires constituant le rectangle. Pour ce faire, soit il procède par dénombrement, soit par multiplication (de 15 par 9). Ensuite, il divise 135 par 9.

Nous avons obtenu environ 90% de bonnes réponses, à la question posée.

Le mode quantitatif-global

La méthode la plus fréquemment utilisée à cette question est un simple dénombrement : environ 75% des élèves utilisent cette méthode. En règle générale, ils reproduisent le carré dans le rectangle, les justifications étant très différentes mais allant toujours dans le même sens :

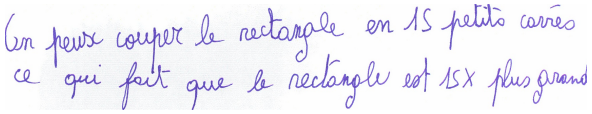


Fig. 10.13

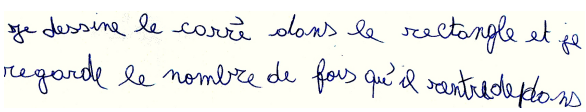


Fig. 10.14

À la fin, les élèves comptent les carrés qu'ils ont reproduits dans le rectangle, certains allant jusqu'à les numéroter (*Fig. 10.15*). Notons tout de même que cinq élèves ont répondu que le carré rose allait 14 fois dans le rectangle (*Fig. 10.16*).

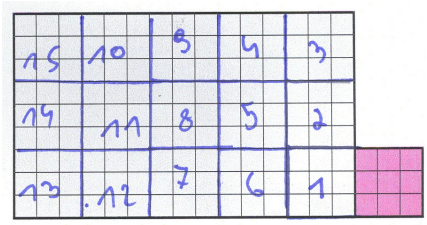


Fig. 10.15

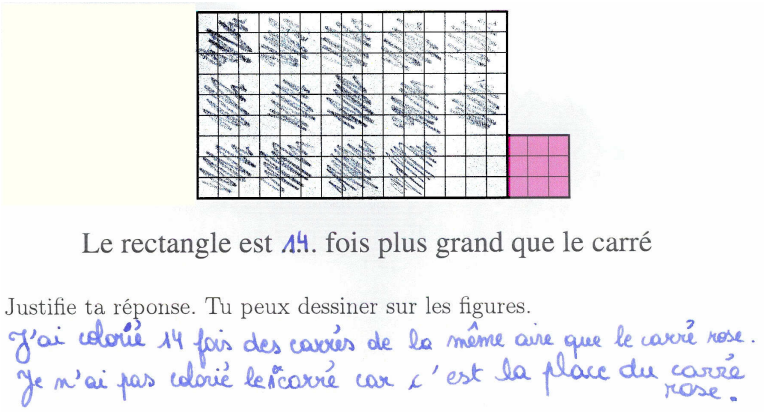


Fig. 10.16

Les réponses analogues à celle de la figure 10.16 mettent en évidence ce qui pourrait être un problème de précision du langage. Pour certains, « trois fois plus grand » désigne une multiplication par quatre. Le rapprochement des mots « fois » et « plus », s'il est fréquent dans la vie courante, est néanmoins susceptible d'induire des erreurs, l'addition étant plus familière que la multiplication. Il pourrait aussi être dû au fait que le carré étalon était accolé au rectangle. Nous verrons que ce fait n'est pas déterminant car le même problème est apparu — et plus fréquemment — en cinquième primaire quand le carré *n'était pas* accolé au rectangle (*voir le pré-test de cinquième année, page 392*).

Le mode numérique

Cette méthode de résolution consiste à multiplier les nombres de reports possibles du carré rose sur deux côtés consécutifs du rectangle. Ceci revient à utiliser le côté du carré rose comme unité de longueur. Cette méthode est utilisée par environ 10% des élèves.

Certains élèves déterminent mentalement les nombres de reports sur deux côtés.

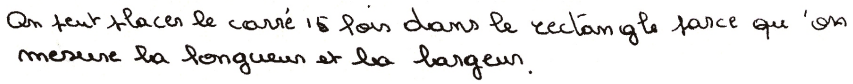


Fig. 10.17

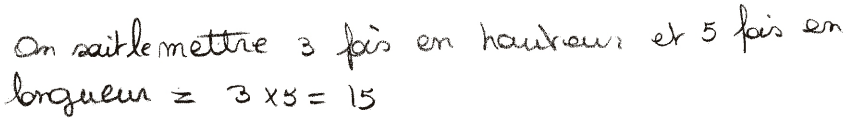


Fig. 10.18

D'autres ont besoin de visualiser en dessinant une ligne de carrés (*figure 10.19*) ou une

ligne *et* une colonne de carrés (*figure 10.20*) avant de passer à la multiplication :

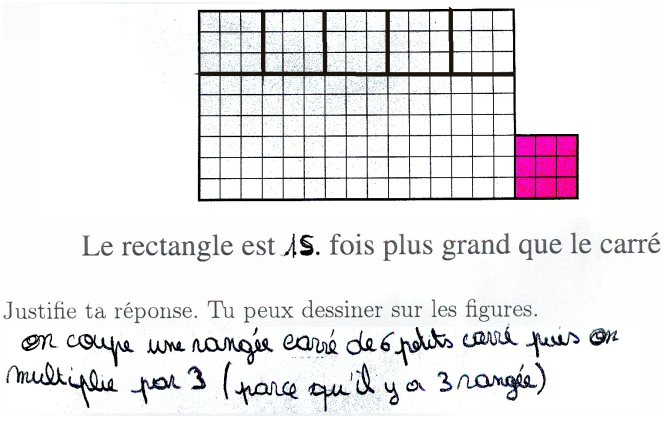


Fig. 10.19

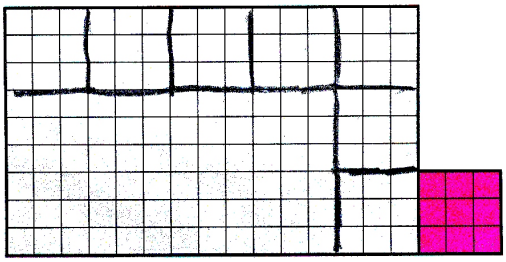


Fig. 10.20

Un élève a dessiné tous les carrés 3×3 avant de les compter par trois (3, 6, 9, 12, 15).

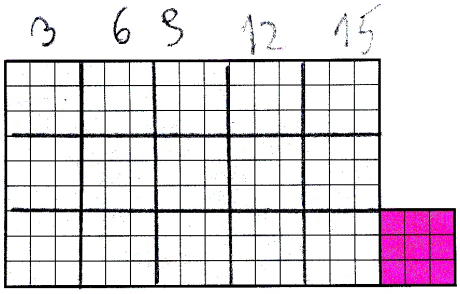


Fig. 10.21

Il y a bien entendu des erreurs. Un élève (*Fig. 10.22*) reporte le carré sur la longueur et sur la largeur et au lieu de multiplier, il additionne, ce qui correspond à une confusion entre aire et périmètre. Un autre (*Fig. 10.23*) ne représente le carré que sur la longueur.

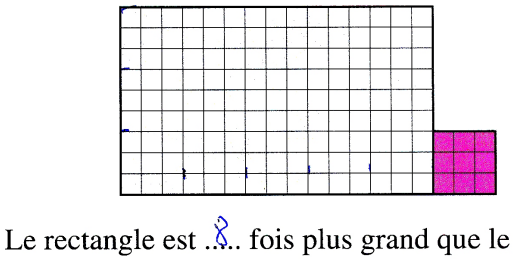


Fig. 10.22

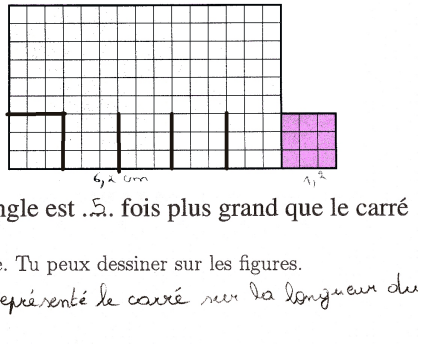


Fig. 10.23

La méthode quantitative-atomisée Cette méthode consiste à compter le nombre de petits carrés dans le rectangle et dans le carré rose et de diviser le premier résultat par le second.

Environ 5% des élèves ont utilisé ce raisonnement. Pour calculer le nombre de petits carrés, certains élèves ont utilisé la formule de l'aire. D'autres les comptent.

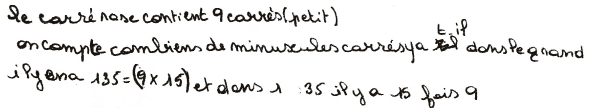


Fig. 10.24

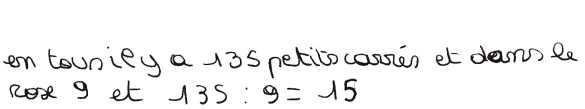


Fig. 10.25

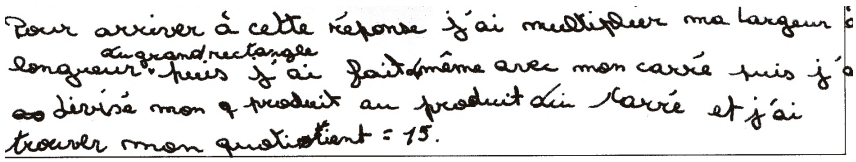


Fig. 10.26

Des exceptions

Une première exception est l'élève qui tient le raisonnement suivant :

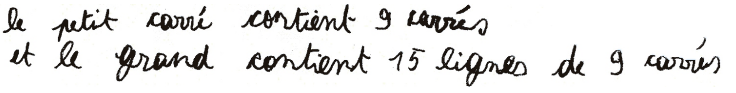


Fig. 10.27

Deuxième exception : l'élève suivant a dessiné sept rectangles 8×2. Il isole ainsi deux bords du rectangle. Il obtient finalement le résultat 48, ce qui est le périmètre du rectangle si on prend comme unité de longueur le côté du carré élémentaire.

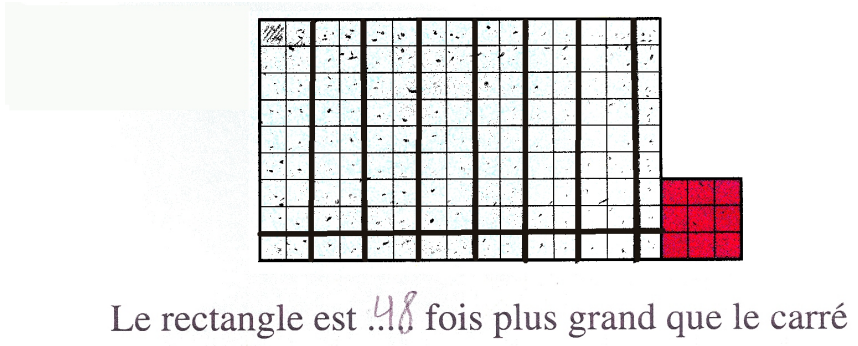


Fig. 10.28

10.3.4 Item 4

La question demandait de dessiner « tous les carrés que tu peux construire à partir d'un ou plusieurs de ces petits carrés », sans préciser si les carrés construits devaient être différents ou non. Certains élèves pouvaient aussi interpréter la consigne en considérant que chaque petit carré ne pouvait être utilisé qu'une fois. Dans ce cas, on ne peut dessiner de carrés comprenant un nombre total de petits carrés supérieur à 13. Si par contre chaque petit carré peut être utilisé plusieurs fois, « dessiner tous les carrés possibles » est impossible puisqu'il y en a une infinité et les élèves doivent choisir une règle de limitation.

Le premier intérêt de la question était donc de déterminer comment les élèves allaient

interpréter la consigne. Aussi avons-nous relevé d'abord les différents réponses.

La réponse la plus fréquente (environ 60% des élèves) est constitué de trois carrés, de tailles respectives 1×1, 2×2 et 3×3.
Dans ce cas, les élèves utilisent donc plus de 10 petits carrés. Ils dessinent le plus de carrés possibles, tout en étant deux à deux différents.

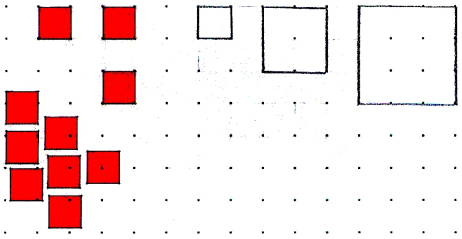


Fig. 10.29

Ajoutons les fréquences d'apparition dans les réponses de chacun de ces types de carrés :

- 68% des élèves ont dessiné le carré 1×1,
- 89% ont représenté le carré 2×2,
- 79% ont dessiné le carré 3×3.

On constate l'attrait plus faible du carré 1×1 malgré la présence dans la consigne de l'expression « un ou plusieurs ». Ce fait peut être relié à l'énoncé de la question qui demandait une *construction*.

Environ 15% des élèves ont choisi l'autre possibilité d'interprétation de la consigne en acceptant des répétitions dans la réponse, mais certains d'entre eux utilisent au total plus de 10 petits carrés.

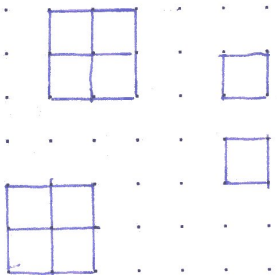


Fig. 10.30

Des carrés trop grands apparaissent sur environ 15% des feuilles (*Fig. 10.31*). Sur d'autres feuilles (environ 10%) figurent des rectangles ou des formes non demandées (*Fig. 10.32* à *10.34*).

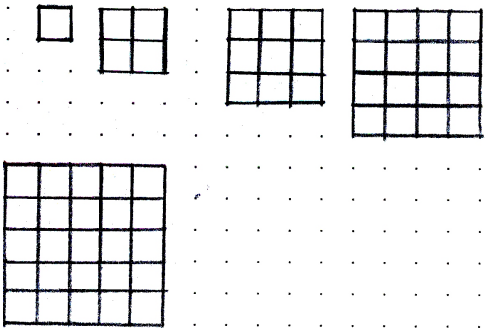


Fig. 10.31

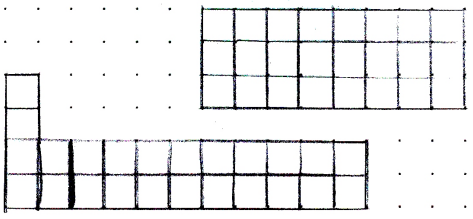


Fig. 10.32

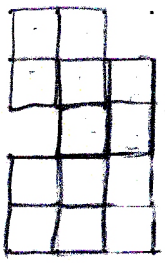


Fig. 10.33

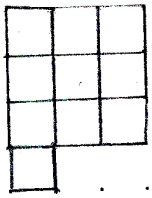


Fig. 10.34

Notons que la figure 10.34 est ambiguë : s'agit-il d'une forme non carrée de 10 petits carrés ou de deux formes carrées, l'une de 9 carrés, l'autre d'un seul carré ? (Dans ce cas, la consigne serait respectée.)

Un autre élève a dessiné trois carrés qui peuvent être considérés comme 1×1, 2×2, et 3×3 (*Fig. 10.35*). Cependant, il les a dessinés « sur la pointe », sans utiliser les petits carrés donnés. Un autre problème de compréhension de la consigne donne la figure 10.36.

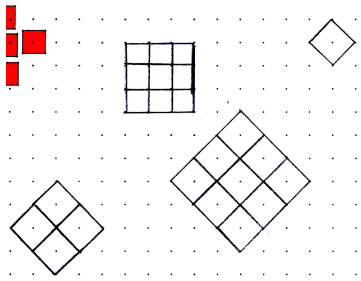


Fig. 10.35

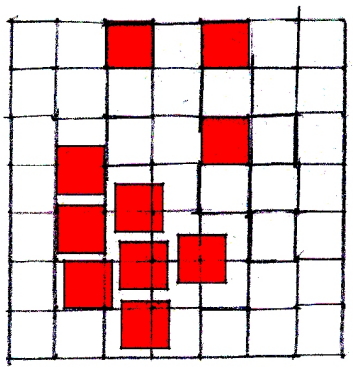


Fig. 10.36

Deux élèves ont apporté une « touche artistique » à leur dessin :

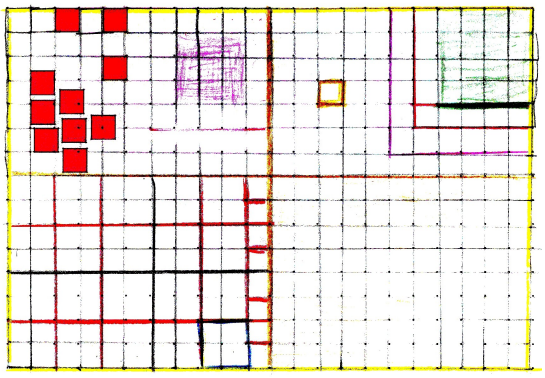


Fig. 10.37

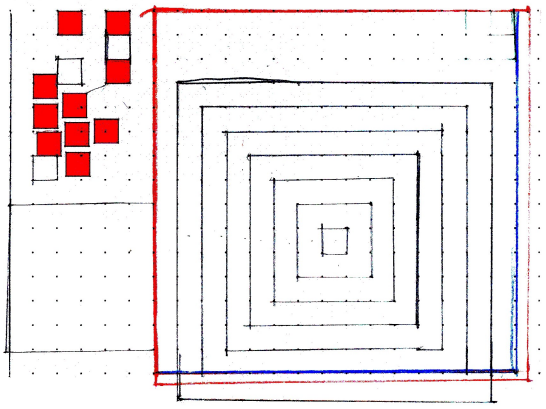


Fig. 10.38

10.3.5 Item 5

Des modes de perception et de reproduction

La figure à reproduire peut être vue comme un assemblage de seize petits triangles. Elle peut aussi être vue comme une poupée structurée en trois parties : un pied de trois petits triangles équilatéraux constituant un trapèze isocèle, un corps ayant la forme d'un grand triangle équilatéral divisé en neuf petits triangles et une tête, également un triangle équilatéral, de quatre petits triangles. Enfin, il est possible de percevoir la poupée dans son cadre rectangulaire et de remarquer par exemple que les côtés obliques du corps sont situés sur les diagonales du cadre.

L'aptitude d'un élève à raisonner sur une figure étant nécessairement influencée par la

perception qu'il en a, nous nous sommes intéressés à établir si les trois modes de perception qui viennent d'être décrits — que nous qualifierons respectivement, en tenant compte de leur niveau de structuration, de *mode atomisé*, de *mode local* et de *mode global* — sont effectivement présents chez les élèves ayant participé au pré-test.

Sans doute nous est-il impossible de déterminer directement le mode de perception d'un élève. Mais ce mode influence certainement la façon dont cet élève reproduit la figure et nous distinguerons donc également trois modes de reproduction : *atomisé, local* et *global*. Remarquons que le mode de reproduction mis en œuvre par un élève n'est pas nécessairement du même type que son mode de perception. Par exemple, les difficultés instrumentales peuvent amener un élève capable de percevoir la structure locale d'une figure à reproduire celle-ci en mode atomisé.

Les modes de reproduction des trois parties de la figure donnée peuvent même être différents, ce qui peut donner une impression d'incohérence. On trouvera ci-dessous des exemples des différentes situations.

Cependant que si le mode de perception d'un élève peut se situer à un niveau plus structuré que son mode de reproduction, la réciproque ne peut être vraie : un élève ne pourrait utiliser le mode global de reproduction si son mode de perception n'est pas du même niveau.

- *Le mode atomisé de reproduction*
  Dans ce mode, l'élève reproduit la figure comme un assemblage de petits triangles, qu'il dessine un à la fois, généralement en progressant du bas vers le haut.

  Les dessins ci-contre illustrent la reproduction atomisée : les côtés obliques des triangles d'une couche ne sont pas dans le prolongement de ceux de la couche suivante.

  En particulier, le corps et la tête de la poupée ne sont pas dessinés comme des triangles.

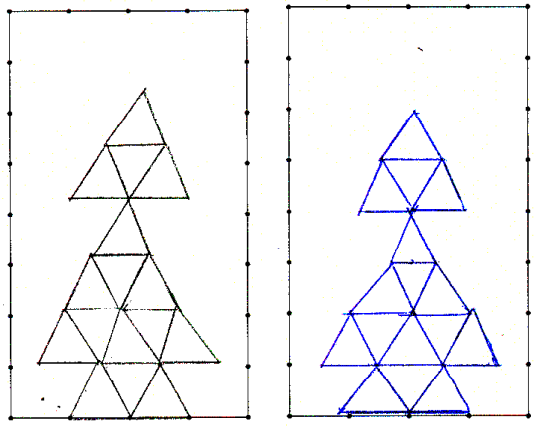
  

  Fig. 10.39

  Ce mode de reproduction est assez fréquent, apparaissant dans 44 feuilles sur 109, soit environ 40%.

- *Le mode local de reproduction.*
  Dans ce mode, le corps et la tête de la poupée sont reproduits comme des triangles et on observe sur le dessin que ceux-ci sont dessinés avant les petits triangles qui leur sont intérieurs. Nous avons attribué ce mode de reproduction à 46 élèves, soit également environ 40 %. Il convient toutefois de noter que certaines copies relèvent de modes différents pour la tête et le corps, auquel cas nous leur avons attribué ce même mode local.

Le dessin de gauche de la figure 10.40 montre deux beaux triangles équilatéraux pour le corps et la tête de la poupée. Mais l'auteur du dessin n'a pas atteint le mode global de reproduction : le côté gauche du triangle de droite de la première couche de la tête n'est pas dans le prolongement du côté gauche du corps. De plus, malgré l'utilisation du quadrillage, le dessin n'est pas assez précis pour que les côtés obliques du corps soient situés sur les diagonales du cadre. Celles-ci n'ont donc pas été utilisées pour la construction.

Sur le dessin de droite, le corps et la tête sont des triangles équilatéraux acceptables. Les petits triangles intérieurs le sont beaucoup moins : la reproduction relève du mode local, mais cela n'entraîne pas nécessairement la précision des détails. Quant au pied, on constate qu'il se prête plus que les deux autres parties au dessin par assemblage de petits triangles et ne peut donc être considéré comme un indicateur fiable du mode de perception ou de reproduction dominant chez l'élève.

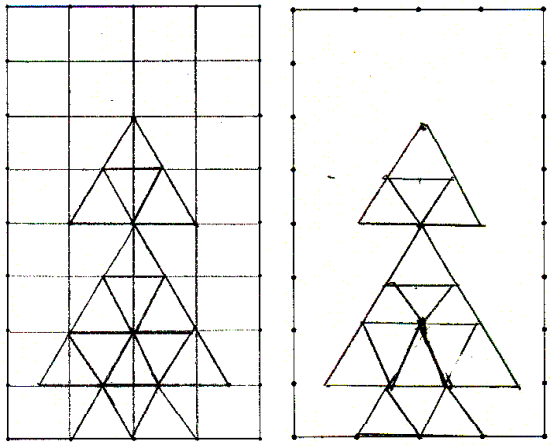


Fig. 10.40

- Le mode global de reproduction

  Nous considérons qu'un élève a utilisé un mode global de reproduction lorsque les côtés obliques du corps de la poupée, ainsi que leurs prolongements dans la tête sont situés sur les diagonales du cadre, ce qui permet de supposer que l'auteur du dessin a reconnu les directions de ces diagonales comme des directions privilégiées pour la figure. Environ 15 % des élèves semblent se situer à ce niveau.

La figure 10.41, qui n'a été réalisée que par un seul élève, constitue une illustration parfaite du mode global. La figure 10.42 n'atteint pas la même perfection, mais constitue néanmoins un excellent travail du point de vue global. Il est à noter que les dessins réalisés selon ce mode global sont généralement très soignés et précis.

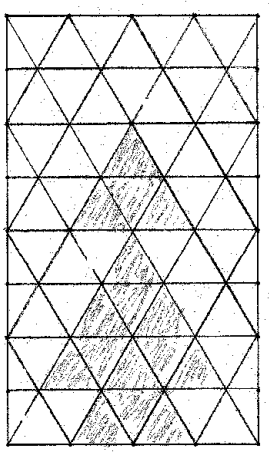


Fig. 10.41

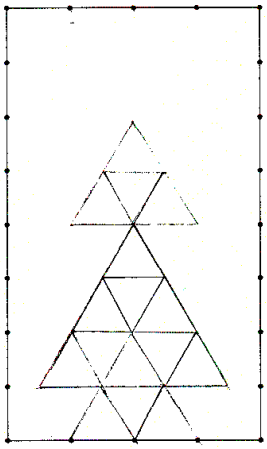


Fig. 10.42

- *Un mode mixte*

  Nous l'avons signalé plus haut : certains élèves ne réalisent pas de la même manière le corps et la tête de la poupée. Ce fait même indique qu'ils perçoivent les deux parties comme autonomes et doivent donc être considérés comme utilisant un mode

local. Néanmoins, ils dessinent une des deux parties en utilisant le mode atomisé.

Sur le dessin de gauche ci-dessous, le corps est clairement en mode atomisé, mais la tête est un vrai triangle équilatéral. L'auteur semble avoir compris en cours de réalisation du travail qu'il lui était plus facile de dessiner le grand triangle en premier.

Sur le dessin de droite, c'est l'inverse : la tête a sans doute paru plus facile à dessiner en plaçant deux sommets « à vue ».

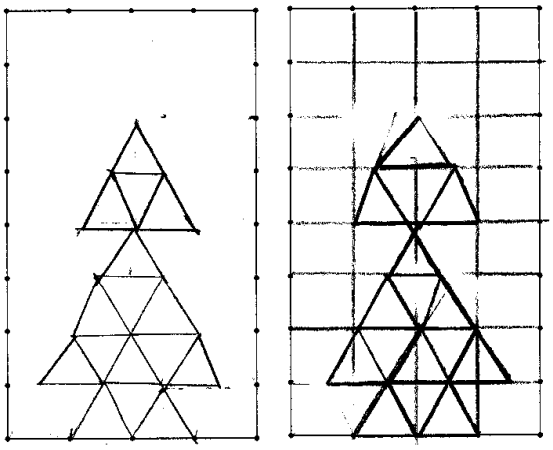


Fig. 10.43

- *Des reproductions aberrantes*

  Quelques dessins échappent à toute classification. Ces cas sont peu nombreux. On doit cependant se demander comment aider les élèves concernés à surmonter un handicap qui pourrait les rendre inaptes à tout apprentissage de la géométrie. Ce sont des mesures spécifiques, individuelles, qu'il conviendrait vraisemblablement d'envisager.

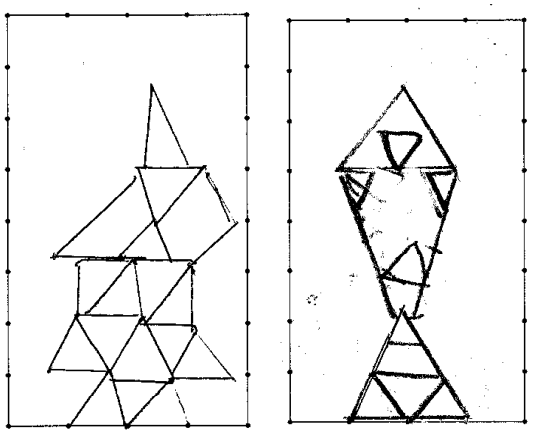


Fig. 10.44

La précision des reproductions

L'énoncé de l'item 5 demandait explicitement que le dessin soit reproduit avec le plus de précision possible. Nous avons donc examiné ce qu'il en était.

– Nous avons d'abord constaté un phénomène de perturbation des reproductions dû au décalage en hauteur du cadre contenant la figure à reproduire par rapport à celui destiné à accueillir la reproduction.
Les figures 10.45 et 10.46 illustrent ce phénomène. Dans les deux cas, l'auteur du dessin a démarré son tracé au bord inférieur du cadre, n'a tenu aucun compte des repères placés sur les bords du cadre et a ensuite rattrapé le décalage en hauteur, de façon à ce que le sommet de la tête soit approximativement à la même hauteur sur la copie que sur l'original. La déformation ainsi introduite enlève toute précision à la reproduction.

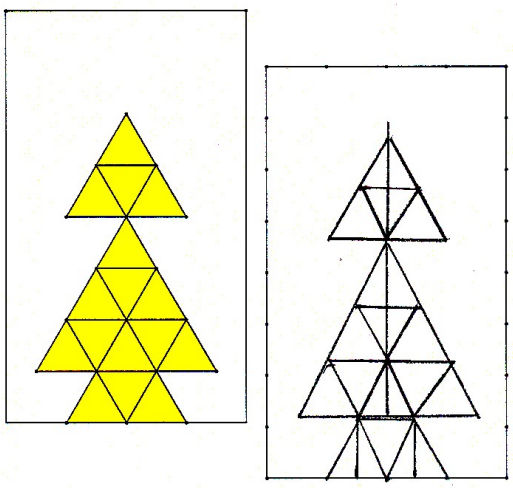


Fig. 10.45

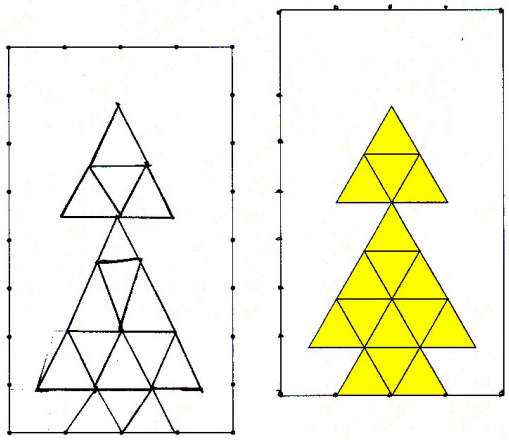


Fig. 10.46

Ce comportement a été observé chez un peu moins de 20% des élèves. On peut se demander comment interpréter un tel comportement. Est-ce le concept même de reproduction qui est en cause ? Quel rapport ces élèves ont-ils avec le concept géométrique de translation, voire même le concept physique de mouvement ?

– Le comportement destiné à assurer la précision des reproductions devait dans l'esprit des auteurs du questionnaire reposer sur l'utilisation des repères portés sur le cadre. On constate qu'en effet environ les deux tiers des élèves ont respecté ces repères et ont atteint une précision acceptable. Certains élèves ont joint ces repères par des traits horizontaux ou verticaux, réalisant ainsi — partiellement ou complètement — un réseau orthogonal sur la figure. D'autres respectent les repères sans éprouver le besoin de tracer des traits de construction (à moins qu'ils les aient gommés sans laisser de traces).
Chez certains élèves, notamment ceux qui utilisent le mode atomisé de reproduction, le respect des points de repère n'empêche pas des imprécisions, car les sommets de certains triangles ne sont pas situés sur des verticales joignant des repères du cadre. Les dessins de droite des figures 10.39 et 10.43 illustrent ces situations.
– On notera aussi qu'environ un quart des élèves ont porté des marques sur la figure d'origine. Ceci a été dommageable pour certains d'entre eux.

En effet, pour faciliter le tracé des triangles équilatéraux, ces cadres étaient de dimension 7 cm × 4 cm. et la graduation utilisée pour dessiner la figure initiale découpait (implicitement) les côtés verticaux en 8 parties. Quelques élèves, conditionnés par l'usage d'une règle graduée en cm ont divisé ces côtés en 7 parties, plaçant ainsi sur le cadre d'origine des points de repère n'ayant rien à voir avec ceux qui leur étaient donnés sur le cadre de la reproduction.
La figure ci-contre montre ce qui en est résulté.

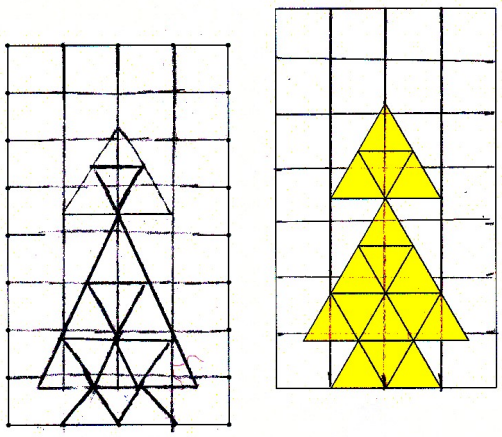


Fig. 10.47

10.3.6 Item 6

Si l'on devait examiner cette question simplement sous un angle réussite – échec, on la considérerait sans aucun doute comme fort bien réussie, puisque une écrasante majorité des élèves (environ 80%) estime correctement que la figure rose a une plus grande aire que le carré bleu. Aussi notre intérêt se porte-t-il sur deux autres comportements que la question permet d'étudier : d'une part la procédure appliquée pour comparer les deux formes et en particulier, déterminer l'aire du carré bleu, d'autre part la formulation de la justification.

La comparaison des deux aires

La méthode de calcul de cette aire la plus fréquemment utilisée (environ 30% des élèves) associe les techniques de dénombrement et de puzzle. Les deux extraits suivants sont représentatifs de cette méthode, tout en utilisant des registres d'expression différents :

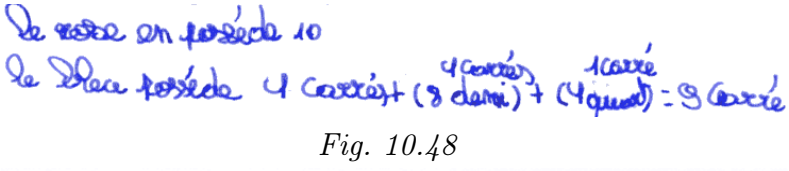


Fig. 10.48

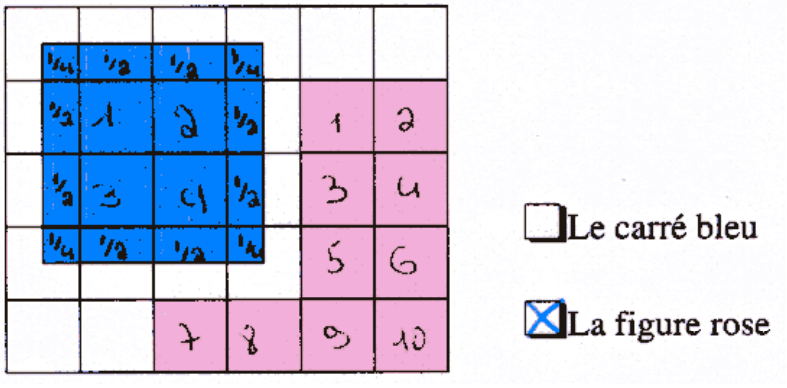


Fig. 10.49

Quelques élèves élaborent un puzzle qui leur permettrait facilement de procéder au dénombrement... mais estiment sans doute cette phase inutile.

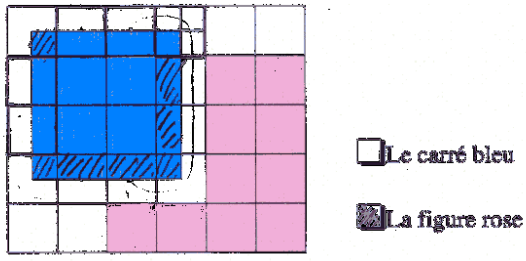


Fig. 10.50

Environ 10% des élèves appliquent des formules (*Fig. 10.51*).
La plupart d'entre eux soit « cafouillent », soit confondent aire et périmètre et comparent les périmètres plutôt que les aires.

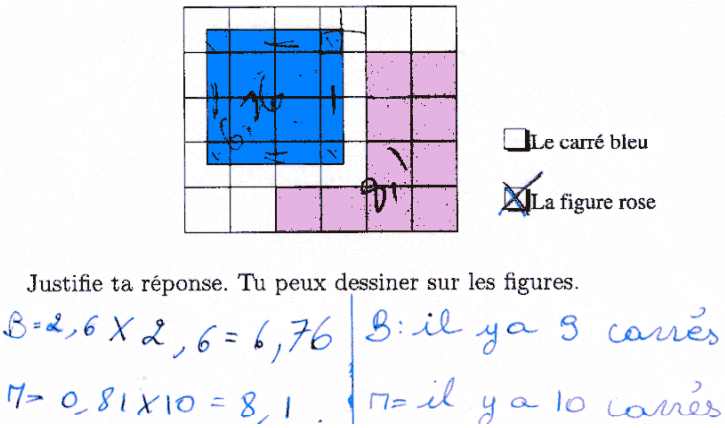


Fig. 10.51

Un élève ne confond peut-être pas les deux notions, mais leur attribue des propriétés fausses.

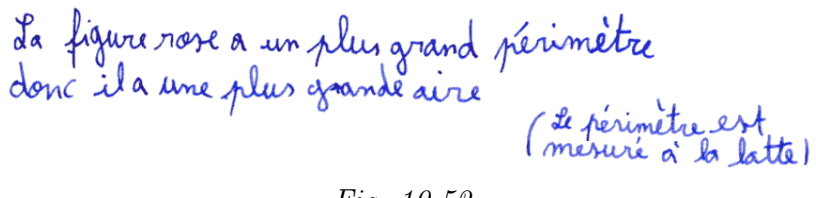


Fig. 10.52

La réponse d'un autre élève nous interpelle fortement :

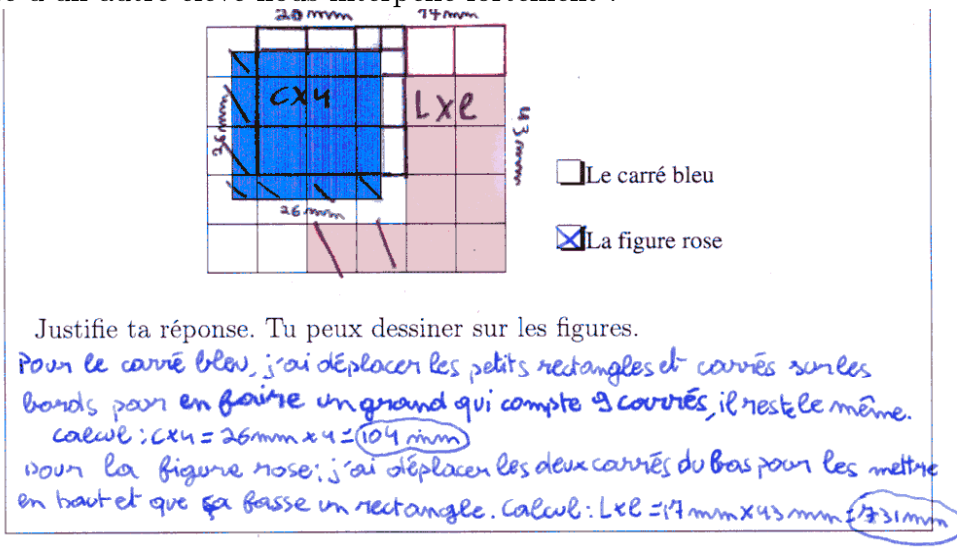


Fig. 10.53

Cet élève s'exprime beaucoup mieux que la plupart de ses camarades. Il ne commet que deux fautes d'orthographe. Sa vision géométrique est excellente puisqu'il a imaginé un puzzle parfaitement correct, remplaçant les deux formes données par des formes familières et bien placées sur le quadrillage, ce qui permet de comparer leurs aires soit par dénombrement, soit par l'application des formules usuelles. Après avoir ainsi fait étalage de ses capacités, à l'occasion d'une activité peu courante dans les classes, il choisit d'appliquer des formules qui peuvent être qualifiées de routinières et commet alors une bourde extraordinaire en utilisant la formule du périmètre pour le carré et celle de l'aire pour le rectangle !

Pour clore ce point, mentionnons encore une autre démarche de certains élèves qui translatent mentalement le carré bleu de façon à placer ses bords sur les lignes du quadrillage, ce qui leur donne l'aire directement en les dispensant de la manipulation de fractions de carrés ou de l'élaboration d'un puzzle. Les extraits suivants illustrent cette démarche que les enfants — ne connaissant ni les mots mathématiques corrects, ni les notions qu'ils manipulent — expliquent comme ils le peuvent :

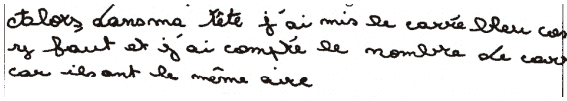


Fig. 10.54

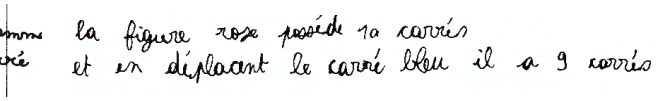


Fig. 10.55

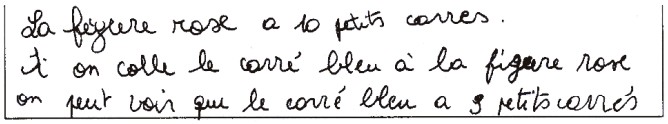


Fig. 10.56

Les justifications fournies par les élèves

Nous pourrons être assez brefs sur ce point, car nous avons déjà reproduit de nombreuses justifications dans ce qui précède.

Commençons par préciser que nous avons considéré que la réponse « la figure rose » était correctement et complètement justifiée lorsque l'élève avait fourni un raisonnement complet, correct se terminant par la mention *explicite* des valeurs des aires (généralement sous la forme « 9 carrés » pour l'une et « 10 carrés » pour l'autre). Le pré-test de notre expérience n'étant pas destiné à évaluer les élèves, nous pouvions nous permettre d'être assez strict dans nos exigences.

Ceci étant dit, nous constatons que si environ 80% des élèves fournissent la bonne réponse, seuls 20% produisent une justification complète et correcte, et environ 35% une justification partielle et sans erreur. Par contre la justification de 30 % des élèves est erronée (alors qu'il n'y a que environ 15% des élèves qui choisissent la réponse fausse « le carré bleu »). On compte aussi un peu plus de 10% des élèves qui ne fournissent aucune justification.

Ainsi les résultats à cette question ne sont pas aussi satisfaisants qu'on aurait pu le croire au seul vu du pourcentage de bonnes réponses. Bien entendu le caractère incomplet ou l'absence de formulation écrite d'une justification ne trahissent pas nécessairement une déficience d'ordre mathématique. Elles peuvent aussi être des éléments d'un phénomène plus grave qui affecte un élève donné dans l'ensemble de ses activités scolaires. Seul l'ins-

tituteur titulaire de la classe pourrait fournir des indications à ce sujet.

10.4 Des comportements de réussite ou d'échec

Dans les sections précédentes, nous avons rencontré divers « comportements » d'élèves pouvant être associés, peu ou prou, à la réussite ou à l'échec. Par exemple, à l'item 1, nous avons noté que les élèves ayant choisi le mode *numérique* ont plutôt tendance à produire une réponse erronée.

Dans le but d'examiner ces comportements de façon plus systématique et surtout d'essayer de les *structurer* en vue de mettre en évidence leurs relations réciproques, nous avons utilisé une technique statistique appelée l'*analyse statistique implicative*.

Les principes de cette technique sont expliqués à l'annexe B. Le lecteur trouvera également au paragraphe B.3 les détails de l'analyse implicative du pré-test. Nous en présentons ici les conclusions.

10.4.1 Les comportements d'échec

L'analyse implicative met en évidence divers comportements qui sont associés à des échecs aux questions correspondantes.

On remarque d'abord une série de comportements d'échecs ayant des relations d'implication entre eux : ceux des items 1, 2 et 6. Il s'agit essentiellement des comportements consistant à mesurer des longueurs et à faire divers calculs (notamment de périmètres) à partir de ces mesures. Il n'y a rien d'étonnant à ce qu'aux trois items 1, 2 et 6 apparaissent des comportements d'échec analogues, vu qu'il portaient tous trois sur la comparaison des aires de deux figures différentes. Comme on l'a indiqué précédemment, ces items étaient plus faciles à traiter par comptage ou découpage que par l'usage de formules toutes faites. Il est donc assez normal que l'usage de formules n'ait pas été fructueux. On ne peut en déduire que les élèves en général ne connaissent pas ou ne maîtrisent pas les formules de calcul des aires, mais uniquement que ceux qui ont voulu les appliquer à ces items 1, 2 et 6 ne les maîtrisaient pas suffisamment pour se rendre compte qu'il valait mieux ne pas les appliquer.

Les comportements d'échec aux items 3, 4 et 5 sont isolés.

- À l'item 3, l'échec principal consiste en une justification insuffisante.
- À l'item 4, certains élèves dessinent des formes non carrées et/ou des carrés de taille supérieure à 3×3 (le premier de ces comportements impliquant le second).
- À l'item 5, l'erreur consiste à produire un dessin incomplet.

10.4.2 Les comportements de réussite

De même que les trois items 1, 2 et 6 étaient associés en ce qui concerne les comportements d'échec, ils le sont aussi — et très fortement — pour les comportements de réussite. Ces comportements sont ceux qui consistent à apposer des marques supplémentaires sur les figures, des marques qui visiblement servent à supporter le raisonnement puisqu'elles entraînent la réussite. Dans le même groupe, on trouve également le fait d'utiliser à l'item 6 une méthode de résolution qui combine un dénombrement et un puzzle.

Les méthodes de découpage et de recomposition aux items 1 et 2 ne sont pas loin des précédentes, mais néanmoins un peu isolées. Ces items sont plus faciles à résoudre par dénombrement.

Un élément remarquable est le rôle joué par le comportement lié à la perception globale à l'item 5. Ce comportement, un des moins fréquents — ce qui indique que c'est un des plus difficiles à acquérir — entraîne non seulement la réussite à l'item 5, mais aussi aux items 2 et 6, ainsi que la méthode par dénombrement et puzzle à cet item 6 et le fait de produire un carré 1×1 à l'item 4. Ce carré apparaît plus rarement que les carrés 2×2 et 3×3. Les élèves qui pensent à le dessiner ont compris qu'il s'agit d'un cas « limite » d'une famille générale. Ils font ainsi preuve d'une certaine maturité mathématique. Que la perception globale soit liée à ce comportement est donc particulièrement intéressant.

D'autres comportements jouent également un rôle intéressant. Il s'agit
– d'apposer des marques pertinentes sur la figure à l'item 6,
– de procéder par découpage et recomposition à l'item 1,
– de fournir une justification partielle, mais sans erreur à l'item 6,
– de dessiner des traits de construction et de les respecter, à l'item 5.
Avec la perception globale, ces comportements pourraient constituer les composantes de base d'une bonne réussite à ce pré-test. On constate en effet que, ensemble, ils entraînent tous les comportements de réussite.

On notera aussi que ces cinq comportements correspondent à cinq facettes différentes de l'activité de l'élève.

10.5 La population testée est-elle initialement homogène ?

Dans cette section, nous essayons de déterminer si la population d'élèves ayant participé à notre expérimentation était ou non homogène au moment de la passation du pré-test. Une telle vérification s'impose car le principe expérimental utilisé, c'est-à-dire la comparaison des performances d'un groupe expérimental ayant été confronté à certaines activités à celles d'un groupe témoin qui n'y a pas été confronté, doit tenir compte d'une éventuelle non homogénéité de l'ensemble de la population testée. On sait que de grands écarts de performances peuvent exister entre des classes situées dans des contextes socio-culturels différents.

Nous allons donc profiter du pré-test pour déterminer si nos deux groupes, sont ou non proches l'un de l'autre. Diverses méthodes statistiques (notamment l'analyse de variance) sont généralement utilisées dans ce but. Pour ne pas alourdir les aspects techniques de ce travail, nous procéderons à une comparaison élémentaire des taux de réussite des deux groupes aux différents items, complétée par des tests d'indépendance.

10.5.1 La comparaison des taux de réussite

Cette comparaison ne nécessite que la lecture du tableau suivant, qui présente les fréquences des réussites dans les deux groupes.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
Gr. Témoin	92%	69%	92%	88%	88%	29%
Gr. expé.	80%	61%	89%	34%	88%	11%
χ^2	3,08	0,73	0,26	32,7	0,01	5,92

Ces chiffres sont éloquents : à part à l'item 5, le taux de réussite du groupe expérimental est toujours inférieur à celui du groupe témoin. Cependant, moins les effectifs des deux groupes comparés sont importants, plus la différence entre les taux doit être forte pour être significative. Il est donc utile d'effectuer un test statistique. Le plus simple est le test d'indépendance du χ^2, dont on trouvera une description dans n'importe quel ouvrage de statistique. Le test consiste à calculer un paramètre, appelé χ^2, et de comparer la valeur obtenue à des valeurs de référence (mentionnées dans des tables *ad hoc*) associées à des *seuils de signification*. Dans notre cas, les valeurs de référence les plus utilisées sont
– au seuil 0,9 : 2,706
– au seuil 0,95 : 3,841
– au seuil 0,99 : 6,635
Par exemple à l'item 3, nous trouvons un χ^2 qui vaut 0,26, ce qui est inférieur à la valeur de référence au seuil 0,9 (2,706). On dit alors que la différence entre les deux taux de 92 % et de 89 % n'est pas significative au seuil 0,9. Autrement dit, on considère que les deux groupes ont des performances semblables à cet item, car en considérant qu'elles sont différentes le risque d'erreur serait supérieur à 0,1.

Par contre, à l'item 4, en considérant que les performances sont différentes, le risque d'erreur est inférieur à 0,01 puisque la valeur du χ^2, (32,7) est plus grande (et même beaucoup plus grande) que la valeur de référence au seuil 0,99.

Dans la suite, nous considérerons comme significatives les différences de taux pour lesquelles la valeur du χ^2 est supérieure à 3,841 (seuil 0,95).

Dans le tableau qui précède, nous ne repérons alors de différences significatives, à l'avantage du groupe témoin, qu'aux items 4 et 6.

Comparons ensuite les taux des deux groupes aux cinq comportements fondamentaux cités précédemment.

	Découpage et recomposition à l'item 1	Traits de construction respectés à l'item 5	Perception globale à l'item 5	Justification partielle à l'item 6	Apposition de marques pertinentes à l'item 6
Gr. Témoin Gr. expé.	20% 20%	49% 46%	29% 4%	35% 36%	14% 2%
χ^2	0	0,07	13,3	0	5,5

Cette fois, nous constatons que pour trois des cinq comportements, les valeurs χ^2 sont nulles ou quasi-nulles. Elles sont supérieures à 3,841 pour la perception globale à l'item 5 et l'apposition de marques pertinentes sur la figure à l'item 6. Nous ne pouvons cependant pas tenir compte de ces deux faits car seulement deux élèves du groupe expérimental ont eu le premier de ces deux comportements et un seul a eu le second. Avec des effectifs aussi faibles, le test n'est plus fiable.

Pour avoir une vue complète, nous avons relevé pour les comportements de réussite toutes les différences significatives au seuil (au moins) 0,95.

Nous constatons ainsi que

- les élèves du groupe témoin ont des performances significativement meilleures que celles du groupe expérimental en ce qui concerne
  - la réussite à l'item 4 (production des carrés 1×1, 2×2 et 3×3) ;
  - la production du carré 3×3 à l'item 4 ;
  - la prise en compte des graduations du cadre à l'item 5 ;
  - la réussite, y compris la justification, à l'item 6.

  Les trois premiers de ces comportements relèvent de la perception visuelle. Il est à noter que la simple réussite, c'est-à-dire non compris la justification, à l'item 6 ne donne pas lieu à une différence significative entre les deux groupes. En fait, à l'item 6, le fait de produire une justification correcte entraîne toujours la réussite, c'est donc cette aptitude à la justification qui établit une différence entre les deux groupes.
- Les élèves du groupe expérimental ont des performances significativement meilleures que celles du groupe témoin en ce qui concerne
  - le comptage de triangles à l'item 2 ;
  - la procédure par découpage et recomposition à l'item 2.

  Ces deux démarches sont plutôt de type procédural, bien que la seconde nécessite également une bonne perception.

En définitive, des différences entre les deux groupes existent, mais elles sont relativement faibles et non systématiques. On pourrait difficilement affirmer catégoriquement que le groupe témoin a de meilleurs résultats que le groupe expérimental.

Chapitre 11

Un post-test en sixième primaire (2005–2006)

11.1 L'objectif du test

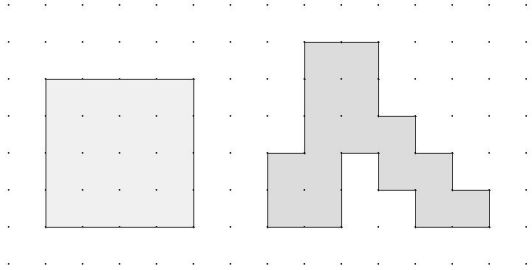
L'objectif du post-test est double : contrôler la stabilité des comportements relevés lors du pré-test et étudier leur évolution à la suite d'un apprentissage. À la fin de ce chapitre, nous essaierons de déterminer les différences éventuelles entre les deux groupes, témoin et expérimental, détectées par le post-test à la suite des activités décrites au chapitre 8.

11.2 Les énoncés

Pour faciliter la comparaison des résultats au pré-test et au post-test, les questions de ce dernier sont semblables à celles du pré-test. De plus, elles sont dans le même ordre.

– Item 1

Défi 1 – Ces deux figures ont-elles la même aire ?



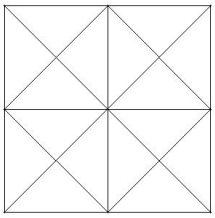
❑ Oui

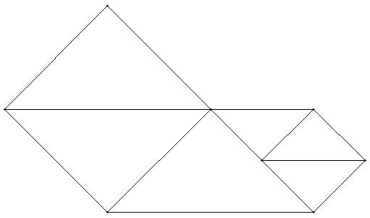
❑ Non

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 2

Défi 2 – Et ces deux autres figures, ont-elles la même aire ?





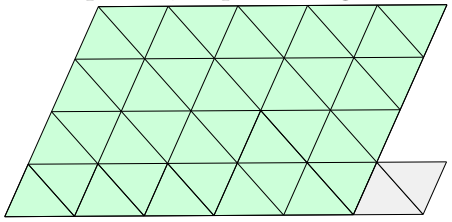
☐ Oui

☐ Non

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 3

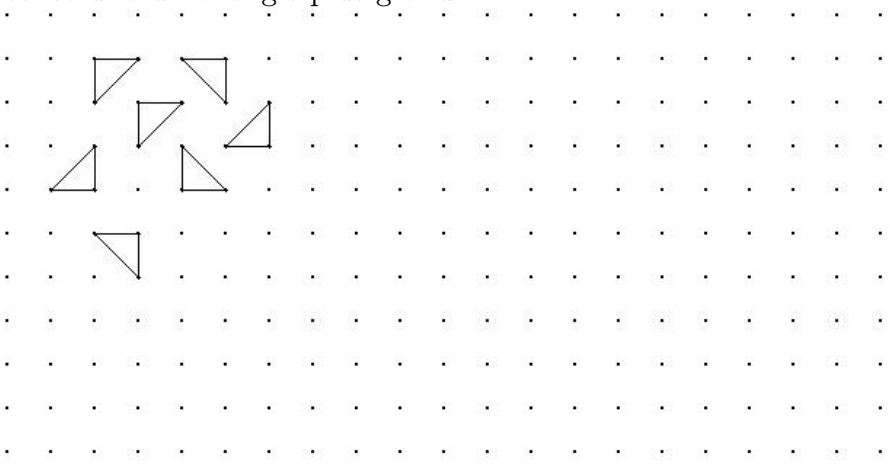
Défi 3 – Combien de parallélogrammes gris faut-il pour recouvrir complètement, sans dépasser, le parallélogramme vert ?



Il faut... parallélogramme(s) gris pour recouvrir entièrement le parallélogramme vert.
Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

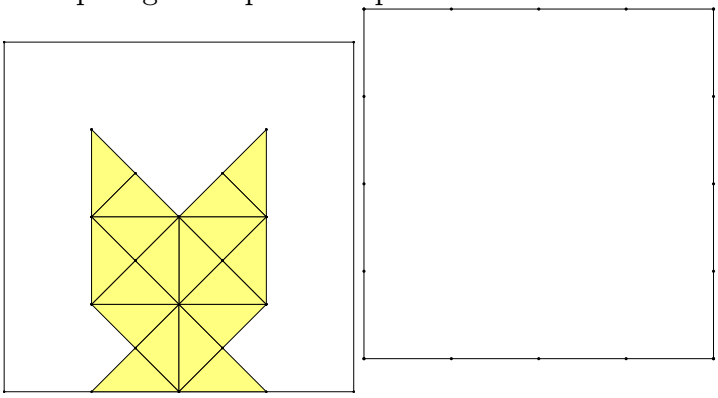
– Item 4

Défi 4 – Voici quelques petits triangles. Il est possible de construire des triangles plus grands en assemblant plusieurs petits.
Peux-tu assembler deux petits triangles pour en construire un plus grand ? Dessine-le. Fais de même avec trois petits triangles, puis quatre, puis cinq, puis six. Tu dois toujours les assembler pour construire un triangle plus grand.



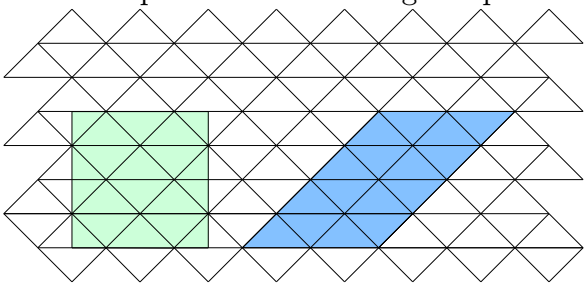
– Item 5

Défi 5 - Les deux grands carrés sont identiques. Reproduis dans le carré de droite le dessin contenu dans le carré de gauche. Fais cela avec la plus grande précision possible.



– Item 6

Défi 6 – Laquelle de ces deux figures possède la plus grande aire ?



☐ Le carré vert

☐ Le parallélogramme bleu

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

11.3 Analyse des items

Ce post-test a été proposé aux mêmes classes que le pré-test au cours du mois de mai 2006. Par le jeu des présences-absences, ce sont cette fois 111 copies d'élèves qui ont été recensées, encodées et analysées.

11.3.1 Items 1 et 2

Ces deux items ont un taux de réponse correcte fort élevé puisqu'il atteint 91% pour l'item 1 et 82% pour l'item 2. Aussi notre attention s'est-elle portée sur les modes de raisonnement utilisés. Comme lors du pré-test, trois modes sont possibles. Pour les détails y relatifs, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 10.10.3.1, page 345.

Comme lors du pré-test également, le mode quantitatif est le plus utilisé : à l'item 1, 71 des 102 réponses correctes (70%) sont obtenues par cette méthode, à l'item 2, il en est ainsi pour 48 des 92 réponses correctes (52%).

La méthode qualitative (le puzzle) est moins utilisée (15 sur 102 à l'item 1 et 15 sur 92 à l'item 2), mais les élèves qui utilisent cette technique semblent faire moins d'erreur. Toutefois, seulement neuf élèves ont conservé cette technique pour les deux items.

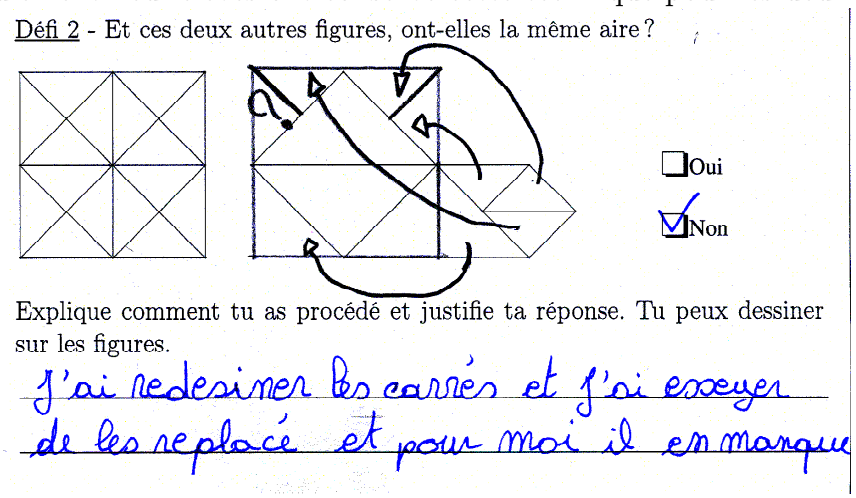


Fig. 11.1

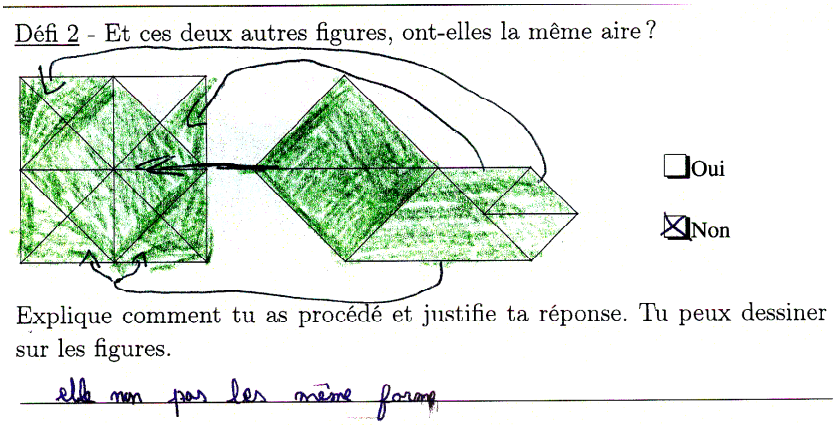


Fig. 11.2

Soulignons que la méthode du comptage sautait aux yeux pour le premier item et non pour le deuxième.

Nous avons aussi constaté que 66 élèves sur 111 conservent la même technique pour répondre aux items 1 et 2 et 23 élèves changent de technique. Pour les 22 élèves restant, aucune conclusion n'est possible, soit parce qu'il n'y a pas de réponse, soit parce que la justification n'est pas claire.

Quelques remarques

1. Quand le mode raisonnement utilisé est de type numérique (utilisation de formules), la réponse fournie n'est jamais correcte.
2. Il est important de noter qu'à l'item 1, le coefficient de corrélation entre le fait d'avoir une réponse correcte et celui de tenir un raisonnement correct n'est que de 0,56. En effet, 10 réponses correctes sont accompagnées d'un raisonnement faux et

5 autres d'un raisonnement douteux. Donc, au total 15 réponses « correctes » sur 102, soit 15% , ne reposent pas sur une justification acceptable.

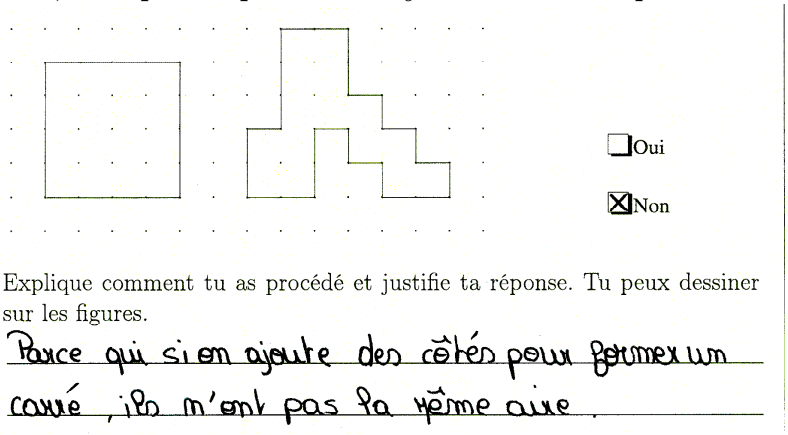


Fig. 11.3

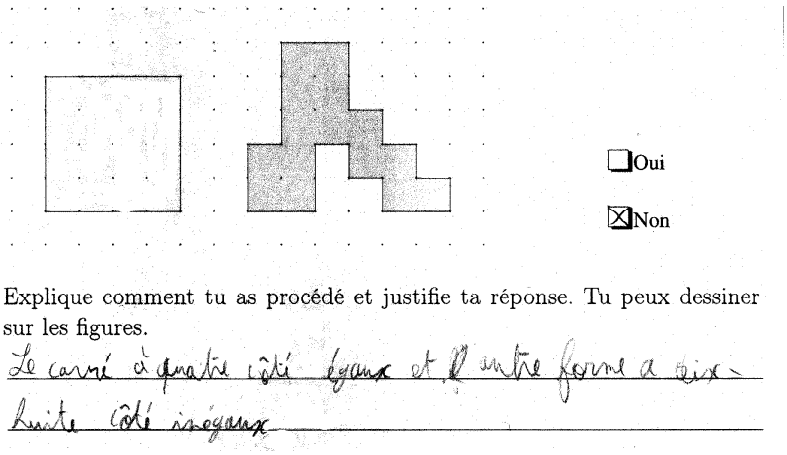


Fig. 11.4

Une constatation analogue est valable pour l'item 2 : 14 réponses correctes sont accompagnées d'un raisonnement faux et 13 autres d'un raisonnement douteux. Un total de 27 réponses « correctes » sur 92 cette fois, soit 29%, ne reposent pas non plus sur une justification acceptable.

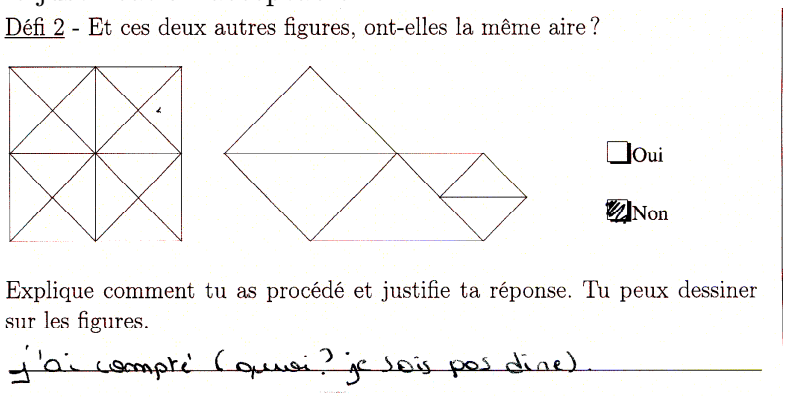


Fig. 11.5 Raisonnement douteux !

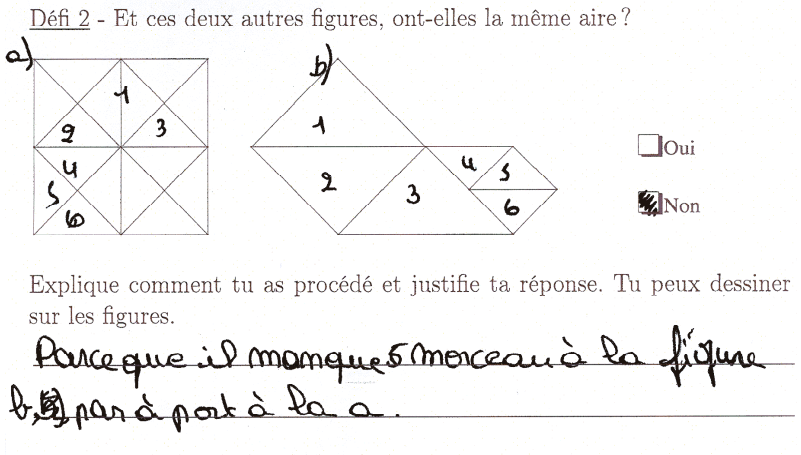


Fig. 11.6

Ces quatre figures illustrent la possibilité qu'une réponse soit correcte alors que la justification n'est pas acceptable. On ne peut exclure que dans certains cas, la déficience de cette justification soit due à des difficultés d'expression.

3. Deux traitements particuliers de la deuxième question :

   (a) Trois élèves ont effectué un comptage par « grands triangles ».

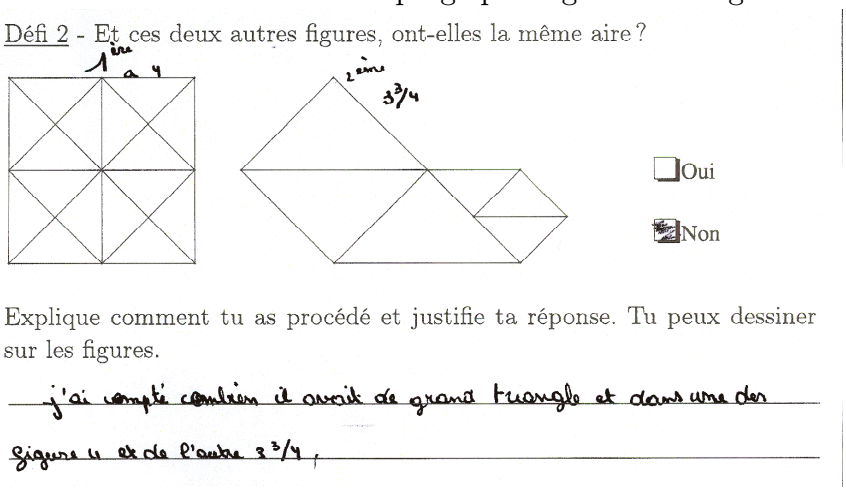


Fig. 11.7

   (b) Un élève a calculé, correctement, l'aire de chaque pièce.

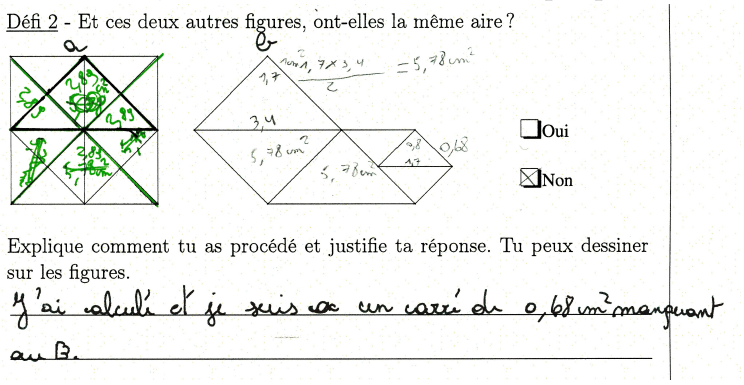


Fig. 11.8

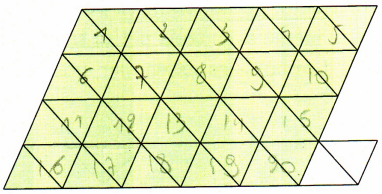
11.3.2 Item 3

Pour ce troisième item, les élèves doivent évaluer le nombre de « petits parallélogrammes » nécessaires pour recouvrir un « grand parallélogramme ». Si cette tâche est semblable à celle de l'item 3 du pré-test, elle ne peut ici être assimilée au calcul d'une aire, les élèves n'étant pas habitués à utiliser un parallélogramme quelconque comme unité d'aire.

Comme lors du pré-test, nous observons trois types de raisonnements à savoir, le mode quantitatif global (les élèves repèrent directement les petits parallélogrammes), le mode numérique et le mode quantitatif atomisé (les élèves comptent tous les triangles).

Pour cet item, 83% des élèves ont un résultat exact. La méthode la plus fréquemment utilisée est comme lors du pré-test le mode quantitatif global. En effet 82% des élèves ayant fourni une réponse correcte l'ont mise en œuvre.

Les justifications des élèves sont fort semblables à celles utilisées pour l'item n°3 du pré-test. Par exemple certains numérotent les petits parallélogrammes, ...



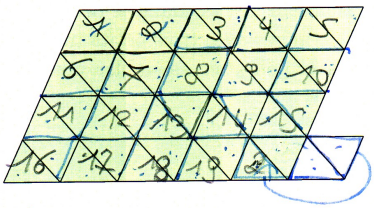
Il faut 20 parallélogramme(s) gris pour recouvrir entièrement le parallélogramme vert.

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

Parce que dans le parall. vert il y a 20 petits parallélogrammes et ces petits parallé. sont identiques que le gris. donc je dois le mettre 20 fois.

Fig. 11.9

On retrouve un phénomène déjà rencontré lors du pré-test, que nous avions associé à l'expression « combien de fois plus grand que ? ». Cette fois, cette expression n'avait pas été utilisée. Voyez cependant :



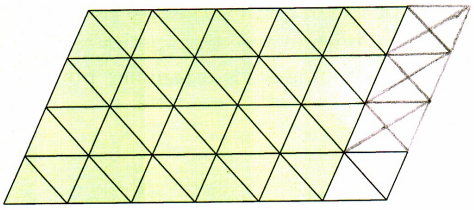
Il faut 19 parallélogramme(s) gris pour recouvrir entièrement le parallélogramme vert.

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

j'ai pris les deux parallélogramme gris et je les ai reporté sur le parallélogramme vert et puis j'ai compté les autre parallélogramme

Fig. 11.10

Le verbe « recouvrir » n'est pas toujours bien compris non plus. En voici deux interprétations inattendues :

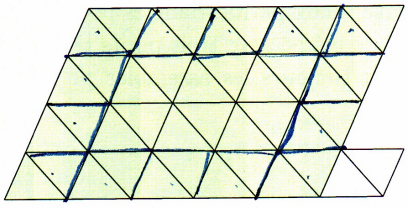


Il faut 24 parallélogramme(s) gris pour
recouvrir entièrement le parallélogramme vert.

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

J'ai tracé une diagonales des parallélogramme et puis j'ai pris la moitié de cette diagonale pour pouvoir tracé la deuxième diagonale et puis j'ai relié parties manquantes.

Fig. 11.11



Il faut 15 parallélogramme(s) gris pour
recouvrir entièrement le parallélogramme vert.

Explique comment tu as procédé et justifie ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

J'ai compté combien on pouvait en mettre (le contour)

Fig. 11.12

Peu d'élèves (exactement 8) utilisent le mode quantitatif-atomisé : compter les triangles puis diviser par 2.

Pour commencer, j'ai compté tout les triangles vert et comme 2 triangle vert sont égale a un parallélogramme, j'ai tout divisé par 2.

Fig. 11.13

Comme à l'item 3 du pré-test, certains élèves (également 8) utilisent une méthode nu-

mérique, par multiplication. Comme on l'a remarqué au début de cette section, il ne s'agit cependant pas ici d'appliquer une formule donnant l'aire d'un parallélogramme. Simplement, les élèves remarquent que le grand parallélogramme vert comporte 4 rangées horizontales de 5 petits parallélogrammes.

