

Activités avec Apprenti Géomètre au troisième degré du primaire

CREM

31 août 2007

Durant les années scolaires 2005–2006 et 2006–2007, le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a bénéficié d'un contrat de recherche avec le Ministère de la Communauté française, sur le thème « Impact du logiciel **Apprenti Géomètre** sur certains apprentissages ». Le rapport de cette recherche est disponible sur le site www.enseignement.be

La recherche a été menée par une équipe composée de

- ▶ Sébastien Agie de Selsaten, Instituteur primaire et licencié en sciences de l'éducation,
- ▶ Bernard Honclaire, Professeur honoraire de mathématiques au degré inférieur de l'enseignement secondaire,
- ▶ Pierrette De Rijck, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire,
- ▶ Michel Herman, Professeur de mathématiques au Département Pédagogique de la Haute École de la Ville de Liège,
- ▶ Guy Noël, Professeur honoraire de mathématiques de l'Université de Mons-Hainaut,
- ▶ Philippe Mairesse, Instituteur primaire,
- ▶ Gregory Philippart, Ingénieur civil en mathématiques appliquées,
- ▶ Philippe Skilbecq, Instituteur primaire
- ▶ André Vandenbruaene, Professeur de mathématiques au degré supérieur de l'enseignement secondaire.

Les auteurs du rapport tiennent à remercier la Ministre de l'Éducation, les responsables du Ministère et les membres du comité d'accompagnement de la recherche, ainsi que tous les collègues qui ont collaboré à la réalisation de la recherche, à la rédaction du rapport et au présent document.

La recherche mentionnée ci-dessus a donné lieu à des expérimentations dans plusieurs écoles, avec pour thème central la construction des formules d'aires des polygones réguliers et du disque.

A l'issue de ces expériences, la nécessité est apparue de concevoir, à l'intention des enseignants du primaire et du secondaire, un document proposant des activités centrées sur le thème des aires et réalisables avec le soutien du logiciel **Apprenti Géomètre**.

Le présent fascicule, mis au point par Ph. Skilbecq, reprend quelques-unes des activités figurant au tome 3 du rapport mentionné plus haut. Les fiches didactiques correspondantes, destinées aux élèves, sont rassemblées dans le tome 7 de ce rapport. Elles figurent également dans le document « Activités avec Apprenti Géomètre au troisième degré du primaire — Fiches didactiques ». Ce dernier document existe à la fois en version papier et en version électronique (fichier [fiches10-12.pdf](#)). Les hyperliens figurant dans le présent document renvoient vers ce fichier [fiches10-12.pdf](#).

1. Introduction

- 1.1. Cadre pédagogique
- 1.2. Voir en géométrie
- 1.3. La dialectique « outil/objet »
- 1.4. Un modèle d'analyse des activités
- 1.5. Perception qualitative de l'aire
- 1.6. Perception mixte de l'aire
- 1.7. Quantification de l'aire
- 1.8. Numérisation de l'aire
- 1.9. Connaissances numériques

2. Construire et dessiner des suites de carrés

- 2.1. Objectifs et compétences
- 2.2. Remarques liminaires
- 2.3. Narrations de recherche
- 2.4. Procédés
- 2.5. Manipulations concrètes
- 2.6. Usage d'Apprenti Géomètre
- 2.7. Travail aux instruments
- 2.8. En conclusion

3. Assembler des carrés unités

- 3.1. Objectifs et compétences
- 3.2. Fiches et matériel
- 3.3. Déroulement de l'activité

3.4. En conclusion

4. Les carrés de Pierre

- 4.1. Objectifs et compétences
- 4.2. Fiche et matériel
- 4.3. Déroulement de l'activité
- 4.4. En conclusion

5. Une collection de carrés et de rectangles

- 5.1. Objectifs et compétences
- 5.2. Fiche et matériel
- 5.3. Déroulement de l'activité
- 5.4. En conclusion

6. Un puzzle de carrés et de rectangles

- 6.1. Objectifs et compétences
- 6.2. Fiches et matériel
- 6.3. Analyse instrumentale
- 6.4. Analyse didactique et procédurale
- 6.5. Déroulement de l'activité
- 6.6. Mise en commun
- 6.7. En conclusion

7. Périmètre et aire des carrés et des rectangles – Synthèse

- 7.1. Objectifs et compétences
- 7.2. Fiches et matériel
- 7.3. Déroulement de la leçon

Le logiciel **Apprenti Géomètre** a été conçu par le **Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** au cours de l'année scolaire 2002–2003 et envoyé à toutes les écoles primaires en Communauté française de Belgique durant l'année scolaire 2003–2004.

De 2002 à 2007, de nombreuses activités associées à ce logiciel ont été mises au point par l'équipe du CREM. Pour la plupart, celles-ci ont pour objectif l'apprentissage des grandeurs, des fractions et des mesures. Nous invitons les enseignants intéressés à en prendre connaissance soit à partir des documents envoyés dans les écoles, soit à partir du site Internet du CREM, à l'adresse www.crem.be.

Le présent document contient cinq activités de résolution de problème qui trouvent une place dans cet ensemble. Elles sont suivies d'une activité de synthèse consacrée aux formules de périmètre et d'aire des carrés et des rectangles.

- ▶ Construire et dessiner des suites de carrés
- ▶ Assembler des carrés unités
- ▶ Les carrés de Pierre
- ▶ Une collection de carrés et de rectangles
- ▶ Un puzzle de carrés et de rectangles
- ▶ Synthèse

Les activités décrites ci-après s'intègrent dans un ensemble plus conséquent ayant pour objectif la construction des concepts de *périmètre* et d'*aire* pour les quelques polygones rencontrés dans l'enseignement primaire.

Mettre au point des activités nécessite de se situer par rapport à différents cadres théoriques d'ordre pédagogique ou d'ordre didactique.

Pour une bonne part, les activités proposées ci-après s'inspirent des principes de pédagogie active selon lesquels les élèves construisent leurs compétences en résolvant des situations-problèmes.

- ▶ Dans ces situations, des savoirs et des démarches rencontrés et structurés précédemment jouent le rôle d'*outils* pour construire de nouveaux savoirs ou de nouvelles démarches. Le rôle de ces savoirs « anciens » y est important.
- ▶ D'autres *outils concrets*, de type didactique sont aussi utilisés : la règle, le compas... et **Apprenti Géomètre**. Ce sont des médias entre les savoirs à acquérir et les élèves, ils ont pour rôle de faciliter la construction de savoirs et de démarches.

Nous avons choisi d'exposer ici quelques activités relatives aux carrés et aux rectangles qui illustrent les remarques énoncées ci-dessus.

- ▶ D'une part elles permettent de rassembler et de réactiver des savoirs qui ont été rencontrés au cours des

premières années de la scolarité et seront réutilisés en tant qu'outils.

- ▶ D'autre part elles serviront elles-mêmes d'outils lors de la construction des savoirs relatifs à d'autres formes géométriques : parallélogrammes, losanges et triangles.

Cadre didactique

Trois « modèles » constituent le cadre didactique et seront présentés succinctement dans la suite de cette introduction :

- ▶ le modèle de la vision en géométrie issu des travaux de R. Duval ;

- ▶ le modèle de la « dialectique *outil/objet* » issu des travaux de R. Douady (1986) concerne les savoirs ;

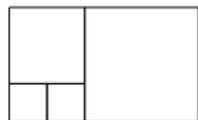
- ▶ un modèle établi au cours de la recherche, concerne plus particulièrement la construction des formules de périmètre et d'aire.

Selon R. Duval¹, l'activité géométrique, au niveau des apprentissages scolaires, est basée sur la *vision*. Voir en géométrie euclidienne est fondamental. Duval structure cette vision en quatre « points de vue » qu'il exprime comme suit à partir d'opérations et de métaphores :

- ▶ le point de vue du *botaniste* : reconnaître des formes à partir de leurs caractéristiques visuelles, souvent en faisant référence à une forme typique représentante de la famille ;
 - ▶ le point de vue de l'*arpenteur-géomètre* : mesurer les bords d'une surface, souvent dans la perspective de l'usage d'une formule ;
 - ▶ le point de vue du *constructeur* : construire des figures aux instruments,
- ce qui demande bien souvent de « déconstruire » la figure pour en connaître les éléments (côtés, angles...) ;
- ▶ le point de vue de l'*inventeur-bricoleur* : construire de nouvelles formes à partir de formes données ; ces constructions nécessitent souvent de compléter la figure donnée par des traits supplémentaires. Exemple : construire par découpage un rectangle de même aire qu'un parallélogramme.

Les activités proposées ci-après privilégient les deux dernières opérations citées : construire des formes aux instruments et transformer des formes les unes en les autres. Cela ne signifie pas que les deux premières ne sont pas importantes ou sont à négliger dans les classes. Nous mettons en évidence des activités qui nous semblent moins classiques dans l'enseignement fondamental.

¹ *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie*, Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 10, 5-53, 2005

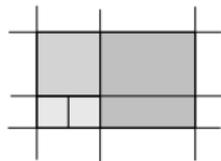


Pour illustrer quelque peu le modèle de R. Duval, employons la figure ci-contre, composée de quatre formes géométriques.

Nous reconnaissons plus au moins rapidement quatre carrés. Bien que ceux-ci ne soient pas tous de même grandeur, ils possèdent les caractéristiques *visuelles du carré* que nous avons intégrées au cours de notre cursus scolaire. Il s'agit là du point de vue du « botaniste ».

Nous pourrions mesurer le périmètre de l'un de ces carrés. Nous utiliserions probablement une règle graduée pour prendre mesurer un des côtés et nous multiplierions cette mesure par 4. C'est le point de vue de l'« arpenteur-géomètre ».

Voir le rectangle constitué par les quatre carrés demande de faire abstraction *visuelle* de lignes intérieures, bords des carrés. Cette capacité à faire abstraction ou au contraire à *voir* des lignes qui ont servi à des constructions relève du point de vue du « constructeur ».



Ceci sera encore plus pertinent si nous essayons de reproduire à la règle et au compas ce rectangle composé de carrés ! Pour y parvenir, il faut au préalable, au moins mentalement, organiser le dessin à partir de traits structurant. Cette capacité à organiser un dessin, en l'occurrence une configuration géométrique, ne va pas de soi. Cela nécessite un travail qui prend sa source dans le tracé de formes géométriques aux instruments, mais aussi sans doute dans les activités réalisées au cours d'initiation artistique.

La résolution des situations-problèmes que nous proposons aux élèves, est l'occasion pour eux d'exercer des savoirs rencontrés ou structurés précédemment. Mais il ne s'agit pas de la seule application d'algorithmes, ou de procédures enseignées puisque l'objectif est la construction de nouveaux savoirs.

À la suite de ces résolutions de problèmes, les nouveaux savoirs seront structurés, institutionnalisés dans des synthèses et deviendront à leur tour des savoirs utilisables pour la résolution d'autres problèmes.

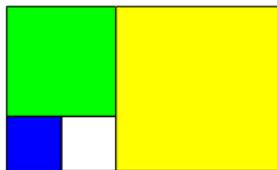
C'est ce que R. Douady² nomme la dialectique outil-objet. Un même savoir est tantôt « outil » pour résoudre un problème, tantôt « objet » d'observation, de réflexion, d'institutionnalisation. C'est dans ce va-et-vient constant entre ces deux aspects que s'élabore l'apprentissage du savoir.

Considérons par exemple l'isométrie des quatre côtés d'un carré. Les élèves observent des carrés, mesurent, comparent... et concluent à l'isométrie des côtés. Cette caractéristique demeure un « objet » issu de l'observation, de la mesure ou de la comparaison. Souvent l'apprentissage se limite à cela.

Il est des situations où ce savoir est utilisé comme « outil » de résolution.

² *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 7, 5–31, 1986

Reprenons la figure composée de quatre carrés présentée précédemment et proposons un problème dans lequel l'isométrie des côtés est à utiliser comme *outil de résolution*.



1 cm

Voici quatre carrés. Le côté du carré bleu mesure 1 cm. Quel est le périmètre du carré jaune ? Pour répondre à cette question sans mesurer à la latte, (pour cela il serait plus simple de ne proposer que le carré jaune), les élèves doivent utiliser l'isométrie des côtés des carrés :

- ↪ le côté du carré bleu mesure 1 cm et le côté du carré blanc, qui lui est juxtaposé, aussi ;
- ↪ tous les côtés de ces deux carrés mesurent 1 cm (isométrie des côtés d'un carré) ;
- ↪ le côté du carré vert construit sur les deux plus petits carrés mesure donc 2 cm ;
- ↪ le côté du carré jaune mesure donc 3 cm puisqu'il est construit sur un côté de 1 cm et un côté de 2 cm (implicitement : isométrie des côtés du carré vert) ;
- ↪ donc le périmètre du carré jaune est de 12 cm.

Dans cet exemple, le savoir relatif à l'isométrie des côtés des carrés est *utilisé* comme « outil » de résolution du problème. Il permet de proche en proche de déterminer la mesure du côté du carré jaune.

Dans d'autres situations, les savoirs sont utilisés comme « outils » de validation : une réponse est confirmée en utilisant le savoir déjà rencontré ou structuré. De telles situations sont incorporées dans les activités décrites dans ce document.

Au cours des expérimentations, nous avons analysé les activités concernant la construction des formules d'aires et élaboré un modèle ayant pour objet d'aider à la construction d'activités pour atteindre l'objectif de connaissance des formules d'aire et à l'analyse des productions des élèves notamment de certaines de leurs erreurs.

Le modèle est composé de quatre entités principales : la théorie des cadres de R. Douady, les travaux sur la vision en géométrie de R. Duval, l'analyse épistémologique du concept d'aire réalisée par le CREM au cours de cette recherche et des connaissances relatives aux nombres et aux opérations sur ces nombres.

Les modèles de R. Douady et de R. Duval ont été brièvement explicités ci-avant.

