GROUPE DE CONTACT :
ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
Fonds National de la Recherche Scientifique

No 1 novembre 1997

GRANDEURS PHYSIQUES
ET
GRANDEURS MATHÉMATIQUES

Jean Dhombres Jean Reignier Nicolas Rouche

CREM A.S.B.L.
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Table des matières

Les enseignants ne disposent pas toujours de beaucoup de temps pour lire. Les bibliothèques des écoles ne sont parfois pas riches et les bibliothèques spécialisées ne sont pas souvent à portée. La collection

"Documents du CREM"

essaie de répondre à ces difficultés en rassemblant à l'intention des enseignants des documents sélectionnés pour leur qualité et leur lien avec l'activité en classe.

Le CREM a.s.b.l. a pour missions principales la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte et la formation continue des enseignants de mathématiques. Pour mener à bien ces missions, il a signé des conventions bilatérales d'entr'aide avec les groupes suivants :

- AHA, Approche Heuristique de l'Analyse
  10 fond du Rondia 1348 Louvain-la-Neuve
  Contact : M. Krysinska, tél. (0)10 45 06 50
- ALTAIR, Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques, A.S.B.L.
  IPHO, C.P. 175, U.L.B.
  50 avenue F.D. Roosevelt 1050 Bruxelles
  Contact : J.M. Delire, tél. (0)2 642 24 03
- CDS, Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut
  Faculté des Sciences, 15 avenue Maistriau 7000 Mons
  Contact : G. Noël, tél. (0)65 37 34 15
- COJEREM, Collèges Jésuites, Réflexions sur l'Enseignement des Mathématiques
  Centre de Formation à la Pédagogie des Mathématiques,
  Département de Mathématiques des FUNDP,
  8 rempart de la Vierge 5000 Namur
  Contact : M. Schneider, tél. (0)2 687 20 73
- FOPEM, Formation Permanente des Enseignants de Mathématique
  Département de Mathématique, Université de Liège
  15 avenue des Tilleuls 4000 Liège
  Contact : J. Navez, tél. (04) 366 93 76
- GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique,
  Département de Mathématiques de l'UCL,
  2 chemin du Cyclotron 1348 Louvain-la-Neuve
  Contact : C. Hauchart, tél. (0)10 47 32 72
- GEPEMA Groupe d'Etude sur les Premiers Enseignements de la Mathématique
  Université de Mons-Hainaut, Faculté des Sciences,
  15 avenue Maistriau 7000 Mons
  Contact : P. Van Praag, tél. (0)65 39 34 17
- SBPMef, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
  15 rue de la Halle 7000 Mons
  Contact : G. Noël, tél.(0)65 37 34 15
- UEREM, Unité d'Etude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
  Institut Supérieur Industriel de Liège,
  6 quai Gloesener 4020 Liège
  Contact : A. Pétry, tél. (0)41 41 13 85
- UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
  Département de Mathématiques de l'ULB,
  CP 216 boulevard du Triomphe 1050 Bruxelles
  Contact : F. Buekenhout, tél. (0)2 650 58 64

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.
5 rue Emile Vandervelde B-1400 Nivelles (Belgique)
Tél. 32 67 21 25 27 Fax : 32 67 21 22 02

Avant-propos

Les trois rextes publiés ici sont les rédactions des exposés de la réunion du 9 octobre 1996 du Groupe de Contact du FNRS[1] "Enseignement des Mathématiques".

Le thème de cette réunion était résumé ainsi :

> Pendant plus de deux mille ans, les grandeurs ont été le cadre dans lequel ont travaillé les mathématiciens. Aujourd'hui ce terme a quasiment disparu de leur vocabulaire. Pas de celui des physiciens. Que furent les grandeurs pour les mathématiciens ? Que sont les grandeurs pour les phyciciens ? Pourquoi reparler aujourd'hui des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques ?

À l'origine de cette réunion, une discussion qui eut lieu au CREM fin 1995 et début 1996 sur la place à réserver aux grandeurs dans l'enseignement secondaire, notamment comme approche des nombres réels (dans son livre *Le sens de la mesure* (Didier-Hatier, 1992), Nicolas Rouche proposait les grandeurs comme apporche des fractions dans l'enseignement fondamental (de 6 à 12 ans). Il proposait aussi une axiomatique pour ces grandeurs. Cette discussion – bien entendu non clôturée – portait essentiellement sur l'aspect pédagogique : les grandeurs sont-elles un outil adéquat, ou l'outil le plus adéquat pour introduire aujourd'hui des concepts et des pratiques mathématiques ? Mais la discussion fit surgir d'autres questions :

1) quel fut exactement le statut de ces grandeurs qui jusqu'à la fin du siècle dernier semblaient faire partie des fondements des mathématiques ?

2) si un avantage des grandeurs est de pouvoir motiver des concepts mathématiques par un lien avec la nature et plus particulièrement la physique, dans quelle mesure peut-on admettre que ce concept de grandeur traduise effectivement aujourd'hui des réalités physiques ?

Le hasard fit qu'un participant aux discussions du CREM assista en mars 1996 à ALTAIR (le Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques de l'ULB[2]) à un exposé du professeur Jean Reignier sur les fondements actuels de la mécanique quantique. Il fut frappé de constater que le terme "grandeur" est un terme usuel du langage des physiciens d'aujourd'hui.

Le groupe de contact du FNRS "Enseignement des Mathématiques", créé en 1995 dans le mouvement qui vit la fondation du CREM, apparut comme le cadre idéal pour une réunion sur ces thèmes. Nous avons fait appel au professeur Jean Dhombres, historien réputé des mathématiques, Directeur du Laboratoire d'Histoire des Sciences et des Thechniques (C.N.R.S.[3], Paris), au professeur Jean Reignier, connu pour ses travaux en physique des particules élémentaires et sur les fondements des théories quantiques, Professeur émérite à l'U.L.B., et à Nicolas Rouche.

[1]Fonds National de la Recherche Scientifique

[2]Université Libre de Bruxelles.

[3]Centre National de le Recherche Scientifique.

La réunion s'est tenue à l'Université de Liège. Maggy Schneider et Jacques Navez avaient respectivement présidé la réunion et assuré l'intendance de telle façon que l'ambiance fut conviviale.

La discussion lors de la Table Ronde qui clôtura la réunion rendit évident que la publication des beaux exposés répondait à une demande réelle. Merci donc aux auteurs d'avoir accepté de les rédiger.

Paul van Praag

Luc Lismont a relu attentivement les épreuves de cette brochure. Un grand merci pour son regard si aigu.

LES GRANDEURS
ÉVOLUTIONS D'UN CONCEPT FLEXIBLE

Jean Dhombres

Dans l'*Encyclopédie* où sont fixés les grands pans de la connaissance des Lumières, d'Alembert définit la mathématique comme cette science qui a "pour objet les propriétés de la grandeur en tant qu'elle est calculable ou mesurable"[1]. Ces deux derniers adjectifs ne sont pas équivalents ; la calculabilité fait nécessairement intervenir des nombres, et la mesurabilité est représentée par l'étendue. Une telle distinction est chargée de rendre compte de la paradoxale division des mathématiques *pures* en deux classes, l'arithmétique et la géométrie. La division est si l'on peut dire multipliée, puisque chaque classe entrant dans les mathématiques *mixtes* a, à son tour, pour objet "les propriétés de la grandeur concrète ... c'est-à-dire envisagée dans certains corps ou sujets particuliers". En adoptant la vieille définition pluraliste des mathématiques comme science des grandeurs – ce qui donne une résonance historique certaine au thème de la réunion de Liège – d'Alembert manifeste avec la variété des grandeurs la nécessité d'adapter à chacune un discours déductif particulier. Et ce même dans les cas les plus abstraits puisqu'à tout le moins il faut savoir distinguer le nombre et l'étendue. Calcul et mesure voisinent intellectuellement, mais ne désignent pas la même activité. Cette mathématique n'est donc pas conçue comme science de la seule quantité. Aussi bien, dans toute histoire de la grandeur, comme dans toute utilisation pédagogique de la grandeur, il convient de tenir compte de ces diverses sources, alors même que la conscience mathématique contemporaine tend à toutes les réunir. Ainsi l'algèbre intervient aujourd'hui en géométrie à laquelle est inéluctablement associé le système des nombres réels.

Un peu moins d'un siècle avant d'Alembert, le célèbre Janséniste Antoine Arnauld estimait qu'une double source suffisait pour faire des mathématiques selon la "seule lumière naturelle". Il ne voyait aucune nécessité de viser à une unification des principes, leur juxtaposition étant en elle-même créatrice de science.

> C'est pourquoy ayant entrepris de traiter icy de la quantité ou grandeur en general, entant que ce mot comprend l'étenduë, le nombre, le temps, les degrez de vitesse, & generalement tout ce qui se peut augmenter en ajoûtant ou multipliant & diminuer en soustraiant, ou divisant, &c. je ne ferai point de difficulté de supposer qu'on sçait de certaines choses qui semblent appartenir à la science des nombres qu'on appelle Arithmetique, ou à la science de l'étenduë qu'on appelle Geometrie ; parce que je ne supposeray rien qu'on ne puisse sçavoir sans l'aide de l'Arithmetique ou de la Geometrie pour peu d'attention qu'on y fasse, ou qu'on y ait déjà fait[2].

Il ne faudrait donc pas se laisser impressionner par l'apparente opposition entre la com-

[1]Entrée *Mathématique* in *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et des métiers*; repris dans l'*Encyclopédie méthodique, Mathématiques*, Paris, Panckoucke, t. 2, 1785, p. 366.

[2]A. Arnauld, *Nouveaux Elémens de Géométrie* ..., Paris, C. Savreux, 1667, livre 1er, p. 2.

plexité de la notion d'étendue (prise aussi bien au sens de corps, ou d'espace[3]) qu'il faut au moins diviser en étendue linéaire, plane et solide pour pouvoir éventuellement la mesurer, et la simplicité de la notion de nombre. Car, hier aussi bien qu'aujourd'hui, il faut encore distinguer entre nombres entiers, décimaux, rationnels, réels, imaginaires, tous nombres qui constituent autant de pratiques distinctes de calcul[4]. C'est-à-dire qu'il ne convient pas de supposer qu'une intelligence de la mathématique – sa compréhension au-delà de la technique propre – passe par la seule étendue, le nombre ne requérant qu'une pensée aveugle[5].

Mais la considération des diverses espèces numériques ne peut occulter les choses en commun, partagées même avec les grandeurs de l'étendue. À délimiter cette communauté on aboutit à dégager des structures. Ainsi, N. Bourbaki s'exprime-t-il à propos de la sphère, prise à titre d'objet exemplaire car simple, et il faut entendre comment la distinction entre calcul et mesure devient classification et repérage :

> Parmi les propriétés de la sphère, les unes seront topologiques, d'autres sont algébriques, d'autres encore peuvent être considérées comme relevant de la géométrie différentielle ou de la théorie des groupes de Lie[6].

Je n'ai pas craint de réunir trois textes différents car ils nous permettent de constituer une grille de lecture historique des grandeurs mathématiques, et je pense aussi bien physiques comme il sera possible de le constater en comparant avec l'exposé bienvenu du professeur Jean Reignier qui simplifie ma propre présentation et m'évite en particulier le développement que j'avais prévu sur l'analyse aux dimensions[7]. Nous devrons utiliser la diversité des grandeurs auxquelles le traitement mathématique impose des regroupements, sans aller jusqu'à une identification.

Ce qui conduit à distinguer ce qui concerne les *définitions*, ce qui a trait aux *opérations* et ce qui touche enfin les *structures* : c'est avec la composition d'un tel triptyque que différentes espèces de grandeurs trouvent leur unification qui n'est pas réduction, et cette composition même justifie le maintien aujourd'hui de l'appellation commune de *grandeur*. Elle indique indéniablement un sens, la visée mathématique d'unification, mais ce sens doit ensuite être construit, c'est-à-dire permettre de voir ce qui a été perdu par l'unification.

Il y aurait certes bien des avantages à réhabiliter l'usage de la grandeur. C'est ce que Nicolas Rouche ne manquera pas d'expliquer ; si mon propos va dans le même sens, il utilise paradoxalement l'histoire et ses méandres comme justification. Si j'insiste sur la dynamique d'unification, c'est qu'elle permet de comprendre les nécessaires distinctions entre grandeurs. Calcul et mesure cousinent, et les lignées ne sont pas uniques.

L'histoire que je propose est encore très simplifiée, mais elle ne fait sens ici dans le cadre de cette réunion sur les grandeurs que parce qu'elle ne s'arrête pas à la seule mesure des longueurs

[3]Le mot "espace" au XVIII[e] siècle n'a pas de valeur structurale comme lieu de la géométrie ; il désigne spécifiquement une grandeur mesurée, "l'aire d'une figure renfermée ou bornée par les lignes droites ou courbes qui terminent cette ligne" (Entrée *Espace* de l'*Encyclopédie, op. cit.*).

[4]Au XVII[e] siècle par exemple, et par opposition au décimal, un nombre complexe désigne l'écriture selon des unités ne se déduisant pas l'une de l'autre par un même rapport (2 pieds et trois pouces et cinq lignes).

[5]Une telle revendication a souvent été formulée à l'encontre de l'algèbre, accusée précisément d'oublier le sens de la grandeur. Il me suffira ici de citer un critique – le Père Castel – agissant par des comptes-rendus dans le *Journal de Trévoux*, ou dans des préfaces chargées de normer la mathématique. Il écrit en 1735 : "Et alors la Géométrie ne fut plus qu'un ressassement de lettres et de symboles, de tables et de formules, de tarifs, en un mot, et de comptes faits. On aurait pris le cabinet d'un Géomètre pour un Bureau de Finance ..." (Discours préliminaire, p. XXiij, E. Stone, *Analise des infiniment petits...*, trad. fr. de Rondet, Paris, 1735.

[6]N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Théorie des ensembles,* nouvelle éd., Paris, Hermann, 1970, E.I. 9.

[7]Cf. J. Reignier, Les grandeurs en physique, p. 29 du présent recueil.

euclidiennes, aussi exemplaire que celle-ci ait pu être, trop exemplaire peut-être pour ne pas avoir lassé. L'abandon relatif de ce qui touche aux grandeurs n'a-t-il pas eu son origine dans la restriction aux grandeurs d'un seul genre, et au fond dans un privilège accordé au calcul sur la mesure ?

C'est certes par la mesure euclidienne que je vais commencer, mais en avançant vite, car tout le monde connaît la théorie. Ce qu'il me faut avant tout montrer, c'est la constitution du triptyque – définition/opération/structure.

1 Théorie des grandeurs euclidiennes

Il faut interpréter une surprise, le fait que dans les *Éléments* d'Euclide ne figure aucune définition de la grandeur (γεγεθός), ni d'ailleurs de définition de "degré de grandeur" (πηλικότης). Alors même qu'un livre entier, le livre 5, est consacré au rapport de grandeurs non autrement précisées et à la proportionnalité, un livre connu pour forger la théorie de la mesure des grandeurs. Si l'on peut discerner les raisons d'une telle absence dans l'ordre philosophique[8], me paraît essentielle une raison que je qualifie d'épistémologique. Il s'agit de la volonté de préserver l'avenir : sera *ipso facto* conçue comme grandeur celle qui satisfera les requis de la théorie construite[9].

La longueur (μηκος) n'est pas plus définie par Euclide. Mais elle dispose d'une représentation, la ligne que la deuxième définition des *Éléments* appelle une "longueur sans largeur" ; et surtout la ligne droite (quatrième *définition* apparaissant dans les *Éléments*), conçue d'abord comme limitée, un segment de droite. La deuxième demande, en permettant de prolonger tout segment, fixe en fait la comparaison – on sait ce que veut dire un segment plus grand qu'un autre – et elle fixe aussi bien la soustraction. On sait effectivement placer par égalité des segments de droite en un point (proposition 2), et les soustraire (proposition 3). Bref, des *opérations* sont associées aux segments, tous comparables, l'addition comme la soustraction provenant de la relation d'ordre.

Nouvelle idée, l'itération de l'opération d'addition exprime l'action d'un entier sur un segment, et impose la présence d'un calcul extérieur. En ce sens qu'il faut identifier, A désignant un segment de droite, $nA+mA$ et $(n+m)A$. L'identification se concrétise par l'adoption d'un même nom d'opération, à savoir l'addition, tant pour les entiers que pour les segments.

De la même façon, par comparaison et addition, chaque genre de grandeur aboutit à ce que nous appelons un semi-groupe commutatif totalement ordonné, c'est-à-dire une *structure*. Je ne prétends pas que l'auteur des *Éléments* identifie les seules règles qui, à nos yeux, constituent cette structure : je prétends seulement que c'est la conscience d'un type d'objets, sur lesquels il y a un ordre total et des opérations associées possédant certaines propriétés, qui permet alors de parler de grandeur[10].

[8] On se reportera avec intérêt tant à l'introduction de M. Caveing à l'édition des *Éléments d'Euclide*, surtout le chapitre 4, la forme euclidienne, qu'à la notice sur le livre 5 de B. Vitrac (pp. 56-58), Euclide, les *Éléments*, vol. 1, Paris, P.U.F., 1990 ; vol. 2, Paris, P.U.F., 1994.

[9] Les historiens ont souvent tendance à oublier le temps dans leur compte-rendu de la construction scientifique ; non qu'ils ne prennent en charge le changement, et le plus souvent sous la forme trop maladroite du progrès. Mais le regard historique n'incorpore pas l'idée même de l'extension comme facteur de production de science. C'est parce qu'il est conscient que son discours d'objectivité sera repris, complété, agrandi, que le créateur peut éviter d'en dire trop, faisant ainsi l'économie d'une donation d'objets du savoir dont l'économie pourrait s'avérer trop avaricieuse.

[10] Pour examiner les notions géométriques, je conseille la consultation de C. Mugler, *Dictionnaire historique*

Ainsi, la figure du carré géométrique constitue-t-elle une grandeur. La comparaison de deux carrés résulte de celle de leurs côtés, et l'addition est instrumentalisée par le théorème de Pythagore (Proposition 47 du livre I des *Éléments*). Le dessin l'indique suffisamment[11] (le carré A sur l'hypoténuse est la somme des carrés B et C construits sur les deux autres côtés).

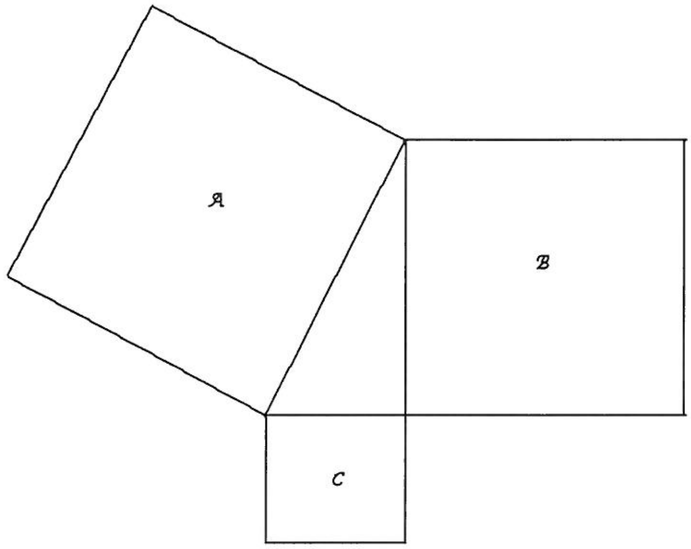

Fig. 1

C'est en vue d'une théorie plus élaborée que la structure de chaque genre de grandeur est enrichie : est ajoutée la divisibilité[12] (pour tout entier n et une grandeur A du genre $\mathbb{G}$, il existe B du même genre $\mathbb{G}$ et $nB = A$) et le caractère archimédien (A et B étant données dans $\mathbb{G}$, il existe un entier $n \geq 1$ et $nA > B$).

La théorie plus élaborée vise à mesurer une grandeur d'un genre par une autre quelconque du même genre ; la prétention de la théorie est que la procédure ne dépende pas du genre adopté. Paradoxalement, contribue à cet effet l'absence de spécification de la nature des grandeurs en jeu. L'admirable construction euclidienne – je n'hésite aucunement à manifester mon admiration – consiste à dire non pas "combien" A est en B, mais à définir une analogie, la *même façon* dont A est en B que celle dont C est en B[13]. En utilisant des notations qui ne

de la terminologie géométrique des Grecs, Paris, Klincksieck, 1958/59.

[11]Cette "addition" des carrés géométriques n'est pas attestée comme une théorie de la mathématique grecque. Est par contre attestée l'utilisation des triades pythagoriciennes, c'est-à-dire trois entiers, n, m et p tels que $n^2 + m^2 = p^2$. Est ainsi constatée que l'addition particulière $m \oplus n = m^2 + n^2$ n'est pas toujours homogène dans le genre des entiers, en ce sens que l'on ne dispose pas toujours d'un entier p tel que $m^2 + n^2 = p^2$. Sur ce thème, voir aussi J. Pottage, "The Mensurations of Quadrilaterals and the Generation of Pythagorean Triads : A Mathematical, Heuristical and Historical Study with Special Reference to Brahmagupta's", *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 12, 1974, pp. 299-354.

[12]Cette hypothèse de divisibilité exclut le genre des entiers comme genre acceptable de grandeur. Elle n'intervient pas de façon cruciale dans la construction du livre 5 (apparition dans une seule démonstration), et on peut aisément s'en passer pour une théorie de la mesure des grandeurs. Qu'elle ait été maintenue au cours des siècles, et jusqu'à nos jours pour une présentation des grandeurs, tient à une idée devenue dominante, la primauté de l'entier sur les autres grandeurs ; cette idée est devenue dogme par la réussite de l'arithmétisation cantorienne de l'analyse, c'est-à-dire la construction du continu à partir du discret selon les opérations de la théorie des ensembles.

