Activités avec Apprenti Géomètre en première secondaire

CREM

31 août 2007

Durant les années scolaires 2005–2006 et 2006–2007, le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a bénéficié d'un contrat de recherche avec le Ministère de la Communauté française, sur le thème « Impact du logiciel **Apprenti Géomètre** sur certains apprentissages ». Le rapport de cette recherche est disponible sur le site `www.enseignement.be`

La recherche a été menée par une équipe composée de

- Sébastien Agie de Selsaten, Instituteur primaire et licencié en sciences de l'éducation,
- Bernard Honclaire, Professeur honoraire de mathématiques au degré inférieur de l'enseignement secondaire,
- Pierrette De Rijck, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire,
- Michel Herman, Professeur de mathématiques au Département Pédagogique de la Haute École de la Ville de Liège,
- Guy Noël, Professeur honoraire de mathématiques de l'Université de Mons-Hainaut,
- Philippe Mairesse, Instituteur primaire,
- Gregory Philippart, Ingénieur civil en mathématiques appliquées,
- Philippe Skilbecq, Instituteur primaire
- André Vandenbruaene, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire.

Les auteurs du rapport tiennent à remercier la Ministre de l'Education, les responsables du Ministère et les membres du comité d'accompagnement de la recherche, ainsi que tous les collègues qui ont collaboré à la réalisation de la recherche, à la rédaction du rapport et au présent document.

La recherche mentionnée ci-dessus a donné lieu à des expérimentations dans plusieurs écoles, avec pour thème central la construction des formules d'aires des polygones réguliers et du disque.

A l'issue de ces expériences, la nécessité est apparue de concevoir, à l'intention des enseignants du primaire et du secondaire, un document proposant des activités centrées sur le thème des aires et réalisables avec le soutien du logiciel **Apprenti Géomètre**.

Le présent fascicule, mis au point par A. Vandenbruaene, comprend les activités destinées à l'enseignement secondaire. Il peut cependant être utilisé par un large public, comme nous l'expliciterons ci-dessous.

Les fiches d'activité présentées dans la suite sont rassemblées dans le document « Activités avec Apprenti Géomètre en première secondaire — Fiches didactiques », qui existe à la fois en version papier et en version électronique (fichier fiches12-14.pdf). Elles ne sont pas identiques aux fiches qui ont fait l'objet de l'expérimentation et qui figurent dans le rapport mentionné plus haut. Celles-ci ont été revues afin de tenir compte des observations faites lors de cette expérimentation. Les hyperliens figurant dans le présent document renvoient vers le fichier fiches12-14.pdf.

Objectifs généraux

Les objectifs poursuivis au travers des activités proposées sont les suivants :

- construire et réactualiser les formules d'aires des polygones usuels et du disque ;
- initier les élèves à la justification, à la démonstration ;
- utiliser le support des formes géométriques pour justifier certaines propriétés algébriques ;
- entretenir la capacité à « voir » en géométrie et à observer des figures ;
- faire entrer les élèves dans le monde des logiciels de géométrie dynamique dont font partie **Apprenti Géomètre**, `Cabri Géomètre`, `Geogebra`, ...

Parmi les objectifs visés, l'apprentissage de la démonstration est sans aucun doute le plus difficile à atteindre et celui qui demande le plus de prudence et de capacité d'adaptation de la part de l'enseignant.

Nous souscrivons à ce que l'on peut le lire dans « La démonstration en géométrie plane dans les premières années du secondaire » (C. Villers et al.). Les auteurs y rappellent avec nuance qu'une des caractéristiques importantes de l'enseignement des mathématiques est :

> *[...] le souci constant d'atteindre une certaine rigueur dans l'exploitation des idées. Certes, il convient de se placer en conformité avec les possibilités de ceux à qui l'on s'adresse et avec qui on souhaite travailler. Il y aura donc des exigences différentes de niveaux de rigueur selon les circonstances.*

Ils poursuivent en plaidant en faveur de l'apprentissage de la démonstration :

> *La pratique de la démonstration offre l'occasion de rencontrer ces objectifs. Elle exerce l'esprit critique et oblige à l'activité. Elle doit être remise à l'honneur donc pratiquée de manière **non sporadique** dès le plus jeune âge.*

A qui est destiné ce document ?

Nous pensons qu'il peut intéresser un large public. S'il est vrai que, dans la foulée de la recherche évoquée précédemment, il a d'abord été conçu pour le premier degré de l'enseignement secondaire, certaines activités plus complexes peuvent être omises à ce niveau et être réalisées plus tard :

- l'activité destinée à prouver l'égalité des aires de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur convient parfaitement à un cours de troisième secondaire (page 53) ;
- toujours en troisième année, l'activité intitulée « Un triangle dans trois bandes » peut servir à introduire le « petit théorème de Thalès » (page ??) ;
- les activités destinées à donner un support géométrique à certaines propriétés algébriques concernent tous les élèves, tant il est vrai que l'algèbre reste problématique jusqu'à la fin du secondaire pour beaucoup de jeunes ;
- certaines activités peuvent être proposées à des étudiants de fin du secondaire ou de haute école (futurs enseignants) afin de leur permettre de dépasser la mémorisation des formules et d'associer à chacune une démarche géométrique pour la retrouver.

Quoi qu'il en soit, il appartient à chaque enseignant de juger de ce qui est réalisable avec ses élèves. Il est le mieux placé pour évaluer les dispositions des jeunes avec qui il travaille, pour déterminer le meilleur moment de la semaine ou de la journée où il pourra mettre les activités en oeuvre, . . .

De plus, demander aux jeunes un travail autonome avec un ordinateur implique une certaine prise de risque de la part de l'enseignant. Il faut savoir qu'une même activité, testée dans des classes différentes, peut donner des résultats plus ou moins satisfaisants.

Des surprises agréables peuvent aussi survenir : nos expérimentations nous ont permis de constater l'effet stimulant des activités avec Apprenti Géomètre sur certains enfants en difficulté qui ont vu une nouvelle voie d'apprentissage s'ouvrir à eux.
Le présent document peut donc aussi constituer un outil de remédiation.

Organisation des fiches

Les fiches sont regroupées en séquences. Avant chaque séquence, nous précisons :

1. le public visé ;
2. les prérequis ;
3. les rappels à effectuer par l'enseignant ;
4. les objectifs mathématiques ;
5. les objectifs instrumentaux (utilisation du logiciel) ;
6. le temps supposé nécessaire, en nombre de périodes de cours de cinquante minutes.

Comment utiliser ce document ?

Ce document ne représente pas du tout un cursus linéaire à suivre de bout en bout. Nous souhaitons que chaque enseignant puisse choisir « à la carte » , selon son intérêt et celui de ses élèves, parmi les activités proposées. Bien entendu, certaines activités sont liées et ne peuvent être dissociées.

Tout en respectant la liberté pédagogique de chacun, précisons dans quel esprit nous les avons conçues et quelle méthodologie nous pensons leur être la mieux adaptée.

1. Une phase de travail autonome : au début du cours, l'enseignant vérifie les prérequis et comble les lacunes éventuelles. Il présente ensuite l'activité et précise les consignes aux élèves.
   Les élèves reçoivent les fiches de travail et le matériel nécessaire (par exemple, des formes géométriques en carton, des ciseaux, de la colle, . . .) et se rendent dans la salle informatique pour y commencer leur tâche, le plus souvent à deux par machine, sous la supervision de l'enseignant.
2. Une phase de mise en commun : après l'activité, l'enseignant réalise une synthèse avec l'ensemble du groupe, tire les conclusions, fait compléter les fiches et distribue les fiches de synthèse.

Pour certaines activités, avec les plus jeunes élèves, il est souhaitable de donner la possibilité de travailler avec des formes en carton en plus du logiciel. Les recherches montrent en effet que l'utilisation simultanée des outils informatiques et « papier - crayon » contribue à la richesse des activités proposées.

Dans certains cas, la recherche des élèves peut se poursuivre jusqu'à la fin de la période de cours (cinquante minutes) en prévoyant de réaliser une synthèse au début de la séance suivante.
Dans d'autres cas, la leçon débute directement dans la salle des ordinateurs et l'activité se termine environ vingt minutes avant la fin de la période pour permettre une mise en commun dans la salle de projection.
Disposer de deux périodes de cours consécutives est une situation particulièrement favorable.

Les réactions possibles des élèves

Généralement, les enfants qui n'ont jamais travaillé avec un logiciel de géométrie dynamique, sont assez fascinés par les possibilités d'un tel outil. La première séance provoque habituellement un engouement et parfois une excitation pouvant nuire à la qualité du travail.

Le retour en salle de projection pour procéder à une synthèse calme le jeu et les élèves apprécient beaucoup le « super - tableau » obtenu grâce à la combinaison ordinateur - projecteur[1].

Après quelques leçons, les élèves les plus agités commencent à intégrer l'ordinateur et le logiciel comme des outils permettant des apprentissages et des découvertes. Toutefois, l'autonomie des plus jeunes enfants reste faible et il est prévisible qu'ils demandent souvent de l'aide[2].

Pour des élèves peu habitués à l'autonomie, l'expérience a montré qu'il faut encore proposer, de temps en temps, des activités bien encadrées et dirigées, voire même provoquer un petit choc psychologique en inscrivant l'activité dans une perspective d'évaluation.

Il nous plaît enfin de croire et de rappeler que plus l'apprentissage de l'autonomie sera précoce, plus les enfants se verront proposer des activités de recherche, avec l'outil informatique ou tout autre moyen, plus ils accueilleront positivement ce type de démarche dans la suite de leur scolarité.

[1] Nous plaidons résolument en faveur de la présence d'un tel matériel dans de nombreux locaux scolaires. Même si les élèves ne sont pas appelés à travailler eux-mêmes à l'ordinateur dans un tel local, disposer d'un tableau animé serait un adjuvant précieux pour le cours de mathématique. Un stade supérieur serait celui du *laboratoire de mathématique* mais c'est un autre débat.

[2] Cette constatation n'a pas étonné les collègues d'autres disciplines qui se sont intéressés à nos travaux et qui utilisent occasionnellement l'outil informatique. Ils attendent généralement la fin de la deuxième année pour proposer à leurs élèves des tâches nécessitant un travail autonome.

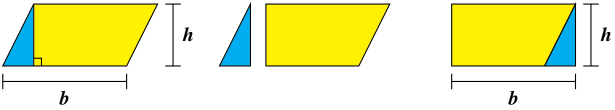
Pourquoi revenir sur les formules d'aires ?

En première année de l'enseignement secondaire, il est courant de constater que les formules d'aires sont mal connues des élèves. Pourtant, ils les ont certainement rencontrées à l'école primaire pour le parallélogramme (avec comme cas particuliers le rectangle, le losange et le carré), le triangle et le trapèze.
Lorsqu'ils sont interrogés, beaucoup d'enfants hésitent, voire confondent ces formules avec celles qui donnent un périmètre[3].
Ce problème n'est hélas pas l'exclusivité des plus jeunes. Il n'est pas rare de rencontrer des élèves du secondaire supérieur hésitant encore devant le calcul de l'aire d'un polygone.
Parmi ceux dont la mémoire a bien enregistré les formules, bien peu sont capables de les justifier.

Il est donc certainement utile, dès le début du secondaire, de se livrer à un travail de réactualisation et de reconstruction de ces formules en dépassant la seule mémorisation.

Dans cette optique, **Apprenti Géomètre** est un auxiliaire idéal grâce à ses fonctions de découpage, de duplication et de fusion de formes géométriques.

Par exemple, le logiciel permet très facilement d'illustrer qu'un parallélogramme a la même aire qu'un rectangle de même base b et de même hauteur h.



La formule d'aire du parallélogramme est ainsi la même que celle du rectangle, à savoir « base fois hauteur » : $b \times h$.

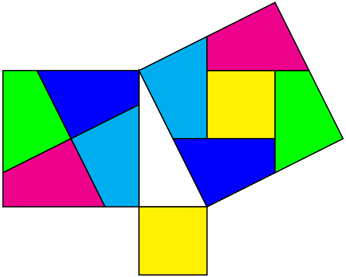
[3] La confusion entre aire et périmètre, couramment observée du point de vue des formules, n'existe pas nécessairement du point de vue des concepts (celui de périmètre est généralement bien perçu - le contour d'une figure - et bien différencié du concept d'aire).

L'aire comme outil de visualisation et de preuve

Dans la perspective d'une géométrie déductive, la notion d'aire peut être un outil de démonstration très utile. A cet égard, aborder la notion d'aire indépendamment de son calcul permet peut-être plus aisément d'en faire un outil de visualisation et de preuve.

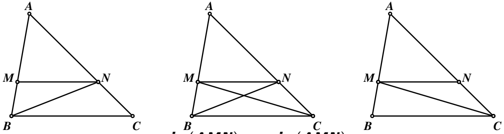
Les exemples suivants sont classiques :

- Le théorème de Pythagore : un découpage adéquat du carré de gauche permet de montrer que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux autres carrés[4].



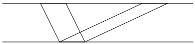
[4] Il s'agit là d'un exemple parmi beaucoup d'autres preuves « par puzzles » du théorème de Pythagore.

- **Le théorème de Thalès[5] : une preuve exploitant**
  1. **le fait que si deux triangles sont de même hauteur, les aires sont dans le même rapport que les bases ;**
  2. **l'égalité des aires de triangles de même base et de même hauteur.**

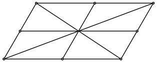


$$\frac{AM}{MB} = \frac{aire(AMN)}{aire(MBN)} = \frac{aire(AMN)}{aire(MCN)} = \frac{AN}{NC}$$

- **Egalité des aires de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur[6] : une preuve inspirée d'Euclide qui sera détaillée plus loin dans ce document (53).**



- **Visualisation : trouver des triangles de même aire dans cette figure.**



[5] Voir par exemple : Duperret J.-C., Le geste géométrique ou l'art de démontrer, *Repères-IREM*, 43 (2001), 83-116.

[6] Voir par exemple : Barbin E., Qu'est-ce que faire de la géométrie ? , *Repères-IREM*, 43 (2001), 59-82.

Les raisonnements basés sur les aires, sans recours au numérique, relèvent d'une méthode que développe Euclide tout au long du Livre I de ses « Eléments ». Elle est trop souvent négligée dans l'enseignement actuel et mériterait sans doute d'être remise à l'honneur ainsi que le préconisent certains auteurs comme Friedelmeyer[7] :

> *(...) le thème des aires est un outil performant et irremplaçable tant dans l'apprentissage de la démonstration géométrique, que pour une compréhension claire de ce qui dans un problème relève du géométrique, et de ce qui relève du numérique.*

L'auteur poursuit en dénonçant deux conséquences négatives de la tendance « tout au calcul » :

> *1) un éventail restreint de configurations géométriques pour les élèves, tant que le champ des nombres disponibles et l'outil algébrique ne sont pas suffisamment développés. (...)*
> *2) un apprentissage retardé de l'étude des configurations, qui fait que beaucoup d'élèves perdent l'habitude acquise en primaire d'observer les figures géométriques, et sont incapables, quelques années plus tard de faire une démonstration géométrique, ou de résoudre un problème de géométrie.*

Les activités proposées dans ce document tentent de revaloriser le recours à l'aire comme outil de preuve et de liaison entre le géométrique et le numérique.

[7] Friedelmeyer J.-P., Les aires : outil heuristique, outil démonstratif, *Repères-IREM*, 38 (1998), 39-66.

Les socles de compétences comme guides

Pour élaborer les activités et pour les inscrire dans un passage aussi harmonieux que possible du primaire au secondaire, nous nous sommes informés sur les capacités des élèves à l'issue de l'enseignement fondamental, particulièrement en ce qui concerne la géométrie.
Il nous a notamment été utile de nous imprégner des contenus et de l'esprit des *socles de compétences*.

Citons deux passages révélateurs de cet esprit, le premier à propos de l'enseignement des mathématiques en général, le second relatif à la formation géométrique en particulier

> *La formation mathématique s'élabore au départ d'objets, de situations vécues et observées dans le réel, de questions à propos de faits mathématiques. Le cours de mathématiques ne se limite pas à transmettre des connaissances. De l'école fondamentale à la fin du premier degré du secondaire, solliciter l'imagination, susciter la réflexion et développer l'esprit critique à propos de ces observations, conduisent l'élève à comprendre et à agir sur son environnement.*
>
> *Des manipulations et l'observation d'objets, de dessins, contribuent à caractériser des transformations du plan. Agrandir, réduire des figures associent un phénomène géométrique à la notion de proportionnalité. Des activités concrètes comme par exemple assembler des tiges articulées, croiser des bandes de papier, construire des figures et les classer, ouvrent à la découverte des propriétés des quadrilatères et des triangles. Plus tard on compare ces propriétés, on les relie à celles des transformations. On en arrive ainsi à enchaîner des énoncés et on apprend progressivement à démontrer.*

Concernant les attentes qu'un professeur de première secondaire peut avoir vis-à-vis des enfants qu'il accueille en début d'année scolaire, il nous a semblé utile de relever les sujets de géométrie plane figurant dans les programmes, liés à notre recherche, et devant déjà être certifiés à l'école primaire[8].

[8] C'est-à-dire à la fin de la deuxième étape de l'enseignement obligatoire. La première étape coïncide avec la fin de la deuxième année primaire, la deuxième avec la fin de la sixième année primaire et la troisième avec la fin de la deuxième année secondaire. Notre propos concerne les deuxième et troisième étapes.

Compétences à certifier à la fin de la deuxième étape de la scolarité obligatoire

- **Reconnaître, comparer, construire, exprimer**
  - Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer (sur base de la perception et de la comparaison avec un modèle, sur base de propriétés de côtés, d'angles pour les figures).
  - Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié.
  - Tracer des figures simples (sur du papier tramé ; en lien avec les propriétés des figures et au moyen de la règle graduée, de l'équerre et du compas).
- **Dégager des régularités, des propriétés, argumenter**
  - Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.
  - Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités (reconnaître la présence d'un axe de symétrie).
  - Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures (en s'appuyant sur des quadrillages).
  - Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie (pour décrire, comparer, tracer).
- **Comparer, mesurer**
  - Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet.
  - Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat (longueurs, capacités, masses, aires, volumes, durées, coût).
  - Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels.
  - Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.

- **Opérer, fractionner**
  - Fractionner des objets en vue de les comparer (en deux et en quatre à l'issue de la première étape, et en général à l'issue de la deuxième étape).

Compétences à amorcer à l'école primaire

- Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.
- Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.
- Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est un (par exemple, prendre le tiers du quart d'un objet).
- Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

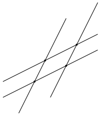
La situation à l'issue du primaire

Les ambitions affichées dans les socles de compétences, aussi louables qu'elles soient, doivent cependant être envisagées avec prudence. Ce que nous avons observé dans les classes témoigne de l'écart existant entre ces objectifs « idéaux » et la réalité du terrain. Il ne s'agit pas de remettre ces objectifs en cause mais bien de les considérer comme des guides qui orienteront encore largement le travail du début du secondaire.

Un enseignant de première secondaire ne peut considérer que les compétences qui doivent être certifiées en sixième primaire soient acquises par la majorité de ses élèves. Un important travail d'entretien voire d'élaboration doit encore être réalisé.

Pour illustrer et étayer notre propos, voici quelques observations concernant les compétences évoquées ci-dessus.

- La reconnaissance des formes ne pose guère de difficultés. Elle repose essentiellement sur la perception et la comparaison avec l'image que les élèves se font d'une forme donnée.
  Ainsi, lorsque deux bandes[9] se coupent (figure ci-dessous), la question « Pourquoi la forme observée est-elle un parallélogramme ? » leur semble-t-elle incongrue (« On le voit bien ! »).



