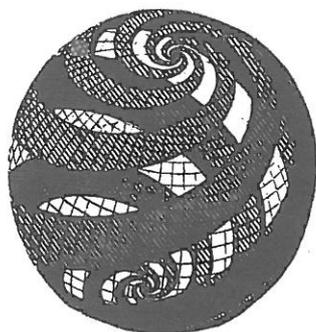


COLLECTION "DOCUMENTS DU CREM"

No 1 JUIN 1995

**Idées fondamentales
de la géométrie élémentaire
comme base pour le développement
de curriculum**

Exposé fait par Erich Wittmann (Universität Dortmund)
Compte rendu rédigé
par Noémie Etienne et Francis Buekenhout



CREM a.s.b.l.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Emile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique

Les enseignants ne disposent pas toujours de beaucoup de temps pour lire. Les bibliothèques des écoles ne sont parfois pas riches et les bibliothèques spécialisées ne sont pas souvent à portée. La collection

“Documents du CREM”

essaie de répondre à ces difficultés en rassemblant à l'intention des enseignants des documents sélectionnés pour leur qualité et leur lien avec l'activité en classe.

Le CREM a.s.b.l. a pour missions principales la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte et la formation continue des enseignants de mathématiques. Pour mener à bien ces missions, il a signé des conventions bilatérales d'entraide avec les groupes suivants :

- AHA, Approche Heuristique de l'Analyse
10 fond du Rondia 1348 Louvain-la-Neuve
Contact : M. Kryszynska, tél. (0)10 45 06 50
- CDS, Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut
Faculté des Sciences, 15 avenue Maistriau 7000 Mons
Contact : G. Noël, tél. (0)65 37 34 15
- GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique,
Département de Mathématiques de l'UCL,
2 chemin du Cyclotron 1348 Louvain-la-Neuve
Contact : C. Hauchart, tél. (0)10 47 32 72
- GEPEMA Groupe d'Etude sur les Premiers Enseignements de la Mathématique
Université de Mons-Hainaut, Faculté des Sciences, 15 avenue Maistriau 7000 Mons
Contact : P. Van Praag, tél. (0)65 39 34 17
- SBPMef, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
15 rue de la Halle 7000 Mons
Contact : G. Noël, tél.(0)65 37 34 15
- UEREM, Unité d'Etude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Institut Supérieur Industriel de Liège, 6 quai Gloesener 4020 Liège
Contact : A. Pétry, tél. (0)41 41 13 85
- UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Département de Mathématiques de l'ULB,
CP 216 boulevard du Triomphe 1050 Bruxelles
Contact : F. Buekenhout, tél. (0)2 650 58 64

©CREM a.s.b.l., août 1995

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.
5 rue Emile Vandervelde B-1400 Nivelles (Belgique)
Tél. 32 67 21 25 27 Fax : 32 67 21 22 02

Idées fondamentales de la géométrie élémentaire comme base pour le développement de curriculum

Erich Ch Wittmann
Universität Dortmund

On trouvera ci-dessous un compte rendu de l'exposé fait au CREM à Nivelles, le 27 octobre 1994, par le Professeur Erich Ch. Wittmann. Ce compte rendu a été rédigé par Noémie Etienne, d'après ses propres notes et celles de Francis Buekenhout, et avec l'aide de Claude Culus et Nicolas Rouche. La responsabilité du texte incombe à ces quatre personnes.

Introduction

Erich Ch. Wittmann est professeur à l'Université de Dortmund en Allemagne. Il est titulaire d'une chaire de didactique des mathématiques et à ce titre chargé de la formation des futurs instituteurs. Son projet de réforme de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (6 à 10 ans) a déjà été accepté dans certains Länder, notamment en Rhénanie-Westphalie, et dans une partie de la Suisse (où l'on a adapté les programmes en fonction de ce projet).