[13]Dit en termes modernes, sur les couples de grandeurs d'un même genre est définie une relation d'équivalence

seront montrées adéquates que par Leibniz, ne respectant donc pas la lettre du texte euclidien mais adoptant la théorie classique des proportions telle que les mathématiciens l'utiliseront au XVIII^e siècle, on a

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Et la *définition* de cette analogie, ou proportion, se conçoit aisément en indiquant qu'il n'est pas possible d'insérer une fraction rationnelle entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ c'est-à-dire que pour tous les entiers m et n, chacune des trois relations $\frac{A}{B} < \frac{m}{n}$, $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, $\frac{A}{B} > \frac{m}{n}$ implique à son tour $\frac{C}{D} < \frac{m}{n}$, $\frac{C}{D} = \frac{m}{n}$, $\frac{C}{D} > \frac{m}{n}$. L'évidente pétition de principe – que signifie $\frac{A}{B}$? – est aussitôt levée en remplaçant par exemple la relation $\frac{A}{B} > \frac{m}{n}$ par la relation $nA > mB$ qui s'exprime convenablement dans le genre $\mathbb{G}$.

À cette définition, dont il n'est pas sain de masquer la difficulté, sont associées des *opérations*. Une relation de comparaison, puisqu'une signification est donnée à l'inégalité

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D},$$

et ce n'est bien sûr que la spécification qu'un $\frac{m}{n}$ est plaçable entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ (pour au moins un m, $nA > mB$ entraîne $nC < mD$). Il y a aussi une relation de combinaison, puisque fait sens

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C}.$$

Avec cette opération de multiplication, on peut même dire que la mesure de A par B, le rapport $\frac{A}{B}$ dont n'a été définie que l'égalité à un autre rapport, apparaît comme un opérateur, agissant sur la grandeur B pour redonner la grandeur A, la multiplication étant alors une composition. Vraisemblablement, dans une construction moderne de la mesure des grandeurs[14], on écrirait plutôt $[\frac{A}{B}]$.

En tout cas, est aisément *structuré* ce domaine des rapports $\frac{A}{B}$ en un genre $\mathbb{G}$: c'est un semi-groupe multiplicatif totalement ordonné. C'est le demi-corps des fractions de $\mathbb{G}$ et voilà le troisième volet du triptyque de la théorie de la mesure euclidienne, après la définition et les opérations[15]. On peut aussi bien appeler ce trityque la théorie du nombre abstrait.

– une proportion – de sorte que le calcul des proportions est un calcul sur ces classes. Le risque d'anachronisme que je prends en parlant de relation d'équivalence est moindre que celui du silence ; car on ne pourra éviter la relation d'équivalence dans une quelconque réhabilitation de la construction euclidienne. C'est la prétention d'une simplicité de la théorie euclidienne qui est une bêtise de la reconstruction historique. Il importe de constater que dans la comparaison du rapport de A à B à celui de C à D, les grandeurs du même genre A et B ne sont pas nécessairement du genre des grandeurs C et D. Une présentation historique de la théorie euclidienne des proportions est fournie par W.R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and the Significance for Early Greek Geometry*, D. Reidel, Dordrecht, 1975.

[14]Une construction est disponible dans J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Nathan, 1978 (Les résultats vus du XX^e siècle). Je n'éprouve aucune gêne, ici, à mêler des notations et considérations modernes à une théorie ancienne.

[15]Je dois utiliser le mot demi-corps, et non corps, car la mathématique grecque ne fait pas usage des nombres négatifs. J'oublierai quelquefois le "demi" dans ce qui suit, mais je viendrai plus loin aux négatifs.

2 Numérisation des grandeurs : les quantités

Car s'arrêter aux corps de fractions distincts serait bien insuffisant ; depuis Euclide, ou peut-être Eudoxe, le créateur, la théorie vise plus. Elle vise à assurer que tous les rapports issus d'un genre $\mathbb{G}$ conviennent avec ceux d'un genre $\mathbb{G}'$: les $[\frac{A}{B}]$ oublient leur origine spécifique et ils fournissent les étalons de la numération.

Telle est la prétention universaliste de la théorie de la mesure des grandeurs. Cette prétention est garantie par la quatrième proportionnelle, non axiomatisée dans les *Éléments* quoique souvent utilisée et qu'un auteur comme Clavius pointe à la fin du XVI^e siècle dans son commentaire normatif à l'intention des collèges jésuites. Si A et$B$ sont des grandeurs d'un genre $\mathbb{G}$, et C une grandeur d'un autre genre $\mathbb{G}'$, il existe une grandeur D dans $\mathbb{G}'$ et

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

L'hypothèse de la quatrième proportionnelle est d'une nature bien différente de celle de tous les autres axiomes, mis à la base de la constitution d'un genre $\mathbb{G}$. En effet, elle porte collectivement sur *tous* les genres $\mathbb{G}$ dont l'énumération n'a pas été faite, puisqu'il n'y a pas de définition de la grandeur. Une telle affirmation de la quatrième proportionnelle est peu acceptable, mais aucune théorie satisfaisante de la mesure des grandeurs ne peut faire l'économie d'une réflexion de caractère universel.

L'aporie de l'incommensurable que la théorie d'Eudoxe contournait avec élégance, revient alors en force. Car chacun voit qu'en prenant pour $\mathbb{G}$ les nombres rationnels (positifs) et pour $\mathbb{G}'$ les segments de droite, on n'arrivera jamais à égaler l'élément $\sqrt{2}$ du corps de fractions sur $\mathbb{G}'$ à un rapport rationnel (élément du corps des fractions de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$). Il y a donc du faux dans la théorie universaliste de la mesure de grandeur.

Ce faux n'a été rendu tel que lorsque Cantor et Dedekind ont su distinguer entre les différents corps de fractions. Il y a ceux qui ne sont pas et ceux qui sont complets (complet au sens de contenir la borne supérieure de tout sous-ensemble borné puisqu'il s'agit de corps totalement ordonnés, ou au sens des suites de Cauchy qui est équivalent). Cette découverte de la deuxième moitié du XIX^e siècle permet indéniablement de jauger les progrès de la connaissance mathématique[16].

Elle donne aussi son sens intentionnel à la théorie universelle de la mesure : car dès que la propriété de complétude est acquise, tous les corps totalement ordonnés archimédiens apparaissent isomorphes[17] .

Aussi bien, Descartes restait-il en terrain sûr en choisissant de ne construire le corps des réels – n'est-ce pas exactement ce en quoi consiste sa dotation d'opérations aux premières pages de la *Géométrie* ? – qu'à partir d'un genre $\mathbb{G}$ particulier, celui des segments de droite[18].

[16]De telle sorte que si l'on peut valablement tenir que le continu puisse être conçu indépendamment du discret, revenir à la théorie aristotélicienne du continu est un non-sens mathématique. D'une façon ou d'une autre, il faut intégrer le caractère complet. La mathématique ne permet pas le retour en arrière — la réaction — car elle ne peut reprendre ce qui est, désormais, une théorie fausse. Avant l'intervention de Cantor et Dedekind, pour éviter le faux (manifesté par l'exemple clef, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel), on se contentait de juxtaposer tous les corps de fractions possibles : la structure n'était donc pas bouclée, l'universalité de la théorie de la mesure n'était pas proclamée. Mais à personne ne serait venu l'idée qu'un rapport de poids pût ne pas être un rapport de longueur. Quelques textes sur la numérisation se trouvent dans J. Dhombres (éd.), *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[17]Voir J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu ...*, *op. cit.*, p. 235.

[18]Il ne pouvait bien sûr pas imaginer l'existence de plusieurs géométries possibles de ces segments selon le

J'exagère seulement en ayant l'air, par l'expression de corps de réels, de suggérer que Descartes pense cette structure limitée aux deux opérations d'addition et de multiplication. De fait, il ajoute d'autres opérations comme l'extraction de la racine carrée. Et cette remarque correctrice nous fait alors mieux saisir ce que Descartes a opéré : certes, il réussit l'individuation du corps des fractions du genre segments de droite, mais plus encore, il insère ce corps dans le genre même de départ. On additionne ou multiplie, on soustrait ou divise les segments de droite, sans quitter les segments de droite[19] ; on prend aussi bien la racine carrée d'ailleurs. Il y a donc derrière ce que Descartes a fait – comment le dire autrement ? – un théorème mathématique de structure[20].

Il est facile de l'énoncer aujourd'hui : tout groupe abélien totalement ordonné archimédien est injectable dans $\mathbb{R}$. Dit autrement encore, la multiplication se déduit de l'addition[21]. Ce qui est truisme pour l'arithmétique des entiers est encore vrai pour les grandeurs : c'est en ce sens qu'il y a eu numérisation, la grandeur longueur, et toute grandeur devient aussi une quantité.

3 Les algèbres : la mesure des opérations

La théorie de la mesure des grandeurs telle qu'elle s'expose dans les manuels mathématiques du XVIII^e siècle a indéniablement subi ce mouvement de numérisation. C'est-à-dire que l'analogie de propriétés entre le rapport $\frac{A}{B}$ et $\frac{m}{n}$ pour m et n entiers, a été poussée jusqu'à l'identification. Il y a plus puisqu'une grandeur est finalement assimilée à sa mesure, laquelle ne dépend que du choix d'une unité. En cartésien conséquent, Arnauld dans la dernière édition (1690) de ses *Nouveaux Elemens de géométrie* n'hésite pas à réduire finalement $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ au produit $AD = BC$. Il explique en effet qu'il suffit de définir le produit de deux grandeurs d'un genre $\mathbb{G}$ comme une nouvelle grandeur elle-même, et pour ce faire utiliser la quatrième proportionnelle selon $\frac{AB}{B} = \frac{A}{1}$.

---

corps de base. Voir R. Descartes, *La géométrie* , in *Discours de la méthode ...* , Leyde, 1637, *Œuvres de Descartes*, C. Adam et P. Tannery (éd.), réédition Vrin, 1996, t. 6, pp. 368-485. Un commentaire utile est donné par V. Jullien, *Descartes, La géométrie de 1637*, P.U.F, 1996.

[19]Cette insertion est réalisée par le jeu de l'unité, élément singulier puisqu'il est l'élément neutre pour la multiplication ($1A = A$), mais aussi bien élément générique du genre des segments de droite (de sorte que le 1 du produit $1A$ n'est pas assimilable à l'entier 1, l'opération de multiplication n'est pas externe).

[20]Descartes explique admirablement dans cette autobiographie intellectuelle qu'est le *Discours de la Méthode* comment il eut dessein pour comprendre les mathématiques d'aller à l'essentiel en s'attachant aux "divers rapports ou proportions qui s'y trouvent, je pensai qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en général et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à m'en rendre la connaissance plus aisée, même aussi sans les y astreindre aucunement, afin de les pouvoir d'autant mieux appliquer après à tous les autres auxquels elles conviendraient. Puis, ayant pris garde que, pour les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier, et quelquefois seulement de les retenir ou de les comprendre plusieurs ensemble, je pensais que, pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en des lignes, à cause que je ne trouvais rien de plus simple, ni que je pense plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens ; mais que, pour les retenir ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que je les expliquasse par quelques chiffres, les plus courts qu'il serait possible" (*Discours* ..., p. 21 de l'édition originale). Une remarquable étude du rôle de la théorie des proportions à la naissance de la science moderne est donnée par E. Giusti, *Euclides Reformatus. La teoria delle proporzione nella scuola galileiana,* Ballati, Boringhieri, Torino, 1993.

[21]À ce titre, puisqu'il change une multiplication ou une addition, le logarithme dont la découverte date de la deuxième décennie du XVII^e siècle a été une expérience intellectuelle importante. Elle n'est pas mentionnée comme telle dans les textes majeurs de ce même siècle. Qu'elle joue pourtant un rôle d'intermédiaire se lit dans la place accordée aux logarithmes dans les manuels du XVIII^e siècle ; ils viennent en fin de l'arithmétique, signe du discret, et permettent le passage à la géométrie, signe du continu : on ne les trouve pas en algèbre qui vient en général en troisième position dans l'économie du savoir mathématique.

Les réticences à une totale numérisation des grandeurs se constatent par le maintien directif, jusqu'au début du XX$^{\text{e}}$ siècle dans les manuels de géométrie, de l'écriture

$$A : B :: C : D$$

pour désigner

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

écriture proposée pourtant par Leibniz. La justification que donne ce dernier est structurelle : il est ainsi construit le corps des fractions. Mais la notation unique porte implicitement, une valeur universelle, c'est-à-dire l'unicité de tous les corps de fractions. Il manquait encore cette preuve. Ainsi, les géomètres maintenaient la spécificité de leurs grandeurs.

Dans le processus de numérisation que l'on ne peut réduire à l'œuvre du seul Descartes, trois phénomènes distincts ont pu jouer.

D'abord est intervenue ce que l'on peut appeler l'algèbre des proportions, c'est-à-dire un ensemble de règles de manipulations opératoires, valables indépendamment de la nature des grandeurs en jeu. Une des règles exemplaires étant

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A+B}{C+D},$$

accompagnée de bien d'autres qui toutes portent un nom particulier, comme autant de prises sur la grandeur abstraite, et qui sont toutes démontrées. Ce sont dans le genre du "nombre" des démonstrations portant sur le rapport de grandeurs, et nous avons vu que la structure en était multiplicative. La construction cartésienne rend vaines ces démonstrations, puisque l'additif et le multiplicatif sont mis ensemble, placés au niveau des grandeurs elles-mêmes. Ces grandeurs sont aussi bien des nombres, et dans ce rôle assimilables à des entiers.

Ensuite, doit être mentionnée dans le processus de numérisation l'une des données majeures de la mathématique moderne, à savoir la décimalisation dont Simon Stevin se fait le propagandiste en 1585 dans son *De Thiende*, par lui aussi écrite en français et parue la même année sous le nom de *la Disme*[22]. Cette représentation de la décimalisation, par le jeu de la virgule et du développement infini (qui n'est pas un cas limite puisqu'il est nécessaire pour des nombres aussi simples que $1/3$), unifie *de facto* le champ numérique. Elle s'emploie que l'on travaille indistinctement avec des longueurs, des poids, des vitesses ou des bilans financiers.

Si la décimalisation tend à faire disparaître l'algèbre particulière des proportions, c'est qu'elle trouve sa raison d'être dans une autre algèbre, l'algèbre polynomiale, bientôt la seule algèbre pensable. C'est certainement l'algèbre des proportions qui a permis de voir la somme d'une progression géométrique[23] :

$$\frac{1}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{1000}} = \ldots = \frac{1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots}{(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots - 1)},$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}.$$

[22] E.J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, Den Haag, Nijhoff, 1943, D.J. Struik (éd.), *The Principal Works of Simon Stevin*, Amsterdam, Swets and Zeitlinger, 1958.

[23] J. Dhombres, "Adégaliser en Occitanie", in J. Cassinet (éd.), *Chemins mathématiques occitans de Gerbert à Fermat*, Toulouse, 1995, pp. 161-200.

Mais cette remarque n'élimine pas le fait majeur, la provenance de la décimalisation d'une pratique algébrique hautement théorique sur les polynômes, dans le cadre de la mathématique arabe, et qui comporte en particulier la division polynomiale. On n'oubliera pas l'acte d'énumération du décimal, un rangement ordonné des chiffres car il répond à la méthode des indéterminées que Descartes considère comme étant de la plus grande importance pour sa géométrie algébrique des courbes[24]. On la résume par le fait que l'égalité unique

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n,$$

équivaut à une infinité d'égalités

$$a_n = b_n, \quad n \geq 0.$$

Troisième intervention en faveur de la numérisation des grandeurs, il y a la mesure des angles par l'imposition qu'elle fait des nombres négatifs. L'angle est objectivement une grandeur d'un type différent des longueurs, aires, ou volumes. Car l'opération d'addition n'y est pas liée à la structure d'ordre : en additionnant plusieurs angles, on peut parvenir à un angle plus petit qu'aucun de ceux additionnés ; en additionnant plusieurs fois l'angle que fait une tangente avec un cercle (*angle corniculaire*), on ne dépasse jamais l'angle que cette tangente fait avec une autre droite (ceci est démontré au livre III des *Eléments*). Je n'évoquerai pourtant de la mesure des angles, liée à celle des arcs[25], que ce qu'elle a comporté d'algèbre, et même d'analyse sous la forme des nombres négatifs. En effet, la trigonométrie, par l'usage de formules comme

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{1}$$

contraint à attribuer un signe à un rapport géométrique comme le sinus, que l'on peut pourtant définir sans cet artifice et sur la seule figure par le rapport $\sin\theta = \frac{b}{a}$.

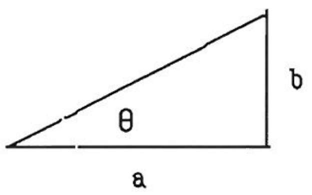

Fig. 2

Mais à garder le sinus comme un nombre abstrait, dénué de signes, on invalide la généralité de la formule (1). *Grosso modo,* cela revient à dire qu'on se limite au premier quadrant. Or, la relation (1) n'est pas seulement une extension possible, moyennant convention, d'une démonstration lue restrictivement dans le premier quadrant. Elle se déduit aussi de propriétés fonctionnelles, comme Euler le signalait en 1748 dans son *Introductio in analysin infinitorum.*

[24] "Mais je veux bien en passant vous avertir que l'invention de supposer deux équations de même forme, pour comparer séparément tous les termes de l'une à ceux de l'autre, et ainsi faire naître plusieurs d'une seule, dont vous avez vu ici un exemple, peut servir à une infinité d'autres Problèmes, et n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers" (*La Géométrie,* p. 351 de l'original).

[25] Je ne peux m'empêcher de faire remarquer que dans cette mesure des arcs intervient aussi bien que pour la mesure des longueurs une relation d'équivalence : d'une façon ou d'une autre, il faut comprendre le tore, que la topologie présente comme quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Plus généralement, ne faut-il pas considérer que pour toute mesure doit intervenir une relation d'équivalence, donc un quotientage ? Car, d'une certaine façon, il faut pouvoir considérer comme équivalents les objets de même mesure.

Quatre équations résument la preuve, sans que la figure soit exploitée :

$$\begin{aligned}
e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y), \\
e^{i(x+y)} &= e^{ix} \cdot e^{iy}, \\
e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y), \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y).
\end{aligned}$$

Rien ne limite donc la variable angulaire x, qui parcout toutes les grandeurs réelles ; le sinus (et aussi bien le cosinus) a donc un signe. Bref, la mesure des angles impose la *définition* d'un angle sur les quatre quadrants ; elle s'accompagne d'une *opération* d'addition illimitée et d'une *structure* qui a nom périodicité :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Le déploiement périodique de l'angle donne à voir $\mathbb{R}$, et non seulement $\mathbb{R}^+$, et plus généralement le corps des fractions, là où nous n'avions jusqu'à présent que des demi-corps[26].

Ce triptyque est clairement établi dans la *Géométrie de position* de Lazare Carnot, un ouvrage publié en 1803 : la figure qui résume et que l'on ne trouve guère avec cette généralité auparavant, est devenue celle de tous les ouvrages de trigonométrie, le cercle divisé en quatre par deux droites de référence orthogonales en son centre.

Voilà les éléments de la figure, dont la mobilité est celle du point M sur le cercle, pris alors dans les rêts du repère, auxquels les noms classiques sont donnés, ceux de la trigonométrie ; OA est le sinus, OB le cosinus, etc.

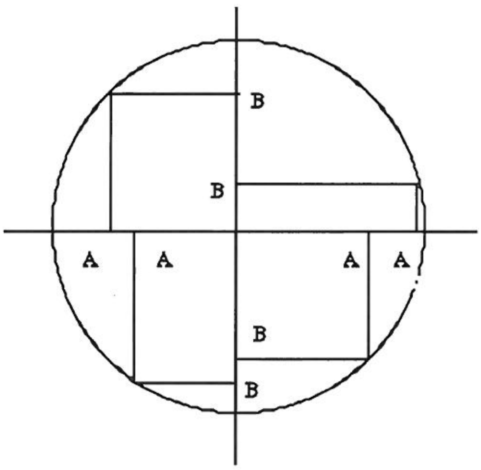

Fig. 3

Ce sont des grandeurs géométriques et toute l'analyse consiste à suivre ces grandeurs au cours du déplacement fictif de M : quatre quadrants possibles et des changements de signes corrélatifs. Carnot élargit la trigonométrie du premier quadrant à une trigonométrie du cercle tout entier : c'est le système trigonométrique.

[26]Une histoire de la trigonométrie est fournie dans A. von Braunmühl, *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie* Erster Teil, Leipzig, B.G. Teubner, 1900 ; *Zweiter Teil, ... bis auf die Gegenwart* ; les deux volumes sont disponibles en réédition, Sändig Reprint Verlag, H.R. Wohlwand, Vaduz, Liechtenstein, 1990.

La *Géométrie de position* est ainsi la première construction de la trigonométrie comme système de représentation fidèle d'une figure géométrique ; ce n'est plus le répertoire de formules de résolution d'un triangle, ou une analytique déductive à partir de formules mères. La trigonométrie a son lieu, le cercle ; son jeu, les changements de signe. Ceux-ci orientent le lieu, le quadrillent.

Carnot, pour en arriver là, a suivi tout un cheminement dont l'aboutissement théorique est la *Géométrie de position*. Il est parti d'une description analytique du réel géométrique par tableaux, et les grandeurs ne sont plus qualifiées que comme quantités.