- Bien qu'ils soient capables de citer bon nombre de propriétés des formes, il est prématuré de demander aux enfants de les évoquer pour justifier leurs réponses.
  Il est normal que les élèves se situent au stade de la reconnaissance visuelle des formes à l'issue du primaire. Pour qu'ils puissent passer au stade suivant, celui de la justification, il faudra les y préparer.
- Du point de vue du classement des figures, des énoncés tels que « un carré est un rectangle » ou « un rectangle est un parallélogramme » ne sont généralement pas bien assimilés par les élèves. Un important travail logique basé sur les propriétés reste à faire au premier degré du secondaire et même au-delà.
- De la même façon, la construction de figures simples se fait le plus souvent en référence à une image et à des propriétés relatives aux mesures. La construction d'un carré sur une feuille vierge par exemple se fera fréquemment au moyen de la seule règle graduée, l'élève se basant exclusivement sur la propriété d'égalité des longueurs des côtés et non sur la perpendicularité. Les côtés sont tracés approximativement, en respectant tant bien que mal l'égalité des longueurs, sans l'aide de l'équerre.
  Le compas a généralement encore moins de succès, peu d'élèves le manipulant avec aisance.

[9] **Une bande étant définie comme un paire de droites parallèles. La** `Bande` **est proposée dans les** `Formes libres` **du logiciel.**

- Les propriétés des côtés et des angles des formes sont globalement bien connues des élèves mais leur utilité pour les constructions est rarement bien perçue. C'est pourquoi elles y sont peu réinvesties.
- La reconnaissance des axes de symétrie d'une figure se limite souvent aux axes verticaux.
- Reconnaître et construire des agrandissements (réductions) de figures sur un quadrillage est une compétence assez bien maîtrisée.
- En début de première, les élèves ne sont pas encore capables de *définir* et c'est normal. Ainsi, lorsqu'on leur demande de définir une forme, il est courant qu'ils se contentent de citer des caractéristiques de celle-ci.
  Voici deux exemples :
  - si l'on demande de définir un carré, certains répondront « une forme qui a quatre angles droits » sans réaliser qu'il ne s'agit pas d'une condition suffisante[10] mais seulement d'une propriété ;
  - si l'on demande ce qu'est un losange, une réponse erronée courante est « un quadrilatère avec deux angles aigus et deux angles obtus », excluant ainsi le carré.

  En définitive, il est de peu d'intérêt de demander à de jeunes enfants de définir : il s'agit d'un activité descriptive trop complexe à leur niveau. Il vaut mieux mettre au point avec eux des formulations « fonctionnelles » utilisables pour leurs activités de justification[11].
  Toutefois, il faudra veiller à préciser certains termes usuels propres à la géométrie. Des mots comme *intersection, perpendiculaire, circonférence, périmètre, aire . . .* ne sont pas utilisés spontanément, voire mal compris ou méconnus. Ce problème est certainement à resituer dans le cadre plus large des difficultés de maîtrise de la langue française. Les difficultés à lire des consignes et à les respecter font également partie de cette problématique.

[10] La notion de *condition suffisante* est à installer avec beaucoup de précaution. Pour des enfants de douze ans, on se contentera de signaler que la propriété « quatre angles droits »ne permet pas d'être sûr que l'on parle d'un carré : il peut s'agir d'un rectangle.

[11] Ainsi, on préférera « Si le quadrilatère a deux paires de côtés parallèles, alors c'est un parallélogramme » à « Un parallélogramme est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles ».

- En ce qui concerne les compétences relevant de *Comparer, mesurer*, les démarches utilisant le mesurage sont clairement celle qui sont les mieux maîtrisées. L'importance qui leur est accordée se fait toutefois au détriment de la conceptualisation, notamment en ce qui concerne l'aire. Peu d'élèves semblent avoir assimilé que l'aire peut être évaluée par le recouvrement d'une figure à l'aide d'une unité d'aire conventionnelle.
  Le recours quasi systématique aux mesures de longueurs pour calculer l'aire explique d'ailleurs en partie la confusion qui peut exister dans l'esprit de certains enfants entre aire et périmètre.
- Les démarches d'estimation (évaluation approximative) semblent peu présentes.
- Les calculs de périmètres, d'aires et de volumes sont essentiellement vus comme des applications de formules avec tous les dangers de confusion que cela comporte (« aire du rectangle égale à deux fois la largeur plus deux fois la longueur » ou autres réponses du même genre).
  Ces formules n'ont généralement pas été construites mais apprises, les rendant ainsi plus volatiles dans la mémoire de certains enfants puisqu'ils seront incapables de mettre en oeuvre une démarche pour les retrouver. C'est ainsi que beaucoup d'élèves se retrouvent démunis lorsqu'ils doivent calculer l'aire d'une forme plus complexe que les formes de bases usuelles, faute de savoir élaborer une stratégie de calcul via une décomposition de la surface en formes familières.

L'énumération de difficultés qui précède ne vise aucunement à dresser un sombre tableau des compétences des enfants à l'issue du primaire. Ce serait d'ailleurs manquer injustement de respect vis-à-vis de l'excellent travail mené par la grande majorité des instituteurs.
Notre intention est plutôt de souligner que la plupart des compétences qui doivent être certifiées en fin de primaire sont toujours des compétences en devenir.

La transition primaire-secondaire étant délicate, une des tâches des enseignants du début du secondaire est de créer les conditions pour qu'elle se déroule sans trop de heurts. Ils doivent faire preuve de prudence dans leurs exigences vis-à-vis de leurs élèves en évitant de « mettre la barre trop haut » et en ayant un regard lucide sur leurs compétences.

Leur rôle consiste aussi à assurer le difficile passage d'une géométrie faite essentiellement d'observations et de collectes de propriétés vers une géométrie où l'argumentation et la justification prennent une place de plus en plus importante.

En effet, dans la majorité des cas, les activités géométriques menées à l'école primaire débouchent sur des « portraits » de figures, des synthèses descriptives rassemblant des faits et des propriétés. Ces synthèses résultent généralement d'observations, de mesures et de vérifications mais plus rarement de déductions. Quelques instituteurs amènent toutefois leurs élèves à exprimer certains résultats en termes d'implications et à ébaucher des synthèses fonctionnelles : « si j'effectue telle action, j'obtiens tel résultat ».

Les élèves atteignant ce stade à l'issue du primaire ne constituent cependant qu'une petite minorité. Il faut plutôt s'attendre à ce qu'un enfant qui entre en première secondaire se contente d'attacher un ensemble de faits aux formes géométriques, sans nécessairement distinguer définition et propriété. En principe, il ignore ce qu'est une condition déterminante d'une figure.

Les tableaux suivants présentent, pour les triangles d'abord, pour les quadrilatères ensuite, des portraits qui devraient être familiers pour des enfants de douze ans.

Triangle isocèle	Deux côtés de même longueur
Triangle équilatéral	Trois côtés de même longueur
Triangle rectangle	Un angle droit et deux angles aigus

Parallélogramme	Deux paires de côtés parallèles Deux paires de côtés opposés de même longueur
Rectangle	Quatre angles droits Deux paires de côtés parallèles Deux paires de côtés opposés de même longueur
Losange	Quatre côtés de même longueur
Carré	Quatre angles droits Quatre côtés de même longueur
Trapèze	Au moins une paire de côtés parallèles

Notons bien qu'un parallélogramme est un trapèze. Chaque fois que nous évoquerons un « trapèze non parallélogramme », nous parlerons simplement de « trapèze quelconque ».

Dans certains cas, les portraits peuvent être plus étoffés et comporter des propriétés relatives aux diagonales, aux médianes, aux axes de symétrie et aux angles :

- pour le triangle isocèle : deux angles de même amplitude, un axe de symétrie, ...
- pour le triangle équilatéral : trois angles de même amplitude, trois axes de symétrie, ...
- pour le parallélogramme : diagonales se coupant en leur milieu, deux angles aigus et deux angles obtus s'il n'est pas rectangle, médianes se coupant en leur milieu, ...
- pour le rectangle : diagonales de même longueur, deux axes de symétrie (les médianes), ...
- pour le losange : diagonales perpendiculaires, deux axes de symétrie (les diagonales), ...
- pour le carré : diagonales perpendiculaires et de même longueur, quatre axes de symétrie (les diagonales et les médianes), ...

Séquences de leçons

1. Deux bandes qui se coupent
2. Bases et hauteurs
3. Du parallélogramme au rectangle (puzzles)
4. Du parallélogramme au rectangle (bandes)
5. Assembler deux triangles isométriques
6. Un triangle dans trois bandes
7. Découper un triangle
8. Assembler des trapèzes isométriques
9. Découper un trapèze
10. Du losange au rectangle
11. Aire d'un polygone régulier
12. Aire d'un disque

Les bandes sont des paires de droites parallèles aisément réalisables avec* `Apprenti Géomètre`*.
La première activité proposée aux élèves consiste à créer deux bandes sécantes à l'écran ; en modifiant à volonté les directions et les largeurs des bandes, ils observent les différents quadrilatères qui en résultent. Cette activité et sa synthèse contribuent à une mise au point bien utile en début de première secondaire, sur les caractéristiques de quelques quadrilatères.

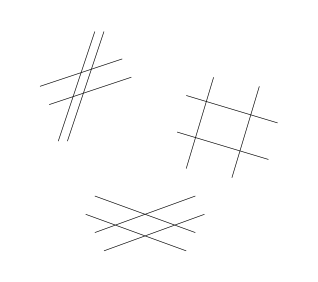
* * *

1. **Public visé : à partir de la première secondaire.**
2. **Prérequis : reconnaissance visuelle des quadrilatères convexes (parallélogramme, rectangle, carré, losange et trapèze).**
3. **Rappels à effectuer par l'enseignant : définitions de ces quadrilatères.**
4. **Objectifs mathématiques :**
   - découvrir que l'intersection de deux bandes est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (parallélogramme, rectangle, losange et carré) ;
   - découvrir que certains quadrilatères ne peuvent être obtenus par l'intersection de deux bandes (c'est-à-dire, certains trapèzes, cerfs-volants et autres quadrilatères quelconques) ;
   - réactualiser les définitions et certaines propriétés des quadrilatères.
5. **Objectifs instrumentaux : créer des bandes et leur appliquer les commandes** `Modifier`, `Glisser`, `Tourner`, `Retourner` **et** `Dupliquer`.
6. **Temps estimé : deux périodes de cours.**

1 Deux bandes qui se coupent

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC.*

1. Fais apparaître deux bandes à l'écran en veillant à ce qu'elles se coupent.
2. Quelle forme observes-tu à l'intersection des deux bandes ?
3. Explore le plus de situations possibles en faisant varier
   – la position des bandes (*Glisser, Tourner*) ;
   – les largeurs des bandes (*Modifier*).
4. Ecris tes observations sur la fiche suivante.



Ouvrir la fiche 1.1 du document fiches12-14.pdf.

2 Deux bandes qui se coupent : mes observations

Ecris tes observations ci-dessous.

Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Consignes pour les élèves	Commentaires
Lire les fiches de travail 1 et 2.	Dans la salle de projection, l'enseignant commence par expliquer la notion de « bande ». Il crée une bande à l'écran et précise qu'il s'agit de la zone comprise entre deux droites parallèles et incluant celles-ci ; ces droites sont appelées *bords* de la bande ; la distance entre les bords est la *largeur* de la bande (mesurée perpendiculairement aux bords). Il montre comment modifier, glisser, tourner et éventuellement retourner une bande.
Créer à l'écran deux bandes qui se coupent. Nommer le quadrilatère situé à l'intersection des deux bandes. Agir sur les bandes en utilisant « modifier », « tourner », « retourner » et « glisser », et nommer les différents quadrilatères observés. Noter les résultats sur la fiche 2.	Parmi les comportements prévisibles, citons : ▶ les élèves qui nomment la première forme qu'ils obtiennent et qui en restent là (il s'agit généralement d'enfants n'ayant jamais utilisé un logiciel de géométrie dynamique ou peu familiers d'un travail de recherche libre) ; ▶ ceux qui cherchent d'emblée à obtenir une forme particulière (par exemple, après avoir créé les deux bandes, ils en tournent une pour qu'elle soit perpendiculaire à la première et modifient ensuite sa largeur pour obtenir un carré) ; il se peut aussi qu'ils se contentent de leur premier succès. Dans tous les cas l'enseignant rappelle régulièrement aux élèves d'utiliser le dynamisme du logiciel dans le but de trouver les différentes formes possibles. A l'issue de cette recherche, le parallélogramme, le rectangle et le carré sont généralement cités par tous les élèves ; ce n'est pas le cas du losange.

Fiche de travail

3 Trouver deux bandes à partir d'un quadrilatère

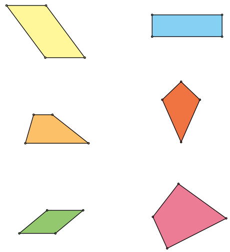
Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `bandespossibles.fag`.

Pour chaque quadrilatère, dis si tu peux l'obtenir avec deux bandes qui se coupent.

Si oui, construis les deux bandes.

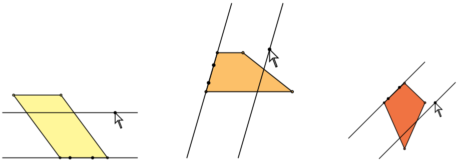
Si ce n'est pas possible, explique pourquoi.

Chaque fois que c'est possible, construis les bandes ci-dessous.



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Consignes pour les élèves	Commentaires
Lire la fiche 3.	L'enseignant distribue la fiche 3 aux élèves qui ont terminé leur première tâche.
Ouvrir le fichier `bandespossibles.fag`.	Le fichier ouvert par les élèves montre six quadrilatères. Il s'agit de voir si chacun d'eux peut être obtenu par l'intersection de deux bandes ou non. Le but est de montrer qu'un quadrilatère ayant deux côtés opposés non parallèles ne peut être engendré par deux bandes qui se coupent. Dans cet exercice, c'est le cas du trapèze, du cerf-volant et du quadrilatère quelconque. Pour créer les bandes, les élèves choisissent deux points situés sur un côté d'un quadrilatère. Dès que le premier bord de la bande est créé, le fait de déplacer la souris fait apparaître une droite parallèle au premier bord, permettant rapidement de voir si la tâche est possible ou pas.



Simultanément au travail avec le logiciel, construire les bandes sur la fiche 3.	Les élèves construisent les bandes sur la fiche 3 pour le parallélogramme, le rectangle et le losange.

4 Deux bandes qui se coupent (synthèse 1)

Complète la deuxième colonne du tableau ci-dessous.

Si deux bandes ...	alors j'obtiens un ...
se coupent,	
sont perpendiculaires,	
se coupent et sont de même largeur,	
sont perpendiculaires et de même largeur,	

Complète ci-dessous.

Les quadrilatères qu'il est impossible d'obtenir avec deux bandes qui se coupent :

____

____

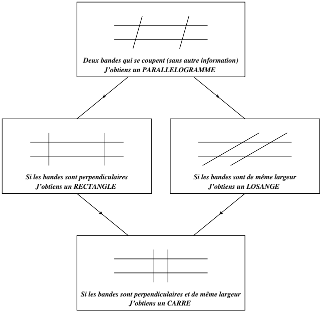
____

Avec deux bandes qui se coupent, on obtient toujours un quadrilatère dont

____

Ouvrir la fiche 1.4 du document fiches12-14.pdf.

5 Deux bandes qui se coupent (synthèse 2)



Définitions

- Un parallélogramme est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles.
- Un rectangle est un quadrilatère possédant quatre angles droits.
- Un losange est un quadrilatère possédant quatre côtés de même longueur.
- Un carré est un quadrilatère possédant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.

Ouvrir la fiche 1.5 du document fiches12-14.pdf.

Dans la salle de projection, l'enseignant demande aux élèves quels sont les quadrilatères qu'il est possible d'obtenir et comment il faut placer les bandes dans chaque cas.

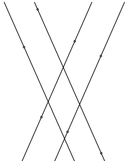
Il se base uniquement sur la reconnaissance visuelle des formes par les élèves.

Les réponses sont illustrées à l'écran, éventuellement par un élève volontaire :

- si deux bandes se coupent, on obtient un parallélogramme ;
- si deux bandes sont perpendiculaires, on obtient un rectangle ;
- si deux bandes sont perpendiculaires et que l'on modifie la largeur de l'une pour qu'elle soit égale à celle de l'autre, on obtient un carré.

La notion de perpendicularité devra être rappelée et précisée pour les bandes : si un bord d'une bande forme un angle droit avec un bord de l'autre bande, alors elles seront dites perpendiculaires. Il sera alors admis que les quatre angles formés par les bords des bandes sont droits.
A ce niveau, il n'est pas nécessaire d'entrer dans des explications plus détaillées comme « si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre »ou « si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre ».

L'enseignant soulève la question du losange au cas où il n'aurait pas été cité par les élèves.
On peut prévoir que l'élève manipulera les bandes pour obtenir un quadrilatère rappelant le losange dans sa position « classique ». Il est peu probable qu'il pense à utiliser des bandes de même largeur.



Si l'enseignant souhaite amener ses élèves à justifier leurs réponses, il doit d'abord procéder à une mise au point sur les quadrilatères.

Un jeu de questions et réponses peut déboucher sur les définitions suivantes :

- un parallélogramme est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles ;
- un rectangle est un quadrilatère possédant quatre angles droits ;
- un losange est un quadrilatère possédant quatre côtés de même longueur ;
- un carré est un quadrilatère possédant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.

Notons qu'une définition du losange couramment citée par les élèves est « un quadrilatère ayant quatre côtés égaux, deux angles aigus et deux angles obtus ». L'enseignant peut alors leur expliquer que la condition sur les angles est superflue et que le carré est aussi un losange. Il est clair que les élèves sortant du primaire ne maîtrisent pas les définitions emboîtées des quadrilatères.

A partir de là, le fait que les bandes soient des paires de droites *parallèles* permet de justifier pourquoi deux bandes sécantes donnent toujours un parallélogramme.

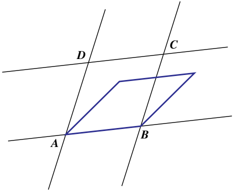
Lorsque les bandes sont perpendiculaires, les bords de l'une sont perpendiculaires aux bords de l'autre et le quadrilatère obtenu est un rectangle puisqu'il possède quatre angles droits. Notons que le logiciel ne permet pas immédiatement de placer une bande perpendiculairement à une autre. Dans un premier temps, on pourra se contenter de donner les explications sur des bandes placées à vue. Pour un travail plus rigoureux, voir page 31. Que se passe-t-il si les bandes sont de même largeur ?

L'enseignant montre d'abord que l'on peut obtenir deux bandes de même largeur en utilisant la fonctionnalité `Dupliquer` ou encore `Copier` et puis `Coller`.

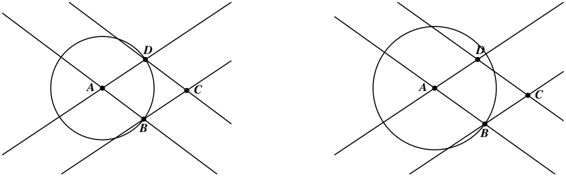
Si deux bandes de même largeur se coupent, il sera admis que le quadrilatère observé est un losange et l'on se contentera de vérifications à l'aide du logiciel (nous proposerons toutefois une preuve basée sur la formule d'aire du parallélogramme lors de la séquence 3).