Nous développerons ci-dessous l'analyse

épistémologique et les connaissances relatives aux nombres et aux opérations.

L'analyse épistémologique

Les lecteurs qui souhaitent approfondir cette analyse pourront consulter le rapport de recherche disponible à l'adresse www.enseignement.be.

Dans le processus de construction des formules d'aire, quatre *démarches de comparaison* des aires semblent exister, se succéder, se chevaucher... :

↪ la *perception qualitative* de l'aire

↪ la *perception mixte*,

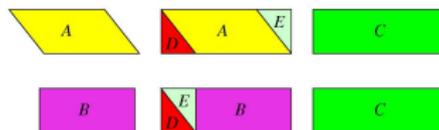
↪ la *quantification* de l'aire,

↪ la *numérisation* de l'aire.

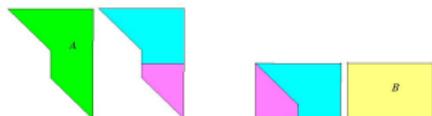
Nous allons détailler quelque peu chacune de ces étapes.

- ▶ Dans un premier temps, nous pouvons comparer les aires de deux formes géométriques sans procéder à aucune mesure. La comparaison consiste à déterminer si l'aire de A est plus ou moins grande que celle de B , ou si elles sont égales. Dans ce contexte, les expressions « plus étendu que » et « moins étendu que », spécifiques à la grandeur aire, seront utilisées de préférence aux expressions générales « plus grand que » et « plus petit que ». L'usage des termes spécifiques aide l'« apprenant » à prendre conscience de la notion d'aire. Cette comparaison peut se faire par superposition directe ou à l'œil en déplaçant mentalement un objet de façon à le visualiser superposé à une partie de l'autre.
- ▶ D'autres procédés existent, quelque peu plus complexes :

↔ l'équicomplémentarité : les objets A et B sont de même aire si on peut les englober chacun dans un même objet C , de telle façon que les compléments à leur adjoindre pour obtenir C soient identiques.



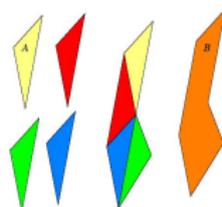
↔ l'équidécomposition : le principe est de découper un des objets en unités plus petites que l'on rassemble différemment pour construire le second objet.



En allant plus loin dans l'utilisation des outils rencontrés, nous nous acheminons vers une quantification de l'aire. En effet, ci-dessous des nombres naturels d'abord, des rapports de naturels ensuite, interviennent lors de comparaisons d'aires.

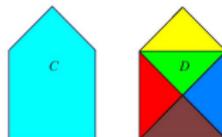
↪ Multiplication d'une aire

Si nous assemblons plusieurs formes identiques, nous obtenons une nouvelle forme dont l'aire est obtenue par additions répétées de l'aire de la forme de base, ce qui peut être regardé comme la multiplication de l'aire de cette forme de base par un nombre naturel.



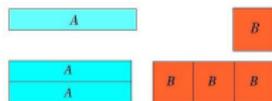
$$4. \text{Aire}(A) = \text{Aire}(B)$$

↪ Décomposition d'une aire en fragments identiques



$$\text{Aire}(C) = 5. \text{Aire}(D)$$

↪ La comparaison simple de deux formes peut parfois être réalisée en multipliant l'une et l'autre par un nombre naturel.



$$2. \text{Aire}(A) = 3. \text{Aire}(B)$$

Quantifier une grandeur revient à l'exprimer en tant que multiple d'une unité qui est elle-même une grandeur de même nature choisie comme référence. La quantification associe donc un nombre à la grandeur étudiée. Ce nombre sera appelé mesure de cette grandeur pour l'unité choisie. En cas de recouvrement exact, le nombre est entier.

- ▶ Recouvrement exact

Le rectangle A est pavé par le triangle B . L'aire de A s'exprime donc par comptage de ces triangles. Dans la figure ci-dessus, l'aire de A est égale à 24 fois l'aire de B . On peut écrire ceci de cette manière : $\text{Aire}(A) = 24 \cdot \text{Aire}(B)$



- ▶ Recouvrement par l'unité et des fractions de celle-ci

Si le recouvrement fait apparaître des fractions de l'unité, le dénombrement entier ne suffit plus. Les parties fractionnaires doivent aussi être prises en compte.



- ▶ D'autres éléments interviennent dans la quantification, notamment le choix d'une unité commune de mesure, pour mesurer simultanément deux formes. Bien souvent, l'unité d'aire choisie est l'aire d'un carré.

Numériser une grandeur consiste à remplacer cette grandeur par une quantité numérique qui se substitue à elle. On quitte ainsi une notion et un objet géométriques pour s'occuper essentiellement de nombres. On remplace donc un objet « matériel » (qui peut être touché, dessiné, colorié. . .) par un nombre qui relève d'une autre forme d'abstraction. Ce remplacement constitue un changement de cadre au sens de R. Douady. En effet, on passe d'un objet géométrique à un objet numérique.

- ▶ En pratique la mesure de l'aire doit être exprimée par un nombre accompagné de la mention du carré unité. Dès lors, tous les raisonnements et manipulations relatifs aux aires peuvent être remplacés par des raisonnements et calculs sur des nombres.
- ▶ La numérisation de l'aire demande l'utilisation d'étalons universels.
- ▶ Le recours à des formules participe de la numérisation de l'aire.

► **Les connaissances sur les nombres et sur les opérations**

La construction et la compréhension des formules de périmètre et d'aire s'appuie également sur la connaissance des nombres et des opérations.

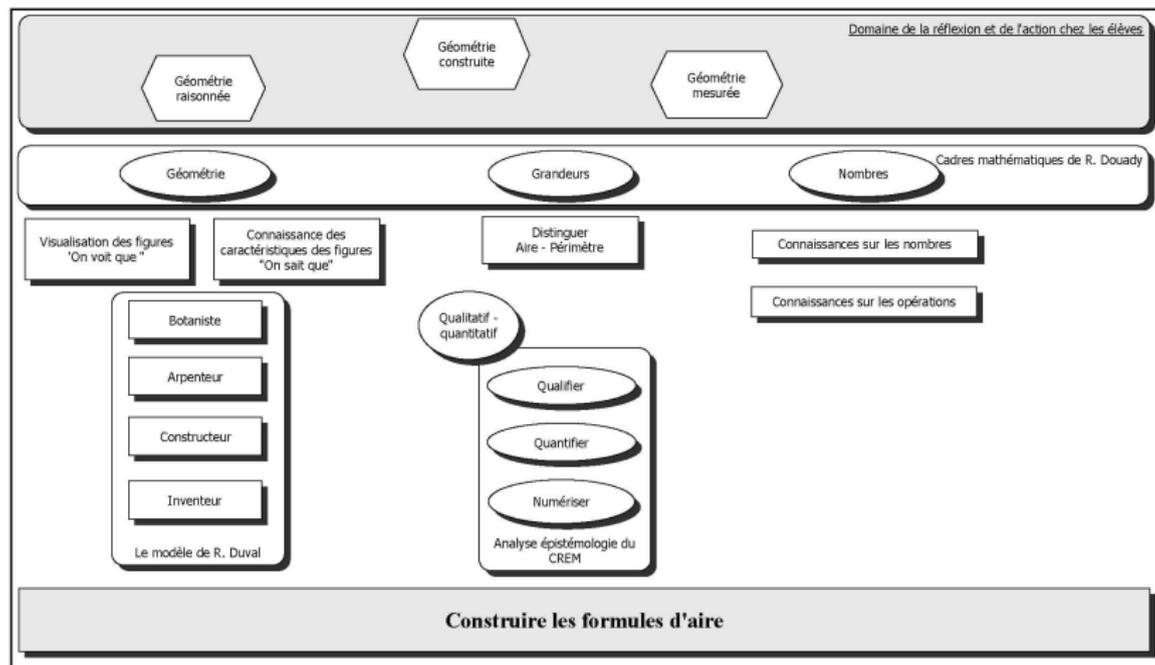
À titre d'exemple, considérons le cas de la formule du périmètre. Celle-ci est présentée comme la somme des longueurs des côtés. Or, lorsque l'expression du périmètre prend une forme symbolique, bien souvent l'addition disparaît ou est accompagnée d'une multiplication !

Formes	Formules du périmètre
Carrés	$C \times 4$
Rectangles	$(L + l) \times 2$
Losanges	$C \times 4$

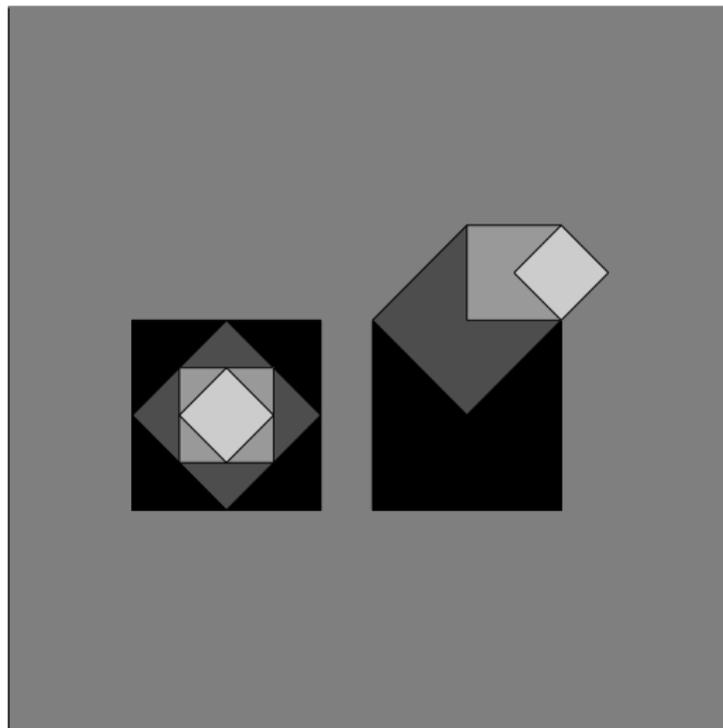
La transformation de l'expression symbolique d'une somme en un produit (dont un facteur peut être une somme) s'explique par les propriétés des opérations. La plus utilisée est qu'une addition itérée peut être remplacée par une multiplication. Ainsi, $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$. De la même manière, $C + C + C + C = 4 \times C$.

En ce qui concerne la connaissance des nombres, plus particulièrement les nombres entiers, il s'agit surtout de la connaissance des diviseurs et des multiples. Par exemple lorsqu'il faut rechercher tous les rectangles de dimensions entières possédant une aire de 24 cm^2 , la connaissance des décompositions de 24 en produit de deux entiers est une aide précieuse.

Le diagramme ci-dessous permet de garder à l'esprit les différents points de vue à prendre en considération lors de la préparation d'activités ou l'analyse de productions d'élèves.



Activités





► Objectifs conceptuels

- ↔ Les médianes dans les carrés.
- ↔ Les diagonales dans les carrés.
- ↔ Découvrir ou institutionnaliser qu'une diagonale d'un carré découpe celui-ci en deux triangles isométriques.
- ↔ et que les deux diagonales découpent le carré en quatre triangles isométriques.
- ↔ Aborder la notion d'aire indépendamment de sa mesure.

► Objectifs procéduraux

- ↔ Apprendre à utiliser les caractéristiques des figures comme outil de résolution d'un problème ou comme outil de validation.
- ↔ Apprendre à utiliser les côtés, les sommets, les médianes et les diagonales d'un carré comme outils

de construction ou de justification.

- ↔ Familiariser les élèves avec l'usage des outils de dessin, notamment utiliser le compas comme outil de mesure ou de report de mesure.
- ↔ Déterminer le matériel nécessaire à la résolution d'un problème.

► Compétences

- ↔ Tracer des formes simples, en lien avec les propriétés des formes et au moyen de [...] l'équerre et du compas.
- ↔ Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère.
- ↔ Résoudre, raisonner, argumenter.
- ↔ Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie, pour décrire, comparer, tracer.



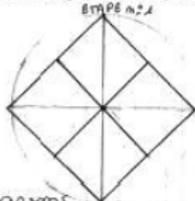
- ▶ L'activité qui suit est composée de quatre parties à la fois distinctes et complémentaires. Les trois premières montrent la complémentarité des contextes de travail que sont les manipulations concrètes d'objets géométriques, les constructions aux instruments de dessin et les manipulations *virtuelles* d'objets géométriques à l'aide du logiciel **Apprenti Géomètre**.
- ▶ Chacune de ces parties confronte les élèves à des concepts géométriques différents ou perçus et utilisés différemment (les diagonales et les médianes, les milieux de côtés. . .)
- ▶ Au-delà du dessin et du raisonnement, les suites de carrés peuvent être utilisées dans le cadre d'un travail sur les aires et sur les fractions.
- ▶ L'enseignant pourra choisir de réaliser ces trois parties consécutivement ou de n'en réaliser qu'une en fonction de sa classe et du temps disponible.
- ▶ La quatrième partie de l'activité est consacrée à une « narration de recherche » : les élèves rédigent un texte narratif leur activité, en l'occurrence la reproduction de la suite de carrés. Nous reproduisons à la page suivante deux réalisations d'élèves de 6^e primaire. Elles devront par la suite être revues du point de vue de la construction et des points de vue grammatical et orthographique. Cependant, les réflexions concernant l'aspect géométrique ont permis de nombreux apprentissages.
- ▶ Au cours des expérimentations dans les classes de 6^e primaire, les activités de dessin aux instruments ont donné lieu à des synthèses concernant notamment le tracé de perpendiculaires, la recherche du milieu d'un segment, le report d'une longueur au compas. Nous reproduisons à la page 24 une fiche utilisée en classe.