> Pour donner de mon objet une idée un peu plus étendue, concevons un système quelconque de quantités, liées entre elles par des rapports quelconques. Il est évident qu'à l'aide de ces rapports, il suffira de connoître un certain nombre de ces quantités, pour que toutes les autres soient déterminées. Supposons donc, en effet, qu'ayant choisi pour termes de comparaison un certain nombre de ces quantités, suffisant pour que tout le reste soit déterminé, on exprime toutes les autres en valeurs de ces premières seules, et qu'on forme un tableau général. Ce tableau sera l'expression analytique des rapports qui par hypothèse existent entre toutes les quantités du système proposé.
>
> Supposons maintenant que ce système vienne à se transformer par degrés insensibles, suivant une loi quelconque : que cependant, si l'on veut, parmi les quantités qui le composent, quelques-unes demeurent constantes, pendant que les autres varient. Cela posé, il est évident qu'à mesure que la transformation du système fera des progrès, les formules du tableau qui expriment les rapports des diverses parties devront éprouver des changements analogues, et que ces changements deviendront de plus en plus sensibles, suivant que le système transformé s'éloignera davantage de son état primitif[27].

Les tableaux dont Carnot couvre les pages de ses ouvrages de géométrie ne sont pas statiques. Ils manifestent les analogies entre les figures, donc permettent leur partition en classes : tels sont les *systèmes corrélatifs abstraits*. Le mouvement de séparation s'éprouve concrètement à partir d'une fiction, celle d'une figure "qui se transforme par degrés insensibles". L'exemple élémentaire est celui d'un triangle et de la hauteur issue d'un des sommets : si sur la base l'on fait se mouvoir un autre sommet, le pied de la hauteur qui était initialement à gauche de ce sommet, vient se placer à droite.

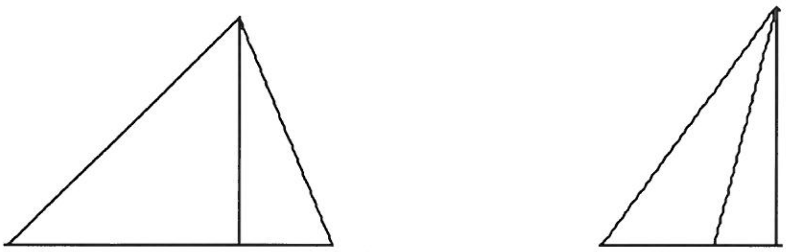

Fig. 4

Pour les formules qui fixent complètement les deux figures en exprimant les relations entre

[27]L. Carnot, *Géométrie de position à l'usage de ceux qui se destinent à mesurer les terrains*, J.B.M. Duprat, an XI, 1803. Traduite aussitôt en allemand, en anglais, en portugais, cette géométrie n'a pas été rééditée depuis sa parution. Une étude en est proposée, ainsi que sa place dans l'œuvre de Carnot, dans J. et N. Dhombres, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997.

quantités, le passage de la droite à la gauche se traduit par un seul changement de signe[28]. Le signe algébrique règle l'affaire des *quantités corrélatives,* classe les figures, et réalise l'algèbre en géométrie.

Le système primitif est l'avatar du système désigné dont Carnot avait fait précédemment usage dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*[29], où il tentait de rassembler en une même stratégie toutes les présentations du Calcul. L'algèbre conforte l'idée d'un système désigné, état où les liaisons indiquées entre quantités les déterminent intégralement. Le mouvement procure alors les systèmes auxiliaires.

En géométrie cependant, il n'y a pas de figure-mère et dire le système primitif relève d'un choix conventionnel : tous les systèmes sont transformés ou corrélatifs.

> Pour que deux systèmes soient corrélatifs, il n'est pas nécessaire qu'ils soient liés de fait entre eux ; c'est-à-dire qu'ils soient réellement les diverses transformations d'un même système primitif : il suffit qu'ils puissent être considérés comme tels, ou ramenés l'un à l'autre au moyen d'une mutation que l'on pourroit imaginer s'opérer par degrés insensibles[30].

Curieusement, à cette classification originale des figures dont une large partie est passée dans l'enseignement mathématique ordinaire, Carnot associe non pas une explication des signes $+$ et $-$, mais une doctrine des nombres négatifs. Figée parce que distincte du signe, et accrochée à une conception réaliste de la grandeur géométrique supposée issue des *Éléments* d'Euclide ! Les contradictions ne peuvent manquer de naître entre cette conception de la grandeur posée comme traditionnelle, et la codification des opérations de l'algèbre gérant l'occurrence de ces grandeurs dans les différents systèmes corrélatifs. Néanmoins, cette doctrine lui paraît essentielle, et voici même comment Carnot définit sa *Géométrie de position* :

> elle est donc, à proprement parler, la doctrine des quantités dites positives et négatives, ou plutôt le moyen d'y suppléer, car cette doctrine y est entièrement rejetée.

4 Un argumentaire dogmatique sur les grandeurs linéaires orientées

C'est un Carnot véhément qui prend la parole sur les nombres négatifs dont il veut éradiquer l'usage. Il le fait en vue d'un bien : sauver la validité générale des formules algébriques. Il y a donc une tactique de démolition au profit d'une stratégie de construction. Carnot a trop de culture historique pour ne pas savoir qu'il se rattache ainsi à la pensée de ceux qui entendent "sauver les phénomènes". Il déploie une rhétorique de tribun. Cela donne une harangue, la *Digression sur la nature des quantités dites négatives.* Les ci-devant sont sommés de comparaître.

[28] Carnot va plus loin ; il envisage les corrélations complexes, c'est-à-dire celles où le signe $-$ est remplacé par le signe $\sqrt{-1}$. Il est donc un des premiers à tenter de comprendre la signification des nombres complexes en géométrie : il ne le fait pas dans le sens d'une représentation géométrique de ces nombres, mais par l'interprétation des classes de figures. L'idée était trop abstraite pour son temps.

[29] L. Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal,* Paris, Duprat, in V-1797 ; $2^{\text{ème}}$*éditionélargie, Paris, V*$^{\text{ve}}$ Courcier, 1813, et nombreuses réimpressions ensuite de cette deuxième édition. La dernière est celle parue en 1970 chez A. Blanchard. La genèse de ce texte de Carnot est fournie par A.P. Youskkevitch in C.C. Gillispie, *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique, avec trois mémoires inédits de Carnot,* Vrin, Paris, 1979.

[30] Me bornant à l'exposé le plus simple et le plus court possible de mathématique, précise-t-il. (L. Carnot, *Géométrie de position, op. cit.*, pp. 96-111).

L'exorde du discours est sans fioriture, tout d'action :

> Les opérations de l'Algèbre conduisent à chaque instant à des expressions de formes négatives. Que signifient ces expressions ? Voilà ce qu'il faut savoir[31].

Vient le panorama de toutes les opinions qu'il s'agit de rendre ridicules. À ceux qui soutiennent que les quantités négatives isolées sont moindres que 0, Carnot remplaçant le zéro par le rien, assène

> pour obtenir une pareille quantité, il faudrait pouvoir ôter quelque chose de rien, ce qui est absurde[32].

À ceux qui évoquent une nature spécifique des quantités négatives, est refusé le sens de l'équilibre au nom des droits de l'égalité :

> pourquoi, lorsqu'on multiplie les unes par les autres, les négatives auraient-elles le privilège de donner leur signe au produit[33] ?

---

[31]L. Carnot, *Digression sur la nature des quantités dites négatives, in Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un Essai sur la théorie des transversales,* Paris, Courcier, 1806. La citation est page 96. Nous citerons désormais ce texte selon [L. Carnot, 1806].

[32][L. Carnot, 1806, p. 97]. Sur les nombres négatifs et les quantités négatives, la plupart des professeurs du XVIII^e siècle ont donné leur avis, et les mathématiciens de renom aussi, quoiqu'avec modération. En 1763, Kant n'écrivait-il pas un *Essai d'introduire les quantités négatives dans la philosophie (Versuch den Begriff der negativen Gröber in die Weltweisheit einzuführen, 1763),* où il s'ingéniait à dégager la contradiction logique P et non P de l'opposition P et $-P$. En 1795, dans leurs leçons à l'École normale, Laplace aussi bien que Lagrange évoquent les nombres négatifs. L'approche de Laplace est abrupte, directement algébrique, mais dans le cadre de la seule algèbre qu'il fournit, à savoir celle des opérations polynomiales. C'est la filiation cartésienne et le procédé est par *imagination* et réduction. Toute équation polynomiale a des solutions, autant que son degré l'indique. Ainsi, une équation du second degré typique est $(x-a)(x-b)=0$, les quantités a et b étant au besoin imaginées pour que cette décomposition ait lieu. Si donc $x^2-3x+2=0$ fournit aussitôt $(x-1)(x-2)=0$, avec les racines 1 et 2, x^2-x-2 fournit $(x+1)(x-2)=0$ avec les racines -1 et 2. Le nombre négatif intervient nécessairement dès la considération d'un polynôme, et sa décomposition corrélative en facteurs : c'est une nécessité qui se voyait dès le premier degré puisqu'une équation comme $x+5=0$ a -5 comme racine. Cependant, le nombre négatif ne suffit pas à couvrir tous les nombres requis au second degré puisque $x^2+1=0$ ne se décompose pas, même avec des facteurs négatifs. Il y faut d'autres nombres encore ; ce sont les nombres dits aujourd'hui complexes qui font intervenir i selon $(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})=x^2+1$ et appelés précisément imaginaires par Descartes.

La réduction, qui requiert une preuve, est que toute équation, non seulement du second degré, mais de tous les autres degrés, ne fait pas intervenir d'autres nombres que les complexes dans sa décomposition en facteurs : tel est le *théorème fondamental de l'algèbre* que d'Alembert avait démontré à sa façon en 1746 et que Laplace, en 1795, exécutait magistralement en deux pages, devant un auditoire médusé, et un Lagrange abasourdi. Théorème fondamental certes, mais fondamental pour l'algèbre polynomiale faut-il ajouter ; résultat qui insère les nombres négatifs dans une construction par laquelle la question de l'existence même des imaginaires n'est pas posée : elle va de soi puisque c'est cela l'idée claire et distincte qui pose un polynôme depuis Descartes. Carnot reste dans le ton général lorsqu'il affirme : "les quantités simplement négatives doivent à cet égard être considérée comme les quantités imaginaires elles-même ; c'est-à-dire, comme de simples formes algébriques". [L. Carnot, 1806, p. 107].

[33][L. Carnot, 1806 p. 98].

À ceux qui fondent leur opinion sur la puissance des symboles, il est rétorqué :

> on pourrait par la magie des signes, donner l'existence à ce qui ne peut pas être, et rendre impossible ce qui existe : certes, les géomètres ne se sont jamais douté qu'ils eussent en main un pareil pouvoir[34].

Qu'on ne l'accuse pas de manquer de bon sens en ne se ralliant pas à l'opportunisme général puisque l'emploi des quantités négatives réussit à éviter des voies contournées ; il entend raisonner en critique mathématique.

> Mon but n'était pas de rechercher comment on pourrait se passer de l'emploi des quantités dites négatives, mais de savoir en quoi consiste la nature de ces mêmes quantités, lorsqu'on en fait usage[35].

L'efficacité de ce dernier bout de phrase est remarquable. Carnot ne recherche pas l'essence, mais la nature en acte. Et dans cette nature en acte, il y a amphibologie, deux acceptions, la quantité négative à la fois comme quantité affectée du signe $-$ et comme quantité "qui se trouve affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir"[36].

Nous sommes en plein discours : Carnot sépare les durs de ceux qui le sont seulement en apparence, que l'on peut donc redresser. Un autre nom leur sera réservé : quantités inverses. Et les quantités inverses ont droit à une définition :

> Toute quantité inverse peut être considérée comme différence de deux quantités directes dont la plus grande a été prise pour la plus petite, et réciproquement[37].

Ces quantités rendent compte du principe de continuité constamment utilisé en algèbre, en particulier pour la démonstration de son théorème fondamental :

> toute quantité variable qui, de positive qu'elle était, devient négative et réciproquement, passe nécesssairement par 0 ou par ∞[38].

Si ce discours n'entraîne pas notre adhésion, c'est que nous avons oublié les interdits qui planent encore sur le zéro. Au XVIII^{e} siècle, rares sont les mathématiciens à le traiter comme une quantité, et encore moins comme une grandeur. Dès lors, faire $A = B$ dans le passage de $A - B$ à $B - A$ rend cohérente une démarche que la nullité brute déconcerterait. Quelques calculs un peu longs viennent ensuite dans la Digression, mais ils ne font que ménager les effets, comme à la tribune les explications techniques, placées au bon endroit et savamment dosées endorment la méfiance ... ou endorment tout court.

---

[34] [L. Carnot, 1806, p. 98]. Ces arguments sont repris de l'entrée *Nombres négatifs* de l'*Encyclopédie,* qui est signée d'Alembert. Ce dernier concluait : "Il n'y a donc point réellement et absolument de quantité négative isolée". Carnot reprend des arguments fonctionnels de d'Alembert. Dans la Géométrie de position, il fait remarquer que si -2 existait en tant que grandeur, alors de $(-2)^2 = (2)^2$ on aurait $2\log(-2) = 2\log 2$. Ce qui est absurde, car, selon lui, le logarithme est nécessairement une fonction injective : à deux quantités distinctes doivent correspondre deux logarithmes distincts. Le présupposé fonctionnel – car il s'agit bien de cela – critique donc le négatif. Ce présupposé fonctionnel touche la simple fonction puissance. Toujours dans la *Géométrie de position,* Carnot étale sa perplexité, si $-3 < 2$ alors $(-3)^2 = 9 < 2^2 = 4$. Tout est dit lorsqu'on en vient aux proportions, c'est-à-dire aux règles d'Euclide. Si $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, alors l'hypothèse $-1 < 1$ implique sa contraire $-1 > 1$ et réciproquement. Dilemme insuportable, mais qui tient seulement à l'implication : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a > c$ entraîne $b > d$. Elle n'a pourtant été établie que pour les grandeurs positives.

[35] [L. Carnot, 1806, p. 99].

[36] [L. Carnot, 1806, p. 99].

[37] [L. Carnot, 1806, p. 102].

[38] [L. Carnot, 1806, p. 102]. La fonction homographique sert d'exemple-test.

Sussurés en dernier, sous forme de répétition quelques mots doivent marquer l'avantage acquis :

> Il est à remarquer, comme on l'a déjà dit, que cet exemple, si facile à expliquer dans notre théorie, détruit entièrement l'opinion de ceux qui disent que les quantités négatives ne sont autre chose que des quantités ordinaires, prises en un sens opposé à celles qu'on nomme positives[39].

Bref, les bons sont séparés des mauvais.

Reste à récupérer les bons alors qu'un argument de bon sens semble s'imposer. Carnot s'empresse de devancer tout contradicteur :

> Mais on peut se demander à quoi bon introduire dans le calcul, des quantités affectées d'un faux signe, et s'il ne serait pas plus simple de donner tout de suite à chacune d'elles le signe qui lui convient[40].

Paternaliste, l'orateur convient que la réflexion n'est pas si simple : "Je réponds d'abord qu'on y est souvent obligé"...[41]. L'erreur en outre est humaine et il ne faut pas jeter le bébé avec l'eau du bain :

> Il arrive souvent ainsi que, quoiqu'on se soit trompé dans la mise en équation, la solution n'en est pas moins utile, parce que l'erreur est facile à rectifier, sans qu'il soit besoin de recommencer le calcul[42].

Carnot n'en dira pas plus sur la mise en équation, et donc sur le repérage par des axes : ici il reste enfermé dans le premier quadrant si l'on peut dire[43].

Enfin, même si l'on n'est pas obligé de les employer, les *bons* ont du bon car avec les quantités inverses, l'avantage est de "représenter par une seule et même formule, un système variable de quantités, dans tous les états où il peut se trouver"[44]. Bref les quantités inverses sont "faussement appelées quantités négatives"[45].

Quant aux vraies quantités négatives, elles n'ont aucune signification par elles-mêmes. De sorte que leur emploi nécessite la vérification des experts : elles ne regardent pas les députés ajouterait-on[46] !

> Voilà pourquoi c'est un travail important que celui des savans, qui se sont attachés à montrer que les résultats auxquels on est conduit par l'emploi de ces formes insignifiantes en elles-mêmes, ne diffèrent jamais de ceux qu'on obtient par d'autres tournures de calcul qui n'exigent pas qu'on s'en serve[47].

---

39 [L. Carnot, 1806, p. 105].

40 [L. Carnot, 1806, p. 105].

41 Idem.

42 Idem.

43 À ce titre, dans la *Géométrie de position*, tout au long du premier chapitre Carnot s'emploie à montrer que les équations algébriques donnent des solutions en plus de celles attendues – solutions négatives ou imaginaires – parce que l'équation répond à un problème qui n'est pas de fait le problème réel posé. L'argument est judicieux, mais il n'est pas poussé jusqu'à son terme, qui serait précisément la question de la mise en équation, avec la signification accordée à une représentation des inconnues d'un problème par des lettres : quelles grandeurs, arithmétiques, algébriques ? Carnot préfère une limitation de l'algèbre – ignorer les solutions supplémentaires – à la tâche d'interprétation de sa prolixité. La fiction algébrique n'est conçue comme capable d'éclairer le réel que dans la mesure où elle s'en alourdit.

44 [L. Carnot, 1806, p. 106].

45 [L. Carnot, 1806 p. 107].

46 Lazare Carnot a été député à la Législative, à la Convention, puis au Conseil des Cinq-Cents. Il est entré au Comité de salut public en août 1793 et est devenu un des cinq Directeurs de la République en 1796.

47 [L. Carnot, 1806 p. 108].

Pour ceux qui se livrent quand même à l'usage des vraies quantités négatives, qu'ils ne perdent jamais de vue que les signes sont là seulement "pour aider l'imagination et la mémoire", et ne "peuvent jamais être pour elle que de simples abréviations"[48].

L'orateur peut alors lancer quelques idées générales sur la démarche des mathématiques. Mais il est temps de conclure, et c'est la rédaction d'un décret qu'il serait directement possible de soumettre au vote :

> De tout ce qui vient d'être dit, je conclus ,
>
> 1° Qu'il n'existe de véritables quantités que celles qu'on nomme quantités absolues
>
> ... etc, etc.
>
> 4° Que les quantités négatives proprement dites isolées, sont des êtres aussi absurdes que les quantités imaginaires elles-mêmes.
>
> etc,
>
> 12° Qu'enfin cette distinction des quantités appelées communément négatives en quantités négatives proprement dites et quantités inverses, ne change rien aux procédés ordinaires du calcul, mais qu'elle fait simplement disparaître les contradictions et l'obscurité, qui résultent nécessairement de l'application d'une même dénomination à deux choses essentiellement différentes[49].

Applaudissements fournis à droite comme à gauche. Le décret est adopté !

Les objections de Carnot, et précisément sous leur forme dogmatique, ne me semblent pas inutiles à méditer par quiconque entend reprendre un travail pédagogique avec les grandeurs : il les retrouvera d'une façon ou d'une autre.

5 Arithmétisation ou structure des grandeurs scalaires : calcul et mesure

Jusqu'au XVIII^e siècle, les quantités négatives n'entrent pas plus naturellement dans la considération des grandeurs physiques, poids, volumes, etc., et les repères y sont implicitement choisis de telle sorte que l'on n'ait affaire qu'à du positif. Toutefois, la numérisation des grandeurs les uniformise trop, et annihile les effets du repère. C'est parce qu'il rencontre des grandeurs de natures distinctes, des longueurs, des temps, mais aussi des quantités de chaleur, que Joseph Fourier fonde l'analyse aux dimensions[50]. Ainsi, il redonne à chaque genre de grandeur sa spécificité : si chaque grandeur est représentée par un nombre réel, cette représentation impose dans chaque genre un repère, et donc le choix d'une unité. Et l'on peut certes traiter ces différents nombres par les opérations, indépendamment de la nature de la grandeur qu'ils représentent, à condition toutefois de respecter l'homogénéité : on n'additionne que des grandeurs du même genre. Il faut donc faire jouer une algèbre particulière, toute de vérification de l'homogénéité.

Telle est l'analyse aux dimensions qui contraint de penser une force à la manière d'une grandeur analysée comme produit d'une masse par une longueur et l'inverse du carré d'un

[48] [L. Carnot, 1806 p. 108].
[49] [L. Carnot, 1806 p. 109].
[50] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822 ; *de Fourier*, Paris, Gauthier-Villars, 1888, t. 1. Une biographie intellectuelle de Fourier est fournie dans J. Dhombres, J.B. Robert, *Joseph Fourier, ou la chaleur mathématisée, Et ignem regunt numeri*, Paris, Belin, 1997.

temps

$$[\mathrm{F}] = \mathrm{MLT}^{-2}$$

ou un travail comme le produit d'une masse par le carré d'une longueur et l'inverse du carré d'un temps

$$[\mathrm{T}] = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$$

Le travail est donc de même genre que l'énergie cinétique (ou l'énergie potentielle). Les lois bien connues de la mécanique ne peuvent alors égaler que des grandeurs du même genre.

Ce n'est que dans le dernier tiers du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle qu'est pris en tant que problème non résolu l'analogie numérique de toutes les grandeurs scalaires. Le processus de résolution aboutit beaucoup plus à une arithmétisation, c'est-à-dire la construction de tout système de grandeurs à partir du seul système des entiers naturels. Je ne m'intéresserai pourtant ici qu'à la conséquence majeure du point de vue de la numérisation : l'identification des grandeurs et des quantités au seul système des nombres réels.

Cassant le fil descriptif et historique, je me contenterai de donner la démonstration d'un seul théorème, car elle suffit à faire comprendre ce que l'arithmétisation des grandeurs doit aux différentes constructions précédentes. Le théorème indique que le système des réels est l'horizon de tout système de grandeurs euclidiennes.

> Soit $\mathbb{G}$ un groupe abélien, totalement ordonné et archimédien. Il existe un homomorphisme strictement croissant de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{R}$.