Voici deux vérifications possibles :

- choisir le losange dans les `Formes libres` ; en créer un à partir des points A, B et de façon dynamique (fonctionnalité `Modifier`), vérifier qu'il a aussi pour sommets les points C et D ;



- créer un cercle de centre A et passant par B ; s'il comprend aussi le point D (figure de gauche), alors nous avons bien un losange (car $|AB| = |AD|$ et comme $|AB| = |DC|$ et $|AD| = |BC|$, les quatre côtés ont la même longueur). La figure de droite illustre le cas contraire ;



Cette façon de procéder montre aux élèves que le cercle peut être un outil de comparaison de longueurs.

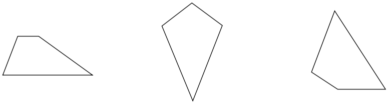
Enfin, si deux bandes perpendiculaires sont de même largeur, le quadrilatère observé a quatre côtés de même mesure (en effet, chaque côté a une mesure égale à la largeur de la bande à laquelle il est perpendiculaire). Il s'agit donc d'un carré.

Pour terminer cette activité, les élèves reçoivent la fiche 4 et la complètent sous la direction de l'enseignant.

La colonne de droite du tableau est complétée, dans l'ordre par *parallélogramme*, *rectangle*, *losange* et *carré*.

Les élèves complètent ensuite le cadre inférieur :

- les quadrilatères qu'il est impossible d'obtenir avec deux bandes qui se coupent : *les trapèzes quelconques, les cerfs-volants et les quadrilatères quelconques (ceux qui ont une paire de côtés non parallèles* ;

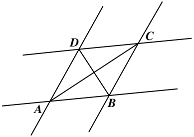


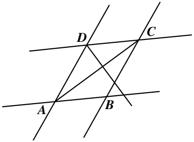
- avec deux bandes qui se coupent, on obtient toujours un quadrilatère dont *les côtés opposés sont parallèles*.

Les élèves reçoivent la fiche de synthèse 5.

Voici deux autres façons de vérifier avec le logiciel qu'un quadrilatère est un losange :

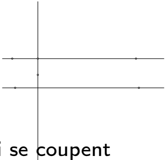
- tracer une diagonale (par exemple AC) et tracer un segment perpendiculaire à AC passant par B ; s'il passe aussi par D, cela signifie que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires ce qui en fait un losange (figure de gauche) ; dans le cas contraire, ce n'est pas un losange (figure de droite).

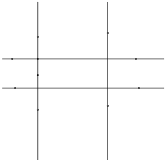


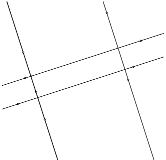


- Vérifier si une diagonale du parallélogramme est axe de symétrie de celui-ci (si tel est le cas, l'autre diagonale est aussi un axe de symétrie). Pour cela, il faut vérifier si le parallélogramme est sa propre image par la symétrie orthogonale d'axe AC (ou BD). Cette vérification ne sera convaincante que si l'on a pris soin de sélectionner `Trace` dans le menu `Préférences`.

Si l'on veut construire une bande perpendiculaire à une autre, il faut d'abord créer une droite perpendiculaire à un bord de la première bande ; la seconde bande est alors créée en prenant appui sur la droite perpendiculaire. Les modifications de largeur ou de direction de la première bande se répercutent sur l'autre et l'on observe toujours un rectangle à l'intersection.

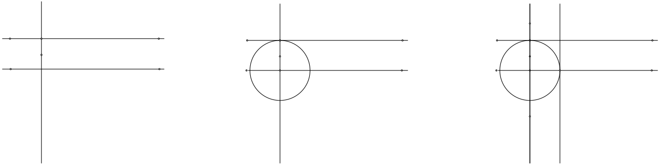




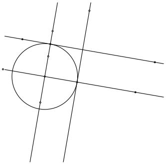


Prolongements

Si l'on veut construire deux bandes perpendiculaires et de même largeur, on commence de la même façon.
Toutefois, avant de construire la seconde bande, on construit un cercle permettant de reporter la largeur de la première bande sur un de ses bords.



A nouveau, les modifications de largeur ou de direction de la première bande se répercutent sur l'autre et l'on observe toujours un carré à l'intersection.



Au travers de cette séquence de leçons, nous ne proposons pas réellement un travail de recherche débouchant sur des découvertes géométriques significatives pour les élèves. Nous visons davantage à mettre au point les notions de base et de hauteur en lien avec les bandes qui se révèlent ici être d'une aide appréciable à la vision géométrique.
Simultanément, les activités proposées ont pour but de poursuivre la familiarisation des élèves avec le logiciel (les didacticiens diraient qu'il faut assurer la genèse instrumentale). Ainsi, créer des bandes dans lesquelles sont parfaitement inscrites des parallélogrammes, des triangles et des trapèzes et utiliser l'outil *Segment perpendiculaire* ***afin de mettre en évidence les hauteurs des formes en tant que largeurs des bandes sont des exercices qui contribuent à la prise en main d'Apprenti Géomètre.***

* * *

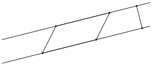
1. **Public visé : à partir de la première secondaire.**
2. **Prérequis : reconnaissance visuelle des formes (parallélogramme, triangle et trapèze), bande et segment perpendiculaire.**
3. **Rappels à effectuer par l'enseignant : un exemple de base et de hauteur pour un parallélogramme et un triangle.**
4. **Objectifs mathématiques :**
   - trouver les différentes bases et hauteurs d'un parallélogramme, d'un triangle et d'un trapèze ;
   - définir une base ;
   - définir une hauteur.
5. **Objectifs instrumentaux : créer des formes libres, des bandes, des segments (perpendiculaires), colorier et utiliser le dynamisme du logiciel.**
6. **Temps estimé : deux périodes de cours.**

1 Bases et hauteurs d'un parallélogramme (1)

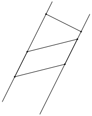
Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un parallélogramme.
2. Crée une bande s'appuyant sur deux côtés du parallélogramme.
3. Crée un segment perpendiculaire dont les extrémités sont sur les bords de la bande (une *hauteur*).
4. Modifie le parallélogramme en déplaçant un de ses sommets.
5. Observe les modifications de la base et de la hauteur.

Première possibilité



Deuxième possibilité



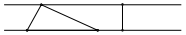
Ouvrir la fiche 2.1 du document fiches12-14.pdf.

2 Bases et hauteurs d'un triangle (1)

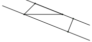
Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un triangle.
2. Crée une bande s'appuyant sur un côté du triangle et passant par le sommet opposé.
3. Crée un segment perpendiculaire dont les extrémités sont sur les bords de la bande (une *hauteur*).
4. Modifie le triangle en déplaçant un de ses sommets.
5. Observe les modifications de la base et de la hauteur.

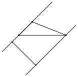
Première possibilité



Deuxième possibilité



Troisième possibilité

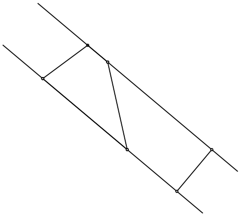


Ouvrir la fiche 2.2 du document fiches12-14.pdf.

3 Bases et hauteurs d'un trapèze

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un trapèze.
2. Crée une bande s'appuyant sur les côtés parallèles du trapèze.
3. Crée un segment perpendiculaire dont les extrémités sont sur les bords de la bande (une *hauteur*.
4. Modifie le trapèze en déplaçant un de ses sommets.
5. Observe les modifications de ses bases et de ses hauteurs.



Ouvrir la fiche 2.3 du document fiches12-14.pdf.

Fiche de travail
Parallélogramme dans deux bandes, triangle dans trois bandes

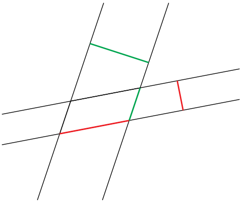
4 Bases et hauteurs d'un parallélogramme (2)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

Pour reproduire la figure ci-dessous :

1. crée un parallélogramme ;
2. crée les deux bandes s'appuyant sur ses côtés ;
3. crée des segments perpendiculaires aux bords des bandes ;
4. respecte les couleurs des traits.

Modifie le parallélogramme en déplaçant un de ses sommets. Observe les modifications de ses bases et de ses hauteurs.



Ouvrir la fiche 2.4 du document fiches12-14.pdf.

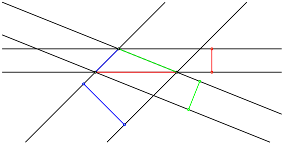
5 Bases et hauteurs d'un triangle (2)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

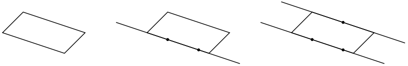
Pour reproduire la figure ci-dessous :

1. crée un triangle ;
2. crée trois bandes, chacune s'appuyant sur un côté et passant par le sommet opposé ;
3. crée des segments perpendiculaires aux bords des bandes ;
4. respecte les couleurs des traits.

Modifie le triangle en déplaçant un de ses sommets. Observe les modifications de ses bases et de ses hauteurs.



Ouvrir la fiche 2.5 du document fiches12-14.pdf.

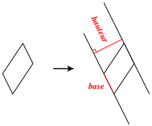
Consignes	Commentaires
Lire les fiches 1, 2 et 3.	Lors de la présentation de l'activité dans la salle de projection, l'enseignant montre un exemple de base et de hauteur d'un parallélogramme. C'est l'occasion de rappeler certaines fonctionnalités du logiciel : créer une forme libre, une bande et un segment perpendiculaire aux bords de celle-ci. Il faut être conscient qu'il y a déjà ici un seuil à franchir pour de jeunes élèves. En effet, la plupart d'entre eux conçoivent une hauteur comme un segment issu d'un sommet et « à l'intérieur » de la forme. Il faut leur montrer que tout segment mesurant la largeur de la bande représente une hauteur. De ce point de vue, Le dynamisme du logiciel est bien utile car il permet de glisser le segment à l'intérieur de la bande.
Créer la forme demandée et une bande qui lui est associée (en s'appuyant sur deux côtés parallèles pour le parallélogramme et pour le trapèze ; en s'appuyant sur un côté et le sommet opposé pour le triangle).	Les élèves peuvent créer une bande en utilisant trois sommets du parallélogramme (ou du trapèze) mais ce n'est pas obligatoire : il peuvent choisir deux points quelconques sur un côté et un troisième point sur le côté parallèle.  De même, pour le triangle, le premier bord d'une bande peut être créé à partir de deux points quelconques d'un côté.
Créer un segment perpendiculaire dont les extrémités sont sur les bords de la bande.	Une bande étant créée, l'élève construit un segment perpendiculaire (`Formes libres / Segment perpendiculaire`) dont les extrémités sont sur les bords de la bande : il obtient ainsi une *hauteur*.

Consignes pour les élèves	Commentaires
	L'enseignant incite l'élève à trouver toutes les possibilités (deux pour le parallélogramme, trois pour le triangle et une seule pour le trapèze). Il s'agit encore d'un passage délicat car de nombreux enfants n'imaginent qu'une seule façon de trouver une base et une hauteur.
Lire les fiches 4 et 5.	L'enseignant peut proposer les fiches 4 et 5 comme prolongement du travail : il s'agit de faire apparaître simultanément toutes les bandes associées à une forme et de colorier d'une même couleur les bases et les hauteurs qui se correspondent. L'intérêt de ce travail réside dans l'enrichissement de la vision géométrique qu'il apporte : avoir sous les yeux un triangle avec trois possibilités de bases et de hauteurs et voir l'évolution de celles-ci lors des modifications du triangle a un côté spectaculaire susceptible de marquer les élèves.
Créer les deux bandes dans lesquelles est inscrit un parallélogramme ainsi que les deux hauteurs. Créer les trois bandes dans lesquelles est inscrit un triangle ainsi que les trois hauteurs. Colorier d'une même couleur les bases et hauteurs qui se correspondent.	Pour réaliser la figure de la fiche 4, l'élève crée d'abord un parallélogramme, et ensuite les deux bandes et les deux hauteurs. Pour colorier un côté du parallélogramme, il faut d'abord lui superposer un *segment* (`Formes libres / Segment`). Ensuite, il choisit une couleur (`Outils / Colorier / Couleur Bord`) pour ce segment et la hauteur correspondante. Il est également possible de rendre plus épais les segments sur lesquels on souhaite attirer l'attention (`Outils / Modifier l'épaisseur / Epais`). Une procédure analogue est utilisée pour le triangle de la fiche 5.
	Un prolongement pourrait être de demander aux élèves de décrire et comparer les hauteurs lorsque le triangle est isocèle, rectangle, équilatéral.

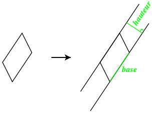
6 Trouver les bases et les hauteurs d'un parallélogramme

Comment trouver facilement les bases et les hauteurs d'un parallélogramme ? En créant une bande s'appuyant sur deux côtés parallèles !

Première possibilité



Deuxième possibilité



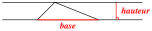
1. Une *base* est un côté du parallélogramme.
2. Une *hauteur* est un segment
   – perpendiculaire aux bords de la bande qui s'appuie sur la base
   – et dont les extrémités sont sur les bords de la bande.
   On appelle couramment *hauteur* la longueur d'un tel segment.
   C'est aussi la *largeur* de la bande.

Ouvrir la fiche 2.6 du document fiches12-14.pdf.

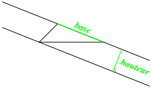
7 Trouver les bases et les hauteurs d'un triangle

Comment trouver facilement les bases et les hauteurs d'un triangle ?
En créant une bande s'appuyant sur un côté et passant par le sommet opposé !

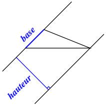
Première possibilité



Deuxième possibilité

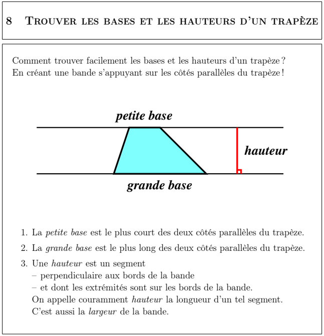


Troisième possibilité



1. Une *base* est un côté du triangle.
2. Une *hauteur* est un segment
   – perpendiculaire aux bords de la bande qui s'appuie sur la base
   – et dont les extrémités sont sur les bords de la bande.
   On appelle couramment *hauteur* la longueur d'un tel segment.
   C'est aussi la *largeur* de la bande.

Ouvrir la fiche 2.7 du document fiches12-14.pdf.



Ouvrir la fiche 2.8 du document fiches12-14.pdf.

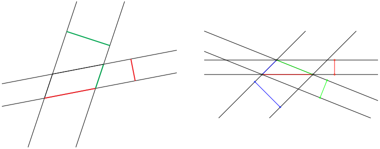
Sur grand écran et pour chaque forme, l'enseignant montre les différentes façons de construire les bandes et de mettre en évidence les bases et les hauteurs.

Il souligne le fait que, pour chacune de ces formes, une hauteur s'obtient facilement en l'inscrivant dans une bande et en mesurant la largeur de celle-ci à l'aide d'un segment perpendiculaire à ses bords (comme quand on mesure la largeur d'un couloir).

Une hauteur est ainsi définie comme la largeur d'une bande ou comme

- **la distance entre deux côtés parallèles (parallélogrammes et trapèzes) ;**
- **la distance entre un côté et le sommet opposé (triangles).**

La synthèse débouche notamment sur les figures des fiches 4 et 5.



Les élèves reçoivent les fiches de synthèse 6, 7 et 8.

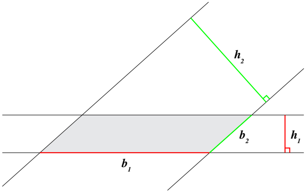
9 Calculer l'aire d'un parallélogramme : deux fois plutôt qu'une !

A l'école primaire, tu as appris que pour trouver l'aire d'un parallélogramme, il faut multiplier la base par la hauteur.

Nous te proposons de calculer l'aire du parallélogramme ci-dessous de deux façons :

1. en mesurant d'abord b_1 et h_1 ;
2. en mesurant ensuite b_2 et h_2.

Note tes résultats dans le tableau.



base	hauteur	aire du parallélogramme
ma mesure de b_1	ma mesure de h_1	$b_1 \cdot h_1 =$
ma mesure de b_2	ma mesure de h_2	$b_2 \cdot h_2 =$

Ouvrir la fiche 2.9 du document fiches12-14.pdf.

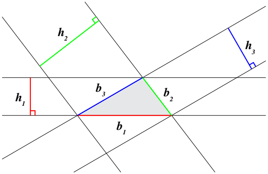
10 Calculer l'aire d'un triangle : trois fois plutôt qu'une !

A l'école primaire, tu as appris que pour trouver l'aire d'un triangle, il faut multiplier la base par la hauteur et diviser par 2.

Nous te proposons de calculer l'aire du triangle ci-dessous de trois façons :

1. en mesurant d'abord b_1 et h_1 ;
2. en mesurant ensuite b_2 et h_2 ;
3. en mesurant enfin b_3 et h_3.

Note tes résultats dans le tableau.



base	hauteur	aire du triangle
ma mesure de b_1	ma mesure de h_1	$\frac{b_1 \cdot h_1}{2} =$
ma mesure de b_2	ma mesure de h_2	$\frac{b_2 \cdot h_2}{2} =$
ma mesure de b_3	ma mesure de h_3	$\frac{b_3 \cdot h_3}{2} =$

Ouvrir la fiche 2.10 du document fiches12-14.pdf.

Consignes pour les élèves	Commentaires
Lire les fiches 9 et 10.	Pour exploiter directement le travail qui vient d'être réalisé sur les bases et les hauteurs, l'enseignant peut proposer les fiches d'exercices 9 et 10. Il s'agit de faire prendre conscience aux élèves qu'il y a deux façons de calculer l'aire d'un parallélogramme et trois façons de calculer celle d'un triangle. En dehors de toute reconstruction et justification, l'enseignant rappelle les formules d'aires : ▶ aire du parallélogramme $= b \cdot h$ ▶ aire du triangle $= \frac{b \cdot h}{2}$ ▶ aire du trapèze $= \frac{(b+B) \cdot h}{2}$ Il précise que dans les deux premières, b et h désignent respectivement la mesure d'une base et de la hauteur correspondante. Dans la troisième b désigne la mesure de la petite base du trapèze, B celle de la grande base et h la hauteur.
Mesurer les bases et les hauteurs de chaque forme. Noter ces mesures dans les tableaux. Appliquer la formule d'aire appropriée à chaque forme pour chaque possibilité de base et de hauteur. Noter les résultats dans les tableaux.	Les élèves effectuent les mesures et les calculs demandés. Après leur avoir laissé un temps de travail suffisant, l'enseignant corrige les résultats avec la classe.

Cette séquence propose une justification de la formule d'aire du parallélogramme au moyen de puzzles et de découpages. Plus précisément, il s'agit de montrer que tout parallélogramme peut être découpé et recomposé en un rectangle de même base et de même hauteur.
Il appartient à l'enseignant de juger de la pertinence de ces activités si ses élèves connaissent déjà la formule « base fois hauteur ». En effet, l'intérêt de justifier un résultat déjà connu risque fort d'être mis en doute par de jeunes enfants.
Nous pensons toutefois que cette séquence peut très bien convenir à une classe suffisamment réceptive et acceptant de « jouer le jeu ». Peut-être convient-elle également à des élèves du primaire ne connaissant pas encore la formule d'aire du parallélogramme, mais cela reste à vérifier.