Narrations de recherche

1. Réalisation de suite de carrés (embêtés)

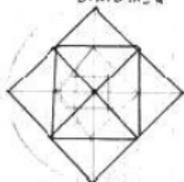
Au début, nous avons tracé un cercle. Nous avons tracé des perpendiculaires.



= point du milieu

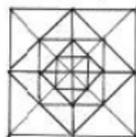
Puis nous avons tracé un carré qui est un rectangle. Ensuite, nous avons tracé des diagonales et nous avons fait de même

pour continuer la suite. ETAPE n° 2



On peut ainsi la réaliser facilement. De cette façon rien n'est compliqué.

ETAPE n° 3 (suite finie)

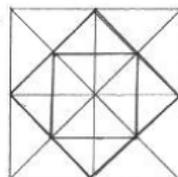


1. En premier nous avons tracé un cercle à l'aide de l'équerre et du compas.
2. En deuxième lieu on a tracé les diagonales du carré.
3. En troisième lieu on a tracé les médianes à l'aide de l'équerre pour le point de connexion des diagonales (le milieu).
4. En quatrième lieu on a tracé 4 autres diagonales (longes) et 4 médianes (bleues).

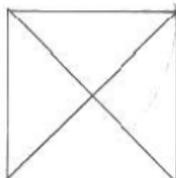
1.



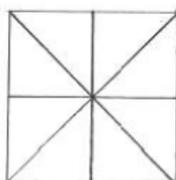
4.



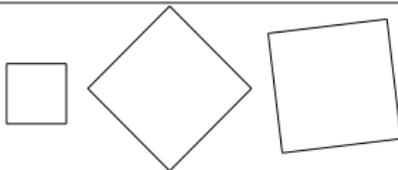
2.



3.



➡ COMMENT TROUVER LE CENTRE D'UN CARRÉ?

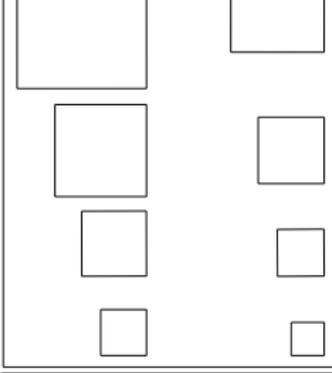


➡ COMMENT TROUVER LE MILIEU DES CÔTÉS D'UN CARRÉ?,
technique 1.



Ouvrir la fiche 7.8 du document
fiches10-12.pdf

1. Manipulations concrètes : Fiches et matériel

<p>→ Construisez une suite semblable à celles présentées au tableau et reproduisez ci-dessous.</p>  <p>Collez la suite géométrique réalisée dans le cadre ci-dessous.</p>	<p>Deux suites de carrés à photocopier et à découper. Les carrés d'une suite peuvent être employés comme intrus dans l'autre.</p>
	
<p>Ouvrir la fiche 7.1 du document fiches10-12.pdf.</p>	<p>Ouvrir la fiche 7.2 du document fiches10-12.pdf.</p>

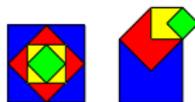
- ▶ **Matériel pour les élèves**
Fiche de travail, crayon, gomme, colle, compas, équerre, latte, un jeu de quatre carrés en carton de couleurs par élève (voir fiche de gabarits à photocopier et découper).
- ▶ **Fichier informatique**
Aucun.
- ▶ **Matériel pour l'enseignant**
Si possible, des carrés magnétiques de couleurs pour réaliser les constructions au tableau, ou transparents et rétroprojecteur.
Latte, équerre et compas de tableau.



1. Manipulations concrètes : Initialisation de l'activité et premières démarches

Enseignant

L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire, à leur demande, il l'explique oralement. Il distribue également les carrés de carton.



Activités de la classe

Les élèves sont répartis par groupe de deux ou trois maximum. Cette disposition permet les échanges de points de vue et certaines manipulations qui nécessitent de maintenir des pièces.

Chaque groupe reçoit autant de fiches et de jeux de carrés qu'il y a d'élèves. Les jeux de carrés sont mélangés dans une même enveloppe.

Les élèves prennent connaissance de la consigne et du matériel et effectuent la tâche proposée.

Les élèves analysent les positions relatives des carrés dans chacune des suites. Les élèves choisissent une suite et déterminent les quatre carrés permettant de la construire parmi les huit ou les douze à leur disposition (4 carrés \times le nombre d'élèves dans le groupe). Ils reproduisent chacun une des deux suites sans recourir à des mesures. Ensuite ils collent leur réalisation sur le fiche.

La procédure à utiliser pour réaliser la tâche de reproduction est différente selon la suite que les élèves choisissent.

↪ En ce qui concerne la suite des carrés emboîtés :

les élèves doivent observer que les sommets d'un carré plus petit doivent être placés sur les milieux des côtés du carré plus grand ;

les élèves doivent donc situer ces milieux de côtés, soit en pliant les carrés, soit en utilisant leur compas ;

nous déconseillons de laisser les élèves utiliser leur latte pour mesurer, cette démarche n'apportant pas de connaissance fondamentale en géométrie.



1. Manipulations concrètes : Assemblage des carrés pour construire les suites

Enseignant

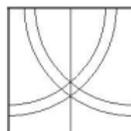
L'enseignant veille à ce que les élèves utilisent leurs instruments de dessin. Si nécessaire il explique ou rappelle la technique pour déterminer le milieu d'un segment, en l'occurrence le milieu d'un côté.

Il aide les élèves, au cours d'une réflexion collective peut-être, à adapter la technique à la situation.



Activités de la classe

La recherche du milieu d'un côté du carré peut être réalisée à l'aide du compas. Cette technique peut avoir été rencontrée par les élèves auparavant. Cependant, elle doit être adaptée à la situation (figure ci-contre) car les arcs de cercle doivent être tracés sur la forme cartonnée et non de part et d'autre de la ligne comme habituellement. Cette réflexion sur la technique elle-même peut nourrir certains apprentissages.



↔ En ce qui concerne la suite des carrés sortants :

les élèves doivent observer que deux sommets opposés d'un carré plus petit peuvent être placés sur deux sommets consécutifs du carré plus grand ;

ou que deux sommets consécutifs d'un carré plus petit peuvent être placés sur un sommet et le centre du carré plus grand ;

aucune mesure ou tracé supplémentaire n'est nécessaire pour cette seconde suite.

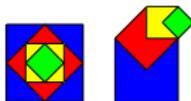
Le centre d'un carré est obtenu en traçant les diagonales du carré ou est directement présent si les médianes apparaissent suite à un pliage.



1. Manipulations concrètes : Mise en commun et synthèse

Enseignant

L'enseignant organise la mise en commun qui permet de mettre en évidence les caractéristiques géométriques des deux suites d'un part et les outils et techniques employés d'autre part. Les deux suites sont réalisées au tableau avec le matériel prévu.



Activités de la classe

Les notions de diagonale, de milieu de côté, de sommet de forme et de centre de forme sont ici employés dans une perspective « outil » au sens de R. Douady. Il n'est pas nécessaire de les définir avant de les employer. Ils prennent sens dans l'action et leur dénomination mathématique est précisée lors de la réalisation d'une tâche.

La mise en commun a pour objet, dans un premier temps, d'exposer les réalisations finales des élèves et de mettre en avant certaines constatations, entre autres :

- ↪ tous les carrés ne s'intègrent pas (« ne vont pas ») dans les suites à construire. Ils sont soit trop grands, soit trop petits. Dans les deux cas, il est impossible de placer leurs quatre sommets sur les milieux des côtés d'un carré plus grand ;
- ↪ les quatre carrés qui permettent de construire une suite permettent aussi de construire l'autre suite ;
- ↪ les carrés des suites ne sont donc pas choisis au hasard ;
- ↪ les modèles exposés au tableau n'ont pas tous la même grandeur, les carrés qui les composent non plus. Il est donc possible de construire des suites de différentes grandeurs ;
- ↪ pour construire la suite des carrés emboîtés, il est nécessaire de connaître les milieux des côtés du carré plus grand ;
- ↪ pour construire la suite des carrés sortants, il faut placer deux sommets opposés d'un carré plus petit sur deux sommets consécutifs d'un carré plus grand.

Ces constats peuvent faire l'objet d'une synthèse écrite. Ils seront exploités dans les activités suivantes.



2. Usage d'Apprenti Géomètre : Fiches et matériel

 Dessiner ces deux suites de carrés.
Indique ensuite de quels éléments géométriques tu as eu besoin pour réaliser chacune de ces deux constructions.

	
<i>Les éléments géométriques de première dessin</i>	<i>Les éléments géométriques de deuxième dessin</i>

Ouvrir la fiche 7.3
du document fiches10-
12.pdf.

► Matériel pour les élèves

Fiche de travail, colle.

Les suites construites précédemment et peut-être la feuille de synthèse rédigée à la fin de l'activité précédente.

► Fichier informatique

Aucun, utiliser les figures libres du niveau B.

► Matériel pour l'enseignant

L'usage d'un projecteur multimédia relié à un ordinateur permet de montrer à l'ensemble de la classe les manipulations nécessaire du logiciel.

Cela permet également d'illustrer les explications et justifications relatives aux constructions des deux suites.



2. Usage d'Apprenti Géomètre : Initialisation de l'activité et premières démarches

L'analyse qui suit suppose que les élèves ont réalisé l'activité avec les carrés de carton. Ils ont donc déjà observé les deux suites et connaissent leurs particularités géométriques telles que la coïncidence de certains points remarquables (sommet, milieu, centre). Avec **Apprenti Géomètre**, comme avec les formes en carton, la démarche à utiliser pour réaliser la tâche est différente selon la suite que l'élève va choisir. Des différences existent aussi entre la réalisation à l'aide des formes en carton et avec le logiciel.

Notons cependant que contrairement à l'activité précédente, du fait de la transparence des formes, le dessin d'une suite peut se faire dans les deux sens : du plus petit carré vers le plus grand ou l'inverse. Ce choix du sens de reproduction influera également sur la démarche à utiliser. Nous explicitons ceci ci-dessous.

Enseignant

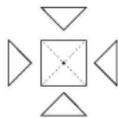
L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire, à leur demande, il l'explique oralement. Il veille à ce que les élèves choisissent le niveau B afin d'avoir accès aux formes libres.

Activités de la classe

Les élèves sont répartis par groupe de deux ou trois maximum. Cette disposition permet les échanges de point de vue. Chaque groupe reçoit autant de fiches qu'il y a d'élèves. Les élèves prennent connaissance de la consigne et effectuent la tâche proposée.

2. Usage d'Apprenti Géomètre : Dessin des suites de carrés – Caractéristiques

Enseignant



(a)



(b)



(c)



Activités de la classe

↪ En ce qui concerne la suite des carrés emboîtés :

Il est plus commode de dessiner un grand carré et de poursuivre par les carrés intérieurs, plus petits, en utilisant les points milieux des côtés.

En effet, pour tracer un carré, il faut déterminer deux sommets consécutifs. Ainsi, après avoir déterminé deux milieux de côtés consécutifs, il suffit de dessiner le carré à partir de ces points milieux. Il faut cependant veiller à l'ordre dans lequel on montre les deux points, sachant que les formes se construisent dans le sens antihorlogique.

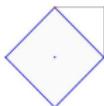
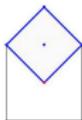
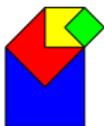
Si les élèves souhaitent reproduire la suite dans le sens inverse, du plus petit vers le plus grand, la construction est plus complexe. Elle utilise notamment un fractionnement du carré le plus petit le long de ses diagonales (figure (a)). Les quatre triangles sont ensuite juxtaposés au carré initial (figure (b)), l'ensemble est enfin fusionné (figure (c)).

Ensuite, pour obtenir le 3^e carré, il faut assembler et fusionner quatre copies du carré le plus petit.

Il faut réaliser les mêmes opérations avec le 2^e carré pour obtenir le 4^e.

2. Usage d'Apprenti Géomètre : Dessin des suites de carrés – Caractéristiques

Enseignant



Activités de la classe

↔ En ce qui concerne la suite des carrés sortants :

le sens n'influence pas vraiment la difficulté de la construction. Il est cependant intéressant que des élèves choisissent des sens différents afin de susciter la discussion.

Si le sens de reproduction va du plus grand vers le plus petit carré, vu la manière dont les carrés se construisent avec **Apprenti Géomètre**, les élèves ont besoin du centre des carrés (ce qui n'était pas nécessairement le cas avec les carrés en carton) ; pour obtenir le centre des carrés, il est possible d'activer la fonctionnalité montrer le centre des figures dans le menu *Préférences* ;

les élèves peuvent aussi dessiner les deux diagonales, le centre du carré est situé à l'intersection de ces deux lignes ;

les élèves construisent les carrés plus petits en cliquant sur un sommet puis sur le centre du carré plus grand.

Si les élèves souhaitent reproduire la suite dans le sens inverse, du plus petit vers le plus grand, la construction est quelque peu différente.

Les élèves doivent construire le petit carré de départ ;

ensuite, ils construisent le carré plus grand en cliquant sur deux sommets opposés du carré plus petit.



2. Usage d'Apprenti Géomètre : Mise en commun et synthèse

Enseignant

L'enseignant organise la mise en commun qui permet de mettre en évidence les caractéristiques géométriques des deux suites d'un part et les outils et techniques employés d'autre part.

L'utilisation d'un projecteur multimédia associé à un ordinateur est un outil précieux à la fois pour illustrer les explications et les justifications et pour exposer certaines manipulations ou connaissances instrumentales.