Si $\mathbb{G}$ est réduit à son élément neutre 0, le théorème est trivial. Soit e un élément fixé de $\mathbb{G}$, supposé strictement positif. Soit x un élément quelconque de $\mathbb{G}$. Puisque $\mathbb{G}$ est archimédien et que tout sous-ensemble majoré non vide d'entiers relatifs possède un plus grand élément, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un unique entier relatif k_n tel que

$$k_n e \leq 10^n x < (k_n + 1)e. \tag{2}$$

La relation (2) est la façon adaptée à la structure ordonnée d'écrire la division euclidienne :

$$10^n x = k_n e + y \quad \text{avec} \quad 0 \leq y < e.$$

Comparons k_n et k_{n+1} en exhibant les deux équations les définissant

$$\begin{aligned} 10k_n e &\leq 10_{n+1}x < 10(k_n + 1)e, \\ k_{n+}1e &\leq 10_{n+1}x < (k_{n+1} + 1)e. \end{aligned}$$

Donc

$$k_{n+1} < 10(k_n + 1) \quad \text{et} \quad 10k_n < (k_{n+1} + 1).$$

Soit, puisque k_n et k_{n+1} sont des entiers, la double inégalité prévisible

$$10k_n \leq k_{n+1} \leq 10k_n + 9$$

et donc l'encadrement

$$0 \leq \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} - \frac{k_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^{n+1}}.$$

Pour tout entier $p \geq 1$, on dispose encore d'un encadrement comme il est facile de le vérifier en utilisant la progression géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{10^n}$:

$$0 \leq \frac{k_{n+p}}{10^{n+p}} - \frac{k_n}{10^n} \leq \frac{1}{10^n}.$$

Par suite, les nombres décimaux $k_n 10^{-n}$ forment une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, corps qui est complet par construction. Ainsi, cette suite converge vers un nombre réel noté $f(x)$.

Nous venons d'exhiber une correspondance $f : G \to \mathbb{R}$. Montrons que f est l'application cherchée. En effet :

- D'une part, f est une application *strictement croissante.* Soient $x < y$, où x et y sont deux éléments de G. Notons $k_n(x)$ et $k_n(y)$ les entiers tels que

$$\begin{aligned} k_n(x)e &\leq 10^n x < (k_n(x)+1)e, \\ k_n(y)e &\leq 10^n y < (k_n(y)+1)e. \end{aligned}$$

  On combine ces relations pour obtenir :

$$0 < 10^n(y-x) < (k_n(y)+1)e - k_n(x)e = (1 + k_n(y) - k_n(x))e.$$

  Puisque $\mathbb{G}$ est archimédien, il existe un entier N tel que $10^N(y-x) > e$. D'où pour tout $n \geq N$, on a :

$$10^{n-N} < (1 + k_n(y) - k_n(x)).$$

  Soit

$$\frac{1}{10^N} < \frac{k_n(y)}{10^n} - \frac{k_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

  En passant à la limite en n :

$$\frac{1}{10^N} \leq f(y) - f(x)$$

  et donc $f(y) > f(x)$ lorsque $y > x$.

- D'autre part, f est un *homomorphisme* de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{R}$. On écrit en effet les deux inégalités :

$$(k_n(x) + k_n(y))e \leq 10^n(x+y) < (k_n(x) + k_n(y) + 2)e$$

  et

$$k_n(x+y)e \leq 10^n(x+y) < (k_n(x+y)+1)e.$$

  Soit :

$$k_n(x)10^{-n} + k_n(y)10^{-n} \leq k_n(x+y)10^{-n} \leq k_n(x)10^{-n} + k_n(y)10^{-n} + 10^{-n}.$$

  À la limite

$$f(x) + f(y) \leq f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

  soit l'équation caractéristique d'un homomorphisme

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

  Ce qui termine la démonstration.

6 Grandeurs spatiales : la vectorialisation

Quoiqu'il aboutisse au corps des nombres réels, le récit historique que j'ai tenté sur les grandeurs est loin d'être uniforme ; il manifeste l'expérience mathématique accumulée de diverses espèces de grandeurs, et leur réduction finale dans une unique structure.

Sera pourtant linéaire le récit concernant les grandeurs que nous qualifions aujourd'hui de vectorielles. Et cette uniformité s'explique parce que les créateurs du vectoriel ont sciemment construit leur exposé sur le modèle de la mesure des grandeurs euclidiennes, revu et adapté par Descartes. Comme pour les nombres relatifs, ou pour l'analyse aux dimensions, c'est la réflexion sur le rôle du repère qui s'avéra la plus utile.

C'est en 1726 que Daniel Bernoulli se donne comme tâche de construire un genre de grandeurs spatiales[51]. Il les rattache à la notion de "force", plus ou moins chargée de signification empirique par la mécanique. Mais il se garde de la contamination du sens – crainte de la physique une fois posé le problème – en employant le seul mot de "puissance" dans son exposé proprement mathématique. La théorie des puissances est délibérément une théorie des grandeurs spatiales.

La *définition* d'une puissance est volontairement géométrique : c'est un segment de droite dont l'origine est fixée et ne changera plus. L'objectif est une autre définition, celle de l'addition de deux puissances. Il ne s'agit pas de la trouver, mais de la prouver. C'est-à-dire que Bernoulli tente la voie axiomatique : quelles propriétés doit-on postuler au minimum sur la *composition* des puissances pour qu'elle se réduise à l'addition attendue. Celle que résume la figure du parallélogramme, la somme de puissances a et b est la diagonale c.

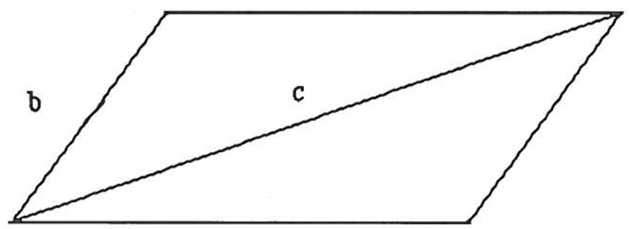

Fig. 5

Est donc postulée l'existence d'une opération sur les puissances, notée ici $\oplus$, et $a \oplus b$ donne une autre puissance, la résultante, donc un segment de droite de même origine. Le modèle est ouvertement celui des nombres réels[52] (comme groupe abélien totalement ordonné). Cela se traduit par un axiome. La somme $a \oplus b$ cherchée de deux puissances représentées par des

[51]L'article de D. Bernoulli s'intitule "Examen principiorum mechanicae, et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium", *Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop.*, 1 ,1726, pp. 126-142. Il est publié dans ses *Œuvres* en cours d'édition : *Die Werke von Daniel Bernoulli,* Basel, Birkäuser, Bd 3, pp. 119-135. L'article de D. Bernoulli est traduit en français, et commenté, par J. Dhombres et P. Radelet, *Sciences et Techniques en perspective,* vol. 11, juillet 1987, pp. 1-90. Voir aussi J. Dhombres, "Un style axiomatique dans l'écriture de la physique mathématique du XVIII^{e} siècle", *Rivista di Storia della Scienza,* 1988.

[52]Bernoulli croit pouvoir ne pas postuler la structure multiplicative de $\mathbb{R}$ et la déduire de sa construction : il "démontrera" $\lambda(a \oplus b) = (\lambda a) \oplus (\lambda b)$, pour tout nombre réel λ. La démonstration est inacceptable par faute de continuité. Mais est particulièrement intéressante la prétention de démonstration, car elle signale le moteur même de la numérisation des grandeurs : déduire la multiplication de l'addition.

segments alignés, est la somme algébrique de leurs mesures[53].

Fig. 6

L'axiome spatial – il en faut évidemment un – est remarquablement simple et il relève de ce que l'on pourrait appeler une physique des symétries. C'est ce que nous voudrions montrer.

Bernoulli pose que lorsque deux puissances non alignées ont la même longueur, leur résultante ou somme, un segment donc, est nécessairement située sur la bissectrice (intérieure) des deux segments représentatifs : $a \oplus a$ est sur la droite DB (figure 7).

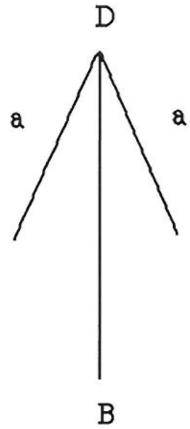

Fig. 7

Le mathématicien d'aujourd'hui peut douter qu'il soit possible de déterminer l'addition sous de si faibles impositions. C'est qu'il ne perçoit pas qu'une hypothèse est cachée dans

[53]Alors que nous avons vu au début du XIX^e^ siècle Carnot refuser les négatifs, le passage sans problème en ce début du XVIIIe siècle à l'algèbre des nombres relatifs n'indique pas une régression de la pensée mathématique. Une explication me paraît importante, précisément dans le cadre d'une réflexion sur les grandeurs mathématiques ou physiques. Carnot vise la géométrie, et même la géométrie élémentaire, c'est-à-dire un corpus de connaissances bien organisé en vue de l'enseignement. Il lui importe donc que les méthodes de démonstration de la géométrie soient sur le même modèle, et en particulier que des théories autres, l'algèbre en particulier, mais aussi bien l'exhaustion ou le calcul infinitésimal, ne viennent pas interférer. D'où le rejet des nombres négatifs, et le jeu sur les quantités inverses. Car elles sont censées expliquer une classe entière de figures géométriques, donc rester dans le giron géométrique. Bernoulli vise quant à lui la statique, c'est-à-dire qu'il entend la formuler comme une science purement hypothético-déductive : il sait qu'il aura besoin dans ses raisonnements de passer à la limite (par la méthode d'exhaustion). Aussi, adjoint-il sans difficulté dans sa construction l'algèbre des nombres réels. L'opposition entre Bernoulli et Carnot correspond donc à l'opposition majeure au XVIIIe siècle, entre une mathématique *transcendante* et une mathématique *élémentaire*. La deuxième ne prépare pas la première ; elle en est distincte et elle doit être aussi rigoureuse, sinon plus, que la première. Faute d'une totale compréhension du repère et dans la mesure même où le repère est éliminé, l'algèbre joue un rôle pernicieux en géométrie élémentaire ; elle est au contraire bienvenue dans l'axiomatique de la Statique selon Bernoulli qui accepte aussi bien le passage à la limite. (Une étude de la signification de la mathématique élémentaire au XVIII^e^ siècle est faite au chapitre II de J. et N. Dhombres, *Lazare Carnot, op. cit.*).

la fixation même d'une opération sur les puissances : cette addition a une réalité physique, c'est-à-dire qu'elle est conçue comme devant être indépendante du repère choisi. Ce repère n'est certes pas mentionné dans la liste des axiomes, mais il est présent dans la tête de celui qui propose la démarche axiomatique et chez tous ses lecteurs contemporains aussi bien. Tout simplement parce qu'il pense mesure d'une puissance par sa longueur — cela a été dit pour les puissances alignées — et s'impose donc un repère orthonormé : la géométrie de Descartes est entrée à ce point dans les consciences[54].

Aussi bien, $a \oplus b$ ne doit pas dépendre de ce choix d'un repère. Autrement dit, en symétrisant le rôle du repère par rapport à l'objet mathématique en cause (les segments de droite), si sur les deux puissances a et b l'on réalise une similitude S (de point fixe l'origine des puissances), on doit avoir

$$S(a \oplus b) = S(a) \oplus S(b).$$

Bref, une loi de conservation est postulée avec l'addition, ce qu'on appelle en physique une invariance, quand bien même la mathématique d'aujourd'hui préfère parler d'une commutation.

C'est celle-ci qui, explicitement[55], est le moteur du premier théorème de Daniel Bernoulli par lequel il prouve que la résultante de deux puissances égales et orthogonales est la diagonale du carré qu'elles forment. Les deux puissances sont représentées (figure 8) par des segments égaux DA et DC, l'angle ADC étant droit. Il s'agit de déterminer la longueur de la résultante DB sur la bissectrice. Il suffit alors de lire le dessin comme celui d'un changement de repère. En effet, DA (respectivement DC) est aussi bien résultante de deux puissances orthogonales DH et DE (respectivement DH et DG), l'angle droit alignant nécessairement les points E, D et G puisque les angles EDH et GDH sont également droits[56]. Une similitude fait alors passer du triplet DE, DA, DH, au triplet DA, DB, DC, ou encore du triplet DH, DC, DG au même triplet DA, DB, DC. Dès lors, on peut traiter algébriquement, du moins en

[54]De sorte que je n'étais pas assez précis — et les historiens le sont rarement à ce propos — lorsque j'avançais que la définition d'une puissance chez Bernoulli était volontairement géométrique. J'aurais dû ajouter qu'elle l'était au sens de la géométrie analytique dont Descartes a manifesté la constitution. Si l'on ne le dit pas ainsi, on entre dans un fixisme de la géométrie euclidienne et l'on ne peut alors que morigéner Bernoulli de ne pas avoir explicité le rôle attribué au repère. Ce jeu de correction est encore trop souvent la manie historienne — comme une bonne leçon donnée à des esprits mal dégrossis — et elle est aussi bien le fait de l'épistémologie historique que de la sociologie des sciences : il y a prétention scientiste, dans les deux cas, celle de mieux dire la science qui a été autrefois construite. Une lecture critique du passé de la science tente bien plutôt, par un regard enrichi de science actuelle, de lire l'objectivité scientifique d'autrefois, et ce qui fait changement, ce qui a permis le changement.

[55]J'insiste sur l'adverbe "explicitement". Je ne manifeste pas une invariance qui n'aurait pas été pensée par Bernoulli ; je la manifeste pour le lecteur d'aujourd'hui qui n'a plus dans sa tête le cadre mathématique et physique de Bernoulli.

[56]Bernoulli dessine volontairement une figure fausse : il n'aligne pas verticalement les points E et A, ni les points G et C. C'est un des dilemmes classiques de la géométrie : comment dessiner une figure lorsque la preuve porte précisément sur la forme de cette configuration. La pratique mathématique dominante semble être de dessiner juste - c'est-à-dire selon ce qui va être prouvé - sans manifester ostensiblement cette justesse par d'autres lignes que celles dont se servira la démonstration. Une pratique, minoritaire je crois, choisit le dessin faux. La première pratique relève de la synthèse géométrique, la seconde de l'analyse problématique et c'est celle qu'adopte Daniel Bernoulli.

L'histoire des mathématiques n'a pas encore donné toute sa place à l'étude des figures comme révélatrices des formes privilégiées du raisonnement (et bien sûr comme traces de filiations et de postérités). Voir J. Dhombres, "La figure dans le discours géométrique : les façonnages d'un style", *Theoria*, Segunda Epoca, 8, 1993, n° 19, pp. 51-88.

présupposant pour $\oplus$ la commutativité et l'associativité[57] :

$$\begin{aligned} DB = DA \oplus DC &= DE \oplus DH \oplus DH \oplus DG \\ &= 2DH \oplus (DE \oplus DG) \\ &= 2DH, \end{aligned}$$

puisque DE et DG sont des puissances alignées, égales et opposées et donc la résultante $DE \oplus DG$ est l'élément neutre de la loi $\oplus$. Ainsi $DB = 2DH$. Reste à faire jouer le rapport de similitude, car DH est à DA comme DA est à DB, ou encore $DH \cdot DB = DA^2$. Soit, en notant $x = DB$ et $a = DA$, la valeur $\frac{x}{2}$ pour DH et ainsi, $x^2 = 2a^2$. Ainsi, DB est la diagonale du carré de côtés DA, DC.

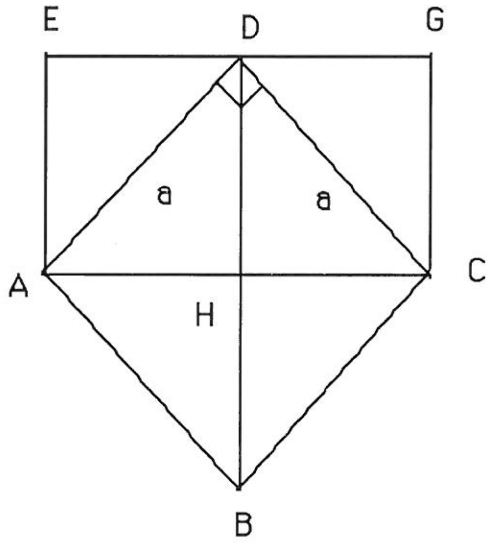

Fig. 8

Pour sa théorie spatiale de la mesure des puissances, Daniel Bernoulli chemine ainsi de figures en figures, passant du carré – il vient de prouver que la résultante coïncide avec la diagonale – au parallélogramme – c'est la dernière étape – en faisant intervenir à titre intermédiaire les losanges et les rectangles. Alors même que la démarche est axiomatique et algébrique, les figures, à titre de langage, accaparent ce qu'il faut de l'espace. Le passage particulièrement élégant du rectangle au parallélogramme est exemplaire d'une pédagogie de la découverte.

Il suffit en effet de voir que la diagonale du parallélogramme $DABC$ est celle du rectangle $DEBG$, le rectangle étant construit par la décomposition de DA selon DE et DH, et le prolongement $CG = DH$. Si donc $\oplus$ est connue pour les rectangles selon la diagonale on a

$$DA \oplus DC \quad = \quad DE \oplus DH \oplus DC$$

[57]On peut penser que ces deux propriétés de l'opération de résultante sont physiquement évidentes pour Bernoulli, à la manière même de son jeu avec le repère. L'associativité est en tout cas ce qui lui fait réduire la composition des puissances à un problème plan (toute composition de puissances en nombre quelconque se réduit à une composition deux à deux, donc à chaque fois à un problème plan). Est-il besoin d'insister sur les avantages de la voie axiomatique qui contraint le lecteur à combler les trous éventuels dans le raisonnement de l'inventeur ?

$$
\begin{aligned}
&= DE \oplus DG \qquad (\text{car } DH = CG)\\
&= DB.
\end{aligned}
$$

Par le passage du droit du rectangle à l'oblique du parallélogramme, outre qu'elle porte la

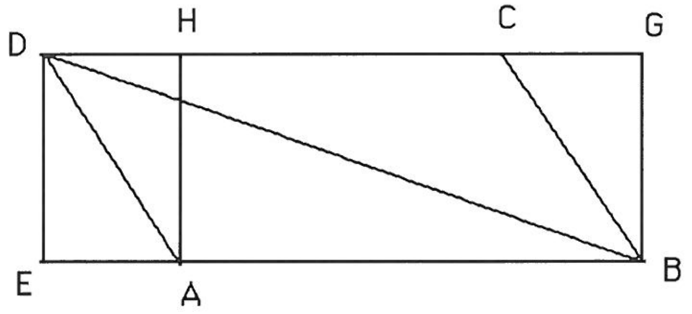

Fig. 9

preuve, la figure dit en outre à qui veut la lire ainsi, que suffit le repérage orthonormé des puissances, et que la réduction du spatial à du linéaire sur les axes orthonormaux du repère enregistre tout ce qu'il est utile de savoir sur la composition des puissances. La figure 9 est donc lue de façon réductrice.

Symptomatiquement, alors même que les auteurs du XVIII^e siècle feront allusion à l'article de Bernoulli, et que d'autres amélioreront considérablement la méthode axiomatique choisie[58], la composition des puissances n'entrera pas dans la pratique géométrique, ni même dans la mécanique. C'est qu'elle sera analytiquement résumée par des couples selon

$$
\begin{aligned}
DA &: (x_1 = DH, y_1 = DE),\\
DC &: (x_2 = DC, y_2 = 0),\\
DA \oplus DC &: (x_1 + x_2, y_1 + y_2).
\end{aligned}
$$

Autrement dit, le rectangle formé par les coordonnées empêche de voir que le parallélogramme pourvoit une opération géométrique intrinsèque[59].

Nous pouvons alors non pas expliquer, mais rendre compte d'une insuffisance, la non prise en compte du vectoriel avant le XIX^e siècle. On a bien une *définition*, et une *opération* avec la résultante, mais il n'y a pas de *structure*. C'est que le linéaire est assimilé à l'opération de composition et à son écriture analytique ; il n'est pas pensé comme tel.

C'est certainement Lazare Carnot qui a fait le pas décisif en faveur de la structure. Si une figure peut résumer sa pensée, il ne faudrait pas la considérer comme accidentelle. Elle survient

[58]On trouvera notamment des descriptions de la composition des puissances dans P. Duhem, *Les origines de la statique*, Paris, 1912 ; dans C. Truesdell, "Whence the law of the momentum", *Histoire de la pensée XII (Mélanges, A. Koyré)*, Paris, 1964, pp. 588-612, et dans J. Dhombres, P. Radelet-de Grave, "Contingence en nécessité en mécanique. Étude de deux textes inédits de Jean d'Alembert", *Physis*, vol. 28, 1991, *Nuova Ser.*, fasc. 1, pp. 35-114.

[59]La situation de la composition des forces est donc paradoxale dans les textes de mécanique du XVIII^e siècle. D'une part, cette composition selon la règle du parallélogramme intervient dès que l'on décrit une machine simple : elle était fondamentale dès l'explication de la descente d'un mobile sur un plan incliné chez Galilée. Aucune explication architecturale ne l'évite, par exemple pour la théorie des voûtes. D'autre part, elle n'apparaît pas comme une opération géométrique pour elle-même : sa lecture analytique selon les axes de coordonnées suffit. Alors même qu'une remarquable axiomatisation a permis d'analyser ce qui fonde la composition.

au terme de toute une construction. Dans son *Essai sur les machines en général* de 1783, il tente en effet une mesure des grandeurs orientées dans l'espace ; il introduit d'abord la vitesse "exprimée dans le sens d'une autre"[60]. C'est encore une vitesse, la projection orthogonale $\overrightarrow{V'}$ d'un premier vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ sur le second $\overrightarrow{W}$ et la mesure de cette projection par $\overrightarrow{W}$.