* * *

1. Public visé : à partir de la première secondaire.
2. Prérequis : bases et hauteurs, formule d'aire du rectangle.
3. Rappels à effectuer par l'enseignant : comment construire un segment perpendiculaire et comment utiliser les fonctionnalités `Découper` et `Fusionner`.
4. Objectifs mathématiques :
   - comprendre qu'à partir d'un parallélogramme, il y a toujours deux façons de réaliser un rectangle de même base et de même hauteur ;
   - construire la formule d'aire du parallélogramme à partir de celle du rectangle ;
   - savoir calculer l'aire d'un parallélogramme de deux façons (c'est-à-dire mesurer n'importe quelle base et multiplier par la hauteur correspondante : $b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$).
5. Objectifs instrumentaux : créer un parallélogramme et une hauteur (`Segment perpendiculaire`) et utiliser les fonctionnalités `Glisser`, `Découper` et `Fusionner`.
6. Temps estimé : deux périodes de cours.

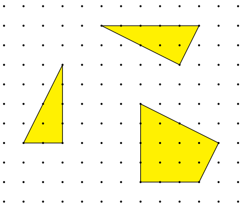
Du parallélogramme aux rectangles (puzzles) : fiches de travail

1 Deux rectangles et un parallélogramme

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `puzzle3pieces.fag`.

Tu disposes d'un puzzle de trois pièces avec lesquelles tu peux réaliser un parallélogramme et deux rectangles différents.

1. Cherche les trois solutions.
2. Compare les dimensions des rectangles avec celles du parallélogramme.



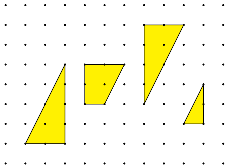
Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

2 Un rectangle et un parallélogramme

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `puzzle4pieces.fag`.

Tu disposes d'un puzzle de quatre pièces avec lesquelles tu peux réaliser un parallélogramme et un rectangle.

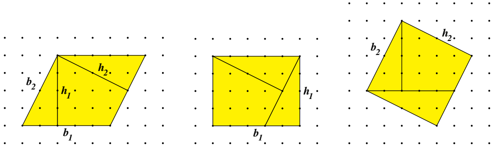
1. Cherche les deux solutions.
2. Compare les dimensions du rectangle avec celles du parallélogramme.



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

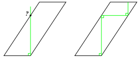
Déroulement de la leçon

Consignes pour les élèves	Commentaires
Lire la fiche 1. Ouvrir le fichier `puzzle3pieces.fag`.	Ces deux fiches préparent de façon ludique aux fiches 3 et 4.
Réaliser un parallélogramme et deux rectangles différents à partir des trois pièces du puzzle.	L'enseignant peut annoncer dès le départ que le mouvement `Glisser` suffit : il est possible de trouver les solutions sans tourner ni retourner les pièces des puzzles. Il peut également laisser les élèves libres d'utiliser tous les mouvements. Dans ce cas, il devra sans doute aider les élèves qui auraient utilisé `Tourner` ou `Retourner` à mauvais escient. Lorsqu'une des formes demandées est réalisée, l'élève peut dupliquer chacune des trois pièces du puzzle pour chercher une autre forme. Il conserve ainsi ses différentes réalisations. L'enseignant veille à ce que les élèves trouvent toutes les solutions. Le but est en effet d'amener l'idée qu'à partir de tout parallélogramme, il y a deux façons de réaliser un rectangle même aire.
Comparer les dimensions des deux rectangles avec celles du parallélogramme.	Lorsque les trois formes sont réalisées, les pièces constitutives peuvent être fusionnées. Le parallélogramme et les deux rectangles ainsi obtenus peuvent être glissés les uns sur les autres pour comparer leurs dimensions. Cette comparaison peut également se faire sur base du quadrillage.

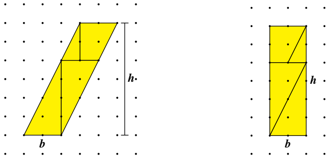


Déroulement de la leçon

Consignes pour les élèves	Commentaires
	Lorsqu'il montre les solutions sur grand écran, l'enseignant attire l'attention sur le fait que les deux rectangles, bien qu'ayant même aire, ont des dimensions différentes. On peut dire de chaque rectangle qu'il a même base et même hauteur que le parallélogramme, mais pour le premier rectangle, il s'agit de la base b_1 et de la hauteur h_1, tandis que pour le second rectangle, il s'agit de la base b_2 et de la hauteur h_2.
Lire la fiche 2. Ouvrir le fichier `puzzle4pieces.fag`.	Le deuxième puzzle a pour but de suggérer l'idée du découpage « en escalier » pour réaliser un rectangle à partir de certains parallélogrammes. En effet, si un parallélogramme est « trop allongé », il y a des hauteurs issues d'un sommet qui ne « touchent pas »le côté parallèle opposé.



Réaliser un parallélogramme et un rectangle différent à partir des quatre pièces du puzzle.	Le recherche se déroule d'une façon analogue à celle qui a été menée avec le puzzle à trois pièces.



Comparer les dimensions du rectangle avec celles du parallélogramme.	L'égalité des bases, des hauteurs et des aires est à nouveau mise en évidence.

3 Du parallélogramme au rectangle (1)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `decouperpara1.fag`.

Tu disposes de deux parallélogrammes superposables.

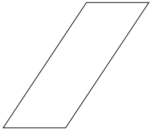
1. Dans le parallélogramme de gauche, construis un segment perpendiculaire aux grands côtés (on appelle ce segment une *hauteur*).
2. Découpe le parallélogramme suivant cette hauteur. Réalise un rectangle avec les formes obtenues.
3. Dans le parallélogramme de droite, construis un segment perpendiculaire aux petits côtés (c'est une autre hauteur).
4. Découpe le parallélogramme suivant cette hauteur. Réalise un rectangle avec les formes obtenues.
5. Compare les dimensions des rectangles avec celles du parallélogramme.
6. Compare les aires des formes obtenues.

Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

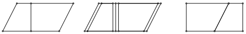
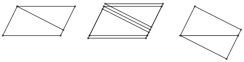
4 Du parallélogramme au rectangle (2)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `decouperpara2.fag`.

1. Découpe ce parallélogramme afin de réaliser un rectangle avec les formes obtenues.
2. Compare les dimensions du rectangle avec celles du parallélogramme.



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Consignes	**Commentaires**
Lire la fiche 3. Ouvrir le fichier `decouperpara1.fag`.	
Construire une hauteur du parallélogramme et le découper suivant celle-ci. Réaliser un rectangle avec les formes obtenues.	Rappeler aux élèves qu'une hauteur ne doit pas nécessairement passer par un sommet. A l'aide de la commande `Glisser`, les élèves déplacent les deux formes pour réaliser un rectangle. Elles peuvent alors être fusionnées. 
Réaliser le même travail après avoir construit une hauteur perpendiculaire aux deux autres côtés.	L'enseignant vérifie que les élèves réalisent l'autre découpe suggérée par la fiche.  Un autre rectangle de même aire que le parallélogramme est ainsi réalisé. Les formes peuvent à nouveau être fusionnées.
Dans les deux cas, comparer les bases du parallélogramme et du rectangle ainsi que leurs hauteurs.	Comme lors de l'activité avec les puzzles, chaque rectangle est glissé sur le parallélogramme afin de comparer les bases et les hauteurs (voir page 45). Les rectangles sont bien différenciés (voir page 46).
Comparer les aires des formes obtenues.	Les rectangles étant composés de formes issues du même parallélogramme, les élèves en déduisent qu'ils ont même aire.

Consignes pour les élèves

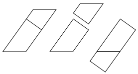
Lire la fiche 4. Ouvrir le fichier `decouperpara2.fag`.

Découper le parallélogramme afin de réaliser un rectangle avec les formes obtenues.

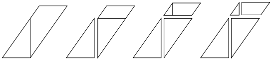
Commentaires

Tous les parallélogrammes ne se laissent pas découper aussi aisément pour réaliser deux rectangles différents.
Pour le montrer, on peut proposer la fiche 4 aux élèves.

Voici une première solution avec une seule découpe.



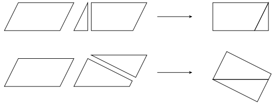
Si les élèves créent un segment perpendiculaire aux petits côtés, ils risquent d'être bloqués.
Dans ce cas, l'enseignant leur explique un découpage plus complexe : créer par un sommet un segment perpendiculaire à la base et dont une extrémité se trouve sur un côté oblique ; réaliser un découpage donnant un triangle et un trapèze ; construire un segment perpendiculaire à l'intérieur du trapèze, permettant un second découpage ; et ainsi de suite . . . (voir figure)



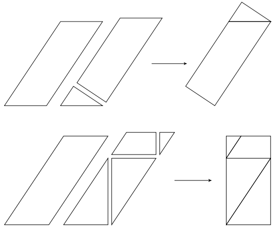
Ce travail est difficile pour de jeunes élèves car il exige une grande précision lors des constructions. Si l'enseignant estime que la tâche est trop ardue, il montrera lui-même la procédure sur grand écran.
De la même façon que précédemment, il compare les dimensions du parallélogramme à celles des rectangles.

5 A chaque parallélogramme ses deux rectangles !

Un premier exemple



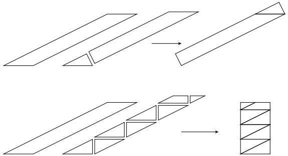
Un deuxième exemple



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

6 A chaque parallélogramme ses deux rectangles ! (suite)

Un troisième exemple

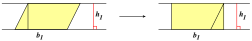


Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

7 AIRE DU PARALLÉLOGRAMME (SYNTHÈSE 1)

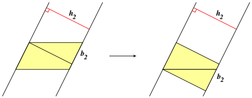
A partir d'un parallélogramme, voici deux façons de réaliser un rectangle de même aire.

Première façon : je découpe le parallélogramme pour réaliser un rectangle de base b_1 et de hauteur h_1.



Aire du parallélogramme = aire du rectangle = $b_1 \cdot h_1$

Deuxième façon : je découpe le parallélogramme pour réaliser un rectangle de base b_2 et de hauteur h_2.



Aire du parallélogramme = aire du rectangle = $b_2 \cdot h_2$

Attention : les deux rectangles ont la même aire mais leurs dimensions (bases et hauteurs) sont généralement différentes !

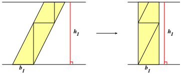
Aire du parallélogramme $= b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$

Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

8 AIRE DU PARALLÉLOGRAMME (SYNTHÈSE 2)

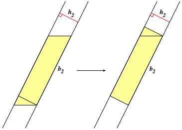
A partir d'un parallélogramme, voici deux façons de réaliser un rectangle de même aire.

Première façon : je découpe le parallélogramme pour réaliser un rectangle de base b_1 et de hauteur h_1.



Aire du parallélogramme = aire du rectangle = $b_1 \cdot h_1$

Deuxième façon : je découpe le parallélogramme pour réaliser un rectangle de base b_2 et de hauteur h_2.



Aire du parallélogramme = aire du rectangle = $b_2 \cdot h_2$

Attention : les deux rectangles ont la même aire mais leurs dimensions (bases et hauteurs) sont généralement différentes !

Aire du parallélogramme $= b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$

Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Les élèves reçoivent les fiches 5 et 6 avec des figures qui résument les observations des recherches précédentes :

- le premier exemple montre le cas « agréable » où chaque rectangle ne nécessite qu'une seule découpe du parallélogramme ;
- le deuxième exemple rappelle qu'il faut parfois un découpage plus fastidieux ;
- le troisième exemple montre que le nombre de découpages peut devenir très grand.

L'enseignant aborde ensuite la question de l'aire. La formule de l'aire du rectangle « base fois hauteur » est supposée acquise (nous la préférons à « longueur fois largeur » ; en effet, avec un logiciel de géométrie dynamique, les formes peuvent être modifiées à volonté et un rectangle pourrait ainsi voir sa largeur devenir supérieur à sa longueur).

La fiche 7 reprend les figures du haut de la fiche 5 auxquelles ont été ajoutées les dimensions des formes.

Le premier rectangle obtenu à partir du parallélogramme a pour base b_1 et pour hauteur h_1. Son aire est donc égale à $b_1 \cdot h_1$. Cette formule donne donc aussi l'aire du parallélogramme !

Le second rectangle obtenu à partir du parallélogramme a pour base b_2 et pour hauteur h_2. Son aire est donc égale à $b_2 \cdot h_2$. Cette formule donne donc aussi l'aire du parallélogramme !

La conclusion est que l'aire du parallélogramme peut se calculer tant à l'aide de la formule $b_1 \cdot h_1$ que de la formule $b_2 \cdot h_2$.

La fiche 8 aboutit à la même conclusion pour un parallélogramme ayant nécessité un découpage plus complexe.

A ce stade, une généralisation peut prendre place. Pour trouver l'aire d'un parallélogramme :

1. je mesure n'importe quelle base ;
2. je mesure la hauteur correspondante ;
3. je multiplie ces deux mesures.

Cette séquence propose une autre justification de la formule d'aire du parallélogramme.
Il s'agit d'abord de prouver, en utilisant la propriété d'additivité de l'aire, que deux parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande ont la même aire. Cette preuve est inspirée de celle que donne Euclide *dans ses « Eléments » (Livre I, 35).*
On en déduit qu'un parallélogramme et un rectangle de même base et inscrits dans la même bande ont la même aire et que la formule d'aire du rectangle est valable pour le parallélogramme.
Cette séquence débute par des activités de découpage et d'observation de figures pouvant convenir à des élèves de douze ans. Pour s'engager sur le terrain de la preuve, il faut s'adresser à des élèves plus âgés. Encore une fois, l'enseignant reste maître de ses choix.

* * *

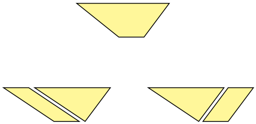
1. Public visé : à partir de la première secondaire pour l'activité d'observation et le raisonnement intuitif ; à partir de la troisième secondaire pour la démonstration.
2. Prérequis : bases et hauteurs, formule d'aire du rectangle.
3. Rappels à effectuer par l'enseignant : comment construire un segment parallèle et comment utiliser les fonctionnalités `Découper` et `Fusionner`.
4. Objectifs mathématiques :
   - enrichir la vision géométrique de l'élève par un exercice d'observation ;
   - comprendre le raisonnement prouvant que deux parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande (donc de même hauteur) ont la même aire ;
   - comprendre la formule d'aire du parallélogramme en référence à celle du rectangle ;
   - savoir calculer l'aire d'un parallélogramme de deux façons (c'est-à-dire mesurer n'importe quelle base et multiplier par la hauteur correspondante : $b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$).
5. Objectifs instrumentaux : créer un `Segment parallèle` et utiliser les fonctionnalités `Glisser`, `Découper` et `Fusionner`.
6. Temps estimé : deux périodes de cours.

1 Découper un trapèze

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `decoupertrapeze.fag`.

Tu disposes de deux trapèzes superposables.

1. Découpe chaque trapèze suivant un segment passant par un sommet et parallèle à un des côtés obliques (observe la figure ci-dessous).
2. Quelles formes obtiens-tu ?
3. Compare les aires de ces formes. Explique.



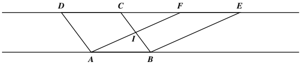
Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

2 Observer une figure

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `deuxparallelos.fag`.

Tu observes une bande dans laquelle sont inscrits deux parallélogrammes de même bae.

1. Observe attentivement cette figure. Note ci-dessous toutes les formes que tu vois.
2. Compare l'aire du parallélogramme $ABCD$ à celle du parallélogramme $ABEF$. Explique.



Les formes que je vois :

Comparaison des aires des parallélogrammes :

Ouvrir la fiche 4.2 du document fiches12-14.pdf.

Consignes	Commentaires
Lire la fiche 1. Ouvrir le fichier `decoupertrapeze.fag`.	Cette fiche prépare la suivante. Elle peut néanmoins être omise par l'enseignant.
Découper chaque trapèze suivant un segment passant par un sommet et parallèle à un des côtés obliques (se baser sur la figure de la fiche).	Les élèves construisent les segments demandés en utilisant la fonctionnalité `Segment parallèle` dans les `Formes libres`. Les découpages des trapèzes fournissent un parallélogramme et un triangle dans les deux cas.  On peut demander aux élèves de justifier pourquoi les quadrilatères obtenus sont des parallélogrammes. Ils doivent alors vérifier si les quadrilatères ont bien deux paires de côtés parallèles : ▶ les petits côtés le sont car les bases du trapèze sont parallèles ; ▶ les grands côtés le sont par construction.
Décrire les formes obtenues et comparer leurs aires.	En glissant les triangles l'un sur l'autre, les élèves constatent qu'ils sont superposables, donc de même aire. Quant aux parallélogrammes, ils ont la même base (qui est aussi la petite base du trapèze) et la même hauteur (qui est aussi celle du trapèze). Certains élèves peuvent déjà en déduire l'égalité des aires des parallélogrammes. On peut également tenir le raisonnement suivant : comme les deux puzzles donnent le même trapèze et que les deux triangles ont la même aire, les deux parallélogrammes ont nécessairement la même aire.

Consignes	Commentaires
Lire la fiche 2. Ouvrir le fichier `deuxparallelos.fag`	
Nommer toutes les formes visibles dans cette figure et noter ces observations sur la fiche (« Les formes que je vois ... »).	L'enseignant laisse suffisamment de temps aux élèves pour examiner la figure et encourage ceux qui s'arrêtent à quatre ou cinq formes à poursuivre leur recherche. Elle débouche finalement sur le recensement de neuf formes : deux parallélogrammes (*ABCD* et *ABEF*), quatre triangles (*ABI*, *CIF*, *AFD* et *BEC*) et trois trapèzes (*AICD*, *BEFI* et *ABED*). Parmi les comportements observés, signalons : ► l'oubli des triangles *AFD* et *BEC* (souvent), du trapèze *ABED* ou des parallélogrammes de départ ; ► les quadrilatères *AICD* et *BEFI* ne sont pas spontanément reconnus comme trapèzes ; ► il se trouve souvent un élève pour noter le pentagone non convexe *AIBED*.
Comparer les aires des parallélogrammes *ABCD* et *ABEF*.	L'enseignant peut considérer la présente activité comme un exercice permettant de réinvestir ce qui a été vu dans la séquence « Bases et hauteurs » (voir page 37). Il attend alors de ses élèves qu'ils déduisent l'égalité des aires des parallélogrammes du fait qu'ils ont la même base [*AB*] et la même hauteur (qui est la largeur de la bande dans laquelle ils sont inscrits).
Compléter la deuxième partie de la fiche 2 « Comparaison des aires des parallélogrammes ».	L'activité se termine alors en faisant noter cette conclusion par les élèves.

Prolongement possible : si la classe est sufisamment réceptive, l'activité peut prendre une autre direction une fois que toutes les formes ont été recensées.

- « Pourquoi deux parallélogrammes de même base et de même hauteur ont-ils la même aire ? »
- « Comment ferions-nous pour prouver qu'ils ont la même aire si nous ne connaissions pas la formule *base fois hauteur* ? »

L'enseignant interroge d'abord les élèves sur les relations existant entre les aires des différentes formes. Pour préciser sa demande, il leur donne un exemple et les invite à écrire d'autres égalités du même genre :

$$Aire(BCE) = Aire(ICF) + Aire(BIFE)$$

Il demande ensuite comment obtenir l'aire du « grand trapèze » $ABED$.

Une réponse prévisible est $Aire(ABED) = Aire(ABI) + Aire(CIF) + Aire(AICD) + Aire(BEFI)$.

A partir de là, questions et réponses peuvent s'enchaîner :

- Et avec seulement deux formes ? $Aire(ABED) = Aire(ABCD) + Aire(BEC)$
- Et d'une autre façon ? $Aire(ABED) = Aire(ABEF) + Aire(AFD)$

Constatant que les triangles AFD et BEC sont superposables, l'échange débouche sur un raisonnement résumé par les égalités ci-dessous. Il est noté par les élèves sur la seconde partie de la fiche 2.