11.3.3 Item 4

Cette question est un peu un piège dans la mesure où on demande de construire des triangles en assemblant deux, trois, quatre, cinq ou six des triangles donnés, alors que les assemblages triangulaires de trois, cinq ou six triangles de ce type sont impossibles. Douze élèves signalent explicitement au moins deux de ces trois impossibilités alors qu'on ne leur demandait pas cette information, ce qui est une iniative à considérer comme très positive. D'autres se contentent de mentionner « avec 3 (ou 5 ou 6), je n'arrive pas ».

Le tableau suivant mentionne le nombre d'élèves ayant construit des assemblages de 2, 4, 8 ou plus de 8 triangles.

Nombre de triangles	2	4	8	plus de 8
Nombre d'élèves	85	41	30	14
%	76	37	27	13

Il reste à signaler que 26 élèves, soit 23% du total réalisent des assemblages de triangles qui ne répondent pas à la question : soit ce ne sont pas des triangles, soit l'une des pièces est déformée pour que l'assemblage soit triangulaire.

C'est en particulier le cas des assemblages de cinq triangles : le triangle « au sommet » n'est pas identique aux autres.

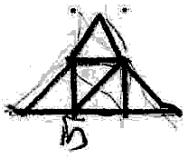


Fig. 11.14

11.3.4 Item 5

Des modes de perception et de reproduction

Nous avons bien entendu porté une attention particulière aux modes de perception détectables à travers les réponses à cet item. Comme au pré-test, nous avons distingué les modes de perception *atomisé*, *local* et *global*, avec approximativement les fréquences suivantes : 30%, 55% et 10 à 15%.

Si on compare ces pourcentages à ceux qui ont été mentionnés pour le pré-test, c'est-à-dire 40%, 40% et de 15 à 20%, on constate donc une certaine diminution du mode atomisé, correspondant à une augmentation du mode local. Le mode global serait soit en légère diminution, soit resterait stable.

Il convient cependant de nuancer ces constatations car il est apparu lors du dépouillement que la distinction entre mode atomisé et mode local était plus difficile à opérer que lors du pré-test. En effet, la forme à reproduire par les élèves ne comporte pas trois grandes parties comme la poupée du pré-test.

On a néanmoins l'impression que chez certains élèves, aucune structure n'apparaît : soit des sous-formes sont dessinées indépendamment l'une de l'autre, soit le dessin est un ensemble de traits plus qu'un ensemble de formes.

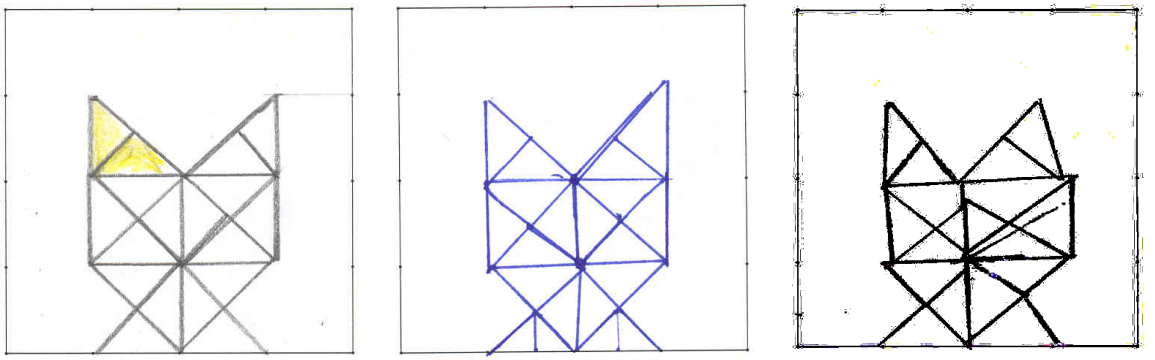


Fig. 11.15

Beaucoup d'élèves ont tracé sur leur feuille le quadrillage déterminé par les graduations qui étaient portées sur le cadre. On peut supposer qu'ils ont été influencés par la présence sur la figure à reproduire de deux carrés et de leurs diagonales. On a considéré que pour ces élèves, le quadrillage en question induisait une structuration « interne » de la figure et on a attribué à la plupart d'entre eux un mode de perception (et de reproduction) local, leurs dessins étant réalisés à l'intérieur des carrés du quadrillage.

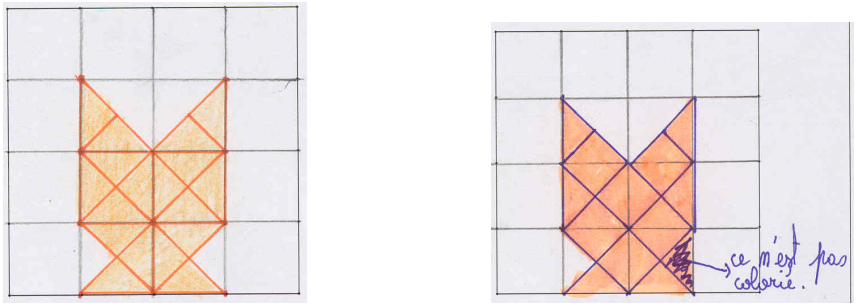


Fig. 11.16

A première vue, la figure ci-contre pourrait être classée dans la même catégorie que les deux précédentes, étant dessinée à partir du même quadrillage.
Néanmoins un examen attentif fait apparaître que les obliques ont un rôle dominant dans la reproduction. Cette caractéristique correspondait dans le pré-test au mode global de perception. Aussi avons-nous attribué ce mode global à l'élève auteur de la figure.

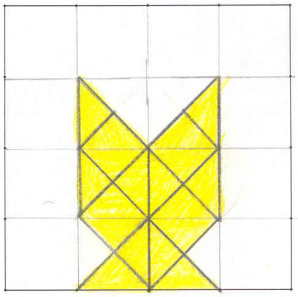


Fig. 11.17

Le mode global est également présent chez les sept élèves ayant tracé le quadrillage dé-

terminé par les obliques parallèles aux diagonales. Rappelons que lors du pré-test, un seul élève avait utilisé l'équivalent de ce schéma qui correspond à une structuration reliant harmonieusement les traits marquants de la figure au contexte externe.

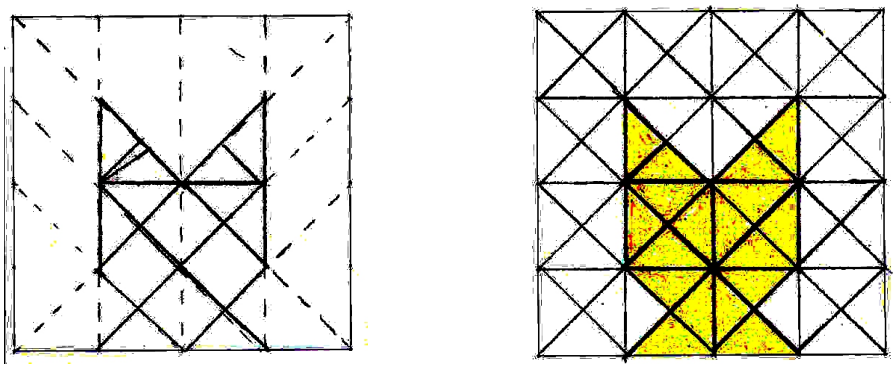


Fig. 11.18

Les figures reproduites dans cette section sont pour la plupart des figures typiques ne posant pas trop de problèmes d'interprétation. On trouve aussi, comme lors du pré-test des figures hybrides, des figures aberrantes, des figures imprécises... Nous ne pouvons pas non plus écarter la possibilité d'une perturbation due au décalage en hauteur entre la figure à reproduire et sa reproduction. Le phénomène est néanmoins moins clair qu'au pré-test.

11.3.5 Item 6

Les résultats à cette question se laissent résumer en quelques chiffres :

- Un peu moins de 50% des élèves répondent que les deux figures ont même aire.
- Un peu moins de 25% estiment que le carré vert est plus grand.
- Environ 30% considèrent que le parallélogramme bleu est plus grand.

La question est donc beaucoup moins bien réussie que lors du pré-test. Sans doute beaucoup d'élèves ont-ils été perturbés par la forme « piège » de l'énoncé : une question telle que « Laquelle de ces deux figures possède la plus grande aire ? » détourne certains élèves de la réponse « Les aires sont les mêmes » et cela d'autant plus que la bonne réponse ne figurait pas parmi les cases à cocher. On mesure ainsi l'instabilité des connaissances des élèves et sans doute aussi leur manque de confiance en eux-mêmes.

Pour l'essentiel (62 élèves sur 111), la méthode de comparaison des aires des deux figures repose sur le dénombrement des triangles qui les constituent. Ceci explique certaines des réponses « le carré vert est plus grand » : leurs auteurs ont dénombré vingt triangles en ne tenant pas compte de ce qu'ils sont de tailles différentes. Ceux qui s'en rendent compte regroupent les « petits triangles », réalisant ainsi (souvent implicitement) des puzzles, une technique apparaissant dans trente-cinq copies.

Seulement sept élèves se réfèrent aux méthodes usuelles de calcul des aires d'un carré ou d'un parallélogramme. (D'autres disent « j'ai mesuré » ou « j'ai calculé » sans préciser.)

Les résultats ne sont guère probants :

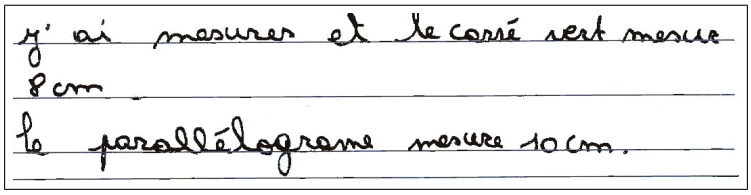


Fig. 11.19

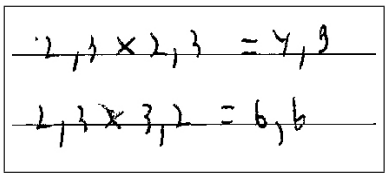


Fig. 11.20

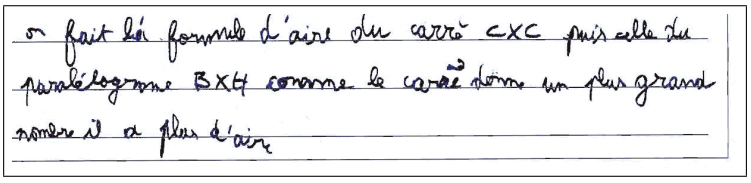


Fig. 11.21

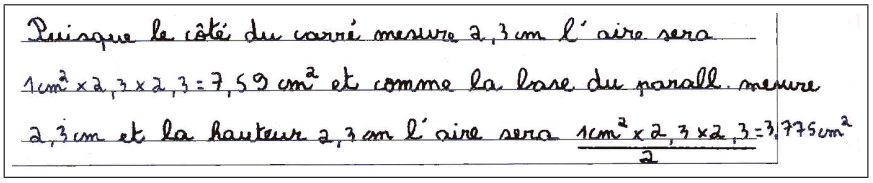


Fig. 11.22

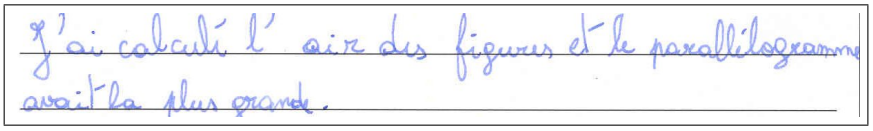


Fig. 11.23 Cet élève calcule l'aire du parallélogramme en multipliant les longueurs des deux côtés.

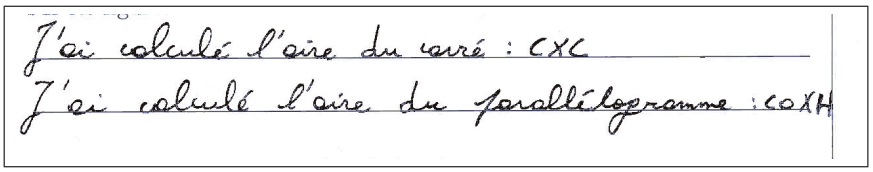


Fig. 11.24

11.4 Des comportements de réussite ou d'échec

Comme au chapitre 10, nous avons utilisé l'analyse statistique implicative en vue d'étudier en profondeur les résultats du post-test. Nous en présentons ici les conclusions.

11.4.1 Les comportements d'échec

En examinant item par item, les comportements liés à l'échec on constate d'abord que l'importance des comportements de calcul d'aires par des mesures de longueurs ou l'application de formules a fortement diminué. Seul l'item 6 est encore sujet à ce phénomène.

On voit ensuite apparaître un comportement d'échec à l'item 4 : le fait de produire un assemblage de triangles non conforme à la consigne. De plus les élèves qui commettent cette erreur ont une certaine tendance à produire un dessin inacceptable à l'item 5 et à considérer que le parallélogramme bleu de l'item 6 a une aire plus grande que celle du carré vert. L'association de cette mauvaise comparaison des aires à une erreur qui relève typiquement de la perception des formes donne à penser que certains élèves ont comparé au jugé les aires des deux formes de l'item 6. Ce serait un élément de plus qui montrerait l'importance des phénomènes de perception.

11.4.2 Les comportements de réussite

Ainsi que nous l'avions effectué lors du pré-test, nous avons relevé les comportements de réussite « fondamentaux » c'est-à-dire ceux qui ne sont impliqués par aucun autre, mais par contre impliquent tous les autres.

Nous en avons relevé six :

1. La production d'un assemblage de huit triangles à l'item 4.
2. La mention de l'impossibilité des assemblages de 3, 5 et 6 triangles à l'item 4.
3. L'apposition de marques sur la figure à l'item 5.
4. Le dessin du quadrillage oblique du cadre à l'item 5.
5. La réussite à l'item 6, avec justification correcte et complète.
6. L'apposition de marques sur la figure à l'item 6.

On remarquera que les comportements 1, 2 et 4 de cette liste relèvent de la perception des formes. L'apposition de marques sur les dessins joue à nouveau un rôle important.

On est un peu surpris de trouver dans la liste la réussite à l'item 6 : un tel comportement résulte notamment d'autres comportements. En examinant les résultats de l'analyse implicative de façon approfondie, nous avons pu constater qu'en fait cette réussite à l'item 6 aurait très bien pu être remplacée dans la liste par la perception globale à l'item 5 (encore un phénomène lié à la perception !) : l'implication de ce dernier comportement vers la réussite à l'item 6 a presque l'intensité fixée (arbitrairement) comme seuil.

On remarque aussi que les comportements ainsi qualifiés de fondamentaux sont moins variés au post-test qu'au pré-test. Peut-être la population d'élèves devient-elle plus homogène par rapport à ce test.

Il reste à signaler l'importance du comportement numéro 4 de notre liste (dessin du quadrillage oblique), qui à lui seul en entraîne neuf autres. Le phénomène de perception globale ne nous lâche pas !

11.5 L'impact d'*Apprenti Géomètre*

Comme on l'a signalé en avant-propos de ce rapport, ce n'est pas tant en termes de réussite que nous cherchons à évaluer l'impact d'*Apprenti Géomètre* qu'en termes de comportements et de compétences. En effet, la réussite résulte de l'interaction de compétences diverses, les unes pouvant être influencées par l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*, les autres non.

Évaluer l'impact d'*Apprenti Géomètre*, c'est donc d'abord isoler les comportements qui interviennent dans la réussite et c'est à quoi nous nous sommes attachés dans l'analyse des résultats des pré- et post-tests. Il reste à examiner quels sont ceux de ces comportements qui sont différemment présents chez les élèves des deux groupes, témoin et expérimental.

La comparaison, en termes de réussite, des résultats des deux groupes ne nous servira donc que de point de départ.

Rappelons le tableau, élaboré au chapitre 10, qui comparait les taux de réussite du groupe témoin et du groupe expérimental aux différents items du pré-test.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
Gr. Témoin	92%	69%	92%	88%	88%	29%
Gr. expé.	80%	61%	89%	34%	88%	11%
χ^2	3,08	0,73	0,26	32,7	0,01	5,92

Nous allons élaborer un tableau analogue pour le post-test. Une petite difficulté apparaît pour l'item 4 pour lequel il n'est pas tout à fait clair de savoir ce qu'est la réussite. Nous avons décidé de l'attribuer aux élèves ayant à la fois produit un assemblage de deux triangles et un assemblage de quatre triangles.

Le tableau des taux de réussite des deux groupes au post-test est alors le suivant :

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
Gr. Témoin	98%	92%	94%	45%	76%	22%
Gr. expé.	88%	77%	75%	23%	63%	9%
χ^2	4,29	4,7	7,3	5,72	2,44	3,35

Si nous comparons les résultats au pré-test et au post-test, nous constatons d'abord que pour les deux premiers items, les résultats sont meilleurs dans les deux groupes au post-test. À l'item 1, le groupe témoin, qui avait déjà un score de 92 % au pré-test, n'aurait guère pu progresser plus qu'il ne l'a fait. Le groupe expérimental gagne 10 %. À l'item 2, le groupe témoin progresse plus que le groupe expérimental, que l'on considère les écarts dans l'absolu ou relativement au point de départ.

À l'item 3, le groupe témoin passe de 92 à 94 %, ce qui n'est guère significatif, mais le groupe expérimental perd 11 %, ce qui l'est plus.

L'item 4 nous concerne plus dans notre évaluation de l'impact d'*Apprenti Géomètre*. En effet, en manipulant le logiciel, les élèves ont d'abord réalisé des assemblages de figures à l'écran, une activité qui est précisément celle demandée par l'item 4. À cet item, les

deux groupes voient leur score diminuer. Celui du groupe témoin passe de 86 % à 45 %, soit une diminution de près de la moitié. Quant au score du groupe expérimental, il ne diminue « que » d'un tiers : de 34 % à 23 %.

Aux deux derniers items, les scores diminuent dans les deux groupes :
– à l'item 5, le groupe témoin perd 11 %, le groupe expérimental en perd 22, le double alors que les points de départ étaient presque les mêmes,
– à l'item 6, le groupe témoin perd 9 %, le groupe expérimental en perd 3, ce qui est moins, tant dans l'absolu que relativement aux points de départs respectifs (31 et 12 %).

Pour prendre en compte la ligne qui indique les valeurs du paramètre χ^2, nous devons — comme nous l'avons fait pour le pré-test — écarter les cas où l'un des quatre groupes d'élèves comparés a un effectif trop faible (inférieur à 5), le test cessant alors d'être fiable. Ceci nous amène à éliminer la réussite aux trois premiers items : ces items sont « trop bien » réussis, le nombre d'élèves du groupe témoin ne les ayant pas réussi est trop faible. Un écart d'une ou deux unités peut alors entraîner des différences trop fortes. Il suffit par exemple que le nombre d'élèves du groupe témoin qui réussissent l'item 1 diminue de 1 pour que le χ^2 correspondant passe de 4,29 à 2,97 !

Ainsi, seule la différence entre les taux de réussite à l'item 4 peut être considérée comme significative au seuil 0,95. La différence entre les deux groupes reste significative, mais le χ^2 diminue de façon spectaculaire : de 32,7 à 5,72. Le groupe expérimental a progressé en conservant le même taux de 4 % !

Au pré-test, nous avions aussi comparé les fréquences des comportements qui ont été qualifiés de fondamentaux. le tableau était le suivant :

	Découpage et recomposition à l'item 1	Traits de construction respectés à l'item 5	Perception globale à l'item 5	Justification partielle à l'item 6	Apposition de marques pertinentes à l'item 6
Gr. Témoin Gr. expé.	20% 20%	49% 46%	29% 4%	35% 36%	14% 2%
χ^2	0	0,07	13,3	0	5,5

Voici le tableau correspondant pour le post-test :

	Découpage et recomposition à l'item 1	Traits de construction respectés à l'item 5	Perception globale à l'item 5	Justification partielle à l'item 6	Apposition de marques pertinentes à l'item 6
Gr. Témoin Gr. expé.	18% 14%	24% 20%	67% 63%	25% 21%	13% 10%
χ^2	0,23	0,24	0,20	0,25	0,22

Plus aucune valeur de χ^2 ne dépasse 0,5 : comme au pré-test, aucune différence ne peut être considérée comme significative. On remarque néanmoins que les résultats des deux groupes à ces items se sont fortement rapprochés, ce qui témoigne d'une certaine concordance des effets de l'enseignement dispensé dans les deux groupes témoin et expérimental.

Mais au post-test, les comportements de réussite « fondamentaux » ne sont plus les mêmes. Voici donc le tableau qui les concerne :

	Assemblage de plus de huit triangles (item 4)	Impossibilité des assemblages de 3, 5, 6 triangles (item 4)	Marques sur l'original, (item 5)	Quadrillage oblique du cadre (item 5)	Marques sur la figure (item 6)
Gr. Témoin Gr. expé.	12% 14%	20% 2%	22% 23%	10% 4%	14% 11%
χ^2	0,15	9,19	0,04	1,69	0,23

Une seule des valeurs de χ^2 dépase 3,841, mais nous ne pouvons en tenir compte : le nombre d'élèves du groupe expérimental ayant eu le comportement correspondant est trop faible. Aucune des différences n'est donc statistiquement significative au seuil 0,95 (et même au seuil 0,90).

Néanmoins il est intéressant de remarquer que les élèves ayant eu accès à *Apprenti Géomètre* sont légèrement plus nombreux à produire des assemblages de plus de huit triangles à l'item 4 que ceux du groupe témoin. Cela confirmerait l'influence d'*Apprenti Géomètre* sur les phénomènes de perception. Par contre, ils sont nettement moins nombreux que ceux du groupe témoin à remarquer l'impossibilité des assemblages de 3, 5 ou 6 triangles. Ils sont également moins performants pour le dessin du quadrillage oblique du cadre à l'item 5. Vu l'importance de ce comportement, directement lié à la perception globale, nous y reviendrons ci-dessous.

Auparavant, relevons les comportements de réussite qui font apparaître des différences significatives entre les deux groupes.

Nous constations ainsi que

- Les élèves du groupe témoin ont des performances significativement meilleures que celles du groupe expérimental en ce qui concerne
  - l'apposition de marques pertinentes sur la figure originale à l'item 1 ;
  - le comptage de triangles à l'item 2 ;
  - l'apposition de marques pertinentes sur la figure à l'item 2 ;
  - la production d'un assemblage de quatre triangles à l'item 4 ;
  - l'utilisation même implicite d'un découpage et d'une recomposition à l'item 6 ;
  - l'utilisation même implicite d'un comptage à l'item 6.

  Aux items 1 et 2, la méthode de découpage et recomposition a été légèrement moins utilisée au post-test qu'au pré-test. À l'annexe B.4, nous mentionnons aussi que cette méthode a été moins performante au post-test, ce qui a entraîné qu'elle ne soit pas reprise dans les comportements de réussite. Il est néanmoins utile de mentionner que lors du post-test, cette méthode a été significativement plus utilisée par les élèves du groupe expérimental que par ceux du groupe témoin.

  Ainsi aux items 1 et 2, on voit apparaître une différence entre les deux groupes : les élèves du groupe expérimental utilisent plus facilement la méthode de puzzle que

ceux du groupe témoin. Ceux-ci utilisent plus facilement la méthode de dénombrement que ceux du groupe expérimental.

À l'item 6, les élèves du groupe témoin combinent la méthode de comptage à celle de découpage et récomposition. Dans ce mélange, c'est le dénombrement qui constitue l'ingrédient essentiel, les découpages et recompositions ayant pour but de constituer soit des triangles avec des moitiés (de triangles isométriques), soit des parallélogrammes avec des quarts ou des moitiés (de parallélogrammes isométriques). Il s'agit là en quelque sorte de « puzzles locaux ». Quant aux élèves du groupe expérimental, ils n'expliquent guère leur démarche à cet item.

- Les élèves du groupe expérimental ont des performances significativement meilleures que celles du groupe témoin en ce qui concerne
  – le dessin du quadrillage cartésien du cadre à l'item 5.

Ce dernier comportement nous ramène au problème de perception visuelle déjà souvent évoqué. Le dessin du quadrillage cartésien du cadre est moins élaboré que celui du quadrillage oblique. Comparons celui-ci au comportement correspondant du prétest :
– le groupe témoin passe de 25 % au pré-test à 10 % au post-test, une perte de 15 % ;
– le groupe expérimental reste à 4 %.
Ainsi, on pourrait dire que le groupe expérimental est plutôt en progrès du point de vue de ce comportement de vision globale.

Les tableaux ci-dessous reprennent les fréquences des comportements impliqués directement par le comportement de perception globale à l'exception des comportements de réussite aux items 2 et 5 déjà repris plus haut.

Au pré-test :

	Comptage de carrés (item 1)	Comptage de triangles (item 2)	Production du carré 1×1 (item 4)	Graduation du cadre respectée (item 5)	Usage d'un puzzle (item 6)	Dénombrement (item 6)
Gr. Témoin	61%	59%	92%	73%	45%	63%
Gr. expé.	54%	34%	46%	46%	34%	54%

Ainsi qu'on l'a vu, une seule colonne de ce tableau correspond à une différence significative des taux des groupes témoin et expérimental : celle qui concerne le respect des graduations du cadre à l'item 5.

Au post-test :

	Comptage de carrés (item 2)	Apposition de marques (item 2)	Pertinence des marques (item 2)	Assemblage de huit triangles (item 4)	Traits de construction respectés (item 5)	Graduation du cadre respectée (item 5)
Gr. Témoin	57%	67%	63%	24%	59%	22%
Gr. expé.	32%	32%	29%	32%	61%	23%

Nous avons vu que les différences de taux des comportements relatifs à l'apposition de marques pertinentes à l'item 2 sont significatives. Dans ce tableau, ce sont les seules.

Ainsi peu de différences significatives sont observées entre les comportements des deux groupes. Mais différences il y a. Au pré-test, dans toutes les colonnes du tableau, les scores du groupe expérimental sont nettement inférieurs à ceux du groupe témoin. Au post-test dans trois colonnes sur six, soit le score du groupe expérimental est nettement supérieur à celui du groupe témoin, soit il lui est comparable.

Ces éléments plaident sinon en faveur de conclusions certaines, tout au moins en faveur de la reconnaissance d'une tendance qui devrait être confirmée par d'autres études. Pour pouvoir tirer des conclusions fiables, celles-ci devraient faire intervenir un plus grand nombre d'élèves et d'enseignants, afin que des différences significatives apparaissent plus facilement.

En conclusion

Vu le peu de différences significatives observées, ce sont des constatations tout en nuances que nous devons faire.

1. En premier lieu, nous avons observé des comportements moins variés lors du post-test que lors du pré-test. Même si elles différaient par l'usage d'*Apprenti Géomètre*, les séquences d'enseignement dispensées dans les deux groupes témoin et expérimental étaient conçues selon les mêmes principes pédagogiques. Alors que le pré-test reflétait des formations et des acquis différents d'une classe à l'autre, le post-test venait après des formations concordantes. Dans ce contexte, il est raisonnable d'attribuer à l'usage d'*Apprenti Géomètre* les différences constatées entre les deux groupes.
2. À la section10.1, nous avons écrit que l'objectif des deux tests était de déterminer si l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* pouvait avoir un impact sur la capacité de *voir* en géométrie (et par conséquent sur l'intégralité de l'apprentissage de la géométrie).

   Malgré la prudence à observer du fait du peu de signification statistique des résultats, il semble bien que chez les élèves du groupe expérimental, l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* ait en effet eu un impact favorable sur l'utilisation et/ou l'efficacité du mode global de perception. En particulier, il est quasi-certain que l'impact existe en ce qui concerne la réalisation d'assemblages de formes géométriques.
3. Par contre, les élèves du groupe témoin ont eu lors du post-test des comportements plus performants que ceux du groupe expérimental en utilisant des dénombrements aux items 1, 2 et 6. Peut-être les élèves du groupe expérimental étaient-ils trop orientés vers une démarche de type « puzzle global » pour des items auxquels la « simple » méthode de dénombrement était plus adaptée. Toujours est-il que ce problème vient à point pour rappeler que les différentes méthodes mathématiques ont leur domaine d'application et doivent être considérées comme complémentaires. Il n'existe aucune méthode miracle pour enseigner, ni utiliser, les mathématiques !

Chapitre 12

Un pré-test en cinquième primaire (2006–2007).

12.1 Les objectifs des pré- et post-tests

Fondamentalement, les objectifs de ces tests effectués en cinquième primaire étaient les mêmes que ceux qui ont été mentionnés pour les épreuves similaires réalisées en 2005–2006 dans des classes de sixième.

Il s'agissait donc en premier lieu d'étudier les niveaux de perception des élèves, c'est-a-dire leur capacité à voir, analyser et structurer une figure. Il s'agissait aussi d'évaluer l'impact de l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* dans les classes expérimentales sur cette capacité. Le domaine géométrique choisi ayant été la construction des formules d'aires, les questions du post-test n'ont pas négligé ce sujet.

Un autre objectif était de comparer les résultats des tests de cinquième et de sixième année, afin d'essayer d'esquisser l'évolution des concepts des élèves sur une période de deux années consécutives, voire de trois années si l'on tient compte de l'expérience menée simultanément en première secondaire. C'est pour cette raison que l'expérience a été menée cette année dans des classes différentes de celles de 2005–2006.

Bien évidemment, les pré- et post-tests ont été utilisés dans les mêmes classes que celle où a été menée l'expérimentation relatée au chapitre 7.

12.2 Les énoncés

Le pré-test comprend sept items. Les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Au total, 146 élèves ont participé à ce test. Il est à noter que dans deux des écoles situées en milieu rural, les élèves de cinquième et ceux de sixième année étaient rassemblés en une seule classe. Notre échantillon comportait de ce fait 131 élèves de cinquième et 15 élèves de sixième. Les institutrices concernées n'ont signalé aucune différence sensible de réactions entre ces deux catégories d'élèves. Néanmoins, leurs taux de réussite

sont souvent différents, sans que ces différences puissent être considérées comme très significatives, vu la faiblesse de l'effectif des élèves de sixième. Aussi, pour plus de sécurité et sauf mention explicite du contraire, les effectifs et les pourcentages mentionnés dans la suite ne tiendront pas compte de ces quinze élèves de sixième année.

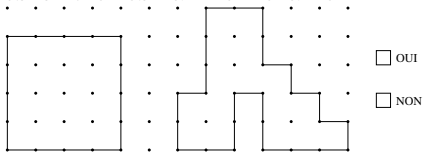
– Item 1

Défi 1 – Que dois-tu connaître pour répondre aux questions suivantes ?

	une longueur	une aire	un volume	un poids	un temps
Mon ami(e) habite deux rues plus loin. A quelle distance se trouve sa maison ?					
Je dois acheter du sable pour remplir le grand trou qui est dans le jardin. Quelle quantité faut-il ?					
Je veux recouvrir le sol de ma chambre avec du parquet. Quelle quantité de parquet dois-je acheter ?					
Je vais entourer mon jardin d'une clôture en treillis. De quelle quantité de treillis ai-je besoin ?					
Je veux repeindre les murs de mon salon. De quelle quantité de peinture ai-je besoin ?					

– Item 2

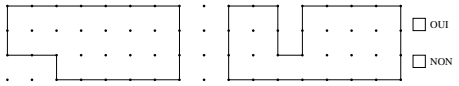
Défi 2 – Ces figures ont-elles la même aire ?



Justifie ta réponse en expliquant comment tu as procédé. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 3

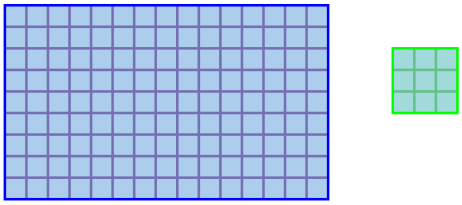
Défi 3 – Ces figures ont-elles la même aire ?



Justifie ta réponse en expliquant comment tu as procédé. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 4

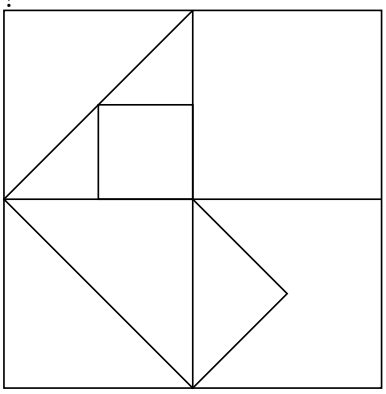
Défi 4 – Le rectangle bleu est plus grand que le carré vert. Combien faut-il de carrés verts pour recouvrir le rectangle bleu (complètement et sans déborder) ?



Justifie ta réponse en expliquant comment tu as procédé. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 5

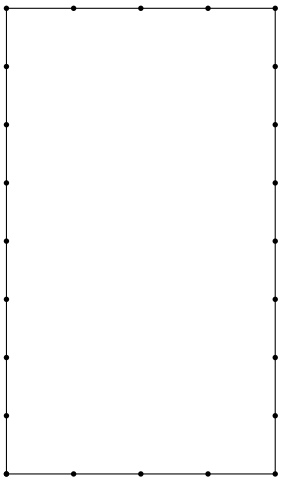
Défi 5 – Combien de carrés vois-tu sur ce dessin ? Combien de triangles vois-tu sur ce dessin ?

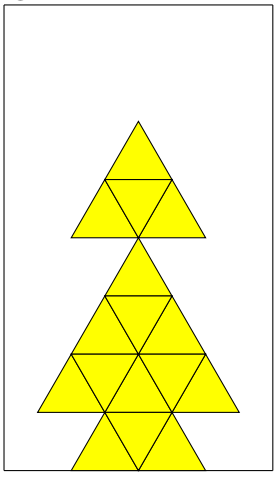


Repasse en vert sur les côtés du plus grand triangle et en rouge sur les côtés du plus grand carré.

– Item 6

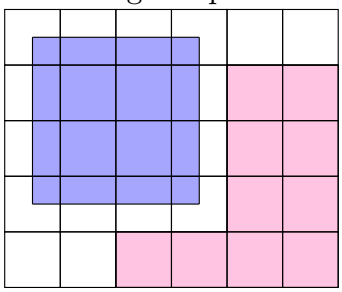
Défi 6 – Recopie le plus précisément possible dans le rectangle vide le dessin que tu vois dans l'autre rectangle.





– Item 7

Défi 7 – Laquelle de ces deux figures possède la plus grande aire ?



Explique ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

12.3 Analyse des items

12.3.1 Item 1

Les réponses attendues étaient :
– Question 1 : longueur
– Question 2 : volume
– Question 3 : aire
– Question 4 : longueur
– Question 5 : aire

Cependant, le sable se vend au poids sans indication d'un volume par tonne de sable. Les pots de peinture se vendent au litre tout en indiquant souvent — mais pas toujours — un nombre de m^2 par litre. Dans notre société, il est aussi devenu courant de mesurer des distances en minutes. Ces pratiques de notre vie quotidienne ne rendent pas nécessairement simple l'utilisation de « problèmes de la vie courante » dans le cours de mathématique. Cela nous interdit aussi de considérer les réponses induites par ces habitudes comme des erreurs. Nous avons donc également considéré comme correcte la réponse « un poids » (produite par 65% des élèves) à la question 2, ainsi que les réponses « un volume » et « un poids » (produites respectivement par 30% et 32,5% des élèves) à la question 5. À cette question 5, la réponse « une aire » est également fournie par 30% des élèves.

Moyennant ces modifications, nous constatons que vingt-cinq élèves sur cent trente-et-un, soit 19%, ont fourni une réponse correcte à tous les items.

La présence de la possibilité de répondre « un temps » a joué un rôle perturbateur. Alors qu'aucun des items n'appelait cette réponse, elle a été donnée à 19 reprises, dont 6 à la question 1, ce qui — comme il a été dit plus haut — peut se comprendre. Par contre on se demande ce qui peut amener un élève à proposer cette réponse pour une des questions 2 à 5, sinon le sentiment que chacune des réponses proposées doit être choisie au moins une fois.

Les autres erreurs sont essentiellement de trois types :

- des confusions longueur–aire : 52% des élèves ;
- des confusions aire–volume : 20% des élèves ;

- des confusions longueur–volume : 18% des élèves.

12.3.2 Items 2 et 3

Pour cette analyse des réponses, nous rassemblons les items 2 et 3 qui ne diffèrent pas par les questions posées mais par la complexité des dessins : l'item 3 est clairement plus facile que l'item 2.

Le tableau suivant résume les constatations générales relatives à ces items :

	Réussite	Bonne réponse	Justification partielle mais correcte	Justification incorrecte	Absence de justification
Item 2	21%	54%	36%	37%	15%
Item 3	26%	74%	42%	33%	17%

L'intitulé « Réussite » se rapporte aux réponses qui sont à la fois correctes et dont la justification est également correcte et complète. La colonne « Bonne réponse » ne tient pas compte de la qualité de la justification. Elle confirme la plus grande facilité de l'item 3, mais cette constatation est relativisée quand on regarde les autres colonnes : il n'est guère plus facile pour les élèves de cinquième primaire de justifier leur réponse dans un cas facile que dans un cas plus complexe.

Nous nous sommes évidemment intéressés aux méthodes de résolution utilisées par les élèves. Nous réutiliserons dans ce but la classification explicitée à la section 10.3.1 qui analysait le pré-test effectué en 2005–2006 en sixième primaire. Nous distinguerons donc trois modes fondamentaux de raisonnement.

1. Le mode **qualitatif** recouvrait en 2005–2006 la démarche de *découpage et recomposition*. Dans le présent test, elle recouvre de plus l'*équicomplémentarité*, dont l'emploi est assez naturel pour l'item 3.
2. Le mode **quantitatif** consiste à compter le nombre de carrés du quadrillage associés à chaque figure.
3. Dans le mode **numérique**, l'élève utilise des formules d'aire.

La présence d'une trame quadrillée en arrière-plan des figures des items 2 et 3 a induit un recours particulièrement fréquent au mode quantitatif.

Nous affecterons le mode numérique à quelques élèves qui effectuent une ou des multiplications pour déterminer l'aire du carré de l'item 2 ou des enveloppes des rectangles de l'item 3, ainsi qu'aux élèves qui mesurent des longueurs, ce qui est souvent significatif d'une confusion entre périmètre et aire.

D'autres procèdent par découpage et recomposition, ou encore — dans le cas de l'item 3 — par équicomplémentarité. Cette dernière méthode consiste à remarquer — souvent sans chercher à le vérifier — que les deux formes s'inscrivent dans des rectangles et que les « trous » ont même aire.

Une dernière méthode à signaler, qui ne mène jamais à la bonne réponse, est le comptage des points situés à l'intérieur — ou parfois sur les bords — des figures à comparer.

Le tableau suivant indique les taux d'utilisation de chacune de ces méthodes :

	Comptage de carrés	Multiplication	Découpage et recomposition	Équicomplémentarité	Mesure de longueurs	Comptage de points
Item 2	50%	8%	5%	–	10%	8%
Item 3	50%	3%	2%	10%	10%	10%

À lire ce tableau, on a *a priori* l'impression que la conceptualisation de l'aire est en route mais est loin d'être terminée. Environ 65% des élèves ont une idée valable de ce que signifie « comparer deux aires ». Ils emploient dans ce but plusieurs méthodes de niveaux conceptuels différents.

La méthode de comptage de petits carrés se comprend aisément pour la figure 2 de l'item 2. Son emploi pour trouver le nombre de petits carrés intérieurs au carré de la figure 1 de cet item semble montrer qu'elle reste la méthode standard.

Ce n'est certainement pas par hasard que la mention de l'utilisation d'une multiplication est plus fréquente pour l'item 2 que pour l'item 3 : à l'item 2, l'emploi de la « formule » de l'aire du carré fournit immédiatement la réponse. À l'item 3 l'emploi de la formule du rectangle doit être précédé de la perception de ce rectangle et suivi d'une démarche d'équicomplémentarité. Il s'agit en fait de combiner la visualisation d'une forme géométrique connue « derrière » un dessin « approché », un raisonnement numérique et un raisonnement qualitatif qui permet de revenir à la forme géométrique réellement dessinée.

Les méthodes précédentes conduisent plutôt à la réussite. Par contre, mesurer des longueurs mène généralement à un échec, soit que l'élève confond un périmètre et une aire, soit qu'il croit que la comparaison des périmètres donne le même résultat que la comparaison des aires.

Le comptage des points intérieurs aux contours indique une compréhension encore débutante de ce que l'aire correspond à un contenu. Environ 6% des élèves de cinquième année n'en sont même pas encore là, tenant le raisonnement suivant : *les deux figures n'ont pas la même aire parce qu'elles n'ont pas la même forme* ([1]).

Les méthodes utilisées par les élèves apparaissent assez stables. 70% des élèves utilisent la même méthode dans les deux défis. En particulier, 61 élèves, soit 46% du total, utilisent le comptage de carrés pour les deux items. Cet effectif de 61 élèves stables représente l'écrasante majorité des 66 élèves qui comptent des carrés à l'item 2 et (également !) des 66 élèves qui procèdent de même à l'item 3. On peut donc supposer que cette méthode correspond à une phase d'équilibre conceptuel (au sens donné à cette expression à la section 6.2 : vu la situation à traiter, notamment vu la présence d'une trame carrée à

([1]) En 2005-2006, nous avions rencontré cette conception chez un élève de sixième. Cette approche du concept d'aire peut aussi se rencontrer dans l'histoire des mathématiques : au Xe siècle, le mathématicien arabe AL-QUHI explique à son ami AL-SHABI, qu'il est permis de comparer l'aire d'un disque à celle d'un carré, bien que ces deux formes géométriques *ne soient pas homogènes*, (*voir page 92*).

l'arrière plan, il n'est nullement besoin d'utiliser autre chose qu'un comptage) qui est le fait d'environ la moitié des élèves de cet âge.

Par contre, les autres élèves changent plus fréquemment de méthode. Vraisemblablement, ils ont dépassé l'équilibre précédent et sont en voie d'en construire un nouveau. Ils utilisent alors des méthodes plus variées, pouvant différer d'un item à l'autre. Relativisons quand même les variations constatées : une variation de 4% d'un taux de réponse représente moins de cinq élèves. La seule variation réellement significative est probablement celle qui concerne la méthode d'équicomplémentarité.

L'attraction pour cette méthode à l'item 3 entraîne une baisse des taux d'utilisation de la multiplication, du découpage-recomposition et du mesurage de longueurs. Ces variations pourraient être le fait d'élèves à la recherche de procédures plus efficaces que le comptage de carrés. Vu dans cette perspective de dépassement, le mesurage de longueurs apparaît moins négatif que ne pourrait le laisser croire la confusion entre périmètre et aire que cette méthode entraîne souvent.

La méthode de comptage des points constitue un peu pour nous une énigme. Elle est également assez stable : 11 élèves à l'item 2, 14 à l'item 3. Mais cette méthode apparaît comme un stade peu élaboré de la conceptualisation de l'aire. On lui trouvera un côté positif en considérant qu'elle pourrait évoluer vers le comptage des carrés, chaque point pouvant par exemple être associé à un petit carré du quadrillage. Si cela est vrai, les élèves adoptant cette procédure ne seraient pas à ranger parmi ceux ayant dépassé l'équilibre lié au comptage de carrés mais plutôt parmi ceux qui ne l'ont pas encore atteint.

12.3.3 Item 4

Cet item est presque identique à l'item 3 du pré-test réalisé en sixième primaire en 2005-2006, la seule différence portant sur le fait que le carré étalon (de taille 3×3) était cette fois détaché du rectangle à mesurer au lieu de lui être accolé. Nous avions en effet constaté (*voir la figure 10.16, page 351*) que cinq élèves (sur 109) de sixième année fournissait la réponse 14 au lieu de 15, mesurant donc non le rectangle, mais ce qu'il faut ajouter au carré pour trouver le rectangle. Le même phénomène était réapparu lors du post-test.

Cette fois, nous ne trouvons que deux élèves ayant reproduit exactement la même erreur, en répondant 14. Il convient toutefois de placer sur le même pied les élèves qui ont commis l'erreur analogue dans le cadre de l'utilisation du mode *quantitatif atomisé* (*voir page 352*). Ils dénombrent en effet les 135 petits carrés constituant le rectangle, puis soustraient 9 et produisent la réponse 126. Au total ce sont onze élèves, soit 8%, qui ont ce comportement, lequel apparaît donc comme indépendant du fait que le carré étalon soit, ou non, détaché du rectangle.

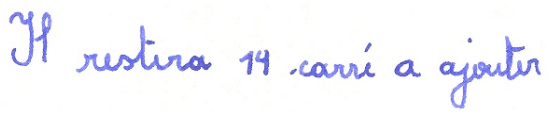


Fig. 12.1

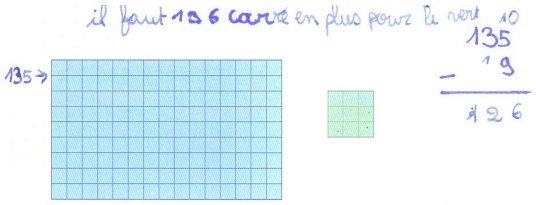


Fig. 12.2

Néanmoins, nous constatons ainsi la persistance, mais aussi la diminution, de la cinquième à la sixième année d'une erreur que l'on pourrait qualifier de *mesure du complémentaire de l'unité.*

Comme on pouvait s'y attendre, les élèves de cinquième année utilisent les mêmes méthodes que ceux de sixième pour résoudre cet exercice. Nous voyons donc réapparaître les méthodes qualifiées à la section 10.3.3 de *quantitative-globale*, *numérique* et *quantitative-atomisée.*

Le mode quantitatif-global

Ce mode a été adopté par 53 % des élèves qui, d'une façon ou d'une autre, ont dessiné les quinze carrés dans le rectangle, et les ont comptés.

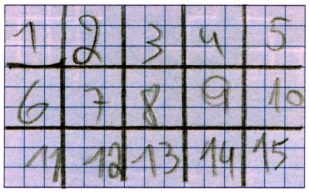


Fig. 12.3

Le mode numérique

Dans ce mode, que l'on peut détecter sur 10% des feuilles, l'élève mesure, d'une façon ou d'une autre, chacun des côtés du grand rectangle et du petit carré et effectue une multiplication. Celle-ci est éventuellement suivie d'une division lorsque l'unité de longueur choisie n'est pas le côté du carré. On rencontre ainsi essentiellement des multiplications de 3 par 5 et de 9 par 15, dans ce cas parfois, mais pas toujours, suivie d'un autre calcul.

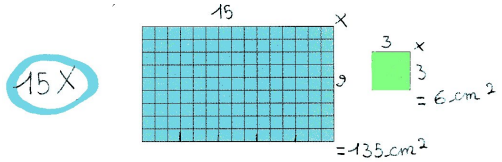


Fig. 12.4

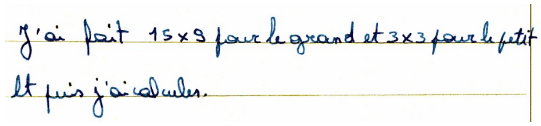


Fig. 12.5

Bien entendu, ces opérations peuvent être entachées d'erreurs de calcul, ne débouchant pas nécessairement sur une mauvaise réponse (*Fig. 12.4*), ce qui donne à penser que certains élèves ont cherché à résoudre le problème de deux façons différentes.

Le mode quantitatif-atomisé

Nous avons attribué ce mode opératoire aux vingt-et-un élèves (16%) qui ont compté

(correctement ou non) les 135 petits carrés du rectangle. Souvent on peut les reconnaître au fait d'avoir pointé séparément chacun de ces carrés (*Fig. 12.6*), mais il faut être attentif car un tel pointage est également parfois utilisé en vue de regrouper les carrés en pavés de 9 (*Fig. 12.7*). Dans un tel cas, l'élève concerné s'est vu attribuer le mode quantitatif-global.

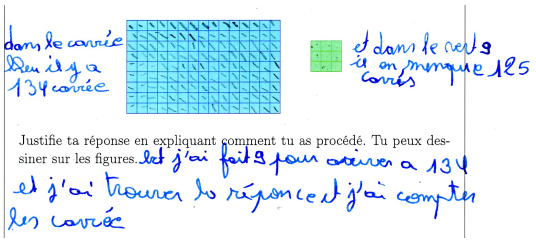


Fig. 12.6

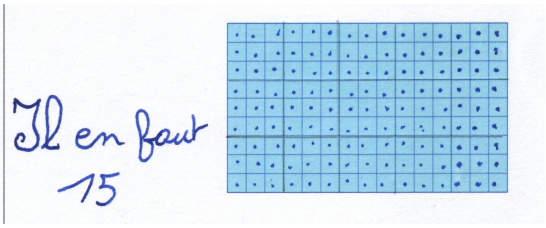


Fig. 12.7

Si nous considérons les réponses à cet item en termes de réussites ou d'échecs, nous pouvons résumer la situation par le tableau suivant.

	Réussite	Bonne réponse	Justification partielle mais correcte	Justification incorrecte	Absence de justification
Item 4	53%	70%	10%	15%	17%

Il est à noter que 70% des élèves donnent la bonne réponse mais seulement 58% produisent une justification correcte. Parmi ces derniers, certains ne donnent pas la bonne réponse, ce qui explique que le taux de réussite ne soit que de 53% ; ce sont en fait des élèves qui n'ont pas répondu clairement à la question.

12.3.4 Item 5

Cet item dont l'objectif était d'évaluer le niveau de perception des élèves n'avait pas d'équivalent lors du pré-test réalisé en 2005–2006. Nous pouvons cependant y retrouver un niveau pouvant être qualifié de *local* et un autre de *global*.

Au niveau local, nous placerons les élèves qui perçoivent la figure comme une *juxtaposition* de pièces *ne se chevauchant pas*. Ces élèves ne dénombrent que six triangles et deux carrés que l'on peut qualifier de « formes élémentaires ». Ils ont été 27 dans ce cas, soit 21%.

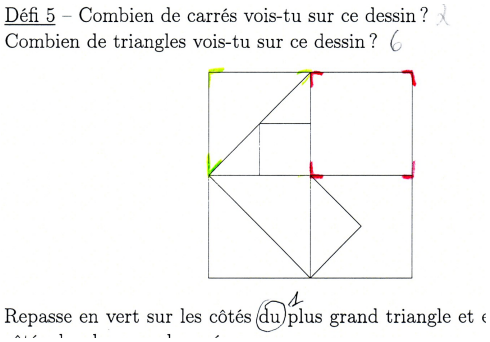


Fig. 12.8

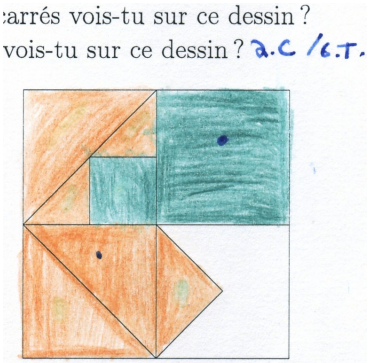


Fig. 12.9

Le niveau global nécessite de percevoir le dessin comme une *superposition* de formes géométriques de tailles différentes. À ce niveau apparaissent huit triangles et six carrés. Seuls 4 élèves sur 131 (3%), ont atteint ce stade. Comme il semble normal, ils ont également dessiné correctement le plus grand triangle et le plus grand carré (*Fig. 12.10*).

36% des élèves sont à un niveau intermédiaire, percevant toutes les formes élémentaires mais non toutes celles qui se constituent par assemblage de formes élémentaires. Il n'est pas toujours aisé de déterminer quelles formes ils ont perçues (*Fig. 12.11*).

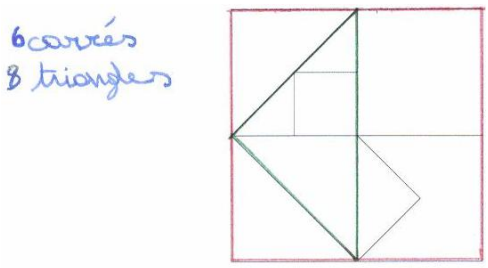


Fig. 12.10

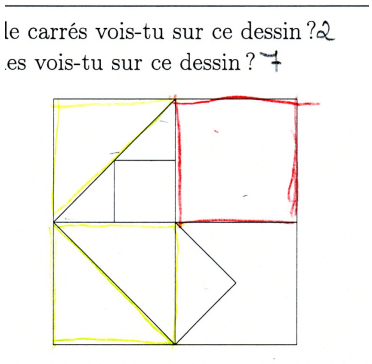


Fig. 12.11

À ces constatations, il convient d'ajouter que la forme de la question à induit des comportements ne répondant pas à l'attente des auteurs du questionnaire. 14% des élèves ont été attirés par l'activité de coloriage et l'ont exécutée sans guère se préoccuper des consignes. Certains colorient effectivement le plus grand carré et le plus grand triangle sans répondre aux questions de dénombrement.

D'autres, également sans dénombrer les triangles et les carrés, colorient plus de formes qu'il n'était demandé. Les coloriages se chevauchant, il devient difficile de déterminer à quel niveau de perception ces élèves se situent (*Fig. 12.12*).

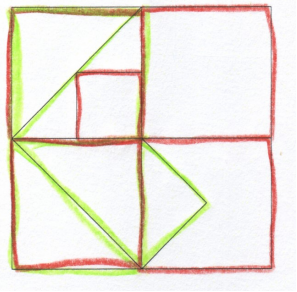


Fig. 12.12

Signalons encore quelques cas particuliers, en commençant par deux élèves (d'écoles différentes) dont la perception va au-delà de ce que l'on imaginait. Le premier (un élève de sixième année) ajoute concrètement des traits à la figure et dépasse ce stade en en imaginant d'autres. Il dénombre ainsi 32 triangles, mais ne voit que 4 carrés (*Fig. 12.13*). Le second (*Fig. 12.14*) n'ajoute aucun trait concrètement mais, sans aucun doute possible, il les visualise. Il est plus performant que le précédent puisqu'il arrive à 16 carrés et 32 triangles. Ces deux élèves sont très flexibles : leur dénombrement se situe au niveau local puisqu'ils ne comptent que des formes ne se chevauchant pas. Mais pour y arriver, ils passent par un niveau global de perception. Quant au dessin, à l'exception du grand carré pour le premier, l'un comme l'autre dessinent des formes qui ne sont pas celles que l'on attendait et qui ne figurent pas parmi celles qu'ils ont dénombrées.

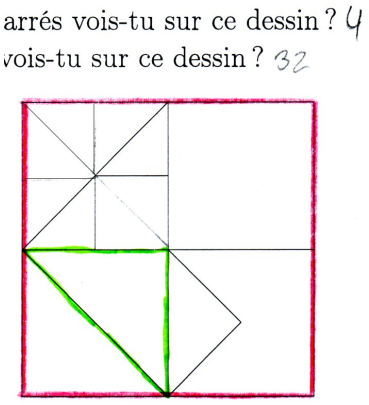


Fig. 12.13

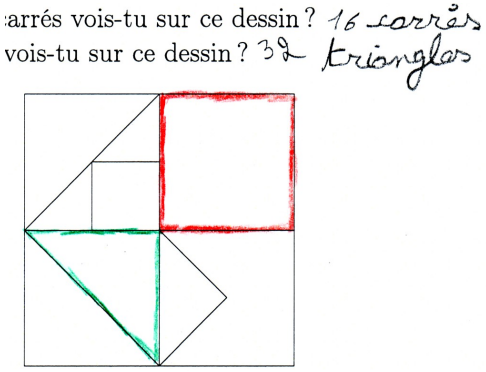


Fig. 12.14

Autres cas particuliers : exactement deux élèves numérotent les différentes formes.

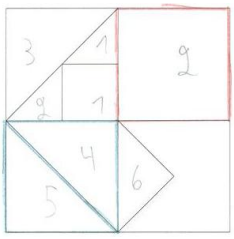


Fig. 12.15

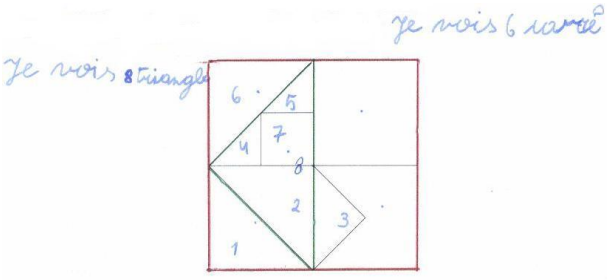


Fig. 12.16

La description qui vient d'être faite des comportements des élèves à cette question nous amène à considérer comme inopportun de les évaluer en termes de réussite ou d'échec. Et cependant, le niveau de perception d'un élève influence fatalement sa réussite aux activités géométriques.

12.3.5 Item 6

Avec cet item, nous retrouvons la « poupée » déjà utilisée lors du pré-test en 2005–2006. Nous renvoyons donc le lecteur à la section 10.3.5 pour ce qui concerne la description des comportements possibles des élèves, et en particulier pour la définition des modes *atomisé*, *local* et *global* de reproduction de la figure, et pour les illustrations correspondantes.

L'examen des copies des élèves de cinquième année fait apparaître des comportements très semblables à ceux qui avaient été rencontrés en sixième. Toutefois la répartition des élèves entre les différents modes de perception est assez différente :

- Mode atomisé : 32%
- Mode local : 55%
- Mode global : 4%

Nous avions aussi rencontré en 2005–2006 un mode de construction mixte dans lequel l'élève utilise des modes différents pour la tête et le corps de la poupée. En cinquième, ce mode est utilisé par 6% des élèves.

Par ailleurs, quelques élèves ne parviennent pas à reproduire la figure et effacent ce qu'ils avaient déjà dessiné.

En ce qui concerne la précision des dessins, on rencontre également les mêmes problèmes qu'en sixième année, mais beaucoup plus fréquemment : 78% des dessins doivent être considérés comme imprécis. Certains élèves essayent de « remplir » le cadre : ils étirent le dessin de façon qu'il parte du bord inférieur et atteigne le bord supérieur. Par contre le phénomène de perturbation dû au décalage en hauteur n'est apparu que chez 16% des élèves.

12.3.6 Item 7

Cette question figurait également dans le pré-test réalisé en 2005–2006 dans des classes de sixième année.

Mentionnons d'abord que 70% des élèves fournissent la bonne réponse. Toutefois, seuls 6% d'entre eux sont en mesure de la justifier correctement. Il est vrai que nous avons été assez stricts dans l'évaluation des justifications, notre objectif n'étant pas d'évaluer les élèves.

D'une façon générale, les élèves ne sont pas en mesure de rédiger une justification claire et complète. 48% produisent une justification partielle mais sans erreur, cependant que 23% d'entre eux produisent une justification erronée.

On constate aussi que 16% des élèves ne fournissent aucune justification et que certains, en guise de justification, se contentent de réaffirmer leur résultat (*Fig. 12.17*). De plus, sur beaucoup de copies la justification écrite ne fournit aucune indication quant à la procédure utilisée pour la comparaison des aires des deux formes (*Fig. 12.18*). Au fait, une justification est-elle bien nécessaire (*Fig. 12.19*) ?

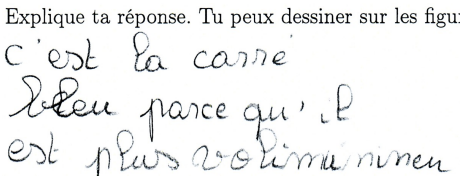


Fig. 12.17

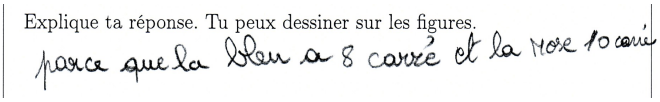


Fig. 12.18

Fig. 12.19

Quand la justification d'un élève n'est pas très élaborée, il faut se rabattre sur les marques apposées sur la figure pour déterminer la démarche de l'élève. Malheureusement, seuls 27% des élèves apposent de telles marques. Il est dès lors difficile d'avoir des renseignements précis quant aux raisonnements utilisés.

Nous arrivons cependant à la conclusion que 55% des élèves utilisent un comptage sans qu'on sache toujours clairement *comment* ils ont compté. (*Fig. 12.22*). La méthode par découpage et recomposition (consistant à rassembler des demi-carrés et des quarts de

carrés bleus) est utilisée par 24% des élèves (*Fig. 12.20*). On peut penser qu'elle est très généralement complétée par un comptage, mais cela n'apparaît explicitement que sur environ 15% des feuilles (*Fig. 12.21*).

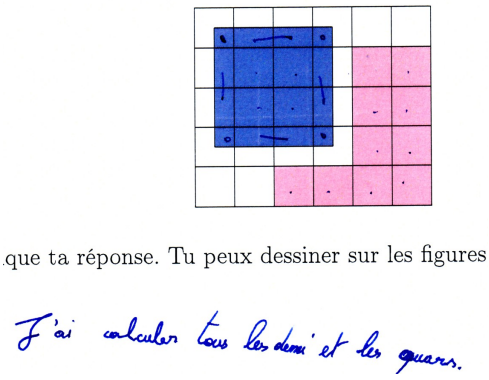


Fig. 12.20

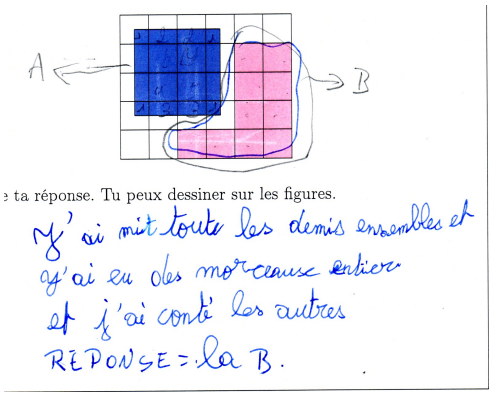


Fig. 12.21

Fig. 12.22

Enfin, deux élèves mesurent des longueurs et appliquent une formule en confondant aire et périmètre et un élève utilise une translation (nous avions déjà rencontré cette dernière procédure dans le pré-test réalisé en sixième primaire en 2005–2006, *voir page 362*).

12.4 Des comportements de réussite ou d'échec

Ainsi que nous l'avons fait pour les tests réalisés en 2005–2006, nous avons utilisé l'analyse statistique implicative (*voir l'annexe B.5*) en vue d'étudier en profondeur les résultats du pré-test faisant l'objet de ce chapitre. Commençons par les comportements d'échec.

12.4.1 Les comportements d'échec

Les items 2 et 3 du présent test étant fort semblables aux items 1 et 2 du pré-test réalisé en 2005–2006 en sixième primaire, il n'y a rien d'étonnant à ce que l'on retrouve des comportements d'erreur analogues, en l'occurrence des mesures de longueur et des confusions entre aire et périmètre.

Les autres items sont assez isolés. À l'item 1, on retrouve la confusion entre longueur et aire.

À l'item 4, le mode quantitatif atomisé se révèle être un comportement d'échec, sans doute lié à la difficulté de compter un à la fois un ensemble de 135 petits carrés. On retrouve aussi l'erreur consistant à considérer que le carré vert dessiné cependant en dehors du rectangle bleu peut être pris en compte et qu'il ne reste donc plus à placer que 14 carrés

verts (ou 126 petits carrés).

L'item 5 ne met en évidence aucun comportement d'échec particulier. Et cependant, 96 % des élèves fournissent une réponse inappropriée à cet item. On pourrait donc dire que, à part la réponse correcte, et ses composantes, toutes les autres réponses correspondent à des comportements d'échec. Cependant, l'analyse implicative dénie — à juste titre — toute signification à une implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ lorsque quasiment tous les individus testés possèdent la propriété $\mathcal{B}$.

L'item 6 était présent dans le test soumis aux élèves de sixième primaire en 2005–2006. On retrouve cette année comme comportement d'échec le fait de produire un dessin incomplet, mais aussi celui de vouloir « remplir le cadre ». Le problème dû au décalage en hauteur le fait d'utiliser un mode de construction atomisé entraînent la production de dessins imprécis.

Enfin, l'item 7, également présent en 2005–2006, met à nouveau en évidence la confusion entre aire et périmètre.

12.4.2 Des comportements de réussite

L'item 1 ne permet de dégager aucun comportement qui soit clairement associé à une réussite. Aux items 2 et 3, on voit apparaître, comme c'était le cas pour les items 1 et 2 du pré-test de 2005–2006, les comportements liés à l'apposition de marque sur les figures, ainsi que le fait d'effectuer une multiplication ou de dénombrer les (petits) carrés. La méthode de découpage et recomposition n'est pas classée parmi les comportements de réussite comme elle l'était pour les élèves de sixième. Une variante de cette méthode apparaît cependant à l'item 3 : le raisonnement par complémentarité.

À l'item 4, le principal comportement de réussite est le *mode quantitatif global* : l'élève trace les quinze carrés verts à l'intérieur du rectangle bleu et les dénombre.

À l'item 5, nous avons déjà indiqué que seule la réponse correcte peut être considérée comme un comportement de réussite. Elle n'est le fait que de quelques élèves.

L'item 6 est le dessin de la poupée déjà rencontrée lors du pré-test de sixième primaire. À cette occasion, nous avions constaté l'importance du mode de perception et de reproduction *global*, caractérisé par le fait que les côtés de la poupée étaient alignés avec les graduations du cadre. Pour les élèves de cinquième, le mode global est encore un comportement de réussite, mais il est moins important que le fait de tenir compte des graduations du cadre. Le mode *mixte* apparaît aussi parmi les comportements de réussite, mais pas le mode *local*.

Enfin, à l'item 7 (le plus difficile du test), les démarches qui amènent à la réussite sont, comme c'était le cas en sixième primaire, le découpage et la recomposition (éventuellement implicites) suivis d'un dénombrement, ainsi que l'apposition de marques sur la figure.

Nous avons également retenu certains comportements qui, ensemble, nous semblent avoir une influence sur la réussite globale au test. Ces comportements portent sur différentes facettes de l'activité demandée aux élèves. Ils ont souvent un taux d'utilisation faible, ce

qui signifie qu'ils sont difficiles à acquérir. Il n'est donc pas étonnant que les élèves qui les utilisent ont tendance à avoir d'autres comportements de réussite qui recouvrent plusieurs items du test. Ces comportements sont les suivants :

– Usage d'une multiplication à l'item 2.
– Nombre de carrés exact à l'item 5.
– Nombre de triangles exact à l'item 5.
– Prise en compte des graduations des côtés du cadre l'item 6.
– Justification correcte à l'item 7.

12.5 Une comparaison cinquième-sixième

Plusieurs items du test de cinquième année (2006–2007) étaient fort semblables (même identiques) à des items du test de sixième année (2005–2006). Ceci nous permet quelques comparaisons.

Items 1 et 2 de sixième (pré-test et post-test) comparés aux items 2 et 3 de cinquième (pré-test)

Certains comportements de réussite à ces deux items sont les mêmes : dénombrement, apposition de marques sur les figures. En sixième année, la méthode par découpage et recomposition est plus utilisée qu'en cinquième et devient également un comportement de réussite.

Des comportements d'échec sont (presque) spécifiques à la cinquième année : le comptage de points et la confusion entre aire et forme. (Ce dernier a encore été relevé une fois en sixième.)

On voit ainsi apparaître des stades différents du concept d'aire dans un ordre chronologique : d'abord un stade purement visuel, marqué par la confusion entre aire et forme, puis un stade pré-quantitatif associé au comptage des points. Viennent ensuite un stade quantitatif-atomisé (comptage de petits carrés) et enfin un stade quantitatif-global nécessitant la perception des possibilités de découpage et assemblage.

Item 3 de sixième (pré-test et post-test) comparé à l'item 4 de cinquième (pré-test)

Les méthodes principalement utilisées pour cet item sont un mode quantitatif-atomisé (comptage de petits carrés ou triangles), un mode quantitatif-global (comptage de grands carrés ou parallélogrammes) et un mode numérique (multiplication).

Le mode-quantitatif atomisé n'est pas un comportement de réussite, ni en sixième, ni en cinquième. Sa fréquence d'utilisation diminue quand on passe de cinquième en sixième. Le mode quantitatif-global est le seul comportement réellement efficace pour ces items et est employé par plus de 80 % des élèves en sixième.

Item 5 de sixième (pré-test) comparé à l'item 6 de cinquième (pré-test)

Ce dessin à reproduire peut aussi être réalisé en modes atomisé, local ou global, ce dernier étant le plus efficace (dessins plus soignés, plus précis, plus complets). Il est aussi

nettement plus fréquent en sixième qu'en cinquième.

Item 6 de sixième (pré-test) comparé à l'item 7 de cinquième (pré-test)

Pour ces items, le principal comportement de réussite est un comptage associé à des puzzles locaux : des carrés sont reconstitués à partir de fractions de carrés. C'est ce que nous avons appelé des comptages ou des découpages-recompositions implicites. Cette technique est utilisée de façon équivalente en cinquième et en sixième.

Cependant on voit se développer en sixième année des démarches différentes. La démarche numérique (emploi de formules) n'est pas une démarche de réussite dans ce contexte. Elle trahit souvent des confusions soit de concepts, soit de formules. Par contre, le pré-test de sixième primaire révèle une démarche globale tout-à-fait intéressante et fructueuse : une comparaison d'aires par translation « mentale ».

En conclusion

L'évolution conceptuelle se déroule clairement d'un stade « atomisé », vers un stade « global ». Les exercices proposés ne nécessitaient pas l'usage de formules, ce qui rend difficile l'insertion de cet élément dans la progression qui vient d'être indiquée. Les élèves ayant été tentés par l'application d'une formule sont probablement ceux dont la conceptualisation était insuffisante, ce qui a généralement entraîné un usage maladroit de la dite formule.

12.6 La population testée est-elle initialement homogène ?

Comme en 2005–2006, nous nous sommes préoccupés de savoir si la population d'élèves impliqués dans l'expérimentation était homogène. On ne peut en effet comparer valablement les résultats des groupes témoin et expérimental sans disposer de cette information.

Commençons par comparer les fréquences de réussite aux questions posées dans le test.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5 Carrés	Item 5 Triangles	Item 6	Item 7
Gr. Témoin	27 %	71 %	79 %	80 %	23 %	9 %	66 %	79 %
Gr. expé.	15 %	40 %	70 %	70 %	15 %	3 %	55 %	64 %
χ^2	2,65	11,9	1,12	1,69	1,38	4,29	1,5	3,05

Nous nous retrouvons dans la même situation qu'en 2005–2006 : les résultats du groupe expérimental semblent être inférieurs à ceux du groupe témoin. Plus encore que l'écart entre les taux de réussite des deux groupes à chaque item particulier, c'est le fait que cet écart va toujours dans le même sens qui est impressionnant.

Mais la dernière ligne du tableau nous oblige à nuancer notre appréciation. On y trouve en effet les valeurs des variables χ^2 associées à chaque colonne. Le test d'indépendance dit « du χ^2 » permet d'évaluer si une différence de deux pourcentages est significativement différente de 0. Un seuil de signification est à choisir. Conformément aux usages, nous avons choisi le seuil 0,95. La valeur critique correspondante (pour une variable χ^2 à un

degré de liberté, ce qui est le cas ici) est de 3,841. Autrement dit, nous n'accepterons de dire que les taux de réussite du groupe témoin et du groupe expérimental sont différentes que si la valeur du χ^2 est supérieure à 3,841 (et si c'est le cas, nous avons encore 5 « chances » sur 100 de nous tromper).

Moyennant cette approche statistique, nous ne trouvons que deux différences significatives dans le tableau précédent : la réussite à l'item 2, et la réponse correcte concernant le nombre de triangles à l'item 5.

Comparons ensuite les résultats des deux groupes aux trois items mentionnés à la fin du paragraphe précédent qui ne sont pas déjà repris ci-dessus.

	Multiplication à l'item 2	Graduations des cotés du cadre à l'item 6	Justification à l'item 7
Gr. Témoin Gr. expé.	11 % 7 %	41 % 16 %	13 % 1 %
χ^2	0,396	9,27	6,08

On voit que les deux dernières colonnes donnent lieu à des différences significatives.

Nous pouvons étendre notre recherche à l'ensemble des comportements de réussite mentionnés à l'annexe B.5. Nous obtenons les conclusions suivantes :

Les élèves du groupe témoin ont des taux significativement plus élevés que ceux du groupe expérimental aux comportements de réussite suivants :

- Item 2
  - Réponse correcte.
  - Comptage de petits carrés.
  - Apposition de marques pertinentes.
- Item 3
  - Justification partielle mais correcte.
  - Comptage de petits carrés.
  - Apposition de marques pertinentes.
- Item 4
  - Dessin des quinze carrés verts dans le rectangle bleu.
  - Démarche de comptage.
  - Mode quantitatif global.
- Item 5
  - Dessin du plus grand carré.
  - Dessin du plus grand triangle.
  - Réponse entre (2,6) et (6,8).
- Item 6
  - Prise en compte des graduations du cadre.
- Item 7
  - Utilisation (même implicite) d'un découpage et d'une recomposition.
  - Utilisation (même implicite) d'un comptage.
  - Apposition de marques pertinentes.

Ces différences significatives concernent donc essentiellement des démarches de dénombrement, d'apposition de marques, de découpage et recompositon (item 7) ainsi que des comportements liés à la perception : dessin du plus grand carré et du plus grand triangle à l'item 5, mode global de construction et prise en compte des graduations du cadre à l'item 6.

Ainsi, nous trouvons un nombre important de comportements de réussite pour lesquels les élèves du groupe témoin ont au pré-test un comportement significativement plus performant que ceux du groupe expérimental.

Chapitre 13

Un post-test en cinquième primaire (2006–2007).

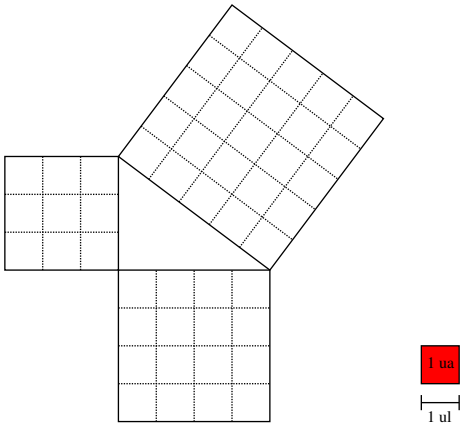
13.1 Les énoncés

Le post-test comprend cinq items. Les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Il a été réalisé dans les mêmes classes que le pré-test. Comme pour celui-ci, nous n'avons pas tenu compte des résultats des élèves de sixième qui figuraient dans deux des classes. Par le jeu des absences, le nombre d'élèves a été ramené à 123, dont 67 élèves du groupe expérimental, et 56 du groupe témoin.