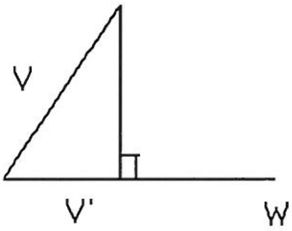

Fig. 10

En notations modernes

$$\overrightarrow{V'} = \frac{<\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}>}{<\overrightarrow{W},\overrightarrow{W}>}\,\overrightarrow{W}\,.$$

Ainsi, quoiqu'il se débarrasse de tout repère, Carnot n'entend pas obtenir du numérique (le produit scalaire) : il veut rester dans le spatial[61]. Et c'est ainsi qu'il donne la figure emblématique du vectoriel.

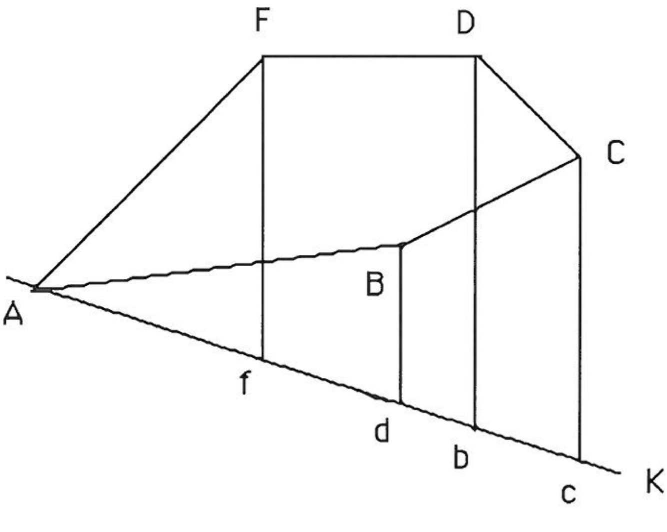

Fig. 11

La droite AK est quelconque : c'est le repère, le seul repère[62]. La ligne polygonale $AFDCB$ indique l'addition des "puissances" successives, des vitesses, par exemple AF, FD, DC et CB,

[60]L. Carnot, *Essai sur les machines en général,* Dijon, Defoy, 1783. Cette édition est très rare ; une seconde édition chez le même imprimeur est sortie en 1786. Le tout est fortement repris dans un ouvrage plus accessible, *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement,* Paris, Deterville, 1803.

[61]La grandeur qu'il obtient joue évidemment un rôle crucial dans la définition d'une nouvelle grandeur physique, ce que l'on appellera le travail.

[62]Une histoire de la géométrie des coordonnées est fournie par G. Loria, "Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla storia della geometria analitica", *Reale Accad. dei Lincei, Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,* 5, 14, 1923, pp. 777-845.

qui fournit au final AB. Cette addition spatiale se lit exactement par une addition algébrique sur la droite orientée AK. En faisant intervenir les projections, c'est-à-dire les "vitesses exprimées dans le sens" de AK.

L'énoncé de la loi d'addition est donc fourni par Carnot sous la forme qui utilise comme grandeurs les forces.

> La résultante estimée dans un sens quelconque est égale à la somme des forces composantes estimée dans le même sens[63].

La structure de linéarité des grandeurs vectorielles est mise en évidence. Elle sera reprise par de nombreux auteurs au début du XIXe siècle, précisément chaque fois qu'il s'agira de détecter une grandeur vectorielle. Le meilleur exemple étant certainement la notion de couple de forces et la composition des couples[64]; un autre étant la représentation d'une rotation par un vecteur[65].

7 Les grandeurs rebelles

Pourtant, alors que tout paraissait être en place, la structure d'espace vectoriel ne sera élaborée que beaucoup plus tard, et les vecteurs ne feront leur entrée, aussi bien en mathématiques qu'en mécanique, qu'avec le XXe siècle. Elles ne siégeront guère dans l'enseignement avant la moitié de ce siècle[66]. Je ne dispose plus du temps nécessaire pour raconter cette autre et longue histoire, et tous les détours qu'il fallut faire, notamment avec la structure des nombres complexes et des quaternions. C'est dire aussi que je ne peux examiner l'arrivée de toutes ces nouvelles grandeurs[67], les quaternions notamment, qui obligèrent à abandonner la commutativité des opérations.

Mais, je suggère que la difficulté d'insertion de la structure vectorielle dans la culture scientifique correspond historiquement à la même difficulté rencontrée par la numérisation des grandeurs scalaires, un processus qui court d'Euclide à Descartes.

N'y aurait-il pas, sur le fond, une rébellion des grandeurs à la domestication, qui est toujours une uniformisation. Me gardant ici d'attribuer une quelconque autonomie idéale aux grandeurs,

---

[63] L. Carnot, *Essai sur les machines en général, op. cité.* La démonstration n'est pas un enjeu. Carnot se contente de dire l'évidence. Son souci a été de faire voir le linéaire. "Car soit un polygone $ABCDF$ dont un côté AB représente la résultante et les autres côtés les forces composantes. Estimons toutes ces forces dans le sens d'une ligne quelconque AK. Pour cela soient menées de tous les angles du polygone des perpendiculaires à cette ligne. Alors il est clair que Ab est la force AB estimée dans le sens AK, cb est la force CB estimée dans le même sens, etc. Or on a $Ab = bc + cd + df + fA$, donc, etc."

[64] P. Radelet-de Grave, "La composition des moments en mécanique, ou la querelle des couples", in *Les Enfants du siècle, sciences et savants de l'époque romantique, Sciences et Techniques en Perspective,* 1997, à paraître.

[65] Une histoire des vecteurs et de leur analyse est donnée dans Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis : the Evolution of the Idea of a Vectorial System,* Univ. of Notre Dame Press, 1967 ; l'aspect algébrique est développé dans J.L. Dorier, "A general outline of the genesis of vector space theory", *Hist. Math,* 22, 1995, pp. 227-261.

[66] En France, le petit livre de A. Lichnerowicz, *Analyse vectorielle et analyse tensorielle,* Paris, Colin, 1950, semble avoir été le déclencheur. Il pourrait être intéressant de faire une histoire des tentatives vectorielles dans l'enseignement depuis la fin du XIXe siècle, afin de comprendre ce qui a pu bloquer leur essor. La mathématique enseignée a sa logique propre ; il est bien inutile de la juger toujours en retard sur la mathématique des professionnels. Souvent historiques, les réajustements – tel le mouvement des mathématiques modernes – ne calquent pas en la simplifiant la mathématique de recherche ; ils l'organisent autrement.

[67] *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton,* vol. 3 : Algebra, volume édité avec introduction et notes par H. Halberstram et R.E. Ingram, paru chez Cambridge University Press en 1967, permet d'accéder aisément à l'œuvre.

je m'explique en parlant plutôt d'écologie. Est manifeste en effet la variété et la diversité des grandeurs rencontrées ou construites par le mathématicien ou le physicien ; par leur nom même, elles évoquent les diverses niches du réel, et conservent toujours une partie de leur spécificité. Longueurs, aires et volumes, voilà bien trois grandeurs différentes qu'il est difficile d'aplatir par une seule dénomination numérique. La langue y est rebelle qui, pour les seuls volumes, multiplie les appellations selon le contenu, on parlera de capacités pour les liquides et de cubage pour les bois ; il me suffira de rappeler le substantif journée, évocateur de travail, qui a quelquefois été utilisé pour désigner l'aire d'un champ à labourer, en tout cas dans la région nantaise. On conçoit très bien, alors, ce qu'il fallut de volonté, et de contrainte, pour annuler cette variété foisonnante en imposant le système métrique décimal qui est le plus net effet de la numérisation des grandeurs[68]. Les Républicains qui l'imposèrent se crurent même obligés de forger des mots tout nouveaux, à partir de la langue grecque, ne rappelant rien en tout cas du réel aux utilisateurs : ce fut le mètre, le gramme, et même, inconnu jusqu'alors dans la langue française[69], le litre devenu si familier et mesurant aussi bien, *horresco referens*, la capacité de vin, d'eau, de lait ou de bière !

De même, et quoiqu'il s'agisse d'un réel plus savant, mais qui n'en a pas moins ses variétés, vitesses, forces, couples, mais aussi champs magnétiques créés par un courant électrique et gouvernés en quelque sorte par la règle du tire-bouchon, sont autant de grandeurs, analogues certes, mais qui conservent leurs noms propres. En capillarité, on préférera encore au XIXe siècle utiliser la tension, qui rappelle l'image d'une enveloppe élastique, plutôt que prendre le mot force qui la réduirait à un vecteur[70].

Aussi bien, la réhabilitation des grandeurs dans l'enseignement ne doit surtout pas perdre cette profusion et ce contact avec le réel au profit de la seule réduction, d'un seul modèle. C'est au moins pour cela qu'il importe de construire, en parallèle peut-être, aussi bien le modèle universel des nombres réels que celui des vecteurs ; on le doit d'autant plus que le physicien se contente, aujourd'hui, d'affirmer qu'une force est un vecteur : tout sens d'une grandeur a alors disparu.

---

[68] J. Dhombres, "Mesure pour mesure, universel contre régional : le système métrique comme action révolutionnaire" in A. Jourdan, J. Leerssen, *Remous révolutionnaires : République batave, armées françaises*, Amsterdam, 1996, pp. 159-199.

[69] Loi du 18 Germinal an III. Une litre désignait une bande d'étoffe de couleur noire aux armoiries d'un défunt noble. Le mot litron avait, il est vrai, servi de mesure de capacité (environ 0,8 litre), mais l'étymologie choisie par les Révolutionnaires était bien grecque $\lambda\iota\tau\rho\alpha$.

[70] Il faudrait aussi bien évoquer la rebellion du continu à dépendre du seul discret, des seuls entiers. Non que l'on remette en question la construction des réels – encore que celle-ci ne figure plus dans les programmes universitaires – mais parce que l'on trouve avantage à considérer le continu, un compact connexe, comme une grandeur en quelque sorte primitive. On peut alors penser que, dans un certain avenir, se distingueront deux formes d'appréhension mathématique, celle qui touche au continu, et celle qui touche aux fractales.

LES GRANDEURS EN PHYSIQUE

Jean Reignier

1 Introduction

Il y a quelques mois, j'ai fait une conférence sur les problèmes actuels de la mécanique quantique et, à cette occasion, j'ai utilisé à de nombreuses reprises des mots comme "grandeur physique", "grandeur de l'effet", "mesure de la grandeur" et quelques autres expressions du même genre. Je l'ai fait comme le font généralement les physiciens quand ils sont entre eux, c'est-à-dire, sans vraiment penser à définir ces mots puisqu'ils font partie du langage consensuel des physiciens. Cependant, ces mots au contenu implicite mais non clairement explicité, n'avaient pas échappé à la vigilance de notre Collègue Paul van Praag qui m'a ensuite contacté pour venir parler des grandeurs en physique devant des mathématiciens. C'est ainsi que j'ai appris que les grandeurs refaisaient leur apparition dans les cercles s'occupant de l'enseignement des mathématiques et qu'elles y faisaient l'objet d'un débat. Je ne suis pas très familier de ce genre de débat. Je n'ai jamais eu de problèmes personnels quant à l'apprentissage des mathématiques. J'ai toujours pensé qu'un peu d'empirisme, un peu d'intuition, un peu d'axiomatisation, un peu de bon sens, et beaucoup de pratique rigoureuse devaient conduire la plupart des élèves à un niveau de connaissances et de compréhension des mathématiques suffisant pour bien des finalités. Les grandes tentatives d'unification de l'enseignement des mathématiques m'ont toujours laissé assez sceptique. Elle me paraissent relever de la même démarche vers une pensée unique que l'imposition d'une seule doctrine politique, religieuse ou philosophique. Dans ce sens, sous l'apparence d'une rationalisation bienfaisante, elles dissimulent un appauvrissement réel. Un peu surpris d'apprendre l'existence de ce nouveau débat, j'ai essayé de me documenter. J'ai donc lu quelques-uns des écrits relatifs à ce débat et notamment le livre fort intéressant de Nicolas Rouche *Le sens de la mesure.* Ces lectures m'ont convaincu que la plupart des choses que je pouvais être amené à vous raconter quant à la notion de grandeur en physique devaient vous être bien connues, ce qui rendait mon intervention inutile. Mais une réflexion plus approfondie m'a fait découvrir des éléments nouveaux qui n'apparaissent pas vraiment dans la conception que les mathématiciens se font de la physique. Dans une certaine mesure, la prise en compte de ces éléments limite l'usage du modèle physique pour l'enseignement des mathématiques. C'est donc dans cette direction que j'orienterai mon intervention, après avoir rappelé les bases indispensables, mais qui vous sont sans doute bien connues.

2 Les grandeurs en physique

2.1 Grandeurs

Tout comme dans la langue courante, le mot grandeur est employé en physique dans un sens un peu ambigu. Par exemple, je trouve dans l'introduction d'un excellent livre utilisé dans l'enseignement moyen[1] :

> "Le début de l'étude scientifique de la gravitation réside effectivement dans la constatation que chaque corps matériel que nous pouvons rencontrer dans notre environnement naturel, près de la surface de la terre, a une certaine lourdeur et que celle-ci peut être mesurée par pesée. La *grandeur physique* dont on détermine la valeur de cette manière est le poids du corps considéré. En mécanique, nous avons défini le poids d'un corps comme étant la *grandeur* de la force de la pesanteur qu'il subit.".

Bien entendu, ces emplois du mot grandeur ont un sens parfaitement clairs, mais sont-ils axiomatiquement cohérents pour un mathématicien? L'enseignement universitaire de base de la physique ne laisse aujourd'hui plus beaucoup de place à la métrologie. Il souffre à sa manière d'une axiomatisation croissante. C'est pourquoi je suis retourné à un traité déjà un peu ancien pour choisir des définitions appropriées (G. Bruhat : *Mécanique*[2]). Je trouve au § 192 intitulé "Grandeurs mesurables" :

> "La physique a pour but, non seulement de décrire qualitativement les phénomènes, mais encore de les décrire quantitativement ; elle cherche donc à les caractériser par des grandeurs susceptibles d'être mesurées. Une grandeur est mesurable lorsqu'on sait définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèce ...".

Suit l'exemple classique de la longueur de deux segments, exemple pris ... dans la géométrie. Ici l'ambiguïté semble levée parce que le terme grandeur ne s'applique pas à la valeur de la mesure, mais se réfère à l'identité de la chose étudiée. La mesurabilité suppose donc que l'on puisse décider sans ambiguïté si deux grandeurs sont de même espèce. Nous verrons que cela peut ne pas être aussi simple que dans le cas des segments de la géométrie. Pour ne donner qu'un exemple assez trivial, pourquoi considérons nous l'énergie cinétique d'une particule comme une grandeur de même espèce que son énergie potentielle ? L'une est clairement localisée là où la particule se trouve ; quant à l'autre, il est bien difficile de répondre à une question de localisation, surtout si l'on considère l'énergie potentielle d'interaction entre deux corpuscules. En fait l'identification de ces deux grandeurs provient d'une loi physique (la loi de la conservation de la grandeur énergie). Nous reviendrons sur ce problème de la nature des grandeurs physiques et nous verrons qu'elle est largement conventionnelle et interprétative. Mais pour l'instant, je veux procéder par ordre et admettre que je peux effectivement faire cette opération physique d'identification de la nature des grandeurs, et que j'ai défini une égalité (notée $=$) et une opération d'addition (notée $+$). Si nous considérons deux grandeurs de même nature, disons[3] (L) et (L'), que nous supposons reproductibles en autant d'exemplaires que nécessaire, nous pouvons représenter par $m(L)$ le résultat de l'addition de m (entier positif) exemplaires de la grandeur (L), et de même, par $n(L')$ le résultat de l'addition de n (entier positif) exemplaires de la grandeur (L'). Si notre relation d'égalité permet d'écrire:

$$m(L) = n(L'), \tag{1}$$

nous dirons que les grandeurs sont dans le rapport (rationnel):

$$(L)/(L') = n/m. \tag{2}$$

[1] A. Meessen, *Cours de physique* Vol. 3 : *Gravitation,* De Boeck-Wesmael (1989).

[2] G. Bruhat, *Cours de physique générale : mécanique*, Masson (1948).

[3] Notation utilisée par Bruhat : les grandeurs sont représentées par une lettre entre parenthèses.

Il faut remarquer que le symbole (L) pris isolément n'a aucune signification numérique ; par contre, le symbole *non séparable* $(L)/(L')$ est un nombre rationnel (positif). C'est la base de l'approche des rationnels à partir des grandeurs[4]. Mais est-on sûr qu'il existera toujours des entiers m et n tels que l'on puisse vérifier l'égalité des grandeurs ainsi multipliées ? La physique conduirait alors aux nombres rationnels. Mais qu'en est-il alors des réels ? Et faut-il construire la physique avec les seuls rationnels ou devons-nous faire le pas vers les réels ? Et dans ce cas, pourquoi et comment ? En fait, ce n'est pas tant l'égalité qu'il faut pouvoir définir mais une sorte d'égalité "approchée", notion qui fait en général horreur aux mathématiciens. C'est pourtant la solution qui nous sera finalement imposée par la nature ainsi que je le montrerai plus loin. On pourrait aussi penser à remplacer l'égalité par une relation d'ordre : si on peut définir la relation $(L') < (L)$ comme une relation d'ordre entre grandeurs de même nature, on peut convenir que, à deux nombres m et n tels que :

$$n(L') < m(L) < (n+1)(L'), \tag{3}$$

correspond une inégalité qui borne le rapport des grandeurs :

$$n/m < (L)/(L') < (n+1)/m \ ; \tag{4}$$

cette solution pourrait ouvrir la porte aux réels par une suite de rationnels. En fait, la question de l'introduction des réels en physique n'est pas aussi simple et j'y reviendrai dans la suite, après avoir discuté des lois, des unités et des erreurs.

2.2 Lois physiques

En effet, la physique ne comporte pas que des grandeurs : elle comporte aussi des *lois* qui connectent des grandeurs d'espèces différentes ou plus exactement, des rapports de grandeurs (de même espèce) provenant d'espèces différentes. On constate par exemple que le rapport des inerties opposées aux changements de mouvement de deux particules, c.-à-d. le rapport de leurs masses, est toujours égal au rapport de leurs poids ; on écrit donc la relation numérique :

$$(M_1)/(M_2) = (P_1)/(P_2). \tag{5}$$

Comme il est beaucoup plus facile de déterminer en un lieu donné le rapport de deux poids que le rapport de deux masses, on peut adopter *par définition et en vertu de cette loi* que le rapport des masses est le rapport des poids. Toutes les lois de la physique peuvent (en principe) s'exprimer de la sorte au travers des rapports de grandeurs de même espèce :

- dans un même champ électrique, le rapport de deux charges électriques ponctuelles et le rapport des forces qu'elles subissent sont égaux:

$$(Q)/(Q') = (F)/(F') \ ; \tag{6}$$

- le rapport des grandeurs "travail" pour le déplacement de deux forces constantes le long de deux chemins rectilignes avec lesquels elles font des angles α et α' s'écrira :

$$(W)/(W') = [(F)/(F')] \cdot [(L)/(L')] \cdot [(cos\alpha)/(cos\alpha')], \tag{7}$$

où les cosinus sont eux-mêmes considérés comme des rapports de grandeurs.

[4]N. Rouche suggère d'approcher les nombres négatifs par l'opération de repérage. On pourrait tout aussi bien penser à utiliser des grandeurs de compensation, comme par exemple, des forces orientées dans des sens opposés.

Ces lois peuvent être des lois empiriques ou des définitions. Elles peuvent aussi résulter d'une théorie qui utiliserait les rapports de grandeurs de même espèce pour ce qu'ils sont, c.-à-d. des nombres (avec à nouveau le problème de la nature algébrique de ces nombres que nous remettons à plus tard).

2.3 Mesure d'une grandeur

Pour passer de la notion de rapport à la notion de *mesure*, il suffit de choisir *arbitrairement* parmi les grandeurs de l'espèce considérée une grandeur particulière qu'on appelle l'*unité* de ces grandeurs. Par exemple, la mesure des longueurs se fera indifféremment avec le mètre ou avec le yard (ou avec toute autre unité fondamentale). Par définition, le nombre qui mesure une grandeur est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce choisie comme unité. Dans notre exemple, on aura alors "la longueur en mètre : λ_{m}" et "la longueur en yard : λ_{y}" définies par :

$$\lambda_{\mathrm{m}} \equiv (L)/(1\mathrm{m}), \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\mathrm{y}} \equiv (L)/(1\mathrm{y}). \tag{8}$$

Si l'on retourne à la définition du rapport de deux grandeurs de même espèce, cela signifie qu'il existe des entiers h_{m}, k_{m}, h_{y} et k_{y}, tels que :

$$h_{\mathrm{m}}(L) = k_{\mathrm{m}}(1\mathrm{m}) \qquad \text{et} \qquad h_{\mathrm{y}}(L) = k_{\mathrm{y}}(1\mathrm{y}), \tag{9}$$

et que :

$$\lambda_{\mathrm{m}} = k_{\mathrm{m}}/h_{\mathrm{m}}, \lambda\mathrm{y} = k_{\mathrm{y}}/h_{\mathrm{y}}. \tag{10}$$

Prenant le ppcm H de h_{m} et de h_{y} :

$$H = rh_{\mathrm{m}} = sh_{\mathrm{y}}, \tag{11}$$

on aura, après multiplication *ad hoc* de la relation (9) :

$$H(L) = rk_{\mathrm{m}}(1\mathrm{m}) = sk_{\mathrm{y}}(1\mathrm{y}), \tag{12}$$

ce qui introduit le rapport des deux unités :

$$(1\mathrm{y})/(1\mathrm{m}) = rk_{\mathrm{m}}/sk_{\mathrm{y}} = c\ ; \tag{13}$$

c est un "facteur de conversion" qui, par nature , est indépendant de la considération de toute longueur utilisée pour l'introduire (ici, indépendant de (L)). Il est alors trivial de vérifier que l'inverse de ce facteur de conversion donne le rapport des mesures d'une même grandeur dans les deux unités choisies :

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{y}}/\lambda_{\mathrm{m}} &= [k_{\mathrm{y}}/h_{\mathrm{y}}]/[k_{\mathrm{m}}/h_{\mathrm{m}}], \quad (\text{éq. } 10),\\ &= [k_{\mathrm{y}}/k_{\mathrm{m}}]\cdot[h_{\mathrm{m}}/h_{\mathrm{y}}] = [k_{\mathrm{y}}/k_{\mathrm{m}}]\cdot[s/r]\\ &= sk_{\mathrm{y}}/rk_{\mathrm{m}} = 1/c. \end{aligned} \tag{14}$$

(Le même raisonnement vaut évidemment pour une grandeur quelconque mesurée dans deux unités de même espèce).