Erich Ch. Wittmann appartient au Groupe "Math 2 000" formé d'une équipe de six professeurs de l'Université de Dortmund. Bien que le projet de ce groupe s'intègre dans une vision globale des mathématiques, il s'est depuis quelques années intéressé particulièrement aux écoles primaires. Dans ce cadre, il collabore avec une centaine d'enseignants. La recherche du groupe est suffisamment avancée pour entrer dans une phase de production de manuels : le premier a paru et a connu un succès considérable, deux autres sont en préparation.

Le groupe envisage l'extension de son travail à l'enseignement secondaire. Alors que la tranche d'âge considérée ci-après va de 6 à 10 ans, le secondaire s'étend de 10 à 19 ans.

1 Trois approches au développement d'un curriculum

Wittmann distingue trois approches de l'organisation d'un curriculum (c'est-à-dire d'un programme accompagné des textes nécessaires pour enseigner et évaluer les élèves) :

1) La *Abbilddidaktik* qui tente de développer des versions élémentaires des exposés axiomatiques. Il s'agit d'une transposition didactique de théories mathématiques vers un niveau moins élevé, qui s'appuie essentiellement sur les mathématiques structurales.

2) La *Aufgabendidaktik* ou didactique du devoir, qui engendre les concepts, faits et techniques géométriques à partir de données empiriques et les classe selon les contextes d'application, en mettant l'accent sur des règles, des algorithmes. Dans cette approche, le curriculum est un ensemble de chapitres distincts contenant des règles et introduits par un ou plusieurs exemples supposés motiver l'introduction de la nouvelle matière. C'est cette approche qui prévaut à l'heure actuelle en Allemagne.

3) La *Genetische Didaktik*, l'approche génétique, est apparue au début du siècle pour tenter de pallier aux inconvénients des deux méthodes précédentes. Elle met l'accent sur les composantes du développement tant de l'apprenant que de la matière : elle considère les mathématiques comme un organisme en développement qu'on construit en résolvant des problèmes. Elle correspond mieux que les deux premières à la nature même des mathématiques et de la construction des connaissances.

La plupart des instituteurs ont souscrit, au moins en principe, à cette dernière approche, mais les classes ordinaires en sont à peine affectées. Comment se fait-il que cette approche, dont on reconnaît qu'elle est supérieure, ne se trouve pas mieux implantée dans l'école ? Certains experts critiquent à tort les enseignants. Pour Wittmann, le problème ne se situe pas là : il affirme qu'il faut être plus critique à l'égard de l'apport de l'approche génétique en classe. Cette méthode, comme les autres, admet des points faibles qui, d'après lui, seraient à l'origine de ce "rejet".

Pour Wittmann, les adeptes de la méthode génétique doivent répondre à la question suivante : comment peut-on établir un curriculum génétique qui

- a) soit cohérent dans son ensemble ;
- b) couvre les notions de base et permette une bonne pratique des savoir-faire (skills) ;
- c) inclue des démonstrations accessibles à la fois aux professeurs et aux élèves ;
- d) puisse être organisé et enseigné dans le temps imparti ;
- e) ne demande pas plus d'effort ou de travail à l'enseignant ?

Wittmann est même convaincu qu'il est possible de concevoir un tel curriculum de manière qu'il soit plus facile à enseigner et que les élèves comme le professeur s'y retrouvent mieux.

2 Idées fondamentales de la géométrie

Wittmann évite d'établir une opposition, d'une part entre les calculs de routine, ennuyeux et même nuisibles, et d'autre part la résolution de problèmes. Pour lui, comprendre est nécessaire pour arriver à une bonne pratique, et la maîtrise des savoir-faire est indispensable pour entreprendre la résolution de problèmes. C'est la raison pour laquelle son manuel s'intitule *Manuel pour pratiquer des savoir-faire*.