Les figures suivantes ne reproduisent pas en vraie grandeur les fiches soumises aux élèves.

– Item 1

Défi 1 – Le petit carré rouge est l'unité d'aire (1 ua) et son côté est l'unité de longueur (1 ul).



1) Que vaut le périmètre du triangle ? Explique comment tu l'as trouvé.
2) Que vaut l'aire du triangle ? Explique comment tu l'as trouvée.

– Item 2

Défi 2 – Tu disposes de 3 carrés bleus et de 3 triangles rouges, dans une enveloppe à ton nom.

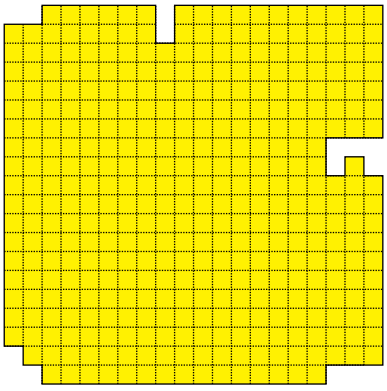
L'aire du carré est-elle plus grande que celle du triangle, est-elle plus petite, ou sont-elles égales ?
Pour le voir tu peux assembler, découper ou tracer sur les figures.
Fais une croix dans la bonne case.
Explique comment tu l'as vu, et colle ci-dessous les figures utilisées pour t'aider à expliquer. Quand tu auras fini remets dans l'enveloppe les figures que tu n'as pas utilisées.

- L'aire du carré est plus grande que celle du triangle. ☐
- L'aire du carré est plus petite que celle du triangle. ☐
- Les aires sont égales. ☐

Les triangles et les carrés présents dans l'enveloppe :

– Item 3

Défi 3 – Combien y a-t-il de petits carrés dans la figure jaune ?

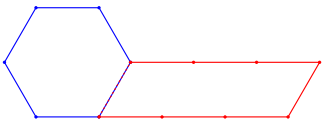


Explique comment tu as procédé.

– Item 4

Défi 4 – Compare les aires des deux figures ci-dessous.

Tu peux tracer sur les figures.
Fais une croix dans la bonne case.

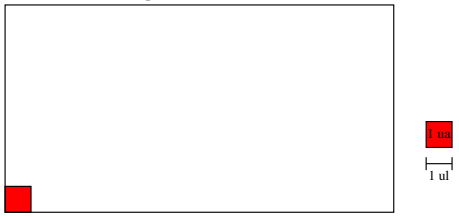


- L'aire de la figure bleue est plus grande que celle de la figure rouge. ☐
- L'aire de la figure bleue est plus petite que celle de la figure rouge. ☐
- Les aires sont égales. ☐

Explique comment tu as procédé.

– Item 5

Défi 5 – Le petit carré rouge est l'unité d'aire (1 ua) et son côté est l'unité de longueur (1 ul).
On peut mettre 15 petits carrés sur la longueur du grand rectangle, ou 8 petits carrés sur sa largeur.



1. Que vaut le périmètre du rectangle ?
   Explique comment tu l'as trouvé.
2. Que vaut l'aire du rectangle ?
   Explique comment tu l'as trouvée.

13.2 Analyse des items

13.2.1 Item 1

Concernant le périmètre

Cet item utilisait une unité de longueur, notée « ul » différente de l'unité conventionnelle, c'est-à-dire le cm. Mais la différence (0,95 cm au lieu de 1 cm) était tellement faible que rares sont les élèves qui s'en sont rendu compte (*Fig. 13.2*). Nous avons donc considéré lors du dépouillement du questionnaire que pour cet item, il y avait équivalence entre les deux unités. (Plus loin, nous rencontrerons l'item 5 où ce point de vue ne pouvait plus être adopté.) Pour le périmètre du triangle nous avons donc accepté aussi bien la réponse 12 cm (*Fig. 13.1*) que la réponse 12 ul, et nous avons procédé de même en ce qui concerne l'aire. Bien entendu, nous avons également accepté les réponses proches de 11,4 cm, obtenues en mesurant à la latte, et avec plus ou moins de précision, les longueurs des trois côtés du triangle.

Fig. 13.1

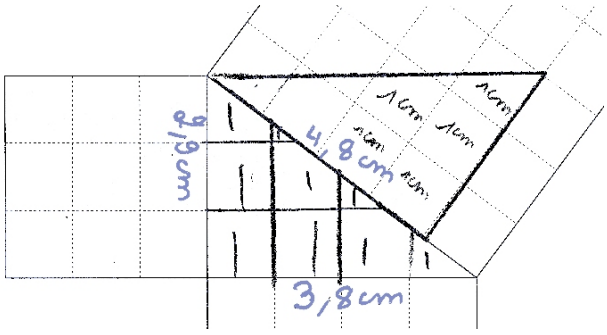


Fig. 13.2

Cela étant, 79% des élèves ont additionné les mesures des côtés, et prouvent ainsi leur

compétence en ce qui concerne le calcul d'un périmètre dans le contexte donné.

Dans le cas présent, on ne peut néanmoins pas mettre sur le même pied l'élève qui voit directement que les longueurs des côtés (en ul) valent 3, 4 et 5 et celui qui prend sa latte pour mesurer les côtés, même si ses mesures sont précises.

En examinant les copies, nous constatons que 30% des élèves ont utilisé cette dernière procédure, ce qui fait apparaître dans la population étudiée non deux groupes d'élèves, mais trois : ceux qui fournissent une réponse incorrecte ou pas de réponse du tout (20%), ceux qui trouvent une réponse acceptable en mesurant (30%) et « les autres » (50 %), dont certains explicitent leur méthode, mais pas tous.

Parmi les réponses inacceptables, on trouve l'emploi de formules inexactes ou des justifications incorrectes. Certains ont multiplié des longueurs (éventuellement multipliées par 2) et confondent probablement périmètre et aire (*Fig. 13.3*), ou même volume (*Fig. 13.4*).

Voici la justification d'un élève qui proposait 60 comme périmètre :

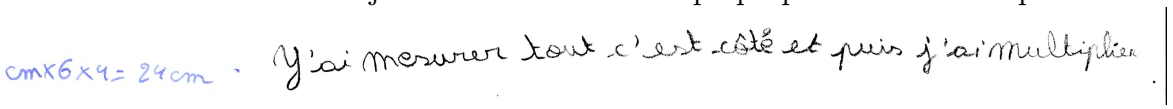
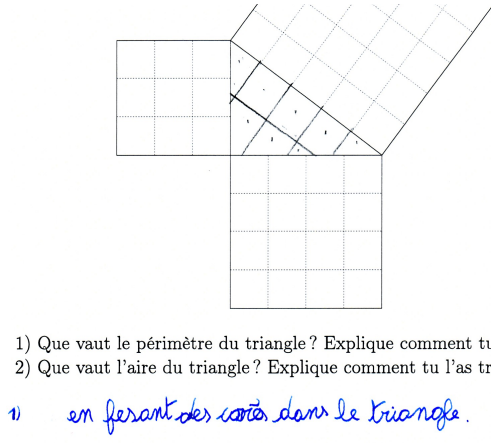


Fig. 13.3 *Fig. 13.4*

Trois élèves ne donnent pas de réponse numérique, mais fournissent une justification incorrecte (*Fig. 13.5*).



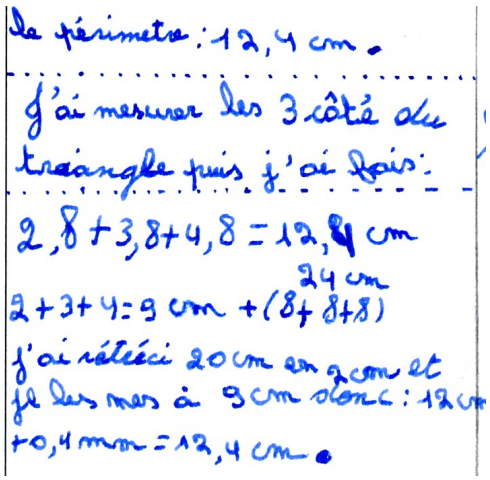


Fig. 13.5 *Fig. 13.6*

Voici une justification (*Fig. 13.6*) dont on pourrait argumenter qu'elle ne comporte qu'une erreur de calcul. Ajoutons quand même que son auteur a plus de problèmes avec l'arithmétique et la langue maternelle qu'avec le calcul du périmètre.

Il existe aussi des justifications dont on ne peut affirmer qu'elles soient rédigées en bon français, mais qui sont correctes et claires :

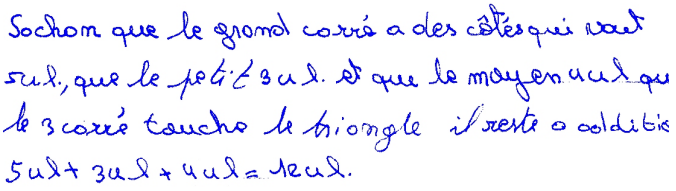


Fig. 13.7

Concernant l'aire

Nous retrouvons la même confusion entre l'unité d'aire donnée et le centimètre carré. Aussi avons-nous considéré comme équivalentes les réponses 6 centimètres carrés et 6 u.a.

Le tableau suivant indique les fréquences des démarches les plus importantes :

	Réussite	Bonne réponse	Quadrillage	Construction d'un rectangle	Formule triangle
Pourcentage	47%	58%	52%	9%	7%

Par « réussite », il faut entendre « Réponse exacte assortie d'une justification (considérée comme) correcte ». La différence entre les deux pourcentages (11%) indique donc la fréquence des réponses correctes mais sans justification ou avec une justification insuffisante.

Quant aux autres colonnes :

- 52% des 123 élèves ont utilisé un quadrillage du triangle (*Fig. 13.8*), et ont ensuite essayé de recomposer des carrés unités. 35% (des 123 élèves) ont ainsi produit une réponse correcte. Ce taux descend à 32% si on tient compte de la correction de la justification.

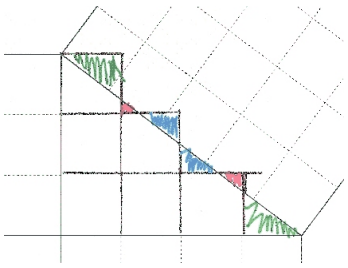


Fig. 13.8

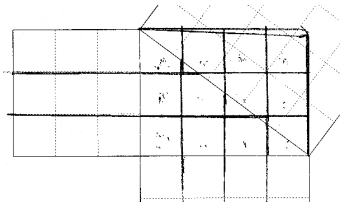


Fig. 13.9

  C'est donc la méthode du quadrillage du triangle qui a été privilégiée, ce qui revient à dire que la moitié des élèves sont au stade qui a été qualifié de « quantitatif » aux chapitres 5 et 6. Cette méthode est cependant approximative et dans le cas présent difficile à mettre en œuvre : il n'est pas évident de reconstituer des carrés entiers. Elle ne conduit donc pas nécessairement à la bonne valeur.

- Quatorze élèves (9%) ont complété le triangle en un rectangle et ont calculé l'aire de celui-ci (*Fig. 13.9*). Treize d'entre eux ont alors obtenu l'aire du triangle en divisant par 2.

  Ces élèves ont une perception qui leur permet de *sortir du triangle* et de le compléter en un rectangle. De cette façon, ils n'ont aucun besoin d'une formule de calcul pour l'aire du triangle rectangle, celle du rectangle leur suffit. Et la formule de l'aire du

rectangle est à peine une *formule* : elle repose entièrement sur la visualisation d'un quadrillage.

- Douze élèves (10%) ont essayé d'utiliser directement la formule d'aire du triangle, mais seulement quatre y sont parvenus.

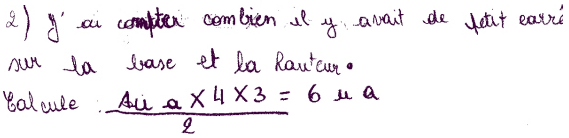


Fig. 13.10

L'utilisation directe de la formule d'aire pour le triangle est liée au fait de l'avoir déjà rencontrée ou non. Mais cela ne suffit pas : la construction de cette formule (et donc sa compréhension et sa mémorisation) repose sur la perception d'un triangle comme étant un demi-parallélogramme. Dans le cas présent, le triangle étant rectangle, le parallélogramme est lui-même un rectangle. Dans ce cas, comme on vient de le remarquer, quand cette perception est acquise, la formule n'est plus nécessaire.

Certaines réponses révèlent soit une mauvaise perception (*Fig. 13.13* : l'élève remplace le triangle donné par un autre qui ne lui est pas superposable), soit une grande incompréhension à laquelle on supplée en faisant appel à la mémoire, pas toujours sûre (*Fig. 13.11* et *Fig. 13.12*).

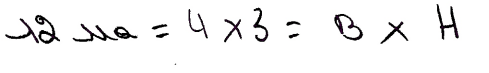


Fig. 13.11

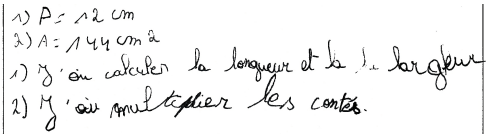


Fig. 13.12

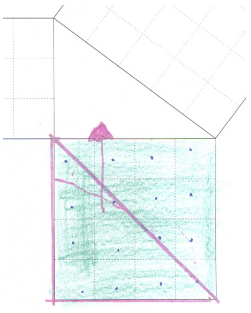


Fig. 13.13

Certaines réponses suggèrent que la perception de l'auteur est en train d'évoluer. Par exemple (*Fig. 13.14*), il « sort » du triangle en le complétant en un carré qui ne le satisfait pas. Il ne voit pas le rectangle qui conviendrait et se rabat sur le comptage de carrés.

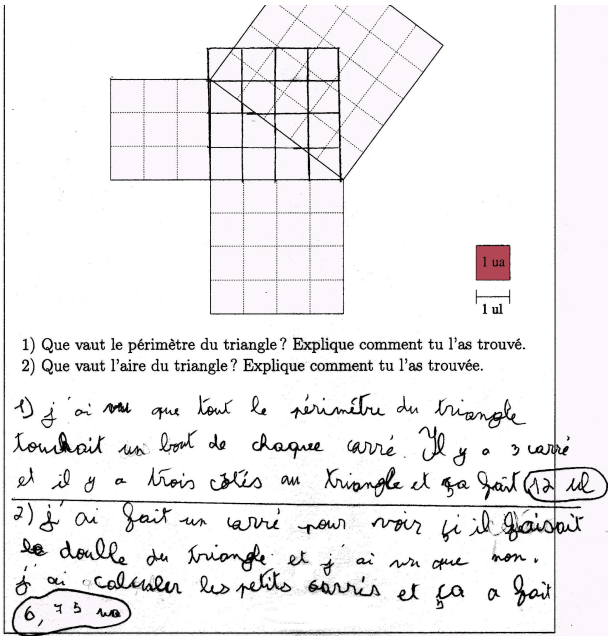


Fig. 13.14

13.2.2 Item 2

Le tableau suivant résume les constatations générales relatives à cet item :

	Bonne réponse	Réponse erronée	Multiplication d'aires	Découpage	Autres méthodes
Total	92%	7,3%	5,7%	86,2%	8,1%

Sur les cent vingt-et-un élèves (98,4%) qui répondent à l'item 2, plus de nonante pour cent (92%) conviennent que les aires du carré et du triangle sont égales.

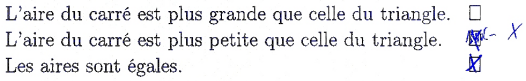


Fig. 13.15

À titre anecdotique, mentionnons un élève qui semble avoir donné deux réponses (dont la bonne). Il est possible qu'il se soit d'abord trompé et n'ait pu ensuite « gommer » son erreur.

Dans la catégorie « réponses erronées » la réponse « plus petite » est plus fréquente que la réponse « plus grande » (5,7 % contre 1,6%).

L'analyse des justifications des élèves montre que le mode qualitatif (ou mode puzzle) est, de loin, le plus utilisé. Comme les élèves disposaient de formes prédécoupées, assez naturellement la première opération en vue de comparer leurs aires est de superposer un carré et un triangle, appliquant ainsi le *principe de l'égalité par superposition* rappelé à la section 5.3.1.

Une grande majorité d'entre eux (86,2%) procèdent par découpage d'un triangle en vue d'une recomposition en un carré (72,4%). Les autres (13,8%) adoptent la méthode inverse : ils découpent un carré et recomposent un triangle. Cette répartition semblerait indiquer

que, lors de la superposition du carré et du triangle donnés, le débordement du triangle par rapport au carré est plus prégnant que le débordement du carré par rapport au triangle.

Dans les deux cas, le découpage se réalise surtout physiquement. Mais, selon la figure découpée, entre 10% et 20% des élèves opèrent le découpage mentalement (tout en laissant souvent des traces physiques : trait de découpe et flèches).

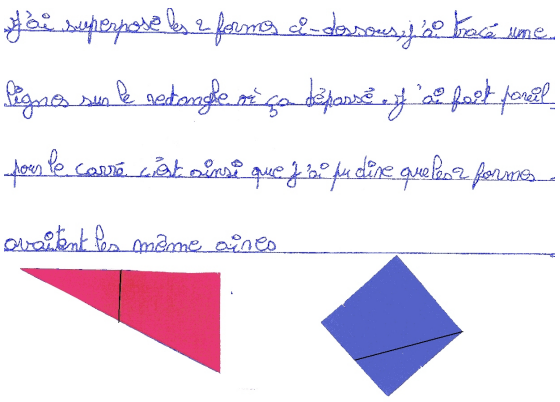


Fig. 13.16

Un élève a effectué les deux procédés, l'un à la suite de l'autre en commençant par le triangle, par *superposition* des formes entre elles. La comparaison des morceaux qui dépassaient, délimités par un trait sur chaque figure, lui a permis de constater l'équivalence des deux aires.

Quelques élèves (5,7%) procèdent par multiplication d'une aire par un naturel (*voir la section 5.4.1*) : ils juxtaposent deux carrés et deux triangles et obtiennent deux rectangles en les fusionnant. Ils comparent alors les aires de ces rectangles par *superposition* et découvrent ainsi leur égalité :

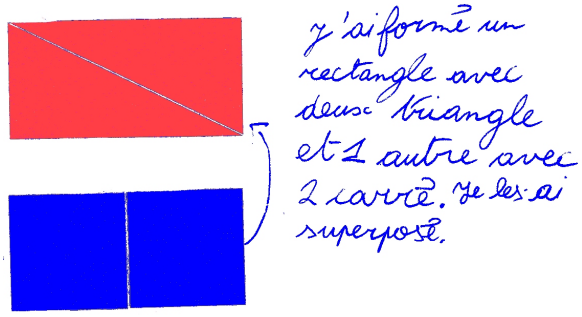


Fig. 13.17

Même si ces élèves restent à un niveau purement qualitatif, leur démarche tend vers une certaine quantification de l'aire. En effet, l'aire de la fusion de deux mêmes formes en une nouvelle est obtenue par additions répétées des aires de la forme de base, ce qui peut être regardé comme la multiplication de l'aire de cette forme de base par un nombre naturel, qui agit comme un opérateur multiplicatif (*voir le chapitre 5*).

C'est ce qu'un élève a l'air d'avoir fait mentalement en référence à la mesure d'une base et d'une hauteur du carré et du triangle :

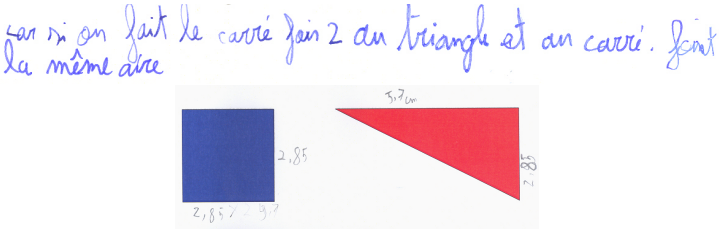


Fig. 13.18

Dans cette voie vers une quantification, il semble que chez l'un ou l'autre élève la détermination de mesures se soit substituée à la *superposition* comme outil de vérification

(validation) de l'égalité des aires :

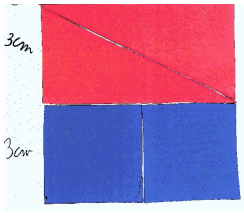


Fig. 13.19

Sur cette copie, l'élève a juxtaposé les deux rectangles selon leur plus grande dimension et mesuré leurs largeurs. Il se base ainsi, pour la largeur, sur une comparaison numérique et, pour la longueur, sur une comparaison qualitative.

D'autres élèves ont aussi réalisé des mesures qui justifient le procédé de superposition et précèdent le découpage :

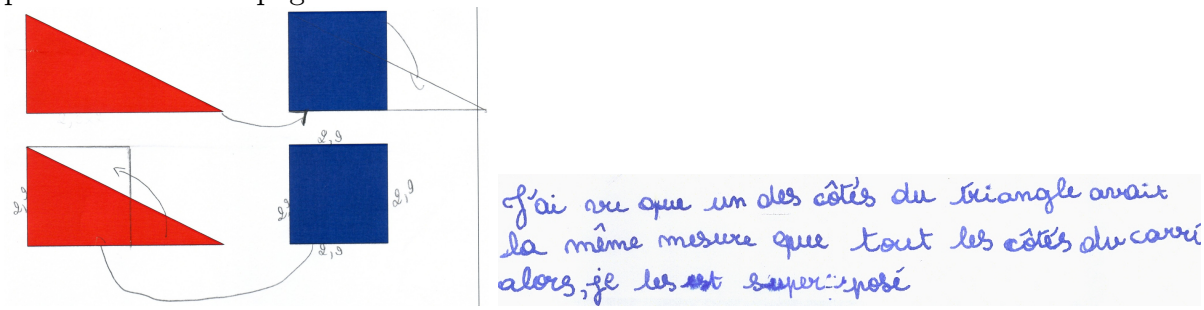


Fig. 13.20 Un examen attentif de la feuille montre que l'élève a inscrit $2,9 \times 2$ sous le triangle supérieur, puis l'a gommé. Cette marque a disparu à la reproduction.

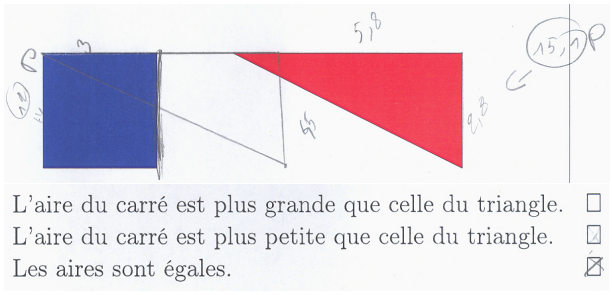


Fig. 13.21

Deux élèves ont mesuré un périmètre. Dans l'exemple ci-contre, cette mesure a interféré, dans un premier temps, avec la réponse (trace d'effacement d'une croix). Mais, en fin de compte, la réponse correcte a été cochée, entre autres par l'utilisation d'une autre méthode.

À côté du mode qualitatif de raisonnement, dominant dans cet item, nous avons repéré la présence du mode numérique. Celui-ci se résume à l'application de formules d'aire. La comparaison des résultats amène à reconnaître l'égalité des aires.

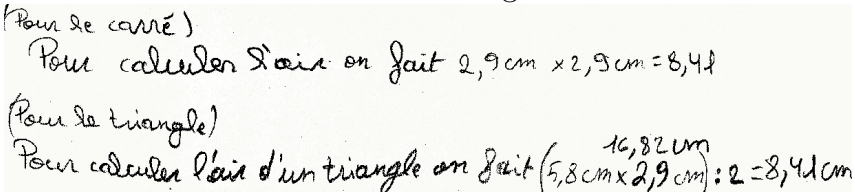


Fig. 13.22

Par contre, comme aucun élève n'a quadrillé les figures, le comptage de carrés, ou mode quantitatif, n'est pas apparu dans les raisonnements de l'item 2. Ceci peut être dû au fait qu'aucun quadrillage n'est dessiné sur les figures de départ.

13.2.3 Item 3

Cette question avait pour premier objectif de tester la persistance de comportements de type *quantitatif atomisé*, se manifestant dans le cas présent par le comptage de tous les petits carrés jaunes, un à la fois.

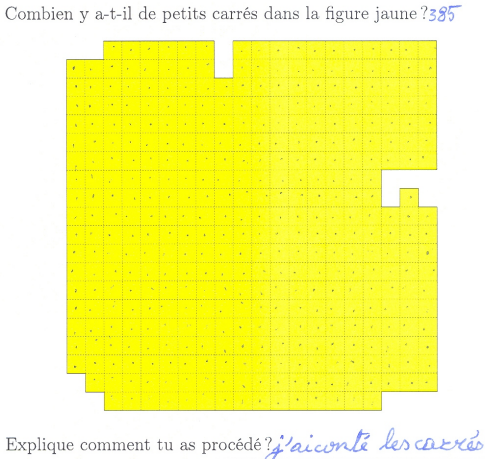


Fig. 13.23

Cette démarche a effectivement été choisie par un nombre non négligeable d'élèves : 18 sur 123, soit 14,6 % (*Fig. 13.23*). Seuls 5 d'entre eux (4 %) arrivent à trouver la réponse correcte de cette façon.

La démarche la plus fréquente (63 élèves sur 123, soit 51 %) est de type *global* : il s'agit de « recomposer » le grand carré, de calculer combien il contient de petits carrés, puis de déduire le nombre de petits carrés manquants. Cinquante-sept élèves vont au bout du processus, avec éventuellement des erreurs de calcul, dans le comptage des carrés blancs (6 sur 63) ou dans le calcul numérique (9 sur 63). Cela donne 42 réponses correctes

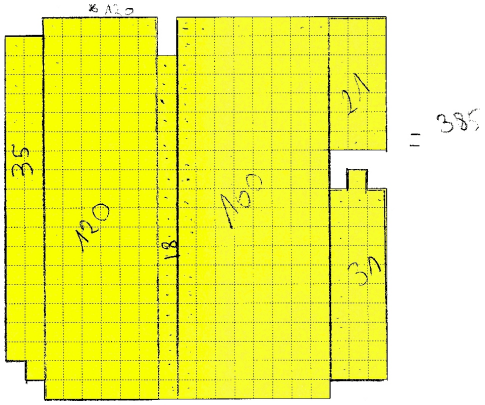


Fig. 13.24

Une troisième démarche peut être qualifiée de *locale* (*Fig. 13.24*) : le travail de dénombrement a été effectué par blocs en décomposant la figure en carrés ou rectangles dont l'aire était calculée par la formule classique « côté × côté ». Il restait ensuite à compter et ajouter les petits carrés composant les figures restantes. Trente élèves (24,4 %) ont procédé de la sorte.

Cela donne 13 réponses correctes. Ce comportement suppose déjà d'apercevoir des structures dans la figure.

Onze élèves ont utilisé des méthodes diverses, ce qui a fourni trois réponses correctes supplémentaires. Quelques-uns ont mesuré à la latte (*Fig. 13.25*). Trois élèves ont travaillé par puzzle, en déplaçant des petits carrés jaunes pour combler les trous. Un d'entre-eux a obtenu la réponse correcte. Ce comportement nécessite aussi une vision globale.

Au total, 63 des 123 élèves ont trouvé la réponse correcte.

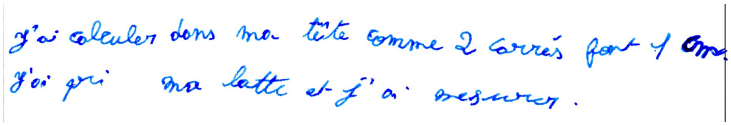


Fig. 13.25

13.2.4 Item 4

Le tableau suivant résume les constatations générales relatives à cet item :

Bonne réponse	Réponse erronée	Pas de découpe	Comptage	Appariement	Mesures
59%	41%	20%	39%	17,1%	13%

Notons d'abord que 121 élèves sur 123 répondent à cette question, ce qui montre qu'elle ne surprend pas. Notons aussi que deux d'entre eux se contredisent eux-mêmes en cochant deux cases au lieu d'une. Pour l'un des deux on peut penser qu'une des deux réponses fournies se rapporte à une question qui n'était pas posée : la comparaison des périmètres.

Si quasiment tous les élèves fournissent une réponse, seuls 59 % d'entre eux fournissent la réponse correcte. L'affirmation que la figure bleue (l'hexagone) est plus grande que la rouge (le parallélogramme) est sélectionnée par 30 % des élèves, l'affirmation opposée par 11%. Le plus grand « succès » de l'hexagone est peut-être due à un phénomène de perception : le parallélogramme plus allongé et moins haut est *a priori* plus petit.

Certains élèves ont mesuré des longueurs, d'autres ont compté des points ou des segments des figures à comparer. Ils n'avaient alors aucun besoin de découper les figures d'une quelconque façon. D'autres affirment avoir procédé par superposition et l'absence de découpage est alors plus étonnante, d'autant plus que cette superposition a l'air d'avoir été opérée mentalement.

Pour analyser les raisonnements des élèves, nous séparerons ceux-ci en deux groupes selon qu'ils se basent sur des découpages ou non.

• La première catégorie est constituée de vingt-cinq élèves (20,3%) dont les feuilles ne comportent aucune trace ni aucune mention de découpage.

– Cinq d'entre eux fournissent la réponse correcte, sans l'accompagner d'une quelconque explication. Nous ne pouvons exclure que, mentalement, ils aient quand même procédé par découpage.
– Trois autres élèves ne fournissent aucune explication mais considèrent tous les trois l'hexagone comme plus petit. Peut-être ont-ils mentalement comparé les périmètres.
– Six comparent explicitement les périmètres et concluent explicitement que l'hexagone est plus petit. Notons quand même que l'un d'entre eux figure parmi ceux qui ont fourni deux réponses contradictoires, dont la réponse correcte.
– Deux ont procédé par superposition de segments ou de figures (*Fig. 13.28*).
– Six ont compté des points ou des segments.
– Enfin, quatre ont fait d'autres mesures (*Fig. 13.27*).

Un seul des élèves repris dans les trois derniers groupes produit une réponse correcte (*Fig. 13.26*)

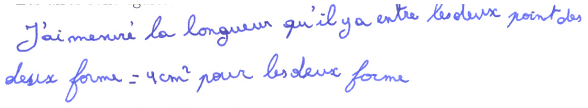


Fig. 13.26

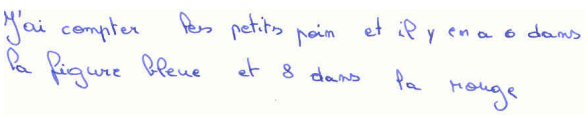


Fig. 13.27

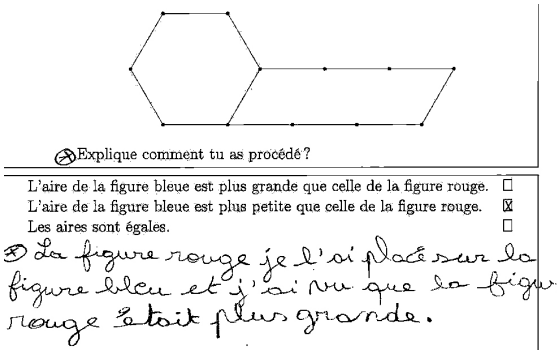


Fig. 13.28

• Considérons ensuite la seconde catégorie d'élèves : ceux qui ont procédé par découpage. Ils sont au nombre de 98 (79,7%) et se répartissent en plusieurs sous-catégories selon le type de découpage.

– Quarante-quatre ont dessiné des triangles équilatéraux. Certains ont compté ces triangles (parfois en les « pointant »).

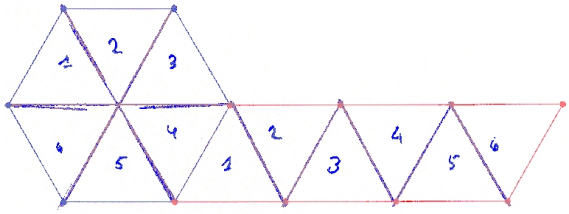


Fig. 13.29

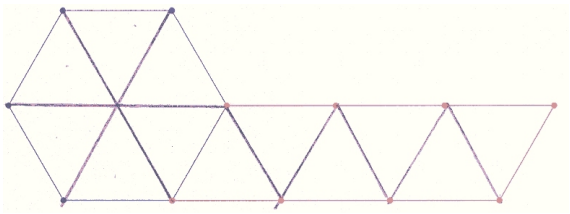


Fig. 13.30

– Trente ont dessiné des parallélogrammes. Sept d'entre eux ont alors compté les parallélogrammes (*Fig. 13.31*) ; sept autres ont procédé par appariement (*Fig. 13.32*, *Fig. 13.33*) ; les autres n'explicitent pas nécessairement leur démarche finale (*Fig. 13.34*).

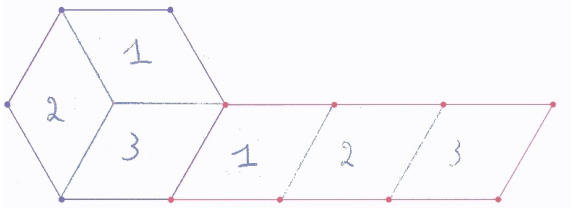


Fig. 13.31

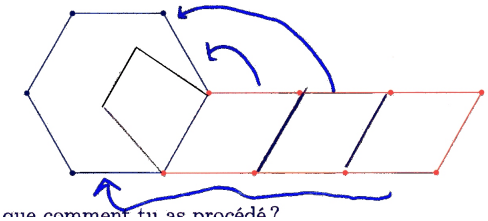


Fig. 13.32

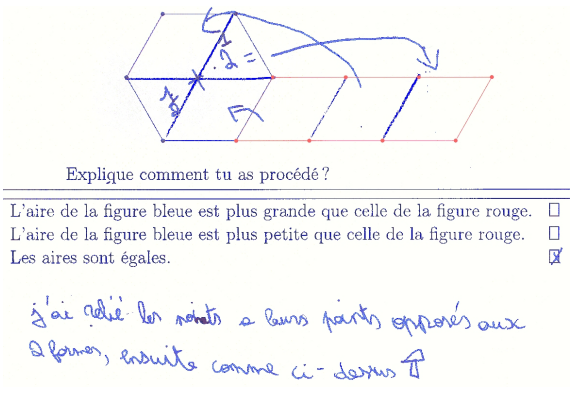


Fig. 13.33

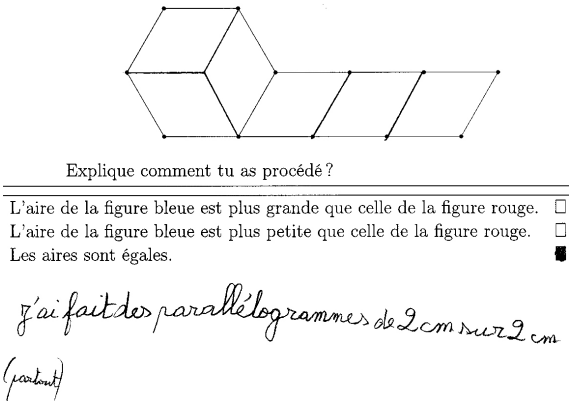


Fig. 13.34

– Dix-neuf élèves dessinent des trapèzes, de différentes façons : par une grande diagonale dans l'hexagone (huit élèves), par une oblique dans le parallélogramme (trois élèves) ou les deux à la fois (six élèves). Les explications sont variables.

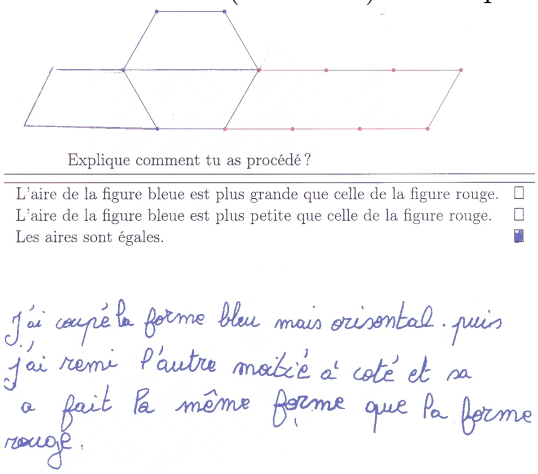


Fig. 13.35

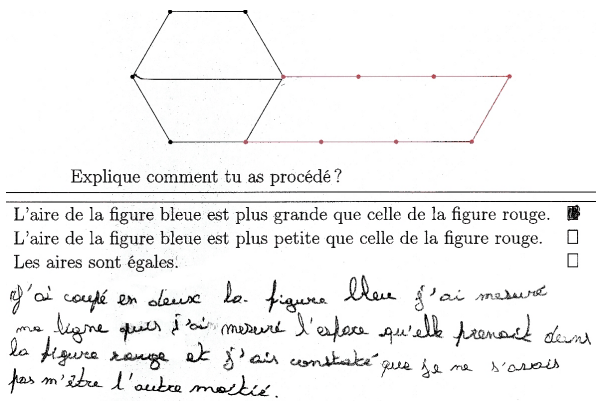


Fig. 13.36

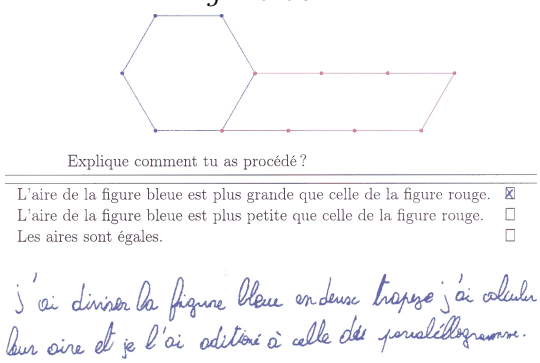


Fig. 13.37

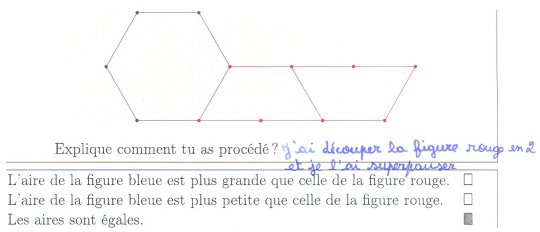


Fig. 13.38

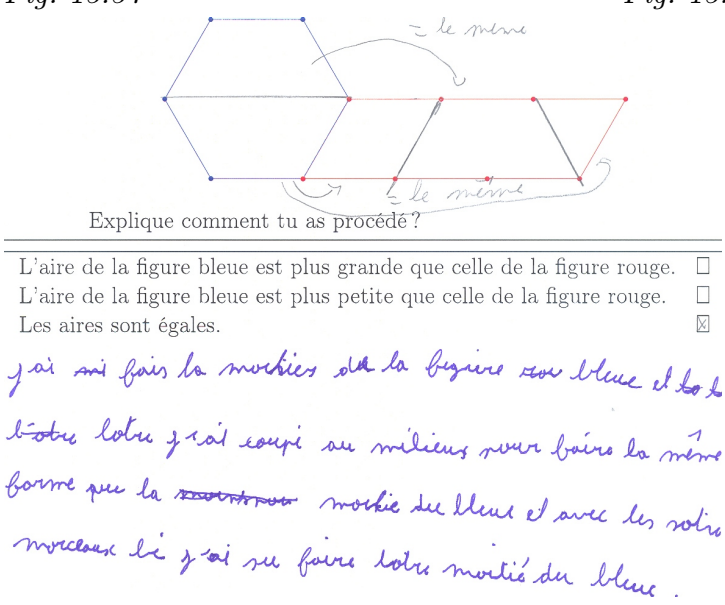


Fig. 13.39

– Enfin vingt-neuf élèves ont inventé d'autres types de découpes, comme le montrent les figures suivantes. Certaines peuvent être interprétées comme des exemples incomplets

d'un des types précédents.
Il arrive aussi fréquemment que sur une même figurent soient dessinés à la fois des triangles et des parallélogrammes ou de trapèzes... Les élèves concernés sont alors compté plusieurs fois ci-dessus.
Quelques-uns quadrillent mais de manière approximative et pas toujours avec uniquement des carrés (*Fig. 13.40*). Certains apparient (*Fig. 13.41*). D'autres mesurent (*Fig. 13.42*). Pour d'autres encore, le procédé n'apparaît pas (*Fig. 13.43*).

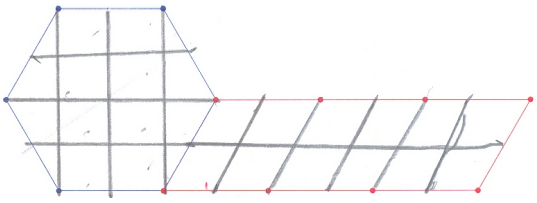


Fig. 13.40

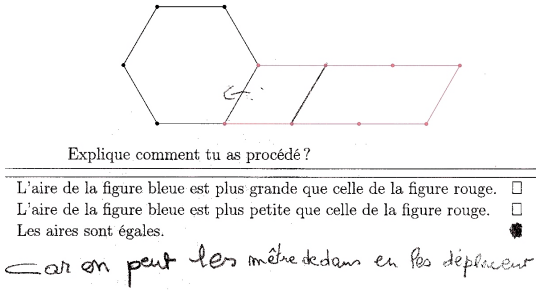


Fig. 13.41

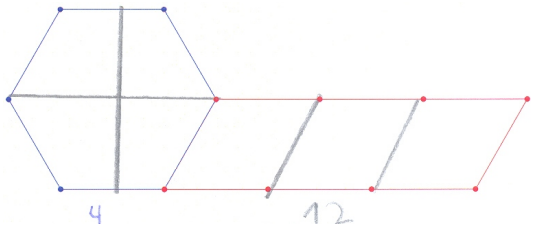


Fig. 13.42

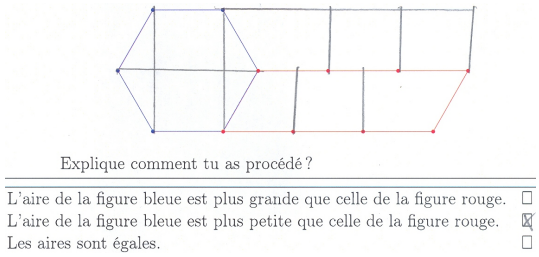


Fig. 13.43

Trois grandes méthodes de résolution

Le comptage est le procédé utilisé par le plus grand nombre d'élèves (39%). Ce comptage, comme nous l'avons vu, ne s'applique pas uniquement aux figures à deux dimensions, mais aussi à des points ou des segments. En terme de mode de raisonnement, il s'agit du mode quantitatif.

L'appariement constitue un deuxième procédé qu'une partie des élèves (17,1%) emploient. Il concerne presque exclusivement des figures à deux dimensions mais rarement des points ou des segments. Cette méthode peut être classée dans le mode qualitatif de raisonnement.

La troisième méthode (13%) consiste en la mesure de segments. Nous avons rencontré un seul cas où un élève raisonne en mode numérique par l'utilisation d'une formule d'aire.

13.2.5 Item 5

L'utilisation à bon escient de formules pour calculer des périmètres ou des aires peut dissimuler une mauvaise compréhension ou — si l'on préfère — une conceptualisation limitée des aspects fondamentaux du domaine des grandeurs géométriques et de leurs mesures. Derrière un énoncé à première vue relativement simple, le dernier item de ce test jette un éclairage sur les difficultés qui peuvent apparaître dès que les situations présentées

aux élèves s'écartent quelque peu de la pratique routinière.

La situation présentée aux élèves comporte le calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle et l'explication des méthodes utilisées pour obtenir ces résultats. Or nous constatons que, si de l'ordre de 50 % des élèves produisent des explications techniques acceptables de leurs résultats, seuls 45 % trouvent une valeur correcte pour le périmètre et 38 % une valeur correcte pour l'aire. Et la baisse enregistrée en passant des justifications aux résultats ne s'explique pas seulement par des erreurs de calcul.

Les taux précis sont repris dans le tableau suivant :

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
Les 123 élèves				
Périmètre	47 %	45 %	37 %	18 %
Aire	51%	38 %	40 %	22 %

Voyons donc quelles particularités de l'énoncé peuvent affecter à ce point les résultats, notamment ceux qui concernent le calcul de l'aire.

L'emploi d'unités non conventionnelles

À la différence de la situation de l'item 1, l'unité de longueur (notée ul) utilisée dans cet item 5 différait suffisamment de 1 cm pour que nous ne puissions pas accepter de considérer 1 ul comme équivalent à 1 cm. En fait, la relation entre ul et cm était donnée par la formule 1 ul = 0,7 cm, ce qui entraînait pour les unités d'aire 1 ua = 0,49 cm^2.

Or nous avons relevé quatre attitudes différentes des élèves devant cette question.

1. Vingt-six élèves (21 % de 123) n'ont tenu aucun compte des unités ul et ua, ni des indications relatives aux nombres de petits carrés rouges qui pouvaient être placés au long des côtés du rectangle. Apparemment, ces élèves ne conçoivent pas qu'on puisse utiliser une autre unité que le cm. Ils ont donc pris leur latte et ont mesuré, bien entendu en cm, les côtés du rectangle (6,1 cm et 11,5 cm). Ils ont produit, lorsqu'ils ne se trompaient pas en mesurant ou en calculant, les réponses $35,2$ cm pour le périmètre et $70,15$ cm^2 pour l'aire, réponses que nous ne pouvions pas considérer comme fausses et que nous avons donc rangées dans la catégorie des réponses correctes. Le problème n'est pas au niveau de la correction des calculs, mais au niveau du concept d'unité de mesure, qui est insuffisamment maîtrisé comme le montre la méconnaissance de l'aspect arbitraire du choix d'une unité.

   La figure 13.44 montre la réponse d'un élève de cette catégorie qui se trompe en mesurant la longueur du rectangle. L'auteur de la figure 13.45 ne répond pas à la question concernant le périmètre, mais fournit l'aire correctement, avec une bonne explication. On appréciera à la figure 13.46 la distinction entre *les* longueurs et *les* largeurs du rectangle dans le calcul du périmètre et *la* longueur et *la* largeur (soulignés par l'auteur) du même rectangle dans le calcul de l'aire.

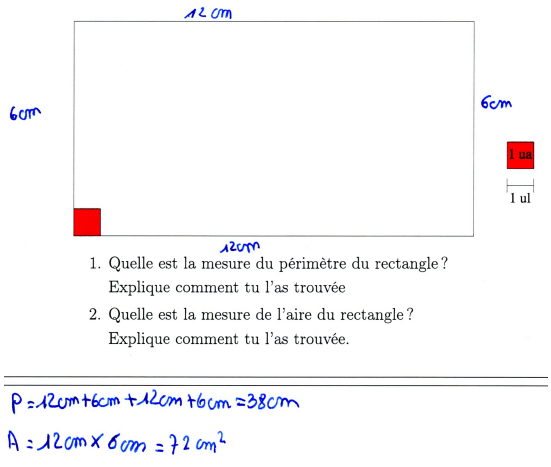


Fig. 13.44

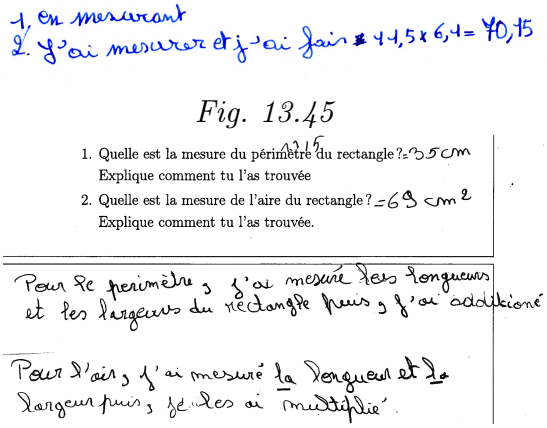


Fig. 13.45

Fig. 13.46

Les erreurs relevées sur les copies des élèves de cette catégorie sont pour la plupart des erreurs de mesure, de calcul ou d'applications de formules. L'absence de réponse n'est pas rare, comme le tableau ci-dessous l'indique.

Trois élèves ont quadrillé le rectangle donné, ce qui induit d'autres erreurs sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Le tableau suivant indique pour cette catégorie d'élèves les différents taux de réponses et de justifications correctes (les taux sont relatifs au total de 26).

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
26 élèves qui ne tiennent aucun compte des ul et ua				
Périmètre	38 %	46 %	31 %	23 %
Aire	46 %	23 %	38 %	38 %

2. Quatorze élèves ont considéré que l'unité ul était exactement de 1 cm, donc que les dimensions du rectangle étaient de 8 cm sur 15 cm, ce qui les amenait — sauf erreur de calcul de leur part — à un périmètre de 46 cm et une aire de 120 cm^2.

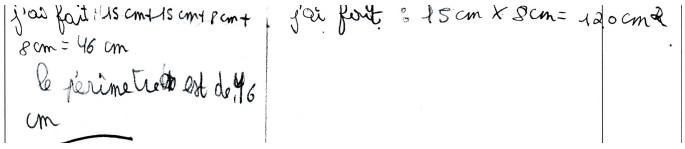


Fig. 13.47

Même si les calculs étaient corrects et les démarches valables, il ne nous a pas semblé possible d'accepter des réponses qui non seulement révèlent une méconnaissance du côté arbitraire des unités de mesures, mais de plus font apparaître un manque de sens critique quant à la plausibilité des résultats obtenus ([1]).

Si nous avons considéré les réponses des élèves de cette catégorie comme automatiquement fausses, (une ou deux étaient manquantes), nous avons néanmoins relevé

([1]) Nous ne pouvons cependant pas exclure qu'une telle démarche soit liée à la présentation occasionnelle aux élèves de figures dessinées à l'échelle, et mentionnant des longueurs qui à strictement parler sont fausses :

Peut-être notre rectangle n'était-il qu'une représentation d'un rectangle de 8 cm sur 15 cm !

la valeur des justifications et constaté que neuf des quatorze justifications relatives au périmètre et onze de celles relatives à l'aire étaient acceptables. Autrement dit, les procédures de calcul étaient valables (*Fig. 13.47*).

Le tableau suivant indique pour cette catégorie d'élèves les différents taux de réponses et de justifications correctes (les taux sont relatifs au total de 14).

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
14 élèves pour lesquels ul = 1 cm				
Périmètre	64 %	0 %	100 %	0 %
Aire	79 %	0 %	93 %	7 %

3. Vingt élèves nous semblent dans une situation plus difficile que les précédents, en ce sens qu'ils mélangent sur leurs feuilles les unités ul et ua avec les cm et les cm^2, calculant parfois un résultat (périmètre ou aire) avec une unité d'un type, et l'autre résultat avec une unité d'un autre type. Sur la figure 13.49, la largeur du rectangle est 6 cm lors du calcul du périmètre, et 6 ua (!) lors du calcul de l'aire. Au pire, on voit un élève ajouter des ul et des cm ! Ainsi la figure 13.50 ne mentionne explicitement aucune unité. Mais le calcul du périmètre utilise la mesure de la largeur du rectangle en cm (6) et celle de sa longueur en ul (15). Quant au calcul de l'aire il est correct dans le système ul/ua. Les feuilles de cette catégorie sont parfois difficiles à décrypter.

   Lorsque c'était possible, nous avons accepté un résultat (périmètre ou aire) exprimé dans un système d'unité s'il était correct avec ce système. Si un résultat ne mentionnait aucune unité, nous l'avons encore considéré comme correct s'il était compatible avec un des deux systèmes possibles. Par exemple, à la figure 13.48, nous avons validé le résultat pour le périmètre qui est correct si on utilise le cm comme unité et nous n'avons pas validé le résultat pour l'aire qui ne correspond pas à un calcul dans le système ul – ua.

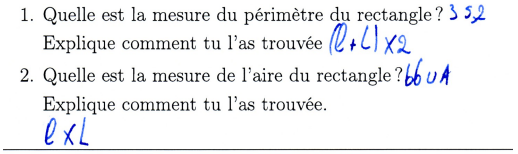


Fig. 13.48

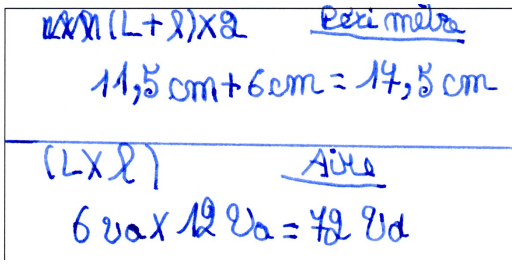


Fig. 13.49

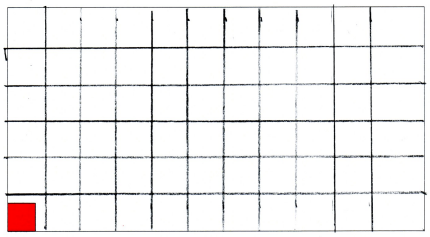


Fig. 13.50

Le tableau suivant indique pour cette catégorie d'élèves les différents taux de réponses et de justifications correctes (les taux sont relatifs au total de 20).

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
20 élèves qui mélangent ul/ua et cm/cm^2				
Périmètre	40 %	30 %	50 %	20 %
Aire	45 %	20 %	75 %	5 %

4. La dernière catégorie d'élèves par rapport à l'emploi des unités est constituée des soixante-trois élèves qui n'appartiennent à aucune des trois catégories précédentes. C'est donc celle dont les réponses ne permettent pas d'affirmer qu'ils ont utilisé des cm ou des cm^2. Cette catégorie est un peu fourre-tout. Elle contient par exemple les élèves qui ont remis des feuilles blanches et dont on ne peut par conséquent pas non plus affirmer qu'ils ont utilisé des ul !

   Voici le tableau de résultats les concernant (les taux sont relatifs au total de 63) :

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
63 autres élèves				
Périmètre	49 %	59 %	22 %	19 %
Aire	49 %	59 %	17 %	24 %

   On notera avec intérêt que malgré le caractère fourre-tout de cette catégorie d'élèves, ses résultats globaux sont meilleurs que ceux des trois premières catégories (pour faciliter les comparaisons, les différents tableaux ont été réunis en un seul, page 423).

   Cette catégorie étant constituée des élèves qui n'ont pas essayé d'utiliser les unités conventionnelles, on peut penser qu'ils ont pu transposer les principes qui gouvernent celles-ci à des unités autres, ce qui indique une meilleure compréhension des principes fondamentaux des mesures de grandeurs et pourrait (restons prudents) expliquer de meilleures performances.

La formulation inhabituelle de l'énoncé

Un des *leitmotive* de notre travail est la distinction des modes de raisonnement mis en œuvre en vue de déterminer la mesure d'une aire. Depuis le chapitre 5, nous distinguons un mode quantatif (atomisé ou global), essentiellement le dénombrement d'aires unités incluses à la forme géométrique considérée et le mode numérique, qui désigne l'emploi de formules.

Pour calculer le périmètre ou l'aire d'un rectangle avec des élèves de fin de cinquième primaire, on peut s'attendre à ce que le mode numérique domine. C'est effectivement ce mode que la plupart des élèves utilisent… mais cela n'est pas toujours aussi immédiat qu'on pourrait le croire.

L'emploi d'une unité inconnue, la formulation inhabituelle de l'énoncé sont autant de facteurs qui peuvent déstabiliser un élève dont les connaissances restent mal assurées et l'amener à revenir au mode de raisonnement quantitatif.

Par « formulation inhabituelle de l'énoncé », nous pensons à la phrase « On peut mettre 15 petits carrés sur la longueur du grand rectangle ou [2] 8 petits carrés sur sa largeur ». Une bonne maîtrise de l'emploi d'unités arbitraires (nous y revenons !) permet d'interpréter immédiatement cette phrase comme signifiant « la longueur du rectangle est de 15 ul et sa largeur de 8 ul ».

[2] Il eût mieux valu dire « et » !

Un élève qui n'a pas cette maîtrise n'interprète pas immédiatement la dite phrase de cette façon. Pour y voir clair, il entreprend de mettre effectivement quinze petits carrés sur la longueur, et huit sur la largeur. On trouve ainsi de nombreuses feuilles sur lesquelles figurent des graduations des côtés gauche et inférieur du rectangle.

Mais ce n'est pas chose facile que de « mettre » quinze petits carrés sur la longueur du grand rectangle. Certains — qui ont assimilé le changement d'unité — entreprennent de graduer « en ul » et suite aux imprécisions de leur tracé, liées au fait que leur latte est graduée en cm, constatent que leur dernier segment est plus petit que les autres (*Fig. 13.51*). Ce n'est pas très grave, mais cela n'empêche pas la confusion entre ul et cm. D'autres graduent en centimètres, et n'arrivent qu'à placer dix points de subdivision... (*Fig. 13.52*). Une autre difficulté provient de ce qu'un petit carré a déjà été dessiné. Que faut-il en faire ? (*Fig. 13.50*)

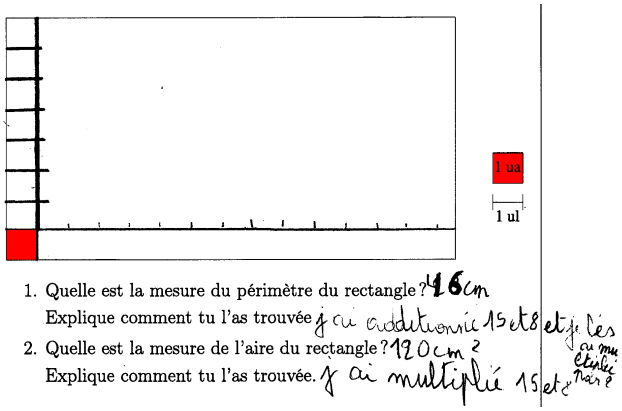


Fig. 13.51

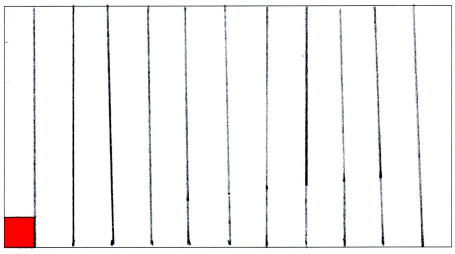


Fig. 13.52

Cinquante-et-un élèves vont plus loin en entreprenant de quadriller le rectangle. Quinze vont jusqu'au bout de ce travail. Et seulement sept réalisent un quadrillage de 8×15, ce qui n'entraîne pas nécessairement des réponses correctes (*Fig. 13.53*). Ceux qui graduent en cm arrivent à un quadrillage 6×11, ce qui explique certaines réponses 66 pour l'aire du rectangle.

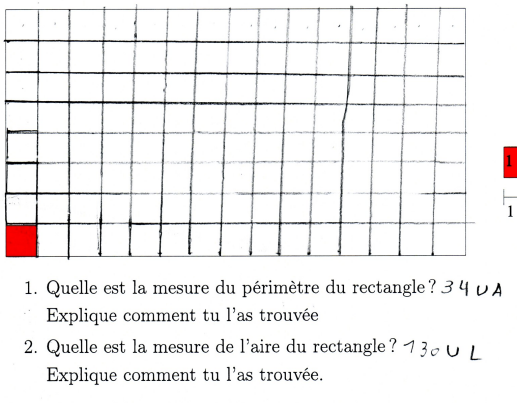


Fig. 13.53

Certains des quadrillages ainsi réalisés ne servent à rien : l'élève revient à l'application de la formule d'aire d'un rectangle en utilisant des mesures en cm (*Fig. 13.54*). D'autres quadrillages, ou ébauches de quadrillages, servent de support pour réaliser une multiplication. En quelque sorte, les élèves qui ont procédé de la sorte, ont réagi au problème constitué par l'emploi d'une unité nouvelle en reconstruisant la formule d'aire « longueur × largeur », affranchissant donc cette formule du contexte des mesures en centimètres.

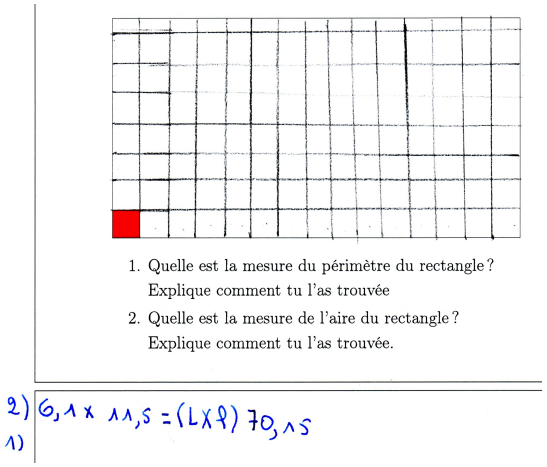


Fig. 13.54

Un seul élève (*Fig. 13.55*) a compté un à la fois les carreaux du quadrillage qu'il a construit, se plaçant ainsi dans le mode de raisonnement quantitatif atomisé. Encore l'a-t-il fait pour trouver le périmètre du rectangle ! Pour trouver l'aire, il a « fait × sur les deux côtés », se plaçant alors, comme les autres, en mode numérique.

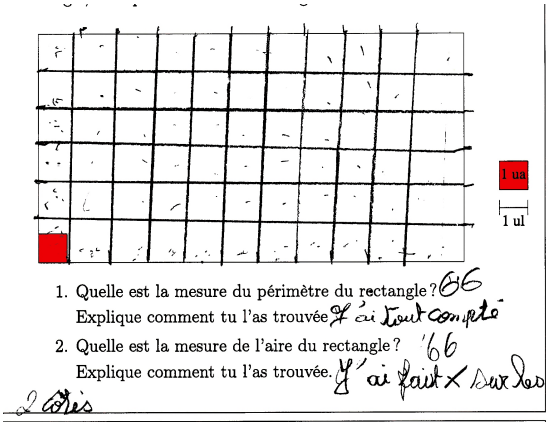


Fig. 13.55

Il n'est peut-être pas sans intérêt de comparer aux taux globaux les taux de réussite des cinquante-et-un élèves ayant ébauché un quadrillage. Rappelons que ce groupe d'élèves ne constitue pas une « cinquième catégorie ». Tous les élèves qui en font partie ont également été pris en compte pour le calcul des données relatives aux quatre catégories que nous avons constituée dans l'analyse de cet item.

Le tableau suivant reprend toutes les informations mentionnées précédemment, complétées par les informations relatives à cet ensemble d'élèves ayant ébauché un quadrillage.

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
Les 123 élèves				
Périmètre	47 %	45 %	37 %	18 %
Aire	51%	38 %	40 %	22 %
Première catégorie : 26 élèves qui ne tiennent aucun compte des ul et ua				
Périmètre	38 %	46 %	31 %	23 %
Aire	46 %	23 %	38 %	38 %
Deuxième catégorie : 14 élèves pour lesquels ul = 1 cm				
Périmètre	64 %	0 %	100 %	0 %
Aire	79 %	0 %	93 %	7 %
Troisième catégorie : 20 élèves qui mélangent ul/ua et cm/cm^2				
Périmètre	40 %	30 %	50 %	20 %
Aire	45 %	20 %	75 %	5 %
Quatrième catégorie : 63 autres élèves				
Périmètre	49 %	59 %	22 %	19 %
Aire	49 %	59 %	17 %	24 %
51 élèves qui ébauchent un quadrillage				
Périmètre	31 %	35 %	37 %	27 %
Aire	41 %	31 %	43 %	25 %

Comme on l'a déjà remarqué, le sous-groupe ayant le plus fort taux de réussite est celui constitué des soixante-trois élèves qui ont travaillé sans utiliser aucunement les cm et cm^2. 59% des membres de ce groupe ont transposé au contexte ul/ua les compétences acquises dans le contexte métrique.

13.3 Des comportements de réussite ou d'échec

Passons à présent aux comportements d'échec et de réussite détectés par l'analyse implicative (*section B.6*) et qui interviennent donc de façon significative dans des relations d'implication avec d'autres comportements. Nous ne nous attardons que sur les méthodes de résolution, et non sur la production d'un résultat, correct ou incorrect.

13.3.1 Des comportements d'échec

Ces comportements ne sont pas très nombreux. On citera en tête le comportement *quantitatif atomisé*, qui consiste à l'item 3 à dénombrer tous les petits carrés jaunes un à la fois et que l'on retrouve également chez un élève à l'item 5.

Cet item 5, qui apparaît comme le plus difficile du post-test est l'occasion de constater l'existence de comportements d'échec non encore rencontrés auparavant et dûs à la difficulté de maîtriser l'emploi d'une unité de longueur non conventionnelle. Il s'agit soit de la confusion entre ul et cm, soit même du mélange de ces unités, ce qui va jusqu'à entraîner des additions du style « pommes-poires ».

Par ailleurs, la difficulté de cet item, qui réside principalement dans la compréhension de son énoncé, amène certains élèves à recourir à des comportements d'échec qu'ils n'utilisent plus dans des situations plus simples. C'est ainsi que la confusion entre périmètre et aire

refait surface à l'item 5 (pour un rectangle), chez 15 % des élèves, alors qu'à l'item 1, ce type d'erreur (pour un triangle) n'était plus assez fréquent pour que l'on puisse affirmer qu'il entraîne significativement l'échec. Par contre, la confusion entre aire et périmètre est significativement présente à l'item 4. Cette fois, il s'agissait de comparer les aires d'un hexagone et d'un parallélogramme. Pour les élèves qui ne perçoivent pas le découpage en triangles ou en parallélogrammes, la situation était sans doute complexe. Les découpages autres qu'en parallélogrammes ou en triangles mènent aussi plutôt à l'échec.

Ces constatations ne font qu'illustrer un fait bien connu, à savoir que le type d'erreur commise par les élèves dépend non seulement de leurs connaissances, mais aussi de la complexité du problème traité. Tant que le phénomène se produit, on doit parler d'une instabilité des acquis.

Une dernière observation : si, jusqu'à un certain point, on peut admettre les imprécisions de mesure, il n'en est pas de même pour les erreurs de comptage ou de calcul, surtout dans un item comme l'item 3. Dans ce cas, ces erreurs ont aussi entraîné l'échec de façon significative.

13.3.2 Des comportements de réussite

Mesurer des côtés à la latte pour évaluer le périmètre, utiliser le mode quantitatif en dessinant un quadrillage et évaluer l'aire par dénombrement des carrés, compléter le triangle en un rectangle et diviser l'aire de celui-ci par 2 constituent autant de comportements de réussite à l'item 1.

À l'item 2, le seul comportement de réussite qui ait été significativement utilisé est celui qui consiste à couper un morceau de triangle et reconstituer ainsi un carré.

À l'item 3, seule la reconstitution du grand carré, suivie de la soustraction du nombre de carrés manquants est classée par l'analyse implicative parmi les comportements de réussite.

Nous l'avons déjà mentionné plus haut : à l'item 4 ce sont les découpages en triangles isométriques ou en parallélogrammes qui permettent de façon significative d'arriver à la réponse correcte.

Enfin, à l'item 5, la réussite résulte de l'emploi des formules usuelles de calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, ce qui est normal dès lors que l'élève se rend compte qu'il connait les mesures des côtés.

On notera encore que les démarches qui viennent d'être énumérées relèvent de différentes activités mentales et intellectuelles : mesurer, calculer, appliquer une formule, dessiner, dénombrer, découper, percevoir, c'est une éventail très large de compétences qui devaient être mises en œuvre dans ce test.

13.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre*

Pour commencer, rappelons que si nous comparons les résultats du groupe témoin et ceux du groupe expérimental, c'est d'abord pour évaluer l'impact du logiciel *Apprenti Géomètre*, c'est-à-dire quels comportements de l'élève sont susceptibles d'être modifiés du fait de son emploi. Les tableaux de réussite ne constituent donc pour nous qu'un point de départ.

Voici le tableau des réussites pour le post-test :

	Item 1 Périmètre	Item 1 Aire	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5 Périmètre	Item 5 Aire
Gr. témoin	86 %	70 %	95 %	61 %	61 %	46%	46 %
Gr. expé.	73 %	40 %	90 %	43 %	57 %	43 %	31 %
χ^2	2,9	10,6	1,06	3,71	0,2	0,12	2,94

Les taux de réussite du groupe témoin restent supérieurs à ceux du groupe expérimental. Toutefois les écarts semblent diminuer, ce qui se concrétise par la présence de valeurs inférieures à 1 dans la ligne des χ^2. Par ailleurs, on ne trouve de différence significative que dans une seule colonne.

Considérons les comportements que l'analyse implicative a placé aux sources du graphe des comportements de réusite :

C1 : Mesurer les côtés (item 1).

C2 : Dessiner un quadrillage et compter (item 1)

C3 : Calcul de l'aire du rectangle, puis division par 2 (item 1).

C4 : Découpage d'un triangle (item 2).

C5 : Reconstitution du grand carré, puis soustraction des carrés manquants (item 3).

C6 : Découpage en triangles puis comptage (item 4).

C7 : Découpage en parallélogrammes, puis comptage (item 4).

C8 : Valeur correcte pour l'aire (item 5).

C9 : Bonne formule pour le périmètre (item 5).

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
Gr. témoin	25 %	34 %	9%	71%	45%	57%	23%	46 %	25%
Gr. expé.	34 %	31 %	12 %	73%	25%	18 %	25%	31 %	33%
χ^2	1,26	2,55	0,29	0,04	5,04	20,4	0,08	2,94	0,9

Aux colonnes 1, 3, 4, 7 et 9 on constate que le groupe expérimental a des pourcentages supérieurs à ceux du groupe témoin, mais aucune des différences n'est significative au seuil 0,95. Seules les colonnes 5 et 6 présentent des différences significatives, en faveur du groupe témoin.

On note au passage qu'à l'item 5, les élèves du groupe témoin préfèrent découper l'hexagone en triangles, alors que ceux du groupe expérimental préfèrent (de peu) découper en

parallélogrammes. Cela ne peut résulter que d'une différence de perception, peut-être plus globale dans le groupe expérimental.

Si on considère l'ensemble des comportements de réussite considérés comme significatifs par l'analyse implicative (*voir l'annexe B.6*), on constate que les élèves du groupe témoin ont des taux significativement plus élevés que ceux du groupe expérimental aux comportements suivants :

- Item 1
  - Valeur correcte pour l'aire.
- Item 3
  - Reconstitution du grand carré, puis soustraction (correcte) des carrés manquants.
- Item 4
  - Dessiner des triangles isométriques.
- Item 5
  - Utiliser une bonne formule pour l'aire.

Dans l'autre sens, les élèves du groupe expérimental ont un taux significativement plus élevé que ceux du groupe témoin pour le dessin de trapèzes à l'item 4. Il vaut la peine de signaler qu'ils ont un taux plus élevé (mais pas significativement) pour le prolongement du triangle en un rectangle à l'item 1 car il s'agit là d'une perception « en dehors » de la figure donnée.

En conclusion

La situation semble en pleine évolution et l'usage d'un logiciel n'est qu'un élément parmi d'autres au cours de cette évolution. Le nombre de comportements de réussite pour lesquels le groupe témoin a obtenu des résultats significativement meilleurs que le groupe expérimental est plus important au pré-test qu'au post-test. Ceci indique une tendance du groupe expérimental à se rapprocher du groupe témoin. Mais il n'est pas possible de détecter un domaine dans lequel le phénomène soit net.

Après l'expérience réalisée en sixième en 2005–2006, il apparaissait comme possible que les élèves du groupe expérimental aient acquis une meilleure perception globale et comme quasi-certain qu'ils étaient devenus plus performants que ceux du groupe témoin en ce qui concerne l'assemblage de formes géométriques.

On n'oserait affirmer la même chose après l'expérience réalisée en cinquième, car les résultats du post-test semblent parfois contradictoires. En ce qui concerne le phénomène de perception, par exemple, on voit le groupe témoin plus performant que le groupe expérimental à l'item 3 (reconstitution du grand carré). Par contre, à l'item 1, le groupe expérimental prend le dessus dans le calcul de l'aire du triangle par complétion préalable en un rectangle (bien que la différence ne soit pas significative) et à l'item 4, il dessine plus facilement le trapèze. Sans doute, d'un item à l'autre les contextes sont-ils différents, ce qui peut influencer les résultats.

Si le groupe expérimental a effectivement tendance à se rapprocher du groupe témoin, sans que cela soit plus marqué dans un domaine que dans un autre, c'est qu'il s'agit d'une attitude générale lorsque l'élève se trouve confronté à une résolution de problème. Et nous pouvons rapprocher cela du commentaire d'une des institutrices ayant participé à l'expérience, commentaire déjà rapporté dans l'introduction à ce travail :

> *Ce qui est pratique avec l'informatique c'est que les enfants devaient mieux se représenter au départ ce qu'ils voulaient réaliser parce que sinon ils étaient piégés, à la limite quand ils peuvent disposer de matériel qu'ils peuvent manipuler, ils vont chipoter. Tandis qu'avec l'ordinateur, ils ont tout intérêt s'ils veulent être efficaces rapidement à imaginer là où ils veulent aller !... bien se représenter et réfléchir avant d'agir. Ils pourraient chipoter aussi avec l'informatique mais en règle générale ils ne le font pas, car ils se rendent compte qu'ils sont vite piégés !*

Nous nous garderons toutefois de tirer des conclusions définitives.

Chapitre 14

Un pré-test en première secondaire (2006–2007)

14.1 Les objectifs des pré- et post-tests

Les questions relatives aux grandeurs géométriques et à leur mesure figurent parmi les compétences qui doivent être certifiées à 12 ans et entretenues jusqu'à 14 ans. Le pré-test réalisé en première secondaire avait en conséquence un double objectif : évaluer la maîtrise des compétences relatives aux grandeurs géométriques à la sortie de l'école primaire et, par comparaison avec les résultats du post-test, juger de l'impact d'*Apprenti Géomètre*.