Comparaison des aires des parallélogrammes :

Aire(ABED) = Aire(ABCD) + Aire(BEC)

Aire(ABED) = Aire(ABEF) + Aire(AFD)

comme Aire(BEC) = Aire(AFD)

on trouve que Aire(ABCD) = Aire(ABEF)

Pour des élèves plus âgés (troisième année du secondaire par exemple) le raisonnement peut prendre la forme de la démonstration suivante.

D'abord, prouver que les triangles AFD et BEC sont isométriques.

- La forme $ABCD$ est un parallélogramme : les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont donc parallèles et de même longueur.
- La forme $ABEF$ est un parallélogramme : les segments $[AB]$ et $[FE]$ sont donc parallèles et de même longueur.
- Les segments $[AB]$, $[DC]$ et $[FE]$ étant parallèles et de même longueur, ils représentent le même vecteur, la même translation : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$.
- Par cette translation
  - l'image du point A est le point B
  - l'image du point F est le point E
  - l'image du point D est le point C
- L'image du triangle AFD est donc le triangle BEC. Ils sont donc isométriques et de même aire.

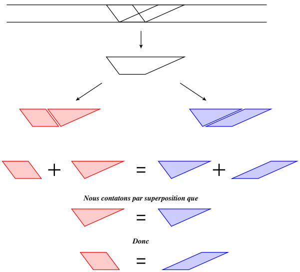
Ensuite, prouver l'égalité des aires des deux parallélogrammes.

- D'une part, $\text{aire}(ABED) = \text{aire}(ABCD) + \text{aire}(BEC)$.
- D'autre part, $\text{aire}(ABED) = \text{aire}(ABEF) + \text{aire}(AFD)$.
- On peut donc écrire l'égalité : $\text{aire}(ABCD) + \text{aire}(BEC) = \text{aire}(ABEF) + \text{aire}(AFD)$.
- Les triangles AFD et BEC étant isométriques, on a : $\text{aire}(AFD) = \text{aire}(BEC)$.
- On en déduit que : $\text{aire}(ABCD) = \text{aire}(ABEF)$.
- Les deux parallélogrammes ont la même aire.

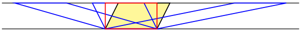
3 Parallélogrammes de même base et de même hauteur : même aire !

Deux parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande ont la même aire.

La preuve en images . . .



Tous les parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande ont la même aire. Parmi ceux-ci se trouve un rectangle de même aire.

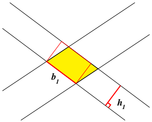


Ouvrir la fiche 4.3 du document fiches12-14.pdf.

4 Aire du parallélogramme (synthèse 3)

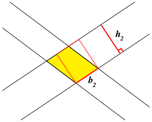
Un parallélogramme peut toujours être inscrit dans deux bandes différentes. Dans chaque bande se trouve un rectangle de même aire que le parallélogramme.

Première possibilité



Aire du parallélogramme = aire du rectangle = $b_1 \cdot h_1$

Deuxième possibilité



Aire du parallélogramme = aire du rectangle = $b_2 \cdot h_2$

$$\text{Aire du parallélogramme} = b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$$

Ouvrir la fiche 4.4 du document fiches12-14.pdf.

Le raisonnement tenu à la page 57 est illustré par la fiche 3.

Il reste maintenant à franchir un seuil supplémentaire : faire découvrir aux élèves que tous les parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande ont la même aire.
Pour le mathématicien, il est clair que le raisonnement précédent est général.
Pour de jeunes enfants, il n'est pas évident qu'il le soit pour des cas de figures autres que ceux qu'ils ont sous les yeux.

C'est le moment pour l'enseignant d'utiliser le dynamisme du logiciel.
En modifiant la figure de départ, il met en évidence les modifications de toutes les formes intervenant dans le raisonnement précédent (trapèze, triangles et parallélogrammes).
Revenant à la fiche 3 et à sa « preuve en images », il montre que ce raisonnement reste valable et que les nouveaux parallélogrammes ont toujours la même aire.

La généralisation est énoncée : « tous les parallélogrammes de même base et inscrits dans une même bande ont la même aire ».

Parmi ces parallélogrammes figure un rectangle. Pour trouver l'aire d'un parallélogramme, il suffit donc de calculer l'aire de ce rectangle.

La fiche 4 montre un parallélogramme – dans « ses » deux bandes – et deux rectangles de même aire.

La conclusion peut maintenant être tirée. Pour trouver l'aire d'un parallélogramme :

1. je mesure n'importe quelle base ;
2. je mesure la hauteur correspondante (largeur de la bande) ;
3. je multiplie ces deux mesures.

Séquence 5 — Assembler deux triangles isométriques

Cette séquence a été inspirée par celles qui sont décrites dans la brochure du CREM « Formes et Mouvements » , chapitre 11, « Assembler des figures ».
L'activité débute par une phase de recherche qui a pour but la découverte des différents quadrilatères réalisables par assemblage de deux triangles isométriques.
Idéalement, cette recherche doit être menée simultanément avec le logiciel et avec des formes en carton.
A l'issue de ce travail, les élèves doivent notamment pouvoir expliquer une formule d'aire pour le triangle, celui-ci étant vu commme un demi parallélogramme.

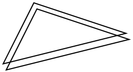
* * *

1. Public visé : à partir de la première secondaire.
2. Prérequis : bases et hauteurs ; formule d'aire du parallélogramme.
3. Rappels à effectuer par l'enseignant : comment utiliser les fonctionnalités `Glisser`, `Tourner`, `Retourner`, `Dupliquer` et `Fusionner`.
4. Objectifs mathématiques :
   - découvrir que l'assemblage de deux triangles isométriques peut donner des parallélogrammes, des cerfs-volants et des pointes de flèches ;
   - découvrir trois façons différentes de réaliser un parallélogramme à partir de deux triangles isométriques ;
   - découvrir que si l'on découpe un parallélogramme suivant une de ses diagonales, on obtient deux triangles superposables par déplacement ;
   - savoir que tout triangle peut être vu comme un demi parallélogramme et en déduire la construction d'une formule d'aire ;
   - savoir calculer l'aire d'un triangle de trois façons (c'est-à-dire mesurer n'importe quelle base, multiplier par la hauteur et diviser le résultat par 2 : $\frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{b_3 \cdot h_3}{2}$).
5. Objectifs instrumentaux : utiliser les mouvements ainsi que les fonctionnalités `Dupliquer` et `Fusionner`.
6. Temps estimé : deux périodes de cours.

1 Assembler deux triangles isométriques

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un triangle quelconque et duplique-le.
2. Cherche différentes manières d'assembler ces deux triangles pour obtenir un quadrilatère. Explore toutes les possibilités (tu peux retourner un des deux triangles).
3. Quelles sortes de quadrilatères obtiens-tu ?



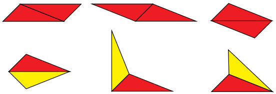
Ouvrir la fiche 5.1 du document fiches12-14.pdf.

2 Assembler deux triangles isométriques (2)

1. A l'aide des triangles en cartons que tu as reçus, réalise les différents quadrilatères possibles.
2. Colle tes assemblages ci-dessous.

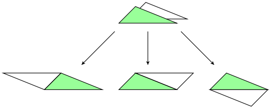
Ouvrir la fiche 5.2 du document fiches12-14.pdf.

Consignes	Commentaires
Lire les fiches 1 et 2.	Bien que cette activité puisse être menée avec le logiciel seul, l'idéal est que chaque élève reçoive aussi une enveloppe contenant des formes isométriques en carton (au moins douze triangles quelconques). Les formes seront unies sur une face et pointées sur l'autre de façon à pouvoir distinguer si elles sont retournées ou pas.
Créer un triangle quelconque à l'écran et le dupliquer.	L'enseignant demande de commencer le travail avec *Apprenti Géomètre*. Il insiste sur le caractère quelconque de la forme initiale.
En utilisant `Tourner`, `Retourner` et `Glisser`, réaliser un quadrilatère avec les deux triangles.	Si l'élève, tout en ayant choisi le triangle quelconque dans les formes libres, a créé un triangle quasiment isocèle ou équilatéral, on peut prévoir qu'il aura des difficultés : ► à trouver suivant quels côtés ajuster les deux triangles ; ► à percevoir le rôle de la fonctionnalité `Retourner`. On peut alors suggérer de modifier la forme du premier triangle en « tirant » sur ses sommets. Les formes dupliquées se modifient simultanément et la recherche des quadrilatères peut se poursuivre (notons toutefois qu'assembler deux triangles « particuliers » est un prolongement possible et intéressant de la présente activité). L'enseignant rappelle que les formes peuvent aussi être retournées (cette fonctionnalité est utilisée moins spontanément par les débutants). Par ailleurs, certains élèves éprouvent des difficultés à tourner une forme de manière adéquate. L'enseignant leur explique qu'il faut d'abord décider quels seront les côtés juxtaposés et ensuite, tourner jusqu'à ce qu'ils soient parallèles.
Glisser la réalisation dans un coin de l'écran.	Habituer les élèves à organiser l'écran, à éviter que des formes se chevauchent inutilement.

Consignes	Commentaires
Chercher d'autres quadrilatères en dupliquant autant de fois que nécessaire le premier triangle.	Lorsque les élèves marquent le pas dans leur recherche avec le logiciel, on leur propose d'organiser leur travail de la façon suivante : ▶ choisir un côté suivant lequel ajuster les formes ; d'abord, n'en retourner aucune, ensuite en retourner une seule, enfin, retourner les deux ; ▶ choisir un autre côté et recommencer la procédure.
Juxtaposer deux triangles en carton afin de réaliser un quadrilatère. Chercher tous les quadrilatères qu'il est possible de réaliser de cette façon.	Le recours aux formes en carton peut s'avérer utile car les gestes nécessaires à leur assemblage se font de façon plus spontanée qu'avec le logiciel. Les assemblages en carton seront reproduits à l'écran pour inciter l'élève à analyser et à décomposer le mouvement à effectuer, et ainsi commmencer à s'approprier les concepts géométriques sous-jacents.
Coller les réalisations sur la feuille de papier pointé quadrillé.	Sur la fiche 2, les élèves collent trois parallélogrammes, un cerf-volant et deux pointes de flèches. Les triangles jaunes sont ceux qui ont été retournés. 
Compléter la fiche de travail (1) avec les noms des quadrilatères réalisés.	« Avec deux triangles, il est possible de réaliser des parallélogrammes, des cerfs-volants et des pointes de flèches. »

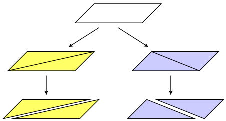
3 Assembler deux triangles isométriques (synthèse 1)

Si je duplique un triangle, sans retourner, j'ai trois façons de réaliser un parallélogramme.



- Le côté commun aux deux triangles est une diagonale du parallélogramme réalisé.
- L'aire du parallélogramme est égale au double de celle du triangle.
- L'aire du triangle est égale à la moitié de celle du parallélogramme.

Si je découpe un parallélogramme le long d'une de ses diagonales, j'obtiens deux triangles isométriques.

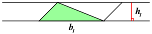


Ouvrir la fiche 5.3 du document fiches12-14.pdf.

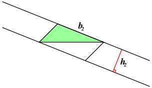
4 Assembler deux triangles isométriques (synthèse 2)

Pour trouver l'aire d'un triangle :

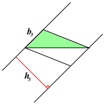
1. je mesure n'importe quelle base ;
2. je mesure la hauteur correspondante ;
3. je multiplie ces deux mesures ;
4. je divise le résultat par 2.



Aire du triangle $= \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$



Aire du triangle $= \frac{b_2 \cdot h_2}{2}$

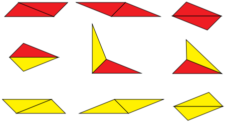


Aire du triangle $= \frac{b_3 \cdot h_3}{2}$

Ouvrir la fiche 5.4 du document fiches12-14.pdf.

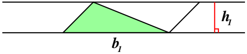
Synthèse et conclusions

A partir de triangles semblables aux triangles en carton, l'enseignant montre sur grand écran tous les assemblages possibles. Il précise que les parallélogrammes jaunes sont superposables par retournement aux parallélogrammes rouges.



Après cette activité, tout triangle peut être vu comme un demi parallélogramme. Inversement, tout parallélogramme découpé suivant une de ses diagonales fournit deux triangles isométriques (fiche 3).

A ce stade, la formule d'aire du parallélogramme étant supposée acquise, celles du triangle peut être construite avec les élèves. Dans une bande, l'enseignant montre un triangle et un parallélogramme obtenu par duplication du triangle.



Il demande aux élèves de comparer leurs dimensions. Ceux-ci observent que les deux formes ont même base b_1 et même hauteur h_1 (la hauteur étant la largeur de la bande) ; ils ajoutent que l'aire du parallélogramme est double de celle du triangle. L'aire du parallélogramme étant donnée par $b_1 \times h_1$, celle du triangle est donnée par $\frac{b_1 \times h_1}{2}$.

L'enseignant montre le même triangle dans deux autres bandes (voir fiche 4) afin que les élèves comprennent que l'aire du triangle s'obtient aussi par les formules $\frac{b_2 \times h_2}{2}$ et $\frac{b_3 \times h_3}{2}$.

La conclusion est formulée : pour calculer l'aire d'un triangle, on multiplie la longueur d'une de ses bases (d'un de ses côtés) par la hauteur correspondante, et l'on divise ce résultat par 2. Les élèves reçoivent les fiches de synthèse 3 et 4.

Cette séquence a d'abord été conçue pour préparer la suivante où il s'agira de découper un triangle pour réaliser un parallélogramme de même aire. Un tel découpage étant difficile à trouver par de jeunes enfants, l'activité présentée ici peut préparer le terrain.
Son intérêt réside encore dans l'exercice d'observation qu'elle propose et dans son prolongement possible : le théorème des milieux dans un triangle.

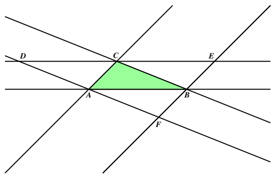
* * *

1. Public visé : à partir de la première secondaire pour l'activité d'observation et le raisonnement intuitif ; à partir de la troisième secondaire pour la démonstration.
2. Prérequis :
   - deux bandes qui se coupent engendrent un parallélogramme (séquence 1) ;
   - si l'on découpe un parallélogramme suivant une diagonale, on obtient deux triangles isométriques (séquence 5).
3. Rappels à effectuer par l'enseignant : voir prérequis.
4. Objectifs mathématiques :
   - enrichir la vision géométrique de l'élève par un exercice d'observation ;
   - comprendre que les segments joignant les milieux des côtés d'un triangle déterminent quatre triangles superposables ;
   - prouver le théorème des milieux dans un triangle.
5. Objectifs instrumentaux : utiliser la fonctionnalité `Modifier`.
6. Temps estimé : deux périodes de cours.

1 Un triangle dans trois bandes (1)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `tri3bandes.fag`.

1. Observe attentivement cette figure. Quelles sont les formes que tu vois ?
2. Compare l'aire de chacune de ces formes avec l'aire du triangle ABC.
3. Note tes réponses sur la fiche suivante.
4. Modifie le triangle ABC. Que constates-tu du point des formes ? Du point de vue des aires ?



Ouvrir la fiche 6.1 du document fiches12-14.pdf.

2 Un triangle dans trois bandes (2)

Ecris tes réponses dans le tableau suivant.

La forme que je vois …	Son aire par rapport à celle du triangle ABC …

Ouvrir la fiche 6.2 du document fiches12-14.pdf.

Consignes	Commentaires
Lire les fiches 1 et 2. Ouvrir le fichier `tri3bandes.eps`.	
Nommer toutes les formes visibles dans cette figure et les noter sur la fiche 2 (première colonne).	L'enseignant laisse le temps aux élèves d'examiner la figure et encourage ceux qui s'arrêtent à quatre ou cinq formes à poursuivre leur recherche.
Comparer les aires de ces formes à celle du triangle ABC. Noter les résultats sur la fiche 2 (deuxième colonne).	Simultanément à la découverte d'une forme, l'élève compare son aire à celle du triangle ABC. Le travail débouche finalement sur le tableau suivant :

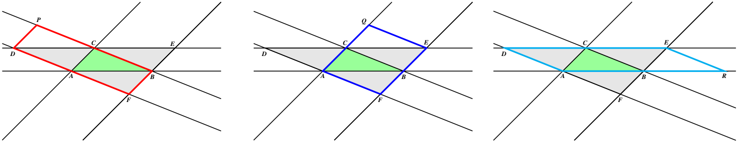
La forme que je vois . . .	Son aire par rapport à celle du triangle ABC . . .
triangle ACD	égale
triangle AFB	égale
triangle BEC	égale
triangle DFE	quadruple
parallélogramme $ABCD$	double
parallélogramme $AFBC$	double
parallélogramme $ABEC$	double
trapèze $ABED$	triple
trapèze $BCDF$	triple
trapèze $AFEC$	triple

L'égalité des aires de deux « petits triangles » peut être justifiée de la façon suivante : les bandes qui se coupent engendrent des parallélogrammes ; dans $ABCD$ par exemple, le segment $[AC]$ est une diagonale et partage le parallélogramme en deux triangles isométriques ABC et ADC (voir séquence 5, page 66) dont les aires sont bien sûr égales.
On raisonne de la même façon pour les triangles AFB et BEC.

Déroulement de la leçon

Lors de la mise en commun, l'enseignant montre la figure sur grand écran. Il utilise le dynamisme du logiciel afin de modifier le triangle. Les élèves observent les modifications simultanées des bandes et de toutes les autres formes. L'enseignant leur explique alors que les rapports d'aires restent les mêmes car le raisonnement précédent tient toujours.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de trouver un parallélogramme de même aire que le triangle DFE. La solution la plus naturelle est sans doute de réaliser un parallélogramme formé de quatre triangles isométriques au triangle ABC. Voici trois possibilités.



Chaque parallélogramme a une base commune avec le triangle DFE et une hauteur égale à la moitié de celle du triangle. Un travail approfondi sur cette figure pourrait ainsi amener l'élève à découvrir le découpage permettant de résoudre le problème de la fiche « Découper un triangle »(séquence 6).

Avec des élèves plus âgés (troisième secondaire), il est intéressant de justifier que les points A, B et C sont les milieux respectifs des segments $[DF]$, $[FE]$ et $[DE]$. En effet, $AFBC$ étant un parallélogramme (deux bandes qui se coupent) on a $|AF| = |BC|$.

Comme $ABCD$ est aussi un parallélogramme, on a $|AD| = |BC|$. On en déduit que $|AF| = |AD|$ et que A est donc le milieu de $[DF]$. Un raisonnement analogue peut être tenu pour les points B et C.

Cette figure constitue ainsi une approche intéressante du « petit théorème de Thales » : le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est la moitié de celle du troisième côté. Par exemple, $[CB]$ est paralléle à $[AF]$ (parallélogramme $AFBC$) et donc à $[DF]$.

Comme A est le milieu de $[DF]$, on a $|DF| = 2 \cdot |AF| = 2 \cdot |CB|$ et donc $|CB| = \frac{|DF|}{2}$.

Le découpage d'un triangle suivant un segment joignant les milieux de deux côtés permet de réaliser des parallélogrammes de même aire que le triangle.
Si la séquence 6 n'a pas été réalisée, l'idée du découpage par les milieux pourra être suggérée par l'enseignant.
Les parallélogrammes ainsi réalisés pouvant avoir une base égale à celle du triangle ou à la moitié de celle-ci, l'élève peut construire deux formules d'aire différentes pour le triangle.
Cette activité fournit ainsi un support géométrique à l'égalité algébrique $a \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot b$.