On démontre de même que le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures dans une même unité et ce, quelle que soit cette unité. Si dans l'exemple précédent nous mesurons des longueurs (L) et (L') avec une unité quelconque (1), nous avons en utilisant les mêmes notations mais sans indice m ou y :

$$h(L) = k(1) \qquad \text{et} \qquad h'(L') = k'(1), \tag{9'}$$

ce qui donne les longueurs l et l' dans l'unité (1):

$$l = k/h, \quad l' = k'/h'. \tag{10'}$$

Prenant le ppcm K de k et de k' :

$$K = rk = r'k', \tag{11'}$$

on aura, après multiplication *ad hoc* de la relation (9') :

$$K(1) = rh(L) = r'h'(L'), \tag{12'}$$

ce qui introduit le rapport des deux grandeurs :

$$(L)/(L') = r'h'/rh = [r'/r] \cdot [h'/h] = [k/k'] \cdot [h'/h] = kh'/k'h = l/l'. \tag{13'}$$

On voit que ce rapport est le même en yard et en mètre puisque le facteur de conversion est éliminé.

2.4 Mesures et lois

La vérification expérimentale d'une loi physique exprimée sous la forme d'une relation entre rapports de grandeurs n'exige pas le choix d'une unité ; il suffit de répéter l'expérience en variant les conditions pour vérifier des proportionnalités. L'usage d'unités permet de se référer constamment à une expérience standard. Pour me faire comprendre, j'emprunte à Bruhat l'exemple de la loi fondamentale de la dynamique que vous connaissez tous sous la forme : "force"= "masse" fois "accélération". En réalité, la forme primitive de cette loi est la relation empirique entre rapports de grandeurs de même nature :

$$(F)/(F') = [(M)/(M')] \cdot [(A)/(A')]. \tag{15}$$

Quand nous introduisons des unités, la forme de la loi ne change pas fondamentalement. En vertu de la relation (13') qui nous dit que le rapport de deux grandeurs de même nature est aussi le rapport de leurs mesures dans une même unité, on peut tout aussi bien écrire :

$$f/f' = [m/m'] \cdot [a/a'] = ma/m'a', \tag{15'}$$

ou encore :

$$f = [f'/m'a'] \cdot ma = kma. \tag{15''}$$

La loi fondamentale est maintenant exprimée sous forme numérique. On peut encore faire varier les conditions expérimentales concernant les grandeurs (F), (M) et (A), c.-à-d. les mesures f, m et a, en conservant le facteur numérique k qui concerne une expérience de référence. Si nous convenons que les unités concernant les grandeurs force, masse et accélération ont été choisies de telle façon que ce facteur k est égal à un, il disparaît de la formule et la loi prend la forme familière : $f = ma$.

C'est ce qui arrive dans la plupart des grands systèmes d'unités :

- système MKS (mètre, kilogramme masse, seconde) : l'unité de force est le Newton, qui communique à une masse de 1kg une accélération unité c.-à-d. une accélération de 1m/sec^2 (autre unité dérivée de la définition d'une accélération en terme d'espace-temps) ;

- système CGS (centimètre, gramme, seconde) : l'unité de force est la dyne, qui communique à une masse de 1g une accélération unité c.-à-d. une accélération de 1cm/sec^2 (idem) ; on calcule facilement que le Newton vaut 10^5 dyne ;

- système métrique ou gravitationnel, basé sur le mètre, le kilogramme-force (c.-à-d. le poids du kilogramme à Paris) et la seconde ; cette fois, c'est la masse dont on définit l'unité[5] : elle vaut environ 9,81 kg.

D'une manière générale, les physiciens tentent de privilégier l'usage d'unités dérivées de façon à éliminer autant que faire se peut les coefficients numériques. Chaque fois que l'on fait usage de cette faculté, on réduit d'autant le nombre d'unités dites fondamentales. Cette façon de faire est toutefois tempérée par la nécessité d'obtenir des étalons internationaux bien définis et facilement reproductibles. De plus il n'y a pas une façon unique d'obtenir un système cohérent. Ce point sera illustré ci-dessous par les deux systèmes d'unités électriques que l'on peut construire d'une manière cohérente à partir du même système d'unités fondamentales "longueur, masse et temps" (cf. § 2.5, éqs. 20-25). De plus, l'amélioration des techniques de mesure dans certains domaines peut parfois changer la définition même des unités fondamentales. Pour ne donner qu'un exemple, le mètre international qui était jusqu'en 1960 la distance à la température de zéro degré Celsius entre deux marques faites sur une certaine barre de platine iridié déposée au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres, est devenu à cette date un multiple de la longueur d'onde d'une certaine radiation de référence[6] ; depuis 1983, le mètre international est redéfini comme étant la 1/299 792 458$^{\text{ième}}$ partie de la distance parcourue par la lumière dans le vide en une seconde[7]. Ces décisions sont prises au cours de congrès internationaux qui réunissent des spécialistes de la métrologie[8] ; c'est ainsi que se façonnent et se transforment peu à peu les systèmes d'unités.

2.5 Dimensions

Le choix d'un système d'unités cohérent (unités fondamentales et unités dérivées) va-t-il nous aider à voir clair dans l'importante question de la nature des grandeurs physiques ? On pourrait le penser puisque chaque grandeur va maintenant être dotée d'une unité logiquement définie et deux grandeurs mesurables avec la même unité sont en principe de même nature. On introduit à ce stade la notion de *dimension* qui caractérise, en terme des unités fondamentales, l'unité avec laquelle on mesure la grandeur. Une vitesse étant par nature une distance parcourue

[5]Cette unité n'a pas reçu de nom en français ; on l'appelle "metric slug" ou "engineering mass unit" en anglais, et TME c.-à-d. "Technische Mass Einheit" en allemand.

[6]1 650 763,73 fois la longueur d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition $2p^{10} - 5d^5$ de l'isotope 86 du krypton.

[7]La seconde étant elle-même définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux de structure hyperfine de l'isotope 133 du césium.

[8]On trouvera un résumé de l'évolution historique des systèmes d'unités dans le livre de R.A. Nelson *SI : the International System of Units*, American Association of Physics Teachers, Stony Brook, NY (1982).

pendant un certain temps (vitesse moyenne : $\langle v\rangle = d/t$ où d est la mesure de la distance parcourue et t la mesure du temps requis pour la parcourir ; vitesse instantanée : $v =$ limite mathématique de $\langle v\rangle$ quand l'intervalle de temps tend vers zéro), on écrit symboliquement que la "dimension de la vitesse" notée $[v]$ est celle d'une longueur $[d]$ divisée par celle d'un temps $[t]$. On convient que les dimensions des unités fondamentales sont représentées sans crochets et avec une majuscule, par l'initiale de la grandeur fondamentale; par exemple : L, M, T pour les systèmes dont les unités fondamentales sont une longueur, une masse et un temps. On écrit donc :

$$\begin{aligned} \text{pour la vitesse :} \quad & [v] &=& \; LT^{-1}, & (16)\\ \text{pour la force :} \quad & [f] &=& \; [ma] = MLT^{-2}, & (17)\\ \text{pour l'énergie cinétique :} \quad & [E] &=& \; [mv^2/2] = ML^2T^{-2}, & (18)\\ \text{pour l'énergie potentielle :} \quad & [V] &=& \; [f.d] = ML^2T^{-2}, & (19) \end{aligned}$$

et bien d'autres relations analogues. On remarque que les coefficients numériques disparaissent des équations aux dimensions puisque celles-ci ne concernent que la nature physique des grandeurs dans le système d'unités adopté (unités fondamentales et unités dérivées). Il est d'ailleurs nécessaire de bien préciser le système de lois physiques que l'on adopte pour définir ces unités dérivées. C'est ainsi que dans un système basé sur une longueur, une masse et un temps (dimensions de base L, M, T) on peut indifféremment obtenir l'unité de charge électrique et sa dimension à partir de la loi de Coulomb ou à partir de lois sur les courants électriques (Ampère). On a en effet les lois électromécaniques suivantes :

- Coulomb : la force f qui s'exerce dans le vide entre deux charges électriques "ponctuelles" q et q' distantes de r est proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance :

$$f = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}, \tag{20}$$

  où le facteur de proportionnalité ϵ_0 est appelé constante diélectrique du vide ;

- Ampère : la force qui s'exerce dans le vide entre deux conducteurs rectilignes minces et parallèles, de grande longueur λ, distants de d, est proportionnelle au produit des intensités i et i' et à λ, et est inversement proportionnelle à la distance d :

$$f = 2\mu_0\frac{ii'}{d}\lambda,$$

  où le facteur de proportionnalité μ_0 est appelé perméabilité magnétique du vide. On sait par ailleurs qu'un courant est un débit d'électricité en sorte que $[i] = [q]T^{-1}$.

Ces lois sont alors complétées par une convention qui porte sur les constantes de proportionnalité ϵ_0 et μ_0 :

- système d'unité électrostatique :

$$\epsilon_0 = 1 \; ; \tag{22}$$

  il en résulte immédiatement :

$$[q]_{\text{es}} = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \quad \text{et} \quad [\mu_0]_{\text{es}} = L^{-2}T^2 \; ; \tag{23}$$

- système électromagnétique :
$$\mu_0 = 1 \ ; \tag{24}$$
il en résulte immédiatement:
$$[q]\text{em} = M^{1/2}L^{1/2} \qquad \text{et} \qquad [\epsilon_0]\text{em} = L^{-2}T^2. \tag{25}$$

On remarque que le produit des constantes électromagnétiques du vide $\epsilon_0\mu_0$ est indépendant de l'option que l'on prend pour définir les unités électriques ; dimensionnellement $[\epsilon_0\mu_0] = L^{-2}T^2$, c.-à-d. l'inverse du carré d'une vitesse. L'étude des équations de Maxwell montre qu'il s'agit de la vitesse de la lumière dans le vide.

L'étude des dimensions peut conduire à bien des aventures. C'est ainsi qu'au début du siècle, on a beaucoup spéculé sur la possibilité d'une origine électromagnétique de la constante de Planck alors récemment apparue en physique. Un argument important était que la dimension de cette constante h était la même que celle d'une certaine combinaison de grandeurs toutes d'origine électromagnétique, et que cette égalité dimensionnelle était indépendante du système d'unités choisi :
$$[\text{h}] = ML^2T^{-1} = [(\text{e}^2/\epsilon_0\text{c})], \tag{26}$$
où e est la charge de l'électron, ϵ_0 la constante diélectrique du vide et c la vitesse de la lumière dans le vide. La suite a prouvé qu'il n'en était rien et que la constante de Planck révélait bien de nouveaux aspects de la physique. En fait, elle nous faisait entrer dans une nouvelle ère de la science. L'analyse dimensionnelle retourne alors le problème et interpelle les théoriciens: "Pourquoi le nombre pur $\alpha/\pi = (2\text{e}^2/\epsilon_0\text{hc})$ que l'on rencontre partout en électrodynamique quantique a-t-il la valeur numérique que nous connaissons expérimentalement: $(\pi 137,036\ldots)^{-1} = 0,0023228\ldots$?" Rappelons qu'un nombre pur est inamovible par changement d'unités. Il doit donc avoir une signification plus profonde. Sur le plan épistémologique la "petitesse" de cette valeur numérique est fondamentale parce qu'elle permet une approche perturbative par série asymptotique qui est la clef de notre compréhension de la matière. À ce jour, nous n'avons pas de réponse à ce problème.

Un autre exemple nous vient de la thermodynamique. On admet que la chaleur est une forme de l'énergie. C'est là une des grandes conquêtes de la physique du siècle dernier. Personne ne s'offusquera donc d'écrire l'équation aux dimensions $[Q] = [E] = ML^2T^{-2}$. Mais qu'en est-il de la température ? Bien entendu, je parle ici de la température thermodynamique (température absolue Θ) qui est une grandeur mesurable, à la différence de la température indiquée par nos thermomètres ordinaires qui n'est que repérable. Il s'agit d'une grandeur nouvelle qui peut être insérée dans un système d'unités au moyen d'une convention. On peut convenir qu'il s'agit d'un nombre pur dimensionnellement neutre. On peut alternativement l'introduire au niveau des unités fondamentales : c'est le choix du système international actuel (SI) ; l'unité correspondante est le kelvin[9] qui introduit la dimension K. Dans le premier cas, l'entropie qui est définie par la relation : $\delta S = \delta Q/\Theta$, a les mêmes dimensions que la chaleur : $[S] = [Q]$. C'est un point de vue défendu au siècle passé par l'école énergétique qui voyait en l'entropie une sorte de potentiel de la chaleur. Dans le second cas, l'entropie est une grandeur à part, dont la dimension $[S]$ fixée par la loi ci-dessus est : $[S] = [Q]/[\Theta] = ML^2T^{-2}K^{-1}$. C'est conforme au point de vue actuel qui lie l'entropie à la probabilité des états plutôt qu'à leur contenu énergétique.

[9]Le kelvin est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du triple point de l'eau.

Une toute autre aventure est vécue quotidiennement par les théoriciens de la physique quantique relativiste. Ils ne se préoccupent nullement de métrologie mais cherchent à éliminer autant que faire se peut les nombreux facteurs $h/2\pi$ et c qui encombrent leurs formules (constante de Planck divisée par 2π, valeur 1,054 10^{-34} joule sec ; vitesse de la lumière dans le vide, valeur $3 \cdot 10^8$ m $\sec^{-1}$). La solution radicale est de déclarer que l'on utilise implicitement un système d'unités où ces deux grandeurs sont sans dimension et prises comme unité. Dans un tel système, on n'a plus qu'une seule unité fondamentale et l'on choisit généralement une longueur. Toutes les relations dimensionnelles se ramènent à $[X] = L^x$. On a par exemple pour les anciennes grandeurs fondamentales de masse et de temps : $[\text{masse}] = L^{-1}$, $[\text{temps}] = L$. La force a la dimension L^{-2} ; l'énergie a la même dimension que la masse L^{-1} ; le moment angulaire est sans dimension, de même que la charge électrique (quelle que soit la convention électromagnétique utilisée pour la définir). Poussant alors l'analyse dimensionnelle au delà des grandeurs mesurables, les théoriciens accordent une dimension aux objets mathématiques de leur formalisme : la fonction d'onde (élément de l'espace de Hilbert $L_2(\mathbb{R}^n)$ par exemple) a la dimension $L^{-n/2}$ et les opérateurs auto-adjoints qui dans la théorie représentent des grandeurs mesurables se voient attribuer la dimension de la grandeur correspondante. Cette extension très élégante de la notion de grandeur n'est pas sans risques pour les débutants. Si l'on veut arriver à des formules que les expérimentateurs peuvent utiliser, il faut être capable de retourner à la fin des calculs à un système standard. Ce n'est pas très difficile quand on garde à l'esprit la signification physique de la grandeur étudiée et quelle est sa dimension dans le système d'unités utilisé par l'expérimentateur. Supposons que la grandeur ait dans le système MKS de l'expérimentateur la dimension $[X]_{\text{MKS}} = M^\alpha L^\beta T^\gamma$ et que nous trouvons $[X] = L^x$. Nous devons alors compléter la formule par des facteurs $(h/2\pi)^y c^z$ de façon à ce qu'elle s'équilibre à nouveau dans le système MKS :

$$[X]_{MKS} = L^x[h]^y[c]^z = L^x(ML^2T^{-1})^y(LT^{-1})^z = M^y L^{x+2y+z} T^{-y-z} = M^\alpha L^\beta T^\gamma. \qquad (27)$$

On a donc $y = \alpha$, $z = -\gamma - \alpha$, et en prime, un contrôle de nos calculs puisque la formule ne s'équilibre que si $x = \beta + \gamma - \alpha$. La réponse à transmettre à l'expérimentateur est alors $X(h/2\pi)^\alpha c^{-\gamma-\alpha}$.

On voit par ces exemples que l'analyse dimensionnelle des grandeurs est un peu comparable aux langues d'Ésope, capable du meilleur (guider et faciliter nos recherches) et du pire (nous égarer vers des voies sans issues). C'est un outil nécessaire au physicien dans tous les domaines de son activité, de la physique industrielle à la physique mathématique, en passant par la physique expérimentale et la métrologie. Mais l'analyse dimensionnelle qui repose sur les systèmes d'unités est largement conventionnelle et ne nous renseigne pas vraiment sur la nature des grandeurs physiques.

3 Les erreurs de mesure

Je n'ai pas encore parlé du problème le plus important concernant les grandeurs physiques : celui des erreurs de mesure. En physique (comme dans toutes les sciences naturelles) aucune mesure n'est exacte au sens mathématique du terme. Toute mesure est approchée. Il nous est impossible de définir la longueur exacte entre deux traits gravés sur une barre de platine iridié, tout simplement parce que ces traits ont une épaisseur qui, lorsqu'elle est examinée au microscope, est bien loin d'avoir une forme géométrique régulière. Il nous est impossible d'affirmer l'égalité de deux masses au delà de la sensibilité de la balance utilisée. Il nous est impossible de compter un nombre d'événements concernant des particules sans laisser une marge d'erreur statistique due à la sensibilité de nos compteurs et aux fluctuations de phénomènes incontrôlables comme le rayonnement ambiant. Ces constatations d'essence pratique sont évidentes. Elles laissent cependant subsister l'illusion de la possibilité d'une amélioration indéfinie des conditions expérimentales et des techniques, qui nous permettrait enfin de connaître avec une précision sans limite les lois physiques existant par elles-mêmes (le pur cristal dégagé de la matière brute, la Loi comme idée platonicienne). Il est donc bon de rappeler brièvement quelques principes généraux qui bornent l'activité du physicien d'une manière absolue et bien au delà des aléas de la technique.

D'une manière générale, le physicien divise l'univers en deux parties : ce qu'il va étudier qu'il appelle "le système", et tout le reste. Du système, il ne prendra d'ailleurs en considération que quelques aspects, qu'il considère comme importants. Quant au reste, il le négligera (et dans ce cas il parlera d'un système "isolé") ou il considérera qu'il contrôle suffisamment son influence sur le système par une modélisation (qui se traduit en général par une paramétrisation simple). Cette division est nécessaire ; elle est largement arbitraire mais elle pose aussi des limites très strictes à nos connaissances. Si l'on tente de mieux cerner le système ou si l'on tente de reculer la frontière entre le système et le reste, on augmente la complexité de la description. La prise en considération de nouveaux aspects du système ou une amélioration de notre description schématique du reste peuvent même changer complètement la loi que nous tentions de dégager. Bruhat (réf. 2) cite l'exemple de la loi de la réfraction de Descartes : $\sin i = n \sin r$, qui s'est trouvée expérimentalement d'autant mieux vérifiée que les mesures sont devenues plus précises ; et il ajoute :

> "On pourrait se demander si la précision avec laquelle elle est vérifiée continuera à augmenter à mesure que la précision des mesures continuera à s'améliorer : c'est là une question qui n'a aucun sens. Nous savons depuis plus d'un siècle que les phénomènes de l'Optique sont beaucoup plus compliqués que ne l'indique l'Optique Géométrique, et que la notion de rayon lumineux ne correspond pas à une réalité physique ; à la réfraction se superpose dans un instrument d'optique la diffraction, qui en limite le pouvoir séparateur et l'aspect complet des phénomènes ne peut être décrit qu'en superposant à la loi de Descartes les lois de l'Optique Ondulatoire."

J'ajouterai : ...et le reste ! Nous savons en effet que la description de la lumière est encore bien plus compliquée que la vision ondulatoire du siècle dernier et que la notion de surface bien lisse (on dit "optiquement travaillée") d'un morceau de verre n'est qu'une approximation bien grossière de la réalité. La *loi* perd donc son sens au delà d'une certaine précision. Par *nature*, l'indice de réfraction n est un nombre décimal limité à un nombre relativement petit de chiffres significatifs (certainement moins que 10), même si nous continuons à le traiter comme un nombre réel au sens mathématique du terme. Tous les domaines de la physique sont ainsi contraints par cette loi d'airain[10] : la séparation de l'univers (y compris nous-mêmes) en deux parties avec description détaillée mais dans un cadre donné et limitatif de l'une, et paramétrisation assez grossière de l'influence de l'autre sur la première et sur sa description[11].

[10] On trouvera plus de détails concernant ce problème pour le cas de la mécanique et de la mécanique quantique dans : J. Reignier "The principles of classical mechanics and their actuality in contemporary microphysics", in *Waves and particles in light and matter*, ed. by A. van Merwe and A. Garuccio, Plenum Press, New York, (1994).