Les résultats présentés ci-dessous montrent que l'acquisition des compétences considérées n'est pas effective chez un grand nombre d'élèves. Comme nous le verrons, une des raisons de cette déficience réside dans la difficulté qu'éprouvent beaucoup d'entre eux à distinguer des formes géométriques peu usuelles, et cela qu'elles soient en situation de superposition ou de juxtaposition. Les élèves souffrent également de difficultés d'expression qui peuvent entraver leur réflexion.

La maîtrise des grandeurs géométriques au début de la première année du secondaire est faible. C'est d'autant plus préoccupant que le professeur de mathématique de cette année d'études n'est pas en mesure d'accorder une place très importante à un sujet qui est seulement considéré comme étant à *entretenir*...

14.2 Les énoncés

Le pré-test comprend six items. Il a été utilisé dans huit classes de première secondaire : deux du Collège Saint-Marie à Rêves, une de l'Institut Sainte-Marie à La Louvière, deux de l'Institut Saint-Joseph à La Louvière, deux de l'Athénée Royal Lucie Dejardin à Seraing, et une de l'Athénée Royal d'Auderghem. Dans chaque classe, les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Au total, 167 élèves ont participé à ce test.

– Item 1

Défi 1 – Que dois-tu connaître pour répondre aux questions suivantes ?

	une longueur	une aire	un volume	un poids	un temps
Mon ami(e) habite deux rues plus loin. A quelle distance se trouve sa maison ?					
Je dois acheter du sable pour remplir le grand trou qui est dans le jardin. Quelle quantité faut-il ?					
Je veux recouvrir le sol de ma chambre avec du parquet. Quelle quantité de parquet dois-je acheter ?					
Je vais entourer mon jardin d'une clôture en treillis. De quelle quantité de treillis ai-je besoin ?					
Je veux repeindre les murs de mon salon. De quelle quantité de peinture ai-je besoin ?					

Peux-tu répondre aux questions suivantes :

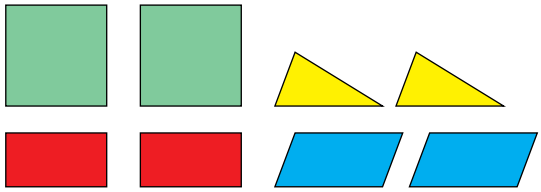
- Qu'est-ce qu'un périmètre ?
- Comment calculerais-tu un périmètre ?
- Qu'est-ce qu'une aire ?
- Comment calculerais-tu une aire ?

– Item 2

Défi 2 – Découpe les formes dessinées sur la feuille. Il y a deux parallélogrammes, deux triangles, deux rectangles et deux carrés.
Ensuite place les formes sur les deux bandes dessinées ci-dessous. Tu dois pour cela respecter deux règles :

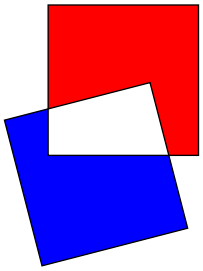
– tu ne peux pas mettre deux formes identiques sur la même bande,
– chaque forme doit avoir deux côtés posés sur chacun des bords de la bande (ou un côté et un sommet dans le cas du triangle).

Voici les formes que tu dois découper.



– Item 3

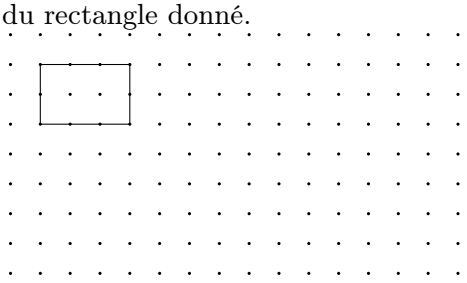
Défi 3 – Les carrés sont de même dimension. Comment est la zone bleue par rapport à la rouge ?
a) Elle est plus grande.
b) Elle est égale.
c) Elle est plus petite.



Explique ton raisonnement.

– Item 4

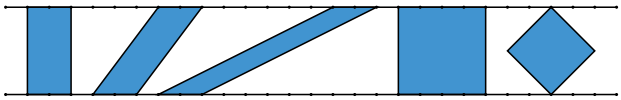
Défi 4 – Dessine un rectangle dont les côtés ont une mesure égale à trois fois celle des côtés du rectangle donné.



À combien de fois l'aire du petit rectangle est égale l'aire du grand rectangle (celui que tu as dessiné) ?
Et inversément : quelle partie de l'aire du grand rectangle représenté est égale au petit rectangle ?
Explique tes différents raisonnements.

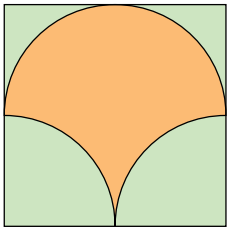
– Item 5

Défi 5 – En comparant les aires des figures suivantes, tu verras qu'il y a un intrus. Quel est cet intrus ?
Justifie ta réponse en expliquant ton raisonnement.



– Item 6

Défi 6 – Si l'aire du carré vaut 1, que vaut l'aire de la zone orange ?



Explique ton raisonnement.

14.3 Analyse des items

14.3.1 Item 1

La première partie de cet item comportait cinq questions également posées dans le pré-test de cinquième primaire. Les réponses attendues étaient donc les mêmes :

- Question 1 : longueur,
- Question 2 : volume,
- Question 3 : aire,
- Question 4 : longueur,
- Question 5 : aire.

De plus, les remarques faites au début de la section 12.3.1 restent valables. La réponse « un poids » a donc été admise à la question 2. Elle est fournie par 70 élèves (42%). De même les réponses « un volume » (28,5% des élèves) et « un poids » (25,7%) ont été admises à la question 5. De son côté, la réponse « une aire » à cette question est le fait de 39 % des élèves.

Même si aucun élève n'échoue à l'ensemble des questions, le score de réussite est faible : 26% des élèves ont réussi, 72% ont au moins une erreur. Parmi ceux-ci, 43% confondent longueur et aire, 22% confondent aire et volume, 19% confondent longueur et volume. La confusion « longueur et aire » s'observe principalement dans la question 4. Il en va de même pour la confusion « longueur et volume ».

Notons encore que six élèves ont répondu « un temps » à la première question, ce qui peut se comprendre, et que neuf ont fourni cette réponse à une des questions 3 à 5, ce qui est plus difficile à comprendre.

La seconde partie de l'item 1 cherchait à préciser quelle conception les élèves ont de ce que sont une périmètre et une aire.

Des deux questions « Qu'est-ce qu'un périmètre ? » et « Qu'est-ce qu'une aire ? », nous attendions qu'elles nous renseignent sur ce que ces mots représentent pour les élèves. Il n'était donc pas question de vérifier la correction de « définitions » que nous savons difficiles à rédiger. C'est particulièrement vrai pour le mot « aire » dont nous avons déjà souligné que c'est un terme primitif (*voir la section 5.2*).

En adjoignant les questions « Comment calculerais-tu un périmètre ? » et « Comment calculerais-tu une aire ? » aux deux précédentes, nous voulions inciter l'élève à séparer dans son discours les aspects procéduraux des aspects conceptuels. En effet, si la notion de *mesure* est une composante essentielle des concepts d'aire et de périmètre (*voir le chapitre 6*), la façon de déterminer cette mesure est une question de procédure qui peut varier d'une forme géométrique à une autre. Un nombre important d'élèves ne réalisent pas encore cette distinction.

Pour la clarté de ce compte-rendu, nous séparons les résultats observés relativement aux deux questions portant sur les calculs de ceux qui concernent la signification des mots « périmètre » et « aire ».

En ce qui concerne les questions relatives aux calculs, nous avons distingué les réponses

relativement générales de celles qui ne sont valables que pour une forme particulière spécifiée dans la réponse. Une formule de calcul telle que *Côté+Coté+...* a été considérée comme générale car les différents mots *Côté* peuvent désigner des côtés différents. Par contre *Côté*×4 a été considéré comme particulier.

De la même manière, en ce qui concerne le calcul de l'aire, les formules du carré ou du rectangle n'ont pas été considérées comme généralisables. Par contre, la réponse « avec une formule » a été jugée telle malgré — et peut-être à cause de — son imprécision.

Nous avons néanmoins relevé les élèves qui donnaient comme exemples les formules du carré ou du rectangle.

35,9% des élèves donnent une méthode de calcul suffisamment générale pour le périmètre mais seulement 9,58% pour l'aire. Cela est notamment dû au fait qu'environ la moitié des élèves (52%) se contentent d'exemples (formules du carré ou du rectangle). De plus, 12% d'entre eux confondent les formules du périmètre et de l'aire.

En ce qui concerne la signification du mot « périmètre », nous constatons que 57% des élèves associent ce mot, de l'une ou l'autre façon, à celui de « contour » *sans aucune mention de mesure*, cependant que 22% incorporent cette idée de mesure à leur explication.

Le statut du mot *aire* est plus flou encore : 23 % des élèves l'associent à l'*intérieur* de « quelque chose », 33% au mot *surface* et seulement 13% lui attribuent un sens de *mesure*, généralement en présentant l'aire comme le résultat d'un calcul.

Les citations suivantes illustrent différentes réponses, certaines fréquentes, d'autres moins.

– **Qu'est-ce qu'un périmètre ?**

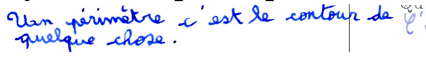


Fig. 14.1

Fig. 14.2

Fig. 14.3

Fig. 14.4

Fig. 14.5

Fig. 14.6

– **Qu'est-ce qu'une aire ?**

Fig. 14.7

Fig. 14.8

Fig. 14.9

Fig. 14.10

Fig. 14.11

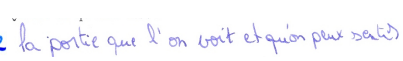


Fig. 14.12

Il est aussi à noter qu'environ 9% des élèves ne répondent pas du tout à cette seconde partie de l'item 1.

14.3.2 Item 2

Cet item comportait un piège : l'impossibilité de disposer un carré entre les bords de la première bande. 45% des élèves sont tombés dans ce piège et ont placé un carré sur cette bande. En général, ils ont simplement laissé le carré déborder, sans respecter la deuxième

règle (*Fig. 14.13*). Certains ont fait preuve d'ingéniosité, par exemple en pliant le carré (*Fig. 14.14*).

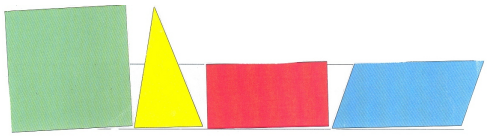


Fig. 14.13

Fig. 14.14

Seulement 28% des élèves ont évité le piège et placé correctement dans les deux bandes les sept formes qu'il était possible de placer. Oublions le piège : 48% des élèves placent correctement les sept formes.

TOUS les élèves ont placé correctement un carré dans la bande inférieure (la plus large). À l'opposé, c'est le triangle qui a provoqué le plus de problèmes : si 85% en placent correctement un exemplaire dans la bande la plus large, seuls 65% en font autant dans la bande la plus étroite. Dans ce cas, la consigne a été moins facile à appliquer, ou plus facile à oublier. Cependant, il fallait faire tourner le triangle pour le placer dans la bande la plus large et non dans l'autre.

Fig. 14.15

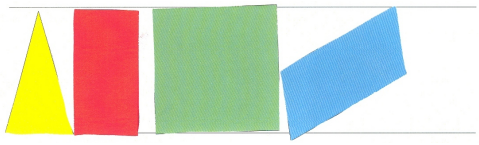


Fig. 14.16

Les deux parallélogrammes étaient plus faciles à positionner : 95% de placements acceptables dans la bande la plus étroite, 78% dans l'autre. Cette fois, c'est bien le cas qui nécessitait de faire tourner la forme qui a été moins bien réussi.

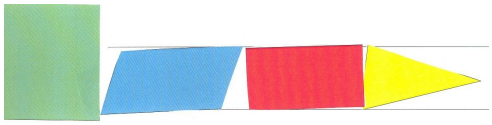


Fig. 14.17

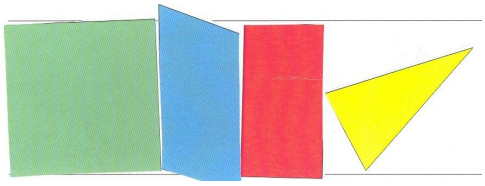


Fig. 14.18

Enfin, les deux rectangles ont été généralement bien placés : 95% dans la bande la plus étroite, 90% dans la bande la plus large (qui nécessitait de faire tourner le rectangle).

On retiendra surtout de cet item que certains élèves étaient au moment du test assez malhabiles dans la manipulation des formes, mais aussi que, même en ne tenant pas compte du piège constitué par le carré, la moitié d'entre eux (52%) commettent au moins une erreur de positionnement. Nous rencontrerons à nouveau ce type d'erreur à l'item 5.

14.3.3 Item 3

Nous avons mentionné au chapitre 6 que le concept d'*égalité d'aires* précède le concept d'*aire* lui-même. L'item 3 vient donc à son heure : les élèves sont-ils en mesure de constater

que les deux zones bleue et rouge ont même aire, et surtout d'expliquer pourquoi ?

Force est de constater que si 69% des élèves affirment l'égalité des deux aires, 15% seulement sont en mesure de fournir une justification complète et correcte. Il s'agissait évidemment de percevoir que les deux zones, rouge et bleue, avaient même complémentaire par rapport à des carrés de même taille. Il y avait donc deux informations à fournir. 14% des élèves ne fournissent qu'une des deux informations, ce qui porte quand même à près de 30% le taux de réponse ne comportant pas d'erreurs.

Fig. 14.19

Une des erreurs consiste à comparer les deux carrés plutôt que les deux zones coloriées. Les deux carrés sont alors parfois perçus, l'un comme complètement rouge, l'autre comme complètement bleu, la partie blanche commune étant dans ce cas « à la fois bleue et rouge » (*Fig. 14.20*). L'élève résout dans ce cas un problème tout différent !

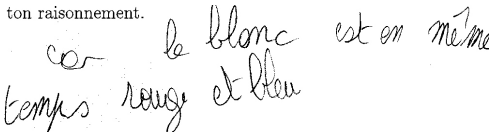


Fig. 14.20

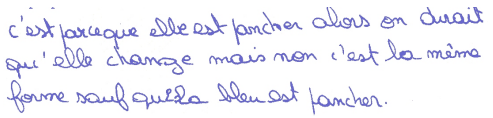


Fig. 14.21

Les deux seules formes dont on puisse dire qu'elles sont « les mêmes », sauf que l'une est penchée, sont les deux carrés (*Fig. 14.21*).

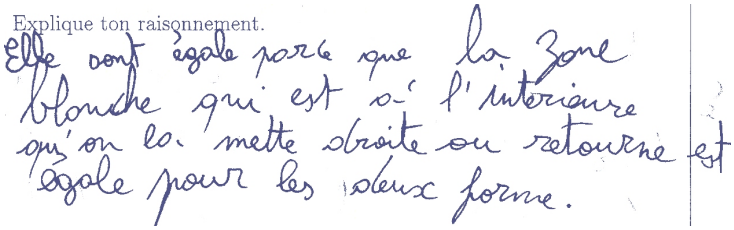


Fig. 14.22

Même chez certains élèves dont le raisonnement est fondamentalement correct, on peut repérer une tendance à assimiler les zones bleue et rouge aux carrés : l'auteur du raisonnement de la figure 14.22 considère la zone blanche comme intérieure aux deux autres formes. Celles-ci sont donc les deux carrés. Les zones bleue et rouge sont des formes géométriques irrégulières et peu familières. L'élève « se raccroche » aux carrés.

Les erreurs « classiques », confusion longueur – aire ou périmètre – aire, sont bien entendu présentes. Elles sont le fait d'environ 10% des élèves.

Signalons encore que 13% des élèves ne produisent aucune justification et que 13% (également) utilisent des méthodes variées.

On peut, *in fine*, considérer que cet item met en évidence des problèmes de perception dès lors qu'apparaissent des formes géométriques irrégulières. La variété des méthodes utilisées et le taux de non-justification sont significatifs de ce que cette question a pris de nombreux élèves au dépourvu.

14.3.4 Item 4

49% des élèves seulement ont réalisé avec exactitude le grand rectangle attendu. Un quart d'entre eux reproduisent correctement un ou plusieurs petits rectangles à l'intérieur (*Fig. 14.23*). Seuls deux élèves reproduisent, une ou plusieurs fois, le rectangle donné de manière non conforme. (*Fig. 14.24*).

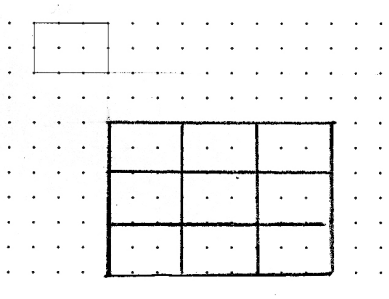


Fig. 14.23

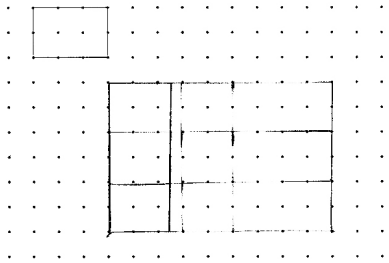


Fig. 14.24

La moitié des erreurs sont dues à une « perturbation par le quadrillage ». La présence de celui-ci a amené beaucoup d'élèves à ne rien mesurer, mais à compter le nombre de points situés sur les côtés du petit rectangle. Ils ont alors tout simplement multiplié les deux résultats par 3 et ont dessiné un rectangle de 12 points sur 9 ! On trouve ainsi une nouvelle version du vieux problème des piquets de clôture !

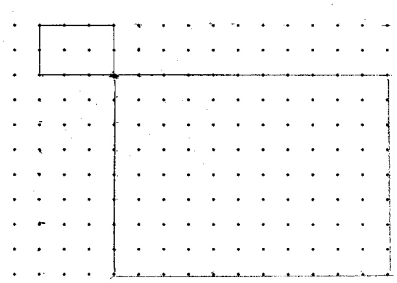


Fig. 14.25

Les deux questions subsidiaires ont été mal comprises. Le fait de bien répondre à la première n'implique pas que la réponse à la deuxième soit correcte : 26% ont bien répondu à la première, et 13% à la seconde. Un problème de fraction ?

Un nombre non négligeable d'élèves (31%) ne répondent ni à l'une ni à l'autre des deux questions et 21% des élèves ne répondent qu'à une des deux. Peut-être les questions ont-elles été mal comprises.

Beaucoup d'échecs à ces deux questions sont dûs à l'application aux aires des rectangles du même rapport que pour les périmètres (*Fig. 14.26*). Pour les 16% d'élèves qui commettent cette erreur, la phrase « ce rectangle-ci est trois fois plus grand que celui-là » n'est pas claire : ils ne peuvent déduire du contexte s'il est question des longueurs ou des aires.

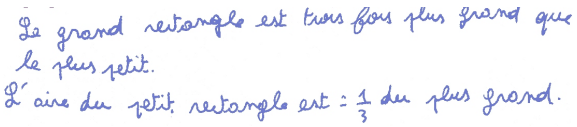


Fig. 14.26

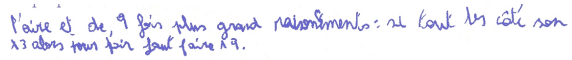


Fig. 14.27

Seuls quelques élèves (5%) adoptent un raisonnement adéquat. Un élève écrit (*Fig. 14.27*) : *si tout les côté sont* $\times 3$ *alors pour lair faut faire* $\times 9$.

14.3.5 Item 5

L'énoncé de cette question était tout à fait clair : *en comparant les aires, trouver l'intrus.* Des cinq formes présentées, quatre étaient d'aire 2, la cinquième (le carré placé en position « standard ») était d'aire 4. De plus, les graduations placées sur les bords de la bande permettaient des comparaisons faciles.

Mais une question de ce genre donne souvent lieu à une réaction immédiate, tenant compte de l'information visuelle plus que de celles fournies par l'énoncé. Il ne faut donc pas trop s'étonner de ce qu'on ne rencontre des comparaisons d'aires que sur 23% des copies. Il ne faut pas s'étonner non plus de ce que les réponses les plus fréquentes soient les suivantes :

1. La forme n°5 (le « carré sur pointe ») (32%).
2. La forme n°4 (la bonne réponse) (26%).

Examinons ces deux réponses dans l'ordre.

Le carré sur pointe

Les différences de cette forme avec les autres sont repérées immédiatement. On trouve sur les feuilles essentiellement quatre types d'arguments (vrais ou faux, cohérents ou non) pour expliquer que le carré sur pointe est l'intrus.

- Une différence de forme :

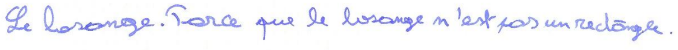


Fig. 14.28

- Une différence d'orientation :

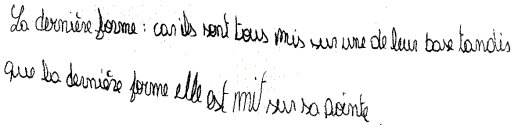


Fig. 14.29

Fig. 14.30

- Une différence de positionnement par rapport à la bande :

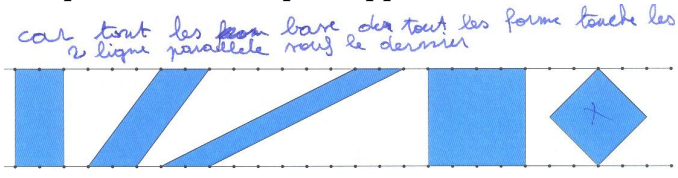


Fig. 14.31

- Une différence de taille :

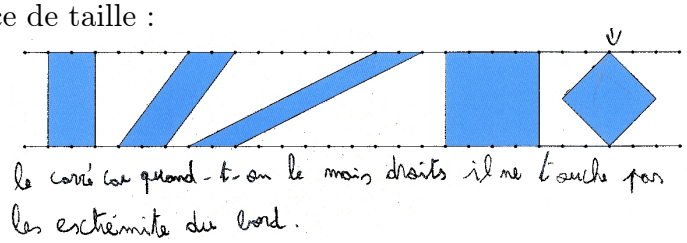


Fig. 14.32

Parfois la justification est tout à fait inattendue :

Fig. 14.33

La forme n°4

C'est la bonne réponse. Nous avons considéré une justification comme correcte dès qu'elle se réfère à une comparaison d'aires, même sans détailler le calcul de celles-ci. Nous n'en avons trouvé que 8 (5% des élèves) !

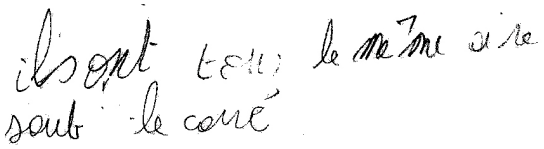


Fig. 14.34

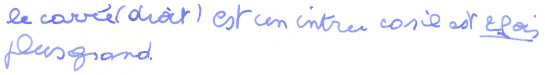


Fig. 14.35

D'autres justifications (erronées partiellement ou totalement) reposent

- sur la mesure des côtés horizontaux, souvent exprimée en « points », ce qui nous ramène au problème des « piquets de clôture » ;

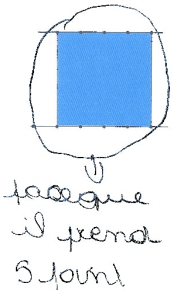


Fig. 14.36

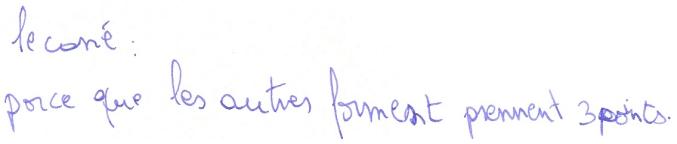


Fig. 14.37

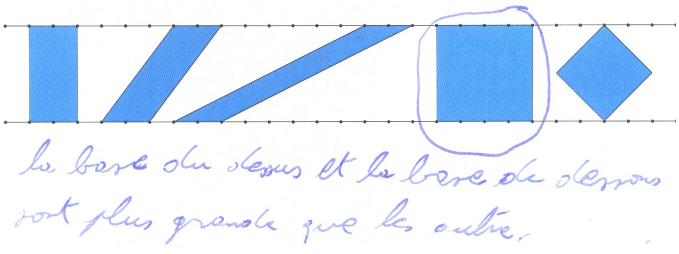


Fig. 14.38

- sur la comparaison d'aires fausses ;

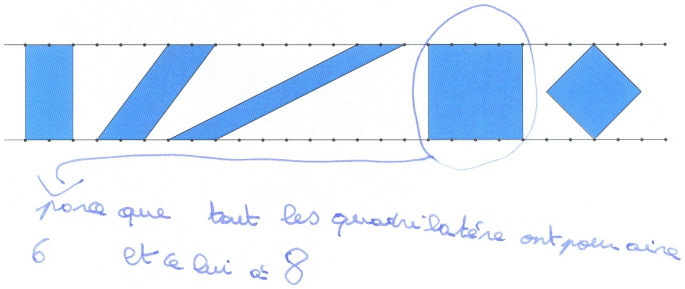


Fig. 14.39

- sur le fait que tous les côtés ont même longueur ;

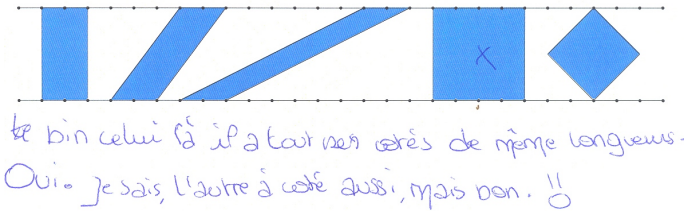


Fig. 14.40

La forme n°3, a également été sélectionnée comme « intrus », mais moins fréquemment. Les justifications la concernant sont variées.

Fig. 14.41

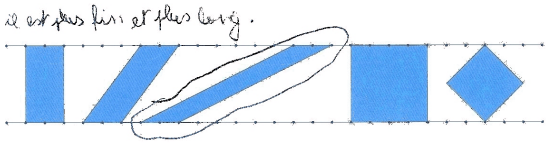


Fig. 14.42

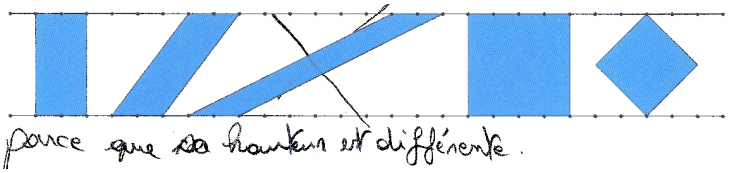
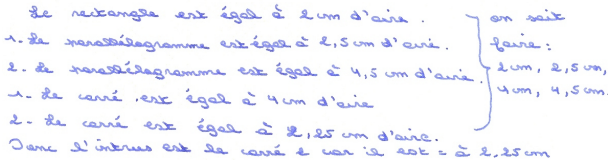


Fig. 14.43

On trouve encore d'autres types de justification : des calculs d'aires, des comparaisons de formules...



L'aire d'un parallélogramme et ici obtenue en multipliant les longueurs des deux côtés.

Fig. 14.44

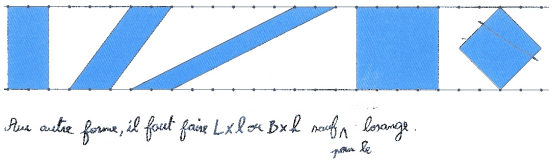


Fig. 14.45

Notons aussi que 22% des élèves n'ont pas répondu à cette question.

En observant la variété des démarches des élèves dans le cadre de cette question, on ne peut se départir de l'impression que beaucoup d'entre eux n'ont pas su comment aborder

la résolution. Certains expriment leur perplexité ouvertement (*Fig. 14.40*). D'autres sélectionnent non UN intrus mais DEUX (*Fig. 14.46*). Par ailleurs, les arguments basés sur l'orientation ou le positionnement des différentes formes montrent que celles-ci ne sont pas considérées en tant que formes géométriques, mais en tant que dessins sur une feuille de papier. Tout cela est pour nous une indication de ce que les connaissances des élèves sont instables. Il suffit alors d'une petite perturbation — en l'occurrence un exercice de type peu usuel — pour provoquer un déséquilibre et faire réapparaître des comportements d'erreur que l'on pouvait croire dépassés. Un tel phénomène de *régression* n'est pas rare.

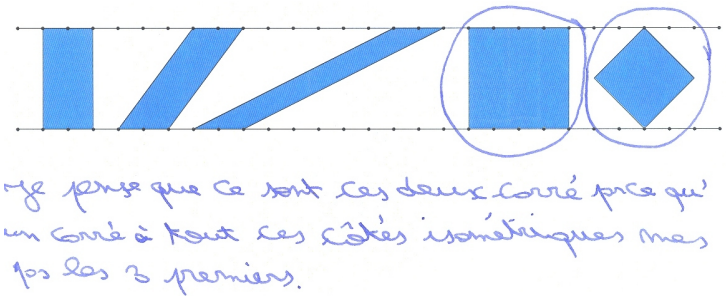


Fig. 14.46

14.3.6 Item 6

Ce dernier item du prétest proposait aux élèves une forme inhabituelle, mais dont le découpage ne présentait pas de grosses difficultés. De plus, la question était d'un type connu : calculer une aire. Les résultats sont en conséquence meilleurs que pour la question précédente le taux de réponses correctes est de 39,5% et le taux de réponses correctes accompagnées de justifications acceptables est de 24%.

On ne peut cependant être vraiment satisfait : 39% des élèves s'abstiennent totalement de répondre. Ont-ils été quand même déconcertés par la figure ou, tout simplement, dans certaines classes, les élèves n'ont-ils pas eu le temps d'achever le test ? On pourrait le croire car le taux de non-réponse à cette dernière question varie, selon la classe, entre 0% et 76%. Dans certaines circonstances, une heure de cours dans le secondaire peut facilement être amputée de 10 minutes ! Cette remarque vient à point nommé pour nous rappeler la prudence qu'il convient toujours d'observer au moment où on tire les conclusions d'une recherche.

La méthode de résolution la plus fréquente est la méthode par découpage et recomposition. Elle est utilisée par 36,5% des élèves. En particulier TOUS les élèves qui ont produit une justification acceptable ont employé cette méthode. Certains élèves représentent le découpage sur la feuille, en s'aidant parfois du tracé des médianes du carré, (*Fig. 14.47*). D'autres effectuent le découpage mentalement (*Figures 14.49 et 14.50*).

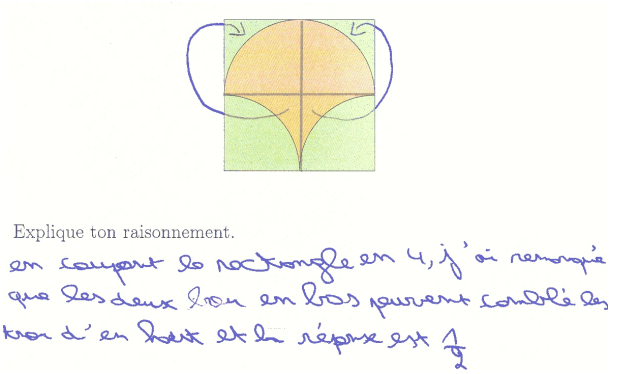


Fig. 14.47

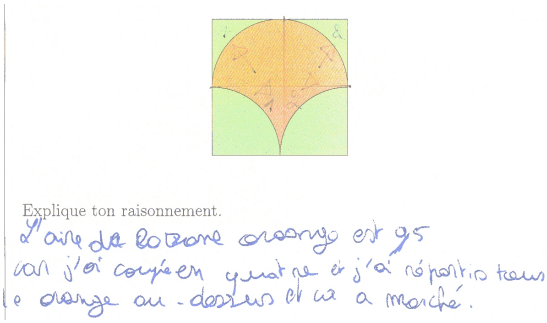


Fig. 14.48

Certains élèves appliquent la méthode par découpage correctement, en arrivant à la conclusion $\frac{1}{2}$ mais écrivent la réponse 1 sur leur feuille. Cette réponse, due à 8% des élèves, n'est pas aussi aberrante que l'on pourrait croire *a priori*. Les figures suivantes extraites de feuilles qui mentionnent toutes deux 1 comme réponse, montrent la confusion faite par l'élève : il constate que la zone orange a la même aire que la zone verte et prend celle-ci comme unité d'aire au lieu de prendre le carré.

Fig. 14.49

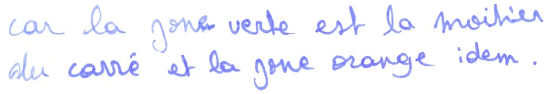


Fig. 14.50

Les autres démarches inadéquates ne sont guère fréquentes, aussi ne nous y attarderons-nous guère. Quatre élèves mesurent des longueurs et un élève calcule un périmètre. Cinq élèves appliquent des formules de calcul d'aire.

À titre anecdotique, mentionnons trois « justifications » inattendues.

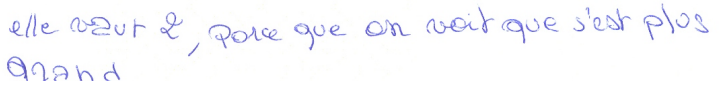


Fig. 14.51

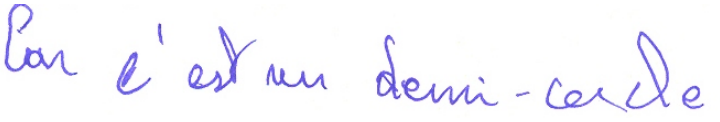


Fig. 14.52

Fig. 14.53

14.4 Des comportements de réussite ou d'échec

14.4.1 Des comportements d'échec

Nous nous intéressons surtout aux comportements qui trahissent la présence de conceptions imparfaites ou fausses ou encore des erreurs de procédure. Nous laissons donc de

côté les comportements qui se limitent à la production d'une mauvaise réponse ou d'une justification erronée, et qui ne sont en fait que des conséquences des précédents.

L'analyse statistique implicative nous a permis de dégager un certain nombre de comportements d'échec à ce pré-test (*section B.7.3*). Ces comportements sont en général isolés, en ce sens qu'ils se rapportent à un seul des items du test. Ceci nous amène à penser que les contextes des activités interviennent pour beaucoup dans la détermination des comportements des élèves.

Par exemple, le contexte « quotidien » de l'item 1, confère peut-être aux mots « longueur », « aire », « volume » une souplesse d'emploi qui ne correspond pas au sens mathématique. On constate ainsi à cet item une confusion entre longueur et aire qui n'intervient plus de façon importante dans les autres items. Le même item 1 montre d'ailleurs bien que les élèves de première secondaire associent majoritairement le sens de « contour » au mot « périmètre ».

Toutefois, on constate à l'item 3 que, pour comparer des aires, certains élèves comparent encore les périmètres. Ce n'est plus nécessairement une confusion longueur–aire, mais bien un autre type d'erreur : croire que deux formes ont même aire si et seulement si elles ont même périmètre.

Un autre comportement d'échec notable est, à l'item 5, le choix du carré sur pointe en tant qu'intrus, alors que l'énoncé demande explicitement de comparer les aires. La différence visuelle entre ce carré et les autres formes est telle que beaucoup d'élèves oublient la consigne.

14.4.2 Des comportements de réussite

En ce qui concerne les comportements de réussite, notre principale constatation est que ceux d'entre eux qui sont à la base du graphe implicatif, donc qui sont les plus difficiles à acquérir et en conséquence les plus significatifs de réussite, sont constitués non de connaissances (savoirs ou procédures) mais de la capacité à produire des justifications correctes. C'est ainsi que notre attention s'est portée plus particulièrement sur les comportements suivants :

– Réponse correcte à l'item 2
– Raisonnement complet et correct à l'item 3
– Raisonnement incomplet mais correct à l'item 3
– Procédure par comptage à l'item 4
– Raisonnement correct 4
– Justification partielle mais sans erreur à l'item 5
– Raisonnement partiel mais sans erreur à l'item 6

Le seul comportement de type procédural qui apparaît dans cette liste est le comptage à l'item 4. Encore ce comptage est-il utilisé dans le cadre d'une construction et non d'un dénombrement.

Bien entendu, pour produire des justifications et des raisonnements corrects, même partiels, des connaissances sont nécessaires. Ce que nous constatons est que les questions de ce pré-test nous permettent de vérifier la coordination de ces connaissances en une démarche cohérente. Nous allons en profiter pour vérifier l'homogénéité de la population testée.

14.5 La population testée est-elle initialement homogène ?

Ainsi que nous l'avons fait pour l'expérimentation dans le primaire, nous allons comparer les résultats des élèves des classes témoins et ceux des classes expérimentales lors de ce pré-test.

Comparons d'abord les taux de réussite aux différents items. Nous laisserons de côté l'item 1 qui fait intervenir trop d'éléments différents et est influencé par le contexte du quotidien.

À l'item 2, nous considérerons comme réussite le fait d'avoir placé correctement les sept formes qui pouvaient être placées et de n'avoir pas (mal) placé un carré dans la première bande. À l'item 3, la réussite est la réponse « égale », cependant qu'à l'item 4 nous relevons trois réponses : la production d'un dessin correct et les réponses aux deux questions concernant les rapports des aires R et r des deux rectangles. Enfin, à l'item 5 la réussite consiste à proposer le grand carré comme intrus et à l'item 6 à répondre $\frac{1}{2}$.

	Item 2	Item 3	Item 4 Dessin correct	Item 4 $\frac{R}{r}$	Item 4 $\frac{r}{R}$	Item 5	Item 6
Gr. Témoin	22 %	64 %	42 %	21 %	10 %	29 %	40 %
Gr. expé.	33 %	75 %	57 %	30 %	15 %	23 %	40 %
χ^2	2,64	2,37	3,33	1,75	0,75	0,74	1,25

Comme on le voit la plupart des questions sont mieux réussies par le groupe expérimental que par le groupe témoin. Cependant, aucun écart n'est significatif au seuil 0,95 ($\chi^2 > 2,706$).

Comparons à présent les résultats aux comportements de réussite mentionnés plus haut :

C1 : Raisonnement complet et correct à l'item 3

C2 : Raisonnement incomplet mais correct à l'item 3

C3 : Procédure par comptage à l'item 4

C4 : Raisonnement correct à l'item 4

C5 : Justification partielle mais sans erreur à l'item 5

C6 : Raisonnement partiel mais sans erreur à l'item 6

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Gr. Témoin	13 %	15 %	1 %	6 %	12 %	10 %
Gr. expé.	19 %	12 %	4 %	4 %	12 %	12 %
χ^2	0,97	0,31	0,95	0,61	0,02	0,17

À nouveau aucun écart n'est significatif au seuil 0,95. Cette fois, nous pouvons considérer qu'avant l'expérimentation, les deux groupes, témoin et expérimental avaient des performances comparables.

Chapitre 15

Un post-test en première secondaire (2006–2007).

15.1 Les énoncés

Le post-test comprend cinq items. Les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Il a été réalisé dans les mêmes classes que le pré-test. Par le jeu des absences, le nombre d'élèves a été ramené à 159, dont 81 du groupe expérimental, et 78 du groupe témoin.

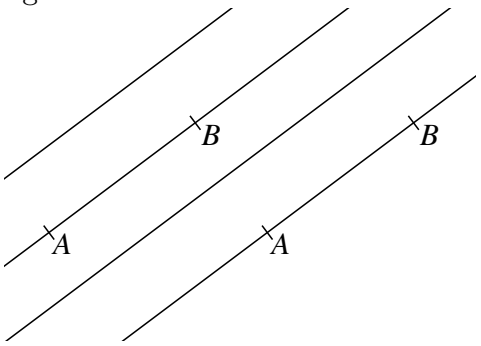
Les figures suivantes ne reproduisent pas en vraie grandeur les fiches soumises aux élèves.

– Item 1

Défi 1 – Dans les bandes ci-dessous, représente

1. un parallélogramme non rectangle dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
2. un rectangle, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
3. un carré, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
4. un losange non carré, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
5. un trapèze non parallélogramme, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$.

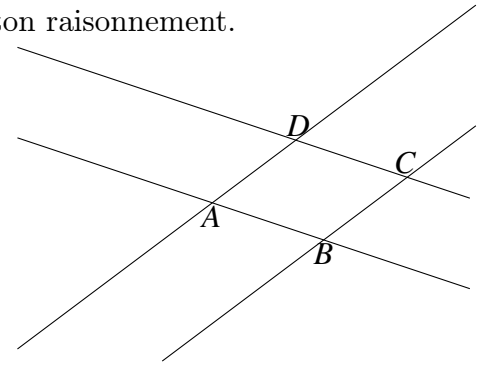
Tu peux utiliser tous les instruments que tu veux. Les sommets de chaque quadrilatère doivent être sur les bords de la bande.
Si tu ne parviens pas à dessiner des figures, explique pourquoi.
Certaines de ces figures ont-elles la même aire ? Lesquelles ?



– Item 2

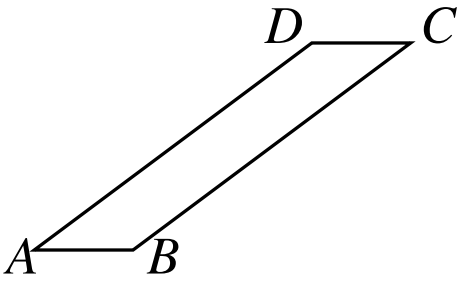
Défi 2 –

1. Dessine un parallélogramme $ABEF$ différent de ABCD, tel que les sommets E et F soient sur la droite CD.
2. Comment est l'aire de $ABEF$ par rapport à celle de $ABCD$? Explique ton raisonnement.



– Item 3

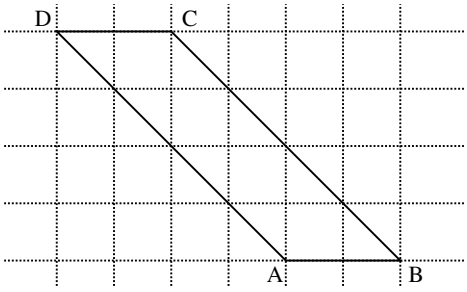
Défi 3 – Que vaut l'aire du parallélogramme $ABCD$? Utilise le cm^2 comme unité d'aire.
Tu peux tracer d'autres éléments sur la figure, tu peux mesurer.
Explique alors ce que tu as tracé, ce que tu as mesuré, et comment cela t'a permis de trouver l'aire.



– Item 4

Défi 4 – Trace le segment $[AC]$.

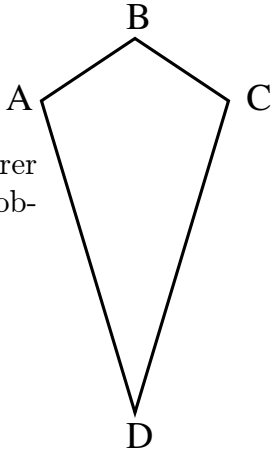
1. Comment est l'aire du triangle ABC par rapport à celle du triangle ADC ?
   Explique ton raisonnement
2. Que vaut l'aire du triangle ABC ?
   Comment l'as-tu obtenue ?



– Item 5

Défi 5 – $ABCD$ est un cerf-volant.

1. Sans autre information, peux-tu donner la valeur de son aire ?
   OUI ☐ Si oui, quelle est cette mesure ?
   NON ☐ Si non, tu peux tracer et mesurer tout ce qui est nécessaire pour l'obtenir. Que mesures-tu ?
2. Que vaut l'aire ? Explique comment tu l'as obtenue.
3. Dessine, sur la figure, un rectangle dont l'aire vaut le double de celle du cerf-volant.



15.2 Analyse des items

Avant d'entamer cette analyse, une remarque liminaire s'impose : nous avons renoncé à relever les erreurs liées à l'emploi du vocabulaire et des notations désignant les unités de longueur et d'aire. La confusion entre cm, cm^2, voire cm^3 est totale.

15.2.1 Item 1

Dans la première partie de la question, on demandait aux élèves de construire « dans les bandes » (si possible) un parallélogramme, un rectangle, un carré, un losange et un trapèze, tous ces polygones devant en outre avoir un côté de même longueur qu'un segment donné. Cette dernière construction rendait le carré inconstructible, la bande donnée étant trop étroite. Les élèves devaient alors expliquer pourquoi le carré ne pouvait être construit.

Le tableau suivant indique les taux de réponses correctes.

Parallélogramme	Rectangle	Carré	Justification	Losange	Trapèze
88 %	91 %	68 %	65 %	19 %	75 %

Ce tableau appelle peu de commentaires en ce qui concerne le parallélogramme et le rectangle.

– Six élèves n'ont pas dessiné de parallélogramme et treize en ont dessiné un qui ne respecte pas les consignes.
– Quatre élèves n'ont pas dessiné de rectangle et neuf en ont dessiné un qui ne respecte pas les consignes.

Le trapèze pose visiblement des problèmes : 28 élèves (17,6 %) n'en dessinent pas et neuf en dessine un qui ne respecte pas les consignes ou même « quelque chose » qui ne ressemble pas du tout à un trapèze (*Fig. 15.1*). Certains d'entre eux donnent une explication (*Fig. 15.2*, *Fig. 15.3*). Parfois, l'élève ne sait pas ce qu'est un trapèze, parfois il a mal compris la question.

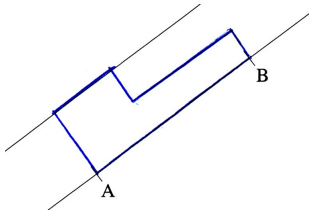


Fig. 15.1

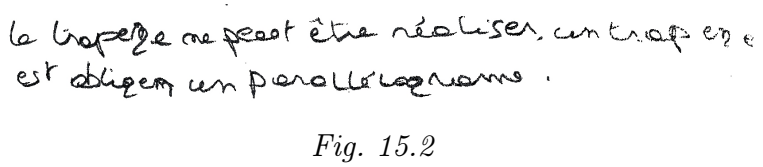


Fig. 15.2

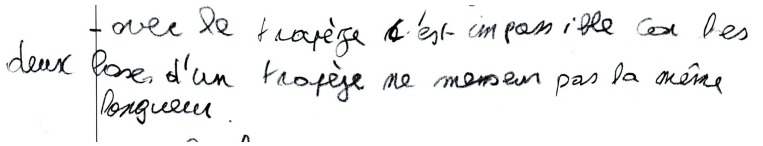


Fig. 15.3

Nous constatons aussi que les trapèzes qui ont été dessinés sont souvent des trapèzes isocèles. Cette forme est-elle plus attractive ? Ou les trapèzes sont-ils plus souvent dessinés de cette façon ?

La question relative au carré n'a été réussie qu'à 65 %. Attention : pour cette question, la réussite consistait à dire explicitement qu'il n'était pas possible de dessiner le carré, et cela, indépendamment de la justification de cette impossibilité. Il convient donc d'ajouter que 15 % des élèves n'ont pas dessiné le carré *sans le mentionner explicitement*. Le taux de non-dessin est donc de 80 %, ce qui redevient honorable. Il y a quand même 20 % des élèves qui ont dessiné un carré, soit débordant de la bande (*Fig. 15.4*), soit comprimé pour y tenir.

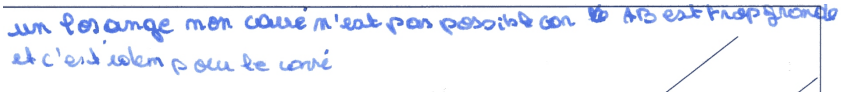


Fig. 15.5

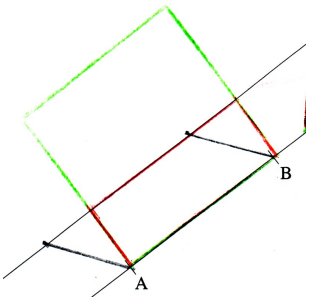


Fig. 15.4

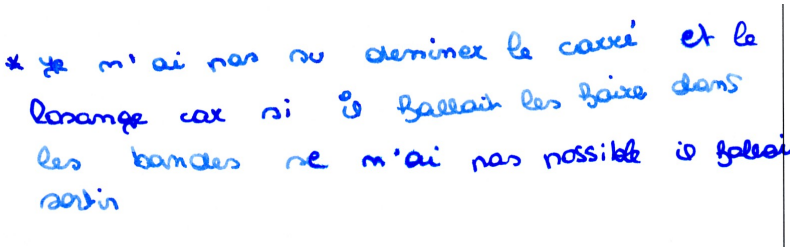


Fig. 15.6

En termes de hit-parade, on pourrait dire que le losange bat les records d'impopularité : 53 % de non-dessin et 26 % de dessins incorrects ! La raison la plus fréquente pour ne pas le dessiner : les bandes ne sont pas assez larges, comme dans le cas du carré (*Fig. 15.5*, *Fig. 15.6*).

Clairement, le losange est mal connu. Apparemment, il est souvent associé au carré (un élève dit : *un losange est un carré penché*. Puisqu'on ne pouvait pas dessiner un carré, on ne pouvait pas dessiner non plus un losange !

Mais il n'y a pas que cela : le stéréotype du « losange au garde-à-vous » existe toujours et empêche aussi le dessin (*Fig. 15.9*), ou le rend non conforme aux consignes (*Fig. 15.7*).

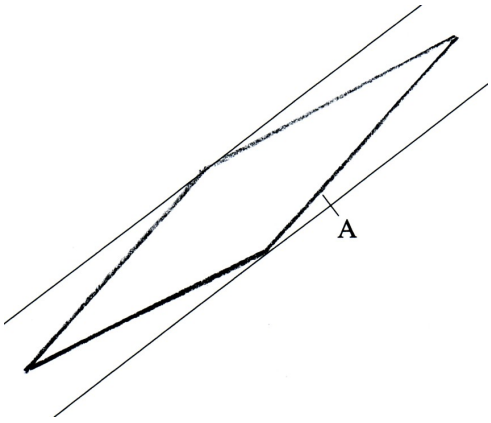


Fig. 15.7

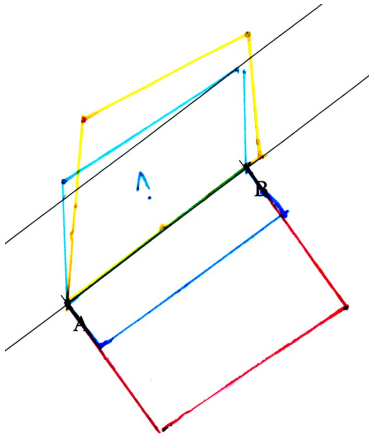


Fig. 15.8

À épingler également la formule parfois citée pour le calcul de l'aire d'un losange : côté × côté, comme pour le carré, à nouveau ! Tous ces éléments indiquent que le concept de

losange est *instable* chez beaucoup d'élèves.

Un élément intéressant est le nombre de réponses correctes fournies par chaque élève. Laissant de côté la justification relative au carré, nous obtenons le tableau suivant.

Nombre de réponses correctes	5	4	3	2	1	0
Nombre d'élèves	19	69	45	16	6	4
Pourcentages	12 %	43 %	28 %	10 %	4 %	2,5 %

Les figures 15.8 et 15.9 montrent deux exemples de réponses où les formes dessinées sont soit incorrectes, soit non conformes aux consignes. Sur la figure 15.8, le carré n'est pas dessiné sans que ce soit explicité.

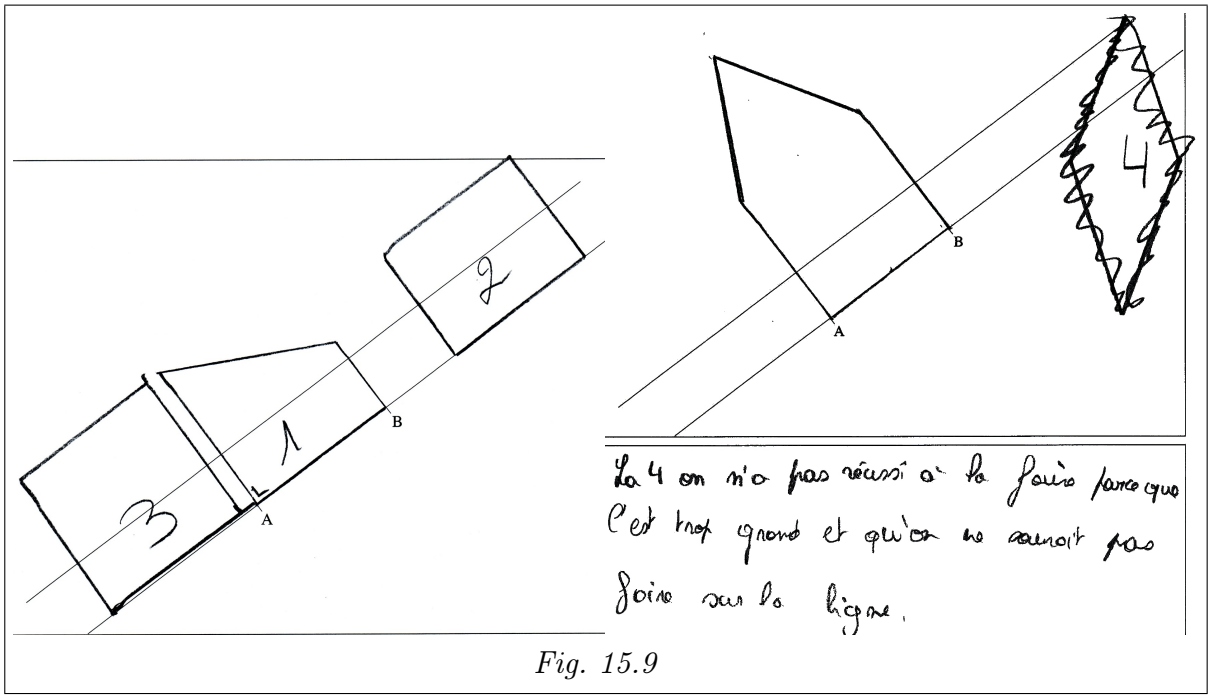


Fig. 15.9

La deuxième partie de cet item portait sur l'égalité des aires. Peu d'élèves y ont répondu. Peut-être l'item était-il trop long ? Ou bien l'explication concernant le carré a-t-elle fait perdre de vue la dernière partie de la question ?

Toujours est-il que
- 7 élèves (4 %) affirment l'égalité des aires du parallélogramme, du rectangle et du losange ;
- 34 élèves (21 %) se limitent à l'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle ; Ceci est cohérent avec le peu de réponses correctes à la question concernant le losange ;
- 1 élève se limite à l'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle ;
- de même, 1 élève se limite à l'égalité des aires du losange et du rectangle ;

Vu le peu de réponses à cette question, alors que l'on pouvait s'attendre à ce que l'égalité des aires du rectangle et du parallélogramme soit généralement reconnue, il est difficile de tirer des conclusions.

15.2.2 Item 2

Voici d'abord un tableau résumant les comportements des élèves par rapport à cet item.

Dessin correct	Dessin incorrect	Pas de dessin
57 %	39 %	4 %

Soixante-trois élèves (39 %) produisent un dessin incorrect, mais « incorrect » peut signifier des choses différentes.

1. L'objet dessiné peut ne pas être un parallélogramme (*Fig. 15.10*). C'est une erreur conceptuelle grave.
2. L'erreur peut résulter d'une mauvaise compréhension des consignes. Par exemple, un élève peut oublier qu'une lettre ne peut pas désigner deux points différents et élaborer une interprétation personnelle de la consigne « $ABEF$ différent de $ABCD$ ». L'auteur de la figure 15.12 l'a comprise comme signifiant « le deuxième parallélogramme $ABEF$ doit être construit à partir d'un nouveau segment $[AB]$, obtenu par translation du précédent dans l'une des bandes. »

   Autre mauvaise interprétation : pour certains élèves la phrase « tel que les sommets E et F soient sur la droite CD » signifie que l'un des points E, F est sur BC et l'autre sur AD (*Fig. 15.11*)

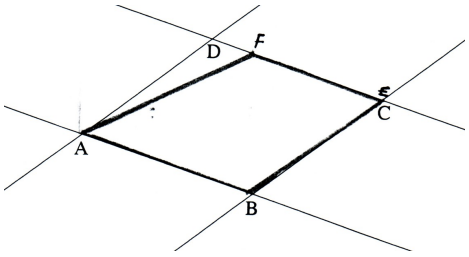


Fig. 15.10

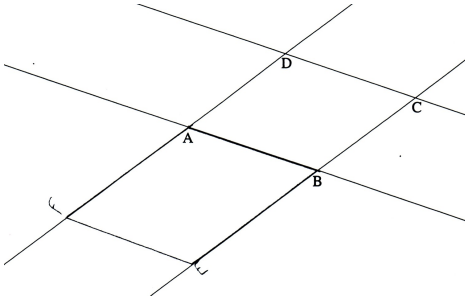


Fig. 15.11

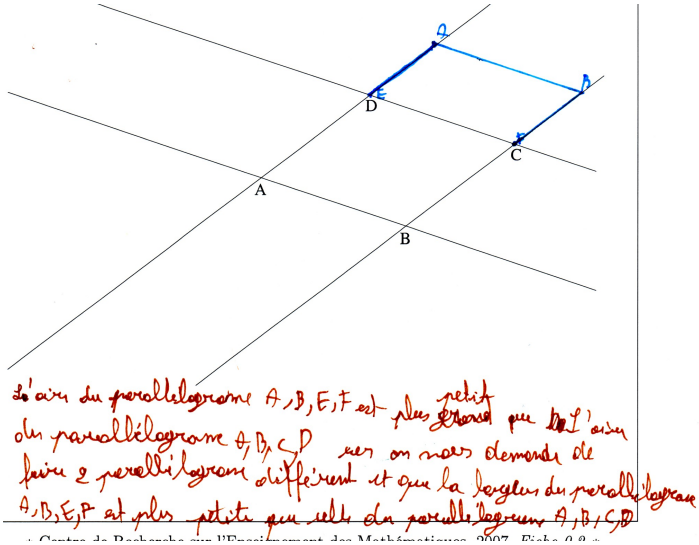


Fig. 15.12

Il nous a donc semblé opportun de distinguer les deux types d'incorrection des dessins, car ils peuvent avoir des conséquences différentes et nécessiter des remédiations différentes. Parmi les soixante-trois dessins incorrects, nous en avons dix-huit dans lesquels l'objet dessiné n'était pas un parallélogramme (le plus souvent du fait d'une imprécision jugée trop forte du tracé des parallèles) et quarante-cinq dans lesquels toutes les consignes ne

sont pas respectées. Avec la pratique de la géométrie, ce non respect des consignes devrait s'estomper.

Nous pouvons donc préciser le tableau ci-dessus :

Dessin correct	Non parallélogramme	Consignes non respectées	Pas de dessin
57 %	11 %	28 %	4 %

Ce défi 2 avait pour objectif de vérifier l'assimilation par les élèves de la construction de la formule de l'aire d'un parallélogramme, via le concept de famille de parallélogrammes (*voir le chapitre 9*). La première partie du défi devait amener l'élève à un dessin comportant deux parallélogrammes d'une même famille de sorte que la réponse considérée comme correcte à la seconde partie du défi était l'égalité.

Pour les élèves n'ayant pas produit un dessin correct, cette seconde partie du défi n'avait guère de signification. Nous restreignons donc dans ce qui suit l'analyse des réponses aux nonante élèves ayant réalisé un dessin correct. Voici donc les résultats de cette partie du défi, les pourcentages étant calculés sur un total de nonante réponses.

Réponse correcte	Autre réponse	Pas de réponse	Justif. correcte	Justif. incorrecte	Pas de justif.
66 %	16 %	19 %	30 %	32 %	38 %

Deux-tiers de cet échantillon de 90 élèves répondent que les deux parallélogrammes ont même aire. Quatorze répondent qu'elles sont différentes (*Fig. 15.13* et *Fig. 15.14*) et dix-sept ne répondent pas. Certaines réponses relèvent soit de la confusion connue entre périmètre et aire, soit de la croyance que plus le périmètre est grand, plus l'aire est grande.

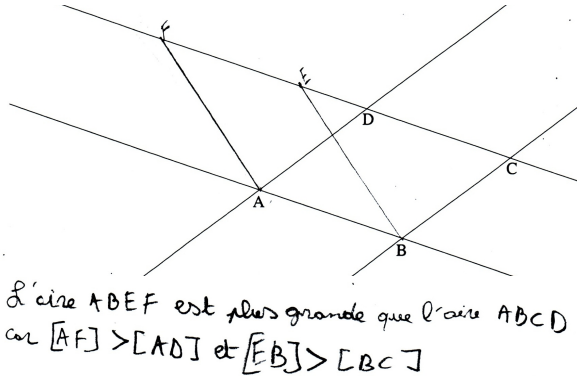


Fig. 15.13

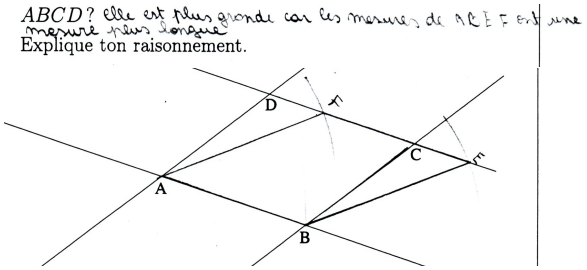


Fig. 15.14

Seulement 30 % de cet échantillon de 90 élèves formulent des justifications correctes (*Fig. 15.15* et *Fig. 15.16*).

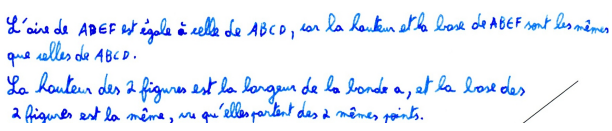


Fig. 15.15

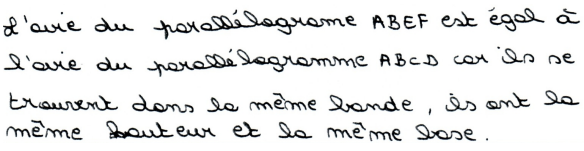


Fig. 15.16

Quelques erreurs de justification :

1. L'élève compare de nouveau les périmètres et non les aires.

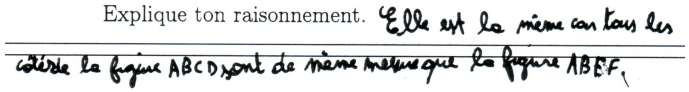


Fig. 15.17

2. Une justification peut être incomplète de plusieurs façons :

Fig. 15.18

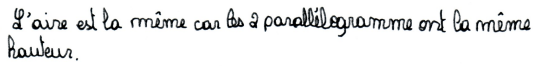


Fig. 15.19

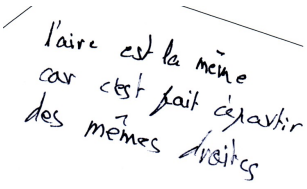


Fig. 15.20

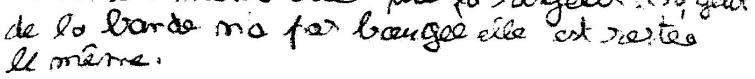


Fig. 15.21

3. Certaines erreurs de justification ne sont le fait que d'un seul élève et ne seront donc pas documentées ici.

15.2.3 Item 3

Le taux de réussite à cette question est *a priori* fort décevant, vu le temps consacré dans les classes à l'aire du parallélogramme : seulement 47 élèves, soit 29,5 %, ont produit la bonne réponse 4 cm^2. Aussi convient-il d'analyser quelles méthodes ont été employées et quelles erreurs ont été commises. Nous distinguerons cinq méthodes principales :

1. Formule Base × Hauteur en utilisant un des côtés $[AB]$, $[CD]$ comme base : $|AB| \times h_{AB}$. On avait $|AB| = 1$ cm et $h_{AB} = 4$ cm.
2. Formule Base × Hauteur en utilisant un des côtés $[AD]$, $[BC]$ comme base : $|AD| \times h_{AD}$. On avait $|AD| = 5$ cm et $h_{AD} = 0{,}8$ cm.
3. Produit des longueurs des côtés $[AB]$ et $[AD]$: $|AB| \times |AD|$.
4. Formule du périmètre.
5. Découpage en tranches.

D'autres méthodes ont également été utilisées, chacune par moins de cinq élèves, souvent issus d'une même classe.

Le tableau suivant indique la répartition des élèves entre ces différentes méthodes (sans oublier l'absence de réponse), ainsi que les taux de réussite associés.

	$\|AB\| \times h_{AB}$	$\|AD\| \times h_{AD}$	$\|AB\| \times \|AD\|$	Périmètre	Tranches	Méthodes variées	Non réponse
Effectifs	45	10	36	8	8	34	18
Taux de choix	28 %	6 %	22,5 %	5 %	5 %	20 %	11,3 %
Taux de réussite	93 %	40 %	0 %	0 %	0 %	3 %	0 %

La première ligne de ce tableau indique en chiffres absolus la répartition des 159 élèves selon le choix de la méthode. La seconde ligne indique la même répartition en pourcentages. Enfin, la troisième ligne indique le taux de réussite à l'intérieur de chaque groupe d'élèves. Par exemple, 93 % des 45 élèves ayant choisi d'appliquer la formule $|AB| \times h_{AB}$ ont réussi.

On comprend aisément pourquoi les deux formules $|AB| \times h_{AB}$ et $|AD| \times h_{AD}$ mènent à des taux de réussite différents.

- La première est facile à appliquer : la hauteur se trace sans problème, les mesures (en cm) sont des nombres entiers et multiplier 1 par 4 ne peut être considéré comme une tâche redoutable !

  Néanmoins trois élèves se trompent en appliquant cette formule. Le premier (*Fig. 15.22*) commet une erreur en mesurant la hauteur. Le second semble ignorer ce qu'est une hauteur (*Fig. 15.23*). Le troisième réalise un dessin correct, indique la bonne méthode et fournit un résultat incorrect (*Fig. 15.24*).

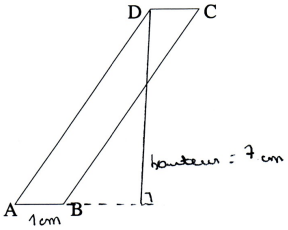


Fig. 15.22

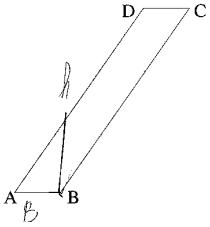


Fig. 15.23

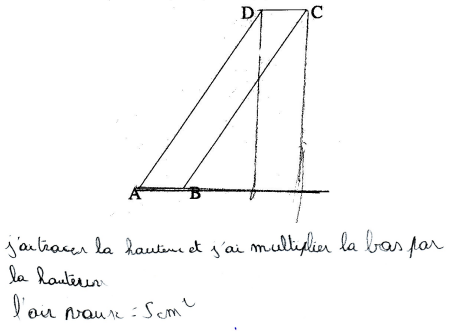


Fig. 15.24

- La seconde présente un plus grand nombre de difficultés. Une erreur peut se produire
  – lors du tracé de la hauteur (*Fig. 15.25*),
  – lors de la mesure de cette hauteur : au lieu de compter une hauteur de 0,8 cm, beaucoup d'élèves arrondissent à 1 cm… et l'aire passe de 4 cm^2 à 5 cm^2 (*Fig. 15.26*).

  Une erreur peut aussi rester inexpliquée (*Fig. 15.27*).

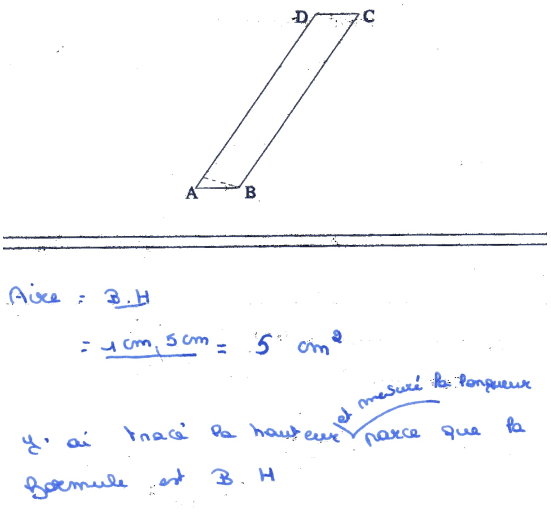


Fig. 15.25

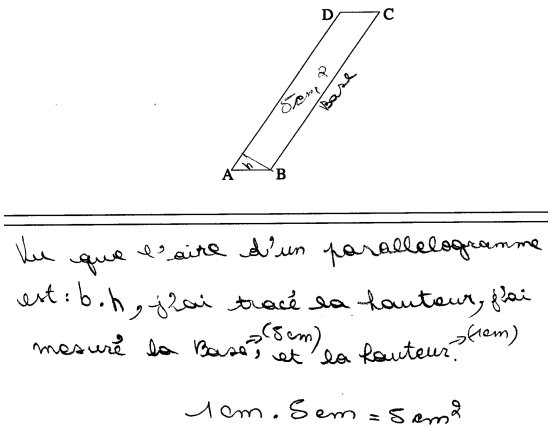


Fig. 15.26

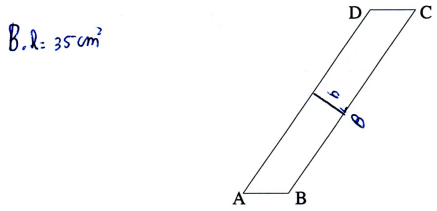


Fig. 15.27

- La méthode consistant à multiplier les longueurs des deux côtés résulte d'une confusion avec la formule du rectangle. Dans ce cas l'élève qualifie souvent le côté $[AD]$ de « hauteur » (*Fig. 15.28* et *Fig. 15.29*).

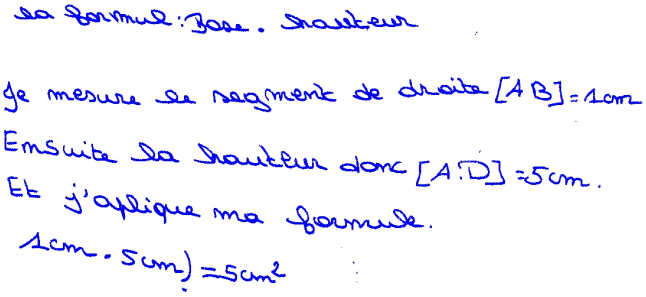


Fig. 15.28

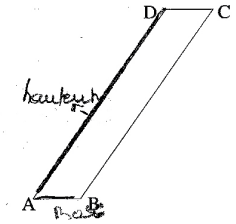


Fig. 15.29

- L'utilisation de la formule du périmètre (*Fig. 15.30*) est le fait de huit élèves. C'est un classique du calcul de l'aire.

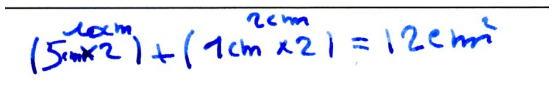


Fig. 15.30

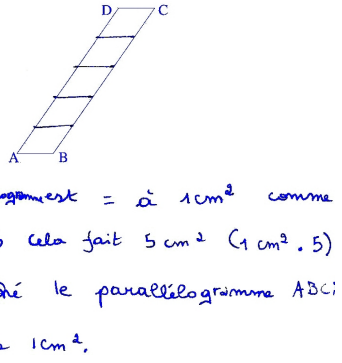


Fig. 15.31

- Le découpage en tranches (également huit élèves) est une méthode de type quantitatif. Peut-être est-ce lié au caractère « penché » du parallélogramme. Les élèves essaient de constituer des tranches de 1 cm^2. En général, ils exploitent le fait que le segment $[AB]$ mesure 5 cm pour le découper en cinq parties et ils utilisent les points de subdivision pour délimiter des tranches horizontales. On trouve aussi un découpage en sept tranches, et un cas « bizarre ».

- Parmi les « méthodes variées », signalons d'abord un élève qui dessine un rectangle de même hauteur que le parallélogramme et l'utilise avec succès pour trouver l'aire de celui-ci (*Fig. 15.32*). D'autres élèves essayent d'appliquer la même idée, mais n'y réussissent pas.

  On trouve aussi des applications de la formule du triangle, $\frac{B \times H}{2}$ (*Fig. 15.33*), des formules diverses (produit des quatre côtés...) des calculs peu clairs, des découpages selon une diagonale... Toutes ces tentatives sont vouées à l'échec.

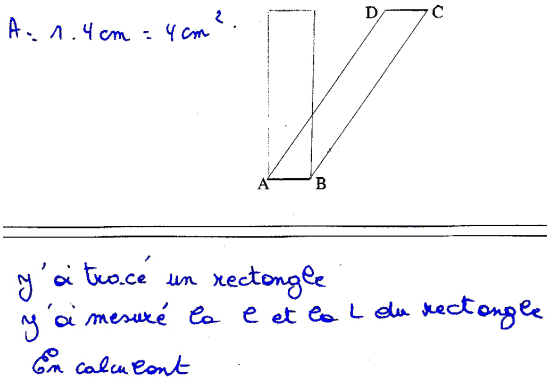


Fig. 15.32

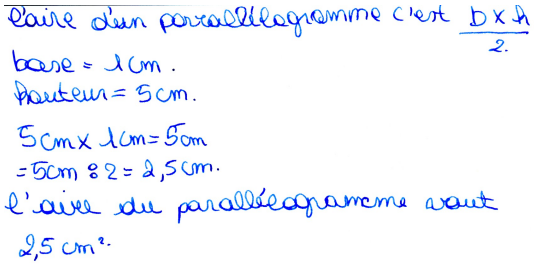


Fig. 15.33

Cette accumulation de méthodes différentes donne l'impression que la situation en première secondaire n'est pas vraiment meilleure que dans le primaire. En tous cas, elle reste instable.

15.2.4 Item 4

L'item 4 comporte deux parties qui appellent chacune une réponse et une explication.

Première partie de l'item 4

Cent trente élèves affirment correctement l'égalité des aires des deux triangles, ce qui donne un taux de réussite à la première partie de 82 %. Il est assez normal que ce taux soit assez élevé, vu que la situation testée ici est celle qui avait servi à construire la formule de l'aire du triangle (*voir la section 9.6.2*). Dans ce contexte, le fait que vingt-trois élèves (14 %) s'abstiennent de répondre et que six (4 %) fournissent des réponses « bizarres » reste préoccupant.