Activités de la classe

La mise en commun a pour objet, dans un premier temps, d'exposer les réalisations finales des élèves et de mettre en avant certaines constatations, entre autres :

Les notions de milieu de côté, de sommet de forme et de centre de forme sont à nouveau employées dans la perspective « outil ». Un des intérêts de la reproduction de cette suite à l'aide du logiciel réside dans la transparence des formes qui met en évidence différentes caractéristiques de la construction, telles que :

↪ dans la suite sortante, la longueur d'une diagonale d'un carré plus petit possède la même longueur qu'un côté du carré plus grand ; ou la moitié de la longueur d'une diagonale d'un carré plus grand équivaut à la longueur du côté d'un carré plus petit ;

↪ des triangles apparaissent dans la suite sortante, certains ont même aire, d'autres non ;

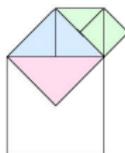
↪ dans la suite des carrés emboîtés, les sommets des quatre carrés sont situés soit sur une médiane soit sur une diagonale du carré le plus grand.

Des difficultés d'utilisation d'**Apprenti Géomètre** peuvent aussi être énoncées et analysées. Des connaissances instrumentales peuvent être rappelées ou expliquées aux élèves.



2. Usage d'Apprenti Géomètre : Prolongements possibles

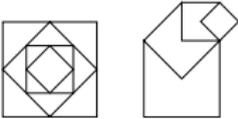
- ▶ Au cours de la mise en commun, l'observation des suites par transparence a permis de mettre en évidence des triangles dans les carrés.
- ▶ Des comparaisons d'aire de ces triangles peuvent être réalisées, ainsi il est possible de montrer que le plus petit carré est composé de deux triangles (verts) que l'on retrouve dans le carré juste plus grand ;
- ▶ si l'on observe ce second carré, on remarque que les deux triangles verts représentent la moitié de ce carré. Donc, on peut admettre que deux triangles verts ont ensemble la même aire qu'un triangle bleu ;
- ▶ ainsi de suite avec les autres carrés et triangle.



- ▶ À partir de ces premières comparaisons, un travail sur les rapports d'aire des carrés est possible. De même que des activités concernant des opérations sur les fractions. Ces activités ont été relatées dans les précédents rapports de recherche du CREM concernant le logiciel **Apprenti Géomètre**.

3. Travail aux instruments : fiches et matériel

 Dessine ces deux suites de carrés.
Indique ensuite de quels éléments géométriques tu as eu besoin pour réaliser chacune de ces deux constructions.



Les éléments géométriques du premier dessin *Les éléments géométriques du deuxième dessin*

Ouvrir la fiche 7.3 du document fiches10-12.pdf.

- ▶ **Matériel pour les élèves**
Fiche de travail, crayon, gomme, latte, équerre, règle, compas.
Les suites construites précédemment et peut-être la feuille de synthèse rédigée à la fin de l'activité précédente.
- ▶ **Fichier informatique**
Aucun.
- ▶ **Matériel pour l'enseignant**
Latte, équerre et compas de tableau.

▶ Commentaires

La reproduction aux instruments est une activité complexe pour les élèves, elle permet cependant de rencontrer nombre de savoirs dans leur statut d'outils.

L'organisation didactique que nous proposons laisse le choix de la suite aux élèves.

L'enseignant, connaissant ses élèves, peut cependant d'abord proposer de réaliser une suite de manière collective avant de demander aux élèves d'en reproduire une au choix.



Travail aux instruments : Initialisation de l'activité et premières démarches

Enseignant

L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire, à leur demande, il l'explique oralement. Il veille à ce que les élèves travaillent individuellement.

L'enseignant insiste sur le fait que la reproduction d'une suite doit être réalisée sans mesurer aucune longueur.

Avant de débiter la reproduction, il veille également à ce que chaque élève ait déterminé la suite à reproduire, le sens de la suite, la dimension du premier carré, son orientation et sa disposition sur la feuille en fonction des choix précédents.

En fonction des connaissances des élèves, l'enseignant peut apporter aux élèves les différentes procédures pour construire un carré aux instruments.

Activités de la classe

Les élèves travaillent individuellement.

Selon les habitudes de classe, l'analyse *a priori* de la tâche (choix de la suite, sens de la suite, dimension du premier carré. . .) peut être réalisée soit lors d'une phase de réflexion collective soit sous la forme d'un simple rappel collectif ou de notes au tableau, soit encore sous la forme d'interventions individualisées consécutives à l'observation des élèves.

La dimension du premier carré dépend à la fois de la surface de papier disponible, de la suite à réaliser et du sens choisi. Par exemple, si l'élève choisit de reproduire une suite du plus grand carré vers le plus petit, la taille du premier carré doit être suffisante pour que le dernier carré ne soit pas trop petit. À l'inverse, s'il choisit de dessiner d'abord le plus petit carré, il doit veiller à ce qu'il ne soit pas trop grand de sorte que le plus grand carré puisse encore être dessiné sur la surface disponible. C'est là un travail d'approximation fort intéressant car il demande à l'élève de repérer approximativement les rapports entre les carrés. Ceci apparaît particulièrement si l'élève réalise le dessin du plus petit carré vers le plus grand.

Quel que soit le choix de la suite et quel que soit le choix de son sens, la tâche de reproduction commence par le dessin d'un carré.

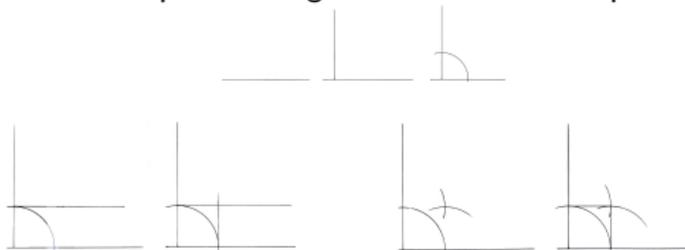
Enseignant

Les indications apportées par l'enseignant peuvent être soit notées au tableau, projetées ou inscrites sur une fiche distribuée aux élèves.

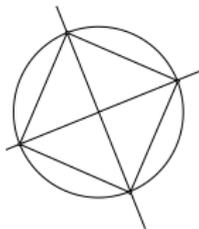
Activités de la classe

Deux procédures au-moins permettent de dessiner des carrés aux instruments.

L'une, plus classique, utilise le tracés de perpendiculaires à l'équerre et le report de longueurs à l'aide du compas.

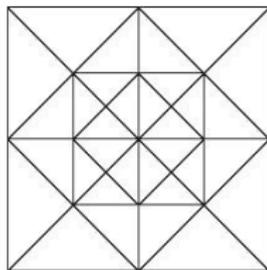


L'autre utilise le compas pour tracer un cercle à l'intérieur duquel deux perpendiculaires passant par le centre du cercle sont tracées à l'équerre.





Enseignant



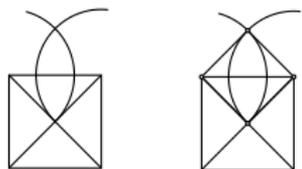
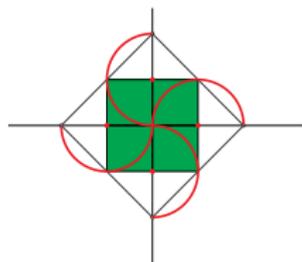
Activités de la classe

Ce premier carré dessiné, la procédure de dessin dépend du choix de la suite et du sens de parcours de celle-ci.

- Pour la suite de carrés emboîtés, du grand carré vers le petit.
D'abord reconnaître que les sommets des carrés plus petits sont situés au milieu des côtés des carrés plus grands ;
marquer les milieux des côtés en traçant d'abord les médianes ; pour ce faire : tracer les diagonales pour obtenir le centre du carré, puis à l'aide de l'équerre, tracer les deux segments perpendiculaires aux côtés et qui passent par le centre du carré, ce sont les médianes, ou à l'aide du compas et de la règle, tracer les médiatrices de deux côtés ;
joindre les quatre milieux à l'aide de la règle pour tracer le carré intérieur au premier ;
utiliser les diagonales du premier carré pour obtenir le point milieu de chacun des côtés du carré plus petit ;
tracer le troisième carré à partir de ces quatre points ;
utiliser la même procédure pour le dernier carré.



Enseignant



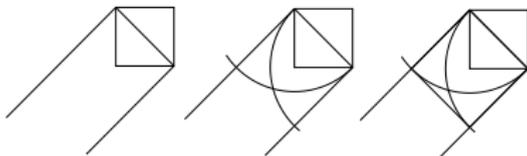
Activités de la classe

- Pour la suite de carrés emboîtés, du petit carré vers le grand
D'abord reconnaître que les sommets des carrés plus grands sont situés sur le prolongement des médianes de carrés plus petits ;
tracer et prolonger les médianes du petit carré à l'aide de la règle ;
à l'aide du compas, prolonger chaque médiane dans les deux sens de la moitié de sa longueur ;
joindre les quatre points ainsi obtenus.
Ainsi de suite pour les deux autres carrés.
- Pour la suite sortante, du grand carré vers le petit
D'abord reconnaître que deux sommets opposés d'un carré plus petit sont situés sur deux sommets consécutifs du carré plus grand et qu'un troisième sommet de ce petit carré est situé au centre du carré plus grand ;
tracer les diagonales du grand carré pour obtenir son centre ;
à l'aide du compas, construire le symétrique de ce point par rapport à un côté du carré ;
joindre les points pour obtenir le petit carré ;
poursuivre la procédure.

Enseignant

Activités de la classe

- Pour la suite sortante, du petit carré vers le grand
D'abord reconnaître que la diagonale d'un carré plus petit est le côté d'un carré plus grand ;
tracer une diagonale ;
à l'aide de l'équerre, à partir des deux extrémités de cette diagonale, tracer deux perpendiculaires sur lesquelles se trouvent deux côtés du carré plus grand ;
à l'aide du compas, reporter la mesure du côté (diagonale du petit carré) sur ces deux perpendiculaires ;
joindre les deux points qui viennent d'être marqués ;
poursuivre la procédure.





Enseignant

L'enseignant organise la mise en commun des réalisations des élèves.

Activités de la classe

Au cours de cette mise en commun, les élèves peuvent exposer leurs travaux et de mettre en évidence :

les quatre types de reproduction possible (deux suites, deux sens) ;

les démarches utilisées ;

les notions mathématiques rencontrées ;

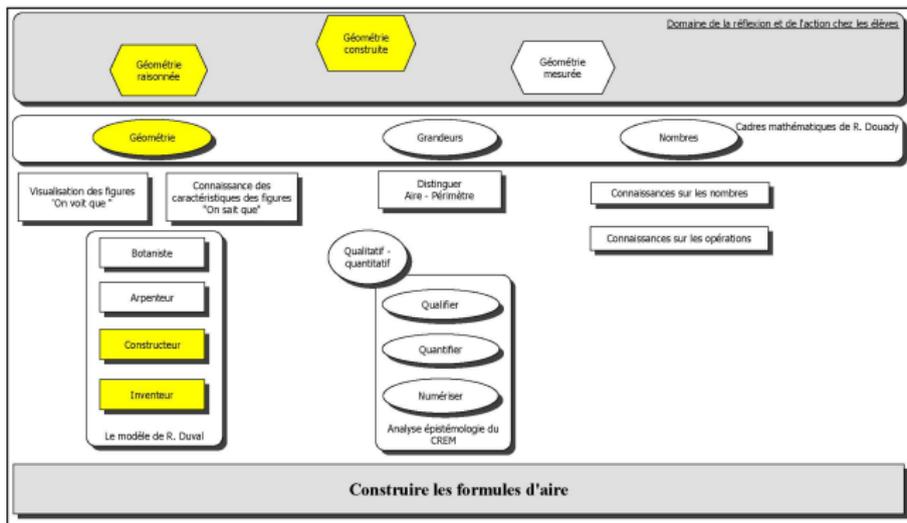
les liens entre les démarches et les notions, c'est-à-dire la justification des démarches par les notions mathématiques. Par exemple, pour la construction du premier carré, dans le cas de la construction des deux côtés avec l'équerre, c'est la perpendicularité des côtés qui est utilisée ;

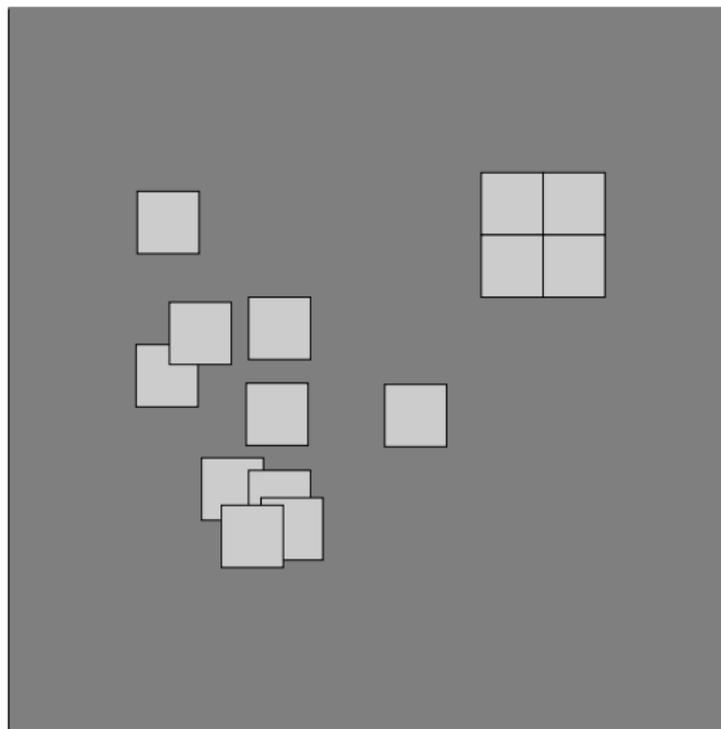
dans le cas de la construction du quatrième sommet au compas, c'est la propriété d'isométrie des côtés dans les carrés qui est utilisée.