[11] Pour une analyse plus générale et plus profonde du problème et une tentative d'en tenir compte dans les

Cela étant dit, comment les physiciens abordent-ils le problème de la prise en compte de ces approximations ? Ils tentent, au moyen d'une modélisation grossière de ce qu'ils ne peuvent pas prendre en compte exactement, de donner une borne supérieure de l'erreur que leur modèle et la précision limitée de leurs appareils peuvent entraîner. Il écrivent que la mesure de la grandeur (X) est non pas x_0, mais comprise dans l'intervalle réel $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, où Δx est la borne supérieure (estimée) de l'erreur. Quand ils doivent combiner plusieurs mesures ainsi entachées d'erreurs, ils le font par les règles usuelles du calcul différentiel (approximation linéaire en Δx) et ils estiment ainsi une borne supérieure de l'erreur sur le résultat. Les erreurs d'origine statistique sont prises en compte par les méthodes statistiques utilisant des modèles que l'on suppose pouvoir appliquer au cas concret en question.

Je pense qu'il est inutile d'aller plus en détail dans ces calculs. Il s'en dégage une évidence : les physiciens expérimentateurs considèrent les mesures des grandeurs physiques comme des nombres réels. Toutefois, ils admettent ne pas pouvoir préciser la valeur de ces nombres à l'intérieur d'un intervalle donné, borne supérieure de leur incertitude. Quant aux théoriciens, ils ne travaillent jamais que sur des modèles mathématiques de la réalité physique. Les mathématiques y sont considérées comme un outil tout fait, dont il importe de savoir se servir. Dans cet arsenal, les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles jouent un rôle très important. C'est le règne du continu dans toute sa splendeur.

Peu de tentatives ont été faites pour tenir compte explicitement des limitations que l'empirisme physique pourrait imposer aux mathématiques de la physique. Je n'en vois d'ailleurs pas la nécessité à l'heure actuelle. Je tiens néanmoins à signaler l'effort courageux de J. Naisse (réf. 11) qui a poussé très loin un essai de remplacer les réels par une notion de réels approchés par décimaux limités.

Pour terminer ce paragraphe, je voudrais signaler qu'il est au moins un domaine où la rigueur exige de tenir compte explicitement dans la formulation du modèle théorique, de l'erreur finie commise par l'emploi d'un appareillage d'observation. Dans la théorie de l'opération de mesure quantique, il est souvent question des valeurs propres et vecteurs propres d'opérateurs auto-adjoints. On trouve dans les livres de Mécanique Quantique que le résultat de la mesure d'une grandeur physique représentée dans la théorie par tel opérateur auto-adjoint est *une des valeurs propres* de cet opérateur, et que l'état du système observé est, après cette mesure, *l'état propre correspondant* de cet opérateur. Or, beaucoup de ces opérateurs ont un spectre continu, ce qui rend la phrase proprement incompréhensible à un mathématicien. En réalité, on doit alors tenir compte de l'erreur acceptée par l'appareil de mesure. Pour fixer les idées, je considère la mesure de la position d'une particule et je me limite à une dimension d'espace. L'opérateur "position" X défini sur $L_2(\mathbb{R})$ est auto-adjoint et son spectre est uniquement continu : c'est la droite réelle. Il n'a donc aucune valeur propre et aucun vecteur propre. Mais on doit prendre en considération le fait qu'un appareillage quelconque ne pourra jamais attester la présence de la particule au *point* x_0, mais seulement qu'elle est présente dans *l'intervalle* $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, Δx étant une caractéristique de l'appareil de mesure, *non réductible à zéro*[12]. La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints associe à tout intervalle de la droite réelle un projecteur orthogonal que nous désignerons par $\Pi(x_0, \Delta x)$; ce projecteur définit un sous-espace $\mathcal{M}(x_0, \Delta x)$ dont les vecteurs sont "vecteurs propres *approchés* de l'opérateur

mathématiques à utiliser face à cette situation, voir : Jacques Naisse, *L'approximation analytique. Vers une théorie empirique, constructive et finie* SMA, Éditions Ellipses, ULB, (1992).

[12]Un appareil de mesure n'est interprétable comme tel que s'il est macroscopique. L'ouverture Δx est donc toujours grande par rapport aux dimensions atomiques.

X, *à moins de ϵ près*". Cette notion, qui n'apparaît pas souvent dans les livres d'analyse fonctionnelle, signifie ceci :

$$\forall f \in \mathcal{M} : ||Xf - x_0 f|| < \epsilon ||f||, \tag{28}$$

où la notation $||f||$ représente la norme du vecteur f. Le lien entre ϵ et Δx n'est pas facile à préciser, mais on peut montrer que $\epsilon = O(\Delta x)$, au sens de l'analyse asymptotique, c.-à-d. qu'il existe deux constantes positives η et C telles que si $\Delta x < \eta$, alors $\epsilon < C\Delta x$, (en langage ordinaire, ϵ diminue au moins aussi vite que Δx).

On peut donc maintenant formuler correctement la phrase incompréhensible du début : le résultat de la mesure avec l'appareillage d'ouverture Δx situe la particule dans l'intervalle $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, et après cette mesure, l'état du système est un vecteur appartenant à un sous-espace $\mathcal{M}(x_0, \Delta x)$ déterminé par ce résultat (y compris l'erreur qui y est associée et qui correspond à l'ouverture de l'appareil). Au delà d'un simple raffinement mathématique, cette précision a des conséquences non négligeables pour la description statistique d'un ensemble de tels systèmes. On voit qu'à un même résultat $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ peuvent correspondre des vecteurs d'état différents. On doit donc abandonner l'idée de décrire cet ensemble par un seul vecteur et passer à la description plus compliquée par "matrice densité".

4 Les limites du modèle physique

L'idée de fonder l'intuition mathématique des enfants sur un contact concret avec une réalité extérieure est sans doute excellente. Je pense même qu'il faudrait aller plus loin et réduire l'aspect axiomatique de l'enseignement (surtout de l'enseignement secondaire) au profit d'un certain utilitarisme en contact étroit avec un support concret. L'enseignement secondaire des mathématiques est actuellement inutilement alourdi par des détails rigoristes oiseux dont l'utilité est nulle dans la pratique des mathématiques. Je pense notamment à l'enseignement de la géométrie parfois présentée sans le support d'un dessin, et aux espaces vectoriels qui sont un outil essentiel mais dont on fait parfois un monstre de complication absurde. De ce point de vue, un appel à la physique est normal, étant donné la relative simplicité intuitive de la physique élémentaire et la facilité de la mathématisation des phénomènes qu'elle décrit.

Ceci dit, il ne faudrait pas s'imaginer que l'on peut fonder les mathématiques sur le modèle physique.

Tout d'abord, les lois de la physique ont toujours et par leur nature même une portée limitée. Ne pas en tenir compte débouche en physique sur des idéalisations absurdes. Faire comme si elle n'existait pas n'est pas une bonne préparation psychologique à la pratique de la science. Cette réalité d'une portée limitée n'a pas sa place en mathématique.

Ensuite, les mathématiques de la physique sont inséparables de l'idée d'approximation. Elles le sont tant sur le plan de la théorie que sur le plan expérimental. Le modèle de la mesure des grandeurs physiques est donc utile mais limité. L'oublier, c'est déjà faire des mathématiques. Le but est d'éveiller l'intuition. Une fois ce support concret placé en arrière plan, les mathématiques doivent se développer par elles-mêmes, avec leur logique, qui ne se confond pas avec celle de la physique.

Moyennant ces réserves, la physique reste un des meilleurs exemples que l'on peut utiliser pour mettre un peu de concret à la base de l'enseignement des mathématiques.

FAUT-IL ENSEIGNER LES GRANDEURS ?

Nicolas Rouche

> Je pense – et pour moi c'est une observation nouvelle – que nous ne réalisons en aucune façon tout ce que les enfants doivent apprendre.
>
> H. Freudenthal

1 Les mathématiques ont évacué les grandeurs : que faire ?

Les mathématiques et la physique pythagoriciennes, aux sixième et cinquième siècles avant J.-C., étaient entièrement fondées sur les nombres naturels. Quelques décennies plus tard, les Éléments d'Euclide (cf. Euclide [1990]) proposaient une géométrie fondée sur les grandeurs et exposaient à part et en quelque sorte en parallèle, une théorie des nombres naturels. Les nombres fractionnaires, et *a fortiori* les irrationnels, ont été développés plus tard essentiellement pour répondre aux besoins d'une théorie de la mesure des grandeurs. Cauchy [1821] écrivait en 1821, au début de son cours d'analyse : "Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs." On le sait, la mise au point de ces nombres beaucoup plus généraux a pris de nombreux siècles et ne s'est achevée qu'aux environs de 1870. Jusqu'alors, les grandeurs se trouvaient au fondement des mathématiques, essentiellement dans la forme que leur avait donnée Euclide tout d'abord aux Livres I et II avec la méthode des aires, puis au Livre V avec une théorie complète des rapports de grandeurs. Il n'était d'ailleurs guère possible que les nombres supplantent les grandeurs dans cette fonction de fondement, tant qu'ils n'avaient pas atteint un degré de rigueur leur permettant de représenter fidèlement le continu.

La situation a changé du tout au tout à la fin du dix-neuvième siècle. Il était devenu possible à cette époque, non seulement de mettre les nombres au départ, à la place des grandeurs, dans un exposé rigoureux des mathématiques en général, mais qui plus est, grâce aux travaux de Cantor, de situer les ensembles encore avant les nombres. C'est ce qui a été fait, et les grandeurs ont disparu des mathématiques vivantes en quelques décennies. Telle a été en tout cas l'évolution globale, même si nous nuancerons quelque peu ce jugement dans la suite de l'exposé[1]. La géométrie élémentaire a alors été refaite dans le cadre général des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire. L'instrument permettant de mesurer les longueurs, à savoir le corps des nombres réels, était ainsi construit et prêt à l'usage avant même qu'on aborde la géométrie et qu'en rencontrant les premiers segments, on éprouve le besoin de leur associer une mesure. Les mathématiques s'étaient ainsi complètement renversées.

Les grandeurs à la Euclide, dûment remplacées dans les mathématiques des mathématiciens, ont encore subsisté pendant un moment dans l'enseignement. Elles ont ensuite été

[1]Lorsque nous parlerons des géométries de Hilbert et d'Artin.

emportées, en tous cas au niveau du secondaire, dans le grand mouvement de rénovation dit des "mathématiques modernes".

Au terme de cette évolution, une question importante se pose. Résulte-t-il du fait qu'il n'y a plus de grandeurs aujourd'hui dans les mathématiques vivantes, qu'il ne faille plus les enseigner ? Ou bien, puisqu'elles sont présentes dans la vie quotidienne et dans toutes les sciences expérimentales, faut-il laisser le soin de les enseigner aux professeurs de physique, de technologie, d'économie... ? Et s'il importe encore de les enseigner dans le cours de mathématiques, comment faire ? Telles sont les questions qui nous préoccupent. Nous tenterons d'y répondre sur deux plans.

Il y a d'abord les grandeurs élémentaires, c'est-à-dire celles que l'on compare et additionne avant toute mesure, puis à propos desquelles on pose le problème des rapports et de la mesure, quoique sans aller jusqu'à l'incommensurabilité. Comment les étudier ? Quel rôle jouent-elles dans l'acquisition des premiers nombres (qui ne comprennent pas les irrationnels) ? Ces grandeurs considérées avant toute mesure demeurent-elles intéressantes même après qu'on ait appris à mesurer les grandeurs ? Nous examinerons ce premier aspect des choses jusqu'à la section 5 inclusivement.

Ensuite nous considérerons les grandeurs et la mesure des grandeurs dans toute leur généralité, c'est-à-dire en relation avec la construction des réels, ou même plus largement avec le corps de la géométrie élémentaire. Les réels sont susceptibles aujourd'hui d'être construits sans référence à la notion de mesure. Que penser d'une telle possibilité ? Est-il opportun de les considérer comme connus, c'est-à-dire de les avoir préalablement construits d'une manière ou d'une autre avant d'entamer l'étude axiomatique de la géométrie élémentaire, ou bien vaut-il mieux considérer que la construction des réels fait partie de la géométrie elle-même ? Nous examinerons ces questions à partir de la section 6.

2 Les grandeurs, c'est quoi au départ ?

Les grandeurs au tout début, ce sont les *choses* dont parle Euclide dans les notions communes au Livre I. Reparcourons ces notions[2] :

a) Des choses égales à une même chose sont égales entre elles.

b) Si des choses égales sont ajoutées à des choses égales, les touts sont égaux.

c) Si des choses égales sont soustraites de choses égales, les restes sont égaux.

d) Des choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles.

e) Le tout est plus grand que la partie.

Ces *choses* dont parle Euclide sont les modèles idéaux, les archétypes des objets que nous manions tous les jours, lorsque nous les considérons du point de vue de l'une ou l'autre grandeur. Les propriétés qu'Euclide énonce sont aussi, quoique transposées dans le monde idéal des mathématiques, celles que les tout petits enfants apprennent en construisant des tours

[2]Pour des raisons de concision, nous nous écartons un peu de la traduction de Vitrac.

plus ou moins hautes, des trains plus ou moins longs, etc. Elles sont encore, dans la science géométrique, les témoins des expériences les plus primitives, celles que l'homme a dû faire dans une préhistoire extrêmement reculée[3]. La notion commune *d)* évoque la congruence et le mouvement qui consiste à porter deux objets l'un sur l'autre pour en vérifier la superposabilité. On connaît les avatars historiques de la notion commune *e)*. Mais celle-ci, lue au premier degré, c'est-à-dire sans penser aux ensembles infinis, relève du simple bon sens.

Euclide s'appuie sur la notion commune *d)* au théorème 4 du Livre I et en quelques autres rares endroits. Mais il évite très tôt, peut-être pour recourir le moins possible à l'intuition, d'évoquer des mouvements qui montrent la congruence. Ce souci est le sien, laissons-le lui provisoirement. Et regardons de plus près en quoi peuvent bien consister les grandeurs au niveau de base, par delà ce qu'en disent les notions communes.

Quand on parle de grandeurs, on songe d'abord aux opérations de rassembler des objets pour en faire la somme (mettre des baguettes bout à bout, verser les contenus de deux vases dans un troisième, etc.), de couper des objets en parts équivalentes d'un certain point de vue, de réaliser des partages équitables, mais aussi de chiffrer le rapport de deux objets en leur découvrant une commune mesure, de choisir une unité pour mesurer tous les objets d'une même sorte (longs, lourds, etc.), de calculer avec des mesures, trouver les liens entre les mesures de longueur, d'aire et de volume, concevoir et mesurer des grandeurs composites telles que des poids spécifiques ou des vitesses, etc. Il s'agit aussi enfin de trouver le moyen de représenter tous ces phénomènes à l'aide de notations appropriées, au début le plus souvent des fractions.

3 Les grandeurs élémentaires dans le cours de mathématiques ?

Nous l'avons dit, les grandeurs sont présentes dans la vie quotidienne et dans toutes les sciences expérimentales. Visiblement donc, elles jouent un grand rôle en dehors des mathématiques, et ce rôle n'est pas près de disparaître. Par ailleurs elles ont été abandonnées par les mathématiciens pour des raisons de restructuration logique et conceptuelle de leur discipline. Il est clair qu'à cause de cette transformation, les mathématiques se sont considérablement écartées du quotidien et des sciences expérimentales. Une sorte de divorce s'est installé entre les mathématiques et les autres sciences, au niveau de la recherche et à celui de l'enseignement[4].

Essayons maintenant d'illustrer et commenter la thèse suivante, dont il nous semble urgent de débattre si l'on veut dans l'avenir asseoir l'enseignement des mathématiques et des sciences sur une base réfléchie :

> *Malgré qu'elles ne soient pas nécessaires à la construction* logique *des mathématiques, les grandeurs doivent être enseignées dans le cours de mathématiques parce que d'une part elles fondent* pratiquement et intuitivement *le système des nombres,*

[3]Retrouver et situer dans l'évolution les choses et les phénomènes qui remontent ainsi au fond des âges, c'est mettre en évidence ce que l'historien Fernand Braudel [1969] a appelé *le temps long de l'histoire*. Les notions communes sont tellement à la racine des choses qu'on peut aller jusqu'à se demander de quoi d'autre la géométrie aurait bien pu partir.

[4]Bien entendu, il est vrai qu'à la fin du vingtième siècle les mathématiques et les autres sciences se fécondent encore mutuellement. Nous voulons parler ici d'une sorte d'incompréhension qui se vit au quotidien dans les universités et les laboratoires, ainsi que d'un rejet de la physique par beaucoup d'enseignants de mathématiques et réciproquement.

et que d'autre part elles éclairent d'un jour intuitif irremplaçable un bon nombre de propriétés géométriques, arithmétiques, algébriques et analytiques.

Il n'est pas possible, dans le cadre d'un exposé assez bref comme celui-ci, d'argumenter complètement cette thèse. Nous nous contenterons donc de l'illustrer par quelques exemples, et renvoyons pour le reste à d'autres études plus complètes (cf. N. Rouche [1992]).

3.1 Couper puis prélever, ou l'inverse ?

Commençons par une question qui est à la base de la notation fractionnaire. Est-ce qu'il revient au même de couper un gâteau en 5 parts égales puis de prélever 3 parts, ou de partager 3 gâteaux en 5 parts égales et de prélever une part ? Bien entendu, sur le plan pratique, la situation n'est pas la même dans les deux cas, ne serait-ce que parce que dans le premier il faut disposer d'un gâteau, tandis que dans le second il en faut 3. Mais la question posée porte implicitement sur la grandeur obtenue à la fin.

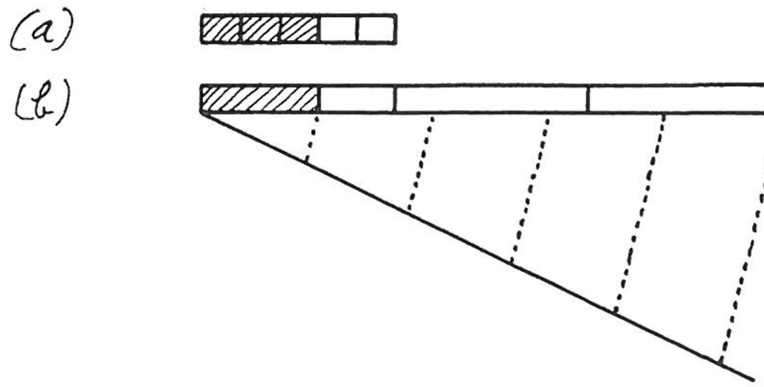

Fig. 1

Aidons-nous d'un dessin pour étudier la situation. Et pour plus de facilité, partons d'un gâteau de forme rectangulaire allongée (figure 1(a)). Utilisons le théorème de Thalès comme un moyen pour couper le gâteau en 5 parts équivalentes, puis hachurons les trois parts que nous voulons prélever. Prenons ensuite 3 gâteaux identiques que nous disposons en ligne, comme sur la figure 1(b). Coupons ce lot de 3 gâteaux en 5 parts équivalentes en utilisant le même théorème de Thalès. Hachurons une des parts obtenues. Les deux dessins ayant été soigneusement alignés l'un en dessous de l'autre, on voit que le résultat obtenu est le même dans les deux cas. Mais est-il tellement évident qu'il en ira toujours ainsi, même si on remplace les nombres 3 et 5 par d'autres ? Pour répondre à cette question, il est demandé au lecteur de ne considérer que ce que la figure apporte, sans se mettre à argumenter plus avant (par exemple en découpant chacun des 3 gâteaux de la figure 1(b) en 5 parts égales et en recourant à un argument arithmétique). Il faut se remettre en situation d'éprouver le défi primitif[5] que peut ressentir un jeune enfant devant cette situation. Retrouver une telle "virginité mentale" n'est pas donné à tout mathématicien, même de bonne volonté... Il y faut de l'entraînement. Ceci dit, la figure 1 n'apporte pas sur la question posée une clarté décisive et partagée par tout le monde.

[5]C'est Fernand Lemay, de l'Université Laval à Québec, qui a attiré l'attention sur l'intérêt d'identifier les défis primitifs.

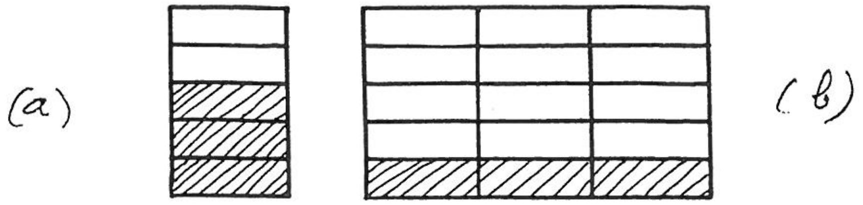

Fig. 2

Considérons alors la figure 2(a), qui montre aussi un gâteau de forme rectangulaire coupé en 5, mais cette fois horizontalement. Les 3 gâteaux mis côte à côte à la figure 2(b) sont séparés les uns des autres par des traits verticaux. Ce lot de 3 gâteaux est ensuite partagé en 5 par des traits horizontaux. La concordance d'une partie à l'autre de la figure des traits qui assurent la division en 5 entraîne un constat plus clair de l'identité des résultats. Ainsi, cela revient bien au même d'exécuter les deux opérations dans un certain ordre ou dans l'ordre inverse. Cette conclusion légitime le fait d'utiliser la même notation, à savoir $\frac{3}{5}$, pour exprimer le résultat des deux opérations composées en question. Notons que la façon de la lire, à savoir "trois cinquièmes", privilégie le partage en 5 parts équivalentes suivi du prélèvement de 3 parts (la fraction est associée à la construction d'une partie donnée d'un objet de départ) par rapport au partage équitable de trois objets équivalents (la fraction dans ce cas est associée à l'idée de division).