Ce qui est aussi intéressant, c'est la méthode utilisée par les élèves pour expliquer l'égalité des deux aires. Nous distinguerons ci-dessous plusieurs méthodes.

- La première consiste essentiellement à dire que *la diagonale coupe le parallélogramme en deux parties de même aire* (*Fig. 15.34*). Lors des activités de construction de la formule d'aire, cette propriété a été observée intuitivement et prise comme point de départ. Elle constitue donc une explication correcte et il est normal qu'elle soit la plus fréquente. Elle est parfois formulée avec imprécision et nous l'avons considérée comme valable dès que l'idée de *coupage* était présente. Nous la désignerons par l'expression « Coupage en deux ».

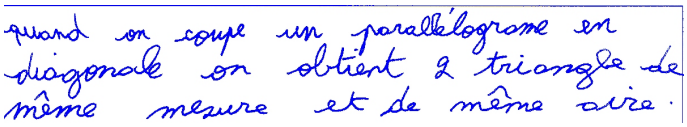


Fig. 15.34

- Sous l'appellation « Explications apparentées », nous rassemblons divers raisonnements peu formalisés qui reviennent à une comparaison directe des deux triangles, par superposition ou comparaison des longueurs des côtés. L'auteur de la figure 15.35

élève s'inspire peut-être d'une manipulation avec *Apprenti Géomètre* qui lui permet de superposer les deux triangles. À la figure 15.36, on peut lire un raisonnement mathématiquement correct puisqu'il s'agit d'un des cas d'isométrie des triangles, mais l'élève l'ignore probablement. Il s'agit bien pour lui d'un raisonnement intuitif, correspondant à la superposabilité.

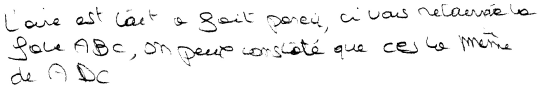


Fig. 15.35

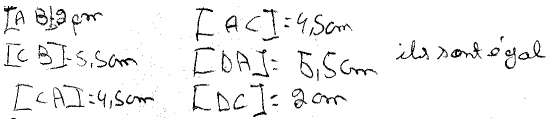


Fig. 15.36

- Une autre explication proche consiste à invoquer le fait que les deux triangles ont « même base et même hauteur » (*Fig. 15.37*). C'est encore une explication de type strictement géométrique en ce sens qu'aucune mesure ne doit être réalisée. Il suffit de *voir* des égalités de longueurs (par exemple sur le quadrillage). Toutefois, elle anticipe et rend inutile l'application de la formule.

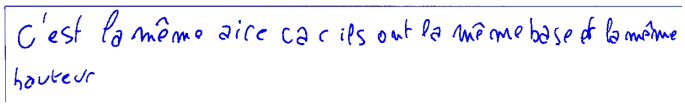


Fig. 15.37

- L'explication suivante est précisément l'usage de la formule classique (*Fig. 15.38*).

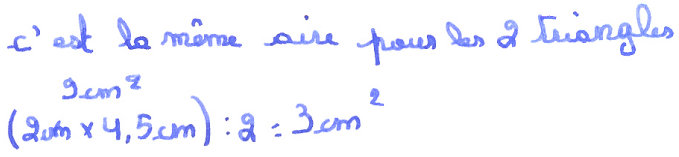


Fig. 15.38

- Un autre type d'explication a également été rencontré : le comptage des petits carrés (*Fig. 15.39*). Autrement dit le mode quantitatif atomisé.

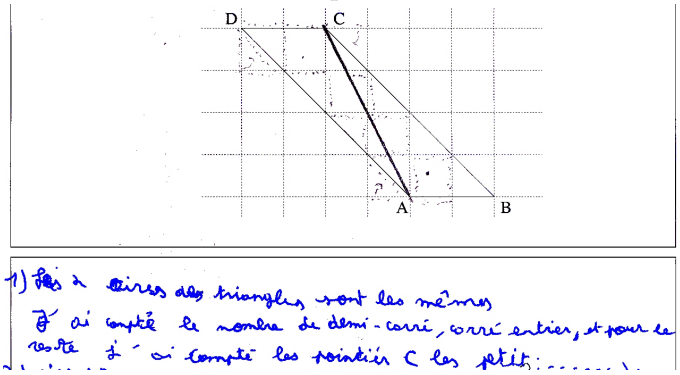


Fig. 15.39

- Enfin, quelques réponses partielles n'ont pu être rangées dans aucune des catégories précédentes (*Fig. 15.40*). Nous les classerons sous « Explications partielles ».

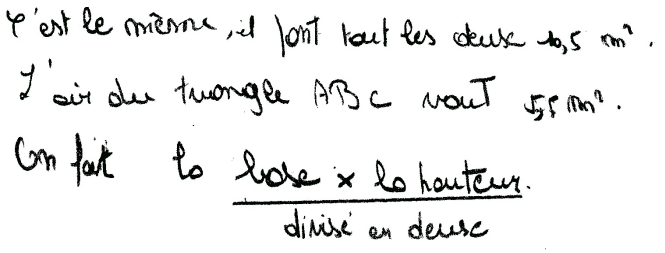


Fig. 15.40

Le tableau suivant mentionne la répartition des élèves entre les différentes méthodes, les pourcentages correspondants et les taux de réponse correcte calculés par rapport aux nombres d'élèves des groupes correspondants.

	Coupage en deux	Expl. apparentées	Base et hauteur	Formule	Comptage	Expl. partielles	Pas d'expl.
Effectifs	62	8	2	24	3	8	52
Taux de choix	39 %	5 %	1 %	15 %	1,9 %	5 %	29 %
Taux de réussite	92 %	100 %	100 %	83,3 %	100 %	62,5 %	56 %

Insistons sur le fait que dans ce tableau le mot « réussite » désigne le fait d'avoir répondu que les deux aires sont égales, pas que la valeur de ces aires soit correcte. On note aussi que le nombre d'élèves qui ne fournissent pas d'explication est plus du double du nombre d'élèves qui n'ont pas répondu à cette première question.

Deuxième partie de l'item 4

Quarante des cent cinquante neuf élèves, soit 25 % n'ont pas répondu à cette deuxième partie de l'item 4. Ceci confirme le caractère préoccupant déjà signalé au début de l'analyse des réponses à la première partie. Parmi les cent dix-neuf élèves ayant répondu, cinquante-huit (36,5 %) ont trouvé, parfois avec une imprécision due aux mesures effectuées, la réponse correcte (4 cm^2). Et par conséquent soixante-et-un élèves (38,5 %) proposent une réponse incorrecte.

Les cent dix-neuf élèves qui ont répondu à la question devaient de plus expliquer la méthode utilisée. Six ne le font pas. Nous pouvons regrouper les méthodes décrites par les autres en trois catégories : celles qui reposaient sur la formule donnant l'aire d'un triangle, celles qui reposaient sur la formule donnant l'aire d'un rectangle, et... les autres. Voici la répartition des cent treize élèves en ces trois catégories et les taux relatifs de réponse correcte à la question posée (aire du triangle ABC) calculés séparément pour chaque catégorie.

	Formule du triangle	Formule du rectangle	Autre méthode
Effectifs	92	10	11
Taux de réussite	59 %	0 %	18 %

Passons les trois catégories en revue.

- La formule du triangle

Dans cette catégorie, nous avons rangé aussi bien les élèves appliquant la formule $\frac{b \times h}{2}$ que ceux qui expliquent « j'ai calculé l'aire du parallélogramme, puis divisé par 2 ». Les deux démarches sont en effet les mêmes. En particulier, dans les deux cas, la principale difficulté est le choix de la hauteur.

Trente élèves sur les nonante-deux commettent une erreur en effectuant ce choix. La plupart d'entre eux ont choisi le côté $[AB]$ comme base. Ils prennent alors comme hauteur soit le côté $[AC]$ soit le côté $[BC]$, ce qui les amène à l'aire soit de 4,5 cm^2, soit de 5,7 cm^2 s'ils ont mesuré $[BC]$ avec précision, de 5,5 cm^2 dans le cas contraire. Certains évaluent la hauteur à 5 cm, sans qu'on puisse déterminer avec certitude ce qui les a amenés à cette valeur. Ont-ils hésité entre 4,5 cm et 5,5 cm ? Ont-ils arrondi leur mesure ? Ou encore ont-ils mesuré la distance du sommet C au milieu du côté $[AB]$? La figure 15.41 est due à un élève qui choisit 5,5 cm comme hauteur du triangle ABC et 4,5 cm comme hauteur du triangle ADC.

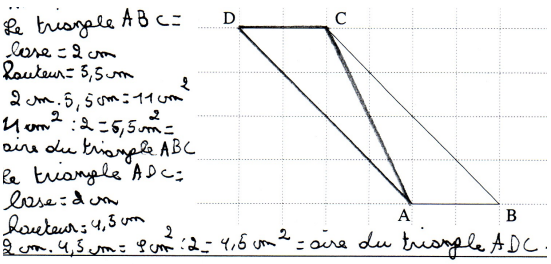


Fig. 15.41

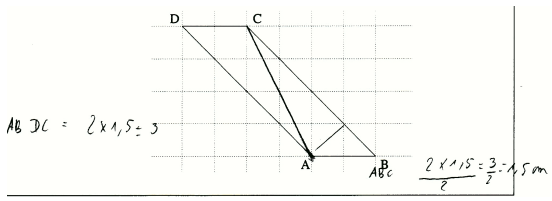


Fig. 15.42

Certains élèves choisissent le côté $[BC]$ comme base et ont alors plus de difficulté pour déterminer la hauteur correspondante, généralement évaluée à 1,5 cm (elle vaut $\sqrt{2}$ cm). L'auteur de la figure 15.42 associe la base $[AB]$ à la hauteur issue du sommet A.

En plus des trente élèves qui commettent une erreur en choisissant la hauteur, on en trouve sept qui commettent des erreurs de calcul.

- La formule du rectangle

  Appliquer cette formule revient à oublier la division par 2. Ainsi, que la hauteur ait été bien choisie ou non, cette formule ne peut mener qu'à l'échec.

- Autre méthode

  Les onze élèves de cette catégorie sont, pour la plupart, en situation difficile. En plus de la formule du périmètre, ils effectuent des calculs tels que « multiplier les longueurs des trois côtés du triangle », « additionner deux côtés » ... Il en est cependant deux qui aboutissent à la réponse correcte, sans appliquer de formule, mais en « comptant les petits carrés » (*Fig. 15.43*).

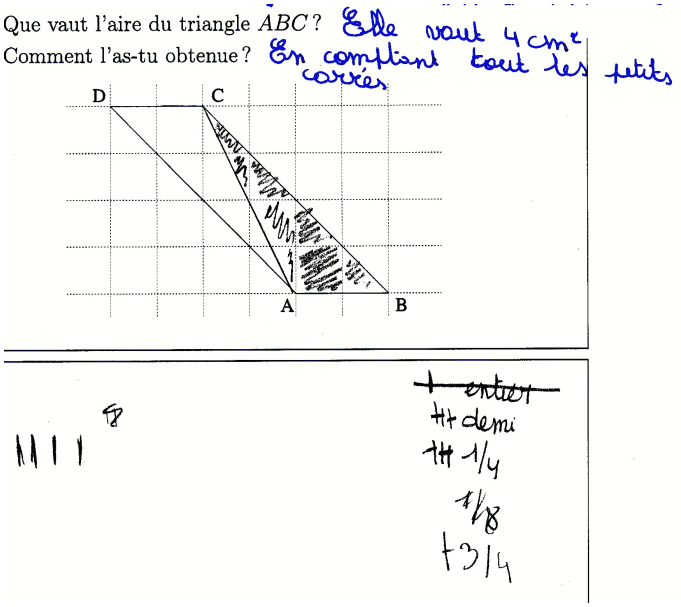


Fig. 15.43

Il nous reste une particularité à signaler. Vingt élèves (12,5 %) n'ont pas tracé le segment $[AC]$. Parmi eux, douze n'ont rien écrit sur leur feuille. Intéressons-nous aux huit autres.

Quatre répondent correctement à la première question de l'item 4 (sans expliquer leur réponse) :

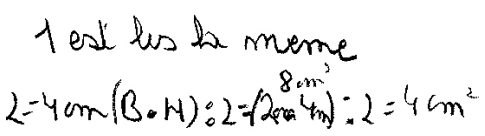


Fig. 15.44

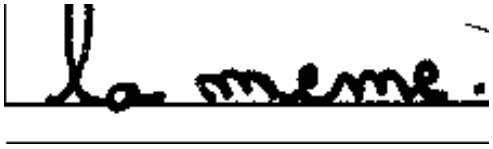


Fig. 15.45

1. Comment est l'aire du triangle ABC par rapport à celle du triangle ADC ? C'est la même

Fig. 15.46

L'élève auteur de la figure 15.47 a tracé deux triangles isocèles avec comme bases les segments $[AB]$ et $[DC]$.

Il conclut directement à l'égalité des aires, mais quels triangles compare-t-il réellement ? A-t-il sciemment remplacé les deux triangles ABC et ADC par deux triangles plus faciles à comparer ?

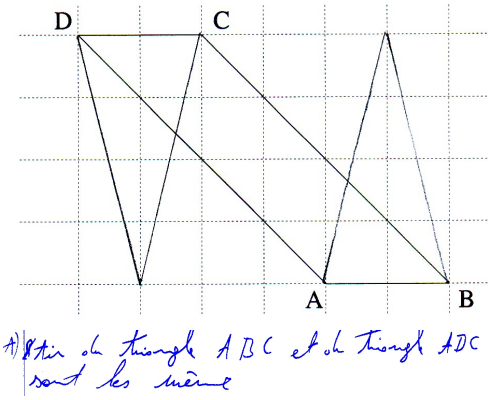


Fig. 15.47

À la deuxième partie de la question, trois des huit élèves concernés utilisent la formule du triangle, un autre la formule du rectangle. Un seul calcule correctement l'aire du triangle

ABC. Un autre (l'auteur de la figure 15.47) trouve 4,3 cm^2, et on peut admettre qu'il s'agit d'une imprécision dans la mesure de la hauteur, car il applique la bonne formule, et sans erreur de calcul.

La question qui se pose est de savoir si pour ces élèves la visualisation mentale du segment $[AC]$ suffit à supporter le raisonnement. Clairement, il n'est pas possible de tracer un segment sans l'avoir au préalable visualisé mentalement. Les élèves ayant tracé $[AC]$ sont donc aussi passés par cette phase. Au moins pour certains d'entre eux, le tracé effectif était nécessaire.

Le nombre d'élèves n'ayant pas tracé le segment $[AC]$ est maheureusement trop faible pour que nous puissions en tirer des conclusions dans la suite de cette analyse.

15.2.5 Item 5

Avec cet item, nous voulions voir dans quelle mesure les élèves pouvaient transférer leurs acquis à une situation nouvelle pour eux. C'était donc une petite activité de résolution de problème qui leur était posée.

- La première question avait surtout pour but d'amener les élèves à s'approprier le problème, en les amenant à s'interroger sur la façon de le résoudre.
- Avec la deuxième question, on leur demandait d'aller jusqu'au bout de la résolution du problème en indiquant l'aire du cerf-volant et la méthode de calcul appliquée.
- Enfin la dernière question permettait de valider le résultat de la recherche en fournissant un moyen de contrôle. Cette étape pouvait éventuellement être intégrée à la deuxième.

Examinons en détail les réactions des élèves à chacune de ces trois questions.

- **Première question**
  La formulation « Sans autre information, peux-tu donner la valeur de son aire ? » était difficile pour des élèves de première secondaire. Vingt-trois élèves répondent « oui », dont trois seulement fournissent une réponse. Dans la suite, ces élèves ayant répondu « oui » ne se comportent pas différemment de ceux qui ont répondu « non ». Les réactions à cette question ne nous apprennent qu'une chose, c'est que nous aurions dû la rédiger autrement ou l'abandonner.
- **Deuxième question**
  Il est vraisemblable que le tracé du cerf-volant, semblable au stéréotype du losange « au garde-à-vous » a attiré l'attention de beaucoup d'élèves sur les diagonales. De fait, 103 élèves sur 159 (65 %) ont tracé au moins une diagonale. On peut considérer que pour certains élèves, il s'agit là d'un transfert d'un acquis puisque c'est cette méthode qui avait été utilisée (*voir section 9.8*) lors des activités concernant l'aire du losange et son insertion dans un rectangle.
  Le tableau suivant indique les pourcentages de valeurs correctes attribuées à l'aire, tant pour l'ensemble de la population testée, que pour les deux groupes d'élèves distingués selon qu'ils ont ou non dessiné au moins une diagonale. Une valeur a été considérée comme

correcte si sa justification utilisait une méthode adéquate avec des données bien choisies, et cela même si la réponse numérique n'était pas exacte. Sous les mêmes conditions, la justification a également été considérée comme correcte. Cette façon de dépouiller les réponses résulte de notre souci de concentrer notre attention sur les méthodes utilisées par les élèves et non sur les imprécisions de mesures ou les erreurs de calcul.

	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Pas de réponse
Tous les élèves	29 %	36 %	35 %
Avec diagonale(s)	43 %	42 %	15 %
Sans diagonale	4 %	26 %	70 %

En lisant la première colonne de ce tableau, on peut penser que les élèves n'ayant pas dessiné de diagonale ont beaucoup moins bien réussi que les autres puisque leur taux de réponse correcte est largement inférieur. En lisant la seconde colonne, on constate que leur taux de réponse incorrecte est également inférieur. En fait la différence entre les deux groupes se situe d'abord du côté de l'absence de réponses.

Examinons ensuite les méthodes utilisées pour la résolution, en séparant à nouveau les élèves ayant dessiné une diagonale et les autres.

Dans les deux cas, nous avons relevé

- les élèves qui ont décomposé le cerf-volant en deux triangles, calculé les aires des deux triangles et justifié correctement ;
- les élèves qui ont calculé le demi-produit des diagonales et justifié correctement ;
- les élèves qui ont procédé d'une autre manière et justifié correctement ;
- les élèves qui ont justifié incorrectement ;
- les élèves qui n'ont pas justifié.

Les « autres manières de justifier correctement » mentionnées ci-dessus ne sont qu'au nombre de deux et utilisées par quatre élèves. Trois d'entre eux calculent en premier lieu l'aire du rectangle double du parallélogramme, puis divisent par 2 (*Fig. 15.49*). Le quatrième découpe le cerf-volant en quatre triangles au lieu de deux.

Des justifications correctes

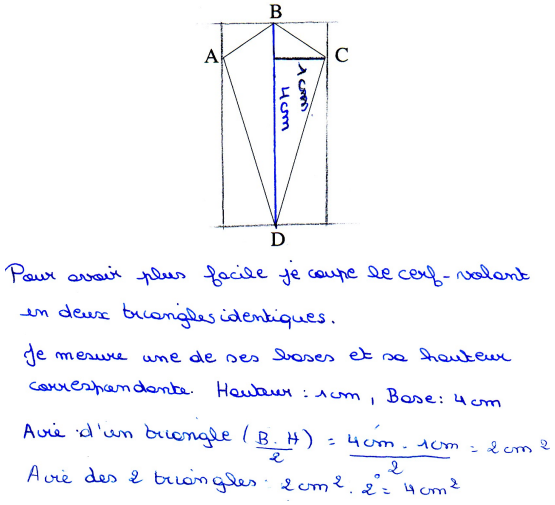


Fig. 15.48

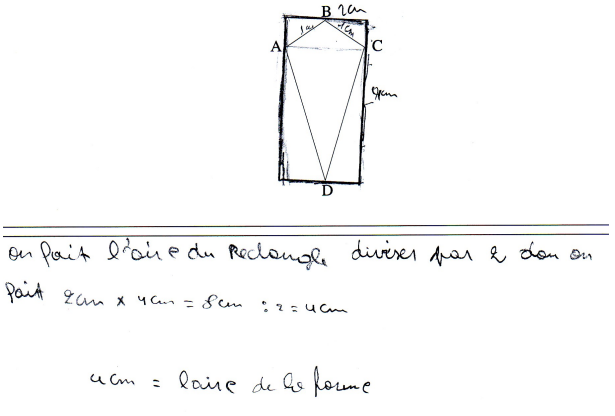


Fig. 15.49

Des justifications incorrectes

Fondamentalement, c'est la maîtrise insuffisante de la procédure de détermination de l'aire d'un triangle qui est à la base des mauvais résultats enregistrés. Nombreux sont les élèves qui pensent à découper le cerf-volant en deux triangles. Ensuite... on retrouve bien entendu des méthodes incorrectes déjà rencontrées dans les items précédents. Par exemple la multiplication des longueurs des côtés (*Fig. 15.50*) ou le calcul du périmètre (*Fig. 15.51*).

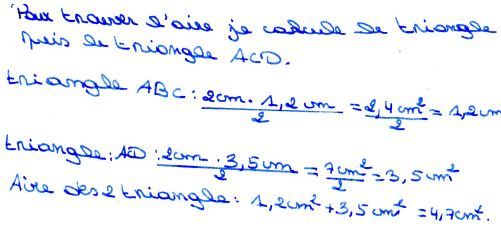


Fig. 15.50

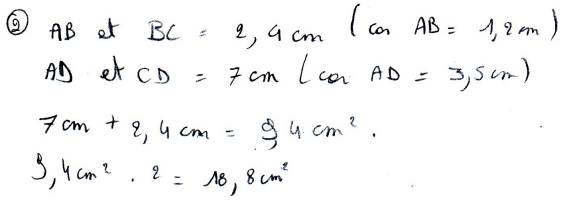


Fig. 15.51

La figure *Fig. 15.52* illustre une erreur d'un nouveau genre, associée à une méthode qui n'est ni un découpage en deux triangles, ni le demi-produit des diagonales. L'élève veut obtenir l'aire du cerf-volant en soustrayant l'aire totale des triangles extérieurs à celle du rectangle. Outre les imprécisions de mesure, il se trompe dans le calcul de l'aire totale des triangles extérieurs.

Quant à l'auteur de la figure 15.53, il se trompe en convertissant les mm^2 en cm^2.

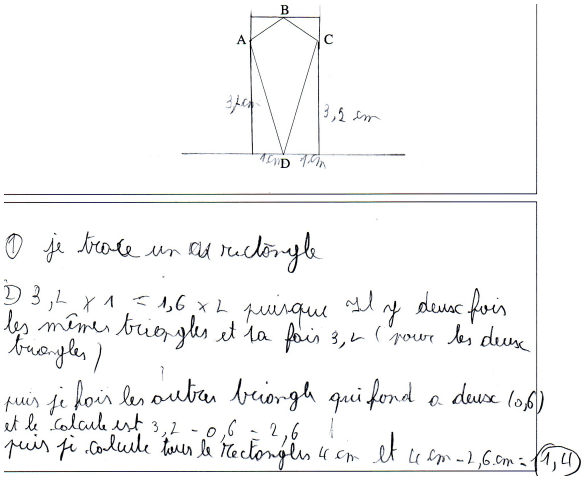


Fig. 15.52

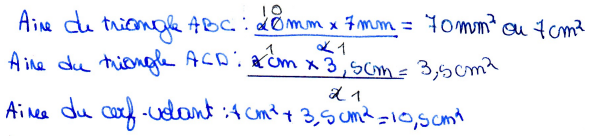


Fig. 15.53

Le tableau suivant indique les taux des différentes justifications.

	Aires deux triangles	Demi-produit diagonales	Autre manière	Justification incorrecte	Pas de justification
Tous les élèves	26%	3 %	2,5 %	35 %	33 %
Avec diagonale(s)	39 %	5 %	2,9%	39 %	13,7%
Sans diagonale	1,8 %	0 %	2 %	28 %	68 %

De nouveau, nous voyons apparaître une plus grande réussite chez les élèves qui utilisent les diagonales par rapport à ceux qui ne les utilisent pas. Ceux-ci ne perçoivent pas les triangles à l'intérieur du cerf-volant, ni l'analogie avec le losange. Ils n'ont en fait pas de méthode claire pour calculer l'aire. On remarque néanmoins que la conséquence en est

beaucoup plus l'absence de justification que la justification incorrecte. Autrement dit, ces élèves ne font pas nécessairement « n'importe quoi ».

Les deux tableaux qui viennent d'être présentés montrent une fois de plus l'importance de la visualisation en géométrie et, l'importance de la concrétiser par un tracé effectif.

- **Troisième question**

Présentons à nouveau les résultats à cette question par un tableau distinguant les élèves selon leur tracé des diagonales. Nous avons considéré trois possibilités.

– Le rectangle est correctement dessiné.
– Un rectangle est dessiné mais n'a pas les bonnes dimensions.
– Aucun rectangle n'est dessiné.

Signalons aussi qu'en plus de ces possibilités, certains élèves ne positionnent pas leur rectangle — même de bonnes dimensions — de façon que les sommets du cerf-volant soient sur les côtés. Ces élèves n'effectuent pas de liaison entre les propriétés du rectangle et celles cerf-volant.

	Rectangle correct	Rectangle incorrect	Pas de rectangle
Tous les élèves	37,7%	22%	40,2%
Avec diagonale(s)	46 %	22.5 %	31 %
Sans diagonale	23 %	21 %	56 %

Un dernier tableau va nous permettre de tirer une conclusion. Rassemblons les taux de réponse correcte (premier tableau), de justification correcte (en sommant les trois premières colonnes du deuxième tableau) et de réponse correcte (troisième tableau) :

	Aire correcte	Justification correcte	Rectangle correct
Tous les élèves	29 %	31,5 %	37,7%
Avec diagonale(s)	43 %	46,9 %	46 %
Sans diagonale	4 %	3,8 %	23 %

Nous observons la stabilité du groupe d'élèves qui tracent au moins une diagonale. Ils sont à peu près dans les mêmes proportions à visualiser des traits servant à découper le cerf-volant ou des traits permettant de « sortir » de celui-ci.

Par contre au sein du groupe d'élèves qui ne dessinent pas de diagonale, ceux qui complétent le cerf-volant en un rectangle sont nettement plus nombreux que ceux qui arrivent à donner une valeur numérique à l'aire. Ce groupe d'élèves est plus à l'aise pour réaliser une étude qualitative que numérique. Il pourrait continuer d'évoluer.

15.3 Des comportements de réussite ou d'échec

15.3.1 Des comportements d'échec

L'analyse des comportements d'échec réalisée à l'aide de l'analyse statistique implicative montre d'abord que les comportements d'échec aux items 1, 2 et 3 sont fortement liés. Ainsi, les élèves qui fournissent des réponses incorrectes à l'item 1 ont tendance à faire de même aux items 2 et 3.

Il en est de même pour les items 4 et 5 : certaines des erreurs commises à l'item 4 entraînent d'autres erreurs à l'item 5. Il s'agit pour la plupart d'erreurs portant sur les aspects numériques de la détermination d'une aire : emploi d'une formule du type côté $\times$ côté pour un parallélogramme ou un triangle, mauvais choix de hauteur. On retrouve même neuf élèves qui utilisent une formule de calcul du périmètre à la place de celle du calcul d'une aire.

L'analyse implicative montre également un fait intéressant, à savoir la proximité de tous les comportements de non-réponse ou de non-justification. Tout se passe comme si pour certains élèves, la non-réponse s'érigeait en un système. Serait-ce parce qu'ils savaient que ce test ne comptait pas pour l'évaluation ?

15.3.2 Des comportements de réussite

Comme pour les autres tests, nous avons relevé les comportements qui constituent les sources du graphe des comportements de réussite. Ils ne sont qu'au nombre de cinq.

Il s'agit des comportements suivants :

C1 : Cinq bonnes réponses à l'item 1.

C2 : Quatre bonnes réponses à l'item 1.

C3 : Emploi d'une formule d'aire à l'item 4.

C4 : Calcul de l'aire par le produit des demi-diagonales à l'item 5.

C5 : Autre justification correcte à l'item 5.

C'est sur la base de ces constatations que nous considérons que réussir à l'item 1 signifie fournir au moins quatre bonnes réponses sur cinq.

Contrairement au pré-test, les comportements ci-dessus ne sont pas des justifications, mais bien des procédures de résolution ou des réponses elles-mêmes. Cela peut résulter de ce que la matière couverte par le test a été étudiée plus récemment.

15.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre*

Pour étudier l'impact d'*Apprenti Géomètre*, commençons par comparer les résultats des groupes témoin et expérimental aux différentes questions du post-test.

	Item 1	Item 2 Dessin	Item 2 Egalité d'aires	Item 3	Item 4 Égalité d'aires	Item 4 Valeur de l'aire	Item 5 Valeur de l'aire	Item 5 Dessin rectangle
Gr. Témoin	56 %	63 %	50 %	32 %	71 %	35 %	29 %	32 %
Gr. expé.	54 %	50 %	46 %	27 %	85 %	38 %	28 %	43 %
χ^2	0,07	2,4	0,3	0,46	4,98	0,22	0,02	2,1

Alors qu'au pré-test, aucun des écarts entre les taux de réussite des groupes témoin et expérimental n'était significatif, nous constatons ici que la valeur du χ^2 relative à l'égalité des aires à l'item 4 dépasse 3,841, ce qui signifie que l'écart est significatif au seuil 0,95. Voilà donc une question pour laquelle les élèves du groupe expérimental sont significativement plus performants que ceux du groupe témoin.

Cherchons s'il existe d'autres comportements qui font apparaître des écarts significatifs, en commençant par les comportements C1 à C5 situés aux sources du graphe des comportements de réussite (*voir la section précédente*).

	C1	C2	C3	C4	C5
Gr. Témoin	9 %	47 %	15 %	5 %	1 %
Gr. expé.	14,8 %	39 %	15 %	1 %	4 % %
χ^2	1,28	1,02	0,01	1,98	0,95

Aucun des écarts mentionnés dans ce tableau n'est significatif. Aussi nous avons fait un inventaire systématique de tous les écarts significatifs existant entre les comportements mentionnés à l'annexe B.8. Ceci nous permettra non pas de décider que tel groupe d'élèves a globalement de meilleures performances que tel autre, mais surtout de déterminer à propos de quelle question, de quelles démarches, chaque groupe a de meilleures performances. C'est bien de cette façon qu'il convient d'évaluer *l'impact* du logiciel *Apprenti Géomètre*.

Examinons la situation item par item.

Item 1

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,99 dans le groupe expérimental
– L'élève mentionne l'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle, mais oublie le losange.

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,90 dans le groupe expérimental
– L'élève a tenté de dessiner un carré.

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,90 dans le groupe témoin
– L'élève a justifié pourquoi on ne pouvait pas dessiner de carré.
– L'élève n'a pas dessiné de trapèze.

Pour cet item, les élèves du groupe expérimental ont donc de meilleurs résultats pour le trapèze, ceux du groupe témoin pour le carré. L'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle est nettement mieux assimilée au sein du groupe expérimental. Le losange pose des problèmes pour tous, peut-être du fait de son orientation dans la bande.

Item 2

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,90 dans le groupe expérimental

– L'élève a justifié incorrectement l'égalité des aires de $ABEF$ et $ABCD$.

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,99 dans le groupe témoin
– L'élève respecte les consignes.
– L'élève ne justifie pas l'égalité des aires de $ABEF$ et $ABCD$.

Les deux groupes ont des difficultés pour justifier l'égalité des aires de $ABEF$ et $ABCD$, mais l'écart est beaucoup plus significatif dans le cas de la non-justification que de la justification incorrecte. Le groupe témoin respecte mieux les consignes.

Item 3

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,95 dans le groupe témoin
– L'élève ne justifie pas le calcul de l'aire du parallélogramme.

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,90 dans le groupe témoin
– L'élève calcule l'aire en utilisant $[AB]$ comme base et la hauteur correspondante.

L'orientation horizontale du côté $[AB]$ est mieux exploitée par le groupe témoin que par le groupe expérimental. L'usage d'*Apprenti Géomètre* par celui-ci l'a peut-être moins souvent mis en contact avec des parallélogrammes ayant cette orientation qui facilite le choix d'une hauteur et le calcul de l'aire. Les élèves du groupe expérimental sont 9 à calculer l'aire du parallélogramme en choisissant $[BC]$ comme base alors que ceux du groupe témoin ne sont que 2.

Item 4

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,95 dans le groupe expérimental
– L'élève répond que ABC et ADC ont même aire.
– L'élève justifie l'égalité d'aires par coupage selon une diagonale.

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,95 dans le groupe témoin
– L'élève ne répond pas à la question de comparaison des aires de ABC et ADC.
– L'élève ne justifie pas sa réponse à cette question.
– L'élève ne justifie pas la valeur qu'il propose pour l'aire de ABC.
– L'élève ne trace pas le segment $[AC]$.

Les élèves du groupe expérimental ont ici des résultats significativement meilleurs que ceux du groupe témoin. Leur familiarité avec les mouvements de formes géométriques dans *Apprenti Géomètre* leur permet de repérer et de justifier l'égalité des aires des deux triangles. Ceux du groupe témoin se réfugient plus facilement dans l'abstention.

Item 5

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,95 dans le groupe expérimental
– L'élève attribue une valeur incorrecte à l'aire du cerf-volant.
– L'élève trace au moins une diagonale du cerf-volant.
– L'élève mesure au moins une diagonale du cerf-volant.
– L'élève mesure des côtés du cerf-volant.
– L'élève justifie incorrectement la valeur attribuée à l'aire du cerf-volant.

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,99 dans le groupe témoin

– L'élève ne justifie pas la valeur attribuée à l'aire du cerf-volant.

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,95 dans le groupe témoin

– L'élève ne calcule pas l'aire du cerf-volant.
– L'élève ne trace rien sauf éventuellement le rectangle.

Devant une situation nouvelle pour eux, calculer l'aire d'un cerf-volant, les élèves des deux groupes ont des réactions différentes. Dans le groupe témoin, de façon significativement plus importante que dans le groupe expérimental, on se réfugie dans l'abstention. Dans le groupe expérimental, de façon significativement plus importante que dans le groupe témoin, les élèves dessinent une diagonale, la mesurent et cherchent à calculer l'aire des deux moitiés de cerf-volant. Ce faisant, certains (trop !) utilisent un algorithme inadéquat, qui passe par la multiplication des longueurs de deux côtés du triangle. Le résultat est que les taux de réussite des deux groupes sont quasiment les mêmes : 29 % dans le groupe témoin, 28 % dans le groupe expérimental.

Cette identité de résultats ne doit pas masquer une différence fondamentale : les élèves du groupe expérimental ont eu une attitude plus active devant une situation nouvelle que ceux du groupe témoin.

En conclusion

L'impact d'*Apprenti Géomètre* lors de cette expérience réalisée en première secondaire se manifeste essentiellement dans deux directions :

– Une meilleure intuition géométrique due à la familiarité avec les mouvements des formes, et la perception des isométries qui en résulte.
– Une attitude plus active devant une situation nouvelle, un problème à résoudre.

Ce dernier comportement est particulièrement intéressant dans la mesure où l'on essaye de promouvoir un enseignement actif, reposant sur le traitement de situations-problèmes.

Ajoutons que les exercices soumis aux élèves lors de cette expérimentation en première secondaire mettaient en œuvre les formules d'aire beaucoup plus que ceux qui avaient été proposés aux élèves de cinquième et sixième primaire. Dans ces classes, il était possible de répondre correctement aux questions en utilisant des démarches soit de dénombrement, soit de découpage et recomposition. Nous avons vu que, dans des cas simples les dénombrements étaient disponibles dès la cinquième et que l'emploi des méthodes par puzzle augmentait ensuite.

Beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas la méthode numérique (emploi de formules) à leur entrée dans le secondaire, les résultats du pré-test le montrent à suffisance. Même le concept d'unité n'est pas fixé chez tous. L'enseignant du secondaire n'a que peu d'heures à consacrer à l'« entretien » de ces notions supposées connues. Notre expérimentation n'a pas fait exception. Il ne faut donc pas s'étonner des faibles taux de réussite enregistrés à certaines questions du post-test, que ce soit dans le groupe témoin ou dans le groupe expérimental.

Sixième partie

Annexes

Annexe A

Quelques outils de base

Dans cette annexe, nous présentons sommairement quelques outils théoriques évoqués et/ou utilisés dans le corps du texte. Pour une approche détaillée de ces outils, le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages mentionnés dans la bibliographie.

A.1 Les cadres de R. Douady

La mathématique est souvent divisée en domaines tels que « Algèbre », « Géométrie », « Analyse », etc. Cependant, les mathématiciens insistent sur l'unité de leur science. Celle-ci se marque notamment par les connexions qui existent entre les différents domaines et qui permettent parfois de résoudre un problème en le transposant d'un domaine dans un autre. Avec Régine Douady, [31], nous dirons « d'un *cadre* dans un autre ».

R. Douady précise :

> *Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique. . ., mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique.*
>
> *Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et relations.*
>
> *Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Par ailleurs, la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement et par suite, renouveler les images ou à les faire évoluer.*
>
> *Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique.*

R. Douady utilise des changements de cadre à l'occasion d'activités de résolution de problèmes. Elle y associe une *dialectique outil-objet* Nous reviendrons sur ces questions dans la suite.

A.2 Les registres de R. Duval

Le deuxième paragraphe de la citation de R. Douady mentionne comme constituants d'un cadre les « formulations diverses » des objets d'un cadre et des relations entre ces objets. Cette idée de formulation rejoint la notion de « registre sémiotique [1] » développée par Raymond Duval, [33].

R. Duval considère que les représentations sémiotiques d'un objet ne constituent pas seulement un moyen de communication, mais qu'elles jouent un rôle essentiel dans l'*appréhension conceptuelle* de ces objets. Celle-ci nécessiterait même le recours à plusieurs *registres de représentations sémiotiques* [2] *pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.*

Pour qu'un système de représentation sémiotique soit reconnu comme registre, trois activités fondamentales doivent être permises par ce système (voir [33]) :

1. *Former* une représentation identifiable d'un objet dans le registre considéré, et cela conformément à des règles précises (variant selon le registre).
2. *Traiter* une représentation dans le registre où elle a été formée.
   Un traitement peut transformer une représentation d'un objet en une autre du même objet appartenant au même registre. Exemple : le calcul $2+3 = 5$ permet de remplacer la représentation "2+3" de l'objet "cinq" en sa représentation "5". Les deux représentations "2+3" et "5" sont bien dans un même registre, que l'on pourrait qualifier d'arithmétique, cependant que "cinq" est en fait une représentation du même objet dans le registre de la langue naturelle.
   Passer de "5" à "cinq" n'est donc pas un traitement, mais bien une *conversion* qui relève de la troisième activité fondamentale.
3. *Convertir* une représentation d'un objet dans un registre en une représentation du même objet dans un autre registre. La conversion peut s'accompagner d'une perte d'information.

Non seulement une conversion peut entraîner une perte d'information, mais de plus elle peut aussi modifier en profondeur les traitements à effectuer sur les représentations d'un objet donné. Par exemple le calcul « un demi plus un quart » ne donne pas lieu aux mêmes traitements selon qu'on le réalise dans le registre décimal $(0,5 + 0,25)$ ou dans celui des fractions $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$.

A.3 Les niveaux de Van Hiele

Pierre et Dina van Hiele ont élaboré une théorie portant sur l'existence de *niveaux* de pensée. Dans leur esprit, cette théorie a une portée générale. En témoigne le titre

[1] **Sémiotique :** 1) Théorie générale des signes. 2. Étude des pratiques signifiantes dans les divers domaines de la communication. (*Larousse, 2005*)
[2] On dira *registre sémiotique* ou même tout simplement *registre*.

de l'article publié en 1958/59 dans *Mathematica & Paedagogia*, [74] : *La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive*. Toutefois ils n'ont traité que le seul exemple de la géométrie, et très rapidement l'habitude s'est prise de ne considérer leur théorie que dans ce contexte.

Les VAN HIELE distinguent 5 niveaux de pensée.

Niveau 0

Ce niveau est purement visuel. Les figures sont jugées d'après leur apparence globale. Leurs propriétés ne sont pas reconnues et encore moins énoncées. Par contre, l'enfant distingue un carré d'un rectangle et les considère comme des entités différentes.

Niveau 1

L'enfant distingue maintenant les propriétés de certaines figures. Il est capable d'effectuer certaines analyses. Il reconnaît qu'un carré, comme un rectangle, a quatre angles droits. Une figure peut se reconnaître à ses propriétés : un rectangle dessiné avec peu de soin est reconnu comme étant un rectangle, dès lors que l'élève accepte que les quatre angles sont droits. Mais des connexions entre propriétés ne sont pas encore établies. Par exemple, du parallélisme des côtés d'un quadrilatère, on ne déduit pas des égalités d'angles. Ainsi, la déduction n'est pas encore disponible.

Niveau 2

À ce niveau, les propriétés s'ordonnent, elles se déduisent les unes des autres. C'est le stade du « je sais que ... je déduis que ». L'élève peut éventuellement comprendre plusieurs inférences consécutives, il ne comprend pas pour autant ce qu'est une démonstration. Quant aux figures elles sont maintenant *définies* par leurs propriétés, elles peuvent être l'objet de classifications. Un carré est reconnu comme étant un rectangle.

Niveau 3

Cette fois, l'élève comprend ce que sont un axiome, un théorème, une définition. Il est capable de se mouvoir dans un système axiomatique. Il peut élaborer lui-même des démonstrations. Il a assimilé la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, il distingue un théorème de sa réciproque.

Niveau 4

L'existence du dernier niveau est controversée. Ce serait le niveau à atteindre pour accepter que les axiomes d'une théorie n'ont pas une vérité absolue, que des systèmes axiomatiques différents, voire contradictoires, peuvent coexister. En particulier admettre l'existence de géométries non euclidiennes supposerait d'atteindre ce niveau.

Les niveaux qui viennent d'être décrits sont parfois appelés respectivement les niveaux de la reconnaissance, de l'analyse, de l'ordonnancement, de la déduction et de la rigueur.

On notera que les niveaux 0 et 1 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes visuelles (reconnaissance de formes et de propriétés), alors que les niveaux 2, 3 et 4 sont décrits essentiellement en termes d'aptitudes au raisonnement. Ceci montre le caractère général de la théorie développée. Cela montre aussi le rôle particulier de la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement.

A.4 La déconstruction dimensionnelle selon Duval

Dans [34], R. Duval analyse *les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie*. Il attire notamment l'attention sur les problèmes de visualisation en propsant une classification des manières de voir en fonction du rôle des figures dans les activités géométriques dans les activités géométriques proposées aux élèves. Ensuite, il aborde la question du rôle de la visualisation dans le raisonnement en géométrie.

Il n'est guère possible de résumer en quelques phrases le contenu d'un texte aussi dense et substantiel. Aussi, nous nous contenterons de présenter le tableau résumant la classification des manières de voir en quatre « points de vue » et de décrire ce que Duval appelle la « déconstruction dimensionnelle des figures », une manière de voir qu'il considère comme *requise en géométrie*.

A.4.1 Une classification des manières de voir en géométrie

D'après Duval, ce ne sont pas les mêmes manières de voir qui sont sollicitées d'un type d'activité à un autre. Il en distingue quatre qu'il présente comme des « points de vue ».

Le point de vue du botaniste

Type d'activité : Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour. Une forme particulière est privilégiée comme typique.

Mobilisation des propriétés géométriques : Il n'y a pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible).

Le point de vue de l'arpenteur-géomètre

Type d'activité : Mesurer les bords d'une surface sur un terrain ou sur un dessin (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure).

Mobilisation des propriétés géométriques : Les propriétés sont des critères de choix pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à une formule permettant un calcul.

Le point de vue du constructeur

Type d'activité : Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument. Il faut souvent passer par des tracés auxiliaires qui n'appartiennent pas à la figure finale.

Mobilisation des propriétés géométriques : Les propriétés sont des contraintes d'un ordre de construction. Certaines propriétés sont obtenues par une seule opération de traçage, d'autres exigent plusieurs opérations.

Le point de vue de l'inventeur-bricoleur

Type d'activité : Transformer des formes les unes dans les autres. Il faut ajouter des tracés réorganisateurs dans la figure finale pour initialiser ces transformations.

Mobilisation des propriétés géométriques : Les propriétés renvoient implicitement à un réseau plus complexe que la trame de départ (une trame de droites en géométrie plane, ou une trame d'intersection de plans...).

On constate aisément la ressemblance entre le point de vue du bricoleur et le niveau 0 de VAN HIELE. Cette ressemblance ne s'étend pas vraiment aux niveaux et points de vue suivants, VAN HIELE s'intéressant plus aux activités de raisonnement et DUVAL aux activités de construction. Cependant, comme nous allons essayer de le décrire, DUVAL ne sépare pas les activités de construction des activités de raisonnement.

A.4.2 La déconstruction dimensionnelle des figures

Dans le point de vue de l'inventeur-bricoleur, DUVAL mentionne le *renvoi à un réseau plus complexe (droites ou plans) que la figure de départ.* Un tel renvoi lui semble nécessaire dans le cadre d'une résolution de problème. Il considère l'exemple suivant :

Comment partager, d'un seul coup de ciseau, un triangle de manière à pouvoir assembler les deux morceaux en un parallélogramme ?

Un tel problème — dit DUVAL — exige une *déconstruction visuelle* d'une forme élémentaire pour pouvoir ensuite obtenir la reconfiguration demandée. Cela mobilise une capacité fondamentale : ajouter des tracés supplémentaires à une figure de départ afin de découvrir une procédure de résolution. On décompose donc la figure de départ en unités figurales plus élémentaires (on « déconstruit » une forme qui résultait d'une construction).

De plus, le raisonnement s'appuie sur des déconstructions en unités de dimension inférieure à celle de la figure de départ. Par exemple dire qu'un parallélogramme est un quadrilatère comportant deux paires de côtés parallèles revient à définir une forme de dimension 2 à l'aide de propriétés (le parallélisme) portant sur des objets de dimension 1. Ces déconstructions sont donc qualifiées de *dimensionnelles.*

Ainsi pour DUVAL, la résolution d'un problème de géométrie passe par la perception d'un réseau d'éléments, de dimension inférieure à celle de la figure de départ, qui complète cette figure et fournit les éléments nécessaires à la résolution. Il n'hésite pas à affirmer que *la décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie.*
Pour illustrer cette idée, la figure ci-contre, extraite de [34], présente la déconstruction dimensionnelle d'un triangle en vue de résoudre le problème énoncé plus haut.

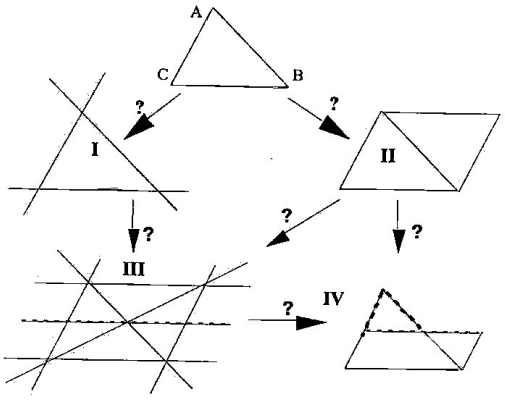


Fig. A.1

Terminons ce (très) bref résumé par un dernier extrait de [34] :

pour qu'une figure donne lieu à une visualisation géométrique, elle doit émerger [...] d'un « circuit de visualisation » organisé autour d'une trame de tracés à une et deux dimensions, car à partir d'un ***réseau de droites*** *on peut faire apparaître une grande diversité de formes à deux dimensions [...] que l'on peut faire apparaître au gré des questions que l'on se pose. Un tel réseau permet donc* ***de voir le passage mathématique***

***des unes aux autres**, c'est-à-dire les propriétés qui le rendent possible.*

A.5 La croissance cognitive selon Tall

Bon nombre de spécialistes en histoire, sociologie ou anthropologie, estiment que la connaissance est engendrée par un processus continu d'investigations, motivées par l'incertitude et le doute, et sanctionnées par des négociations sociales, à l'intérieur d'une communauté de chercheurs. Donc, toute connaissance est vue comme construite. Pour que l'enseignement des mathématiques soit efficace, il est clairement important de savoir *comment* la connaissance mathématique se construit.

Ainsi qu'on l'a évoqué plus haut, avant qu'un élève intègre un concept mathématique donné à ses connaissances, il met en œuvre des objets mentaux (dans la terminologie de Freudenthal), des conceptions (dans celle de Balacheff) qui sont performantes dans des contextes déterminés. Ces conceptions évoluent à l'occasion d'une confrontation à des tâches pour lesquelles elles se révèlent insuffisantes.

Prenons comme exemple le nombre « 5 ». Un jeune enfant le rencontrera en différentes occasions, au départ de procédures de comptage, puis de procédures de calcul. Le symbole « 5 » désigne à la fois le nombre de doigts d'une main, le nombre de lettres du mot « aimer », le dernier terme de la suite 1, 2, 3, 4, 5, la somme de 2 et 3, la somme de 4 et 1, la différence entre 9 et 4, le quotient de 10 par 2, le chiffre 5, le mot « cinq » ... Au fil du temps, le nombre 5 acquiert des propriétés de plus en plus nombreuses. Il entre dans un schéma de relations serré avec d'autres objets. Simultanément, cet objet 5 devient de plus en plus familier. L'accès à ses propriétés, notamment à ses relations avec d'autres objets, devient de plus en plus facile.

C'est en manipulant souvent l'*objet mental* « 5 », en lui appliquant des procédure variées que se forme le *concept* « 5 ». Un concept est une notion *statique*, mais ce sont des procédures *dynamiques* qui nous permettent de l'obtenir comme résultat.

Autre exemple : au départ, la fonction $x \mapsto 3x + 2$ n'est qu'une procédure qui permet d'obtenir 17 quand on remplace x par 5, 20 quand on remplace x par 6,etc. À force de manipuler des fonctions, l'élève va transformer ces procédures en de véritables concepts, jouissant eux-mêmes de propriétés (croissance, continuité,...) et auxquels il est possible d'appliquer de nouvelles procédures (additionner, dérikver, intégrer,...)

Ainsi l'apprentissage mathématique se fait selon le schéma *du procédural au conceptuel*, et l'évocation d'un concept donne accès non seulement à un objet mathématique mais aussi à une série de procédures dans lesquelles il peut être impliqué. Plus il existe de procédures possibles, plus le concept est riche.

Pour Tall, [72], [44], le phénomène fondamental qui permet un apprentissage mathématique performant est un phénomène de compression. En effet, pour traiter des données, le cerveau utilise une mémoire de travail à court terme dont la capacité est très limitée, 6 à 7 éléments ([3]). Il en résulte que beaucoup de raisonnements nécessitent des transferts

([3]) Chez les calculateurs prodiges, elle atteindrait une vingtaine d'éléments.

continuels entre la mémoire de travail et la mémoire à long terme, ainsi que l'établissement de connections entre différentes zones de celle-ci. Le phénomène de compression a pour conséquence d'augmenter la capacité d'évocation d'un élément donné et donc d'augmenter la « productivité » de la mémoire de travail.

Lorsque la compression est suffisante, certains symboles acquièrent une signification flexible. Par exemple, « 3+2 » désigne aussi bien l'addition de 3 et 2 que la somme de ces deux nombres. Dans ce cas, TALL utilise le terme « procept » pour désigner l'amalgame entre le processus et le concept représentés par le même symbole. Pour lui, l'élève qui réussit en mathématique, est celui qui atteint le stade de la « proceptualisation ». La différence de stratégie entre l'utilisation flexible des procepts (par exemple, en sélectionnant la procédure la plus appropriée), et la fixation sur une procédure déterminée, est un des éléments les plus représentatifs de la distinction entre échec et réussite.

Synthétisant sa pensée, TALL, [72], considère que la pensée mathématique évolue dans trois « mondes mentaux » différents :

1. Un monde « d'expression conceptuelle » (*conceptual-embodied world*) à base d'objets et d'une approche sensorielle de ceux-ci afin d'observer, décrire, définir et déduire des propriétés qui se développent à partir d'expériences de pensée, jusqu'à la démonstration euclidienne.
2. un monde « proceptuel-symbolique » (*proceptual-symbolic*) à base d'actions, qui comprime des « schémas d'actions » en objets de pensée opérant dualement en tant que processus et concepts.
3. un monde « formel-axiomatique » (*formal-axiomatic*) à base de propriétés, qui construit des systèmes axiomatiques à partir de définitions formelles et de démonstrations ensemblistes.

Annexe B

L'analyse statistique implicative

B.1 Présentation

Cette méthode, élaborée par un groupe de didacticiens français sous la conduite de Régis Gras, permet d'étudier les possibles implications entre comportements des élèves. Nous nous limiterons ci-dessous à un exposé élémentaire des principes et de la technique de cette méthode. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter les références [43] et [42].

L'analyse implicative se propose de répondre à des questions du genre suivant :

Lorsqu'ils ont dû remplir tel questionnaire (examen, test, concours...) les participants (élèves, concurrents...) qui ont eu le comportement $\mathcal{A}$ ont-ils automatiquement eu aussi le comportement $\mathcal{B}$?

La question n'a de sens que si le comportement $\mathcal{A}$ est moins fréquent que le comportement $\mathcal{B}$. Chaque fois que nous considérerons une implication entre comportements, nous supposerons donc que cette condition est satisfaite.

Ajoutons que le mot *comportement* doit être compris dans un sens très large. Pour un élève qui présente un examen, cela sera généralement *fournir telle réponse*, ou *appliquer telle méthode*. Cela pourrait aussi être *Être membre de telle classe*.

De façon plus générale, on pourrait appliquer l'analyse implicative pour examiner des affirmations telles que *Tous les Suédois sont blonds*. Bien entendu, on sait très bien que cette affirmation est fausse dans l'absolu : il doit bien se trouver quelque part un Suédois brun ! Aussi la question doit-elle être comprise dans le sens « Est-il vrai que *presque tous* les Suédois sont blonds ? ». Et pour que cette question ait elle-même un sens, il convient de déterminer un critère quantitatif qui permettra éventuellement de rejeter l'hypothèse de blondeur de presque tous les Suédois.

L'analyse implicative, et le logiciel `CHIC` (1) mis au point par l'équipe de R. Gras, attribuent une *intensité d'implication* à toute formule du type $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des comportements d'*individus* (dans notre cas des élèves) et où, comme il a été précisé,

(1) *Classification hiérarchique implicative et cohésitive*

le comportement $\mathcal{B}$ est plus fréquent que le comportement $\mathcal{A}$. Cette intensité (dont la méthode de calcul est détaillée au paragraphe B.2) est d'autant plus proche de 1 que le nombre d'individus ayant le comportement $\mathcal{A}$ sans avoir le comportement $\mathcal{B}$ est faible (la valeur 1 correspond à une implication toujours vraie). Elle vaut 0,5 si les comportements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendants (au sens des probabilités).

L'analyse implicative remplace donc la question *lors de tel test, le comportement $\mathcal{A}$ entraîne-t-il le comportement $\mathcal{B}$?* par la question *quelle est l'intensité de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$?* Et une implication sera considérée comme d'autant plus « valable » que son intensité est proche de 1. On considère généralement des *seuils* d'intensité de 0,99, 0,95, 0,90, 0,85...

Aux paragraphes suivants, nous utiliserons l'analyse implicative en vue d'établir des relations d'implication entre comportements d'élèves, dans le cadre de leurs réponses aux items du pré-test ou du post-test. Ces relations d'implication ne doivent pas être interprétées comme étant toujours des relations de cause à effet. Par exemple, même si nous arrivons à la conclusion que l'implication *Être Suédois* $\Rightarrow$ *Être blond* est acceptable, on ne voit pas en quoi la nationalité suédoise peut influencer la couleur de cheveux. Cette implication ne peut être interprétée que comme *Il se fait que la plupart des Suédois sont blonds.*

Ne tombons pas non plus dans l'excès contraire : certaines implications statistiques *sont dues* à des relations de cause à effet... souffrant éventuellement des exceptions.

B.2 La technique

Ce paragraphe suppose une certaine familiarité *a priori* avec les techniques statistiques usuelles. Il est surtout destiné au lecteur qui désire avoir quelques indications techniques concernant l'analyse statistique implicative : comment on la définit, comment on la calcule. Les analyses dont les résultats sont présentés dans la suite n'utiliseront pas les résultats du présent paragraphe.

En vue de formaliser les idées présentées au paragraphe B.1, nous allons considérer un ensemble E d'*individus* (dans notre cas, ce seront des élèves) susceptibles d'avoir deux *comportements* notés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Adoptant les notations et représentations ensemblistes, nous noterons A l'ensemble des individus ayant le comportement $\mathcal{A}$ et B l'ensemble des individus ayant le comportement $\mathcal{B}$. Ces ensembles A et B sont de sous-ensembles de E. Lorsqu'elle est vérifiée dans l'absolu, l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ se traduit en termes ensemblistes par la relation

$$A \subset B$$

que nous pouvons agrémenter d'une représentation graphique :

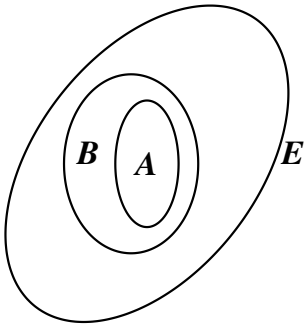


Fig. B.1

Le plus souvent, on se trouve en présence de situations où l'ensemble A n'est pas complè-

tement inclus à l'ensemble B : il déborde.

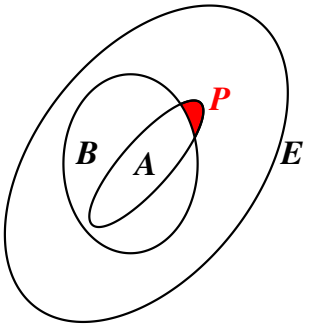


Fig. B.2

Si la zone de débordement, notée ici P, est suffisamment petite, on aura tendance à considérer l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ comme valable. Mais il convient de donner un sens précis à tout cela.

L'ensemble « litigieux » P est l'ensemble des individus qui ont le comportement $\mathcal{A}$ sans avoir le comportement $\mathcal{B}$, ce sont ceux qui violent l'implication.

Comme les éléments de P sont ceux de A qui *n'appartiennent pas* à B, nous aurons aussi besoin de donner un nom à l'ensemble de *tous* les individus qui n'appartiennent pas à B. Cet ensemble (le complémentaire de B) sera noté $\bar{B}$. L'ensemble P est l'intersection de A et $\bar{B}$: $P = A \cap \bar{B}$.

Enfin, nous désignons les nombres d'éléments des ensembles E, A, P et $\bar{B}$ par les notations n_E, n_A, n_P et $n_{\bar{B}}$.

Pour déterminer si l'ensemble P est *suffisamment petit*, nous allons adopter une point de vue probabiliste. Le quotient $\frac{n_A}{n_E}$ est la proportion d'éléments de E ayant eu le comportement $\mathcal{A}$. Nous pouvons l'interpréter comme étant la probabilité de ce qu'un individu pris au hasard dans E ait le comportement $\mathcal{A}$.

De même $\frac{n_P}{n_{\bar{B}}}$ vaut à peu près la probabilité de ce qu'un individu pris au hasard dans $\bar{B}$ ait le comportement $\mathcal{A}$.

Si les deux comportements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étaient *indépendants* au sens des probabilités, la réalisation de l'un n'aurait aucune influence sur la réalisation de l'autre. La proportion d'éléments de E ayant le comportement $\mathcal{A}$ serait alors très proche de la proportion d'éléments de $\bar{B}$ ayant ce comportement $\mathcal{A}$.

Autrement dit, les nombres $\dfrac{n_A}{n_E}$ et $\dfrac{n_P}{n_{\bar{B}}}$ seraient proches l'un de l'autre, ceci nous permet de tirer la conclusion suivante :

Si les deux comportements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étaient *indépendants*, on aurait

$$n_P \simeq \frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$$

Si, *a contrario*, cette égalité (approchée) n'est pas satisfaite, si le nombre n_P est *anormalement petit* par rapport à $\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$, on peut considérer que les éléments de A ont tendance à *ne pas être* dans $\bar{B}$, c'est-à-dire à être dans B. Et dans ce cas on considérera favorablement l'idée que $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$.

Le point de repère est donc fixé. Pour mesurer la validité de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, on compare le nombre n_P au quotient $\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$.

Cette comparaison se fait de la même manière que beaucoup de tests d'hypothèses classiques en statistique. Le lecteur trouvera un exposé détaillé de cette procédure dans les références [43] et [42]. Il nous suffira ici de dire que le nombre $\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}$ étant, en cas d'indépendance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, le nombre moyen d'éléments de l'ensemble P, on calcule la variable réduite

$$q = \frac{n_P - \frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}}{\sqrt{\frac{n_A \cdot n_{\bar{B}}}{n_E}}}$$

Sous les conditions usuelles concernant la taille de l'ensemble E, cette variable q admet une distribution de probabilité Z, normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

L'intensité φ de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est alors définie par l'égalité

$$\varphi = 1 - P(Z < q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_q^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

Ainsi, plus q est petit, c'est-à-dire plus n_P est petit, plus l'intensité d'implication φ est proche de 1. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendants, q vaut à peu près 0 et φ est proche de $\frac{1}{2}$.

On considère généralement comme significatives des implications d'intensité au moins 0,85 et on distingue des *seuils d'intensité* de 0,85, 0,90, 0,95 et 0,99. Le logiciel `CHIC` se charge des calculs. Il peut traiter des tableaux comportant plusieurs centaines d'individus et/ou de comportements.

B.3 L'analyse du pré-test de sixième primaire (2005–2006)

B.3.1 Les comportements possibles

Pour appliquer une technique telle que l'analyse implicative, il convient, lors du dépouillement des réponses des élèves de recenser un maximum d'informations relativement à leurs comportements. Chaque comportement reçoit un code. Un tableau croisé mentionne pour chaque élève quels comportements il a eus. Ce tableau est alors soumis au logiciel, qui élabore d'une part d'autres tableaux numériques mentionnant l'intensité de toutes les implications d'un comportement vers un autre, d'autre part un graphe sagittal représentant les implications entre comportements ayant les intensités les plus fortes.

Voici d'abord, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués.

Item 1

Pour cet item, nous avons recensé onze comportements qui pouvaient être le fait des élèves. Chacun de ces comportements est désigné par un code de quatre ou cinq caractères : I1C**. La lettre I indique qu'il s'agit d'un item du pré-test, le chiffre 1 qui suit est le numéro de l'item, la lettre C (initiale de « colonne ») sert de séparateur. Le code se termine par le numéro du comportement.

Les onze comportements repérés pour l'item 1 du pré-test sont les suivants :

I1C1 : La réponse de l'élève est correcte.
I1C2 : La réponse est incorrecte.
I1C3 : L'élève n'a pas répondu.
I1C4 : L'élève a mesuré des longueurs.
I1C5 : L'élève a calculé un périmètre.
I1C6 : L'élève a compté des (petits) carrés.
I1C7 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.
I1C8 : L'élève a utilisé une autre méthode.
I1C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.
I1C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes.
I1C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 2

Les comportements recensés à l'item 2 sont proches de ceux recensés à l'item 1 (un comportement inexistant à l'item 1, « Comptage d'autres éléments », est inséré en I2C12).

I2C1 : La réponse de l'élève est correcte.
I2C2 : La réponse est incorrecte.
I2C3 : L'élève n'a pas répondu.
I2C4 : L'élève a mesuré des longueurs.
I2C5 : L'élève a calculé un périmètre.
I2C6 : L'élève a compté des triangles.
I2C7 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.
I2C8 : L'élève a utilisé une autre méthode.
I2C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.
I2C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes.
I2C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.
I2C12 : L'élève a compté d'autres éléments.

Item 3

À cet item, nous avons recensé les comportements suivants :

I3C1 : La réponse de l'élève est correcte (indépendamment de la justification).

I3C2 : La réponse est incorrecte.

I3C3 : L'élève a dessiné les quinze carrés roses dans le grand rectangle.

I3C4 : L'élève a procédé par comptage.

I3C5 : L'élève a mesuré des longueurs.

I3C6 : L'élève a utilisé un petit carré comme unité d'aire.

I3C7 : L'élève a effectué une division ou une multiplication.

I3C8 : La justification est correcte.

I3C9 : La justification est partielle mais sans erreur.

I3C10 : La justification est erronée.

I3C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 4

Cette question ne comporte pas vraiment une « réponse correcte standard ». On s'est donc contenté de relever les réponses figurant sur les feuilles en distinguant les comportements suivants :

I4C1 : L'élève fournit les réponses auxquelles les rédacteurs du questionnaire s'attendaient : un carré 1×1, un carré 2×2 et un carré 3×3.

I4C2 : Parmi les réponses fournies figure un carré 1×1.

I4C3 : Parmi les réponses fournies figure un carré 3×3.

I4C4 : Parmi les réponses fournies figure un carré plus grand que 3×3.

I4C5 : La réponse comporte des répétitions.

I4C6 : La réponse fournie comporte une forme non carrée.

Item 5

Onze comportements ont été recensés pour cet item.

I5C1 : L'élève produit un dessin acceptable.

I5C2 : L'élève ne produit pas un dessin acceptable.

I5C3 : Le dessin de l'élève est imprécis.

I5C4 : Le dessin de l'élève comporte moins de triangles que l'original.

I5C5 : Le dessin de l'élève comporte des traits de construction et ceux-ci sont respectés.

I5C6 : Les côtés obliques du triangle constituant le corps de la poupée sont correctement alignés sur la diagonale du cadre (mode *global* de construction).

I5C7 : L'élève a tenu compte des graduations portées sur les quatre côtés du cadre.

I5C8 : L'élève a porté des marques sur l'original.

I5C9 : L'élève a utilisé le mode de construction *atomisé*.

I5C10 : L'élève a été perturbé par le décalage en hauteur.

I5C11 : L'élève a utilisé le mode de construction *local*.

Le premier élément de cette liste soulève la question de savoir ce qu'est un dessin « acceptable ». Nous avons considéré que c'était le cas dès que le dessin était reconnaissable.

Item 6

Cette fois, nous distinguons quinze comportements :

I6C1 : La réponse de l'élève est bonne et est accompagnée d'une justification correcte et complète.

I6C2 : La réponse n'est pas bonne ou la justification n'est pas correcte et complète.

I6C3 : La réponse est bonne (case rose cochée).

I6C4 : La réponse est incorrecte (case bleue cochée).

I6C5 : La justification est correcte.

I6C6 : La justification est partielle.

I6C7 : La justification est erronée.

I6C8 : La justification est absente.

I6C9 : L'élève calcule des aires en mesurant des longueurs et en appliquant une formule.

I6C10 : L'élève utilise une translation.

I6C11 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un découpage et une recomposition.

I6C12 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un comptage.

I6C13 : L'élève a apposé des marques sur la figure.

I6C14 : Les marques apposées sont pertinentes.

I6C15 : L'élève confond aire et périmètre ou s'imagine que l'aire grandit en même temps que le périmètre.

B.3.2 Des comportements de réussite et d'échec

Une première analyse implicative, portant sur l'ensemble des réponses des élèves, permet de dégager, item par item, les comportements associés à des réussites et ceux associés à des échecs.

Item 1

Le logiciel `CHIC` produit le graphe suivant :

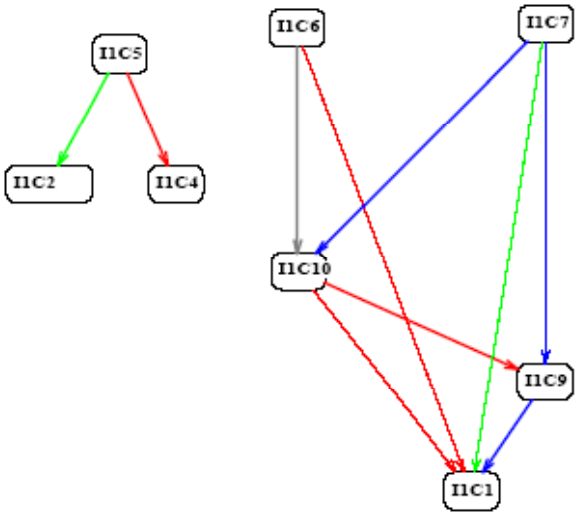


Fig. B.3

Sur les figures de ce type ne figurent que les codes associés à des comportements qui interviennent dans des implications ayant une intensité d'au moins 0,85.
La couleur d'une flèche indique l'intensité de l'implication correspondante :
- Rouge : intensité d'au moins 0,99.
- Bleu : intensité comprise entre 0,95 et 0,99.
- Vert : Intensité comprise entre 0,9 et 0,95.
- Noir : Intensité comprise entre 0,85 et 0,9.

Clairement, le graphe est divisé en deux sous-graphes. Celui de droite aboutit en I1C1 qui est la réussite. Les divers éléments de ce sous-graphe impliquent cette réussite, directement ou indirectement, et doivent donc être considérés eux-mêmes comme des comportements de réussite.

Les implications n'ont pas toutes la même intensité. Ainsi, le comptage de carrés (I1C6)

implique plus fortement la réussite que la méthode par découpage et recomposition (I1C7). On peut la considérer comme plus efficace (à cet item-ci).

Les deux comportements I1C6 et I1C7 impliquent aussi — avec des intensités différentes — le comportement I1C10 (le fait d'avoir porté des marques pertinentes sur la figure). Ceci montre l'utilité pour l'élève qui ne maîtrise pas d'emblée le problème, d'apposer des marques qui servent à supporter son raisonnement. On note d'ailleurs que les élèves qui comptent des carrés ont moins recours à cette aide possible : l'intensité de l'implication de I1C6 vers I1C10 est plus faible que celle de I1C6 vers I1C1 alors que celle de I1C7 vers I1C10 est plus forte que celle de I1C7 vers I1C1. Tout cela est cohérent avec l'idée que le comptage de carrés est — dans les circonstances de ce test — la méthode la plus performante.

L'implication de I1C10 vers I1C9 ne nous apprend rien : si les marques supplémentaires sont pertinentes, forcément il y a des marques. Quant au sous-graphe de gauche, il nous confirme que les élèves qui calculent des périmètres n'arrivent pas à répondre à la question correctement, ce qui ne nous surprend pas. Mais on notera que si le comportement I1C4 est plutôt un comportement d'échec puisqu'il se rattache à ce groupe, néanmoins il n'entraîne pas forcément la production d'une réponse incorrecte : l'implication correspondante n'apparaît pas sur le graphe, son intensité est donc inférieure à 0,85, (sa valeur exacte est 0,76, ce qui est peu significatif).

Item 2

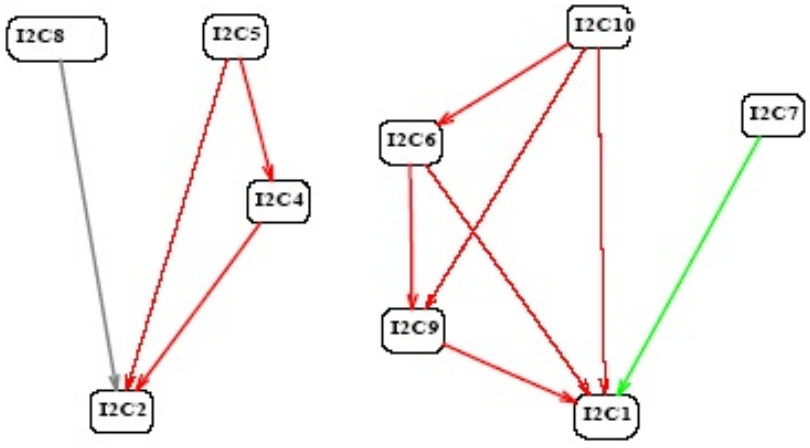


Fig. B.4

Bien que les items 1 et 2 puissent *a priori* être considérés comme assez semblables, on constate quelques différences. Le sous-graphe des comportements de réussite rassemble les mêmes comportements que dans l'item 1. Cependant, la procédure par découpage et recomposition (I2C7 dans l'item 2, I1C7 dans l'item 1) provoque (relativement) plus d'erreurs, ce qui se répercute sur l'intensité d'implication. De plus, les implications de ce comportement I2C7 vers I2C10 et I2C9 (apposition de marques sur le dessin) sont d'intensité inférieure à 0,85 et n'apparaissent donc pas sur le graphe. Ces marques supplémentaires sont sans doute plus difficiles à imaginer que dans l'item 1.

Le comportement I2C6 est impliqué par I2C10, alors que dans l'item 1, la flèche correspondante allait dans l'autre sens. Le comptage est donc plus fréquent que l'apposition de marques. Le rôle de celles-ci est différent. Dans le sous-graphe des comportements d'échec, la procédure par mesurage de longueurs (I2C4) entraîne cette fois très nettement un échec.

Item 3

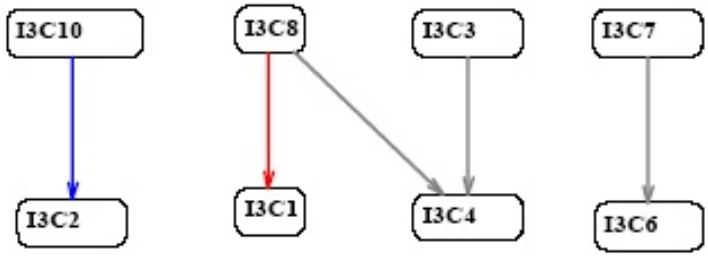


Fig. B.5

Ce graphe sépare bien les comportements d'échec I3C10 et I3C2. À la réussite I3C1 sont associés I3C8, ce qui est normal, mais aussi I3C3 (dessin des quinze carrés 3×3 dans le rectangle) et I3C4 (comptage), I3C3 entraînant — faiblement — I3C4. Tout en étant dans le même groupe que la réussite I3C1, ni I3C3, ni I3C4 ne l'entraînent significativement.

Un troisième groupe rassemble I3C6 (usage des petits carrés comme unités) et I3C7 (division ou multiplication). Ces procédures ne sont associées ni à la réussite ni à l'échec !