Ce qui suit développe une liste de notions de base en arithmétique et géométrie. Ensuite viendra un développement de ces points dans des *unités d'enseignement* organisées

hiérarchiquement. La pratique des routines est intégrée à ces unités, qui par ailleurs renferment suffisamment de concepts pour qu'on puisse en tirer des preuves.

Voici sa liste des points fondamentaux de la géométrie élémentaire :

- les formes géométriques et leur construction ;
- les opérations sur les formes ;
- les coordonnées ;
- les mesures ;
- les “paysages” et “ornements” (patterns) géométriques ; les formes géométriques dans l’environnement ;
- la géométrisation de situations.

Pour Wittmann, la géométrie est un phénomène de société très ouvert. D’après lui, la raison pour laquelle elle est négligée en primaire et en secondaire résulte du fait qu’elle n’a plus, à l’université, la place qui devrait lui revenir. Il parlera de la GEOMETRIE par opposition à la géométrie, la dernière étant celle des spécialistes. La GEOMETRIE est pour lui un concept en un sens plus vaste, articulée au quotidien, accessible à tous. Il cite Bruner pour souligner l’importance de la structure dans ces unités d’enseignement. D’après lui, les idées précédentes ne sont pas propres à un développement de curriculum particulier.

3 Quelques éléments d’unités d’enseignement de géométrie pour le primaire

Illustrons certaines de ces idées fondamentales pour la géométrie élémentaire.

3.1 Les opérations sur les formes

En première année, les enfants disposent d’un carré de papier qu’ils plient et coupent pour réarranger les morceaux (*Fig. 1*). Ce découpage donne le principe d’une démonstration du théorème de Pythagore pour les triangles rectangles isocèles.

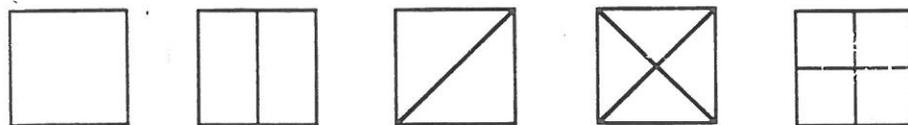


Fig. 1

En 2e année, les enfants travaillent le Tangram. En 3e, ils construisent des polygones réguliers avec des côtés de même mesure. Ils en arrivent, en les mettant côte à côte, à la notion de pavage du plan.

En 4e année, ils construisent des polygones réguliers à l'aide de la "drawing clock", qui est un cercle divisé en 60 parties. Ce magnifique instrument (Fig. 2) permet la découverte des solides platoniciens.