* * *

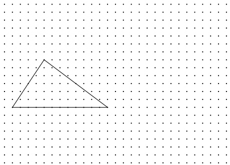
1. **Public visé : à partir de la première secondaire.**
2. **Prérequis : bases et hauteurs ; formule d'aire du parallélogramme.**
3. **Rappels à effectuer par l'enseignant : comment utiliser les fonctionnalités** `Glisser`, `Tourner`, `Diviser`, `Découper` **et** `Fusionner`.
4. **Objectifs mathématiques :**
   - savoir découper un triangle pour réaliser un parallélogramme de même aire avec les deux formes obtenues ;
   - montrer que les parallélogrammes construits de cette façon ont la même base que le triangle de départ et une hauteur égale à la moitié de celle du triangle (ou la même hauteur que le triangle de départ et une base égale à la moitié de celle du triangle) ;
   - savoir calculer l'aire d'un triangle de différentes façons (c'est-à-dire mesurer n'importe quelle base et multiplier par la demi-hauteur correspondante, ou multiplier n'importe quelle demi-base par la hauteur correspondante : $b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b}{2} \cdot h$).
5. **Objectifs instrumentaux : utiliser les fonctionnalités** `Glisser`, `Tourner`, `Diviser`, `Découper` **et** `Fusionner`.
6. **Temps estimé : deux périodes de cours.**

1 Découper un triangle (1)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `decoupertriangle.fag`. Tu observes un triangle quelconque.

Découpe ce triangle (une seule découpe !) pour obtenir deux formes qui permettent de réaliser un parallélogramme de même aire que le triangle. Cherche différentes possibilités.

Explique ci-dessous comment tu procèdes. Tu peux tracer des traits et colorier la figure.



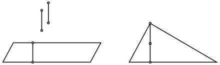
Ouvrir la fiche 7.1 du document fiches12-14.pdf.

2 Découper un triangle (2)

1. A l'aide des triangles en cartons que tu as reçus, réalise les différents parallélogrammes possibles.
2. Colle tes assemblages ci-dessous.

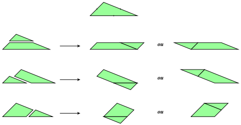
Ouvrir la fiche 7.2 du document fiches12-14.pdf.

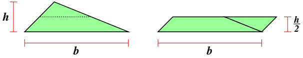
Déroulement de la leçon

Consignes pour les élèves	Commentaires
Lire les fiches 1 et 2.	Bien que cette activité puisse être menée avec le logiciel seul, l'idéal est que les élèves reçoivent aussi des triangles en carton à découper.
Créer un triangle quelconque et le découper en deux formes. Avec celles-ci, réaliser un parallélogramme.	L'enseignant peut laisser un temps de recherche libre aux élèves ou être plus directif et donner comme consigne de découper suivant un segment joignant les milieux de deux côtés. A l'aide de l'opération `Diviser`, l'élève construit les milieux des côtés du triangle. Il effectue une découpe et utilise `Tourner`, `Glisser` et `Fusionner` pour réaliser un parallélogramme. 
Comparer les dimensions du parallélogramme à celles du triangle.	Pour comparer les dimensions, le parallélogramme est glissé sur le triangle. Les bases sont bien sûr de même longueur et il semble que la hauteur du parallélogramme soit égale à la moitié de celle du triangle. Avec des élèves de première année, on peut se contenter d'une vérification à l'aide du logiciel : construire une hauteur du parallélogramme à l'aide de `Segment perpendiculaire` ; ce segment est ensuite dupliqué deux fois et les duplicatas, mis bout à bout, mesurent bien la hauteur du triangle.  Une justification rigoureuse reposerait sur l'activité « Un triangle dans trois bandes »où l'on montre que tout triangle peut être découpé en quatre triangles isométriques (voir page 69).

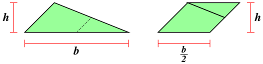
3 Découper un triangle (synthèse)

Si je découpe un triangle en passant par les milieux de deux de ses côtés, j'ai différentes façons de réaliser un parallélogramme.





Le parallélogramme peut avoir la même base que le triangle et sa hauteur égale à la moitié de celle du triangle. Son aire est donnée par $b \cdot \frac{h}{2}$.



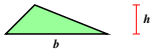
Le parallélogramme peut avoir sa base égale à la moitié de celle du triangle et la même hauteur que le triangle. Son aire est donnée par $\frac{b}{2} \cdot h$.

$$\text{Aire du triangle} = b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b}{2} \cdot h$$

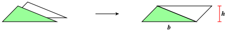
Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

4 Un peu d'algèbre par le triangle

Je pars d'un triangle de base b et de hauteur h . Je peux réaliser …

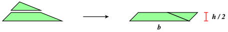


1. …un parallélogramme d'aire double ;



$$\textit{Aire du triangle} = \frac{\textit{Aire du parallelogramme}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

2. …un parallélogramme de même aire ;



$$\textit{Aire du triangle} = \textit{Aire du parallelogramme} = b \cdot \frac{h}{2}$$

3. …un autre parallélogramme de même aire.

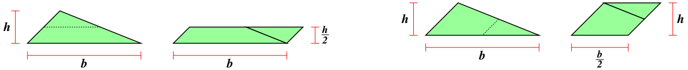
$$\textit{Aire du triangle} = \textit{Aire du parallelogramme} = \frac{b}{2} \cdot h$$

$$\frac{b \cdot h}{2} = b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b}{2} \cdot h$$

Ouvrir la fiche 7.4 du document fiches12-14.pdf.

Synthèse et conclusions

Sur grand écran l'enseignant montre les différentes façons de réaliser un parallélogramme à partir d'un triangle (six possibilités ; voir premier cadre de la fiche 3). Il montre ensuite les figures du bas de la fiche 3.



La première découpe donne un parallélogramme de même base que le triangle et de hauteur égale à la moitié de celle du triangle.L'aire du parallélogramme vaut donc $b \cdot \frac{h}{2}$.

La seconde découpe donne un parallélogramme de base égale à la moitié de celle du triangle et de même hauteur que le triangle. L'aire du paralléogramme vaut donc $\frac{b}{2} \cdot h$.

Ces deux résultats permettent d'écrire : $\textit{aire du triangle} = b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b}{2} \cdot h$.

Les résultats des activités d'assemblages et de découpages des triangles sont regroupés sur la fiche 4. D'un point de vue algébrique, ils permettent d'écrire la double égalité suivante :

$$\frac{b \cdot h}{2} = b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b}{2} \cdot h$$

Cette double égalité est illustrée par des exemples numériques. Par exemple, avec $b = 10$ et $h = 4$:

$$\frac{10 \cdot 4}{2} = 10 \cdot \frac{4}{2} = \frac{10}{2} \cdot 4$$
$$\frac{40}{2} = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 4$$

L'enseignant précise que les lettres n'ont pas d'importance et que la double égalité pourrait très bien s'écrire :

$$\frac{x \cdot y}{2} = x \cdot \frac{y}{2} = \frac{x}{2} \cdot y$$

Séquence 8 — Assembler des trapèzes isométriques

Cette séquence est le pendant pour les trapèzes de la séquence 5 « Assembler des triangles isométriques ».
La phase initiale de recherche a pour but la découverte des différents quadrilatères réalisables par assemblage de deux trapèzes isométriques. Idéalement, elle doit être menée tant avec le logiciel qu'avec des formes en carton.
A l'issue de ce travail, les élèves doivent notamment pouvoir expliquer une formule d'aire pour le trapèze, celui-ci étant vu comme un demi parallélogramme.

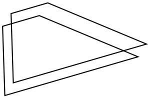
* * *

1. **Public visé : à partir de la première secondaire.**
2. **Prérequis : bases et hauteurs ; formule d'aire du parallélogramme.**
3. **Rappels à effectuer par l'enseignant : comment utiliser les fonctionnalités** `Glisser`, `Tourner`, `Retourner`, `Dupliquer` **et** `Fusionner`.
4. **Objectifs mathématiques :**
   - **découvrir que l'assemblage de deux trapèzes isométriques peut donner des parallélogrammes, des rectangles et des trapèzes isocèles ;**
   - **découvrir deux façons différentes de réaliser un parallélogramme à partir de deux trapèzes isométriques ;**
   - **découvrir que si l'on découpe un parallélogramme suivant un segment passant par son centre, on obtient deux trapèzes superposables par déplacement ;**
   - **savoir que tout trapèze peut être vu comme un demi parallélogramme et en déduire la construction d'une formule d'aire ;**
   - **savoir calculer l'aire d'un trapèze à l'aide de la formule** $\frac{(b+B)\cdot h}{2}$.
5. **Objectifs instrumentaux : utiliser les mouvements ainsi que les fonctionnalités** `Dupliquer` **et** `Fusionner`.
6. **Temps estimé : deux périodes de cours.**

1 Assembler deux trapèzes isométriques (1)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un trapèze quelconque et duplique-le.
2. Cherche différentes manières d'assembler ces deux trapèzes pour obtenir un quadrilatère. Explore toutes les possibilités. Tu peux utiliser tous les outils du menu *Mouvements*.
3. Quelles sortes de quadrilatères obtiens-tu ?



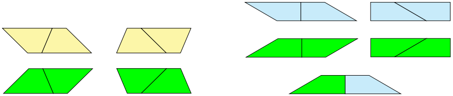
Ouvrir la fiche 8.1 du document fiches12-14.pdf.

2 Assembler deux trapèzes isométriques (2)

1. A l'aide des trapèzes en cartons que tu as reçus, réalise les différents parallélogrammes possibles.
2. Colle tes assemblages ci-dessous.

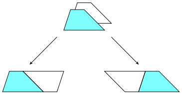
Ouvrir la fiche 8.2 du document fiches12-14.pdf.

Consignes	Commentaires
Lire les fiches 1 et 2.	Bien que cette activité puisse être menée avec le logiciel seul, l'idéal est que chaque élève reçoive aussi une enveloppe contenant des formes isométriques en carton (au moins quatre trapèzes quelconques et quatre trapèzes rectangles). Les formes seront unies sur une face et pointées sur l'autre de façon à pouvoir distinguer si elles sont retournées ou pas.
Créer un trapèze quelconque à l'écran et le dupliquer.	L'enseignant demande de commencer le travail avec *Apprenti Géomètre*. Il insiste sur le caractère quelconque de la forme initiale.
En utilisant `Tourner`, `Retourner` et `Glisser`, réaliser un quadrilatère avec les deux trapèzes.	Si l'élève, tout en ayant choisi le trapèze quelconque dans les formes libres, a créé un trapèze proche d'un rectangle, on peut prévoir qu'il aura des difficultés : ▶ à trouver suivant quels côtés ajuster les deux trapèzes ; ▶ à percevoir le rôle de la fonctionnalité `Retourner`. On peut alors suggérer de modifier la forme du premier trapèze en « tirant » sur ses sommets. Les formes dupliquées se modifient simultanément et la recherche des quadrilatères peut se poursuivre. L'enseignant rappelle que les formes peuvent aussi être retournées (cette fonctionnalité est utilisée moins spontanément par les débutants). Par ailleurs, certains élèves éprouvent des difficultés à tourner une forme de manière adéquate. L'enseignant leur explique qu'il faut d'abord décider quels seront les côtés juxtaposés et ensuite, tourner jusqu'à ce qu'ils soient parallèles.
Glisser la réalisation dans un coin de l'écran.	Habituer les élèves à organiser l'écran, à éviter que des formes se chevauchent inutilement.

Consignes	Commentaires
Chercher d'autres quadrilatères en dupliquant autant de fois que nécessaire le premier trapèze.	Lorsque les élèves marquent le pas dans leur recherche avec le logiciel, on leur propose d'organiser leur travail de la façon suivante : ▸ choisir un côté suivant lequel ajuster les formes ; d'abord, n'en retourner aucune, ensuite en retourner une seule, enfin, retourner les deux ; ▸ choisir un autre côté et recommencer la procédure.
Juxtaposer deux trapèzes en carton afin de réaliser un quadrilatère. Chercher tous les quadrilatères qu'il est possible de réaliser de cette façon. Coller les réalisations sur la feuille de papier pointé quadrillé.	L'intérêt de la manipulation des formes en carton a déjà été souligné lors de la séquence 5 (page 64). Sur la fiche 2, les élèves collent les formes réalisées ▸ avec les trapèzes quelconques (deux parallélogrammes) ; ▸ avec les trapèzes rectangles (un parallélogramme, un rectangle et un trapèze isocèle). Les trapèzes verts sont ceux qui ont été retournés. 
Compléter la fiche de travail (1) avec les noms des quadrilatères réalisés.	« Avec deux trapèzes quelconques, il est possible de réaliser des parallélogrammes ; avec deux trapèzes rectangles, il est possible de réaliser des parallélogrammes, des rectangles et des trapèzes isocèles. »

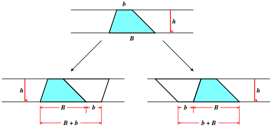
3 Assembler deux trapèzes isométriques (synthèse 1)

Si je duplique un trapèze, sans retourner, j'ai deux façons de réaliser un parallélogramme.



- L'aire du parallélogramme est égale au double de celle du trapèze.
- L'aire du trapèze est égale à la moitié de celle du parallélogramme.

- A partir des côtés parallèles du trapèze, je peux construire une bande.
- J'appelle b la longueur de la *petite base* et j'appelle B la longueur de la *grande base* du trapèze.
- J'appelle h la *hauteur* du trapèze (c'est-à-dire la largeur de la bande).
- Chacun des parallélogrammes précédents a comme base $b + B$ et comme hauteur h.

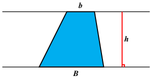


Ouvrir la fiche 8.3 du document fiches12-14.pdf.

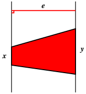
4 Assembler deux trapèzes isométriques (synthèse 2)

Pour trouver l'aire d'un trapèze :

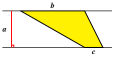
1. je mesure sa grande base, je mesure sa petite base et j'additionne ces deux mesures ;
2. je mesure sa hauteur ;
3. je multiplie la hauteur par la somme des bases ;
4. je divise le résultat par 2.



Aire du trapèze $= \frac{(B+b)\cdot h}{2}$



Aire du trapèze $= \frac{(x+y)\cdot e}{2}$



Aire du trapèze $= \frac{(b+c)\cdot a}{2}$

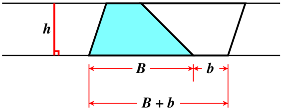
Ouvrir la fiche 8.4 du document fiches12-14.pdf.

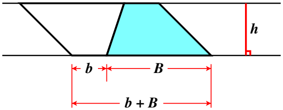
A partir de formes semblables aux trapèzes en carton, l'enseignant montre sur grand écran tous les assemblages possibles (voir page 79). Il précise que les parallélogrammes verts sont superposables par retournement aux parallélogrammes jaunes (ou bleus si on travaille avec les trapèzes rectangles).

Après cette activité, tout trapèze peut être vu comme un demi parallélogramme. Inversement, tout parallélogramme peut être découpé en deux trapèzes isométriques (suivant un segment passant par son centre, c'est-à-dire l'intersection de ses diagonales).

A ce stade, la formule d'aire du parallélogramme étant supposée acquise, celles du trapèze peut être construite avec les élèves.

Dans une bande, l'enseignant montre un trapèze et les parallélogrammes obtenus par duplication du trapèze.





Il demande aux élèves de comparer leurs dimensions. Ceux-ci observent que chaque parallélogramme a pour base la somme des bases $b + B$ du trapèze et la même hauteur h que celui-ci ; ils ajoutent que l'aire de chaque parallélogramme est double de celle du trapèze.

L'aire de chacun de ces parallélogrammes étant donnée par $(b + B) \cdot h$, celle du trapèze est donnée par la formule $\frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{h}}{2}$.

La conclusion est formulée : pour calculer l'aire d'un trapèze, on multiplie la somme de ses bases par la hauteur, et on divise ce résultat par 2.

Les élèves reçoivent les fiches de synthèse 3 et 4.

Le découpage d'un trapèze, suivant le segment joignant les milieux des deux côtés non parallèles, permet de réaliser des parallélogrammes de même aire que le trapèze.
Si les séquences relatives au triangle (5 et 6) ont été réalisées, peut-être les élèves trouveront-ils eux-mêmes le découpage adéquat. Sinon, il sera suggéré par l'enseignant.
Les parallélogrammes ainsi réalisés permettent de construire une formule d'aire pour le trapèze.

En prolongement, nous proposons un autre découpage du trapèze, en trois parties cette fois.
Mis en rapport avec le premier découpage, il fournit un support géométrique à l'égalité algébrique

$$(b + B) \cdot \frac{h}{2} = (\frac{b}{2} + \frac{B}{2}) \cdot h$$

* * *

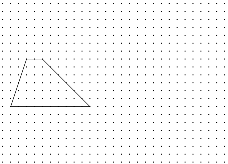
1. **Public visé : à partir de la première secondaire.**
2. **Prérequis : bases et hauteurs ; formule d'aire du parallélogramme.**
3. **Rappels à effectuer par l'enseignant : comment utiliser les fonctionnalités** `Glisser`, `Tourner`, `Diviser`, `Découper` **et** `Fusionner`.
4. **Objectifs mathématiques :**
   - **savoir découper un trapèze pour réaliser un parallélogramme de même aire avec les deux formes obtenues ;**
   - **montrer que les parallélogrammes construits de cette façon ont une base égale à la somme des bases du trapèze et une hauteur égale à la moitié de celle du trapèze ;**
   - **savoir calculer l'aire d'un trapèze en utilisant la formule** $(b + B) \cdot \frac{h}{2}$.
5. **Objectifs instrumentaux : utiliser les fonctionnalités** `Glisser`, `Tourner`, `Diviser`, `Découper` **et** `Fusionner`.
6. **Temps estimé : deux périodes de cours.**

1 Découper un trapèze (1)

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier `decoupertrapeze`. Tu observes un trapèze quelconque.

Découpe ce trapeze (une seule découpe !) pour obtenir deux formes qui permettent de réaliser un parallélogramme de même aire que le trapèze. Cherche différentes possibilités.

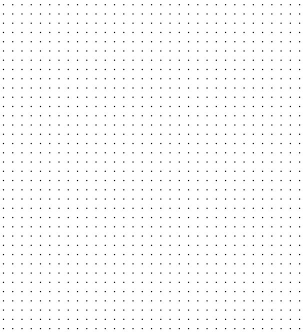
Explique ci-dessous comment tu procèdes. Tu peux tracer des traits et colorier la figure.



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

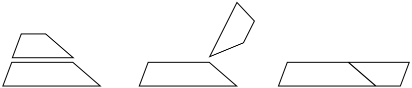
2 Découper un trapèze (2)

1. A l'aide des trapèzes en cartons que tu as reçus, réalise les différents parallélogrammes possibles.
2. Colle tes assemblages ci-dessous.

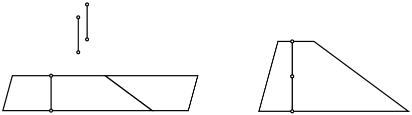


Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Consignes	Commentaires
Lire les fiches 1 et 2.	Bien que cette activité puisse être menée avec le logiciel seul, l'idéal est que les élèves reçoivent aussi des trapèzes en carton.
Créer un trapèze quelconque à l'écran et le découper en deux formes. Avec celles-ci, réaliser un parallélogramme.	L'enseignant peut laisser un temps de recherche libre aux élèves ou être plus directif et donner comme consigne de découper suivant le segment joignant les milieux des deux côtés non parallèles. A l'aide de l'opération `Diviser`, l'élève construit les milieux des deux côtés non parallèles du trapèze. Il effectue une découpe et utilise `Tourner`, `Glisser` et `Fusionner` pour réaliser un parallélogramme.