Cette activité avait pour objectifs

- ▶ de rencontrer les médianes et les diagonales comme outils de construction ;
- ▶ de tracer des figures aux instruments de dessin et avec **Apprenti Géomètre**.
- ▶ de confronter les élèves à ce que R. Duval nomme la vision de type *constructeur* ;
- ▶ d'amener les élèves à utiliser plusieurs cadres mathématiques dans une même activité (géométrie et nombres), et à justifier certains résultats à partir de ces cadres ;
- ▶ de construire de nouvelles connaissances dans trois contextes différents.

Pour situer l'activité par rapport au modèle présenté dans l'introduction :







- ▶ Objectifs conceptuels
 - ↪ Différencier périmètre et aire.
- ▶ Objectifs procéduraux
 - ↪ Reconnaître les liens entre les cadres géométrique et numérique,
 - ↪ s'en servir pour différencier périmètre et aire.
- ▶ Compétences
 - ↪ Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.
 - ↪ Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).
 - ↪ Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...]



 Ouvrir Apprenti Géomètre et sélectionner le niveau A.		
 Assembler plusieurs exemplaires de carrés pour construire 3 autres carrés de grandeurs différentes.		
 Dessiner ces carrés sur le papier quadrillé et noter le périmètre et l'aire de chacun d'eux.		
	Périmètre	Aire
		

Ouvrir la fiche 2.1 du document [fiches10-12.pdf](#)

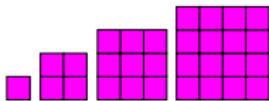
- ▶ **Matériel pour les élèves**
Fiche de travail, crayon, gomme.
- ▶ **Fichier informatique**
Aucun, utiliser les carrés standards du niveau A.
- ▶ **Matériel pour l'enseignant**
Si possible, des carrés et des segments magnétiques pour réaliser les constructions au tableau, ou transparents et rétroprojecteur.
L'utilisation d'un vidéoprojecteur associé à un ordinateur est aussi efficace car ce dispositif permet en plus de montrer à l'ensemble des élèves les manipulations à réaliser avec **Apprenti Géomètre**.

Enseignant

L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire il explique la consigne oralement.

En observant les réalisations des élèves, l'enseignant peut modifier leur démarche ou relancer leur activité avec des questions du type :

Une première mise en commun permet de mettre en évidence, entre autres :



L'enseignant peut laisser quelques instants encore pour permettre à certains élèves de terminer leurs constructions en tenant compte des éléments mis en évidence.

Activité de la classe

Les élèves prennent connaissance de la consigne. Ils sélectionnent le niveau standard.

Ils utilisent les carrés standards pour réaliser la tâche proposée. Deux manières de procéder au moins sont possibles.

- ▶ Soit amener plusieurs carrés unités à l'écran et ensuite les assembler ;
- ▶ Soit amener les carrés à l'écran selon la nécessité de la tâche.

Pour relancer l'activité des élèves : « Que demande-t-on exactement ? Quels sont les carrés unités ? »

Pour inciter des élèves à anticiper une construction : « Vous avez déjà construit deux carrés, quelle pourrait-être la dimension du carré suivant ? Combien de carrés unités devrez-vous utiliser pour le construire ? »

↪ pour construire un carré, on peut placer plusieurs lignes d'un même nombre de carrés les unes au-dessus/en-dessous des autres, puis vérifier qu'il y a autant de lignes que de carrés dans la ligne ; de même pour les colonnes ;

↪ la longueur des côtés des carrés construits est 1 ou 2 ou 3 ou 4... unités de longueur (longueur du côté du carré unité) ;

↪ il est possible de prévoir le nombre de carrés unités nécessaires pour construire un nouveau carré.



Enseignant

L'enseignant invite les élèves à dessiner leurs constructions sur le papier quadrillé de la fiche et à déterminer le périmètre et l'aire de chacun des carrés.

L'enseignant veillera particulièrement à renforcer les deux usages des formules de périmètre et d'aire (anticipation, validation) par des questionnements du type ci-contre.

L'enseignant copie au tableau (ou projette au rétroprojecteur) le même tableau avec les figures dans la perspective de l'exploitation des résultats obtenus.

Il organise la mise en commun qui a pour but de déterminer les mesures des périmètres et aires, de les justifier et de les différencier à partir des nombres.

Activité de la classe

Les élèves dessinent les carrés et notent le périmètre et l'aire de chacun comme le montre le tableau ci-dessous.

Côté (ul)	Dessin géométrique	Périmètre (ul)	Aire(ua)
1		4	1
2		8	4
3		12	9
4		16	16

Les formules de calcul du périmètre et de l'aire sont à utiliser au cours de la construction du tableau, en vue soit d'anticiper une réponse soit de la valider.

↪ Anticipation – Si le carré est construit en juxtaposant 5 carrés unités sur son côté, combien de carrés unités contiendra son aire ?
 $Aire = C \times C = 5 \times 5 \times ua = 25ua$

↪ Validation – (Tel élève) nous dit que l'aire du « carré de 5 unités de côté » contient 25 unités d'aire ! Comment savoir si cela est correct ? On sait que la formule de l'aire des carrés c'est $C \times C$, donc ...

Les élèves expriment les réponses obtenues et les justifient.



Enseignant

Les différences de progression de suites de périmètres et d'aires numériques peuvent aussi être montrées dans le registre géométrique. Ceci peut être réalisé soit par un élève soit par l'enseignant (figure ci-contre).

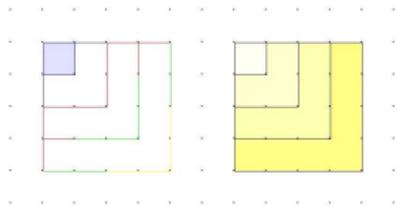
Activité de la classe

Les élèves observent et expriment des régularités dans chacune des suites de nombres.

↪ Une différence de 4 entre deux périmètres consécutifs ; une progression de 4 à chaque périmètre ; ...

↪ Une différence sans cesse plus grande entre deux aires consécutives : +3, +5, +7, ...

Périmètre et aire sont donc bien deux grandeurs différentes puisque pour les mêmes figures, elles possèdent des valeurs numériques différentes.



Pour le périmètre :

Pour construire un carré dont le côté mesure une unité de plus que celui d'un autre carré, on peut imaginer utiliser les segments unités composant les côtés du carré plus petit (segments qui peuvent être matérialisés par des baguettes magnétiques ou des transparents), qu'on les dispose pour former un ou deux angles droits et que l'on y adjoigne quatre segments unités.

Ce travail géométrique peut être matérialisé à l'aide de baguettes de bois ou de transparents.



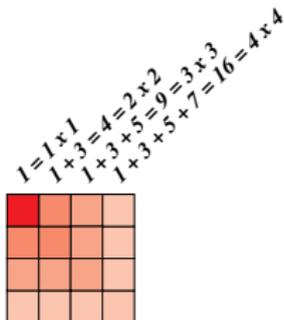
Différenciation géométrique des suites de périmètres et d'aires

Pour l'aire :

En adjoignant une bande de carrés unités autour de deux des côtés d'un carré, on obtient un nouveau carré dont le côté mesure une unité de plus que celui du précédent.

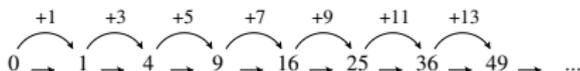
Ainsi, le long de deux côtés adjacents du carré d'aire égale à une unité d'aire, on ajoute trois carrés unités ; le long de deux côtés adjacents du carré d'aire égale à quatre unités d'aire, on ajoute cinq carrés unités. . .

À nouveau, ce travail peut être matérialisé au tableau avec des formes magnétiques. L'utilisation de transparents et d'un rétroprojecteur peut aussi être performante.



Cette démarche, située dans le cadre géométrique, correspond dans le cadre numérique au théorème d'après lequel le carré de tout nombre naturel n est égal à la somme des n premiers nombres impairs.

Au-delà, on peut dire que « tout carré d'un nombre naturel peut être décomposé en un somme de nombres impairs ».



Par exemple, $25 = 9 + 7 + 5 + 3 + 1$.

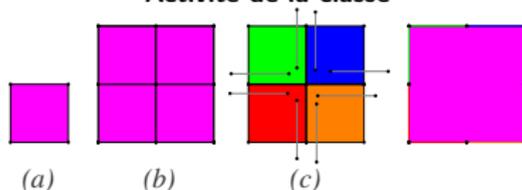


Explications géométrique et numérique de la progression de la suite des périmètres

Enseignant

La progression de la suite de périmètres peut encore être montrée dans la complémentarité des registres géométrique et numérique. À nouveau, ceci peut être réalisé soit par un élève soit par l'enseignant (figure ci-contre).

Activité de la classe



Cette explication peut être utilement matérialisée par des baguettes magnétiques au tableau ou des transparents, voire des bâtonnets de bois au cours d'une explication autour d'une table.

Prenons par exemple le carré de 1 unité d'aire (a) et celui de 4 unités d'aire (b) comme sur la figure ci-dessus. Et imaginons que chaque unité de longueur soit matérialisée par un bâtonnet.

Le carré de 1 unité d'aire possède un périmètre de 4 unités de longueur (4 bâtonnets). Pour obtenir le carré de 4 unités d'aire, on lui juxtapose 3 carrés d'une unité d'aire, soit 3 périmètres de 4 unités de longueur (3×4 bâtonnets), ce qui correspond à ce que l'on voit à la figure (b). Au total, on a donc ajouté 12 unités de longueur au périmètre du premier carré.

Or, le périmètre est la mesure du pourtour de la forme, il faut donc ôter tous les bâtonnets à l'intérieur de celle-ci, soit 4×2 bâtonnets, ce que montre la figure (c).

Au total, au périmètre du premier carré, on a ajouté 12 unités de longueur moins 8 unités de longueur situées à l'intérieur soit 4 unités de longueur.

Et ainsi de suite pour tout couple de carrés directement successifs dans la suite des carrés construits à partir d'unité entière.



En conclusion

Cette activité avait pour objectif d'employer des savoirs antérieurs pour résoudre un problème de géométrie (assembler des carrés unités pour construire des carrés) et de grandeurs (déterminer des périmètres et des aires, différencier ces deux grandeurs).

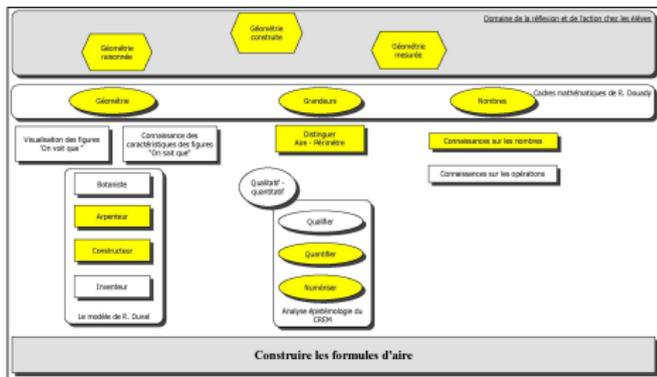
Pendant il se peut que pour certains élèves cette activité ait permis de rappeler ou de renforcer l'acquisition de ces savoirs relatifs au périmètre et à l'aire des carrés.

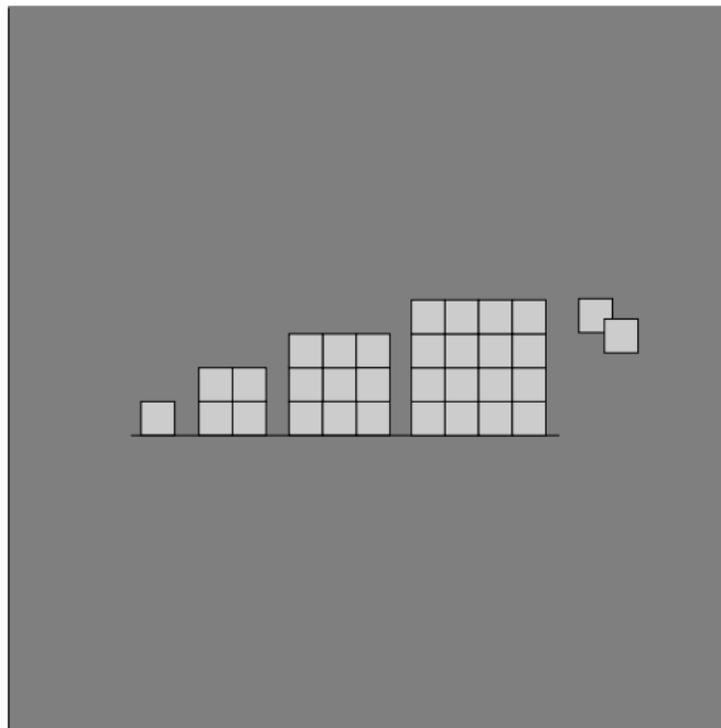
Cette activité avait également pour objectif de confronter les élèves à ce que R. Duval nomme la vision de type *constructeur*.

Enfin, cette activité avait pour objectif d'amener les élèves à utiliser plusieurs cadres mathématiques dans une même activité (géométrie et nombres), et à justifier certains résultats à partir de ces cadres .

Les manipulations proposées à l'aide des bâtonnets ou des formes ont un intérêt tout particulier dans la différenciation des concepts de périmètre et d'aire d'une part et dans la construction de la vision géométrique chez les élèves. Si les manipulations sont effectivement réalisées, avec les bâtonnets ce sont bien des segments (unité de longueur) que l'on manipule, avec les formes ce sont des surfaces possédant une aire qui sont utilisées.

Pour situer l'activité par rapport au modèle présenté dans l'introduction :







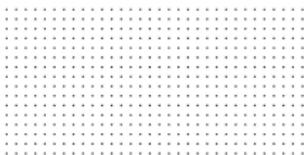
- ▶ Objectifs conceptuels
 - ↪ Institutionnaliser la formule de l'aire des carrés.
- ▶ Objectifs procéduraux
 - ↪ Exploiter le cadre numérique pour résoudre des problèmes de géométrie et de grandeurs.
- ▶ Compétences
 - ↪ Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.
 - ↪ Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).
 - ↪ Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...]