Item 4

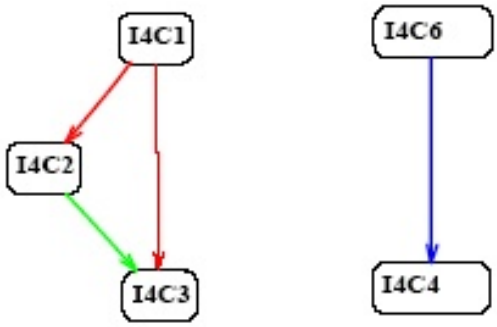


Fig. B.6

Le sous-graphe de gauche rassemble les comportements auxquels s'attendaient les auteurs du questionnaire, en particulier I4C1 (lequel entraîne fatalement I4C2 et I4C3). Nous les considérerons donc comme des comportements de réussite.

Nous le ferons d'autant plus facilement que le deuxième sous-graphe associe deux comportements (I4C4 : production d'un carré plus grand que 3×3, I4C6 : production d'une forme non carrée) qui ne peuvent être considérés que comme des échecs.

Item 5

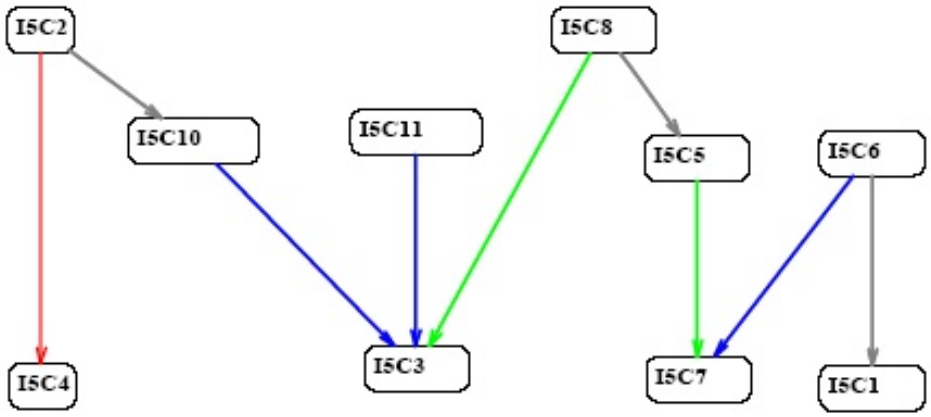


Fig. B.7

Voici un graphe dont on pourrait dire qu'il reflète une situation en pleine évolution. On n'y trouve pas de sous-graphes déconnectés, mais néanmoins trois parties clairement différentes.

À l'extrême gauche, l'implication I5C2 ⇒ I5C4 rassemble les dessins inacceptables et les dessins incomplets, deux productions certainement significatives d'échec. À l'extrême droite, I5C5 (respect des traits de construction), I5C6 (significatif de la perception globale), I5C7 (respect des graduations du cadre) et I5C1 (dessins acceptables) sont des comportements liés à la réussite.

Entre les deux, les comportements I5C10 (perturbation due au décalage en hauteur), I5C11 (perception locale), I5C3 (production de dessins imprécis) ne sont ni de vrais échecs, ni de vraies réussites. Ce groupe est lié aux deux autres d'une part par I5C2 (dessins inacceptables) qui entraîne — faiblement — I5C10 et d'autre part par I5C8 (apposition de traits sur l'original) qui entraîne — tout aussi faiblement — I5C5 et I5C3.

Le comportement I5C9, caractéristique de la perception atomisée, est absent sur le diagramme. En fait, l'intensité de l'implication de I5C9 vers I5C3 est de 0,75. I5C9 se rattache donc au groupe central.

Ainsi, des trois perceptions *atomisée, locale* et *globale* que nous avions détectées sur les copies des élèves, seule la perception globale est un signe de réussite à cet item. Les deux autres, constituent des étapes dont on peut souhaiter qu'elles ne soient que transitoires.

Item 6

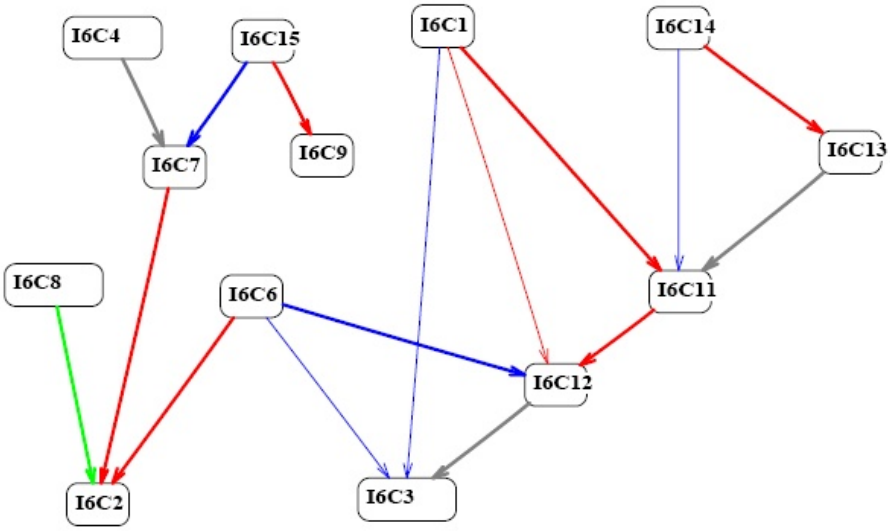


Fig. B.8

Mentionnons d'abord que pour simplifier ce graphe, nous en avons retiré le comportement I6C5 (Justification correcte qu'elle qu'en soit la forme) qui s'est avéré être rigoureusement équivalent à I6C1 (Bonne réponse avec justification correcte et complète). On distingue facilement deux grandes composantes :

– I6C4 (l'élève a coché la case correspondant à la mauvaise réponse), et I6C15 (confusion aire-périmètre) entraînent I6C7 (justification erronée). À ce trio de comportements d'échecs se rattache I6C9 (usage de formules) lui-même impliqué par I6C15.
  I6C8 (pas de justification) est aussi un comportement d'échec. I6C8 et I6C7 entraînent I6C2. C'est normal puisque le comportement I6C2 est attribué dès que la réponse est mauvaise ou que la justification est incorrecte ou incomplète. I6C2 n'est cependant pas significatif d'un échec, car il peut être dû à la production d'une justification partielle mais sans erreur. I6C2 fait le pont entre les deux parties du graphe.
– Les comportements I6C1, I6C13 (apposition de marques), I6C14 (pertinence des marques apposées), I6C11 (usage d'un puzzle), I6C12 (dénombrement) et I6C3 sont associés à la réussite et constituent la seconde partie du graphe.

En particulier, la réussite (avec justification) entraîne l'usage combiné d'un puzzle et d'un dénombrement (même si ces techniques sont utilisées implicitement). Par contre, elle n'entraîne pas l'apposition de marques sur la figure : certains élèves peuvent s'en passer.

B.3.3 Structurer les comportements d'échec

Au fil des paragraphes précédents, nous avons classé les comportements suivants comme significatifs d'échecs : I1C2, I1C4, I1C5, I2C2, I2C4, I2C5, I2C8, I3C2, I3C10, I4C4, I4C6, I5C2, I5C4, I6C4, I6C7, I6C8, I6C9, I6C15. En les rassemblant sur un même diagramme, nous ferons apparaître des implications entre comportements relatifs à des items différents.

Nous structurons ainsi notre approche de ces comportements d'erreur.

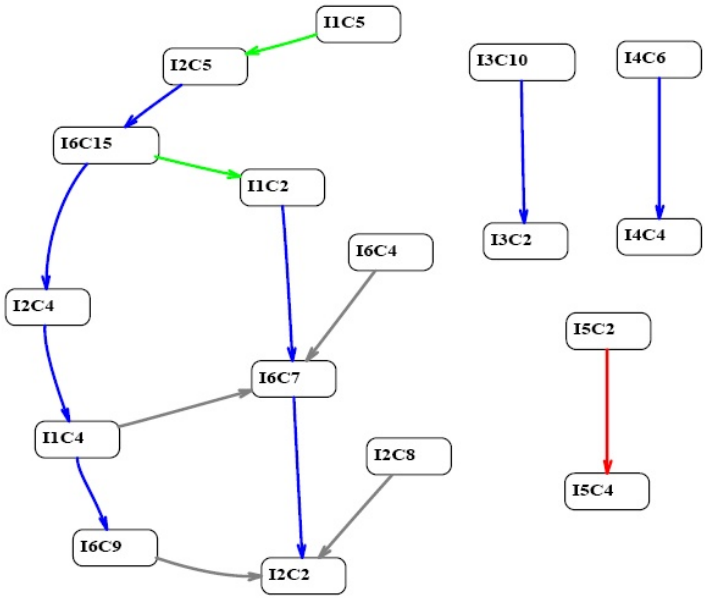


Fig. B.9

Par souci de lisibilité, seul le squelette du graphe implicatif des comportements mentionnés ci-dessus a été conservé. De façon plus précise, chaque fois que le graphe complet comportait trois implications dont l'une était la composée des deux autres, par exemple $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$, on n'a conservé que les deux premières. Cette technique permet d'obtenir un graphe lisible en ne perdant qu'un minimum d'information.

Sur ce graphe nous constatons d'abord l'isolement des comportements d'erreur associés aux items 3, 4 et 5. Il s'agit donc d'erreurs spécifiques nécessitant des remédiations séparées. Par contre les comportements d'erreurs aux autres items s'organisent en une grande famille au long d'une courbe qui va de I1C5 à I6C9.

On trouve là, enchaînées, toutes les erreurs dues à l'usage de formules ou à des mesurages. On pourrait appeler cette courbe *la piste des calculs routiniers mal assimilés*. Mais ne dramatisons pas : ces erreurs sont relativement peu fréquentes. De I1C5 à I6C9, le taux d'erreur ne passe que de 6 % à 12 %. À la courbe précitée se raccrochent de façon naturelle les comportements I1C2, I6C7 et I2C2. L'implication de I6C4 vers I6C7 ne nous apprend pas grand-chose, cependant que I2C8 (usage d'une « autre méthode ») rassemble sans doute (notamment) des erreurs variées.

B.3.4 Structurer les comportements de réussite

Le graphe de la figure B.10 a été réalisé de la même manière que le précédent, à partir des comportements de réussite. Il s'agit des comportements suivants :

Item 1 : I1C1, I1C6, I1C7, I1C9, I1C10

Item 2 : I2C1, I2C6, I2C7, I2C9, I2C10

Item 3 : I3C1, I3C3, I3C4, I3C8

Item 4 : I4C1, I4C2, I4C3

Item 5 : I5C1, I5C5, I5C6, I5C7

Item 6 : I6C1, I6C3, I6C11, I6C12, I6C13, I6C14

À la différence du graphe des comportements d'erreur, le graphe des réussites n'est pas scindé en plusieurs parties, ce qui montre le caractère global des acquisitions à mettre en place.

Comme on l'a signalé plus haut, les implications figurant sur ce graphe, ne correspondent pas nécessairement à des relations de cause à effet. Ce n'est pas la justification partielle fournie à l'item 6 qui peut elle-même provoquer la réussite à l'item 1. Cependant, l'implication I6C6 ⇒ I1C1 a une intensité supérieure à 0,9. Rappelons donc que la signification à attribuer à cette implication est *les élèves qui produisent une justification partielle à l'item 6 ont tendance à figurer parmi ceux qui réussissent à l'item 1* (la tendance étant mesurée par l'intensité). On pourrait en déduire que *les compétences requises pour produire une justification partielle à l'item 6 permettent aussi à certains élèves — l'importance de ce* certains *étant liée à l'intensité de l'implication — de réussir à l'item 1.*

Remarquons sur le diagramme B.10 la chaîne de neuf implications très fortes (six d'entre elles sont d'intensité 0,99, les trois autres au moins 0,95) qui va de I5C6 à I1C1 :

I5C6 ⇒ I6C1 ⇒ I6C11 ⇒ I2C10 ⇒ I2C6 ⇒ I2C9 ⇒ I1C6 ⇒ I6C12 ⇒ I2C1 ⇒ I1C1

De plus sur cette chaîne vient se greffer une « déviation » (il est vrai un peu moins fortement enchaînée) : I6C6 ⇒ I1C10 ⇒ I1C9 ⇒ I2C1.

C'est ainsi un ensemble cohérent de comportements associés à la réussite des trois items qui portent sur la comparaison d'aires qui est mis en évidence. Il s'agit des comportements I1C9, I1C10, I2C9, I2C10, liés à l'apposition de marques sur les figures des items 1 et 2, à la réussite I6C1 à l'item 6, aux démarches I6C11 et I6C12 mises en œuvre à cette occasion (dénombrement et puzzle). Nous voyons que nous trouvons ici l'essentiel des éléments de la réussite aux items 1, 2 et 6. Nous pourrions parler ici d'un *modèle mental* de résolution de ces items, reposant sur des procédures de dénombrement et faisant appel à l'apposition de marques sur les figures.

Autre élément remarquable, la présence du comportement I5C6 à la source même de cette chaîne. Voilà qui montre bien l'importance de la perception globale dans les activités proposées.

Un autre modèle mental de résolution des items 1 et 2 apparaît dans la chaîne I1C7 ⇒ I2C7 ⇒ I2C1 ⇒ I1C1. Celui-ci repose sur les procédures de découpage et de recomposition. Il est moins marqué et moins utilisé que le précédent.

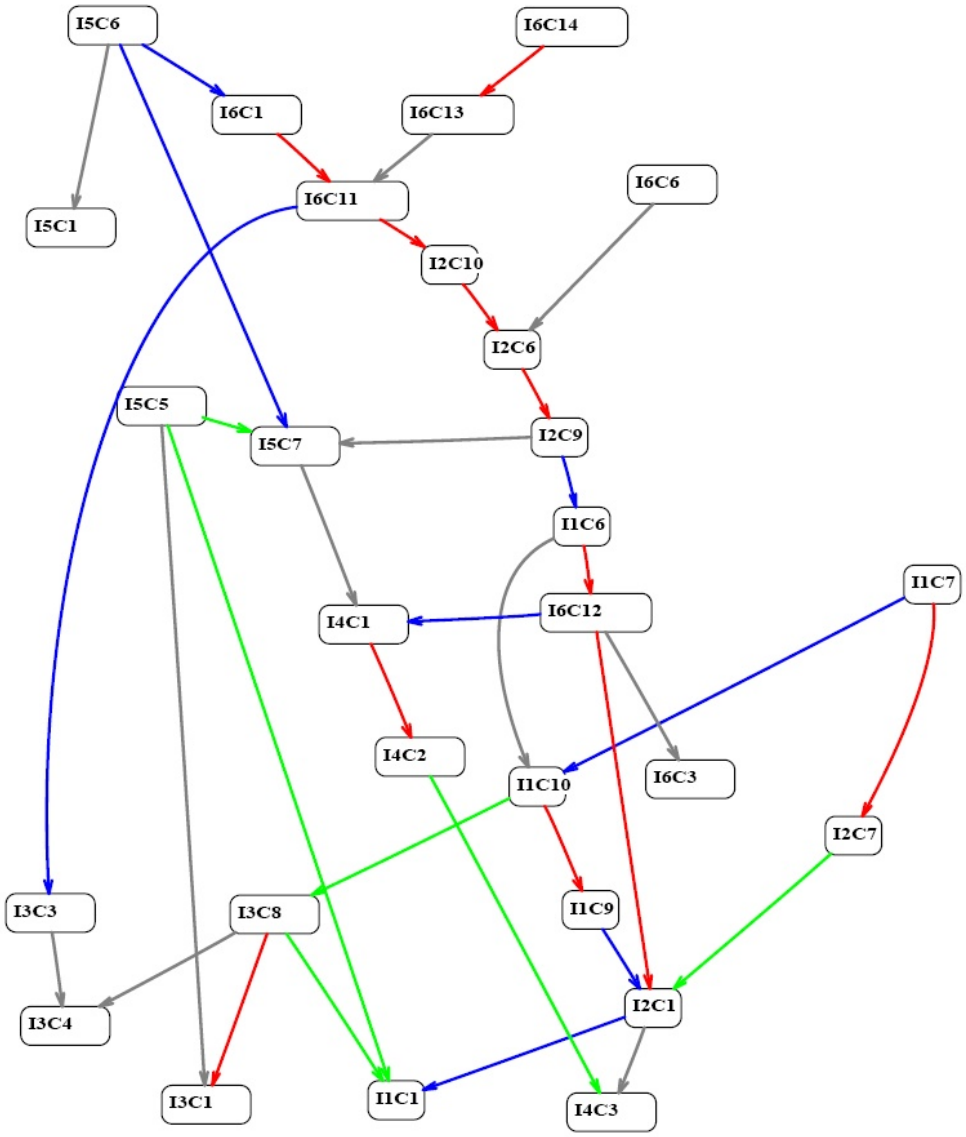


Fig. B.10

Intéressons-nous ensuite aux comportements situés aux sources du graphe B.10, c'est-à-dire ceux qui ne sont impliqués (avec au moins une intensité de 0,85) par aucun autre. Il s'agit des comportements I1C7, I5C5, I5C6, I6C6 et I6C14. Comme ils sont moins fréquents que ceux qu'ils impliquent, on peut admettre qu'ils sont plus difficiles à acquérir, qu'ils correspondent donc à une meilleure maîtrise des concepts en jeu. Ils ne sont cependant pas nécessairement rares comme le montre le tableau suivant :

Code	Fréquence	Signification
I6C14	7,2%	Pertinence des marques apposées, à l'item 6
I5C6	15,4%	Perception globale, à l'item 5
I1C7	19,2%	Méthode par découpage et recomposition, à l'item 1
I6C6	34,8%	Justification partielle, mais sans erreur, à l'item 6
I5C5	48,6%	Usage et respect de traits de construction, à l'item 5

Ces cinq comportements correspondent à cinq facettes différentes de l'activité d'un élève qui remplit le questionnaire de ce pré-test. Leurs positions à la source du graphe leur confèrent une importance particulière.

Les figures ci-dessous indiquent les comportements impliqués directement par chacun des cinq comportements précités.

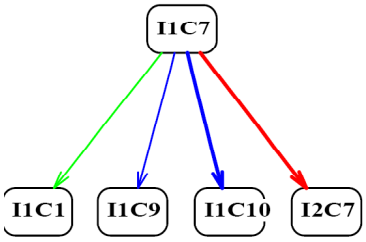


Fig. B.11

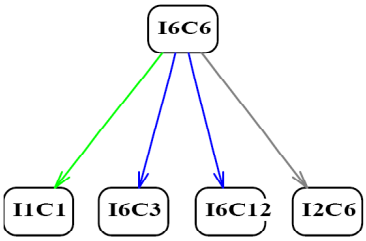


Fig. B.12

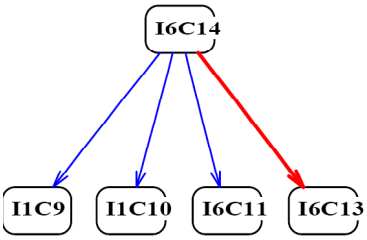


Fig. B.13

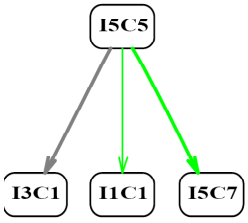


Fig. B.14

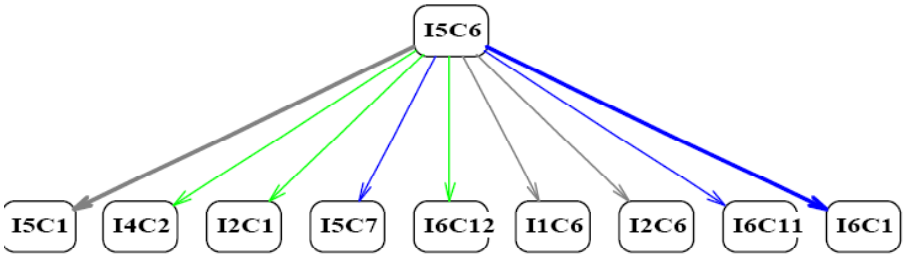


Fig. B.15

La plus spectaculaire de ces figures est la figure B.15 qui montre à nouveau l'importance de la perception globale telle qu'elle se manifeste à l'item 5. Elle entraîne en effet directement la réussite aux items 2, 5 et 6 (avec il est vrai des intensités n'atteignant pas 0,95). Elle entraîne aussi directement les démarches I6C11 et I6C12 déjà évoquées, ainsi que — fait nouveau — le comportement I4C2. Il s'agit de la production à l'item 4 d'un carré 1×1. Nous avons déjà signalé que ce carré 1×1 apparaît plus rarement que les carrés 2×2 et 3×3. Cela peut se comprendre car il n'y a rien à construire pour produire un tel carré à partir d'un ensemble de carrés identiques. Les élèves qui ont pensé à dessiner un carré 1×1 ont compris que ce dessin n'est qu'un cas limite d'une famille générale et qu'il n'y a pas lieu de le mettre à part. La perception globale apparaît ainsi comme un signe de maturité mathématique naissante.

D'autres comportements repris au tableau ci-dessus impliquent également directement la réussite à un ou plusieurs items : I5C5 implique les réussites I1C1 et I3C1 aux items 1 et 3, bien qu'avec une intensité n'atteignant pas 0,95. C'est une autre compétence qui est ainsi mise en évidence : réaliser des constructions correctement. De son côté, I6C6

implique I1C1.

Le rôle de I6C14 est sans doute moins clair car ce comportement n'entraîne directement la réussite à aucun item, et n'entraîne pas, même indirectement, la réussite à l'item 6. Sa position dans le graphe donne néanmoins à penser qu'il convient également de lui accorder une attention particulière. Apposer des marques sur une figure signifie construire soi-même le support de son raisonnement !

B.4 L'analyse du post-test de sixième primaire (2005–2006)

B.4.1 Les comportements possibles

Les codes utilisés pour désigner les comportements recensés au post-test sont semblables à ceux utilisés pour le pré-test. Pour les distinguer aisément de ceux-ci, les codes du post-test commencent par la lettre J au lieu de I.

Voici, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués. Aux items 1 et 2 les comportements recensés sont identiques à ceux du pré-test. Néanmoins, nous les rappelons ci-dessous.

Item 1

J1C1 : La réponse de l'élève est correcte.
J1C2 : La réponse est incorrecte.
J1C3 : L'élève n'a pas répondu.
J1C4 : L'élève a mesuré des longueurs.
J1C5 : L'élève a calculé un périmètre.
J1C6 : L'élève a compté des (petits) carrés.
J1C7 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.
J1C8 : L'élève a utilisé une autre méthode.
J1C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.
J1C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes.
J1C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 2

J2C1 : La réponse de l'élève est correcte.
J2C2 : La réponse est incorrecte.
J2C3 : L'élève n'a pas répondu.
J2C4 : L'élève a mesuré des longueurs.
J2C5 : L'élève a calculé un périmètre.
J2C6 : L'élève a compté des triangles.
J2C7 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.
J2C8 : L'élève a utilisé une autre méthode.
J2C9 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.
J2C10 : Les marques ajoutées sont pertinentes.
J2C11 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.
J2C12 : L'élève a compté d'autres éléments.

Item 3

À cet item, nous avons recensé les comportements suivants :

J3C1 : La réponse de l'élève est correcte (indépendamment de la justification).

J3C2 : La réponse est incorrecte.

J3C3 : L'élève a procédé par multiplication.

J3C4 : L'élève a procédé par division.

J3C5 : L'élève a compté des parallélogrammes.

J3C6 : L'élève a compté des triangles

J3C7 : La justification est correcte.

J3C8 : La justification est partielle mais sans erreur.

J3C9 : La justification est erronée.

J3C10 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 4

Pas plus qu'au pré-test, cette question ne comporte vraiment une « réponse correcte standard ». Les auteurs du questionnaire s'attendaient à trouver sur les feuilles au moins des assemblages de deux et quatre triangles. Certains élèves ont produit des assemblages de huit triangles ou plus. Nous avons limité le recensement aux comportements suivants :

J4C1 : L'élève a produit un assemblage de deux triangles.

J4C2 : L'élève a produit un assemblage de quatre triangles.

J4C3 : L'élève a produit un assemblage (faux) de cinq triangles.

J4C4 : L'élève a produit un assemblage de huit triangles.

J4C5 : L'élève a produit un ou des assemblages de plus de huit triangles.

J4C6 : La réponse comporte des répétitions.

J4C7 : La réponse fournie comporte une forme non triangulaire ou un triangle impossible à réaliser à partir des formes données.

J4C8 : L'élève mentionne l'impossibilité de réaliser des assemblages de trois, cinq ou six triangles.

Item 5

Quatorze comportements ont été recensés pour cet item.

J5C1 : L'élève produit un dessin acceptable.

J5C2 : L'élève ne produit pas un dessin acceptable.

J5C3 : Le dessin de l'élève est imprécis.

J5C4 : Le dessin de l'élève est incomplet.

J5C5 : Le dessin de l'élève comporte des traits de construction et ceux-ci sont respectés.

J5C6 : Les côtés obliques du dessin qui devaient être alignés sur les diagonales du cadre le sont effectivement.

J5C7 : L'élève a tenu compte des graduations portées sur les quatre côtés du cadre.

J5C8 : L'élève a porté des marques sur l'original.

J5C9 : L'élève a utilisé le mode de construction *atomisé*.

J5C10 : L'élève a été perturbé par le décalage en hauteur.

J5C11 : L'élève a utilisé le mode de construction *local*.

J5C12 : L'élève a utilisé le mode de construction *global*.

J5C13 : L'élève a dessiné le quadrillage oblique du cadre.

J5C14 : L'élève a dessiné le quadrillage cartésien du cadre

Comme au pré-test, nous avons considéré qu'un dessin était acceptable dès qu'il était reconnaissable.

Item 6

Cette fois, nous distinguons quinze comportements :

J6C1 : La réponse de l'élève est bonne et est accompagnée d'une justification correcte et complète.

J6C2 : La réponse n'est pas bonne ou la justification n'est pas correcte et complète.

J6C3 : La réponse est équivalente à « les deux aires sont égales ».

J6C4 : La case verte est cochée, mais pas la bleue.

J6C5 : La case bleue est cochée, mais pas la verte.

J6C6 : La justification est correcte, quelle qu'en soit la forme.

J6C7 : La justification est partielle, sans erreur.

J6C8 : La justification est erronée.

J6C9 : La justification est absente.

J6C10 : L'élève calcule des aires en mesurant des longueurs et en appliquant une formule.

J6C11 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un découpage et une recomposition.

J6C12 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un comptage.

J6C13 : L'élève a apposé des marques sur la figure.

J6C14 : Les marques apposées sont pertinentes.

J6C15 : L'élève confond aire et périmètre ou s'imagine que l'aire grandit en même temps que le périmètre.

B.4.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

Un premier diagramme implicatif nous montre que les comportements de réussite à cet item sont les mêmes qu'à l'item correspondant du pré-test (*figure B.3*), à l'exception de J1C7 qui n'apparaît pas sur la figure. La fréquence de la méthode par découpage et recomposition baisse de 19,6 % au pré-test à 15,8 % au post-test. La non-présence de l'implication J1C7 ⇒ J1C1 montre aussi que cette méthode donne plus facilement lieu à des erreurs qu'au pré-test. Elle est donc moins performante.
Les comportements d'échecs, trop rares sans doute, ne donnent pas lieu à des implications significatives.

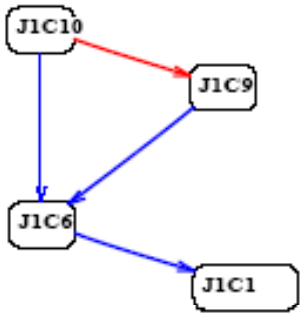


Fig. B.16

Nous pouvons vérifier la stabilité des comportements de réussite en rassemblant en un même diagramme ceux qui sont relatifs à l'item 1 du pré-test et ceux qui sont relatifs au post-test.

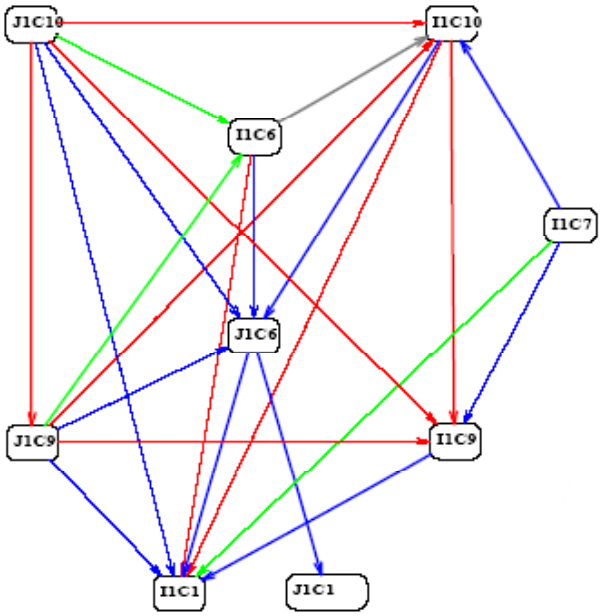


Fig. B.17

Certains comportements sont relativement stables : les élèves qui apposent des marques — pertinentes ou non — sur le dessin au post-test l'avaient déjà fait au pré-test. Mais cette fois ces marques servent surtout de support à la démarche de dénombrement des carrés puisque J1C9 et J1C10 impliquent J1C6. On note aussi que les élèves qui avaient utilisé le dénombrement au pré-test le font encore au post-test. La réussite J1C1 au post-test n'est impliquée que par J1C6. Cette réussite est cependant plus fréquente qu'au pré-test : son taux est de 92,5 % contre 85,9 % au pré-test.

Item 2

Nos constatations relatives à la réussite à cet item sont semblables à celles qui concernaient l'item 1 (*voir la figure B.3*). Ici aussi, la méthode par découpage et recomposition disparaît du graphique. Elle a cependant été utilisée par autant d'élèves que lors du pré-test. Elle s'avère donc moins performante, ainsi que c'était le cas à l'item 1.

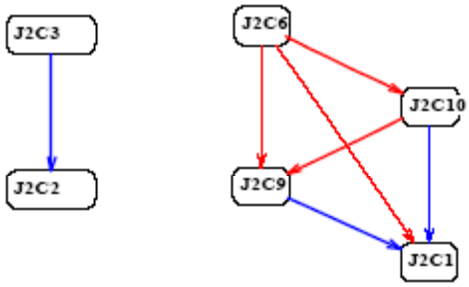


Fig. B.18

Un nouveau comportement d'échec apparaît : l'absence de réponse J2C3. Mais il convient de rester nuancé : cette absence de réponse n'est le fait que de moins de 5 % des élèves. Quant au taux de réussite, il est beaucoup plus important qu'à l'item 2 du pré-test : 84 % au lieu de 64 %. On note un nombre non négligeable de réussites basées sur le comptage d'autres éléments que les petits triangles.

La stabilité des comportements d'un test à l'autre apparaît sur le graphique « conjoint » ci-dessous :

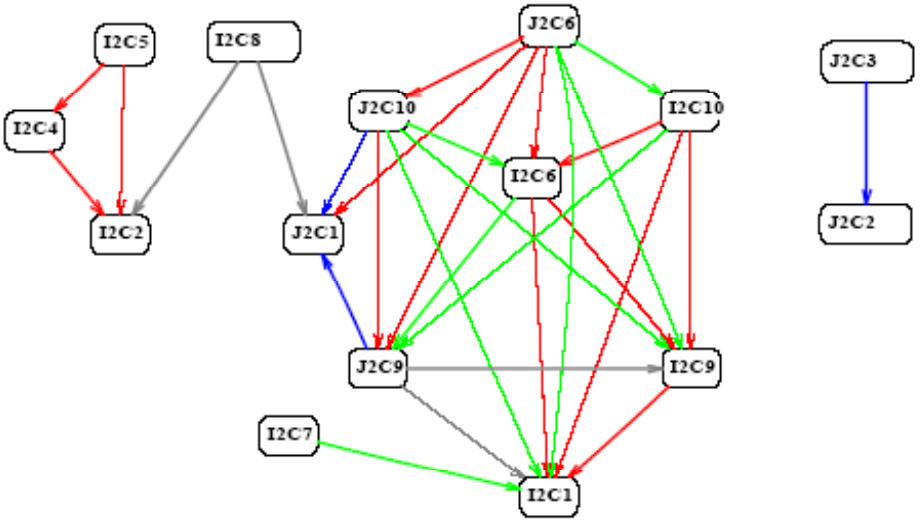


Fig. B.19

On y voit très clairement le rôle joué par l'apposition de marques ou dessins sur la figure dans la réussite. On remarque aussi que le comportement I2C8 (utilisation d'une « autre méthode » lors du pré-test) entraîne l'échec au post-test mais la réussite au pré-test. Voilà qui constituerait un progrès pour les élèves concernés, mais la faible intensité des deux implications issues de I2C8 invite à la prudence.

Item 3

L'analyse implicative ne nous apprend pas grand chose à propos de cet item. Contentons-nous du graphe conjoint des items 3 du pré-test et du post-test :

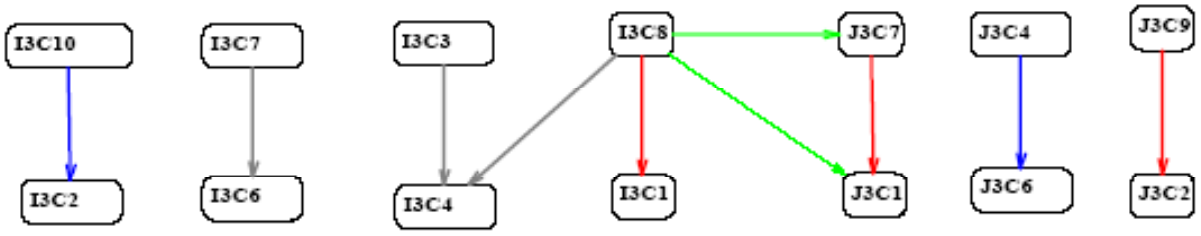


Fig. B.20

La seule information intéresane est constituée par l'implication (d'intensité comprise entre 0,9 et 0,95) de I3C8 vers J3C7 : les élèves qui lors du pré-test avaient fourni une justification partielle ont tendance à fournir une justification complète et correcte au post-test.

Item 4

Le graphe conjoint des deux items 4 du pré-test et du post-test attire l'attention sur le comportement J4C8 : *avoir mentionné (au post-test) l'impossibilité de réaliser des assemblages de 3, 5 ou 6 triangles conformes à la consigne.* Ce comportement — significatif

d'élèves maîtrisant la situation et n'hésitant pas à fournir un renseignement non demandé — entraîne au pré-test la production des trois carrés 1×1, 2×2, 3×3 et au post-test, il entraîne directement la production d'un assemblage de quatre triangles et indirectement celle d'un assemblage de deux triangles. Nous aurons l'occasion de reparler du comportement J4C8 dans la suite.

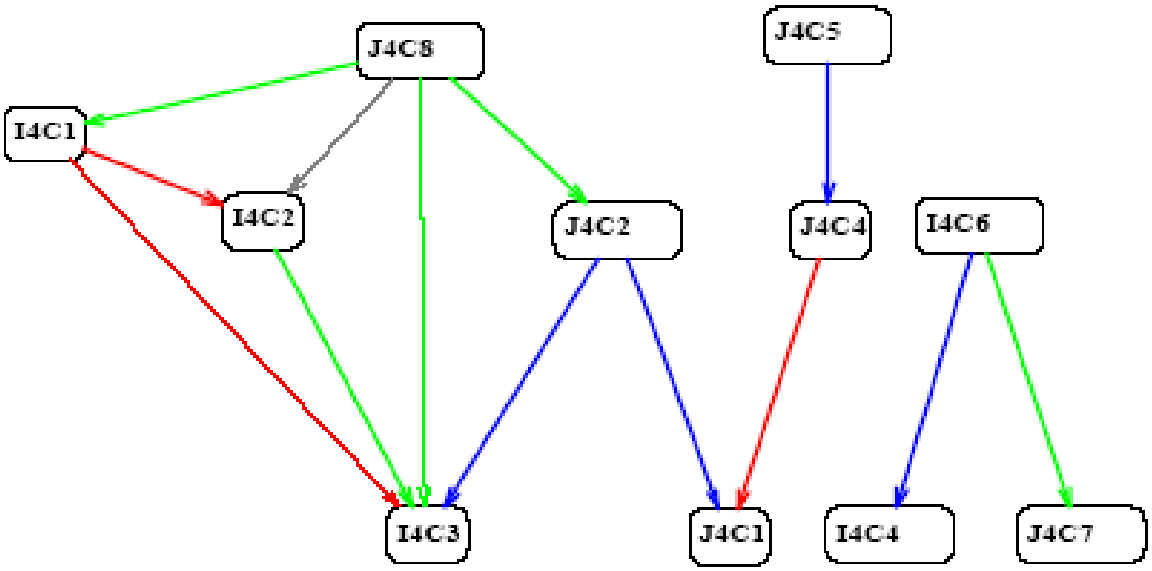


Fig. B.21

Item 5

Le graphe associé à cet item classe la perception atomisée J5C9 parmi les comportements d'échec (*figure B.23*).

Le sous-graphe des comportements de réussite (*figure B.22*) est assez touffu. On y remarque deux comportements-sources : J5C8 et J5C13.

Le premier (J5C8, « Apposition de marques sur l'original ») est à la base d'un flux d'implications boutissant à la réussite J5C1 en passant par J5C11 (perception locale). Du second (J5C2, « Dessin du quadrillage oblique du cadre ») jaillit un autre flux d'implications parmi lesquelles J5C12 (perception globale). Avant qu'ils se rejoignent en J5C5 et J5C7, le seul lien entre les deux flux est l'implication J5C6 $\Rightarrow$ J5C14.

Les deux modes de perception, local et global, sont ainsi bien différenciés, tout en étant tous deux des facteurs de réussite.

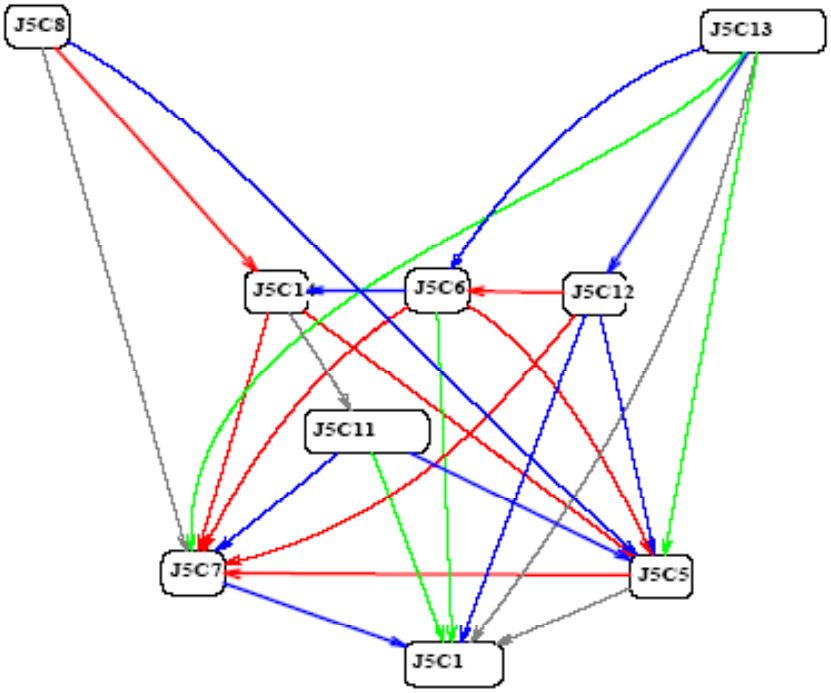


Fig. B.22

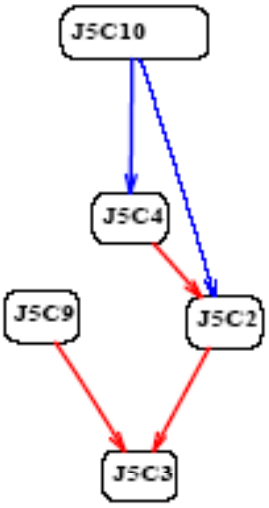


Fig. B.23

Nous ne dessinons pas ici l'intégralité du graphe conjoint des comportements relatifs aux items 5 des deux tests. Ce graphe est trop touffu pour être lisible. Mais nous en présentons un fragment : celui qui prend sa source en J5C8 (*Fig. B.24*). On y remarquera la flèche de J5C8 vers I5C9. Ainsi, les élèves qui, au post-test, se sont aidés de marques placées sur la figure originale avaient eu tendance au pré-test à adopter le mode de perception atomisé. Au post-test, ils ont évolué vers le mode local.

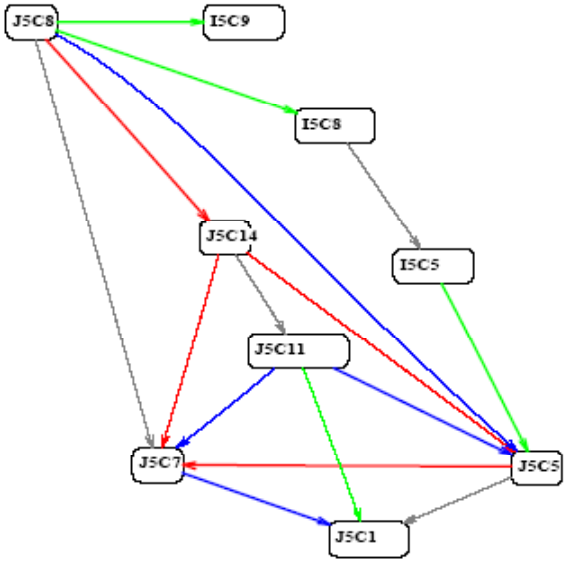


Fig. B.24

Item 6

Le graphe relatif à cet item est d'une limpidité absolue (comme au prétest, le comportement J6C6, strictement équivalent à J6C1, a été éliminé).

– à droite les comportements de réussite : J6C1, J6C3, J6C11 (découpage et recomposition, même implicites), J6C12 (dénombrement, même implicite), J6C13 et J6C14

(apposition de marques et pertinence de celles-ci) ; J6C13 et J6C14 sont rigoureusement équivalents. Nous ne plaçons que J6C13 sur les diagrammes.

– à gauche les comportements d'échec : J6C4 et J6C5 (une seule des cases est cochée), J6C8 et J6C9 (justification incorrecte ou absente), J6C10 (usage de formules ou de mesure).

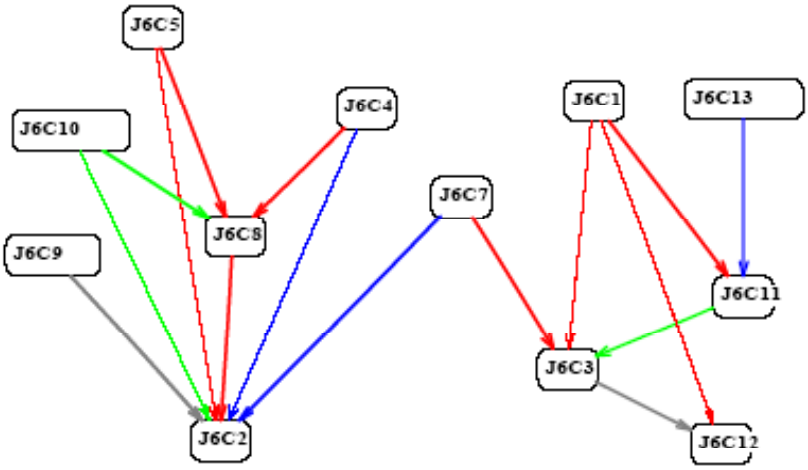


Fig. B.25

Entre les deux, l'implication J6C7 ⇒ J6C2 sert d'intermédiaire ; il en était déjà ainsi au pré-test (flèche I6C6 ⇒I6C2, *figure B.8*).

À nouveau, le graphe conjoint des comportements de réussite aux items 6 du pré- et du post-test met en évidence la stabilité des démarches utilisées :

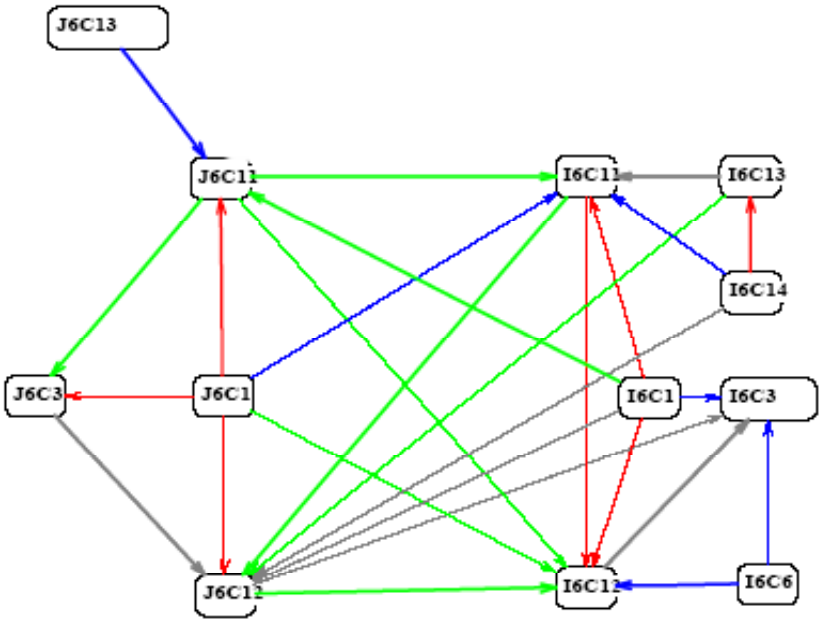


Fig. B.26

La principale différence entre les procédures utilisées lors des deux tests se manifeste dans l'absence d'une implication de J6C11 vers J6C12, alors que l'implication de I6C11 vers I6C12 est très forte. En d'autres termes, l'usage — même implicite — d'un puzzle pour résoudre l'item 6 du pré-test était nécessairment associé à un dénombrement. Au post-test, ce n'est pas le cas, l'usage du puzzle suffit. On peut penser que cela est lié aux figures familières d'un carré et d'un parallélogramme situés de surcroit dans un réseau qui facilite la visualisation du puzzle.

B.4.3 Structurer les comportements d'échec

Au fil des paragraphes précédents, nous avons classé les comportements suivants comme significatifs d'échecs : J2C2, J2C3, J3C2, J3C9, J4C7, J5C2, J5C3, J5C4, J5C9, J5C10, J6C4, J6C5, J6C8, J6C9, J6C10. Comme au pré-test, rassemblons ces comportements sur un seul diagramme :

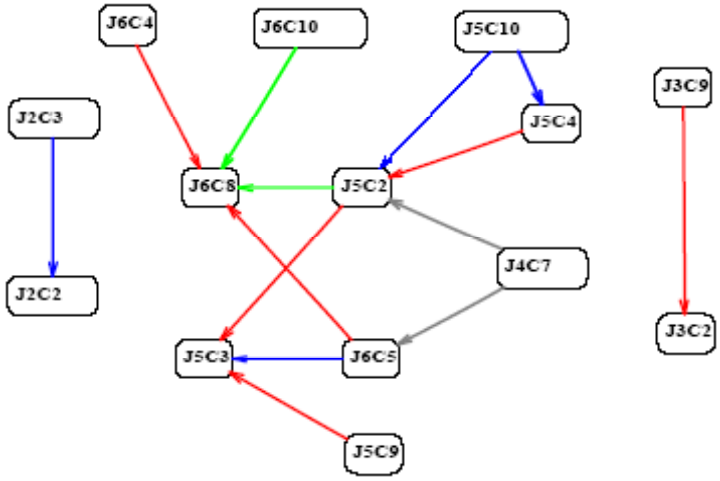


Fig. B.27

Première constatation : la piste des *calculs routiniers mal maîtrisés* n'est plus représentée que par le seul comportement J6C10. Cela correspond à l'augmentation des réussites aux items 1 et 2 du post-test par rapport aux items correspondants du pré-test.

Deuxième constatation : la partie centrale du diagramme rassemble des comportements des items 5 et 6, à une exception près, le comportement J4C7, production d'un assemblage non conforme à la consigne à l'item 4), qui trahit une mauvaise visualisation de ce qui était demandé à cet item. Il n'est pas surprenant que ce comportement implique directement — bien que faiblement — J5C2 (dessin inacceptable à l'item 5). Il implique aussi J6C5 (l'aire du parallélogramme bleu est plus grande que celle du carré vert, à l'item 6). Qu'en conclure sinon que les aires peuvent avoir été comparées en se basant uniquement sur une perception défaillante par défaut d'analyse de la figure observée ?

B.4.4 Structurer les comportements de réussite

Les comportements suivants ont été classés comme comportements de réussite :

Item 1 : J1C1, J1C6, J1C9, J1C10

Item 2 : J2C1, J2C6, J2C9, J2C10

Item 3 : J3C1, J3C7

Item 4 : J4C1, J4C2, J4C4, J4C5, J4C8

Item 5 : J5C1, J5C5, J5C6, J5C7, J5C8, J5C12, J5C13, J5C14

Item 6 : J6C1, J6C3, J6C11, J6C12, J6C13

Le graphe — même simplifié — de ces comportements n'est pas très lisible.

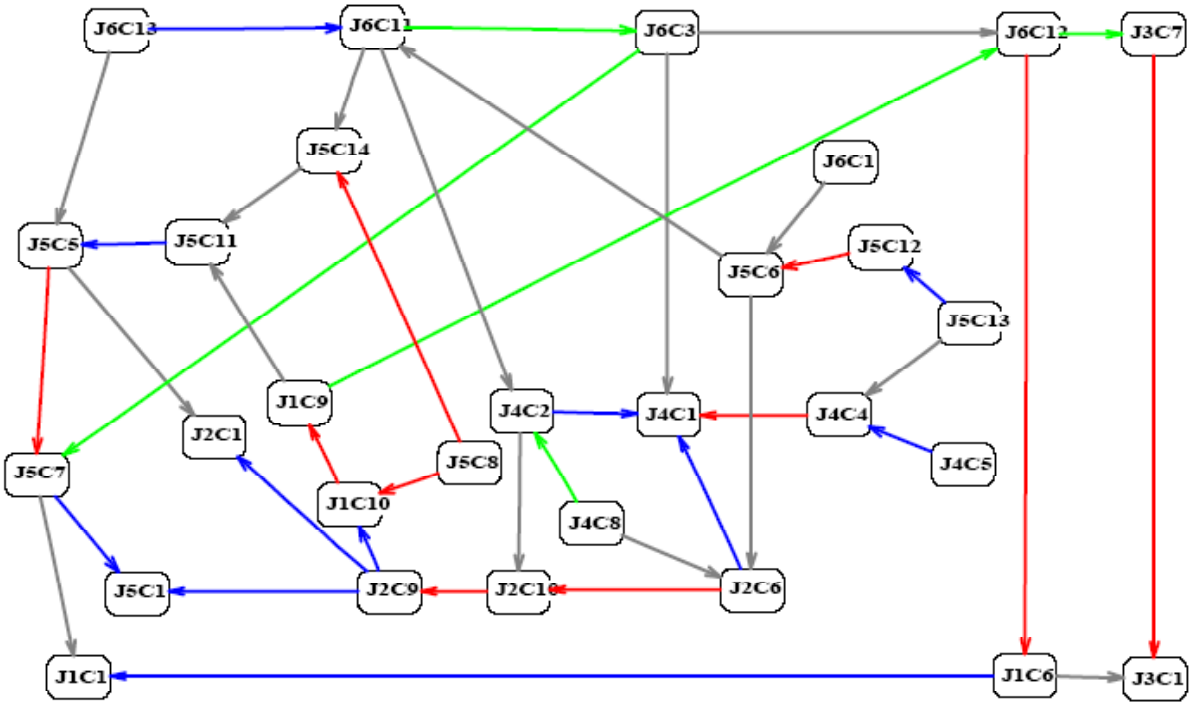


Fig. B.28

Ce graphe nous permet néanmoins de déterminer les comportements-sources dont nous avons vu l'intérêt dans l'analyse du pré-test. Il s'agit de J4C5, J4C8, J5C8, J5C13, J6C1, J6C13. Rappelons leurs significations et leurs fréquences.

Code	Fréquence	Signification
J4C5	13 %	Production d'un assemblage de plus de huit triangles à l'item 4
J4C8	10 %	Mention de l'impossibilité des assemblages de 3, 5 et 6 triangles
J5C8	22 %	Apposition de marques sur l'original
J5C13	6,5 %	Dessin du quadrillage oblique du cadre, à l'item 5
J6C1	15 %	Réussite à l'item 6, avec justification correcte et complète
J6C13	12 %	Apposition de marques sur la figure à l'item 6

A priori, on s'attendrait à ce que la réussite J6C1 à l'item 6 soit un élément terminal du graphe plutôt qu'un élément source. En effet, il ne s'agit certainement pas là d'un comportement élémentaire, mais bien de la résultante de plusieurs comportements élémentaires différents. Dans un cas pareil, il est bon de se souvenir que le graphe ne reprend que des implications d'intensité au moins égale à 0,85 et de consulter la liste de toutes les intensités afin de voir si on ne trouve pas une implication aboutissant à J6C1 dont l'intensité soit proche de 0,85. Effectivement, nous en trouvons une : l'implication de J5C12 vers J6C1 a une intensité de 0,84. Il n'est donc pas déraisonnable de considérer que la réussite à l'item 6 est impliquée par la perception globale à l'item 5 et que J6C1 s'insère dans une chaîne J5C13 ⇒ J5C12 ⇒ J6C1 ⇒ J5C6 caractéristique de la perception globale.

Les cinq autres comportements-sources mentionnés ci-dessus sont peut-être moins variés qu'il ne l'étaient au pré-test. J5C8 et J6C13 procèdent de la même idée : compléter la figure afin de mieux asseoir son raisonnement. J4C8 et J5C13 relèvent du mode de perception, J4C5 peut-être aussi. On pourrait croire que la variété comportementale dans la population d'élèves est plus faible au post-test qu'elle ne l'était au pré-test.

Pour approfondir notre étude, dressons les diagrammes des comportements directement impliqués par les comportements-sources.

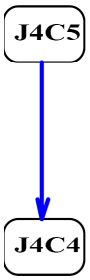


Fig. B.29

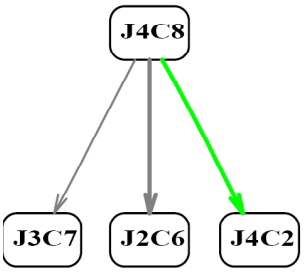


Fig. B.30

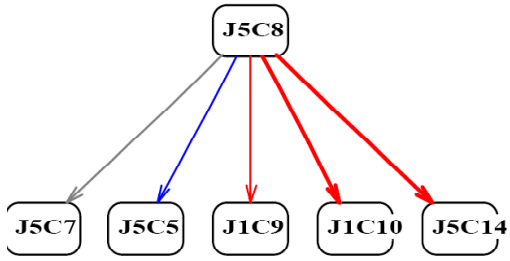


Fig. B.31

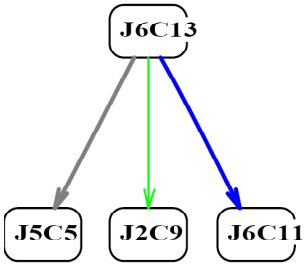


Fig. B.32

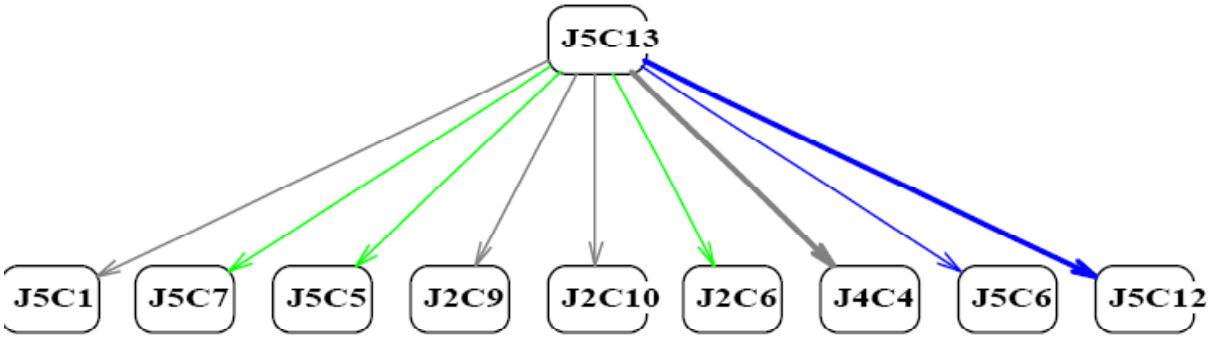


Fig. B.33

On retrouve ici à nouveau l'importance du comportement de perception globale à l'item 5 : le comportement J5C13 à la base de cette perception entraîne directement (*figure B.33*) neuf autres comportements, à l'instar de I5C6 au pré-test. De plus trois des comportements impliqués par J6C13, à savoir J5C1, J5C7 et J2C6, sont les correspondants de trois des comportements (I5C1, I5C7 et I2C6) impliqués par I5C6.

Remarquons ausi que J5C5 et J5C7 sont impliqués à la fois par J5C8 et J5C13. Ce sont donc des comportements non élémentaires. Par ailleurs les comportements J1C9, J1C10, J2C9, J2C10, consistant à apposer des marques sur les figures sont impliqués
– à l'item 1 par J5C8,
– à l'item 2 par J5C13,
ce qui tendrait à montrer que l'item 2 sollicite plus la perception globale que l'item 1.

B.5 L'analyse du pré-test de 5e primaire (2006–2007)

B.5.1 Les comportements recensés

Item 1

Les comportements repérés pour l'item 1 du pré-test sont les suivants :

I1C1 : L'élève a répondu de manière correcte et complète.

I1C2 : L'élève n'a pas répondu de manière correcte ou complète.

I1C3 : L'élève a coché la case « temps » à la première question.

I1C4 : La réponse est partielle mais correcte.

I1C5 : La réponse est, en partie, incorrecte (au moins une case cochée correcte et au moins une case cochée erronée).

I1C6 : L'élève a confondu « longueur » et « aire ».

I1C7 : L'élève a confondu « aire » et « volume ».

I1C8 : L'élève a confondu « longueur » et « volume ».

I1C9 : L'élève a coché la case « poids » aux questions 3, 4 ou 5.

I1C10 : L'élève a coché la case « temps » aux questions 3, 4 ou 5.

Item 2

À cet item, nous avons recensé les comportements suivants :

I2C1 : L'élève a répondu correctement.

I2C2 : La réponse de l'élève est incorrecte.

I2C3 : La justification est complète et correcte.

I2C4 : La justification est partielle mais correcte.

I2C5 : La justification est erronée.

I2C6 : La justification est absente.

I2C7 : L'élève n'a pas répondu.

I2C8 : L'élève a mesuré des longueurs.

I2C9 : L'élève a confondu « périmètre » et « aire ».

I2C10 : L'élève a effectué une multiplication.

I2C11 : L'élève a compté des (petits) carrés.

I2C12 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.

I2C13 : L'élève a compté des points.

I2C14 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.

I2C15 : Les marques ajoutées sont pertinentes.

I2C16 : L'élève confond « aire » et « forme ».

Item 3

A deux exceptions près, les comportements recensés à l'item 3 sont identiques à ceux recensés à l'item 2.

I3C1 : L'élève a répondu correctement.

I3C2 : La réponse de l'élève est incorrecte.

I3C3 : La justification est complète et correcte.

I3C4 : La justification est partielle mais correcte.

I3C5 : La justification est erronée.

I3C6 : La justification est absente.

I3C7 : L'élève n'a pas répondu.

I3C8 : L'élève a mesuré des longueurs.

I3C9 : L'élève a confondu « périmètre » et « aire ».

I3C10 : L'élève a effectué une multiplication.

I3C11 : L'élève a compté des (petits) carrés.

I3C12 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.

I3C13 : L'élève a compté des points.

I3C14 : L'élève a procédé par complémentarité.

I3C15 : L'élève a utilisé la même méthode qu'à l'item 2.

I3C16 : L'élève a porté des marques sur la figure originale.

I3C17 : Les marques ajoutées sont pertinentes.

I3C18 : L'élève confond « aire » et « forme ».

Item 4

Pour cet item, quinze comportements ont été listés :

I4C1 : La réponse de l'élève est correcte (indépendamment de la justification).

I4C2 : La réponse est incorrecte (indépendamment de la justification).

I4C3 : L'élève a répondu « 14 carrés » ou « 126 carrés ».

I4C4 : L'élève a dessiné les quinze carrés verts dans le rectangle bleu.

I4C5 : L'élève a procédé par comptage.

I4C6 : L'élève a mesuré des longueurs.

I4C7 : L'élève a utilisé un petit carré comme unité d'aire.

I4C8 : L'élève a effectué une division ou une multiplication.

I4C9 : La justification est correcte.

I4C10 : La justification est partielle mais sans erreur.

I4C11 : La justification est erronée.

I4C12 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

I4C13 : L'élève n'a pas répondu.

I4C14 : L'élève utilise le mode quantitatif atomisé (I4C5 $\times$ I4C7)

I4C15 : L'élève utilise le mode quantitatif global (I4C4 $\times$ I4C5)

Item 5

Nous avons repéré dix comportements susceptibles d'être produits par les élèves à cet item 5 :

I5C1 : L'élève a répondu de manière correcte et complète au défi.

I5C2 : L'élève n'a pas répondu de manière correcte et complète au défi.

I5C3 : Le nombre de carrés est exact.

I5C4 : Le nombre de triangles est exact.

I5C5 : Le plus grand triangle a été dessiné.

I5C6 : Le plus grand carré a été dessiné.

I5C7 : L'élève répond « 6 triangles et 2 carrés ».

I5C8 : L'élève fournit une réponse comprise entre (2,6) et (6,8).

I5C9 : L'élève a numéroté les carrés et les triangles.

I5C10 : L'élève colorie sans se préoccuper de dénombrer.

Item 6

Treize comportements ont été recensés pour cet item.

I6C1 : L'élève produit un dessin acceptable.

I6C2 : L'élève ne produit pas un dessin acceptable.

I6C3 : Le dessin de l'élève est imprécis.

I6C4 : Le dessin de l'élève comporte moins de triangles que l'original.

I6C5 : Le dessin de l'élève comporte des traits de construction et ceux-ci sont utilisés.

I6C6 : Les côtés obliques du triangle constituant le corps de la poupée sont correctement alignés sur la diagonale du cadre (mode *global*

de construction).

I6C7 : L'élève a tenu compte des graduations portées sur les quatre côtés du cadre.

I6C8 : L'élève a porté des marques sur l'original.

I6C9 : L'élève a utilisé le mode de construction *atomisé*.

I6C10 : L'élève a été perturbé par le décalage en hauteur.

I6C11 : L'élève a utilisé le mode de construction *local*.

I6C12 : L'élève a utilisé un mode *mixte* de construction.

I6C13 : L'élève n'a rien dessiné.

I6C14 : L'élève essaye d'occuper le cadre.

Item 7

Cette fois, nous distinguons dix-neuf comportements :

I7C1 : L'élève répond correctement « rose ».

I7C2 : L'élève répond incorrectement « bleue ».

I7C3 : L'élève a en mains de quoi fournir la bonne réponse, mais ne l'explicite pas correctement.

I7C4 : L'élève répond « même aire ».

I7C5 : La justification est correcte et complète.

I7C6 : La justification est partielle mais sans erreur.

I7C7 : La justification est erronée (au moins UNE erreur).

I7C8 : La justification est absente.

I7C9 : L'élève a remis une feuille blanche

I7C10 : L'élève calcule des aires en mesurant des longueurs et en appliquant une formule.

I7C11 : L'élève utilise une translation.

I7C12 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un découpage et une recomposition.

I7C13 : L'élève utilise, éventuellement de façon implicite, un comptage.

I7C14 : L'élève a apposé des marques sur la figure.

I7C15 : Les marques apposées sont pertinentes.

I7C16 : L'élève confond aire et périmètre.

B.5.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

L'analyse implicative ne fournit guère d'information intéressante à propos de l'item 1. Elle ne dégage d'implications qu'entre des comportements d'échec. Plusieurs sont naturelles, voire triviales. D'autres sont difficiles à interpréter.

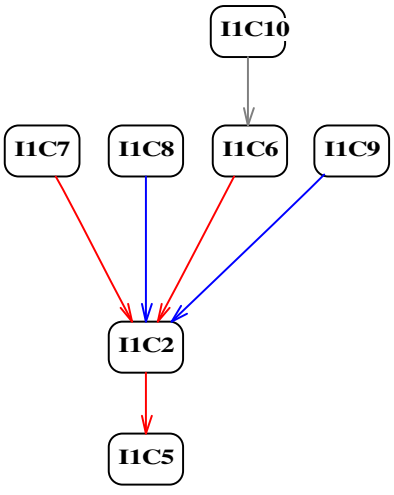


Fig. B.34

Item 2

Le graphe des implications relatives à cet item se décompose en deux sous-graphes aboutissant l'un (à gauche) au comportement I2C2 qui signifie que l'élève a remis une réponse incorrecte et l'autre (à droite) au comportement I2C1 qui signifie au contraire la production d'une bonne réponse.

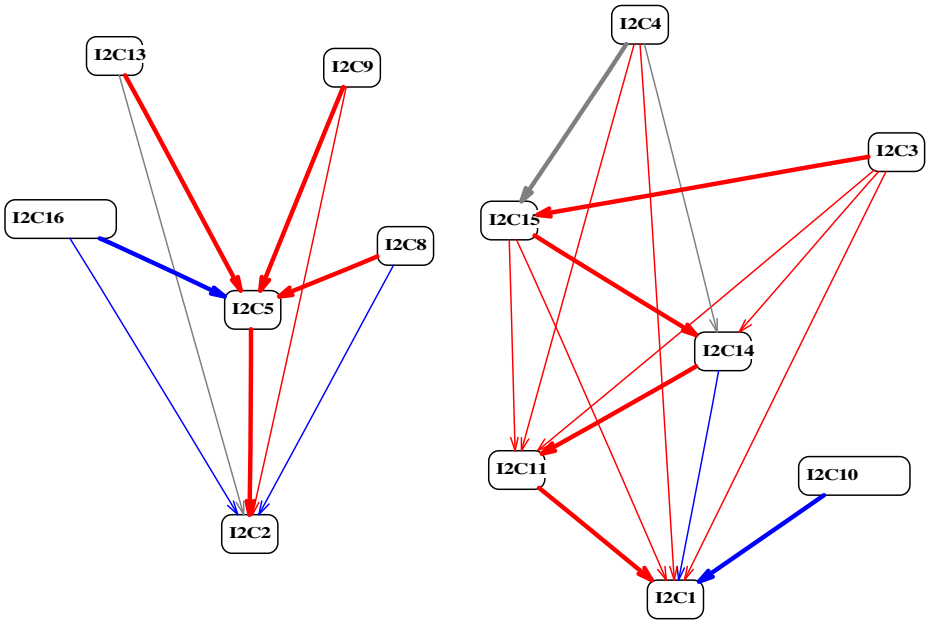


Fig. B.35

Le sous-graphe de gauche est donc celui des comportements d'échec, et le sous-graphe de droite celui des comportements de réussite.

Rappelons que la couleur des flèches indique l'intensité d'implication i :

1. Flèche rouge : implication très forte, $0{,}00 < i$.
2. Flèche bleue : implication forte, $0{,}95 < i \leq 0{,}99$.
3. Flèche verte : implication moyenne, $0{,}9 < i \leq 0{,}95$.
4. Flèche grise ou noire : implication faible, $0{,}85 < i \leq 0{,}9$

L'intensité d'implication d'une flèche ne dépend pas de son épaisseur.

Rappelons aussi que le comportement situé à l'extrémité d'une flèche est toujours plus fréquent que celui qui est à l'origine.

Examinant le sous-graphe des réussites, on détecte d'abord le quadrilatère orienté de I2C3-I2C15-I2C11-I2C14, orienté de I2C3 vers I2C11 et dont tous les côtés représentent des implications très fortes. Sont ainsi associés la justification complète et correcte, les deux comportements relatifs à l'apposition de marques et le comptage de petits carrés. On retrouve ainsi le rôle de l'apposition de marques sur une figure, en vue de supporter le raisonnement. De I2C11, on accède à la réussite I2C1 par une implication également très forte.

De I2C10 on accède également à I2C1 et à aucune autre nœud du graphe. Autrement

dit, le fait d'effectuer une multiplication en vue de comparer les deux aires, constitue une démarche de réussite isolée, non associée à d'autres.

À noter aussi les flèches partant de I2C4 (justification partielle mais correcte). C'est encore un comportement qui entraîne très fortement la réussite, mais qui n'entraîne que faiblement l'apposition de marques. On pourrait croire que les élèves concernés ont besoin de moins de support écrit et qu'ils prennent aussi moins la peine de justifier !

Le sous-graphe des comportements d'échec ne fait que nous confirmer que mesurer des longueurs, confondre aire et périmètre, confondre aire et forme ou encore compter des points entraînent à la fois la production de justifications erronées et l'échec. La place du comptage de points dans ce sous-graphe va aussi dans le sens de l'interprétation de ce comportement que nous avons donnée à la section 12.3.2.

Item 3

Le graphe d'implication de cet item 3 a bien des points communs avec celui de l'item 2.

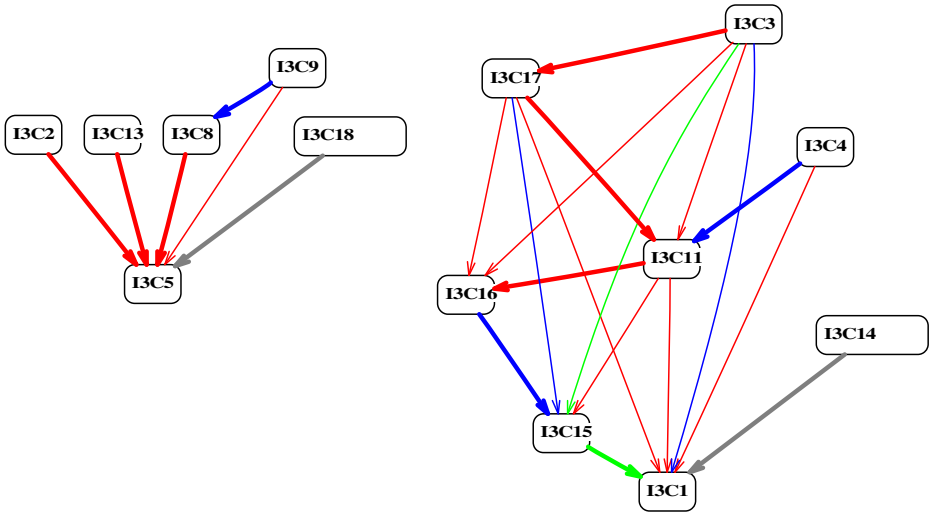


Fig. B.36

Dans le sous-graphe des comportements d'échec, on retrouve la confusion périmètre-aire (qui cette fois entraîne la mesure des longueurs), la confusion aire-forme, et le comptage de points. La seule différence importante est la permutation des rôles relatifs de la production d'une réponse erronée et de celle d'une justification incorrecte. En se reportant à la section 12.3.2, on pourra y vérifier que si le taux de justification erronée et à peu près le même à l'item 3 qu'à l'item 2, le taux de réponse incorrecte y est plus faible. On peut donc trouver des justifications erronées associées à des réponses correctes.

Du côté du sous-graphe des réussites, on constate l'absence du comportement multiplicatif I3C10, et son remplacement par le comportement d'équicomplémentarité I3C14. Comme I2C10 à l'item 2, I3C14 est isolé à l'item 3.

On retrouve aussi un quadrilatère orienté I3C3-I3C17-I3C16-I3C11 dont toutes les impli-

cations sont très fortes. Il associe de nouveau la justification correcte à l'apposition de marques et au comptage de carrés. Par rapport à l'item 2, une inversion se produit : I3C11 vient entre I3C17 et I3C16 alors que I2C11 était après I2C14. Plus important est l'absence de flèche directe de I3C16 vers la réussite I3C1. Ainsi, le fait d'apposer des marques n'est pas un indice de réussite aussi fort à l'item 3 qu'à l'item 2 : trop de marques ne sont pas pertinentes.

Tout naturellement, I3C15 s'insère dans la chaîne de I3C3 à I3C1 : la méthode utilisée à deux reprises aux items 2 et 3 est bien le comptage de carrés.

Les items 2 et 3 étant très semblables, construisons le graphe simultané des comportements de réussite à ces deux items, en nous limitant au squelette du graphe (*voir page 489*).

Nous voyons apparaître le comportement multiplicatif I3C10 qui ne figurait pas dans le sous-graphe de réussite à l'item 3, mais entraîne fortement I2C10 et peut donc aussi être considéré comme un comportement de réussite.
Le graphe montre aussi la cohérence très forte de ces deux items. On remarque encore que les intensités d'implications décroissent du haut vers le bas : très fortes entre comportements de justification et d'apposition de marques (sauf de I2C4 vers I2C15), elles ne sont que fortes entre comportements multiplicatifs et de comptages. On peut supposer que les premiers sont plus stables que les seconds.

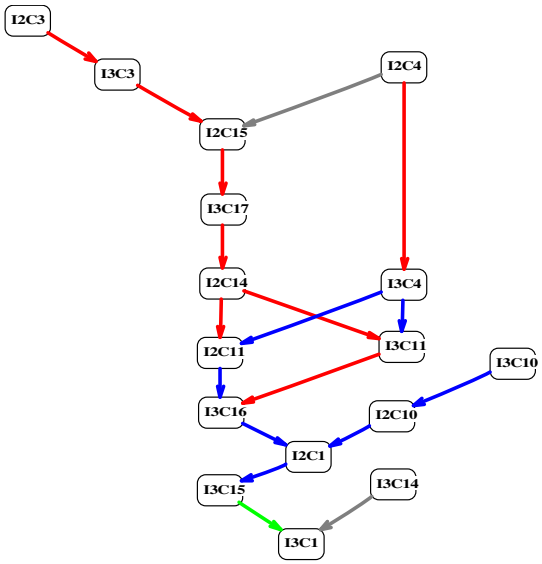


Fig. B.37

Item 4

Les comportements I4C14 (mode quantitatif atomisé) et I4C15 (mode quantitatif global) ont été déterminés à partir des autres :

- Un élève s'est vu attribuer le comportement I4C14 si et seulement s'il a procédé par comptage (I4C5) et utilisé un petit carré comme unité d'aire (I4C7).
- Un élève s'est vu attribuer le comportement I4C15 si et seulement s'il a procédé par comptage (I4C5) et dessiné les quinze carrés verts dans le rectangle bleu (I4C4).