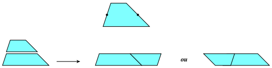


Consignes	Commentaires
Comparer les dimensions du parallélogramme à celles du trapèze.	Pour comparer les dimensions, le parallélogramme est glissé sur le trapèze. Les bases sont bien sûr de même longueur et il semble que la hauteur du parallélogramme soit égale à la moitié de celle du trapèze. Comme lors de la séquence 7, on peut se contenter d'une vérification à l'aide du logiciel (voir page 73).



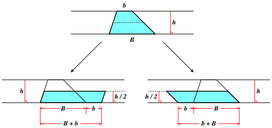
3 Découper un trapèze (synthèse)

Si je découpe un trapèze en passant par les milieux des côtés non parallèles, j'ai deux façons de réaliser un parallélogramme.



Le trapèze et les parallélogrammes ont la même aire.

- A partir des côtés parallèles du trapèze, je peux construire une bande.
- J'appelle b la longueur de la *petite base* et j'appelle B la longueur de la *grande base* du trapèze.
- J'appelle h la *hauteur* du trapèze (c'est-à-dire la largeur de la bande).
- Chacun des parallélogrammes précédents a comme base $b + B$ et comme hauteur $\frac{h}{2}$.



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Sur grand écran l'enseignant montre les différentes façons de réaliser un parallélogramme à partir d'un trapèze (deux possibilités ; voir premier cadre de la fiche 3).

Il montre ensuite les figures du bas de la fiche 3.
Les deux découpes donnent des parallélogrammes dont la base est égale à la somme des bases du trapèze.
Quant à la hauteur, elle est égale à la moitié de celle du triangle.

L'aire du parallélogramme vaut donc $(b + B) \cdot \frac{h}{2}$ et celle du trapèze aussi.

Ce résultat peut être mis en rapport avec celui obtenu lors de la séquence 8, ce qui permet d'écrire l'égalité :

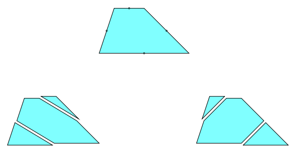
$$\frac{(b+B)\cdot h}{2} = (b + B) \cdot \frac{h}{2}$$

Elle sera utilement illlustrée par des exemples numériques.

4 Découper un trapèze en trois parties

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*. Ouvre le fichier *decoupertrapeze*. Tu observes un trapèze quelconque.

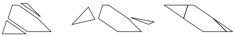
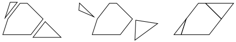
Découpe ce trapèze en trois parties comme dans les figures ci-dessous : en passant par le milieu d'une base et par le milieu d'un des côtés non parallèles. Avec les trois formes obtenues, réalise un parallélogramme. Compare ses dimensions avec celles du trapèze.



Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Déroulement de la leçon

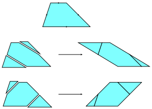
Consignes pour les élèves	Commentaires
Lire la fiche 4.	Cette activité peut être un prolongement de la précédente avec des élèves suffisamment motivés. Elle propose un petit défi sous forme de puzzle et vise à réaliser un bénéfice supplémentaire du point de vue de l'algèbre. Des trapèzes à découper en carton sont également fournis aux élèves.
Créer un trapèze quelconque à l'écran et le découper en trois parties (suivant les segments joignant les milieux de deux côtés consécutifs). Avec les trois formes obtenues, réaliser un parallélogramme.	A l'aide de l'outil `Diviser`, l'élève construit le milieu de chaque côté du trapèze. Il découpe le trapèze suivant les segments joignant deux milieux consécutifs, de manière à obtenir deux triangles et un hexagone. A l'aide de l'outil `Tourner`, il fait subir une rotation de 180° à chacun des triangles afin de les ajuster à l'hexagone et de réaliser un parallélogramme.

	Remarque : tourner une forme de 180° peut aussi se faire en utilisant deux fois consécutivement la fonctionnalité `Retourner`, suivant un axe vertical d'abord et suivant un axe horizontal ensuite (ou le contraire). Cette astuce ne devrait cependant être montrée qu'à des élèves capables de comprendre la composition de deux symétries orthogonales.
Comparer les dimensions du parallélogramme à celles du trapèze.	En glissant le parallélogramme sur le trapèze, l'élève constate qu'il a la même hauteur que le trapèze. La comparaison des bases est plus délicate et devra sans doute être dirigée par l'enseignant.

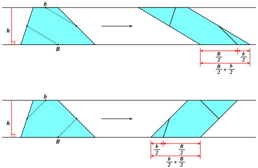
5 Découper un trapèze en trois parties (synthèse)

Si je découpe un trapèze suivant les segments reliant les milieux de deux côtés adjacents, j'ai deux façons de réaliser un parallélogramme.



Le trapèze et les parallélogrammes ont la même aire.

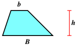
- A partir des côtés parallèles du trapèze, je peux construire une bande.
- J'appelle b la longueur de la *petite base* et j'appelle B la longueur de la *grande base* du trapèze.
- J'appelle h la *hauteur* du trapèze (c'est-à-dire la largeur de la bande).
- Chacun des parallélogrammes précédents a comme base $\frac{b}{2} + \frac{B}{2}$ et comme hauteur h.



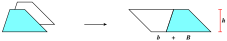
Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

6 Un peu d'algèbre par le trapèze

Je pars d'un trapèze de grande base B , de petite base b et de hauteur h . Je peux réaliser ...

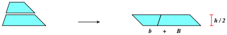


1. ... un parallélogrammed'aire double ;



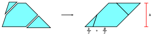
$$\textit{Aire du trapèze} = \frac{\textit{Aire du parallelogramme}}{2} = \frac{(b+B)\cdot h}{2}$$

2. ... un parallélogramme de même aire ;



$$\textit{Aire du trapèze} = \textit{Aire du parallelogramme} = (b+B)\cdot\frac{h}{2}$$

3. ... un autre parallélogramme de même aire.



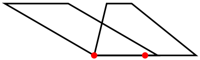
$$\textit{Aire du trapèze} = \textit{Aire du parallelogramme} = (\frac{b}{2}+\frac{B}{2})\cdot h$$

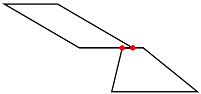
$$\frac{(b+B)\cdot h}{2} = (b+B)\cdot\frac{h}{2} = (\frac{b}{2}+\frac{B}{2})\cdot h$$

Ouvrir la fiche du document fiches12-14.pdf.

Pour faciliter la comparaison des bases, on peut travailler avec des formes pointées. Voici une façon de procéder :

1. observer que la base du parallélogramme est partagée en deux segments inégaux ;
2. glisser le trapèze sur le parallélogramme et observer que la moitié de la grande base du trapèze correspond au premier segment (figure de gauche) ;
3. glisser le trapèze sous le parallélogramme et observer que la moitié de la petite base du trapèze correspond au second segment (figure de droite) ;
4. en conclure que la base du parallélogramme est égale à $\frac{B}{2} + \frac{b}{2}$ (voir fiche 5).





L'aire du parallélogramme est donc égale à $(\frac{B}{2} + \frac{b}{2}) \cdot h$. C'est aussi l'aire du trapèze ! Les résultats des activités d'assemblages et de découpages des trapèzes sont regroupés sur la fiche 6.
D'un point de vue algébrique, ils permettent d'écrire la double égalité suivante :

$$\frac{(b+B)\cdot h}{2} = (b+B)\cdot\frac{h}{2} = (\frac{b}{2} + \frac{B}{2})\cdot h$$

Cette double égalité est illustrée par des exemples numériques. Par exemple, avec $b = 2$, $B = 6$ et $h = 4$:

$$\frac{(2+6)\cdot 4}{2} = (2+6)\cdot\frac{4}{2} = (\frac{2}{2} + \frac{6}{2})\cdot 4$$

$$\frac{32}{2} = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4$$

L'enseignant précise que les lettres n'ont pas d'importance et que la double égalité pourrait très bien s'écrire :

$$\frac{(x+y)\cdot z}{2} = (x+y)\cdot\frac{z}{2} = (\frac{x}{2} + \frac{y}{2})\cdot z$$

Le découpage et la duplication d'un losange sont utilisés dans le but d'obtenir un rectangle de même aire ou un rectangle d'aire double.
A l'issue de cette séquence, les élèves doivent notamment pouvoir exprimer différentes formules pour l'aire du losange en lien avec les rectangles obtenus.
Cette activité fournit ainsi un support géométrique aux égalités algébriques $a \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot b = \frac{a \cdot b}{2}$.

* * *

1. Public visé : à partir de la première secondaire.
2. Prérequis : formule d'aire du rectangle.
3. Rappels à effectuer par l'enseignant : comment utiliser les fonctionnalités `Glisser`, `Tourner`, `Découper`, `Dupliquer` et `Fusionner`.
4. Objectifs mathématiques : associer tout losange à deux rectangles de même aire et à un rectangle d'aire double ; en déduire une construction des formules d'aire du losange : $d \cdot \frac{D}{2} = \frac{d}{2} \cdot D = \frac{d \cdot D}{2}$.
5. Objectifs instrumentaux : utiliser les mouvements ainsi que les fonctionnalités `Découper`, `Dupliquer` et `Fusionner`.
6. Temps estimé : deux périodes de cours.

1 D'un losange à un rectangle de même aire

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un losange et duplique-le.
2. Découpe un des losanges de façon à réaliser un rectangle de même aire.

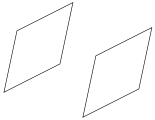
Compare les dimensions du rectangle avec celles du losange.

____

____

____

____



Ouvrir la fiche 10.1 du document fiches12-14.pdf.

2 D'un losange à un rectangle d'aire double

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un losange et duplique-le.
2. Découpe un des losanges en quatre triangles rectangles.
3. Avec ces quatre triangles et l'autre losange, réalise un rectangle d'aire double de celle du losange.

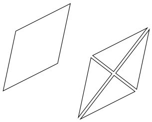
Compare les dimensions du rectangle avec celles du losange.

____

____

____

____

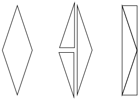


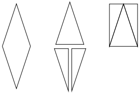
Ouvrir la fiche 10.2 du document fiches12-14.pdf.

Consignes	Commentaires
Lire la fiche 1.	
Créer un losange et le dupliquer.	
Découper un des losanges de façon à réaliser un rectangle de même aire avec les formes obtenues.	Une découpe suivant une diagonale permet d'obtenir deux triangles isocèles isométriques. Un de ces triangles est ensuite découpé en deux triangles rectangles selon une des méthodes suivantes :

- découper par le milieu de la base (préalablement divisée en 2) et le sommet opposé ;
- découper suivant un segment perpendiculaire à la base et passant par le sommet opposé (le triangle étant isocèle, le pied de la hauteur est le milieu de la base).

Les deux triangles rectangles obtenus et le triangle isocèle restant sont glissés de manière appropriée pour obtenir un rectangle.
Cela peut se faire de deux façons, ainsi que le montrent les figures suivantes :

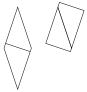




Il est aussi possible, et plus « économique », de procéder de la façon suivante : construire le centre du losange (choisir `Construire le centre` dans le menu `Opérations`) et découper par un sommet, le centre et un sommet voisin du premier ; dupliquer trois fois le triangle rectangle ainsi obtenu ; glisser et tourner ces quatre formes afin de réaliser l'un ou l'autre des rectangles possibles.

Consignes | **Commentaires**

Le losange étant un parallélogramme, on peut aussi penser au découpage classique pour passer d'un parallélogramme à un rectangle : construire un segment perpendiculaire à un côté du losange (passant par un sommet ou non) et découper suivant ce segment.



On observe des enfants découpant suivant une diagonale et n'arrivant pas à poursuivre ; d'autres sont bloqués après avoir découpé par les milieux de deux côtés parallèles.
En effet, la principale difficulté pour beaucoup d'élèves, est de lier l'objectif à atteindre – réaliser un rectangle – à la nécessité de créer des formes possédant un ou deux angles droits.
Un élève capable d'établir ce lien a davantage de chances de découper le losange d'une façon adéquate.

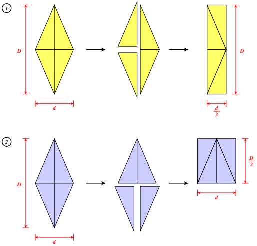
Comparer les dimensions du rectangle avec celles du losange.

Une fois les rectangles réalisés, lorsque l'enseignant demande de comparer leurs dimensions avec celles du losange, son intention est d'amener les élèves à constater que :

- la base et la hauteur du premier rectangle sont respectivement égales à la demi petite diagonale et à la grande diagonale du losange ;
- la base et la hauteur du second rectangle sont respectivement égales à la petite diagonale et à la demi grande diagonale du losange.

3 D'un losange à un rectangle de même aire (synthèse)

Si je découpe un losange suivant ses diagonales, j'ai deux façons de réaliser un rectangle de même aire.



- J'appelle d la longueur de la petite diagonale et j'appelle D la longueur de la grande diagonale du losange.
- Le premier rectangle a pour base $\frac{d}{2}$ et pour hauteur D.
- Le second rectangle a pour base d et pour hauteur $\frac{D}{2}$.

Pour trouver l'aire d'un losange :

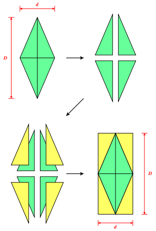
1. Je mesure sa petite diagonale et sa grande diagonale ;
2. je divise une de ces mesures par deux et je multiplie le résultat par l'autre.

Aire du losange $= \frac{d}{2} \cdot D = d \cdot \frac{D}{2}$

Ouvrir la fiche 10.3 du document fiches12-14.pdf.

4 D'un losange à un rectangle d'aire double (synthèse)

Si je découpe un losange suivant ses diagonales, et si je duplique les triangles rectangles obtenus, je peux réaliser un rectangle d'aire double de celle du losange.



- J'appelle d la longueur de la petite diagonale et j'appelle D la longueur de la grande diagonale du losange.
- Le rectangle a pour base d et pour hauteur D.

Pour trouver l'aire d'un losange :

1. Je mesure sa petite diagonale et sa grande diagonale ;
2. je multiplie ces deux mesures ;
3. je divise le résultat par deux.

Aire du losange $= \frac{d \cdot D}{2}$

Aire du losange $= \frac{d}{2} \cdot D = d \cdot \frac{D}{2} = \frac{d \cdot D}{2}$

Ouvrir la fiche 10.4 du document fiches12-14.pdf.

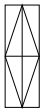
Synthèse et conclusions

Il s'agit maintenant de construire un rectangle d'aire double de celle d'un losange. La solution de ce problème ne demande pas d'idée réellement nouvelle par rapport à l'activité précédente. C'est pourquoi la fiche 2 pourra directement être traitée sur grand écran, avec toute la classe, dans le cadre de la synthèse.

Un élève volontaire se charge des manipulations du logiciel. Il crée un losange et le duplique. Le découpage d'un des losanges suivant ses diagonales fournit quatre triangles rectangles isométriques. L'idée de les disposer autour de l'autre losange émerge rapidement.

Les élèves n'éprouvent généralement aucune difficulté à dire que la base du rectangle ainsi réalisé est égale à la petite diagonale du losange, tandis que sa hauteur est égale à la grande diagonale. Ils en déduisent que l'aire du rectangle est donnée par $d \cdot D$ et que celle du losange est donnée par $\frac{d \cdot D}{2}$.

Avant de distribuer aux élèves les fiches de synthèse 3 et 4, on peut dresser un tableau tel que celui de droite. Il reprend les dimensions et les aires des rectangles réalisés au cours des activités 1 et 2.

	Base	Hauteur	Aire
	d	$\frac{D}{2}$	$d \cdot \frac{D}{2}$
	$\frac{d}{2}$	D	$\frac{d}{2} \cdot D$
	d	D	$d \cdot D$

Regroupant les résultats des fiches 1 et 2, nous pouvons écrire la double égalité suivante qui sera bien sûr illustrée par des exemples numériques :

$$\frac{d}{2} \cdot D = d \cdot \frac{D}{2} = \frac{d \cdot D}{2}$$

Le découpage d'un polygone régulier dans le but de réaliser un quadrilatère de même aire est le défi initial de cette séquence. Il peut donner lieu à bon nombre de solutions originales suivant la créativité des élèves.
Ensuite, le découpage d'un polygone régulier à n côtés en n triangles isocèles isométriques permet de construire la formule $\frac{p \cdot a}{2}$ où p est le périmètre du polygone et a son apothème.
Cette formule est surtout utile pour pouvoir établir celle de l'aire du disque dans la séquence 12.

Cette activité a également des retombées sur le plan algébrique au travers de l'égalité $n \cdot \frac{c \cdot a}{2} = \frac{nc \cdot a}{2}$.

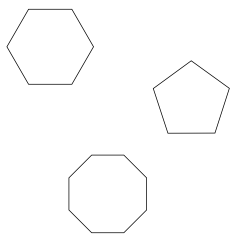
* * *

1. Public visé : à partir de la première secondaire.
2. Prérequis : formules d'aire du parallélogramme, du triangle et du trapèze.
3. Rappels à effectuer par l'enseignant : comment utiliser les fonctionnalités `Glisser`, `Tourner`, `Diviser`, `Découper`, `Fusionner` et `Dupliquer`.
4. Objectifs mathématiques :
   - savoir découper un polygone régulier pour réaliser un parallélogramme ou un trapèze isocèle ;
   - savoir calculer l'aire d'un polygone régulier de côté c au moyen des formules $n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$ ou $\frac{p \cdot a}{2}$;
   - comprendre l'égalité $n \cdot \frac{c \cdot a}{2} = \frac{nc \cdot a}{2}$.
5. Objectifs instrumentaux : utiliser les fonctionnalités `Glisser`, `Tourner`, `Diviser`, `Découper`, `Fusionner` et `Dupliquer`.
6. Temps estimé : deux périodes de cours.

1 D'un polygone régulier vers un quadrilatère

Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

1. Crée un hexagone régulier. Découpe-le afin de réaliser un quadrilatère de même aire.
2. Réalise le même travail à partir d'un pentagone régulier.
3. Réalise le même travail à partir d'un octogone régulier.

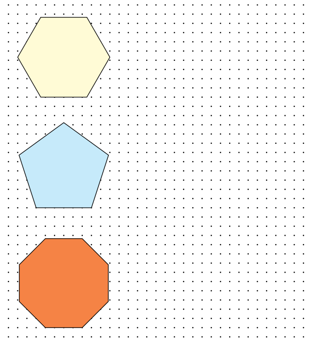


Ouvrir la fiche 11.1 du document fiches12-14.pdf.

2 D'un polygone régulier vers un quadrilatère

Tu as reçu des polygones réguliers en carton : un hexagone, un pentagone et un octogone.

1. Découpe chaque polygone afin de réaliser un quadrilatère de même aire.
2. Colle ci-dessous les quadrilatères que tu as réalisés.



Ouvrir la fiche 11.2 du document fiches12-14.pdf.

Déroulement de la leçon

Consignes

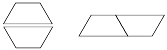
Lire la fiche 1.

Créer un hexagone régulier.

Découper l'hexagone de façon à réaliser un quadrilatère de même aire avec les formes obtenues.