Pierre possède 32 petits carrés unités. Il affirme qu'en assemblant certains petits carrés unités il peut construire au maximum quatre carrés différents, et qu'il lui restera deux petits carrés unités.



Et si Pierre possédait 320 petits carrés, combien de carrés différents, au maximum, pourrait-il construire ?



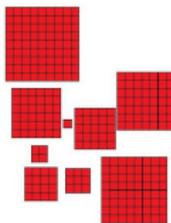
Ouvrir la fiche 2.2 du document fiches10-12.pdf

- ▶ **Matériel pour les élèves**
Fiche de travail, crayon, gomme.
- ▶ **Fichier informatique**
Aucun.
- ▶ **Matériel pour l'enseignant**
Si possible, des carrés magnétiques pour réaliser les constructions au tableau, ou transparents et rétroprojecteur. L'usage d'un quadrillage sur le tableau peut aussi être efficace.

Enseignant

L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire, à leur demande, il explique la consigne oralement.

Anticipation de la réponse – Illusion de proportionnalité



C x C		
1 x 1	1	1
2 x 2	+ 4	5
3 x 3	+ 9	14
4 x 4	+ 16	30
5 x 5	+ 25	55
6 x 6	+ 36	91
7 x 7	+ 49	140
8 x 8	+ 64	204
9 x 9	+ 91	295
		285

Côté	Aire carré	Aire totale
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
7	49	140
8	64	204
9	81	295
10	100	395

Activité de la classe

Les élèves prennent connaissance de la consigne et résolvent le problème proposé. Ils utilisent les connaissances acquises au cours de l'activité précédente. Durant celle-ci, les éléments géométriques avaient été mis en correspondance avec les éléments numériques.

Anticipation de la réponse – Illusion de proportionnalité

À partir des nombres contenus dans l'énoncé, 320 étant le décuple de 32, il se peut que les élèves anticipent le nombre de carrés possibles et justifient leur proposition par une « illusion de proportionnalité » : « Pierre a fait 4 carrés avec 32 unités, il en fera 40 avec 320 ! ». Dans ce cas, sachant que la notion de proportionnalité est complexe et qu'elle se construit tout au long de la scolarité obligatoire, on demandera aux élèves de dessiner les carrés afin de confirmer ou d'infirmer leur proposition. Au cours du dessin des carrés, les élèves infirmeront leur proposition.

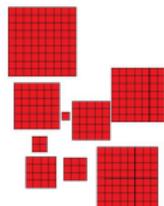
La résolution du problème peut être réalisée soit par une voie géométrique, soit par une voie numérique, soit en partie par l'une et l'autre simultanément ou consécutivement. Cependant, quelle que soit la voie choisie, les élèves doivent comprendre qu'il faut débiter la recherche avec les carrés les plus petits pour pouvoir en construire le plus possible.

Le dessin des figures peut cependant s'avérer long et fastidieux. Par contre, l'utilisation des nombres permet rapidement de résoudre les problèmes. Il est ensuite plus aisé de dessiner les figures à partir des nombres trouvés.

Enseignant

L'enseignant observe le travail des élèves et, collectivement ou individuellement, rappelle l'activité précédente si nécessaire. Les liens avec les démarches géométriques et numériques peuvent être rappelés.

Activité de la classe



C x C	1 x 1	1
	2 x 2	+ 4
	3 x 3	+ 9
	4 x 4	+ 16
	5 x 5	+ 25
	6 x 6	+ 36
	7 x 7	+ 49
	8 x 8	+ 64
	9 x 9	+ 91
		<hr/>
		285

Côté	Aire carré	Aire totale
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
7	49	140
8	64	204
9	81	285
10	100	385

↪ Si les élèves choisissent uniquement la voie géométrique, cela risque d'être long et fastidieux. Le choix des 320 carrés unités n'est pas anodin. Cela allonge le temps de réalisation de la tâche pour inciter les élèves à choisir une autre voie de résolution, plus rapide celle-là.

↪ Si les élèves dessinent les premiers carrés, leur faire remarquer que Pierre les a déjà dessinés sur le haut de la fiche. Leur proposer de commencer à partir du dernier carré dessiné par Pierre. C'est aussi les emmener vers la voie numérique.

↪ Certains élèves, peu nombreux, vont par contre réaliser une analyse numérique de la situation, choisissant ainsi la voie de la géométrie mesurée et raisonnée. Connaissant la façon de calculer l'aire d'un carré et sachant que la somme des aires ne peut dépasser 320 carrés unités, la recherche du nombre de carrés peut s'effectuer en utilisant un tableau comme support de la réflexion ou encore à partir de calculs comme exposés ci-dessus également.

Enseignant

L'enseignant organise la mise en commun. Il reproduit au tableau les différentes démarches utilisées par les élèves. Il incite les élèves à expliciter les ressemblances et les différences avec l'activité précédente.

Activité de la classe

La résolution numérique peut se faire selon deux modes, l'un additif, l'autre soustractif comme le montre la figure ci-dessous.

Résolution additive.

1	4	9	16	25	36	49	64	100	
+	1	5	14	30	55	91	140	204	304

Résolution soustractive.

320	319	315	306	290	265	229	180	116	35
-	1	4	9	16	25	36	49	64	100

Pierre peut donc construire 9 carrés différents au maximum. Il lui reste 35 carrés unités avec lesquels il ne peut construire le 10^e carré.

La mise en commun est organisée en deux phases. D'abord l'expression des réponses et l'explication des démarches par les élèves. Ensuite, la mise en évidence des liens entre les différentes démarches, notamment ceux concernant les représentations utilisées : dessin géométrique, calculs, tableau.

Au terme de l'activité, les formules de périmètre et d'aire sont institutionnalisées et notées dans le référentiel. En ce qui concerne le périmètre, nous proposons que la formule initiale prenne la forme d'une addition, soit $P = C + C + C + C$. La transformation de cette formule en une multiplication s'argumente à partir de la propriété des opérations disant qu'une addition itérée peut être traduite par une multiplication. Ainsi, la formule peut être : $P = C \times 4$. Il nous semble important que ceci soit expliqué aux élèves.

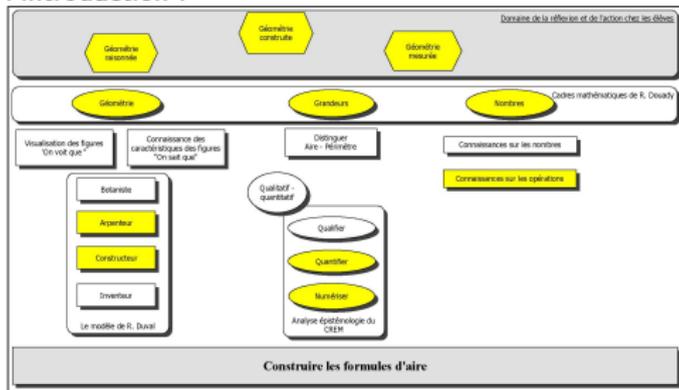
Cette activité avait pour objectif d'employer des savoirs antérieurs pour résoudre un problème de géométrie (construire des carrés) et de grandeurs (déterminer des aires).

L'institutionnalisation des formules de périmètre et d'aire est également un des objectifs de cette activité.

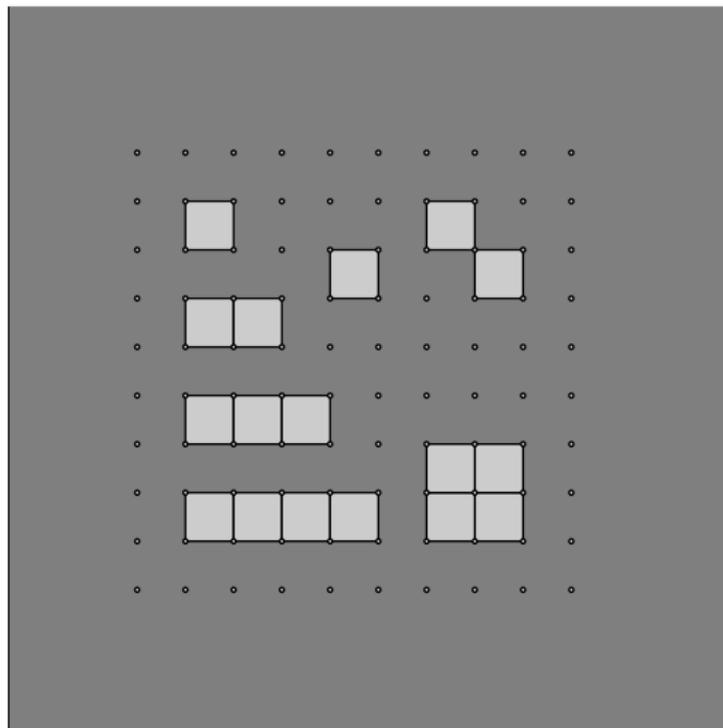
Amener les élèves à utiliser plusieurs cadres mathématiques dans une même activité (géométrie et nombres), et justifier certains résultats à partir de ces cadres est aussi un objectif important rencontré au cours de l'activité.

Il nous semble aussi qu'il ne faut pas trop rapidement fixer la formule du périmètre comme une multiplication. Initialement, le périmètre est l'addition des longueurs des côtés d'une forme. Dans le cas des carrés, l'addition itérée des quatre côtés isométriques peut être traduite par une multiplication. Cette traduction s'argumente à partir des propriétés des opérations.

Pour nous situer par rapport au modèle présenté dans l'introduction :



Une collection de carrés et de rectangles

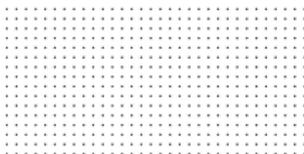




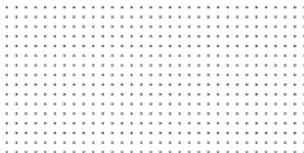
- ▶ Objectifs conceptuels
 - ↪ Institutionnaliser la formule de l'aire des rectangles.
- ▶ Objectifs procéduraux
 - ↪ Exploiter le cadre numérique pour résoudre des problèmes de géométrie et de grandeurs.
- ▶ Compétences
 - ↪ Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.
 - ↪ Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).
 - ↪ Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...]
- ▶ *Commentaires*
 - ↪ *Cette activité est à la fois une application des procédés employés et mis en évidence au cours de l'activité précédente et une nouvelle situation qui devrait permettre d'utiliser et d'institutionnaliser les savoirs relatifs à l'aire des rectangles.*



Pierre possède 32 petits carrés unités. Il affirme qu'en en assemblant, il peut construire au maximum 8 rectangles différents, et qu'il lui restera 1 petit carré unité. Peux-tu dessiner ces 8 rectangles ?



Et si Pierre possédait 64 petits carrés, combien de rectangles différents, au maximum, pourrait-il construire ?

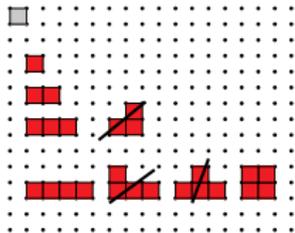


Ouvrir la fiche 2.3 du document fiches10-12.pdf

- ▶ **Matériel pour les élèves**
Fiche de travail, crayon, gomme.
- ▶ **Fichier informatique**
Aucun.
- ▶ **Matériel pour l'enseignant**
Si possible, des carrés et des rectangles magnétiques pour réaliser les constructions au tableau, ou transparents et rétroprojecteur.
L'usage d'un quadrillage sur le tableau peut aussi être efficace.

Enseignant

L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire, à leur demande, il explique la consigne oralement.



Activité de la classe

Les élèves prennent connaissance de la consigne et résolvent le problème proposé. Ils utilisent les connaissances acquises au cours des deux premières activités. Durant celles-ci, des éléments géométriques avaient été mis en correspondance avec des éléments numériques.

Comme pour les problèmes précédents, la résolution du problème peut être réalisée soit par une voie géométrique, soit par une voie numérique, soit en partie par l'une et l'autre simultanément ou consécutivement.

Si la recherche des carrés et des rectangles se réalise dans le cadre géométrique, une façon de faire est de commencer par l'aire la plus petite et d'ajouter pas à pas une unité d'aire. À chaque pas, il faut rechercher tous les carrés et rectangles pouvant posséder cette aire. Les formes ne correspondant pas au critère visuel de carré ou de rectangle sont alors rejetées (vision de type « botaniste »).

Cependant, lorsque les élèves doivent assembler plus de cinq carrés unités, le nombre de possibilités d'assemblages augmente rapidement. La démarche doit alors évoluer. Les élèves doivent rechercher le carré et les rectangles dont l'aire équivaut au nombre atteint à partir d'une démarche numérique.

Enseignant

Aire	Dimensions	Forme
1	1×1	carré
2	1×2	rectangle
3	1×3	rectangle
4	1×4 2×2	rectangle carré
5

Activité de la classe

Nous explorerons plus particulièrement ci-dessous la démarche de géométrie raisonnée et mesurée. Elle s'appuie sur la connaissance de la formule de l'aire des carrés et des rectangles ou à tout le moins sur la connaissance d'un procédé « *lignes \times colonnes* ». Ce procédé fait également appel à la connaissance des nombres et plus particulièrement à la connaissance de la décomposition d'un nombre en un produit de deux facteurs, ou encore à celle des diviseurs d'un nombre. La résolution du problème peut s'effectuer comme suit :

↪ d'abord comprendre qu'avec un seul carré unité, on ne peut constituer qu'un seul « carré ou rectangle » ;

↪ ensuite se demander combien de carrés et rectangles différents nous pouvons construire avec deux carrés unités. Se rendre compte qu'il n'y a qu'une seule solution : le rectangle de $2ul \times 1ul$;

↪ de même pour trois carrés unités ;

↪ pour quatre, se rendre compte que deux solutions sont possibles : 4 peut-être décomposé de deux manières : 1×4 et 2×2 ;

↪ ainsi de suite...