Sur le graphe implicatif, les implications de I4C14 vers I4C5 et I4C7 d'une part, de I4C15 vers I4C5 et I4C4 d'autre part sont par conséquent automatiques.

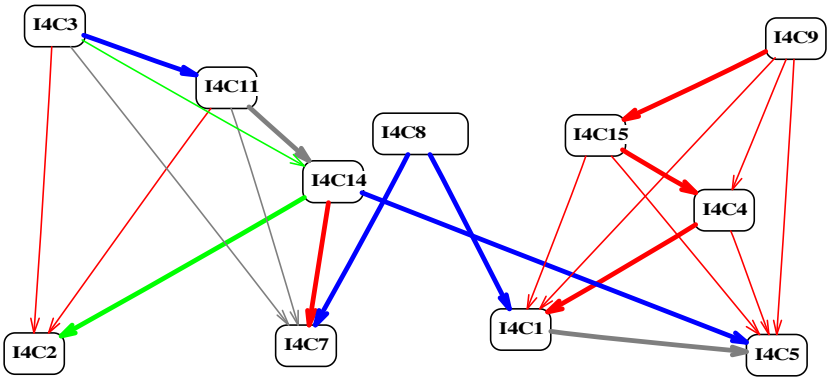


Fig. B.38

Ce graphe comporte trois nœuds terminaux : I4C2, I4C7 et I4C5.

I4C2 est le fait de produire une réponse incorrecte. Nous pouvons donc considérer comme des comportements d'échec les comportements I4C3 (répondre 14 ou 126 carrés), I4C11 (justification erronée) et I4C14 (mode quantitatif atomisé) qui l'entraînent.

Le graphe ne comporte pas de flèche de I4C7 vers I4C2 (l'intensité de l'implication correspondante est de 0,82, donc pas suffisamment importante pour être considérée comme significative). Nous ne pouvons donc pas affirmer que l'utilisation de petits carrés est en soi un comportement d'échec. De plus, I4C7 est lui-même impliqué par I4C8 (utilisation d'une multiplication ou d'une division), lequel a un caractère ambigu : en tenant compte des multiplications, il s'associe au mode quantitatif global qui est du côté des réussites, mais en enant compte des divisions, il s'associe au mode quantitatif atomisé qui est du côté des échecs. Vu cette ambiguïté, nous ne classerons I4C8 ni en échec, ni en réussite. I4C8 et les flèches qui en sont issues jettent un pont entre les deux parties du graphe.

Dans la partie droite, I4C9 (justification correcte), I4C15 (mode quantitatif global), et I4C4 (dessin des quinze carrés verts) sont des comportements de réussite. Mais I4C5 (comptage) est impliqué (faiblement) par I4C1 et non l'inverse : les élèves qui réussissent ont tendance à avoir procédé par comptage, mais ce procédé ne suffit pas à entraîner significativement la réussite.

Item 5

Pris isolément, le graphe relatif à cet item ne nous apprend pas grand chose. Tout ce que le graphe permet d'affirmer est que « les élèves qui ont réussi ont bien répondu ».

Le faible taux de réussite à cet item explique que les taux d'intensité des implications de I5C1 vers les autres nœuds du graphe soient inférieurs à 0,99, même quand, du point de vue logique, l'implication est parfaite ([2]).

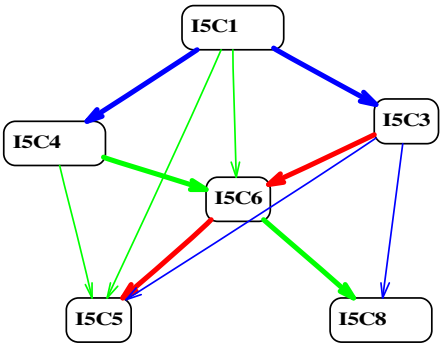


Fig. B.39

Item 6

Cet item avait déjà été soumis en 2005–2006 aux élève de sixième primaire. Il avait été l'occasion de mettre en évidence la distinction à opérer entre les modes de perception *atomisé*, *local* et *global*.

Les comportements recensés sont les mêmes qu'en 2005–2006, complétés par les comportements I6C12 à I6C13. Le graphe implicatif obtenu présente des similitudes et des différences avec celui obtenu en 2005–2006.

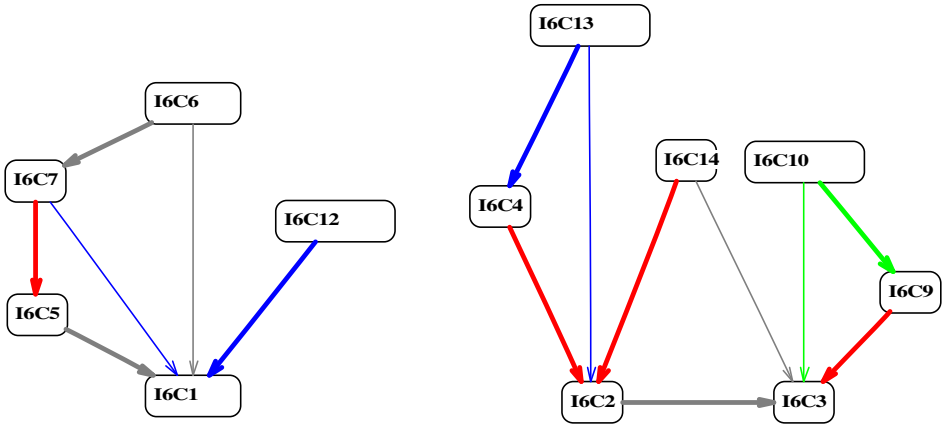


Fig. B.40

Du côté des réussites, nous retrouvons le comportement I6C6, lié à la perception globale, qui implique faiblement I6C1 (c'était déjà le cas en 2005–2006).

Le mode mixte de construction (I6C12), non recensé en 2005–2006, apparaît également comme un comportement de réussite, avec une intensité plus forte que celle de l'implication I6C6 → I6C1.

Dans l'autre partie du graphe, on trouve I6C2 (dessin non acceptable) qui n'est impliqué que par des comportements qui correspondent visiblement à des échecs : I6C4 (dessin

([2]) Ceci n'est pas un défaut de l'implication statistique, mais plutôt une qualité : il n'y a pas lieu d'attribuer une signification à une implication quand l'effectif est trop faible.

incomplet), I6C13 (pas de dessin). Le mode atomisé de construction est présent dans cette partie du graphe, mais dans un groupe caractérisé par l'imprécision du dessin : I6C3, I6C9, I6C10 et I6C14. De ce groupe seul I6C14 implique I6C2.

Quant au mode local de construction (I6C11), il n'apparaît pas dans le graphe. Ainsi le mode atomisé, et le mode local ne peuvent être associés ni à l'échec, ni à la réussite.

Item 7

Cet item avait également été proposé aux élèves de sixième primaire en 2005–2006. La liste des comportements observables a été quelque peu modifiée.
Le sous-graphe des comportements d'échec constitue la partie droite de cette figure. Il est complètement détaché du sous-graphe des réussites, alors qu'en 2005–2006, le comportement de justification partielle servait d'intermédiaire.

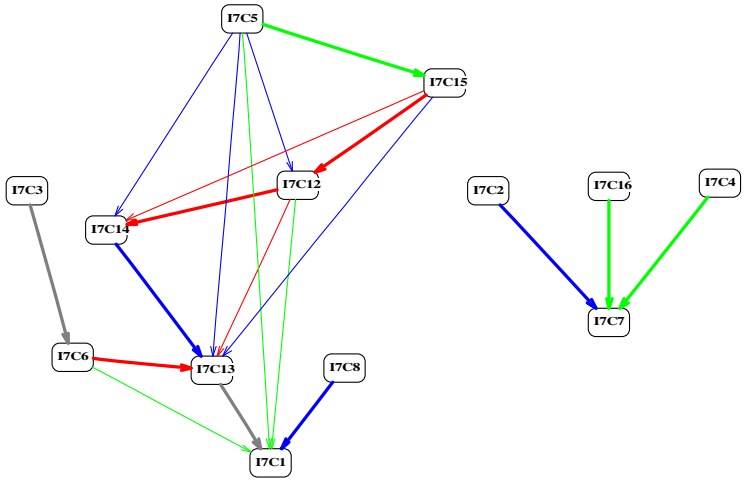


Fig. B.41

Cette fois la justification partielle, I7C6, est du côté des réussites, ce qui correspond probablement au fait que le test a été réalisé par des élèves de cinquième année et non de sixième.

Du côté des échecs, nous retrouvons les comportements de réponse incorrecte (séparés ici en « même aire », I7C4 et réponse « bleue », I7C2) ainsi que I7C16 (confusion aire-périmètre) et « justification erronée », I7C7.

Du côté des réussites, on remarque d'abord que les intensités d'implication sont moins fortes que dans les items 2 et 3 qui consistaient aussi en des comparaisons d'aires. La situation est donc plus floue, les comportements plus variés. Le quadrilatère, qui aux items 2 et 3 associait la justification correcte, les comportements liés à l'apposition de marques et le comptage de carrés, est toujours là, mais l'intensité des implications est plus faible. De plus le comportement I7C12, « utilisation même implicite d'un découpage et d'une recomposition », vient s'y insérer et c'est par lui que passent les implications dont les intensités sont les plus fortes.

On voit ainsi le rôle important des découpages et recompositions dans cet item.

Une dernière remarque : l'absence de justification, I7C8, entraîne fortement la réussite. Ce comportement n'a été observé que chez huit élèves, mais tous ont proposé la réponse correcte. Cette absence de justification résulte-t-elle d'une négligence ou de difficultés d'expression ?

B.5.3 Structurer les comportements d'échec

En réalisant un graphe à partir des implications qui lient les comportements associés à des échecs, nous déterminons, la stabilité de ces comportements à travers les différents items du test.

Par souci de lisibilité, nous limitons ce graphe à un squelette, suivant la méthode indiquée à la page 489 : nous n'indiquons que le flèches directes, pas celles qui peuvent s'obtenir par composition de deux autres. Pour la même raison, nous nous limitons aussi à reproduire les implications d'intensité moyenne à très forte.

Le graphe comprend les comportements d'échecs suivants recensés à la section précédente (l'item 5 n'a pas fait apparaître de comportement d'échec significatif) :

– à l'item 1 : I1C2, I1C5, I1C6, I1C7, I1C8, I1C9, I1C10 ;
– à l'item 2 : I2C2, I2C5, I2C8, I2C9, I2C13, I2C16 ;
– à l'item 3 : I3C2, I3C5, I3C8, I3C9, I3C13, I3C18 ;
– à l'item 4 : I4C2, I4C3, I4C11, I4C14 ;
– à l'item 6 : I6C2, I6C3, I6C4, I6C13, I6C14 ;
– à l'item 7 : I7C2, I7C4, I7C7, I7C16.

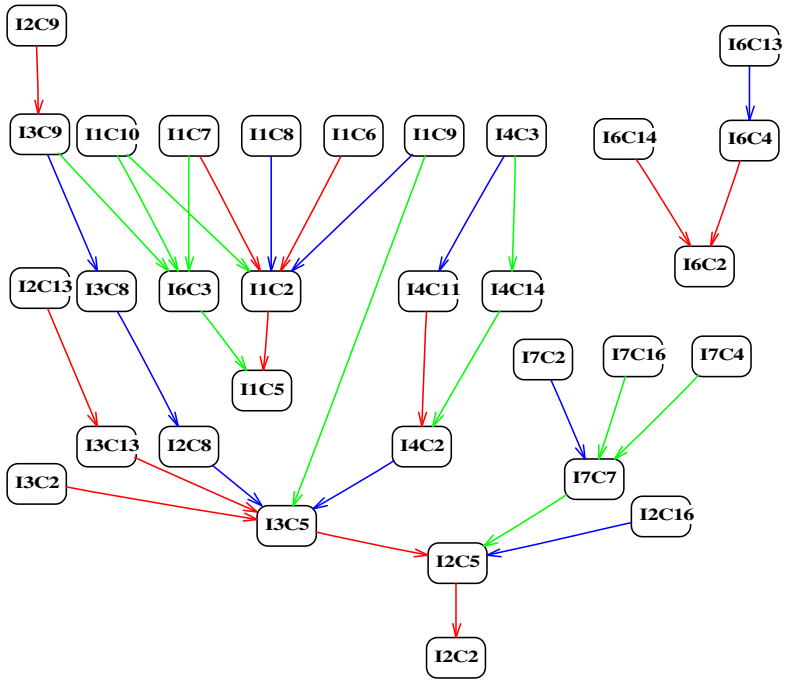


Fig. B.42

Le graphe montre bien la proximité des items 2 et 3. On retrouve en particulier ce que nous avons appelé au paragraphe B.3.3 la *piste des calculs routiniers mal assimilés*, c'est-à-dire la confusion aire-périmètre et des calculs ou mesures de longueurs inadéquats :

I2C9 → I3C9 → I3C8 → I2C8 → I3C5 → I2C5

Cette imbrication entre les comportements associés aux items 2 et 3 est la seule vraiment présente. Les comportements associés aux autres items se raccrochent par des « extrémi-

tés » au groupe principal :

- Le groupe des comportements associés à l'item 1 entoure I6C3, qui semble un peu égaré. I1C9 entraîne I3C5.
- Les comportements associés à l'item 4 se raccrochent au nœud I3C5.
- Les comportements associés à l'item 7 se raccrochent au nœud I2C5.
- Quant aux comportements associés à l'item 6, ils ne se raccrochent pas vraiment au groupe principal, seule la position de I6C3 parmi les comportements associés à l'item 1 assure une liaison dont l'interprétation est difficile.

B.5.4 Structurer les comportements de réussite

Procédons de même avec les comportements associés à la réussite. Ceux-ci sont les suivants :

- à l'item 2 : I2C1, I2C3, I2C10, I2C11, I2C14, I2C15 ;
- à l'item 3 : I3C1, I3C3, I3C4, I3C10, I3C11, I3C14, I3C15, I3C16, I3C17 ;
- à l'item 4 : I4C1, I4C4, I4C5, I4C9, I4C15 ;
- à l'item 5 : I5C1, I5C3, I5C4, I5C5, I5C6, I5C8 ;
- à l'item 6 : I6C1, I6C5, I6C6, I6C7, I6C12 ;
- à l'item 7 : I7C1, I7C3, I7C5, I7C6, I7C8, I7C12, I7C13, I7C14, I7C15.

Le graphe implicatif (même limité au squelette) rassemblant ces comportements est fort embrouillé (*Fig. B.43*).

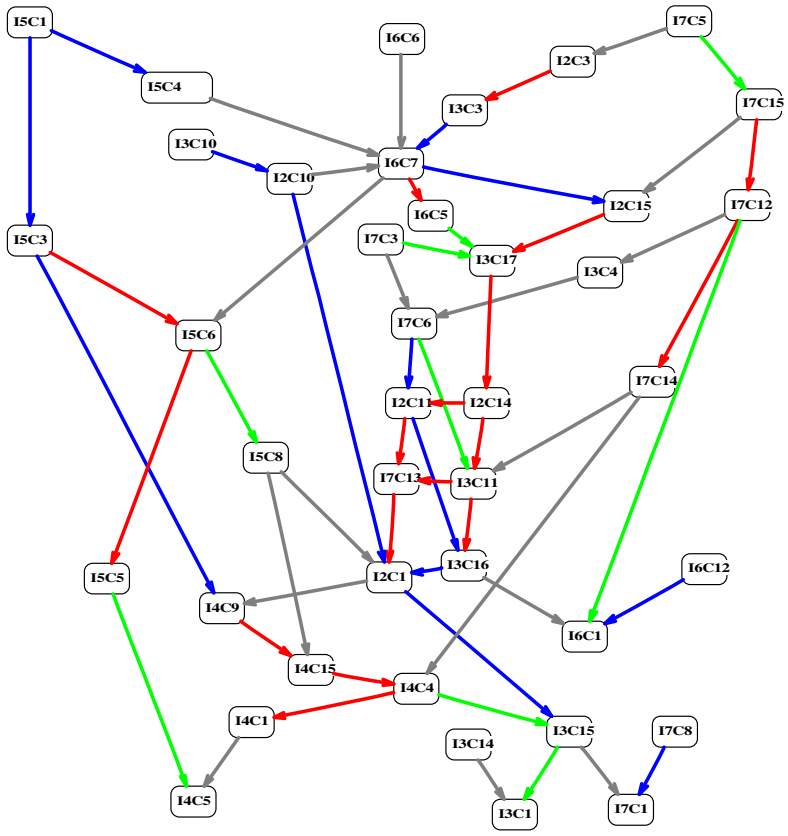


Fig. B.43

Commençons par relever sur ce graphe les comportements qui en constituent les sources, c'est à dire qui n'ont pas d'ascendants. Nous ne retenons pas le comportement I5C1 qui n'est que la conjonction de I5C3 et I5C4 et le remplaçons par ceux-ci. Les sources du graphe sont reprises, avec leurs fréquences dans le tableau suivant.

Code	Signification	Taux (arrondis)
I3C10	Usage d'une multiplication à l'item 3	3 %
I3C14	Complémentarité à l'item 3	11 %
I5C3	Nombre de carrés exact à l'item 5	19 %
I5C4	Nombre de triangles exact à l'item 5	6 %
I6C6	Mode global à l'item 6	4 %
I6C12	Mode mixte à l'item 6	7 %
I7C3	Bonne réponse non explicitée à l'item 7	6 %
I7C5	Justification correcte à l'item 7	7 %
I7C8	Pas de justification à l'item 7	16 %

À priori, un comportement source étant fatalement moins fréquent que les autres peut correspondre à une démarche plus difficile à acquérir. Son acquisition peut alors s'accompagner de celle d'autres démarches qui en dépendent. C'est pourquoi si une relation d'implication peut s'interpréter comme une relation de cause à effet, il est intéressant d'examiner quels sont les comportements directement impliqués par ceux qui sont situés à la source du graphe.

L'exemple du comportement I7C8 (absence de justification à l'item 7), qui implique la bonne réponse à cet item, montre que cette interprétation en tant que relation de cause à effet, n'est pas toujours possible. Il importe donc d'être prudent et d'analyser soigneusement les interprétations possibles des différentes implications révélées par l'analyse implicative.

Éliminons I7C8. Parmi les neuf comportements restants, on en trouve qui sont relatifs à la perception (I5C3, I5C4, I6C6, I6C12), à la multiplication (I3C10), à la complémentarité (I3C14), à la justification (I7C3, I7C5). Les figures ci-dessous indiquent les comportements impliqués directement par chacun des comportements-sources retenus.

Fig. B.44

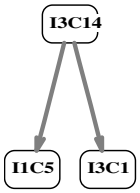


Fig. B.45

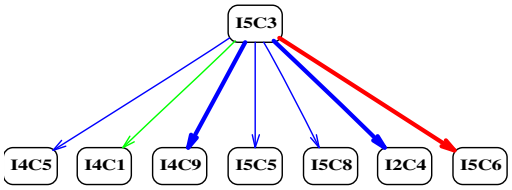


Fig. B.46

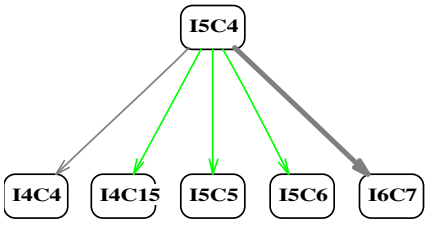


Fig. B.47

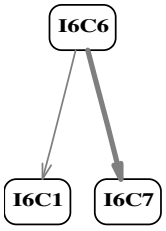


Fig. B.48

Fig. B.49

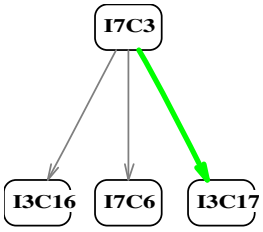


Fig. B.50

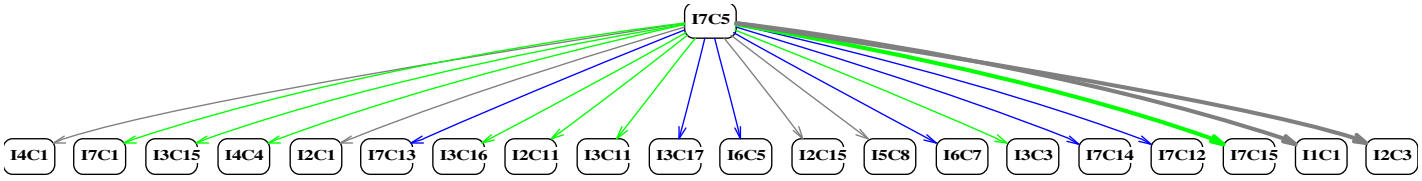


Fig. B.51

Nous constatons d'abord que les comportements I3C10 et I6C12 n'impliquent chacun directement qu'un seul autre comportement. On pourrait dire, en termes imagés, que de ces sources ne coulent que de minces filets d'eau.

La figure B.43 montre quand même que I3C10 entraîne fortement I2C10 lequel entraîne fortement et directement la réussite à l'item 2. Au delà, le flux arrive aussi en I3C1 ([3]) et I7C1. I2C10 comme I3C10 sont les comportements multiplicatifs observés aux items 2 et 3. Les items 2 et 3 étant très proches l'un de l'autre, on ne peut séparer vraiment I3C10 de son compère I2C10. Ensemble, ces deux comportements ont une influence importante sur la réussite aux items 2, 3 et 7.

Par contre I6C12 apparaît fort isolé. Comme le montre également la figure B.48, le comportement I6C6 est aussi un peu isolé (d'autant plus que les intensités d'implication sont

([3]) La figure B.43 ne propose que le squelette du graphe complet et ne montre donc pas la flèche directe I2C1 → I3C1 ; celle-ci existe bel et bien et est d'intensité supérieure à 0,99.

faibles). Parmi les comportements associés à l'item 6, c'est I6C7 (prise en compte des graduations des côtés du cadre) qui s'intègre au sein du graphe de la figure B.43. Cette prise en compte des graduations portées par le côtés du cadre est sans doute un élément qui permet à l'élève d'atteindre un stade global de perception dans le cas de cet item. Rappelons qu'en 2005–2006, dans le même item, la perception globale jouait un rôle plus important que les graduations en question. Les élèves de sixième année étaient sans doute plus nombreux que ceux de cinquième à avoir atteint le stade perceptif global utile pour cet item. (*Voir page 491 : le comportement I5C7 n'implique pas I6C1, ni directement, ni indirectement, par contre I5C6 le fait.*)

Passons sur les figures B.45 et B.50 où les intensités d'implication sont faibles.

D'après les figures B.46 et B.47, les comportements I5C3 et I5C4 n'impliquent directement que des comportements associés aux items 4 et 5, à l'exception de I2C4 et I6C7. Leurs portées semblent ainsi assez limitées. Notons toutefois la présence à la figure B.47 des comportements I4C4 et I4C15 : les élèves qui *voient* tous les triangles à l'item 5, voient aussi les quinze carrés verts à l'item 4.

Enfin, la figure B.51 est impressionnante. L'influence directe du comportement I7C5 (justification correcte à l'item 7) est importante. Même en nous limitant aux implications fortes (flèches bleues), nous trouvons là I3C17 (pertinence des marques à l'item 3), I6C5, I6C7 (utilisation de traits de construction et prise en compte des graduations du cadre), I7C12, I7C13 et I7C14 (découpage et recomposition, comptage et marques à l'item 7). Si la présence des trois derniers comportements est assez naturelle, celle des trois premiers associe la lecture et le traitement (par apposition de traits supplémentaires) d'une figure à la justification.

À présent, isolons la zone centrale de la figure B.43. Nous retrouvons (*Fig. B.52*) la figure B.37 augmentée de quelques comportements n'appartenant pas aux items 2 et 3.

En haut de cette figure B.52, nous trouvons d'abord trois comportements, I5C4 (Nombre de triangles exact à l'item 5), I6C6 (Mode de perception global à l'item 6), et I6C7 (graduations prises en compte à l'item 6) qui relèvent tous trois d'un mode de perception global aux items 5 et 6.

Ensuite, avec I2C15, I6C5, I3C17, I2C14 et I3C16, nous rencontrons les comportements liés aux marques apposées par l'élève sur la figure, aux items 2, 3 et 6. Ne manque à l'appel que I6C8, qui n'est pas apparu parmi les comportements de réussite. Puis viennent les comportements liés à la méthode de comptage (de carrés) : I2C11, I3C11 (qui s'est inséré entre I2C14 et I3C16) et I7C13.

Cela mène déjà à deux « réponses correctes » : I2C1 et I6C1. Au delà, via I3C15 (même méthode aux items 2 et 3), on arrive aux deux autres « réponses correctes » : I3C1 et I7C1.
Cet enchaînement ne peut que nous rappeler la figure B.10 qui nous avait donné l'occasion d'évoquer une possibilité de *modèle mental* de résolution des items 1, 2 et 6 du pretest de 2005–2006. Ce modèle associerait des procédures de dénombrement et d'apposition de marques. La chaîne d'implications qui avait été remarquée à cette occasion était cependant plus cohérente que ce qui apparaît à la figure B.52.
Nous sommes peut-être ici en présence d'un premier stade du modèle mental en question.
Nous avons vu à plusieurs reprises le comportement I6C7 apparaître dans les analyses ci-dessus. Sur la figure B.43, nous constatons que c'est un peu un comportement « carrefour » : quatre flèches y aboutissent, trois en partent.
En fait ce n'est là que la partie cachée de l'iceberg puisque le graphe représenté à la figure B.43 n'est qu'un squelette.

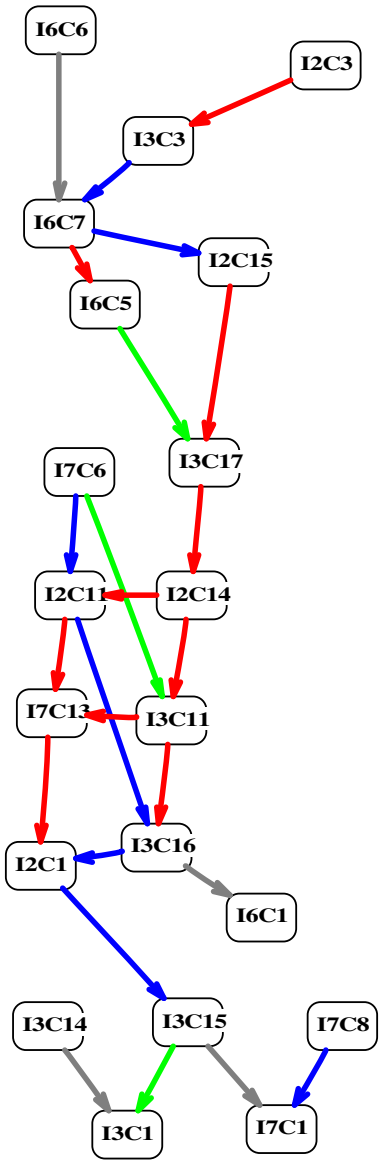


Fig. B.52

Le graphe ci-dessous montre toutes les flèches, d'intensité au moins 0,95, aboutissant à I6C7 ou en partant.

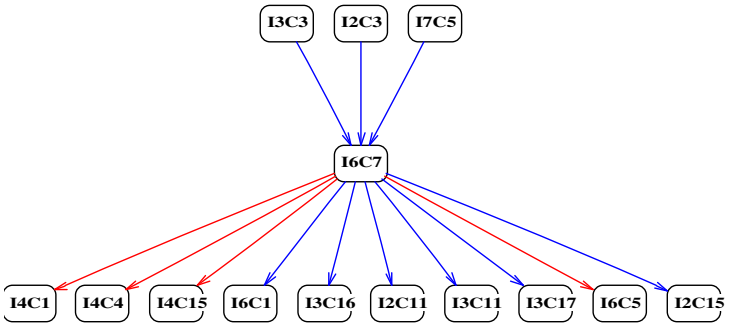


Fig. B.53

Nous y lisons par exemple que I3C3 implique fortement I6C7, autrement dit que les élèves qui justifient correctement et complètement leur réponse à l'item 3 ont fortement tendance à tenir compte de graduations du cadre à l'item 6. Cette propriété est peut-être plus significative si on la contrapose ([4]) :

Les élèves qui ne tiennent pas compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement tendance à ne pas justifier correctement et complètement leur réponse à l'item 3.

De même

Les élèves qui ne tiennent pas compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement tendance à ne pas justifier correctement et complètement leur réponse à l'item 2.

Les élèves qui ne tiennent pas compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement tendance à ne pas justifier correctement et complètement leur réponse à l'item 7.

Quant aux implications de la seconde rangée, il n'est pas utile de les contraposer :

Les élèves qui tiennent compte des graduations du cadre à l'item 6 ont fortement, ou très fortement, tendance à
- *compter des petits carrés à l'item 2 ;*
- *apposer des marques pertinentes à l'item 2 ;*
- *compter des petits carrés à l'item 3 ;*
- *apposer de marques à l'item 3 ;*
- *apposer des marques pertinentes à l'item 3 ;*
- *répondre correctement à l'item 4 ;*
- *dessiner les quinze carrés verts dans le carré bleu à l'item 4 ;*
- *utiliser le mode quantitatif global à l'item 4 ;*
- *produire un dessin acceptable à l'item 6 ;*
- *ajouter et utiliser des traits de construction à l'item 6.*

La prise en compte des graduations du cadre à l'item 6 est l'aspect que prend le mode global de perception à cet item en cinquième primaire. Elle a la même importance que l'alignement sur la diagonale du cadre qui avait été rencontré dns le pré-test correspondant de sixième primaire.

B.5.5 L'analyse cohésitive

Quand on soumet les résultats du test à une analyse cohésitive, l'ordinateur constitue les classes suivantes parmi les comportements de réussite :

1. I2C10, I3C10
2. I5C1, I5C4, I5C5, I5C6
3. I4C1, I4C4, I4C5, I4C9, I4C15, I5C3, I5C8, I6C6
4. I2C1, I2C3, I2C11, I2C14, I2C15, I3C3, I3C11, I3C15, I3C16, I3C17, I6C5, I6C7,I7C13
5. I3C14, I6C1, I6C12

([4]) Une imlication et sa contraposée ont toujours la même intensité.

6. I7C3
7. I7C5, I7C12, I7C14, I7C15
8. I3C1, I3C4, I7C6
9. I7C1, I7C8

Les distances aux différentes classes des groupes témoin et expérimental sont consignées dans le tableau suivant :

	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Classe 4	Classe 5	Classe 7	Classe 8	Classe 9
Gr. témoin	0,44	0,21	0,05	0,02	0,46	0,02	0,03	0,836
Gr. expe.	0,55	0,76	0,93	0,97	0,53	0,97	0,95	0,18

On constate que le groupe témoin est plus proche que le groupe expérimental de toutes les classes de comportements de réussite, sauf de la dernière, constituée de I7C1 et I7C8. Autrement dit, l'implication de I7C8 (absence de justification à l'item 7) vers I7C1 (bonne réponse à l'item 7) est surtout due à des réponses d'élèves du groupe expérimental.

B.6 L'analyse du post-test de 5e primaire (2006–2007)

B.6.1 Les comportements recensés

Défi 1

J1C1 : La valeur du périmètre est bonne.
J1C2 : La valeur du périmètre n'est pas bonne.
J1C3 : Pas de valeur pour le périmètre.
J1C4 : L'élève mesure les côtés à la latte.
J1C5 : La valeur de l'aire est bonne.
J1C6 : La valeur de l'aire n'est pas bonne.
J1C7 : L'élève ne donne pas de valeur pour l'aire.
J1C8 : L'élève dessine un quadrillage et procède par comptage.
J1C9 : L'élève utilise une formule d'aire du triangle.
J1C10 : L'élève complète le triangle en un rectangle.
J1C11 : L'élève calcule l'aire du rectangle et divise par 2.
J1C12 : L'élève justifie incorrectement.

Défi 2

J2C1 : L'élève répond « égal ».
J2C2 : L'élève répond « plus petite » ou « plus grande ».
J2C3 : L'élève ne répond pas.
J2C4 : L'élève assemble deux carrés et deux triangles, puis compare les résultats.
J2C5 : L'élève découpe un triangle pour refaire un carré.
J2C6 : L'élève découpe un carré pour refaire un triangle.
J2C7 : L'élève mesure les périmètres.
J2C8 : L'élève fait d'autres mesures.
J2C9 : L'élève utilisé une formule d'aire.
J2C10 : L'élève ne justifie pas.
J2C11 : L'élève utilise un autre procédé.

Défi 3

J3C1 : L'élève donne la réponse correcte.
J3C2 : L'élève donne une réponse incorrecte.
J3C3 : L'élève ne répond pas.
J3C4 : L'élève reconstitue le grand carré.
J3C5 : L'élève soustrait correctement les carrés manquants.
J3C6 : L'élève soustrait les carrés manquants, mais avec une erreur de comptage de ces carrés.
J3C7 : L'élève soustrait les carrés manquants, mais avec une erreur de calcul.
J3C8 : L'élève travaille par blocs.
J3C9 : L'élève compte tous les petits carrés jaunes un à la fois.
J3C10 : L'élève ne justifie pas.
J3C11 : L'élève utilise un autre procédé.

Défi 4

J4C1 : L'élève répond « égal ».
J4C2 : L'élève répond « plus grande » ou « plus petite »
J4C3 : L'élève ne répondu pas.
J4C4 : L'élève découpe les figures en triangles isométriques, puis compte.
J4C5 : L'élève découpe l'hexagone en deux trapèzes par une diagonale.
J4C6 : L'élève découpe en parallélogrammes, puis compte.
J4C7 : L'élève fait d'autres découpes.
J4C8 : L'élève mesure les périmètres.
J4C9 : L'élève fait d'autres mesures.
J4C10 : L'élève utilise des formules d'aire.
J4C11 : L'élève ne justifie pas.
J4C12 : L'élève utilise une autre méthode.
J4C13 : L'élève ne procède à aucune découpe.

Défi 5

J5C1 : L'élève a répondu correctement pour la mesure du périmètre.
J5C2 : L'élève a répondu incorrectement pour le périmètre.
J5C3 : L'élève n'a pas proposé de valeur pour l'aire.
J5C4 : L'élève a répondu correctement pour la mesure de l'aire.
J5C5 : L'élève a répondu incorrectement pour l'aire.
J5C6 : L'élève n'a pas proposé de valeur pour l'aire.
J5C7 : L'élève propose une justification correcte pour le périmètre.
J5C8 : L'élève propose une justification correcte pour l'aire.
J5C9 : L'élève utilise une bonne formule pour le périmètre.
J5C10 : L'élève utilise une bonne formule pour l'aire.
J5C11 : L'élève confond la formule pour le périmètre et la formule pour l'aire.
J5C12 : L'élève a dessiné un quadrillage correct.
J5C13 : L'élève a dessiné un quadrillage incorrect.
J5C14 : L'élève a ébauché un quadrillage sans le terminer.
J5C15 : L'élève a travaillé de façon cohérente et uniquement en cm et cm^2.
J5C16 : L'élève a considéré ul comme équivalent à cm.
J5C17 : L'élève a mélangé les deux systèmes d'unités.

B.6.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

Cet item comportait deux questions. Son graphe implicatif comprend trois parties :

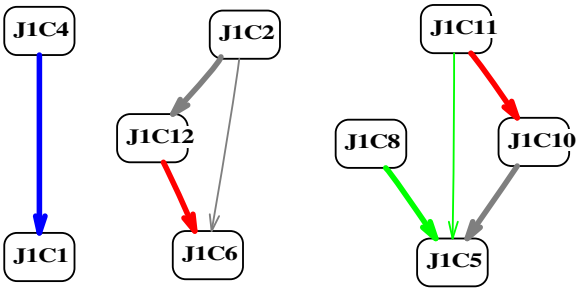


Fig. B.54

La première partie ne comprend qu'une implication : J1C4 → J1C1. Il s'agit de deux comportements de réussite à la question concernant le périmètre. La seule chose à noter est que l'intensité de cette implication n'atteint pas 0,99, ce qui montre que mesurer à la latte les côtés du triangle donné n'est pas une garantie de bonne réponse. Mais comme nous n'avons pas pu recenser séparément les élèves qui ont *vu* les longueurs des côtés sur la figure donnée, la comparaison avec ce groupe d'élèves n'est pas possible.

La deuxième partie du graphe rassemble les comportements d'échec à la question relative au périmètre. Elle n'appelle aucun commentaire.

Quant à la troisième partie, elle rassemble les comportements de réussite à la question relative à l'aire. On y remarque que les deux implications J1C11 → J1C5 et J1C8 → J1C5 ont même intensité. Ainsi la méthode consistant à dessiner un quadrillage et à compter les carrés intérieurs au triangle apparaît aussi efficace que celle qui consiste à compléter le triangle en un rectangle et à diviser l'aire de celui-ci par 2. Cela peut paraître surprenant, mais peut provenir de ce qu'en considérant une réponse comme correcte par la méthode de quadrillage et comptage, nous avons accepté les imprécisions inhérentes à la méthode, si elles restaient dans des limites raisonnables.

Item 2

Le graphe implicatif associé à cet item se réduit à une flèche. Cela n'a rien d'étonnant : 113 élèves sur 123 répondent corrrectement, et 89 d'entre eux adoptent le comportement J2C5. L'analyse statistique « écrase » les comportements très peu fréquents, dans ce cas-ci, tous les autres !

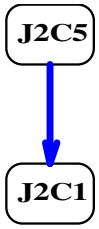


Fig. B.55

Item 3

Voici le graphe implicatif associé à cet item :
On remarque d'abord un fait assez rare mais sans signification particulière : une double flèche joignant J3C4 ↔ J3C1. Autrement dit les deux flèches J3C4 → J3C1 et J3C1 → J3C4 ont la même intensité et de plus, les deux comportements J3C1 et J3C4 ont le même taux d'apparition. L'ordinateur n'a pu départager les deux comportements en question. Cependant les deux ensembles d'élèves ayant ces comportements sont différents !

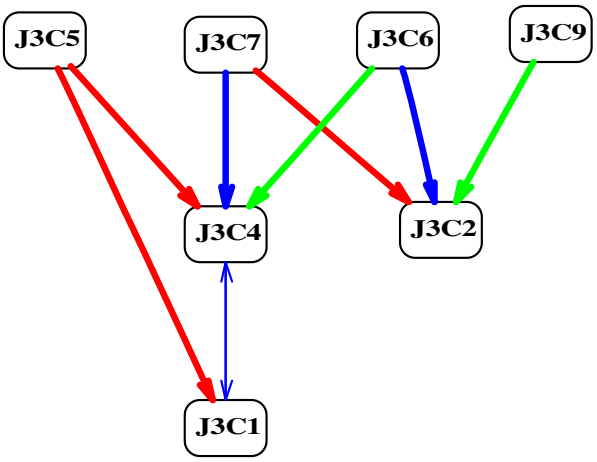


Fig. B.56

Le graphe n'est pas clairement séparé en une partie réussite et une partie échec. Cela provient de ce que J3C6 et J3C7 entraînent à la fois J3C4 (reconstituer le grand carré), qui est un comportement de réussite, et, du fait d'erreurs de comptage ou de calcul, J3C2 (réponse incorrecte). Puisqu'ils entraînent cette réponse, J3C6 et J3C7 rejoignent J3C9 dans le groupe des comportements d'échec.

Tout naturellement J3C5 (reconstitution du grand carré et soustraction correcte) est du côté des réussites.

À remarquer : l'absence sur le diagramme du comportement J3C8, de comptage par blocs, qui n'est donc ni une réussite, ni un échec. Du fait d'erreurs de calculs trop peu d'élèves qui ayant utilisé cette démarche ont fourni la réponse correcte pour que J3C8 soit à classer parmi les réussites. Et trop peu ont fait des erreurs de calcul pour qu'il soit classé parmi les échecs.

Item 4

Les sous-graphes des comportements de réussite et des comportements d'échec sont bien apparents.
Dans le premier, on trouve les découpages en triangles (J4C4) ou en parallélogrammes (J4C6).
Dans le second, le découpage de l'hexagone en deux trapèzes (J4C5), ainsi que les autres découpages (J4C7) et les erreurs « classiques » (calcul de périmètres, usage de formules...).

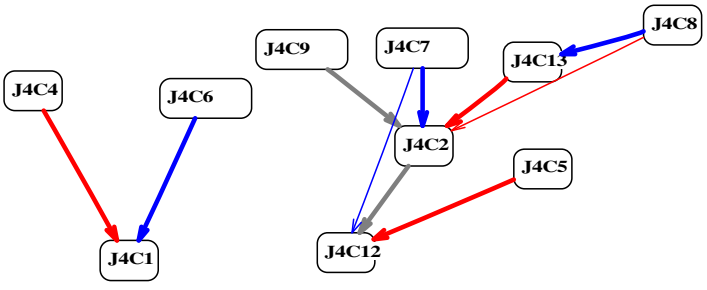


Fig. B.57

Item 5

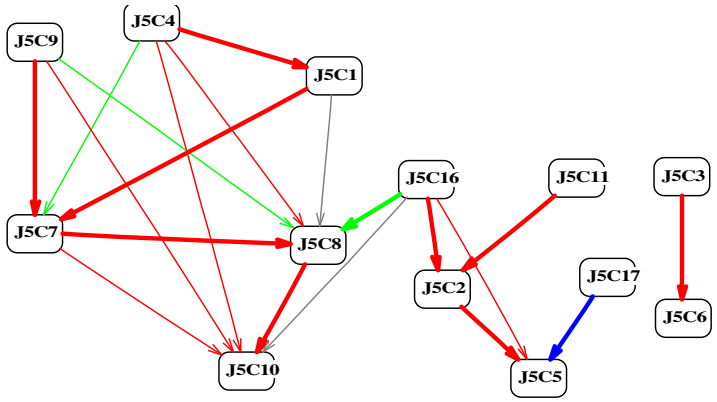


Fig. B.58

On remarque d'abord à une droite une flèche isolée. Elle relie deux comportements de non-réponse que nous classerons parmi les comportements d'échec.

Les deux sous-graphes des comportements de réussite et d'échec sont reliés par deux implications issues de J5C16. Ce comportement consistant à considérer que ul et cm sont des unités de longueur égales, avait pour cet item été considéré comme entraînant automatiquement des réponses erronées. Il est donc normal qu'il entraîne très fortement J5C2 et J5C5. Mais il n'empêche pas d'utiliser la bonne formule, ni de fournir une justification correcte pour l'aire, d'où la présence de flèches aboutissant en J5C8 et J5C10. Conservant le même point de vue que plus haut, nous classerons J5C16 parmi les comportements d'échec, mais ni J5C8, ni J5C10.

On note l'absence dans le diagramme des comportements J5C12 à J5C14 : à la fin de la cinquième primaire, la démarche de quadrillage n'est plus utilisée de façon significative quand il s'agit de déterminer l'aire d'un rectangle. Ce sont les formules qui sont utilisées tant pour le périmètre que pour l'aire (J5C9 et J5C10).

B.6.3 Structurer les comportements d'échec

Procédant comme pour le pré-test, nous rassemblons sur un seul graphe (qui est un graphe complet et non un squelette) les comportements d'échec recensés à la section précédente, c'est-à-dire les comportements suivants :

- à l'item 1 : J1C2, J1C6, J1C12 ;
- à l'item 3 : J3C2, J3C6, J3C7, J3C9 ;
- à l'item 4 : J4C2, J4C7, J4C8, J4C9, J4C12, J4C13 ;
- à l'item 5 : J5C2, J5C3, J5C5, J5C6, J5C11, J5C16, J5C17 ;

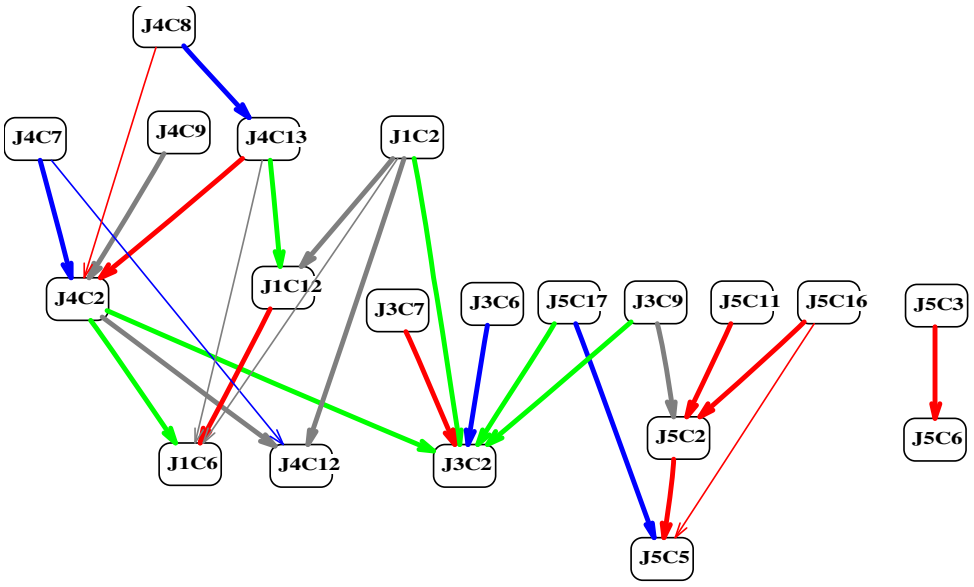


Fig. B.59

Ce graphe a en commun avec son *alter ego* du pré-test de ne pas beaucoup mélanger les différents items. Les seules implications d'un comportement associé à un item vers un comportement associé à un autre item sont les suivantes :

J1C2 → J3C2, J1C2 → J4C12, J4C2 → J3C2, J3C9 → J5C2 et J5C17 → J3C2.

Aucune d'entre elles n'a une intensité supérieure à 0,95, ce qui oblige à une certaine prudence dans les interprétations. Notons néanmoins que les deux premières de ces implications montrent que les élèves incapables de calculer de façon acceptable le périmètre du triangle proposé à l'item 1 ont tendance à être aussi en difficulté à l'item 3 et à utiliser d'« autres méthodes » à l'item 4.

B.6.4 Structurer les comportements de réussite

Les comportements de réussite recensés précédemment sont les suivants :

– à l'item 1 : J1C1, J1C4, J1C5, J1C8, J1C10, J1C11 ;
– à l'item 2 : J2C1, J2C5 ;
– à l'item 3 : J3C1, J3C4, J3C5 ;
– à l'item 4 : J4C1, J4C4, J4C6 ;
– à l'item 5 : J5C1, J5C4, J5C7, J5C8, J5C9, J5C10 ;

Voici le squelette du graphe associé :

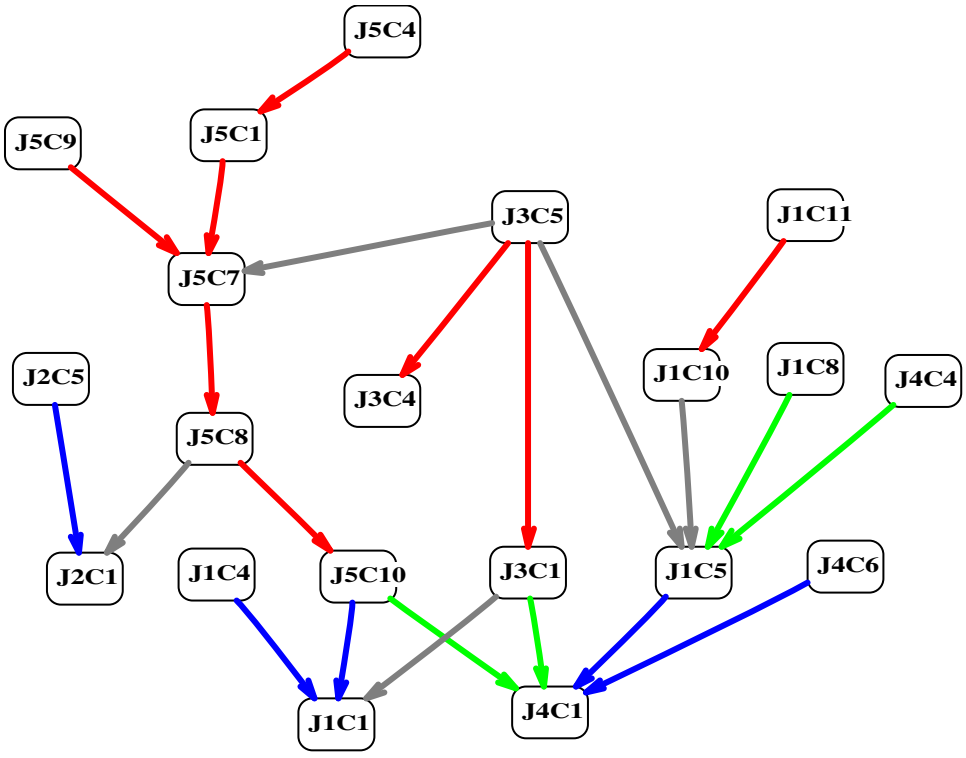


Fig. B.60

Une première remarque s'impose : le test comportait exactement deux calculs de périmètres. Les comportements associés se retrouvent, l'un, J5C1, presque à la source du graphe, l'autre, J1C1, en constitue un nœud terminal. Cette différence de positionnement sur le graphe correspond d'abord à une différence de taux de réussite : 79 % pour J1C1, 45 % pour J5C1. On ne peut en déduire qu'il est beaucoup plus facile de trouver le périmètre d'un triangle que celui d'un rectangle !

La différence provient du contexte dans lequel la question a été posée. À l'item 1, le périmètre pouvait être déterminé « à vue ». Et les élèves qui mesuraient à la latte trouvaient une réponse généralement acceptée, vu la différence insignifiante entre 1 cm et 1 ul. L'énoncé de l'item 5 était plus difficile à comprendre et le support visuel était absent.

Ce n'est pas la connaissance de la formule du périmètre qui est en cause, mais bien l'aptitude à lire un énoncé.

Les mêmes constatations peuvent être faites en comparant les réponses aux deux questions où on demandait de calculer une aire (également aux items 1 et 5). Les comportements associés sont l'un, J5C4, à la source du graphe, et l'autre, J1C5, est presque un nœud terminal. Comme dans le cas du périmètre, l'aire du triangle est plus souvent correcte que celle du rectangle (54 % contre 32 %), alors qu'on pourrait s'attendre au contraire. Ici aussi, ce n'est pas la formule de l'aire du rectangle qui est en cause, mais l'aptitude à lire et interpréter un énoncé.

Le lecteur sera peut être étonné de ne voir aucune flèche dénotant une implication de J5C9 (utilisation d'une bonne formule pour le périmètre) vers J5C1 (valeur du périmètre). On peut commettre une erreur de calcul en utilisant une bonne formule ! Signalons toutefois

que l'intensité de l'implication J5C9 → J5C1 est de 0,84, c'est-à-dire juste en dessous de la limite de signification.

Aux sources de ce graphe, nous trouvons les comportements suivants :

Code	Signification	Taux (arrondis)
J1C4	Mesurer les côtés (item 1)	30 %
J1C8	Dessiner un quadrillage et compter (item 1)	53 %
J1C11	Calcul de l'aire du rectangle, puis division par 2 (item 1)	11 %
J2C5	Découpage d'un triangle (item 2)	72 %
J3C5	Reconstitution du grand carré, puis soustraction des carrés manquants (item 3)	34 %
J4C4	Découpage en triangles puis comptage (item 4)	24 %
J4C6	Découpage en parallélogrammes, puis comptage (item 4)	16 %
J5C4	Valeur correcte pour l'aire (item 5)	38 %
J5C9	Bonne formule pour le périmètre (item 5)	20 %

À l'exception de J5C10, voici rassemblées les démarches qui étaient les plus efficaces pour trouver les bonnes réponses aux cinq items.

Les figures suivantes indiquent les comportements de réussite directement impliqués par chacune des sources.

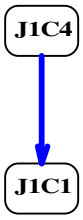


Fig. B.61

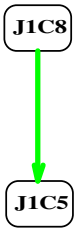


Fig. B.62

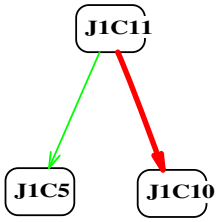


Fig. B.63

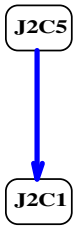


Fig. B.64

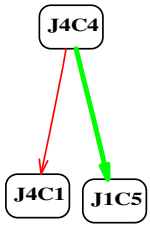


Fig. B.65

Fig. B.66

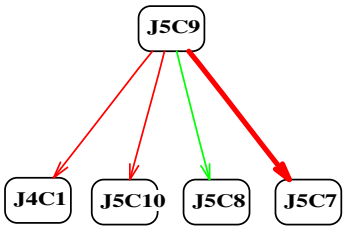


Fig. B.67

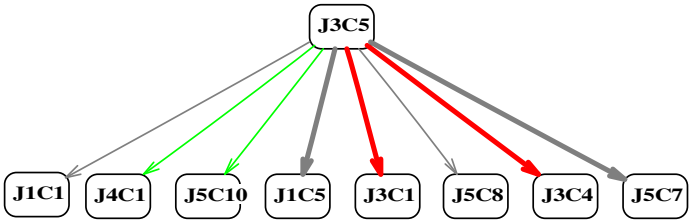


Fig. B.68

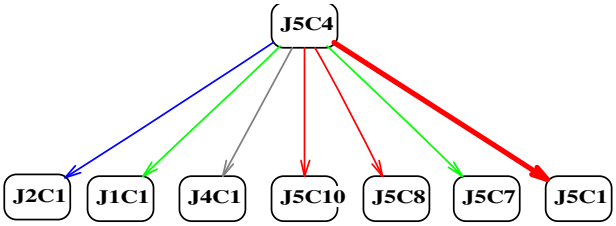


Fig. B.69

Les figures B.61 à B.66 ne nous montrent aucune implication que nous n'ayons déjà rencontrée sur d'autres figures.

Les trois figures B.67 à B.69 ont pour origine des comportements associés aux items 3 et 5.

À eux trois, ces comportements J3C5, J5C4 et J5C9 entraînent six « réponses correctes » : J1C1, J1C5, J2C1, J3C1, J4C1, J5C1. La septième « réponse correcte » est le comportement J5C4 lui-même.

On peut donc considérer que ces trois comportements sont relatifs à des compétences très significatives pour la réussite de ce test. Revenons sur ces deux items.

J3C5 : À l'item 3, l'élève reconstitue le grand carré et soustrait les carrés manquants. C'est clairement un problème de perception globale.

J5C4 et J5C9 : On l'a dit plus haut, la difficulté de l'item 5 réside dans la lecture et l'interprétation de l'énoncé, non dans la technique.

Sur la base d'une étude statistique des copies des élèves, nous avons ainsi isolé les compétences qui sont probablement les plus difficiles à acquérir et contribuent par conséquent le plus à la dispersion des résultats des élèves. Rappelons néanmoins qu'il faut toujours se garder dans le domaine qui nous occupe de conclusions trop catégoriques. Les compétences que nous avons dégagées nous semblent très significatives. Ce ne sont pas nécessairement les seules.

B.7 L'analyse du pré-test de première secondaire (2006–2007)

B.7.1 Les comportements possibles

Voici d'abord, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués.

Item 1

Les vingt-et-un comportements repérés pour l'item 1 du pré-test sont les suivants :

I1C1 : L'élève a répondu de manière correcte et complète.

I1C2 : L'élève n'a pas répondu de manière correcte ou complète.

I1C3 : L'élève a coché la case « temps » à la première question.

I1C4 : Au moins une sous-réponse est correcte et au moins une est incorrecte.

I1C5 : L'élève a confondu « longueur » et « aire ».

I1C6 : L'élève a confondu « aire » et « volume ».

I1C7 : L'élève a confondu « longueur » et « volume ».

I1C8 : L'élève a coché la case « poids » aux questions 2 et/ou 5.

I1C9 : L'élève a coché la case « temps » aux questions 3 ou 4.

I1C10 : La définition du périmètre est générale et acceptable.

I1C11 : La méthode de calcul du périmètre est générale et acceptable.

I1C12 : La définition de l'aire est générale et acceptable.

I1C13 : La méthode de calcul de l'aire est générale et acceptable.

I1C14 : Quand il s'agit du calcul (du périmètre et de l'aire), l'élève donne comme exemple la formule du carré ou du rectangle.

I1C15 : Dans ses calculs, l'élève a confondu les formules du périmètre et d'aire.

I1C16 : L'élève n'a pas répondu à la seconde partie du défi.

I1C17 : Le mot « périmètre » recouvre l'idée de « contour ».

I1C18 : Le mot « périmètre » recouvre l'idée de « mesure ».

I1C19 : Le mot « aire » recouvre l'idée d'« intérieur d'une courbe ».

I1C20 : Le mot « aire » est équivalent à « surface ».

I1C21 : Le mot « aire » évoque l'idée d'un calcul.

Item 2

À cet item, nous avons recensé les dix comportements suivants :

I2C1 : La réponse de l'élève est correcte.

I2C2 : La réponse est incorrecte.

I2C3 : Dans la première bande, l'élève a (mal) placé un carré.

I2C4 : Dans la première bande, l'élève a bien placé un rectangle.

I2C5 : Dans la première bande, l'élève a bien placé un triangle.

I2C6 : Dans la première bande, l'élève a bien placé un parallélogramme.

I2C7 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un carré.

I2C8 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un rectangle.

I2C9 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un triangle.

I2C10 : Dans la seconde bande, l'élève a bien placé un parallélogramme.

Item 3

Quatorze comportements ont été recensés à l'item 3.

I3C1 : La réponse de l'élève est exacte (indépendamment de son raisonnement).

I3C2 : La réponse est inexacte.

I3C3 : Le raisonnement de l'élève est complet et correct.

I3C4 : Le raisonnement de l'élève est incomplet mais correct.

I3C5 : Le raisonnement de l'élève est incorrect.

I3C6 : Le raisonnement de l'élève est absent.

I3C7 : L'élève, dans son raisonnement, s'est basé explicitement sur l'affirmation : « Les carrés sont de même dimension. ».

I3C8 : L'élève a confondu « longueur » et « aire ».

I3C9 : L'élève ne compare pas lez zones mais les carrés.

I3C10 : L'élève a mesuré des longueurs.

I3C11 : L'élève a comparé des périmètres.

I3C12 : L'élève a calculé des aires.

I3C13 : L'élève a utilisé une autre méthode.

I3C14 : L'élève n'a pas répondu.

Item 4

Pour cet item, dix-sept comportements ont été retenus :

I4C1 : L'élève dessine le rectangle attendu.

I4C2 : L'élève dessine autre chose.

I4C3 : L'élève ne dessine rien.

I4C4 : La réponse de l'élève à la première question est correcte.

I4C5 : La réponse de l'élève à la seconde question est correcte.

I4C6 : L'élève n'a pas répondu aux deux questions.

I4C7 : L'élève a tenu compte des points.

I4C8 : L'élève a reproduit un ou plusieurs petits rectangles dans le rectangle dessiné.

I4C9 : Le ou les rectangles reproduits dans le rectangle dessiné ne sont pas conformes.

I4C10 : L'élève a procédé par comptage.

I4C11 : L'élève a appliqué une formule d'aire.

I4C12 : L'élève a utilisé une autre méthode.

I4C13 : Le raisonnement de l'élève est correct.

I4C14 : Le raisonnement est partiel mais sans erreur.

I4C15 : Le raisonnement est erroné.

I4C16 : L'élève n'a pas explicité son raisonnement.

I4C17 : L'élève n'a répondu qu'à une des deux questions.

Item 5

Nous avons repéré dix comportements à cet item 5 :

I5C1 : L'élève a trouvé l'intrus.

I5C2 : L'élève a mentionné le « carré sur pointe » comme intrus.

I5C3 : L'élève n'a pas répondu.

I5C4 : L'élève a comparé des formes et non des aires.

I5C5 : L'élève a comparé ou mesuré des longueurs.

I5C6 : L'élève a raisonné à partir des graduations des bords de la bande.

I5C7 : L'élève a comparé ou calculé des aires.

I5C8 : La justification est partielle mais sans erreur.

I5C9 : La justification est erronée.

I5C10 : L'élève n'a pas justifié sa réponse.

Item 6

Quinze comportements ont été recensés pour cet item.

I6C1 : La réponse de l'élève est bonne.
I6C2 : La réponse n'est pas bonne.
I6C3 : L'élève n'a pas répondu.
I6C4 : L'élève a tracé les médianes sur la figure originale.
I6C5 : L'élève a procédé par découpage et recomposition.
I6C6 : L'élève a mesuré des longueurs.
I6C7 : L'élève a comparé ou calculé des aires.
I6C8 : Le raisonnement de l'élève est exact.
I6C9 : Le raisonnement est partiel mais sans erreur.
I6C10 : Le raisonnement de l'élève est erroné.
I6C11 : L'élève n'a pas inscrit son raisonnement.
I6C12 : La réponse est 1.

B.7.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

L'item 1 comportait deux parties distinctes. Son graphe implicatif en comporte trois.

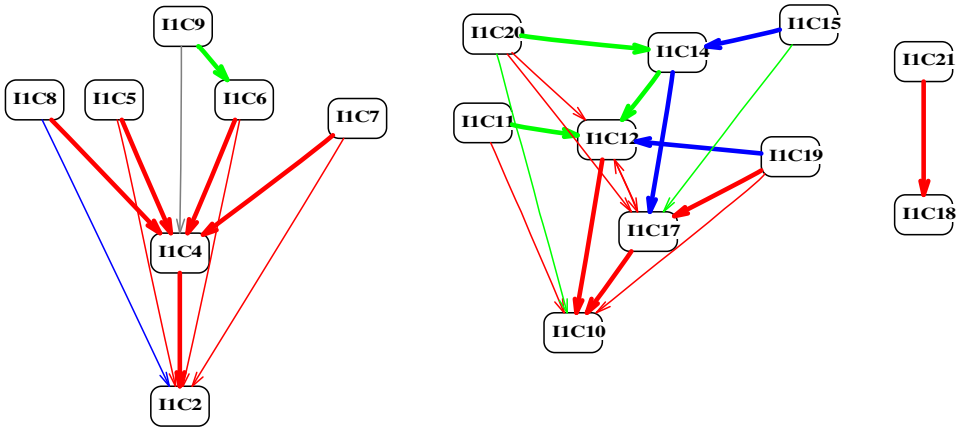


Fig. B.70

La partie de gauche est constitué des comportements d'échec à la première question de l'item. On y retrouve en particulier les confusions longueur–aire (I1C5), aire–volume (I1C6) et longueur–volume (I1C7). I1C8 est le fait d'avoir choisi « le poids » aux sous-questions 2 ou 5, I1C9 le fait d'avoir choisi « temps » aux sous-questions 3 ou 4. Le graphe est très semblable à celui qui rend compte de la même question posée aux élèves de cinquième primaire. En fait, cette question relève beaucoup plus de la vie courante que de l'activité scolaire et celle-ci n'influence sans doute guère les réponses.

Les deux autres composantes de la figure B.70 se rapportent à la seconde partie de l'item 1.

La flèche isolée I1C21 → I1C18 associe deux comportements strictement procéduraux : pour définir le mot « périmètre », l'élève décrit une procédure de mesure et pour définir le mot « aire », il décrit un algorithme de calcul. On sait que la description procédurale est à l'origine de la conceptualisation. Les élèves concernés sont donc à ce stade. L'isolement de

la flèche qui lie ces deux comportements I1C18 et I1C21 illustre bien le fait qu'on ne peut en déduire ni que les élèves énoncent des définitions suffisamment générales et acceptables, ni le contraire. Nous ne rangerons donc I1C18 et I1C21 ni dans les comportements de réussite, ni dans les comportements d'échec.

La partie centrale du graphe concerne les définitions et méthodes de calcul du périmètre et de l'aire. On y trouve notamment I1C15 (confusion des formules de périmètre et d'aire), qui entraîne fortement I1C14 (prédominance des formules du carré et du rectangle) et moyennement I1C17 (le mot « périmètre » évoque l'idée de contour — ce qui est un de ses usages dans le langage courant — plutôt que celle de longueur du contour).

Il est difficile de classer ces comportements en termes de réussite ou d'échec. Cet item montre surtout la nécessité de préciser l'usage du vocabulaire courant dans le cadre d'un cours de mathématique.

Item 2

Réussir à cette question, c'est placer un triangle, un rectangle et un parallélogramme dans chacune des bandes, placer un carré dans la bande inférieure et ne pas en placer un dans la bande supérieure. Dès lors le comportement I2C1 associé à la réussite entraîne *logiquement* chacun des comportements corrects I1C4 à I1C10, mais *statistiquement*... il le fait avec une intensité variable, d'autant plus faible que le comportement entraîné est fréquent.

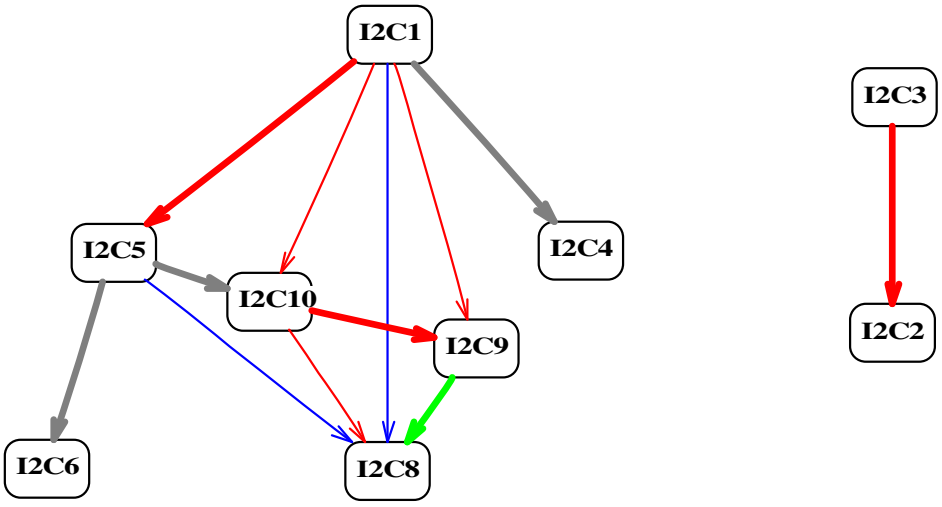


Fig. B.71

L'exemple flagrant est celui du comportement I2C7 (placer un carré dans la seconde bande) que *tous* les élèves ont eu. Dans ce cas l'intensité de la flèche I2C1 → I2C7 tombe à 0 : elle ne signifie plus rien et elle ne figure même plus dans le graphe. De même l'intensité de I2C1 → I2C6 est inférieure à 0,85.

Ainsi les flèches issues de I2C1 ne nous permettent de dire qu'une chose : I2C5, I2C10 et I2C9 sont moins fréquents que I2C8, lui-même moins fréquent que I2C4 et I2C6. Nous le savions déjà (*section 14.3.2*).

Les autres implications présentent dans le sous-graphe des réussites montrent que l'aptitude à placer une des formes (triangle, rectangle ou parallélogramme) dans l'une des bandes n'entraîne nullement l'aptitude à la placer dans l'autre bande : le graphe ne comporte aucune des implications pouvant associer I2C4 à I2C8 (les rectangles), I2C5 à I2C9 (les triangles) ou I2C6 à I2C10 (les parallélogrammes). Ceci montre bien que les manipulations à opérer pour réaliser ces placements rendent les deux situations fondamentalement différentes.

Quant au sous-graphe de comportements d'échec, son unique implication ne nécessite aucun commentaire.

Item 3

À cet item, c'est surtout le sous-graphe des comportements d'échec qui peut nous apprendre quelque chose.

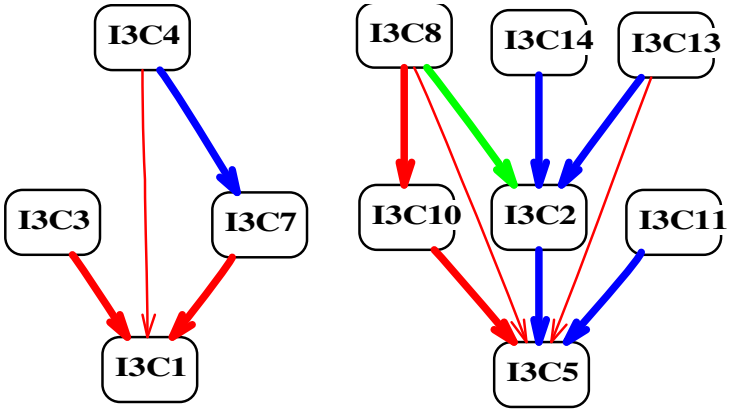


Fig. B.72

Les comportements les plus intéressants qui y figurent sont I3C8, I3C10 et I3C11. Les deux premiers sont relatifs à la confusion entre longueur et aire, qui réapparaît dans cette situation peu familière. Le troisième est la démarche consistant à *comparer les périmètres*, souvent à vue, sans les calculer et sans rien mesurer. Comme le montre le graphique, elle se démarque nettement des deux premières alors qu'on pourrait croire que ce n'en est qu'une variante.

Item 4

Le graphe implicatif associé à cet item est découpé en trois parties et aurait pu l'être en quatre parties.

À l'extrême droite, la flèche I4C11 → I4C15 montre l'inefficacité de l'usage des formules d'aire pour aborder cette situation. Il s'agit bien entendu là de deux comportements d'échec.

Immédiatement à la gauche de cette flèche, on trouve I4C7 → I4C2, qui ne demande guère de commentaires non plus : I4C7 est le comportement basé sur le comptage de points qui

débouche directement sur le problème des « piquets de clôture ».

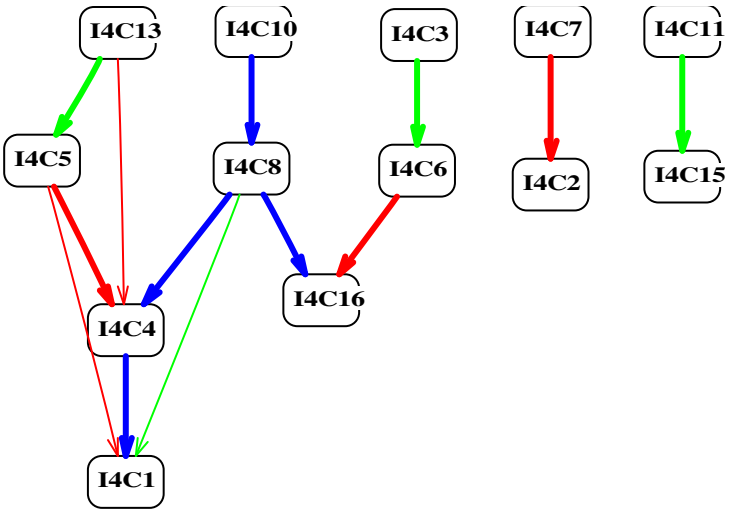


Fig. B.73

Vient ensuite la partie la plus importante du graphe. On y rencontre d'abord une chaîne I4C3 → I4C6 → I4C16 qui relie trois comportements de non-réponse ou de non-justification, donc également des échecs.

L'implication I4C10 → I4C8 montre la procédure de construction du rectangle demandé par la reproduction du petit rectangle associée au comptage du nombre de copies nécessaires. Elle sert d'intermédiaire entre le sous-graphe des comportements de non-réponse à droite et celui des comportements de réussite à gauche. I4C10 et I4C8 sont plutôt des comportements de réussite. I4C13 et I4C5 en sont clairement aussi.

Item 5

À l'item 5 (le problème de « l'intrus »), I5C2 (choix du carré sur pointe), I5C4 (comparaison des formes et non des aires) sont évidemment des comportements d'échec. I5C7 et I5C8 entraînent la bonne réponse : ce sont des comportements de réussite. I5C6 (raisonnement à partir des graduations des bords de la bande) entraîne aussi bien un comportement d'échec qu'un comportement de réussite. Ce n'est ni l'un, ni l'autre.

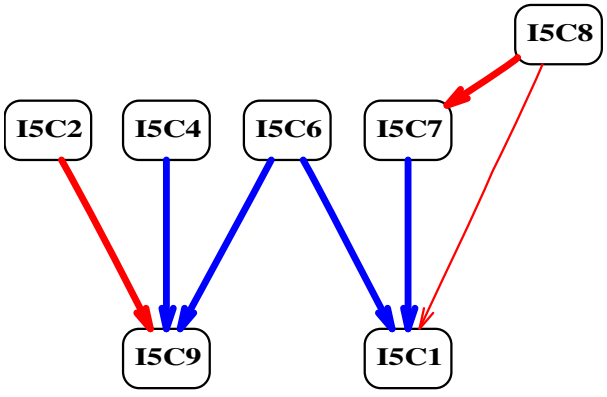


Fig. B.74

Item 6

Le graphe implicatif de cet item est bien séparé en deux parties. À gauche, le sous-graphe des comportements de réussite montre un groupe I6C4 (tracé des médianes du carré), I6C5 (découpage et recomposition), I6C8 (raisonnement correct) qui indique bien la procédure la plus utilisée pour arriver à la réponse. Le comportement isolé, I6C9, est le « raisonnement partiel mais correct ». Même partiel, il entraîne fortement la réussite.