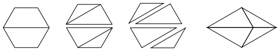
Commentaires

L'enseignant propose de commencer par l'hexagone afin de permettre aux élèves d'enregistrer rapidement un premier succès.
En effet, découper l'hexagone régulier suivant une diagonale – démarche assez naturelle – permet d'obtenir deux trapèzes isométriques qui s'assemblent en un parallélogramme .

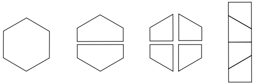


Il faut s'attendre à bon nombre d'idées originales ainsi que l'illustrent les exemples suivants observés dans les classes :

- un hexagone est découpé suivant une de ses grandes diagonales ; chacun des deux trapèzes obtenus est découpé suivant une de ses diagonales également : les quatre triangles, dont un doit être *retourné*, sont enfin assemblés de façon à réaliser un losange ;

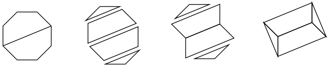


- un hexagone est découpé suivant le segment joignant les milieux de deux côtés parallèles ; les deux pentagones irréguliers obtenus sont découpés suivant une hauteur ; les quatre trapèzes isométriques résultant de cette démarche sont enfin assemblés en un rectangle ;



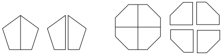
Consignes	Commentaires
Réaliser un travail analogue au départ d'un pentagone régulier et d'un octogone régulier.	► un pentagone est découpé suivant une diagonale ; le triangle est tourné pour être ajusté à un des côtés non paralléles du trapèze et réaliser un trapèze plus grand.

► un octogone est découpé suivant une grande diagonale ; ensuite, chacun des pentagones obtenus est amputé d'un triangle ; les deux trapèzes qui en résultent sont accolés par leur petite base ; les deux triangles viennent enfin combler les lacunes permettant ainsi d'obtenir un rectangle.



L'idéal est bien sûr de justifier la validité de ces constructions.
Ces situations sont de belles occasions d'effectuer des calculs sur les angles des polygones.

Certains élèves en revanche, n'osent pas se lancer dans des découpes multiples et sont bloqués dans leur recherche si leur première tentative n'aboutit pas.
La figure ci-dessous donne deux exemples de telles situations.

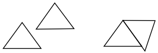


Commentaires

L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire. Il peut suggérer aux élèves d'utiliser la fonctionnalité `Construire le centre` du menu `Opérations` et de découper « comme on découperait un gâteau en parts égales ».
Cette métaphore pâtissière est généralement bien reçue par les enfants et leur permet de reprendre la travail.

Toutes les difficultés ne disparaissent pas pour autant :

- certains élèves découpent systématiquement tous les triangles à partir du polygone de départ, sans penser à dupliquer le premier triangle obtenu (ils ne sont sans doute pas convaincus que tous ces triangles sont isométriques) ;
- pour réaliser le quadrilatère, les fonctionnalités `Tourner` et `Retourner` sont généralement bien utilisées mais certains élèves cherchent à ajuster des côtés qui n'ont pas la même longueur, comme dans la figure ci-dessous.

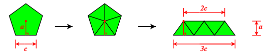


Pour le pentagone régulier, la confusion peut aisément se comprendre : la base de chacun des triangles isocèles est approximativement égale à la longueur d'un autre côté multipliée par $1,1756$. Si de surcroît l'élève a créé de petites formes à l'écran, il a toutes les chances de confondre la base d'un triangle avec les autres côtés.
Le phénomène peut être accentué si cette méthode vient d'être utilisée pour l'hexagone régulier. En effet, le découpage de ce polygone fournit des triangles équilatéraux qui s'ajustent aisément, sans précaution particulière.

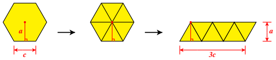
Les élèves reçoivent également la fiche 2 ainsi que des polygones réguliers en carton, à découper. Comme le centre des polygones est marqué par un point pour faciliter les découpages, il vaut mieux distribuer ces formes quand l'activité informatique est bien engagée, afin de ne pas influencer les élèves et de laisser libre cours à leur créativité.

3 Polygones réguliers (synthèse 1)

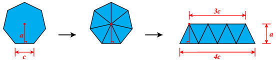
Je peux découper un pentagone régulier en cinq triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un trapèze de petite base $2c$, de grande base $3c$ et de hauteur a.



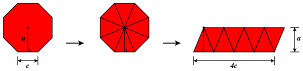
Je peux découper un hexagone régulier en six triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un parallélogramme de base $3c$ et de hauteur a.



Je peux découper un heptagone régulier en sept triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un trapèze de petite base $3c$, de grande base $4c$ et de hauteur a.



Je peux découper un octogone régulier en huit triangles isocèles. Avec ces triangles je peux réaliser un parallélogramme de base $4c$ et de hauteur a.



et ainsi de suite ...

Ouvrir la fiche 11.3 du document fiches12-14.pdf.

4 Polygones réguliers (synthèse 2)

A partir d'un ...	Je peux réaliser un ...	Aire
Pentagone régulier	Trapèze - grande base : $3c$ - petite base : $2c$ - hauteur : a	$5 \cdot \frac{c \cdot a}{2}$ ou $\frac{(3c+2c) \cdot a}{2} = \frac{5c \cdot a}{2}$
Hexagone régulier	Parallélogramme - base : $3c$ - hauteur : a	$6 \cdot \frac{c \cdot a}{2}$ ou $3c \cdot a$
Heptagone régulier	Trapèze - grande base : $4c$ - petite base : $3c$ - hauteur : a	$7 \cdot \frac{c \cdot a}{2}$ ou $\frac{(4c+3c) \cdot a}{2} = \frac{7c \cdot a}{2}$
Octogone régulier	Parallélogramme - base : $4c$ - hauteur : a	$8 \cdot \frac{c \cdot a}{2}$ ou $4c \cdot a$
...		
Hendécagone régulier		
Dodécagone régulier		
...		

Pour trouver l'aire d'un polygone régulier de côté c et d'apothème a :

1. Je calcule l'aire d'un triangle formé par le centre du polygone et deux sommets voisins : $\frac{c \cdot a}{2}$.
2. Je multiplie cette aire par le nombre de côtés du polygone : $n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$.

Nous pouvons aussi écrire : $n \cdot \frac{c \cdot a}{2} = n \cdot c \cdot \frac{a}{2} = p \cdot \frac{a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$
(où $p = n \cdot c$ est le périmètre).

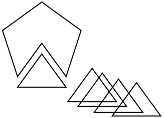
Aire d'un polygone régulier $= \frac{\textit{périmètre} \times \textit{apothème}}{2}$

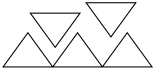
Ouvrir la fiche 11.4 du document fiches12-14.pdf.

Lors de la synthèse, dans la salle de projection, l'enseignant se limite au découpage en triangles isocèles, en expliquant aux élèves qu'il permet d'atteindre le but visé — un quadrilatère — quel que soit le polygone régulier donné.

En partant d'un pentagone régulier, la procédure est reprise en veillant à optimiser le nombre d'opérations à effectuer :

- découper un premier triangle à base horizontale ;
- le dupliquer quatre fois ;
- aligner trois triangles en les « attachant »par un sommet ;
- les deux triangles restants sont retournés suivant un axe horizontal afin de compléter la forme.





L'enseignant poursuit avec le découpage en triangles d'un hexagone régulier. Les élèves comprennent très vite que si le nombre de côtés du polygone initial est impair, il est possible de réaliser un trapèze (isocèle), tandis que si le nombre de côtés est pair, il est possible de réaliser un parallélogramme.

L'enseignant aborde la question du calcul de l'aire d'un polygone régulier. Désignant respectivement par c et par a, le côté et l'apothème[12] du polygone, il envisage deux méthodes :

- calculer l'aire d'un triangle et multiplier le résultat par le nombre n de côtés ;
- calculer l'aire du quadrilatère issu du polygone.

[12] Si ce terme n'est pas connu de tous les élèves, l'apothème est définie comme une hauteur d'un des triangles isocèles (celle qui passe par le centre du polygone).

Pour le pentagone, la première méthode donne $5 \cdot \frac{c \cdot a}{2}$.

La seconde méthode consiste à calculer l'aire du trapèze correspondant après avoir remarqué que sa grande base est $3c$, sa petite base $2c$ et sa hauteur a :

$$\frac{(3c + 2c) \cdot a}{2} = \frac{5ca}{2}$$

Les propriétés de la multiplication sont évoquées pour montrer l'équivalence des deux résultats. L'enseignant souligne que $5c$ n'est autre que le périmètre du pentagone et il écrit :

$$\text{Aire du pentagone régulier} = \frac{p \cdot a}{2}$$

L'enseignant reprend cette démarche avec l'hexagone régulier et le parallélogramme correspondant. Celui-ci a pour base $3c$ et pour hauteur a. Son aire vaut donc : $3c \cdot a = 3ca$.

Ce résultat est équivalent à celui que l'on obtient en multipliant par 6 l'aire d'un triangle : $6 \cdot \frac{c \cdot a}{2}$. Dans ce cas, le périmètre étant égal à $6c$, il écrit :

$$\text{Aire de l'hexagone régulier} = \frac{p \cdot a}{2}$$

Il termine en affirmant que cette formule vaut pour tous les polygones réguliers et qu'elle sera surtout utile pour découvrir celle qui donne l'aire d'un disque.
En effet, la question de l'aire d'un polygone régulier est réglée dès que l'on a compris qu'il suffit de multiplier par n l'aire d'un triangle.

Les élèves reçoivent les fiches de synthèse 3 et 4.

Le premier travail demandé aux élèves est la construction de trois polygones réguliers emboîtés et inscrits dans un cercle. Il s'agit d'amener l'idée que plus le nombre de côtés du polygone est grand, au mieux la surface du disque est couverte.
La seconde phase consiste en un jeu de questions et réponses dirigé par l'enseignant, pour amener la formule d'aire du disque à partir de celle d'un polygone régulier $\frac{p \cdot a}{2}$.

La formule $2\pi r$ *donnant la circonférence est préalablement admise.*

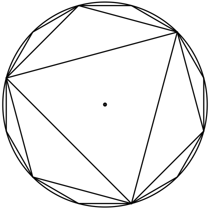
* * *

1. **Public visé : à partir de la première secondaire.**
2. **Prérequis : formule du périmètre d'un disque (circonférence) et formule d'aire d'un polygone régulier.**
3. **Rappels à effectuer par l'enseignant : les formules requises ; le vocabulaire (circonférence, apothème, rayon) ; la fonctionnalité `Diviser` ;**
4. **Objectifs mathématiques :**
   - **acquérir l'intuition que plus le nombre de côtés d'un polygone régulier est grand, plus son apothème est proche du rayon, plus son périmètre est proche de la circonférence, et plus son aire est proche de celle du disque ;**
   - **savoir calculer la circonférence et l'aire d'un disque au moyen des formules respectives $2\pi r$ et πr^2.**
5. **Objectifs instrumentaux : utiliser les fonctionnalités `Diviser` et `Construire le centre` ; créer un cercle et des polygones réguliers.**
6. **Temps estimé : deux périodes de cours.**

1 L'aire du disque (1)

 Ouvre **Apprenti Géomètre** et choisis le *Niveau AC*.

– Reproduis la figure ci-dessous à l'écran. Il s'agit d'un triangle équilatéral, d'un hexagone régulier et d'un dodécagone régulier inscrits dans un cercle.
– Attention : les sommets du triangle doivent aussi être des sommets de l'hexagone ; ceux de l'hexagone doivent aussi être des sommets du dodécagone.

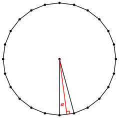


Ouvrir la fiche 12.1 du document fiches12-14.pdf.

2 L'aire du disque (2) — Questions

1. Parmi les trois polygones que tu as construits, quel est celui dont l'aire est la plus proche de celle du disque ? Et celui dont l'aire est la plus éloignée de celle du disque ?

2. Dans un disque de même rayon que les précédents, observe ce polygone régulier à vingt-quatre côtés.



Que peux-tu dire de son aire par rapport à celle des polygones précédents ? Et par rapport à celle du disque ?

3. Imagine des polygones réguliers avec de plus en plus de côtés. De quoi vont s'approcher les périmètres de ces polygones ? De quoi vont s'approcher les apothèmes de ces polygones ?

Ouvrir la fiche 12.2 du document fiches12-14.pdf.

Déroulement de la leçon

Consignes

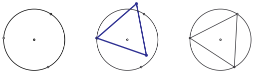
Lire la fiche 1.

Reproduire la figure de la fiche à l'écran de l'ordinateur
(créer un cercle et y inscrire un triangle équilatéral, un hexagone régulier et un dodécagone régulier emboîtés).

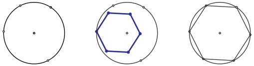
Commentaires

Une première démarche fait essentiellement appel à la fonctionnalité `Diviser`.

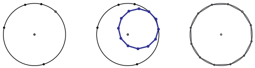
- D'abord, diviser la circonférence en trois et choisir `Triangle équilatéral` dans les `Formeslibres`. Ensuite, cliquer sur un des points qui viennent d'être construits et puis sur un second. Le triangle équilatéral est ainsi parfaitement inscrit au disque.



- Pour l'hexagone régulier, la démarche est analogue. Il faut d'abord diviser un tiers de circonférence en deux. Le nouveau point obtenu et un de ses voisins immédiats permettront de construire l'hexagone.



- Pour le dodécagone régulier, il faut d'abord diviser un sixième de circonférence en deux. De nouveau, le point ainsi construit et un des ses voisins immédiats permettront d'inscrire le dodécagone dans le disque.



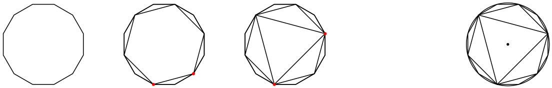
Commentaires

Il n'est donc pas nécessaire de construire tous les sommets pour créer les polygones réguliers précédents. Toutefois, si l'on souhaite construire les douze sommets du dodécagone par exemple, on peut optimiser le travail en divisant d'abord la circonférence en trois et ensuite chaque tiers de circonférence en quatre (soit quatre opérations). Il est alors possible de réaliser un dodécagone régulier sans utiliser la forme prédéfinie, en utilisant uniquement des segments pour relier les sommets voisins.

Cette démarche permet aussi de construire des polygones réguliers autres que ceux qui sont proposés dans les `Formes libres` (c'est-à-dire à plus de douze côtés).

Une autre démarche permet de reproduire rapidement la figure de la fiche 1 (il est peu probable qu'un jeune élève trouve cette procédure seul).

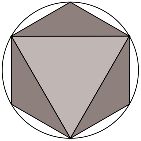
- On réalise d'abord un dodécagone régulier en choisissant cette forme dans les `Formes libres`.
- Ensuite, un hexagone régulier est construit en s'appuyant sur deux sommets du dodécagone et un triangle équilatéral en s'appuyant sur deux sommets de l'hexagone.
- Le centre de gravité commun aux trois polygones peut être obtenu en choisissant `Construire le centre` dans le menu `Opérations`. Ce point est aussi le centre du cercle circonscrit. En créant ce cercle, il faut veiller à le faire passer par un des sommets des polygones.

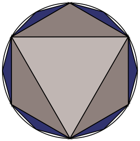


Dans la pratique, il est prévisible que beaucoup d'élèves, après avoir créé un cercle, essayent d'y inscrire un polygone à vue (en plaçant un sommet sur le cercle et en modifiant progressivement le polygone jusqu'à ce que tous ses sommets soient sur le cercle). La démarche consistant à diviser le cercle ne sera sans doute pas spontanée. Pour amener les élèves à utiliser l'outil `Diviser`, il faudra attirer leur attention sur le fait que le triangle équilatéral divise la circonférence en trois arcs de même longueur. On pourra aussi leur demander quel outil utiliser afin de réaliser une figure précise et résistant aux modifications.

Les élèves reçoivent un questionnaire (fiche 2). Les questions seront traitées avec l'ensemble du groupe. Le raisonnement sous-jacent, qui nécessite l'accompagnement de l'enseignant, bénéficiera ainsi des apports de chaque élève.

A la première question, les élèves répondent assez rapidement que le dodécagone est celui qui « remplit le mieux » le disque, tandis que le triangle est celui qui « laisse le plus de vide ».
L'enseignant fait remarquer que l'hexagone s'obtient en juxtaposant trois triangles isocèles au triangle équilatéral (un sur chaque côté). De la même façon, le dodécagone s'obtient en juxtaposant six triangles isocèles à l'hexagone.



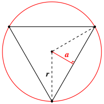


Dans la foulée de ces observations, l'enseignant demande s'il y a moyen d'obtenir des polygones qui « remplissent » de mieux en mieux le disque. Les élèves devraient alors réaliser que le processus peut se poursuivre : « ajouter » douze triangles isocèles au dodécagone, puis vingt-quatre triangles isocèles au 24-gone, etc. La réponse à la deuxième question ne devrait alors poser aucune difficulté : le 24-gone régulier a une aire supérieure à celles des polygones précédents et est encore plus proche de celle du disque, tout en lui restant inférieure.

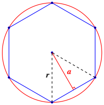
Au moment d'aborder la troisième question, l'enseignant explique d'abord que l'*apothème* est une hauteur d'un triangle isocèle obtenu par découpage d'un polygone régulier. Il ajoute qu'il s'agit de la distance entre le centre du polygone et un de ses côtés.

Il demande comment évolue le périmètre des polygones lorsque le nombre de côtés augmente. Les élèves répondent qu'il augmente également et qu'il se rapproche « du cercle » (réponse probable pour *circonférence*).

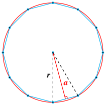
3 L'aire du disque (synthèse)



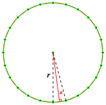
Triangle équilatéral



Hexagone régulier



Dodécagone régulier



24-gone régulier

Dans un disque, j'inscris des polygones réguliers. Plus le nombre de côtés du polygone est grand :

1. plus l'aire du polygone est proche de celle du disque ;
2. plus le périmètre p du polygone est proche de la circonférence $2\pi r$ du disque ;
3. plus l'apothème a du polygone est proche du rayon r du disque.

Je sais que l'aire du polygone est donnée par la formule $\frac{p \cdot a}{2}$.

Donc, plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus le résultat de cette formule sera proche de $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$.

Aire du disque $= \pi r^2$

Ouvrir la fiche 12.3 du document fiches12-14.pdf.

L'enseignant explique que plus le nombre de côtés augmente, plus les triangles sont « fins » (avec un angle au sommet très aigu) et plus la mesure de l'apothème est proche de celle d'un côté du triangle, qui n'est autre que le rayon.

Suite à ces échanges, les élèves notent les phrases suivantes sur la fiche 2 :

- **« L'aire du dodécagone est la plus proche de celle du disque ; l'aire du triangle est la plus éloignée de celle du disque. »**
- **« L'aire du 24-gone est plus grande que celle de tous les polygones précédents ; elle est encore plus proche de celle du disque. »**
- **« Les périmètres des polygones vont s'approcher de la circonférence du cercle ; les apothèmes vont s'approcher du rayon du cercle. »**

L'enseignant explique qu'il va maintenant se servir de la formule de l'aire d'un polygone régulier pour obtenir celle du disque.
Les élèves rappelent la formule $\frac{p \cdot a}{2}$.

L'enseignant demande aux élèves de rappeler la formule donnant la circonférence d'un cercle ($2\pi r$). Dès lors, plus le nombre de côtés du polygone est grand, plus p sera proche de $2\pi r$ et plus a sera proche de r. Donc, le résultat de la formule $\frac{p \cdot a}{2}$ sera de plus en plus proche de $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$.

Aire du disque $= \pi r^2$