Cette démarche peut se représenter sous la forme d'un tableau auquel est associé le dessin des formes sur le papier pointé quadrillé.

Simultanément, les élèves doivent contrôler le nombre de carrés unités utilisés et s'assurer de ne pas dépasser les 32 unités annoncées. Comme dans la situation des « carrés de Pierre », une procédure additive ou soustractive peut être employée.

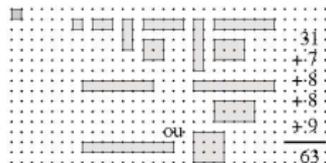
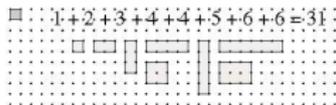
Aires	Figures	Unités	Reste
$1 = 1 \times 1$		1	31
$2 = 1 \times 2$		2	29
$3 = 1 \times 3$		3	26
$4 = 1 \times 4$ $4 = 2 \times 2$		4	24
$5 = 1 \times 5$		5	19
$6 = 1 \times 6$ $6 = 2 \times 3$		6	13



Première mise en commun et résolution du deuxième problème

Enseignant

L'enseignant organise la mise en commun



L'enseignant veille à rappeler les démarches utilisées au cours des problèmes précédents. Il invite aussi les élèves à se servir des démarches et des savoirs mis en évidence au cours de la première partie de l'activité.

Activité de la classe

Celle-ci permet d'exposer la solution de ce premier problème. Les formes peuvent être réalisées au tableau ou projetées.

Les démarches des élèves sont énoncées. Les élèves sont aussi invités à justifier leurs réponses ou démarches. Ces justifications s'appuient sur les propriétés des formes, des nombres et des opérations.

Les liens entre cadres géométriques et numériques sont à nouveau mis en évidence.

Le procédé de calcul des aires *lignes* \times *colonnes* ou la formule de l'aire du rectangle peut aussi intervenir comme justification des réponses.

La résolution du second problème est sensiblement pareille à celle du premier. Il est souhaitable que les élèves s'appuient également sur le résultat de celui-ci pour débiter ce second problème. Ainsi, comme pour les « carrés de Pierre », les élèves peuvent commencer à partir des 8 formes et 31 unités d'aire comme le montre la figure ci-contre.

La recherche des carrés et des rectangles à partir d'une démarche de géométrie dessinée uniquement est particulièrement fastidieuse car comme nous l'avons énoncé ci-dessus, à partir de 5 carrés, le nombre d'assemblages possibles s'accroît rapidement. Il est donc souhaitable de rappeler les démarches de géométrie mesurée aux élèves en difficulté. Le lien avec les démarches notées au tableau et utilisées pour le premier problème doit être mis en évidence.



Consignes

L'enseignant organise la correction.

L'enseignant organise la mise en commun des réponses et des démarches.

La formule de l'aire des rectangles est rappelée et institutionnalisée.

Activité de la classe

La mise en commun s'organise en deux phases.

↔ Au cours de la première, les réponses et les démarches des élèves sont énoncées. Les deux solutions sont mises en évidence. Des dessins peuvent être réalisés au tableau. Les élèves sont aussi invités à justifier leurs réponses ou démarches. Ces justifications sont énoncées également à partir des propriétés des formes, des nombres et des opérations.

↔ Au cours de la deuxième phase, les liens entre les cadres géométrique et numérique sont à nouveau mis en évidence.

↔ La formule de l'aire est rappelée et ses utilisations soit pour obtenir une réponse soit pour valider un comptage à partir du quadrillage sont énoncées.



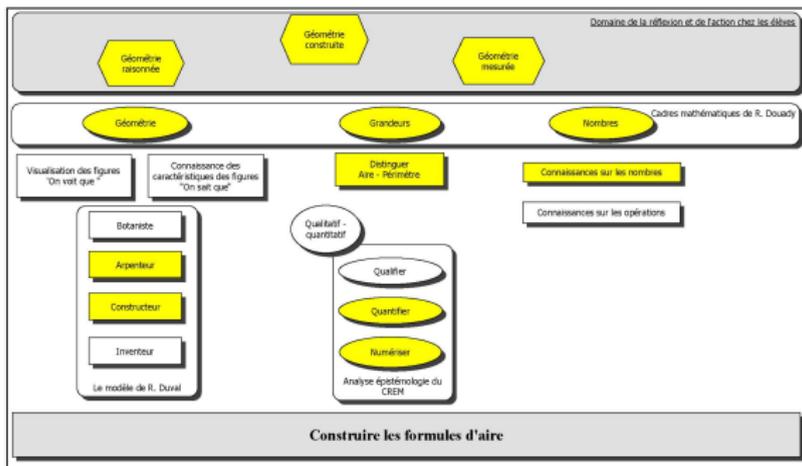
En conclusion

Cette activité avait pour objectif d'employer des savoirs antérieurs pour résoudre un problème de géométrie (construire des carrés et des rectangles) et de grandeurs (déterminer des aires).

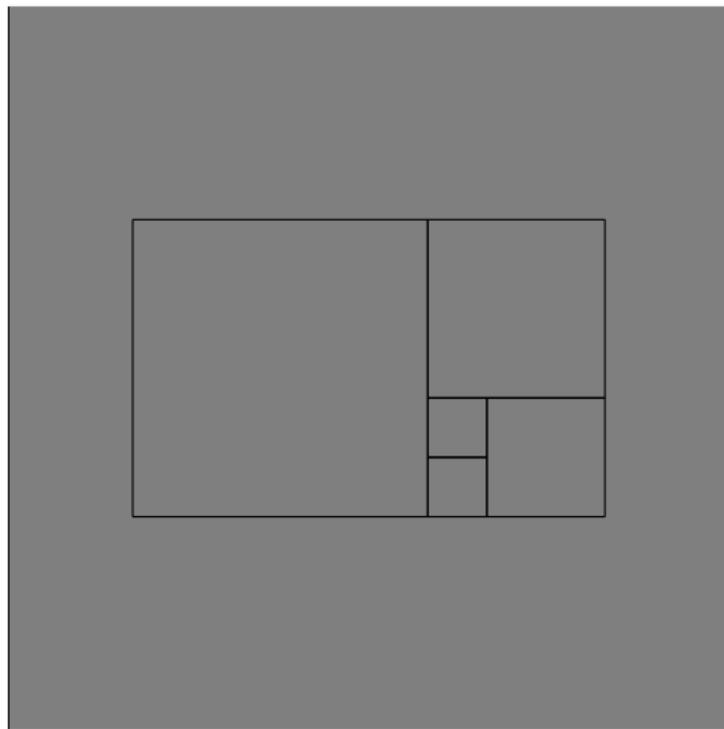
L'institutionnalisation des formules d'aire des rectangles est également un des objectifs de cette activité.

Amener les élèves à utiliser plusieurs cadres mathématiques dans une même activité (géométrie et nombres) et justifier certains résultats à partir de ces cadres est aussi un objectif important rencontré au cours de l'activité.

Pour nous situer par rapport au modèle présenté dans l'introduction :



Un puzzle de carrés et de rectangles



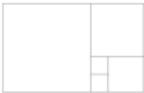


- ▶ Objectifs conceptuels
 - ↪ Périmètre et aire des carrés et des rectangles.
 - ↪ Les caractéristiques géométriques des carrés, plus particulièrement l'isométrie des côtés.
 - ↪ Différencier périmètre et aire.
- ▶ Objectifs procéduraux
 - ↪ Utiliser les caractéristiques géométriques des figures pour résoudre un problème de grandeurs.
- ▶ Compétences
 - ↪ Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.
 - ↪ Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).
 - ↪ Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...]



 Ouvrir **Apprenti Géomètre** et choisir le niveau B.

 Quel est le périmètre du rectangle construit à partir de l'assemblage de ces 5 carrés? Quelle est son aire?
Le côté du plus petit carré mesure 2 unités de longueur.



Le côté du plus petit carré mesure 2 unités de longueur.



Ouvrir la fiche 2.2 du document [fiches10-12.pdf](#)

► **Matériel pour les élèves**

Fiche de travail, crayon, gomme, équerre, compas.

► **Fichier informatique**

puzzlecarrés.fag

► **Matériel pour l'enseignant**

Si possible, des carrés et des segments magnétiques pour réaliser les constructions au tableau, ou transparents et rétroprojecteur.

Latte, équerre et compas de tableau.

L'utilisation d'un projecteur multimédia associé à un ordinateur est aussi efficace car ce dispositif permet en plus de montrer à l'ensemble des élèves les manipulations à réaliser avec **Apprenti Géomètre**.

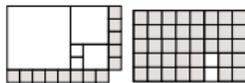
Activités de la classe

L'enseignant peut aussi proposer aux élèves de reproduire ce puzzle de cinq carrés aux instruments, sur feuille vierge ou quadrillée. Cette activité aura pour objet de confronter les élèves aux caractéristiques des carrés, au report de mesure à l'aide du compas et plus particulièrement encore à la structuration de la configuration géométrique du puzzle. Cette activité complexe peut être proposée aux élèves regroupés par paire ou trio.

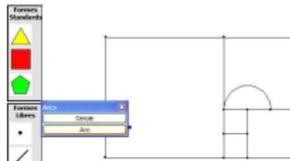
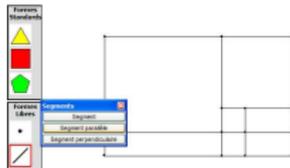
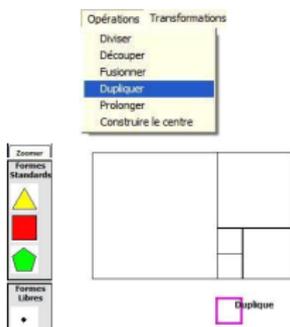


Pour résoudre le problème proposé par une voie géométrique, deux procédures peuvent être employées. Celle-ci seront détaillées dans les pages qui suivent. Nous exposons ci-dessous leurs réalisations avec **Apprenti Géomètre**.

- Dupliquer des carrés pour reporter des longueurs ou pour paver le rectangle.



- Utiliser les parallèles et perpendiculaires pour structurer le dessin et reporter des longueurs.
- Utiliser les arcs de cercles pour reporter des longueurs.





- ▶ **Les variables didactiques** : nous avons volontairement fixé la longueur du côté du plus petit carré à 2 unités de longueur. De cette manière, l'aire de ce carré est de 4 unités. Si nous fixons la longueur du côté du carré à 1 unité de longueur, l'aire est de 1 unité et nous ne pouvons déterminer la signification de la réponse de l'élève. Ainsi, si l'élève propose 1 pour l'aire du carré, nous ne savons si cette réponse est le fruit d'un calcul (1×1) ou si l'élève a vu « un carré », donc que l'aire vaut 1. C'est donc pour éviter l'ambiguïté de la réponse 1 que nous fixons la longueur du côté à 2 unités de longueur.
- ▶ **La résolution du problème** : deux grands types de résolution peuvent être employés par les élèves : celles liées à une démarche de géométrie mesurée, celles liées à une démarche de géométrie raisonnée.
 - ↪ Les démarches liées à la géométrie mesurée ont recours à des reports de mesures, à des pavages, à la quantification ou à la numérisation pour connaître le périmètre et l'aire du rectangle.
 - ↪ Les démarches liées à la géométrie raisonnée ont recours aux caractéristiques des formes puis à la numérisation pour connaître le périmètre et l'aire du rectangle.Nous détaillons ces démarches ci-après.

Enseignant

L'enseignant distribue la fiche et propose aux élèves d'en prendre connaissance. Si nécessaire, à leur demande, il l'explique oralement.

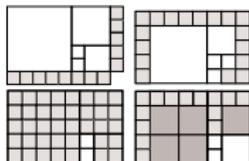
Activités de la classe

Les élèves prennent connaissance de la consigne, sélectionnent le fichier requis et résolvent le problème proposé. Ils utilisent les connaissances acquises au cours des activités précédentes.

Dans un premier temps, sans doute des élèves vont-ils vouloir mesurer les dimensions (*longueur et largeur*) du rectangle. Avec **Apprenti Géomètre**, les élèves n'ont cependant pas accès à la mesure au sens usuel, c'est-à-dire pour obtenir une mesure composée d'un nombre et d'une unité conventionnelle. D'autres démarches doivent donc être envisagées.

- Des démarches liées à la géométrie mesurée – Utiliser des copies de carrés

Enseignant



Activités de la classe

Les élèves mesurent les côtés du rectangle en reportant des copies (après duplication) du petit carré le long du périmètre ou du demi-périmètre, à l'intérieur ou à l'extérieur du rectangle.

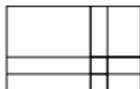
Ensuite, ils utilisent une démarche quantitative en comptant soit une démarche de numérisation en appliquant une formule pour connaître le périmètre et l'aire du rectangle.

Des situations intermédiaires peuvent apparaître : les élèves pavent le rectangle à l'aide de petits carrés et de carrés moyens ; ensuite ils calculent les aires des formes intérieures (petits carrés et carrés moyens) ; enfin ils additionnent ces mesures.

- Des démarches liées à la géométrie mesurée – Reporter des longueurs pour quadriller

Enseignant

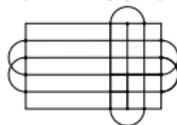
Activités de la classe



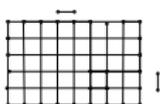
Pour les élèves, quadriller le rectangle peut être un moyen de résoudre le problème.



↪ Dans ce cas de figure, les élèves doivent utiliser des segments parallèles ou perpendiculaires pour prolonger des côtés existant.