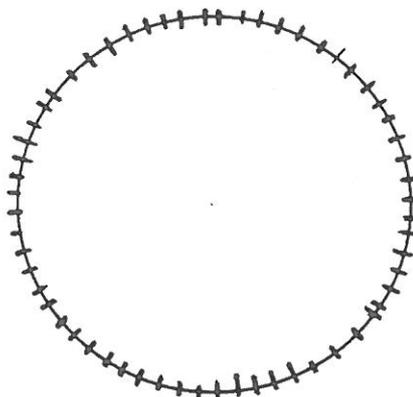


Fig. 2

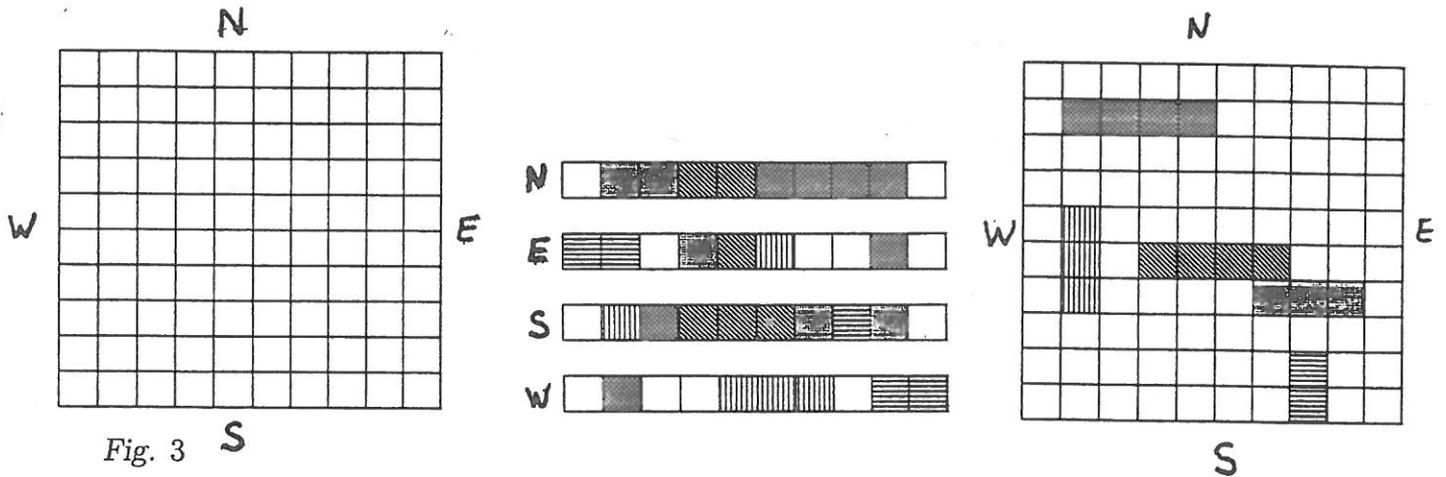
Un autre type d'opérations avec les formes est le *travail avec les miroirs*. En première année, avec un miroir et un objet, on doit recréer toute une série d'objets donnés. Cette activité est poursuivie en 2e et en 3e primaires. En 4e année, on refait le même genre d'exercices, mais avec ce que Wittmann appelle le "livre miroir", c'est-à-dire deux miroirs plans sécants. On donne aux élèves une figure de départ et la figure qu'ils doivent obtenir par image dans le miroir. Ils doivent eux-mêmes trouver la position et l'écartement des deux miroirs pour reproduire exactement la figure demandée.

3.2 La modélisation de situations

Un premier type de modélisation consiste à faire des plans. En première, on demande à la classe d'associer une scène réelle à son schéma. Par exemple, on a une photographie d'un groupe de personnes et un schéma de ce groupe sur lequel les noms des personnes sont écrits. Les enfants doivent alors associer les personnages de la photo avec leur représentation sur le schéma, en répondant à des questions du genre : "J'ai de longs cheveux blonds, qui suis-je ?". En deuxième année, on refait le même exercice, mais la difficulté est augmentée par le fait qu'on dispose plus de personnages sur l'image. Cette

modélisation de situations par création et interprétation de plans est poursuivie d'année en année.

Une autre modélisation de situation est proposée en 4e. On dispose quatre enfants autour d'une table sur laquelle est présenté un quadrillage avec les quatre points cardinaux. Chaque enfant reçoit alors une vue de profil d'une disposition de blocs cubiques sur le quadrillage. Le but est qu'ensemble ils puissent retrouver la disposition des blocs sur la feuille quadrillée. Les enfants ne disposant chacun que d'une information partielle, ils doivent coopérer pour arriver au résultat demandé.



4 Une unité pour le secondaire : expériences géométriques

Pour terminer, Wittmann nous a présenté l'avant-projet d'une unité qui figurera certainement dans le prochain manuel destiné aux classes de 5e et 6e, même si pour cela il fallait changer la liste des idées fondamentales données au départ" ! Il insiste sur le fait que toute unité doit avoir son nom, sa "personnalité". Il a donc intitulé cette unité en projet "expériences géométriques". Elle est basée sur l'obtention de résultats géométriques par tâtonnements.

Par exemple, on connaît une méthode sans tâtonnement pour trouver le milieu d'un segment à l'aide de la règle et du compas (voir Fig. 5).