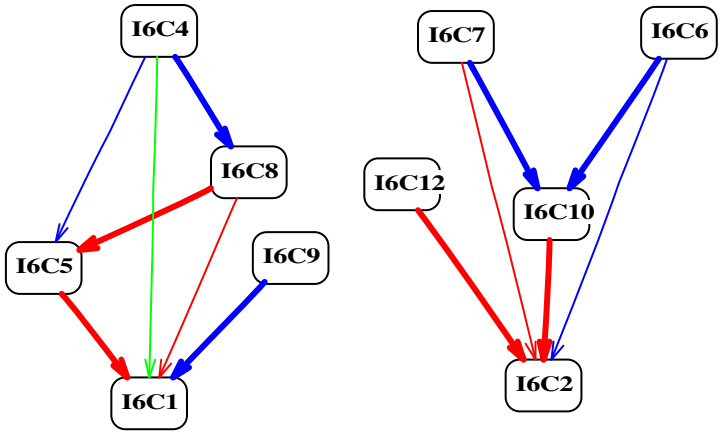


Fig. B.75

Dans le sous-graphe de échecs, on retrouve les démarches numériques : mesurer des longueurs, calculer des aires, qui débouchent sur des raisonnements erronés. Vouloir trouver l'aire de la zone orange en appliquant une formule n'était pas une bonne idée dans cet item !

Le comportement I6C12 consiste à fournir la réponse « 1 ». Il résulte d'une confusion entre « le carré » et « la zone verte » et constitue un élément bien distinct des autres comportements d'échec.

B.7.3 Structurer les comportements d'échec

Les comportements classés ci-dessus comme comportements d'échec sont les suivants :

- item 1 : I1C2, I1C4, I1C5, I1C6, I1C7, I1C8, I1C9 ;
- item 2 : I2C2, I2C3 ;
- item 3 : I3C2, I3C5, I3C8, I3C10, I3C11, I3C13, I3C14 ;
- item 4 : I4C2, I4C3, I4C6, I4C7, I4C11, I4C15, I4C16 ;
- item 5 : I5C2, I5C4 ;
- item 6 : I6C2, I6C6, I6C7, I6C10, I6C12.

Le graphe implicatif (limité au squelette, et amputé des implications de faible intensité) liant tous ces comportements montre peu de connections entre les différents items. Sans doute les démarches à mettre en œuvre varient-elles très fort d'un item à l'autre, donc les comportements d'échec aussi.

On pourrait néanmoins s'attendre à ce que des implications existent entre deux occurrences d'un même comportement. Or ce n'est pas le cas. Par exemple, il n'existe aucune

implication significative entre I1C5 (confusion entre longueur et aire à l'item 1) et I3C8 (même comportement à l'item 3).

Le contexte d'une activité reste donc un élément déterminant des types d'erreur susceptibles d'être commises.

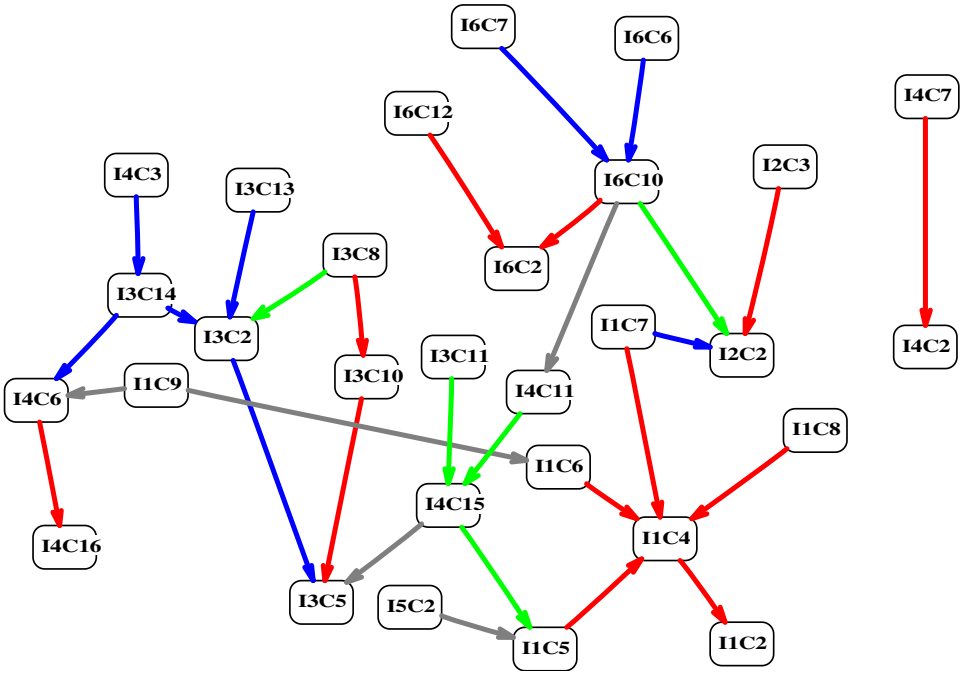


Fig. B.76

Les seules implications entre comportements associés à des items différents sont :
- I1C7 (confusion longueur-volume) → I2C2 (réponse incorrecte ou incomplète à l'item 2).
- I1C9 (choisir la réponse « temps » aux questions 3 ou 4 de l'item 1) → I4C16 (pas de réponse à l'item 4).
- I3C11 (comparer des périmètres à l'item 3) → I4C15 (raisonnement erroné à l'item 4).
- I3C14 s'insère entre I4C3 et I4C6 : ce sont trois comportements de non-réponse.
- I5C2 (choix du carré sur pointe comme intrus à l'item 5) → I1C5 (confusion longueur-aire).

La plupart de ces implications concernent au moins un comportement peu précis, pouvant recouvrir des démarches différentes et peu fréquentes (réponse incorrecte, absence de réponse...) ou encore un comportement pouvant être qualifié d'« impulsif », comme le choix du carré sur pointe à l'item 5.

B.7.4 Structurer les comportements de réussite

Les comportements suivants ont été recensés comme comportements de réussite :

- item 2 : I2C1, I2C4, I2C5, I2C6, I2C8, I2C9, I2C10 ;
- item 3 : I3C1, I3C3, I3C4, I3C7 ;
- item 4 : I4C1, I4C4, I4C5, I4C8, I4C10, I4C13 ;
- item 5 : I5C1, I5C7, I5C8 ;

– item 6 : I6C1, I6C4, I6C5, I6C8, I6C9.

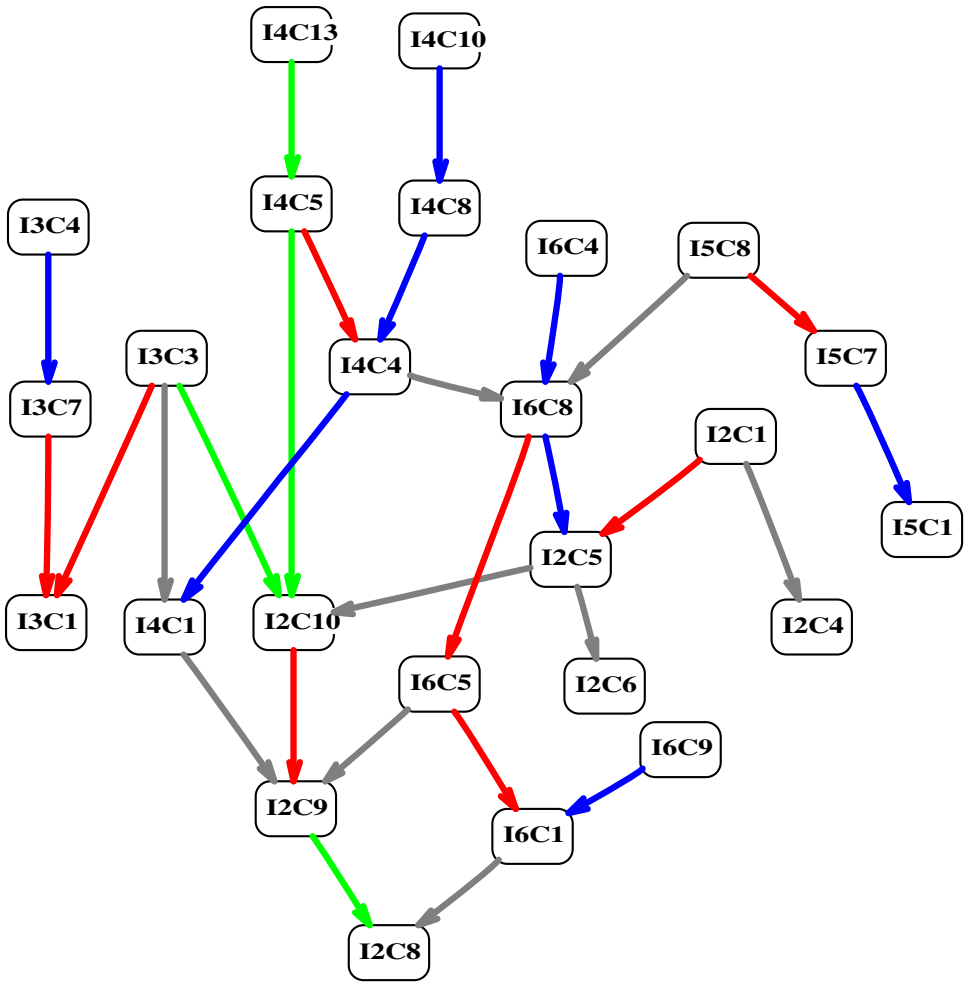


Fig. B.77

À part l'item 1 qui n'est pas représenté, les différents items sont plus imbriqués dans le graphe des comportements de réussite que dans le graphe des comportements d'échecs. Ainsi les items 2 et 6 sont chacun « en communication » avec trois autres items. Selon notre habitude, relevons les comportements situés à la source du graphe et, pour chacun d'entre eux, quels autres comportements de réussite il implique directement.

Il s'agit des comportements suivants :

Code	Signification	Taux (arrondis)
I2C1	Réponse correcte à l'item 2	28 %
I3C3	Raisonnement complet et correct à l'item 3	16 %
I3C4	Raisonnement incomplet mais correct à l'item 3	14 %
I4C10	Procédure par comptage à l'item 4	3 %
I4C13	Raisonnement correct à l'item 4	5 %
I5C8	Justification partielle mais sans erreur à l'item 5	12 %
I6C9	Raisonnement partiel mais sans erreur à l'item 6	11 %

On ne peut manquer d'être frappé par une différence importante entre cette liste de comportements-sources et celles que nous avons rencontrées dans les analyses de tests

concernant les classes de cinquième et sixième primaire. À une ou deux exceptions près, ce ne sont plus des savoirs ou des procédures qui sont listées, mais bien des capacités de raisonnement. Les questions du test étaient sans doute moins techniques, mais émettre un raisonnement correct ne peut se faire sans que des savoirs aient été conceptualisés.

Voici à présent les graphiques qui montrent les comportements de réussite directement impliqués par chacun des comportements sources.

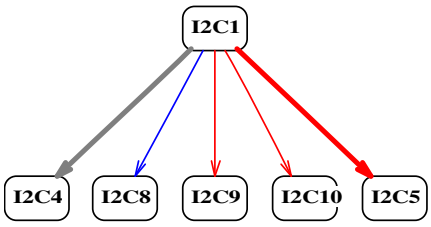


Fig. B.78

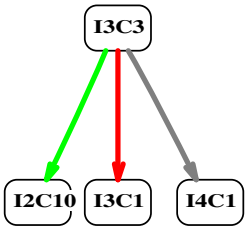


Fig. B.79

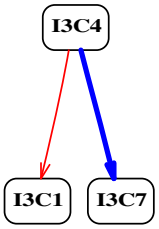


Fig. B.80

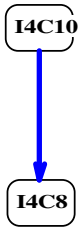


Fig. B.81

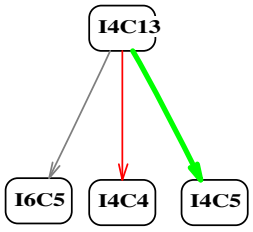


Fig. B.82

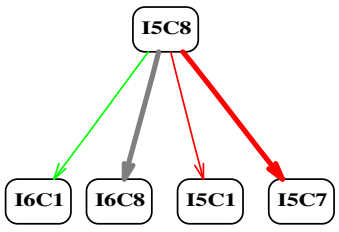


Fig. B.83

Fig. B.84

Les figures B.78, B.80, B.81, B.84 ne nous montrent aucune implication que nous n'ayons déjà rencontrée.

À la figure B.79, nous voyons que raisonner correctement à l'item 3 (I3C3) entraîne moyennement le bon placement d'un parallélogramme dans la seconde bande à l'item 2 (I2C10) et faiblement le dessin d'un bon rectangle à l'item 4 (I4C1). Les trois comportements peuvent être considérés comme liés à une bonne perception visuelle.

À la figure B.82, nous repérons l'implication (d'intensité faible) I4C13 → I6C5 : raisonner correctement amène aussi le bon raisonnement (découpage et recomposition) à l'item 6. Nous sommes ici dans un domaine plus numérique qu'au paragraphe précédent où on se contentait de comparer des aires.

Enfin, à la figure B.83, on observe des implications d'un comportement de justification partielle mais sans erreur vers d'autres comportements analogues (en plus des implications vers I5C1 et I5C7).

Ainsi qu'il en a été lors des analyses antérieures, nous constatons que, exception faite de l'item 1, qui joue un rôle séparé, toutes les « réponses correctes » aux items de ce prétest soit sont elles-mêmes des comportements sources du graphe des comportements de réussite, soit impliquées par l'un d'entre eux.

B.8 L'analyse du post-test de première secondaire (2006–2007)

B.8.1 Les comportements possibles

Voici d'abord, item par item, les comportements qui ont été recensés et les codes qui leur ont été attribués.

Item 1

J1C1 : L'élève a dessiné correctement un parallélogramme.

J1C2 : L'élève a dessiné incorrectement un parallélogramme.

J1C3 : L'élève n'a pas dessiné de parallélogramme.

J1C4 : L'élève a dessiné correctement un rectangle.

J1C5 : L'élève a dessiné incorrectement un rectangle.

J1C6 : L'élève n'a pas dessiné de rectangle.

J1C7 : L'élève a noté qu'on ne pouvait pas dessiner de carré.

J1C8 : L'élève a justifié pourquoi on ne pouvait pas dessiner de carré.

J1C9 : L'élève a tenté de dessiner un carré.

J1C10 : L'élève a dessiné un carré sans respecter la mesure de $[AB]$.

J1C11 : L'élève a dessiné correctement un losange.

J1C12 : L'élève a dessiné incorrectement un losange.

J1C13 : L'élève a dessiné un losange incorrectement car n'a pas respecté la mesure de $[AB]$.

J1C14 : L'élève a dessiné un losange incorrectement pour d'autres raisons.

J1C15 : L'élève n'a pas dessiné de losange.

J1C16 : L'élève a dessiné correctement un trapèze.

J1C17 : L'élève a dessiné un trapèze incorrectement.

J1C18 : L'élève n'a pas dessiné de trapèze.

J1C19 : L'élève a noté que les aires du parallélogramme, du rectangle et du losange sont égales.

J1C20 : L'élève a noté que les aires du parallélogramme et du rectangle sont égales (mais pas le losange).

J1C21 : L'élève a produit cinq bonnes réponses.

J1C22 : L'élève a produit quatre bonnes réponses.

J1C23 : L'élève a produit trois bonnes réponses.

J1C24 : L'élève a produit deux bonnes réponses.

J1C25 : L'élève a produit une bonne réponse.

J1C26 : L'élève n'a produit aucune bonne réponse.

Item 2

J2C1 : L'élève a dessiné correctement $ABEF$.

J2C2 : L'élève a dessiné incorrectement $ABEF$.

J2C3 : L'élève n'a pas dessiné $ABEF$.

J2C4 : L'élève a dessiné un parallélogramme.

J2C5 : L'élève a respecté les consignes.

J2C6 : L'élève a noté que les aires de $ABEF$ et $ABCD$ sont égales.

J2C7 : L'élève a donné une autre réponse.

J2C8 : L'élève n'a pas répondu.

J2C9 : L'élève a justifié correctement.

J2C10 : L'élève a justifié incorrectement.

J2C11 : L'élève n'a pas justifié.

Item 3

J3C1 : L'élève a répondu correctement.
J3C2 : L'élève a répondu incorrectement.
J3C3 : L'élève n'a pas répondu.
J3C4 : L'élève a utilisé une formule « coté × côté ».
J3C5 : L'élève a utilisé la formule du périmètre.
J3C6 : L'élève a procédé par découpage en tranches.
J3C7 : L'élève a tracé la hauteur relative à $[AB]$.
J3C8 : L'élève a mesuré $[AB]$ et la hauteur relative.
J3C9 : L'élève a calculé l'aire avec ces mesures.
J3C10 : L'élève a tracé la hauteur relative à $[BC]$.
J3C11 : L'élève a mesuré $[BC]$ et la hauteur relative.
J3C12 : L'élève a calculé l'aire avec ces mesures.
J3C13 : L'élève a tracé d'autres éléments.
J3C14 : L'élève a fait d'autres mesures.
J3C15 : L'élève a utilisé un autre procédé.
J3C16 : L'élève n'a pas justifié.

Item 4

J4C1 : L'élève a répondu que les aires des triangles ABC et ADC sont égales.
J4C2 : L'élève a répondu incorrectement.
J4C3 : L'élève n'a pas répondu.
J4C4 : L'élève a utilisé une formule d'aire.
J4C5 : L'élève a procédé par comptage.
J4C6 : L'élève a justifié correctement par l'égalité des bases et des hauteurs.
J4C7 : L'élève a justifié par coupage selon une diagonale.
J4C8 : L'élève a donné une autre justification.
J4C9 : L'élève n'a pas justifié.
J4C10 : L'élève a justifié partiellement à la première question.
J4C11 : L'élève a justifié erronément à la première question.
J4C12 : L'élève a donné la mesure correcte de l'aire.
J4C13 : L'élève a donné une mesure incorrecte.
J4C14 : L'élève n'a pas donné de mesure pour l'aire.
J4C15 : L'élève a utilisé la formule d'aire du triangle.
J4C16 : L'élève a utilisé la formule « côté × côté ».
J4C17 : L'élève a utilisé une autre méthode.
J4C18 : L'élève n'a pas justifié.
J4C19 : L'élève n'a pas tracé le segment $[AC]$.
J4C20 : L'élève a confondu périmètre et aire.
J4C21 : L'élève a utilisé une mauvaise hauteur.

Item 5

J5C1 : L'élève a fourni la mesure correcte de l'aire.
J5C2 : L'élève a donné une mesure incorrecte de l'aire.
J5C3 : L'élève n'a pas calculé la mesure de l'aire.
J5C4 : L'élève a tracé au moins une diagonale.
J5C5 : L'élève n'a rien tracé sauf éventuellement le rectangle.
J5C6 : L'élève a mesuré au moins une diagonale.
J5C7 : L'élève a mesuré les côtés.
J5C8 : L'élève a justifié correctement en décomposant en deux triangles.
J5C9 : L'élève a justifié correctement par le demi-produit des deux diagonales.
J5C10 : L'élève a justifié correctement d'une autre manière.
J5C11 : L'élève a justifié incorrectement.
J5C12 : L'élève n'a pas justifié.
J5C13 : L'élève a dessiné correctement le rectangle.
J5C14 : L'élève a dessiné un rectangle incorrect.
J5C15 : L'élève n'a pas dessiné le rectangle.

B.8.2 Des comportements de réussite et d'échec

Item 1

La partie du gauche du graphe implicatif constitue, pour l'essentiel, le sous-graphe des réussites. On y remarque d'abord les comportements J1C21 (cinq bonnes réponses) et J1C22 (quatre bonnes réponses), mais pas J1C23 (trois bonnes réponses). On doit donc considérer que la réussite à cet item nécessite la production d'au moins quatre bonnes réponses (l'une d'entre elles peut être le non-dessin du carré), ce qui fixe à 55 % le taux de réussite.

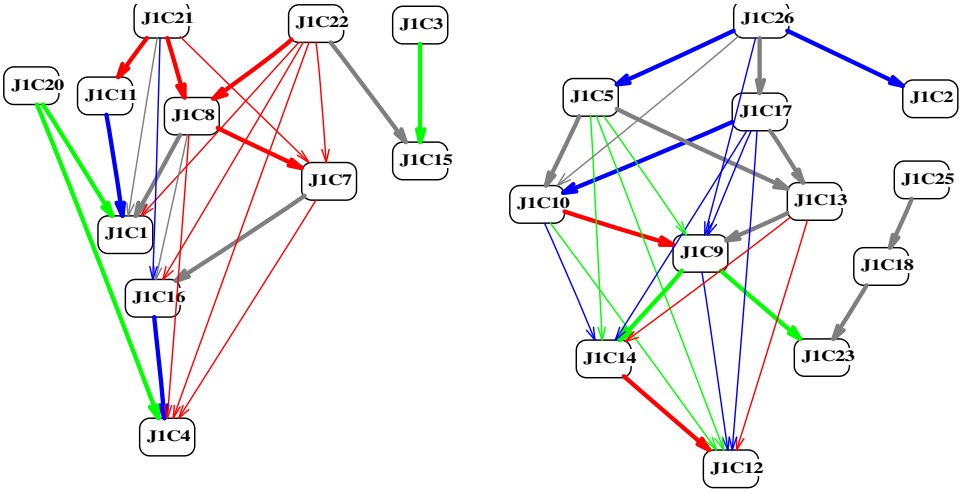


Fig. B.85

On voit immédiatement quel polygone n'a majoritairement pas été dessiné par les élèves qui ne produisent que quatre bonnes réponses puisque J1C22 implique J1C15 (le losange n'est pas dessiné). Toutefois l'intensité de l'implication J1C22 → J1C15 est faible.

J1C3 (non-dessin du parallélogramme) n'est évidemment pas un comportement de réussite mais s'accroche à ce sous-graphe du fait qu'il entraîne également J1C15.

Très logiquement, J1C22 n'entraîne pas J1C8 (dessin du losange), mais entraîne les quatre autres bonnes réponses : J1C1 (dessin du parallélogramme), J1C4 (dessin du rectangle), J1C7 (non-dessin du carré) et J1C16 (dessin du trapèze). Encore plus logiquement, J1C21 entraîne les cinq bonnes réponses. Toutefois, l'implication J1C21 → J1C1 est faible, ce qui est probablement dû au fort taux de réussite pour le dessin de ce parallélogramme.

Dans ce sous-graphe, les cinq comportements de bonne réponse sont rangés au long de deux chaînes qui séparent les cinq formes considérées en deux groupes :

J1C21 → J1C8 → J1C16 → J1C4 (cinq réponses correctes → non-dessin du carré → dessin du trapèze → dessin du rectangle)

J1C21 → J1C11 → J1C1 (cinq réponses correctes → dessin du losange → dessin du parallélogramme).

Rappelons qu'au long d'une chaîne de ce type, les taux de réponse vont en croissant.

Le sous-graphe des comportements d'échec prend sa source en J1C26 (aucune bonne

réponse) qui implique directement les « dessins incorrects » : J1C2 (parallélogramme), J1C5 (rectangle) J1C17 (trapèze) ainsi que J1C10 (dessin d'un carré sans respecter la contrainte sur longueur du côté). La plupart des autres réponses incorrectes sont également présentes. On remarque aussi la branche latérale J1C25 → J1C18 → J1C23 qui montre que si un élève ne fournit qu'une bonne réponse, celle-ci n'est généralement pas un trapèze.

Item 2

Le graphe implicatif relatif à cet item est limpide :

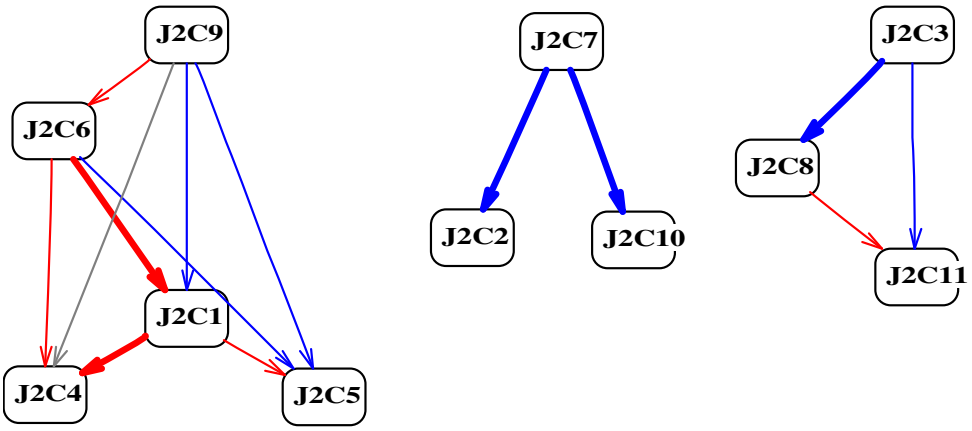


Fig. B.86

À gauche, on trouve le sous-graphe des réussites, ayant comme source la justification correcte (pour la valeur de l'aire). Au centre le sous-graphe des comportements d'échec proprement dits ne comporte que trois comportements. À droite figurent les non-réponses ou non-justifications, à classer également parmi les échecs.

Item 3

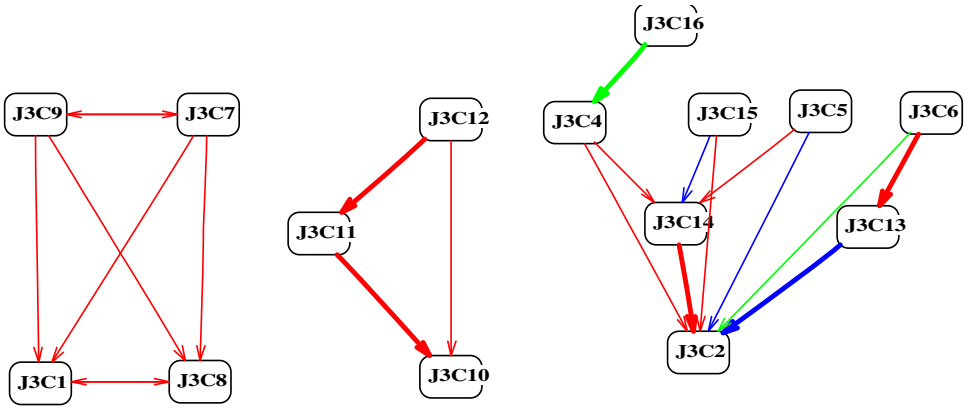


Fig. B.87

Première constatation, l'analyse implicative distingue nettement les deux choix possibles pour la base et la hauteur du parallélogramme. Seul le choix de $[AB]$ (J3C8) comme base entraîne la réussite (J3C1) et lui est même équivalent. Le choix de$[BC]$ comme base

(J3C11), tout comme ses compères J3C10 et J3C12 ne peut être considéré ni comme un comportement de réussite, ni comme un comportement d'échec.

Dans le sous-graphe des comportements d'échec, on trouve notamment la non-justification J3C16, l'usage de mauvaises formules J3C4 et J3C5 ainsi que le découpage en tranches J3C6.

Item 4

L'item 4 comporte deux questions distinctes : comparer les aires des triangles ABC et ABD et donner la valeur de l'aire du triangle ABC. La formule « côté × côté » parfois utilisée pour calculer l'aire d'un parallélogramme va amener l'élève à réussir l'activité de comparaison mais a échouer au calcul de l'aire. Il en résulte que le graphe implicatif mélange les comportements de réussite et d'échec :

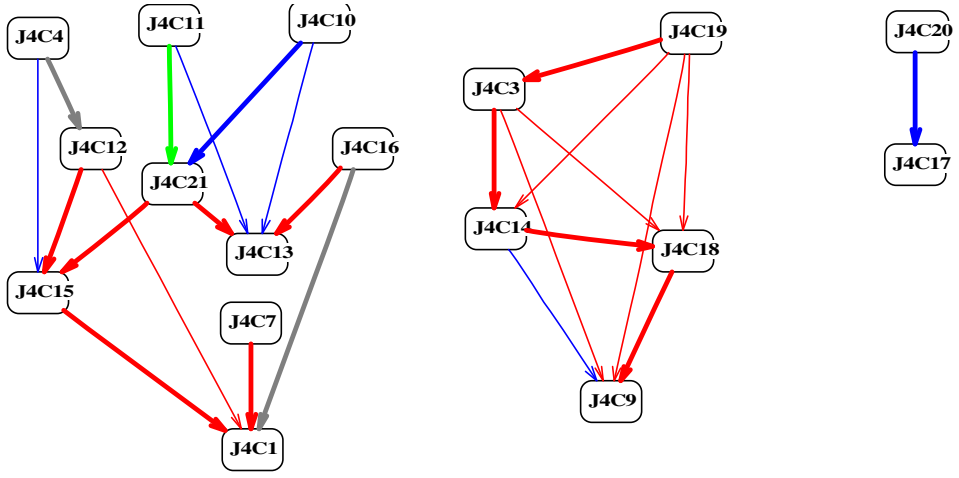


Fig. B.88

Ainsi, dans la partie gauche du graphe, on trouve les comportements d'échec J4C11 (justification erronée pour la comparaison), J4C21 (mauvais choix de hauteur), J4C13 (valeur incorrecte pour l'aire) et J4C16 (formule côté × côté). Le comportement J4C10 (justification partielle pour la comparaison) sera également classé parmi les comportements d'échec puisqu'il entraîne J4C21. Dans cette partie du graphe, restent alors J4C4 (usage d'une formule d'aire), J4C12 (bonne valeur pour l'aire), J4C15 (emploi de la formule d'aire du triangle) et J4C1 (bonne réponse pour la comparaison) et J4C7 (méthode de coupage). À noter la faiblesse de l'implication J4C4 → J4C12 et l'absence d'implication entre J4C7 et J4C12. Tous ces comportements sont à classer parmi les réussites.

La partie centrale du graphe rassemble les comportements de non réponse et non justification : J4C3, J4C14, J4C19, J4C18 et J4C9.

À droite, on constate l'isolement de J4C20 (confusion entre périmètre et aire).

Item 5

Dans la partie droite du graphe associé à l'item 5, on reconnaît immédiatement les comportements liés à la non-réponse ou la non-justification.

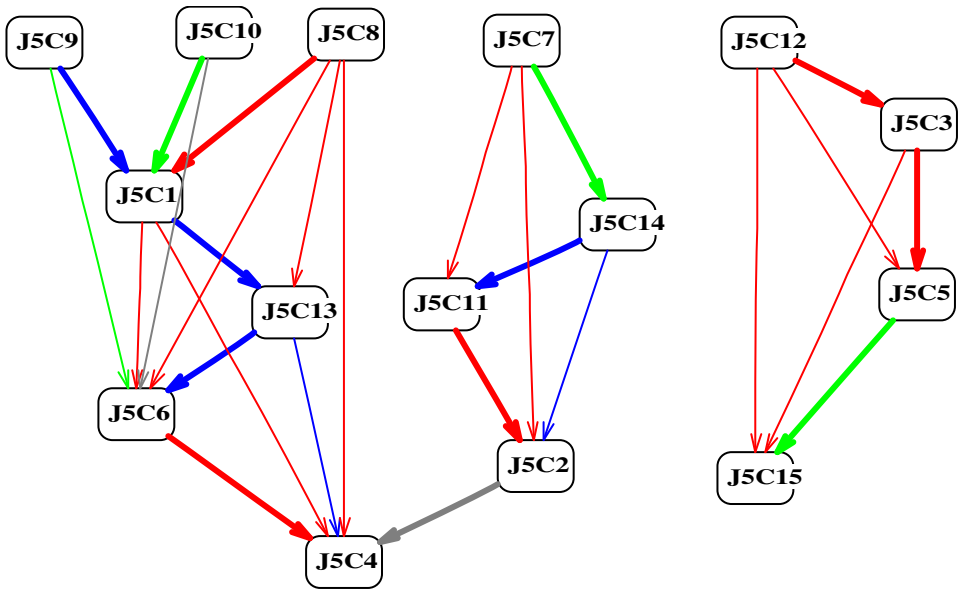


Fig. B.89

Dans la partie gauche, le comportement J5C4 (avoir tracé une diagonale du cerf-volant) est commun à deux sous-graphes bien distincts.

D'une part, J5C7 (mesurer les côtés), J5C14 (dessiner un rectangle incorrect), J5C11 (justifier incorrectement) et J5C2 (attribuer une mauvaise valeur à l'aire) sont des comportements d'échec.

D'autre part, la justification correcte sous trois variantes J5C8, J5C9 et J5C10, la bonne réponse, J5C1, le bon dessin pour le rectangle J5C13 et le fait de mesurer une diagonale, J5C6 sont des comportements de réussite.

J5C4, impliqué à la fois par des réussites et par des échecs, n'est ni l'un, ni l'autre.

Il est intéressant de noter que J5C13 est impliqué directement par J5C8 (décomposition en deux triangles), mais pas par J5C9 (formule du demi-produit des diagonales) ni J5C10 (autre méthode). Ceci montre bien que le dessin du rectangle basé sur les diagonales du cerf-volant résulte d'un processus géométrique et non numérique. Il pourrait servir de base à l'établissement de la formule du demi-produit des diagonales, ce qui aurait aussi pour avantage de faire jouer le même rôle par les deux diagonales.

Structurer les comportements d'échec

Le graphe, même réduit au squelette, des comportements d'échec étant beaucoup trop embrouillé, en voici quelques extraits.

Presque tous les comportements d'échec à l'item 1 impliquent l'échec à la première ques-

tion de l'item 2, c'est-à-dire la production d'un parallélogramme $ABEF$ à partir de $ABCD$.

Exception notable : J1C2 n'entraîne pas J2C2. Autrement dit, dessiner incorrectement le parallélogramme demandé à l'item 1 n'entraîne pas le dessin incorrect d'un parallélogramme analogue à l'item 2, alors que les situations sont très proches. Par contre, dessiner incorrectement un carré, un losange, un rectangle ou un trapèze à l'item 1 entraîne l'incorrection du dessin d'un parallélogramme à l'item 2.
Cette bizarrerie nous rappelle opportunément que, comme pour tout paramètre statistique, la signification de l'intensité d'implication dépend de la taille de l'échantillon considéré. Dans le cas présent, il n'y a que 8 % d'élèves qui ont eu le comportement J1C2. Si la population testée avait été plus nombreuse, peut-être l'implication de J1C2 vers J2C2 deviendrait-elle significative.

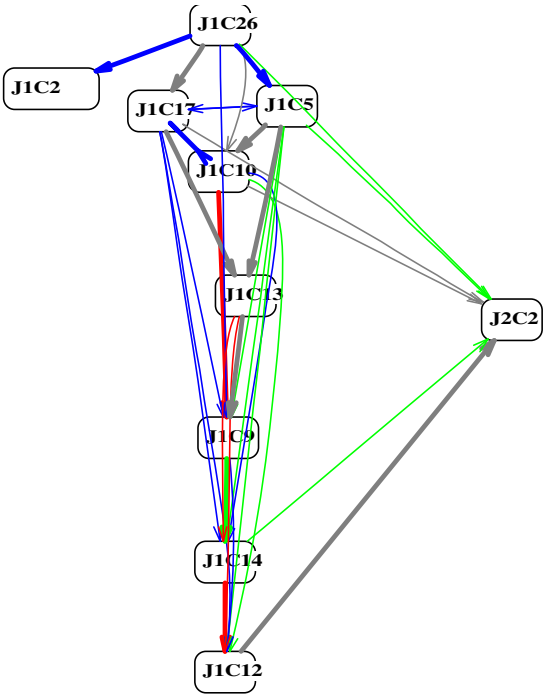


Fig. B.90

Dessiner incorrectement un carré ou un losange à l'item 1 entraîne non seulement l'échec à l'item 2, mais également à l'item 3.
Comme le montre le graphe ci-contre, les items 1,2 et 3 sont très liés.

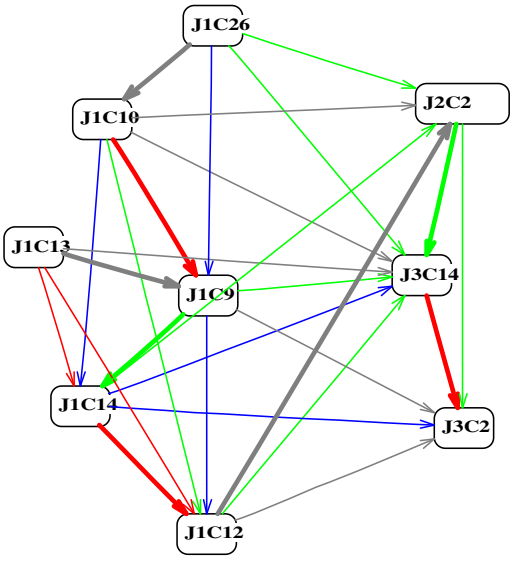


Fig. B.91

Les comportements d'erreur aux items 4 et 5 sont fortement imbriqués :

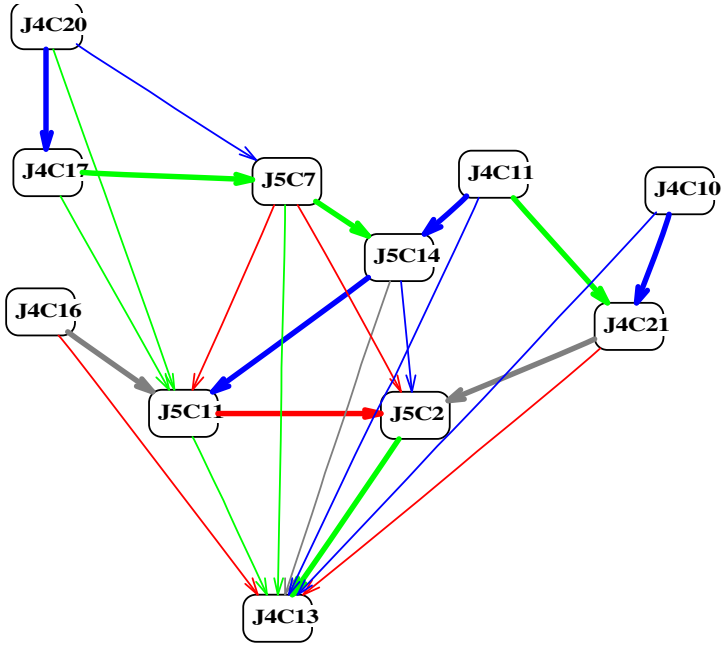


Fig. B.92

Les nœuds relatifs à l'item 5, J5C7 (mesurer les côtés du cerf-volant), J5C14 (dessiner un rectangle incorrect), J5C11 (justification incorrecte) et J5C2 (valeur de l'aire incorrecte) sont aux sommets d'un quadrilatère entouré des nœuds associés à l'item 4. On y rencontre notamment J4C20 (confusion périmètre–aire), J4C16 (formule coté × côté), J4C21 (emploi d'une mauvaise hauteur), J4C13 (valeur incorrecte pour l'aire), ainsi que des justifications erronées ou partielles. C'est l'absence de maîtrise des aspects numériques du calcul d'une aire qui est ainsi caractérisée.

Explorons les liens entre les comportements de non réponse ou de non justification :

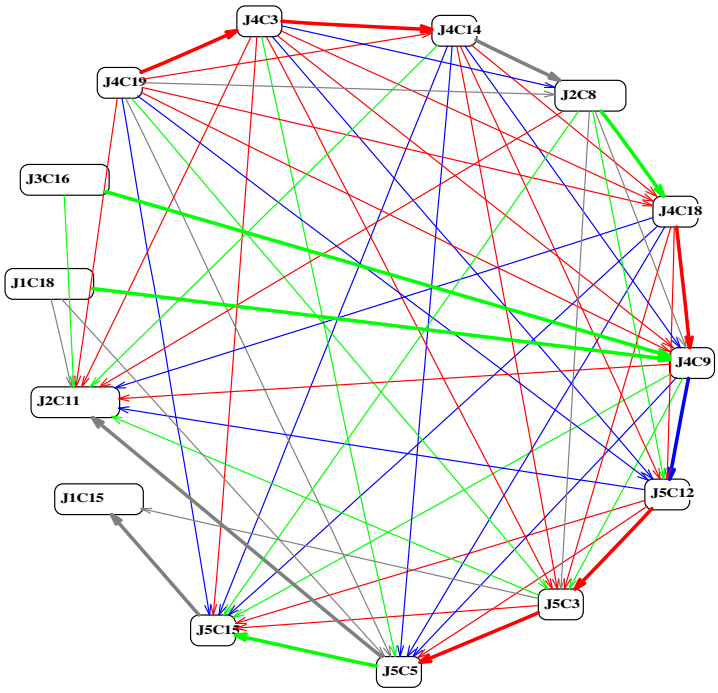


Fig. B.93

Nous obtenons le graphe ci-dessus qui montre que les comportements de non-réponse s'organisent en une longue chaîne de J4C19 à J5C15, complétée par de petites branches latérales. Chaque nœud de la chaîne principale implique presque tous les nœuds qui le suivent. Beaucoup d'implications sont très fortes, ce qui donne à l'ensemble une cohérence remarquable. Enfin, on constate aussi que les comportements de non-réponse affectent les

mêmes questions que les comportements d'erreur : ce n'est pas par hasard que l'un des nœuds terminaux (qui est donc un des comportements les plus fréquents) est le non-dessin du losange à l'item 1.

La cohérence de ce graphe contribue fortement à valider le test lui-même.

Structurer les comportements de réussite

Le squelette du graphe des comportements de réussite nous permet de déterminer des comportements sources et des comportements carrefours.

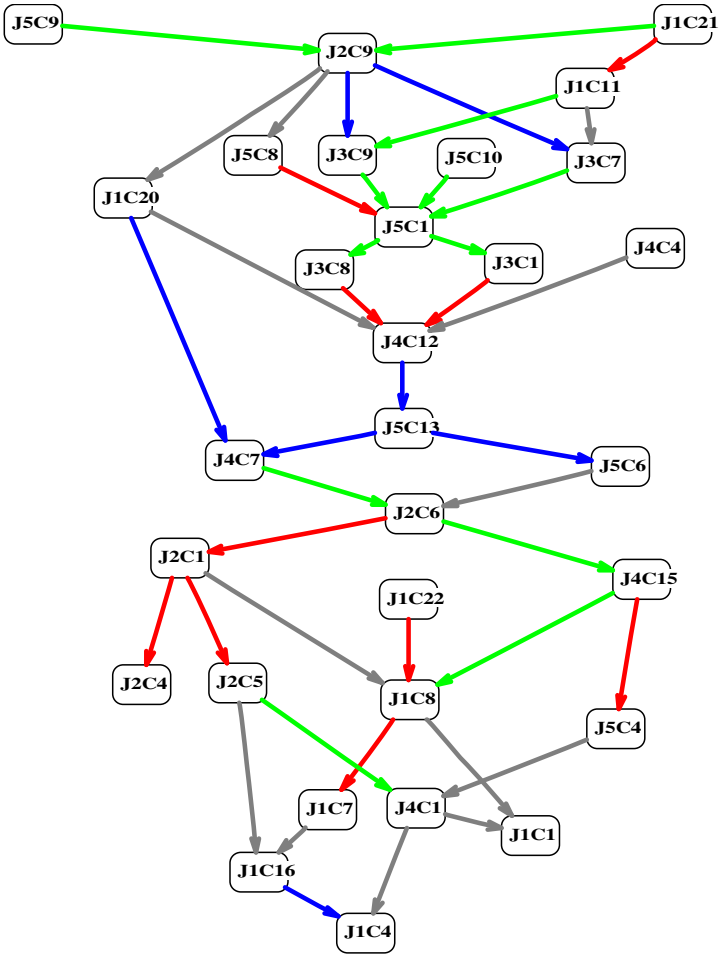


Fig. B.94

Les sources sont au nombre de quatre :

Code	Signification	Taux (arrondis)
J1C21	Cinq bonnes réponses à l'item 1	12 %
J1C22	Quatre bonnes réponses à l'item 1	43 %
J4C4	Emploi d'une formule d'aire à l'item 4	15 %
J5C9	Justification par le produit des demi-diagonales à l'item 5	3 %
J5C10	Autre justification correcte à l'item 5	3 %

Les deux premiers comportements de cette liste ne nécessitaient aucun calcul. Seule une

bonne *vision* géométrique était nécessaire. Le troisième porte sur l'emploi d'une formule connue. Le quatrième porte sur la transposition de la formule du losange au cas du cerf-volant et demande donc une certaine maturité conceptuelle.

La présence de ces quatre comportements à la source du graphe confirme qu'ils représentent l'essentiel des difficultés du sujet et peuvent être utilisés pour tester l'efficacité des séquences de formation.

Il est intéressant de visualiser les comportements directement impliqués par les comportements sources.

L'impact de J1C21 est impressionnant :

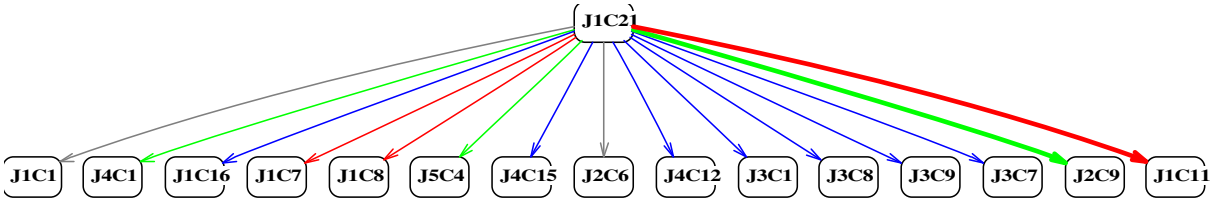


Fig. B.95

Comme on le voit, le fait de fournir les cinq réponses correctes à l'item 1, entraîne (plus ou moins fortement) la réussite aux items 2, 3 et 4 et un des éléments de réussite à l'item 5. En effet de J1C21 partent des implications vers la reconnaissance et la justification de l'égalité des aires des deux parallélogrammes à l'item 2 (J2C6 et J2C9), la bonne valeur pour l'aire à l'item 3 (J3C1) et son calcul à partir de la base $[AB]$ (J3C7, J3C8 et J3C9), la bonne valeur pour l'aire à l'item 4 (J4C12) et son calcul à partir de la formule d'aire du triangle (J4C15), ainsi que le fait de tracer une diagonale à l'item 5 (J5C4).

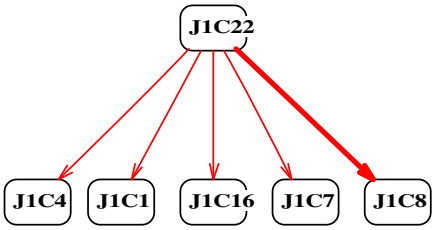


Fig. B.96

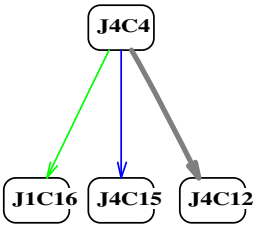


Fig. B.97

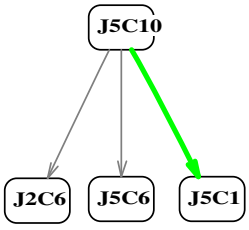


Fig. B.98

Par contre l'impact de J1C22 (quatre réponses bonnes à l'item 1) se limite à l'item 1 : le graphe issu de cette source ne nous fournit que deux renseignements : la réponse manquante est le dessin du losange et l'élève a expliqué pourquoi on ne peut dessiner un carré.

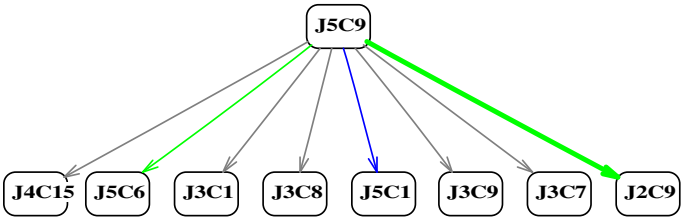


Fig. B.99

J5C9 (*Fig. B.99*) entraîne non seulement la bonne réponse à l'item 5, par la mesure des

diagonales, mais aussi une justification correcte de l'égalité d'aires à l'item 2 (J2C9), la bonne valeur pour l'aire à l'item 3, calculée à partir de la base $[AB]$ (J3C1, J3C7, J3C8 et J3C9) et enfin l'emploi de la formule du triangle à l'item 4.

Quant à J5C10 (*Fig. B.98*), son impact hors de l'item 5 se limite à l'égalité des aires à l'item 2.

Enfin, J4C4 (*Fig. B.97*) est l'emploi d'une formule d'aire pour *comparer* les aires des deux triangles ABC et ABD. Les élèves qui utilisent cette méthode ont aussi tendance à l'utiliser pour *calculer* l'aire de ABC (J4C12 et J4C15). J4C4 entraîne également J1C16 : le dessin (correct) du trapèze à l'item 1.

Comme on le voit, les deux comportements sources principaux sont J1C21 et J5C9.

Un comportement « carrefour » intéressant est la réussite à l'item 5 (J5C1). Le graphe suivant montre toutes les implications directes qui y arrivent ou en partent :

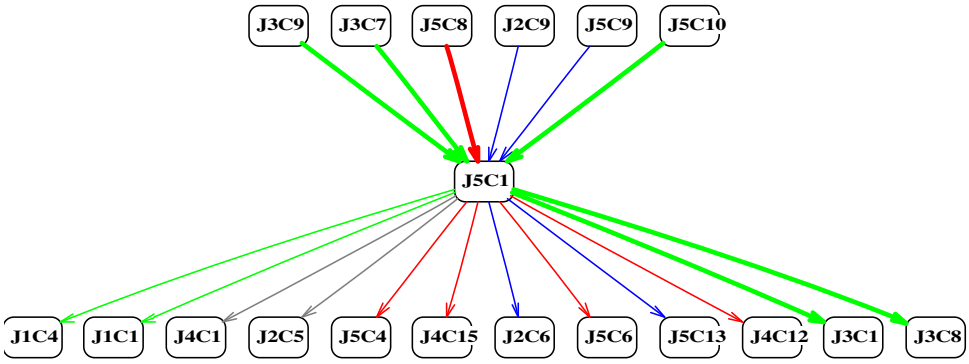


Fig. B.100

Que J5C1 soit impliqué par JC58, J5C9 et J5C10 n'est que normal. Que J5C1 entraîne J5C4 et J5C6 montre des éléments d'une méthode efficace pour calculer l'aire du cerf-volant. J5C1 entraîne aussi J5C13 (dessin d'un rectangle correct) : ce n'était pas aussi évident. Mais J5C1 est aussi en relation d'implication avec des comportements relevant de *tous* les autres items. Rappelons que l'aire du cerf-volant avait à peine été évoquée, et non calculée, à la fin des activités réalisées avec les élèves. Pour ceux-ci, l'item 5 constituait une extension dont on voit qu'elle mobilise l'ensemble des connaissances acquises auparavant à propos des aires des formes géométriques élémentaires.

Annexe C

Index

Additivité, 146, 150
Agrandissement, 154
Aire, 65, 107, 108, 140, 141, 150, 154, 253, 260
Analyse
    implicative, 479, 508
Angle
    solide, 141
Animation, 54
Archimède, 95, 96, 99
Argumenter, 254
Aristote, 93, 96, 98, 99
Arithmétique, 83
Arpentage, 139
Assude, T., 29, 56
Auto-évaluation, 57

Balacheff, N., 53
Bande, 54, 253
Baruk, S., 107, 125
Battista, M., 23
Bayart, F., 41
Bkouche, R., 108
Bolyai, J., 142
Borel, E., 102
Botaniste, 53
Brahmagupta, 143

`Cabri-Géomètre`, 15, 18, 24
`Cabri-Géomètre` , 34
`Cabri3d`, 24
Cadre, 471
Calcul
    intégral, 137
Cavalieri, B., 102
Cercle, 58, 141
`Chamois`, 36
`Cinderella`, 37
Circonférence, 141
Clements, D., 23
Comparer, 260
Compas, 58
    parfait, 90
Compétence
    transversale, 143
Compétences, 61
Comportement, 363, 479
Compression, 21, 145, 476
Comptage, 126, 151
Conceptualisation, 143
Condition
    déterminante, 63, 254, 261
Cône, 141
Constructeur, 53, 54
Constructivisme, 142
Continu, 85
Conversion, 18, 20, 55
Convertir, 472
Convivialité, 34
Corde, 58
    à nœuds, 80
Corps
    rond, 141

Correspondance
biunivoque, 150
Crowder, N., 16
Cylindre, 141

`Déclic`, 38
Décomposition, 65, 109
Déconstruction
dimensionnelle, 54
Découpage, 49, 65, 150
Découper, 55
Déformer, 55
Démarche
de découverte, 66
de généralisation, 66
de vérification, 66
de validation, 66
d'évaluation et d'auto-évaluation, 29
de découverte, 25, 54
de généralisation, 27, 54
de vérification, 26, 54
Demi-droite, 54
Démontrer, 254
Dénombrement, 152
Déplacement, 150
Déplacer, 55, 150
`Derive`, 15
Descartes, 90, 97
Didacticiel, 14
Dimension, 154
Disque, 141
Distracteur, 16
Diviser, 55
Douady, R., 57, 226, 471, 472
Droite, 54, 142
illimitée, 142
réelle, 97
Duplication, 49
Duval, R., 7, 20, 23, 54, 162, 343, 472, 474

e.a.o., 17
Égalité
d'aires, 150, 151
Égypte, 80
Équicomplémentarité, 111
Équidécomposition, 110
Équilibration
majorante, 144
Ératosthène de Cyrène, 85
Estimation, 260
Étalon
conventionnel, 124
de mesure, 103
Euclide, 83, 84, 92–94, 113, 115, 139, 255
Eudoxe, 83, 94
Évaluation, 57

Fichier
dynamique, 64
historique, 55, 56
Figure
géométrique, 29
Figures, 61, 62
Forme
libre, 3
standard, 2
Former, 472
Formules, 128, 253, 260
d'aires, 155, 156
de calcul, 153
de périmètres, 156
Fraction, 53, 58
Friedelmeyer, J.-P., 81, 255
Fusion, 49, 109
Fusionner, 55

Gabarit, 58
Galilée, 99
Gallou, E., 22
Gélis, J.-M., 29, 56
`GeoGebra`, 39
`GeoLabo`, 41
Géométrie, 80, 83
dynamique, 2, 25
`Geonext`, 42
Géoplan, 151
Glisser, 55, 63, 147
Grandeur, 53, 61, 108, 150
géométrique, 58
Grandeurs, 79, 107
commensurables, 84
incommensurables, 84, 93

Gras, R., 479
Groupe, 142
    de transformations, 142

Hérodote, 80
Héron d'Alexandrie, 90
Hilbert, D., 142
Hillel, J., 21, 23
Hippocrate de Chio, 101
Hohenwarter, M., 39
Homothétie, 64
Horizontale, 155
Al-Huwarizmi, 88

Infini, 86
Intensité
    d'implication, 479, 482
Interactif, 66
Invariance, 150, 153, 154
Inventeur-bricoleur, 53, 54
Isométrie, 142
Isométrique, 150

Jordan, C., 102
Justifier, 254

Abu Kamil, 90
Kaput, J., 53
Al-Karagi, 92
Al-Kashi, 95
Al-Khhayam, 93, 95
Kieran, C., 23
Kit
    libre, 3
    standard, 3
Kittel, M., 25
Klein, F., 142
Kortenkamp, U., 37
Kuntz, G., 25

Laboratoire
    d'informatique, 14
Laborde, J.-M., 2, 18
Le Corbusier, C.-E., 169
Lebesgue, H., 102
Legendre, A.-M., 139, 142
Leibniz, 102

Ligne
    polygonale, 146
Lignes
    parallèles, 142
`Lisp`, 19
Lobachevsky, N., 142
`Logo`, 15, 18, 19, 59, 146, 148
`Logo3d`, 147
Logos, 85
Longueur, 107, 108, 141, 150, 154
Lunule, 101

Macro, 54
Mathématiques
    arabes, 87, 88
    modernes, 142
Mesure, 53, 58, 81, 85, 93, 107, 108, 140, 141
Mesurer, 260
Métacognition, 55, 57
Méthode
    d'exhaustion, 87
Micro-monde, 1, 23, 53
Mode
    commande, 33
    de raisonnement, 420
    réponse, 33
Modèle
    mental, 491
Monade, 83
Mouvement, 22, 49, 142
Multiplication
    d'une aire par un naturel, 114

Narration
    de recherche, 56
Niveau, 53
    de van Hiele, 473
Nombre, 79
    d'or, 96
    entier, 82
    irrationnel, 85
    naturel, 82
    réel, 82
    rationnel, 85
Noss, R., 22
Numérisation, 124

Opérateur
multiplicatif, 114
Ostenne, E., 38
Ouverture, 34

Papert, S., 2, 18
Papier
quadrillé, 151
triangulé, 152
Pavage, 45
semi-régulier, 70
Pédagogie
différenciée, 56
Pentamino, 3
Perception, 150
mixte, 114
qualitative, 108
Périmètre, 141, 253, 260
Perspective
cavalière, 70
Pertinence, 34
Physique, 99
Piaget, J., 142–147, 151, 154
Platon, 99
Plutarque, 81
Polyèdre, 141
Principe
d'égalité par superposition, 108
Procept, 477
Projet, 20, 148
Pythagoricien, 82

Quadrillage, 60, 65
Quantification, 118, 151
par encadrement, 120
Al-Quhi, 90

Rapport, 141
de deux aires, 116
de grandeurs, 83, 94
Ratio, 85
Rayon, 59
Recollement, 65
Recomposition, 150
Registre
de représentation, 55
sémiotique, 18, 472
Régression, 440
Repérage, 154
Représentation, 145
Retournement, 150
Retourner, 55, 63, 150
Réversibilité, 146
Richter-Gebert, J., 37
Riemann, B., 102, 142
Rotation, 54, 55, 64, 147
Rouche, N., 85

Secteur angulaire, 54
Segment, 142
de sphère, 141
Service, 34
Seuil
épistémologique, 154
d'intensité, 480
Similitude, 142
Situation-problème, 1, 57
`Sketchpad`, 44
Skinner, B. F., 16
Socles
de compétences, 7, 57, 61, 256
Solides, 61
Sphère, 141
Stevin, S., 96
Structuration, 143
Structurer, 62
Super-tableau, 17
Superposabilité, 150
Symétrie axiale, 54, 55, 64
Synthétiser, 62

Tangram, 3
Thalès, 81
Théorème
de Pythagore, 65, 80, 141, 254
de Thalès, 81, 82, 84, 140, 141, 254
du papillon, 28
en acte, 144
Théorie
de la mesure, 102
des proportions, 83
tice, 29

Tourner, 55, 63, 147
Traiter, 472
Transformation, 49, 63
Transitivité, 109
Translation, 54, 55, 64, 147
Triangle
    sphérique, 141
Al-Tusi, 95

Unité
    commune de mesure, 153
    conventionnelle, 107, 151, 153

van Hiele, P. et D., 53, 472
Variable, 156
Vergnaud, G., 21, 144
Verticale, 155
Viète, 95
Vitesse, 100
Volume, 141, 154, 260

Abu-l-Wafa, 92

Annexe D

Bibliographie

[1] P. Abgrall. *Le développement de la géométrie aux* IXe–XIe *siècles*. A. Blanchard, Paris, (2004).

[2] Aristote. *Physique*. Les belles lettres, Paris, (1990).

[3] N. Artemiadis. *History of mathematics : from a mathematician's vantage point*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2004).

[4] T. Assude et J.-M. Gelis. La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, **50**, 3, 259–287, (2002).

[5] N. Balacheff and J. Kaput. Computer-based Learning Environments in Mathematics. In Bishop et al. [11], pages 469–501.

[6] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Jeux mathématiques 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1992). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 6.

[7] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Géométrie de l'espace 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1994). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 7.

[8] E. Barbin. Qu'est-ce que faire de la géométrie ? *Repères-IREM*, pages 59–82, (2001).

[9] G. Barthélemy. *2500 ans de mathématiques : l'évolution des idées*. Ellipses, Paris, (1999).

[10] S. Baruk. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Ed. du Seuil, Paris, (1992).

[11] A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde, éditeurs. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).

[12] R. Bkouche. La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2, Rethymnon, (2006). Université de Crète.

[13] C. Boyer and U. Merzback. *A history of mathematics*. Wiley, Singapore, (1989).

[14] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble, (1998).

[15] M. Caveing. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Éléments » d'Euclide et la « Physique » d'Aristote*. In *Penser la science*. Points Sciences, Seuil, (1982).

[16] M. Caveing. *La figure et le nombre : recherche sur les premières Mathématiques des Grecs*. Presses Universitaires du Septentrion, Paris, (1998).

[17] D. H. Clements and M. T. Battista. The effects of Logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 5, 356–371, (1990).

[18] CREM. *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2003).

[19] CREM. *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2004).

[20] CREM. *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2005).

[21] E. Crone, E. Dijksterhuis, and al. *The principal works of* Simon Stevin, *volumes* IIA *et* IIB. C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, (1958).

[22] N. Crowder. Automatic Tutoring by means of intrinsic programming. In Galantes [38].

[23] R. Cuppens. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, (1996). Deux tomes.

[24] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques*. Editions du Seuil, (1986).

[25] A. Djebbar. *Une histoire de la science arabe*. Editions du Seuil, (2001).

[26] A. Djebbar. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert-Adapt, Paris, (2005).

[27] *Décret « Missions de l'École », Mon école comme je la veux*. Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1997).

[28] *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*. Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1999). `www.enseignement.be/@librairie/documents/socles/telechargement/pdf/socle_math.pdf`.

[29] *Mathématiques — Premier degré – 1 A et 2e Commune*. Fédération de l'Enseignement secondaire catholique, Bruxelles, (2000). `www.segec.be/Documents/Fesec/Programmes/15_MATH1.pdf`.

[30] *Programme d'études du cours de mathématiques — 1re année A – 2e année commune*. Ministère de la Communauté Française — AGERS, Bruxelles, (2000). `www.restode.cfwb.be/download/programmes/10-2000-240.pdf`.

[31] R. Douady. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7**, 2, 5–31, (1986).

[32] J.-C. Duperret. Le geste géométrique ou l'art de démontrer. *Repères-IREM*, pages 83–116, (2001).

[33] R. Duval. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37–65, (1993).

[34] R. Duval. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53, (2005).

[35] Euclide. *Les éléments, traduction en français du texte de Heiberg par B. Vitrac*. Presses Universitaires de France, Paris, (1994).

[36] J.-P. Friedelmeyer. Les aires : outil heuristique - outil démonstratif. *Repères-IREM*, **31**, 39–62, (1998).

[37] J.-P. Friedelmeyer. Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, **44**, 5–31, juillet 2001. Topiques Éditions, Metz.

[38] E. Galantes, éditeur. *Automatic Teaching : the state of the art*. Wiley, New York, (1959).

[39] Galilée. *Discours concernant deux sciences nouvelles*. Presses Universitaires de France, (1995). D'après une traduction de Maurice Clavelin.

[40] E. Gallou-Dumiel. Symétrie orthogonale et micro-ordinateur. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 5–60, (1987).

[41] GEM. *L'archipel des isométries*. Ed. GEM, Louvain-la-Neuve, (1982).

[42] R. Gras. Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, **Supplément n°15**, 9–33, (2005).

[43] R. Gras et al. *L'implication statistique*. La Pensée Sauvage, Grenoble, (1996).

[44] E. M. Gray and D. Tall. Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 2, 116–140, (1994).

[45] Herodote. *Histoires, traduit en français par Larcher*. Charpentier, Paris, (1850). En ligne sur `Gallica.bnf.fr`.

[46] J. Hillel. Mathematical and programming concepts acquired by children, aged 8–9, in a restricted Logo environment. *Recherches en didactique des mathématiques*, **6**, 2–3, 215–268, (1985).

[47] J. Hillel and C. Kieran. Schemas used by 12-years olds in solving selected turtle geometry tasks. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 61–102, (1987).

[48] J. Hoyrup. *Lengths, widths, surfaces : a portrait of old babylonian : algebra and its skin*. Springer-Verlag, New York, (2002).

[49] M. Kittel et G. Kuntz. De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques. Etude d'un exemple. *Repères IREM*, **49**, 41–58, (2002).

[50] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, New York, (1990).

[51] C. Laborde and B. Capponi. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **14**, 1–2, 165–210, (1994).

[52] J.-M. Laborde and R. Strässer. Cabri-géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **90**, 5, 171–190, (1990).

[53] M. Lebrun. *Des technologies pour enseigner et apprendre*. 2e édition, De Boeck, Bruxelles, (2002).

[54] A.-M. Legendre. *Éléments de Géométrie avec des notes, suivis d'un traité de trigonométrie*. Société Nationale pour la propagation des bons livres, Bruxelles, (1838).

[55] L. Lismont et N. Rouche, éditeurs. *Formes et Mouvements*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2001).

[56] R. Noss. Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**, 5, 343–362, (1987).

[57] S. Papert. *Jaillissement de l'esprit*. Flammarion, Paris, (1980).

[58] J. Piaget. *Six études de psychologie*. Gonthier, Genève, (1964).

[59] J. Piaget, B. Inhelder, et A. Szeminska. *La géométrie spontanée de l'enfant*. Presses Universitaires de France, Paris, (1948).

[60] Plutarque. *Œuvres morales. Le banquet des sept sages. traduit en français par V. Bétolaud*. Hachette, (1870). En ligne sur `hodoi.fltr.ucl.ac.be/concordances`.

[61] C. Pribetich Aznar. La formulation des surfaces des bâtiments et des superficies des terrains aux XIVe–XVIe siècles dans le sud-est de la France. *Histoire et mesure*, **XVI - n°3/4**, (2005). mis en ligne le 7 décembre 2005, référence du 25 avril 2007, disponible sur : http ://histoiremesure.revues.org/document142.html.

[62] R. Rashed et B. Vahabzadeh. *Al-Khayyām Mathématicien*. Albert Blanchard, Paris, (1999).

[63] X. Roegiers. *Les Mathématiques à l'école primaire (tome 2)*. De Boeck, (2000).

[64] N. Rouche. *Le sens de la mesure*. Didier-Hatier, Bruxelles, (1992).

[65] N. Rouche et P. Skilbecq. Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel. *Mathématique et Pédagogie*, **149**, 68–84, (2004).

[66] N. Rouche et P. Skilbecq. *Apprenti Géomètre : pourquoi un nouveau logiciel*. CREM, Nivelles, (2006).

[67] C. Ruby. Lire (vraiment) Leibniz. *EspacesTemps.net*, (Mis en ligne le 5 mai 2004).

[68] M. Serres. *Les origines de la géométrie*. Flammarion, (1993).

[69] B. F. Skinner. *La révolution scientifique de l'enseignement*. Ed. Dessart, Bruxelles, (1969).

[70] S. Stévin. *L'Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques*. Ed. A. Girard, Leyde, (1634).

[71] D. Tall. Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignement mathématique*, **42**, 395–415, (1996).

[72] D. Tall. A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **11**, 195–215, (2006).

[73] R. Taton. *La science antique et médiévale*. Presses universitaires de France, Paris, (1957).

[74] P. van Hiele. La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive. *Mathematica & Paedagogia*, **16**, 25–34, (1958/59).

[75] G. Vergnaud. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2**, 2, 215–232, (1981).

[76] G. Waldegg. L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez STÉVIN. Peyresq, (1999). Actes du colloque « La pensée numérique », www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pensee.numer.htm.

[77] F. Woepcke. *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, (1986).

[78] A. Youschkevitch. *Les mathématiques arabes (VIIe- XVe siècles)*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, (1976).

Table des matières

0 Introduction 1

0.1 Motivation et objectifs de la recherche . . . 1

0.2 Les caractéristiques d'*Apprenti Géomètre* . . . 2

0.3 Le contenu de la recherche . . . 4

0.4 Le contenu du rapport . . . 8

I L'état des lieux 11

1 Le contexte informatique 13

1.1 L'informatique dans les écoles : une réalité . . . 13

1.2 Plusieurs types de logiciels . . . 14

1.3 To clic or not to clic ? . . . 15

1.4 Aux débuts de l'informatique dans les classes . . . 15

1.5 Quand l'élève pilote l'ordinateur . . . 18

1.6 `Logo` . . . 19

1.7 `Cabri` . . . 24

2 Analyse de didacticiels de géométrie dynamique 33

2.1 Deux modes de fonctionnement . . . 33

2.2 Analyse de logiciels . . . 34

2.3 `Cabri II+` . . . 34

2.4 `Chamois` . . . 36

2.5 `Cinderella` . . . 37

2.6 `Déclic` . . . 38

2.7 `GeoGebra` . . . 39

2.8 `GeoLabo` . . . 41

2.9 `Geonext` . . . 42

2.10 `Sketchpad` . . . 44

2.11 En situation . . . 45
2.12 Conclusions . . . 49
3 *Apprenti Géomètre* 53
3.1 Un micro-monde évolutif . . . 53
3.2 Un instrument d'auto-évaluation . . . 55
3.3 Le langage d'*Apprenti Géomètre* . . . 55
3.4 Des objectifs d'*Apprenti Géomètre* à l'école primaire . . . 56
3.5 Des objectifs d'*Apprenti Géomètre* à l'école secondaire . . . 60
3.6 *Apprenti Géomètre* résiste-t-il au test ? . . . 66
3.7 Des activités d'initiation . . . 67

II La mesure des aires 77
4 Aperçu de l'histoire de la mesure 79
4.1 Grandeurs et nombres . . . 79
4.2 À l'origine . . . 80
4.3 Des entiers aux réels . . . 82
4.4 De la décomposition infinie au calcul intégral . . . 98
4.5 Histoire rapide des étalons de mesure . . . 103
5 Une grandeur de base : l'aire 107
5.1 Introduction . . . 107
5.2 Au début était le verbe... . . . 108
5.3 Perception qualitative de l'aire . . . 108
5.4 Perception mixte de l'aire . . . 114
5.5 Quantification de l'aire . . . 118
5.6 Numérisation de l'aire . . . 124
5.7 Calcul de la mesure de l'aire par les mesures de longueurs . . . 125
5.8 Etablissement de formules du calcul de la mesure de l'aire de quelques polygones . . . 128
5.9 Une autre voie vers le calcul des aires . . . 137
6 Une approche épistémologique 139
6.1 Un préalable : la géométrie . . . 139
6.2 La conceptualisation . . . 142
6.3 Le cas de la mesure . . . 145

III Activités pour le cycle 10/12 ans 157

Présentation **159**

7 L'expérimentation en cinquième primaire (2006–2007) 161

7.1 Comparer des aires . . . 163

7.2 Périmètres et aires des carrés et des rectangles . . . 180

7.3 L'aire des parallélogrammes . . . 205

8 L'expérimentation en sixième primaire (2005–2006) 223

8.1 L'aire de carrés . . . 224

8.2 L'aire des rectangles et des parallélogrammes . . . 247

IV Activités pour le cycle 12/14 ans 249

Présentation **251**

9 Vers les formules d'aires en première année du secondaire 253

9.1 Objectifs généraux . . . 253

9.2 La transition primaire - secondaire . . . 255

9.3 Annexe : exercice coté . . . 269

9.4 Voir des quadrilatères à l'intersection de deux bandes . . . 270

9.5 L'aire du parallélogramme . . . 286

9.6 L'aire du triangle . . . 296

9.7 L'aire du trapèze . . . 304

9.8 L'aire du losange et du cerf-volant . . . 309

9.9 L'aire d'un polygone régulier . . . 318

9.10 L'aire du disque . . . 324

9.11 Agrandir, réduire . . . 332

V Les tests 339

10 Un pré-test en sixième primaire (2005–2006) 343

10.1 Les objectifs des tests . . . 343

10.2 Les énoncés . . . 344

10.3 Analyse des items . . . 345

10.4 Des comportements de réussite ou d'échec . . . 363

10.5 La population testée est-elle initialement homogène ? . . . 364

11 Un post-test en sixième primaire (2005–2006) 367
11.1 L'objectif du test . . . 367
11.2 Les énoncés . . . 367
11.3 Analyse des items . . . 369
11.4 Des comportements de réussite ou d'échec . . . 378
11.5 L'impact d'*Apprenti Géomètre* . . . 380
12 Un pré-test en cinquième primaire (2006–2007). 385
12.1 Les objectifs des pré- et post-tests . . . 385
12.2 Les énoncés . . . 385
12.3 Analyse des items . . . 388
12.4 Des comportements de réussite ou d'échec . . . 397
12.5 Une comparaison cinquième-sixième . . . 399
12.6 La population testée est-elle initialement homogène ? . . . 400
13 Un post-test en cinquième primaire (2006–2007). 403
13.1 Les énoncés . . . 403
13.2 Analyse des items . . . 405
13.3 Des comportements de réussite ou d'échec . . . 423
13.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre* . . . 425
14 Un pré-test en première secondaire (2006–2007) 429
14.1 Les objectifs des pré- et post-tests . . . 429
14.2 Les énoncés . . . 429
14.3 Analyse des items . . . 432
14.4 Des comportements de réussite ou d'échec . . . 441
14.5 La population testée est-elle initialement homogène ? . . . 443
15 Un post-test en première secondaire (2006–2007). 445
15.1 Les énoncés . . . 445
15.2 Analyse des items . . . 448
15.3 Des comportements de réussite ou d'échec . . . 465
15.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre* . . . 465

VI Annexes 469
A Quelques outils de base 471
A.1 Les cadres de R. Douady . . . 471

A.2 Les registres de R. Duval 472
A.3 Les niveaux de Van Hiele 472
A.4 La déconstruction dimensionnelle selon Duval 474
A.5 La croissance cognitive selon Tall 476
B L'analyse statistique implicative 479
B.1 Présentation 479
B.2 La technique 480
B.3 L'analyse du pré-test de sixième primaire (2005–2006) 483
B.4 L'analyse du post-test de sixième primaire (2005–2006) 494
B.5 L'analyse du pré-test de 5e primaire (2006–2007) 506
B.6 L'analyse du post-test de 5e primaire (2006–2007) 522
B.7 L'analyse du pré-test de première secondaire (2006–2007) 531
B.8 L'analyse du post-test de première secondaire (2006–2007) 541
C Index 553
D Bibliographie 559
VII Fiches didactiques pour le cycle 10-12 ans
VIII Fiches didactiques pour le cycle 12-14 ans