↪ reporter des mesures à l'aide de copie de segment ou à l'aide de l'arc de cercle (ou du cercle) ;

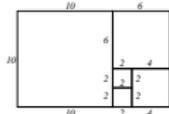
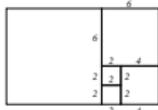
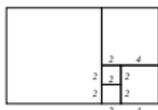


↪ se servir du quadrillage ainsi dessiner pour déterminer le périmètre et l'aire par comptage ou numérisation.

► Des démarches liées à la géométrie raisonnée

Cette démarche est probablement guidée par la volonté d'utiliser une formule ou à tout le moins une structure multiplicative de type « longueur d'un côté \times longueur d'un côté ».

Enseignant



Activités de la classe

Dans cette voie s'appuyant sur la géométrie raisonnée, il s'agit de faire appel aux caractéristiques géométriques des formes dans un premier temps : celles contenues dans le rectangle sont toutes carrées, donc possèdent chacune quatre côtés isométriques.

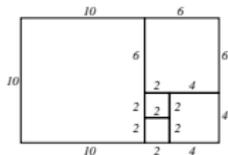
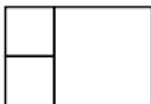
Ainsi les quatre côtés du petit carré mesurent 2 unités de longueur comme le montre la figure ci-contre.

Ensuite, il s'agit de « voir » que le deuxième petit carré est juxtaposé au premier, donc que les deux côtés juxtaposés ont même longueur. Ainsi, comme les quatre côtés sont isométriques, les autres côtés de ce deuxième carré valent aussi 2 unités de longueur.

Enfin, il reste à « voir » que le carré juxtaposé à ces deux petits carrés possède un côté de longueur 4 unités. De même pour les trois autres côtés. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les mesures de tous les côtés.

À partir de ces mesures, les élèves déterminent le périmètre et l'aire du rectangle par une démarche de numérisation en employant les formules par exemple.

Enseignant



Activités de la classe

Pour les élèves, il s'agit de :

↪ comprendre (*voir*) que chaque carré plus grand est construit à partir de côtés de carrés plus petits ;

↪ comprendre que les mesures des côtés des carrés plus grands peuvent donc être connues à partir des mesures des côtés des carrés plus petits ;

↪ utiliser la propriété d'isométrie des côtés des carrés pour connaître les mesures des côtés du rectangle ;

↪ calculer le périmètre du rectangle en tenant compte de la longueur du côté du petit carré : soit $(5 + 8 + 5 + 8) \times 2 = 52$, soit $10 + 16 + 10 + 16 = 52 \dots$

↪ calculer l'aire du rectangle en tenant compte de la longueur du côté du petit carré : soit $(8 \times 5) \times 4 = 160$, soit $16 \times 10 = 160 \dots$

- Entre les deux démarches qui viennent d'être décrites, il existe bien évidemment des voies médianes dans lesquelles, les élèves utilisent parfois des démarches de géométrie mesurée, parfois des démarches de géométrie raisonnée. Ainsi, selon la ou les démarches utilisées par les élèves l'enseignant peut évaluer la stabilité et la prégnance de leurs connaissances.



Enseignant

L'enseignant organise la mise en commun et la synthèse.

Le matériel disponible aide à l'exposé des démarches par les élèves.

Activités de la classe

La mise en commun permet d'énoncer les solutions (mesures du périmètre et de l'aire) et de mettre en évidence les différentes démarches possibles. Celles-ci sont énoncées par les élèves avec le support du matériel.

Des liens entre ces démarches peuvent être mis en évidence.

La verbalisation de ces démarches, ainsi que leurs justifications, est une phase importante de cette mise en commun.

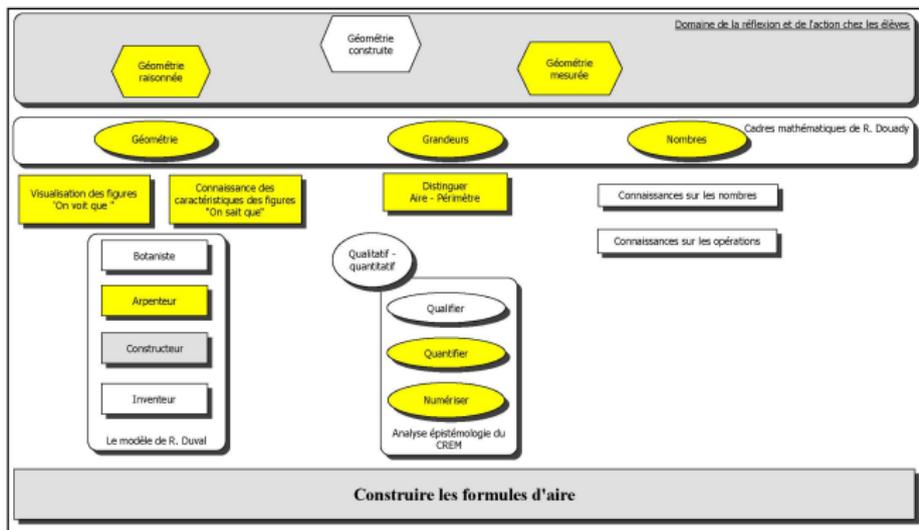
Une synthèse écrite présentant les différentes démarches et plus particulièrement celles concernant la géométrie raisonnée peut être réalisée par les élèves sous la forme d'une narration.

Les formules de périmètre et d'aire des rectangles sont énoncées et notées dans un référentiel.

Cette activité avait pour objectif d'institutionnaliser les formules de périmètre et d'aire des rectangles et de faire comprendre aux élèves qu'il est efficace d'employer des savoirs relatifs aux caractéristiques des formes géométriques pour résoudre des problèmes concernant leur périmètre et leur aire.

Enfin, cette activité avait pour objectif d'amener les élèves à utiliser plusieurs cadres mathématiques dans une même activité (géométrie et nombres), et à justifier certains résultats à partir de ces cadres .

Pour nous situer par rapport au modèle présenté dans l'introduction :

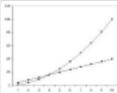


Périmètre –
Aire –

Le périmètre et l'aire sont deux grandeurs différentes.

Côté (m)	Rectangles géométriques	Distance (m)	Aire (m ²)
1		4	1
2		8	4
3		12	9
4		16	16

Côté (m)	Périmètre (m)	Aire (m ²)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16

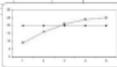


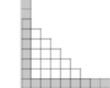
© Ecole de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2009. Pôle 1.1.1

Périmètre –
Aire –

Le périmètre et l'aire sont deux grandeurs différentes.

Côté (m)	Périmètre (m)	Aire (m ²)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16

© Ecole de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2009. Pôle 1.1.1

► Objectifs conceptuels

↪ Synthétiser les savoirs et démarches rencontrés au cours des quatre activités précédentes.

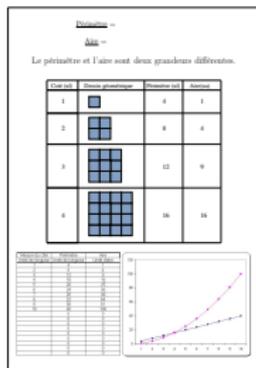
► Objectifs procéduraux

► Compétences

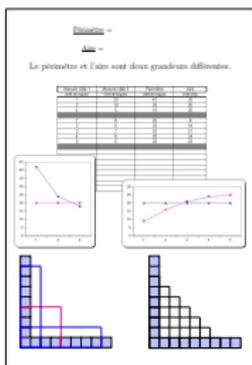
↪ Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.

↪ Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...], aires [...]).

↪ Construire et utiliser des démarches pour calculer [...] des aires [...]



Ouvrir la fiche du document fiches10-12.pdf



Ouvrir la fiche du document fiches10-12.pdf

► **Matériel pour les élèves**

Fiche de synthèse, stylo, crayon, gomme.

► **Fichier informatique**

Aucun.

► **Matériel pour l'enseignant**

L'utilisation d'un vidéoprojecteur associé à un ordinateur permet de montrer les variations continues des valeurs des périmètres et aires en fonction des mesures des côtés des formes considérées. Dans ce cas, l'enseignant peut utiliser les fichiers informatiques `carrés.fag` et `rectangles.fag` disponibles sur le site du CREM.

Les graphiques peuvent cependant être réalisés au tableau. De même les élèves peuvent les tracer sur feuille quadrillée ou millimétrée.

L'utilisation de tableaux et graphiques sur transparents et d'un rétroprojecteur peut être efficace.

Enseignant

L'enseignant utilise un tableur pour montrer des variations pour les carrés. Il incite les élèves à s'exprimer.

Activités de la classe

Exposer un tableau comme ci-dessous. Celui-ci est réalisé à partir d'un tableur, mais il peut être conçu directement au tableau ou sur transparent.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4						
5		Dimension du côté (unité de longueur)	Périmètre (unité de longueur)	Aire (unité d'aire)		
6		4	16	16		
7		2	8	4		
8		3	12	9		
9		4	16	16		
10		5	20	25		
11		6	24	36		
12		7	28	49		
13		8	32	64		
14		9	36	81		
15		10	40	100		
16		0	0	0		
17		0	0	0		
18		0	0	0		
19		0	0	0		
20		0	0	0		
21		0	0	0		
22		0	0	0		
23		0	0	0		
24		0	0	0		
25		0	0	0		
26		0	0	0		
27						
28						

Amener les élèves à reconnaître les valeurs déjà observées lors des activités précédentes.

Entrer de nouvelles valeurs pour le côté et observer les valeurs pour le périmètre et l'aire.

Dans le cas d'un tableau non informatisé, les valeurs pour le périmètre et l'aire seront à calculer en utilisant les formules.

Dans le cas d'un tableur, l'enseignant incite les élèves à exprimer les formules inscrites dans le tableur qui permettent de calculer directement le périmètre et l'aire. Les formules sont dans ce cas des outils de validation pour vérifier les valeurs émises par le tableur.

Enseignant

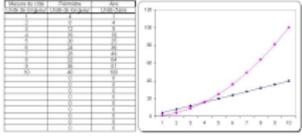
Mise en relation des données du tableau avec le graphique.

Distribuer la première fiche de synthèse.

Périmètre =
Aire =

Le périmètre et l'aire sont deux grandeurs différentes.

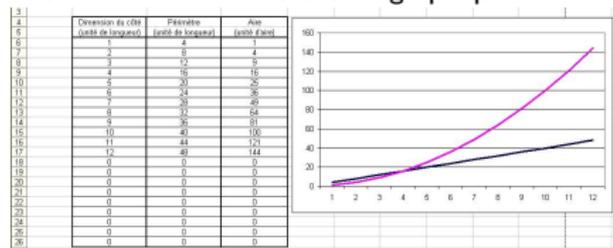
Côté (cm)	Donnée géométrique	Périmètre (cm)	Aire (cm ²)
1		4	1
2		8	4
3		12	9
4		16	16



Ouvrir la fiche du document [fiches10-12.pdf](#)

Activités de la classe

Construire le graphique associé au tableau comme ci-dessous et exprimer les liens entre le tableau et le graphique.



Amener les élèves à comprendre le lien entre le tableau de nombres et le graphique. Notamment, les relations entre les mesures des côtés et les abscisses du graphique d'une part, entre les valeurs des périmètres et des aires et les ordonnées de l'autre.

Demander aux élèves laquelle des deux « lignes » représente le périmètre, laquelle l'aire.

Inciter les élèves à justifier leur réponse.

Lire la synthèse et expliciter les liens entre celle-ci et le travail effectué auparavant.

Compléter la fiche de synthèse.

La fiche est proposée à titre d'exemple. Le tableau et le graphique peuvent être reproduits par les élèves sur feuille quadrillée ou millimétrée.



Enseignant

L'enseignant utilise un deuxième tableau pour montrer des variations pour des rectangles. Il incite les élèves à s'exprimer comme dans le cas du tableau pour les carrés.

Activités de la classe

Mesure côté 1 (unité de longueur)	Mesure côté 2 (unité de longueur)	Périmètre (unité de longueur)	Aire (unité d'aire)
2	1	6	2
2	2	8	4
2	3	10	6
2	4	12	8
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
1	6	14	6
2	5	14	10
3	4	14	12
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0
1	20	42	20
2	10	24	20
4	5	18	20
		0	0
		0	0
		0	0

Amener les élèves à expliquer les valeurs des périmètres et aires en fonction des mesures des côtés 1 et 2.

Entrer de nouvelles valeurs pour un côté et observer ou anticiper les valeurs pour le périmètre et l'aire.

Amener les élèves à exprimer les formules inscrites dans le tableau qui permettent de calculer directement le périmètre et l'aire.

Enseignant

Mise en relation avec le graphique.

Demander aux élèves quelle « ligne » représente le périmètre. De même pour l'aire.

Inciter les élèves à justifier leur réponse.

Activités de la classe

Demander aux élèves de s'exprimer par rapport aux variations du périmètre et de l'aire. Constaté différents cas : des périmètres constants et des aires variables ; des périmètres variables et des aires constantes ; des périmètres et des aires variables.

À l'occasion, le lien avec les diviseurs des nombres sera rappelé.

Construire et exposer le graphique associé au tableau comme ci-dessous.



Amener les élèves à comprendre le lien entre le tableau de nombres et les graphiques.

Associer chaque graphique à sa série de nombres. Distinguer périmètre et aire dans chaque graphique.



Activités de la classe

Enseignant

L'enseignant distribue la deuxième fiche de synthèse.

Lire la synthèse. Exprimer les liens avec le fichier utilisé ou les tableaux et graphiques tracés au tableau.

Compléter la synthèse.

Périmètre =
Aire =

Le périmètre et l'aire sont deux grandeurs différentes.

Mesure (cm)	Mesure (cm)	Périmètre (cm)	Aire (cm ²)
1	1	6	1
2	2	10	4
3	3	14	9
4	4	18	16
5	5	22	25
6	6	26	36
7	7	30	49
8	8	34	64
9	9	38	81
10	10	42	100

Ouvrir la fiche du document fiches10-12.pdf