Mais Wittmann préfère la méthode par tâtonnements : on essaie jusqu'à ce qu'on trouve le bon écartement du compas (voir Fig. 6).



Fig. 6

Cette idée a déjà été suggérée par Hjelmslev (1915). Un des intérêts de l'expérience est qu'elle contient son propre test. Wittmann a été tenté de développer son unité dans cette optique. Dans ce même contexte, les élèves sont amenés à pratiquer des mathématiques complètes, jusqu'à l'élaboration de preuves.

Cette unité comporte treize activités.

1. Dessiner des cercles avec le compas. Cela permet aux enfants de s'habituer à l'instrument. En même temps, ils prennent conscience de ce que sont le centre et le rayon, et apprennent à identifier le cercle comme lieu de points équidistants d'un point donné.
2. Dessiner des cercles ayant le même centre. On voit émerger ici la notion nouvelle de cercles concentriques.
3. Dessiner des cercles de même rayon passant par un point donné. Les élèves doivent constater que ce point ne peut pas être le centre des cercles. On observe que tous les centres de ces cercles sont eux mêmes sur un cercle.
4. On se donne un point M et une droite, et on s'interroge sur le nombre de points d'intersection entre la droite et les cercles de centre M . Par tâtonnement, on se rend compte qu'il doit exister un cercle pour lequel il n'y a qu'un seul point d'intersection. C'est à cette occasion que l'on introduit évidemment les notions de tangence, de distance d'un point à une droite et de pied de la perpendiculaire. Les enfants ne découvrent apparemment pas seuls que les autres points de la tangente sont extérieurs au cercle.
5. On refait la même expérience, mais on remplace la droite par un cercle.
6. On cherche le lieu des centres des cercles de rayon donné, tangents à une droite donnée. On remarque qu'on trouve deux droites parallèles et on essaie d'expliquer pourquoi.
7. On refait la même expérience, mais on remplace la droite par un cercle.
8. On se donne deux points A et B , on cherche le lieu des centres de cercles passant par les deux points. Les élèves trouvent uniquement par tâtonnement. On remarque que tous ces points sont sur la médiatrice du segment AB ; c'est l'occasion d'introduire la notion de médiatrice et la façon de la construire.

9. On se donne un point et une droite. On cherche le lieu des centres des cercles tangents à la droite et passant par le point. On découvre ainsi la parabole, pour la première fois, en 5e primaire.
10. On remplace le point et la droite par deux cercles. On cherche le lieu des centres des cercles tangents aux deux cercles fixés. On découvre ainsi l'hyperbole. Le travail par tâtonnement est long, mais le résultat est joli.
11. (Cette activité pourrait être reportée à la 6e année.) On recherche les cercles passant par les trois sommets d'un triangle. Ceci apparaît tellement fastidieux par tâtonnement que les élèves réclament un "truc". On introduit alors la notion de médiatrice.
12. Comme au n° 11, mais à propos du cercle inscrit à un triangle, en liaison avec les bissectrices.
13. Même démarche à propos de hauteurs d'un triangle.

Dans cette pratique des aptitudes, les élèves mettent en oeuvre beaucoup de choses, y compris le sens esthétique. De nombreuses preuves simples émergent de tout ceci ; elles sont en général basées sur l'inégalité triangulaire et sur des propriétés de symétrie. L'inégalité triangulaire est introduite à l'occasion de cette unité. Par contre on suppose connues les symétries et leurs propriétés. Il faut donc une unité préliminaire sur la symétrie. L'approche privilégiée de Wittmann est le pliage.

Un dernier commentaire à propos des démonstrations. Elles répondent à la question : POURQUOI LES FAITS SONT-ILS CE QU'ILS SONT ? Cette question se pose lorsqu'on est déjà convaincu de la véracité d'une affirmation. Les démonstrations sont utilisées pour expliquer celle-ci.