Que pourrait être par ailleurs l'explication de la commutativité des opérations de multiplication d'une grandeur par un nombre, suivie de la division par une autre nombre de la grandeur obtenue ? Dans le formalisme le plus commun en mathématiques, la preuve – appuyée sur quelques présupposés évidents – s'écrirait comme suit. Il faut montrer que

$$m(\frac{1}{n}A) = \frac{1}{n}(mA),$$

ou encore que

$$n[m(\frac{1}{n}A)] = mA.$$

On y arrive en constatant successivement que

$$n[m(\frac{1}{n}A)] = (nm)(\frac{1}{n}A) = (mn)(\frac{1}{n}A)$$

$$= m[n(\frac{1}{n}A)] = mA.$$

Le lecteur se demandera sans doute utilement "ce qu'il voit" en parcourant ces quelques égalités, et ce que ne verra pas celui que l'on n'a pas entraîné à *voir des choses à travers les formules.*

3.2 L'algorithme d'Euclide

Le problème est, étant donné deux grandeurs, de leur trouver une commune mesure, à supposer qu'il y en ait une. Sur la figure 3(a), les deux grandeurs sont représentées par des segments. Une idée qui vient spontanément est de voir si la plus petite des deux ne conviendrait pas. On la porte donc un certain nombre de fois le long de la plus grande et on constate qu'il demeure un reste. On reproduit ce reste en dessous des deux grandeurs données (figure 3(b)).

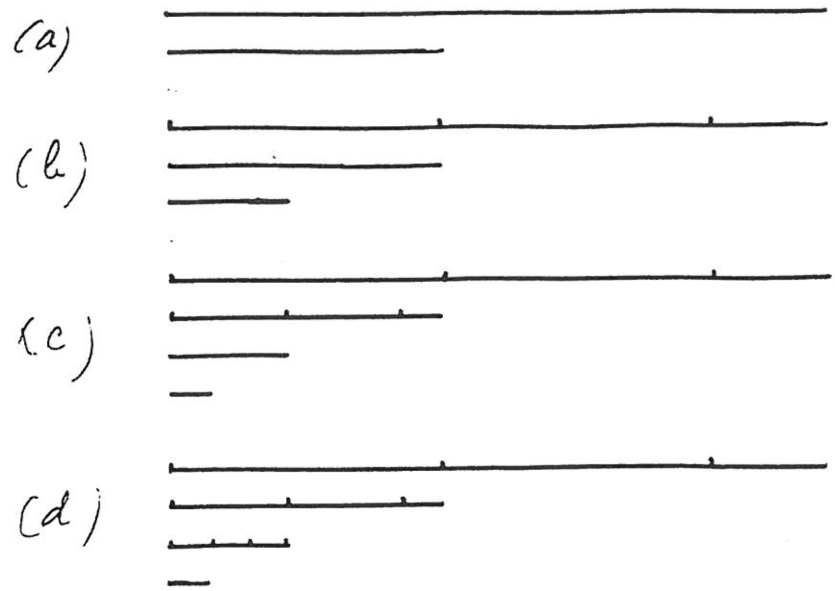

Fig. 3

À ce stade, trois grandeurs sont dans le champ du regard, mais une seule est nouvelle : c'est le reste. On essaie celui-ci en le portant un certain nombre de fois le long de la deuxième grandeur. S'il y allait une nombre entier de fois, il irait aussi un nombre entier de fois dans la première. Il se fait que, dans le cas des deux grandeurs que nous avons choisies, on trouve encore un reste non nul (figure 3(c)). On continue de la même manière en tâchant de mesurer le premier reste avec le second. Cette fois l'opération réussit. Et ainsi, on a trouvé une commune mesure qui va 3 fois dans le premier reste, 7 fois dans la plus petite des deux grandeurs et 17 fois dans la plus grande (figure 3(d)). Montrons maintenant comment on peut arriver à l'algorithme d'Euclide dans un autre contexte, en travaillant sur une figure plus suggestive, et sans même avoir posé explicitement le problème de la recherche d'une commune mesure. On verra sur cet exemple que le domaine des grandeurs se prête à des questions formulées en termes tout à fait familiers et qui ont néanmoins une portée mathématique non négligeable.

La question qu'on se pose est la suivante : trouver un pavé carré qui pave exactement, c'est-à-dire sans lacunes ni recouvrements, un rectangle donné (le grand rectangle au dessus de la figure 4). De plus on ne veut pas de chutes aux bords, c'est-à-dire pas de pavés incomplets pour compléter le rectangle, comme on en voit souvent dans les pièces d'habitation.

On essaie d'abord un pavé dont le côté est celui du rectangle donné. Il y a un reste, qui est rectangulaire. On essaie de paver celui-ci avec un pavé construit sur son plus petit côté. Il y a un reste et donc on recommence une opération analogue. L'algorithme s'achève, dans notre exemple, après ce dernier essai. La figure 4 en montre les étapes.

Une variante de ce problème consiste à proposer un rectangle dont on donne la longueur et la largeur en nombres entiers. On découvre alors l'algorithme d'Euclide pour le plus grand commun diviseur.

Deux méthodes d'attaque sont naturelles dans ce cas. Ou bien, comme ci-dessus, on essaie de paver le rectangle avec un carré ayant sa largeur pour côté. Puis si la tentative rate, on cherche des pavés plus petits. Ou bien au contraire, on se dit qu'un carré de côté égal à 1 pave à coup sûr, et on cherche ensuite des pavés plus grands.

Ce même problème de pavage d'un rectangle constitue aussi une bonne introduction aux rapports irrationnels, ceux qui correpondent aux rectangles impossibles à paver.

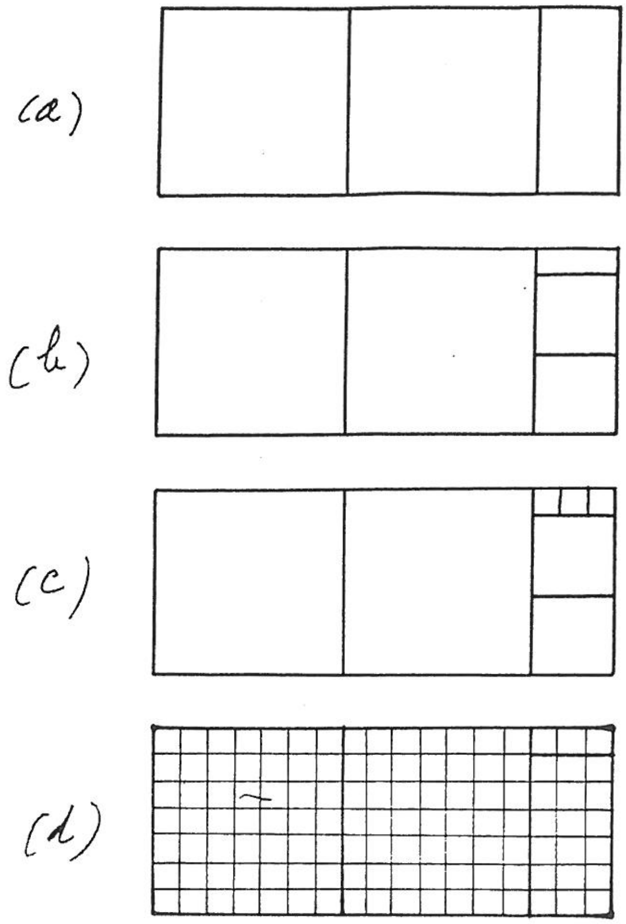

Fig. 4

3.3 La méthode de coïncidence

Voici maintenant une question en quelque sorte duale de la précédente. On donne un rectangle et des copies isométriques en nombre arbitraire de ce rectangle. Essayer, en juxtaposant bord à bord des copies du rectangle, de constituer un carré. Et si on y arrive, comment tirer de ce résultat une évaluation du rapport entre les côtés du rectangle ?

La figure 5 suggère un carré constitué avec des copies d'un rectangle donné. On a obtenu un carré en accolant 18 rectangles par leur plus petit côté et 30 par leur plus grand côté. Si maintenant on imagine que chaque rectangle a sa longueur divisée en 30 parts égales et sa largeur divisée en 18 parts égales, alors ces parts de la largeur et de la longueur seront égales, car chacune représentera le côté du grand carré divisé par $18 \times 30 = 540$. On peut ainsi imaginer le rectangle de départ pavé avec $18 \times 30 = 540$ petits carrés identiques. Ainsi, le rapport entre les côtés du carré donné est de 18 à 30.

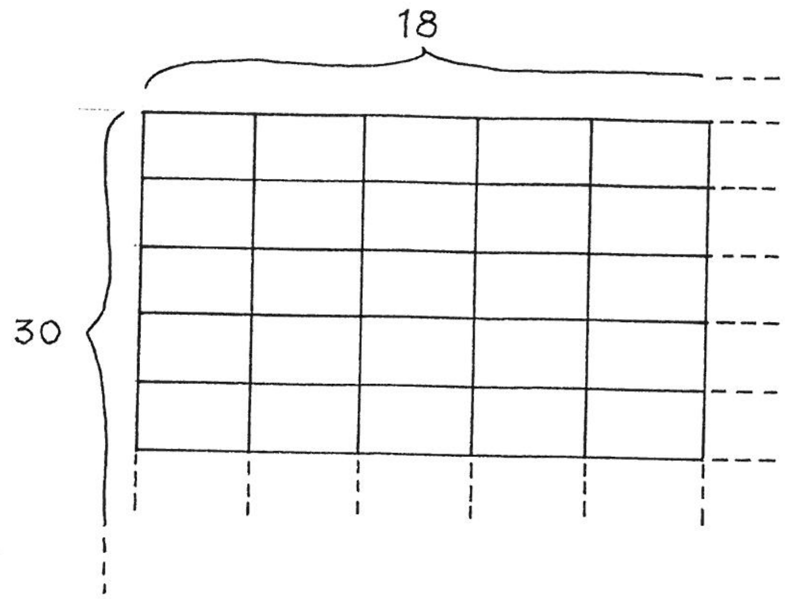

Fig. 5

Une variante de ce problème consiste à proposer un rectangle dont on donne la longueur et la largeur en nombres entiers. On découvre alors le plus petit commun mutiple de la longueur et de la largeur.

Cette question et la précédente peuvent aussi servir à étudier la relation entre le plus grand commun diviseur de deux nombres et leur plus petit commun multiple. Nous ne le ferons pas ici.

3.4 Les rectangles isopérimétriques

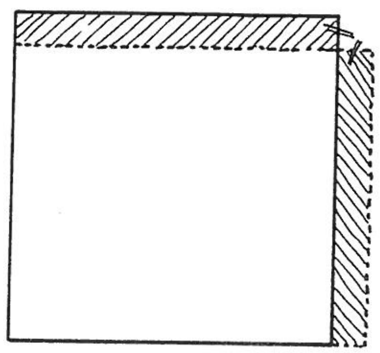

Fig. 6

Venons-en maintenant au problème classique des rectangles isopérimétriques, déjà traité par Euclide. Il faut montrer que, de tous les rectangles ayant un périmètre donné, le carré est celui qui possède la plus grande aire. Dessinons donc un carré ayant ce périmètre (figure 7). On peut passer de ce carré à un rectangle quelconque ayant le même périmètre en en ôtant une bande par dessus et en rajoutant une bande d'égale largeur sur le côté comme le montre la figure 6. Il est évident que le périmètre est demeuré le même. Par ailleurs, la bande enlevée possède une aire supérieure à la bande rajoutée (puisque sa longueur est plus grande), et par conséquent le rectangle obtenu est d'aire plus petite que le rectangle de départ, ce qu'il fallait démontrer.

Cette question est souvent prise, dans les cours d'analyse élémentaire, comme exemple de la recherche d'un maximum par annulation de la dérivée. En un certain sens, les moyens de l'analyse mathématique semblent bien puissants pour régler une question que "le simple regard" suffit à trancher[6].

Il ne serait pas difficile de multiplier les exemples de ce genre, ni de montrer en détail que les opérations sur les grandeurs sont la source intuitive des opérations sur les nombres réels positifs. En particulier, l'ordre sur les grandeurs et l'addition des grandeurs constituent une structure isomorphe à celle de l'ordre et de l'addition sur les réels positifs. En ce qui concerne la multiplication, la situation est plus compliquée. La multiplication des grandeurs n'est pas une opération interne. Il suffit pour s'en convaincre de se souvenir que le produit de deux longueurs n'est pas une longueur, mais une aire[7]. Les opérateurs de fractionnement préfigurent eux aussi – jusqu'à un certain point – les réels positifs, et la composition d'opérateurs apparaît comme une préfiguration de la multiplication. Ainsi les grandeurs et les opérations sur celles-ci préparent intuitivement les réels, même si elles n'en constituent pas une copie fidèle. Il ne nous est pas possible ici de développer en détail ces points importants. Nous renvoyons le lecteur[8] à N. Rouche [1992] .

4 Deux tentatives précoces pour construire les nombres sans s'appuyer sur les mesures

Nous venons d'évoquer le rôle que peuvent jouer les grandeurs élémentaires dans le premier apprentissage des nombres. Pour faire bien voir le constraste, voici, brièvement esquissées, deux tentatives du début du vingtième siècle pour enseigner les nombres rationnels au niveau le plus élémentaire, en se passant totalement des grandeurs. Il s'agit d'auteurs allemands (les deux premiers ont écrit en collaboration) dont les propositions pédagogiques sont rapportées par F. Klein [1908]. Nous ignorons l'influence qu'ils ont eue sur l'enseignement au début du siècle.

Weber et Wellstein introduisent classiquement les fractions comme couples de naturels, les rationnels comme classes d'équivalence de fractions, et les opérations sur les rationnels par les définitions abstraites bien connues.

Burkhardt part des fractions considérées comme quotients de nombres naturels, mais se limite dans un premier temps aux cas où le dénominateur est un diviseur du numérateur. Cela lui permet, en s'appuyant uniquement sur l'arithmétique des naturels, d'établir les règles relatives à la somme et au produit des fractions, telles que les montrent les deux exemples suivants :

$$3 \times 4 = \frac{6}{2} \times \frac{12}{3} = \frac{6 \times 12}{2 \times 3} = \frac{72}{6} = 12$$

[6] On trouvera de nombreux autres exemples de "preuves par le regard" (*proofs without words*) dans R. B. Nelsen [1993]

[7] En affirmant cela, nous ne prenons pas en compte le produit géométrique basé sur le théorème de Thalès, celui que Descartes introduit au début de sa Géométrie. Ce produit fait effectivement correspondre un segment à deux segments, mais il requiert le choix d'une unité arbitraire.

[8] Voir aussi le corps de la géométrie de Hilbert à la section 6.1.

et

$$3+4=\frac{6}{2}+\frac{12}{3}=\frac{18}{6}+\frac{24}{6}=\frac{42}{6}=7.$$

Il les étend ensuite par définition à toutes les fractions.

F. Klein critique ces deux propositions dans les termes suivants : "*Comparons*[9] *maintenant la présentation scolaire traditionnelle avec la conception moderne ainsi décrite.* Dans cette dernière nous demeurons vraiment [...] malgré l'extension du concept de nombre, *complètement dans le système des nombres entiers* : on suppose seulement que les nombres entiers sont saisis intuitivement ou que les règles opératoires qui les concernent sont connues ; les nouveaux objets définis comme couples de nombres ou comme opérations avec des nombres entiers s'inscrivent tout à fait dans ce cadre. *La présentation scolaire*[10] *par contre renvoie à l'intuition nouvelle venue des grandeurs mesurables*, qui offre une image intuitive immédiate des fractions. Nous percevons le mieux cette distinction quand nous nous représentons un être qui ne connaîtrait que l'idée des nombres entiers mais ne possèderait aucune intuition des grandeurs mesurables : la présentation scolaire devrait lui demeurer parfaitement incompréhensible, tandis qu'il pourrait bien comprendre les considérations de Weber-Wellstein.

Et maintenant, laquelle des deux présentations est la meilleure ? [...] *Certainement la présentation moderne est plus pure, mais par ailleurs elle est aussi plus pauvre.* De ce que l'étude traditionnelle *offre comme un tout*, elle ne donne en fait qu'*une moitié : l'introduction abstraite et logiquement complète de certains concepts arithmétiques – nommés "fractions" – et des opérations qu'on leur applique.* Mais alors *une question totalement indépendante et non moins importante demeure pendante : peut-on aussi réellement appliquer la doctrine théorique ainsi déduite aux grandeurs mesurables qui se présentent évidemment à nous ?* On pourrait de nouveau appeler cela un problème de "mathématiques appliquées", pouvant faire l'objet d'un traitement entièrement séparé ; mais il faut évidemment se demander en outre si une telle séparation est aussi *pédagogiquement* opportune. Chez Weber-Wellstein, cette division du problème en deux parties s'exprime d'ailleurs de façon très caractéristique : après l'introduction abstraite du calcul des fractions, la seule dont nous ayons parlé jusqu'ici, il consacre une section particulière [...] – intitulée les proportions – à la question de l'application effective des nombres rationnels au monde extérieur ; et là aussi sa présentation est assurément plus conceptuelle qu'intuitive."

On le voit, le danger d'ignorer les grandeurs, qui fait l'objet du présent exposé, a été souligné il y bien longtemps déjà.

5 Pourquoi les grandeurs sont-elles ainsi ignorées ?

Rassemblons nos idées. Pourquoi les grandeurs ont-elles ainsi quasiment disparu de l'enseignement des mathématiques, alors que, nous venons de le voir, elles ont un rôle à jouer – peut-être irremplaçable – dans la maturation des concepts de nombre chez les enfants et les adolescents et qu'elles sont sources de précieuses intuitions dans toutes les mathématiques ? On peut voir à cela des raisons de divers ordres.

La première est assez clairement que les réformateurs ont voulu enseigner les mathématiques d'aujourd'hui, celles qui se passent des grandeurs. Peut-être, ayant fait leurs études à la période

[9]Toutes les parties soulignées dans cette citation sont soulignées par Klein.

[10]C'est-à-dire celle qui s'appuie sur les grandeurs (note du traducteur).

charnière, ont-ils sous-estimé le soutien intuitif qu'ils avaient eux-mêmes trouvé dans les grandeurs. Ils ont jusqu'à un certain point privé de ce soutien la génération d'élèves qui les a suivis.

Une deuxième explication est peut-être que pour les personnes frottées de mathématiques, les phénomènes relatifs aux grandeurs, et particulièrement ceux qui précèdent la découverte de l'absence de commune mesure, apparaissent à ce point triviaux qu'ils ne mériteraient pas un apprentissage substantiel. Et pourtant, les fractions sont sur ce terrain-là, et l'expérience montre que la plupart des enfants ne surmontent pas les difficultés principales de leur apprentissage.

Un troisième facteur est peut-être à chercher dans l'évolution de la civilisation technologique. Nous vivons dans un monde où, paradoxalement, on fait de plus en plus de mesures, mais où les résultats de mesures sont donnés directement sous forme numérique, sans que le citoyen ordinaire ait à répéter les gestes séculaires du mesurage : équilibrer une balance à fléau, transvaser du liquide d'un litre ou d'un décilitre étalon dans une marmite, etc. Aujourd'hui, on se procure du sucre en paquets pesés à l'avance, on achète non plus tant de litres d'essence, mais pour tant de francs. Les symboles chiffrés suffisent la plupart du temps dans la vie quotidienne. On doit au moins se demander s'il est possible d'acccéder au sens de ces symboles sans avoir rencontré les défis primitifs[11] qui jalonnent l'acquisition de la mesure des grandeurs des diverses sortes ?

6 Les nombres réels, est-ce de la géométrie ?

Jusqu'ici nous avons examiné l'effet du discrédit où sont tombées les grandeurs sur l'acquisition des *premiers nombres*, sans aller beaucoup au delà des rationnels. Mais il est intéressant aussi d'examiner ce qu'est devenu l'enseignement de la *géométrie* au vingtième siècle. La géométrie d'Euclide d'une part était fondée sur les grandeurs, et d'autre part avait pour objet principal la comparaison de grandeurs géométriques diverses, longueurs, aires et volumes. Quelle est la situation aujourd'hui ? Elle est très diverse, comme nous allons le voir.

Mais avant de regarder du côté de l'enseignement, considérons les deux grandes refondations de la géométrie qui ont vu le jour depuis cent ans : celle de Hilbert et celle d'Artin.

6.1 Hilbert et Artin : à l'écart des nombres stricto sensu

L'un des concepts de départ de la géométrie de Hilbert (cf. Hilbert [1971]) est celui de congruence. Certes il s'agit d'un concept primitif d'une géométrie complètement formalisée. Mais ce concept modélise la comparaison de deux grandeurs géométriques par superposition, et traduit ainsi en langage formel le mouvement par lequel Euclide expliquait la superposition de deux triangles au théorème 4 du Livre I. Hilbert[12] ne présuppose pas les réels au départ de sa géométrie. Au contraire, il construit le corps de cette géométrie à partir d'éléments purement géométriques, à savoir des segments. Plus précisément, chaque élément du corps est une classe de congruence de segments, et Hilbert décide, par raison de simplicité, de faire dans son exposé ce qu'on fait dans le quotidien : dire *égal* au lieu de *congruent*. La somme correspond à la mise bout à bout de deux segments. Le produit s'obtient, après le choix d'une unité arbitraire,

[11]Voir note 5.

[12]Nous donnons en appendice quelques indications techniques sur la construction du corps de la géométrie par Hilbert et Artin.

par application de la propriété de Thalès[13]. Bien entendu, Hilbert a aussi besoin de nombres négatifs pour construire le corps en question. Il les obtient en affectant les segments d'un signe. Il démontre en deux ou trois pages tous les axiomes qui définissent un corps. Ainsi les éléments de ce corps ne sont pas des "nombres" au sens où ils ne dérivent pas des naturels et ne sont associés à aucun système de numération. Pour le dire rapidement, ce sont des "grandeurs orientées", très proches des grandeurs considérées naïvement, avant toute mesure, et que l'on représente spontanément par des segments. On peut dire, sans forcer la note, que les éléments du corps de la géométrie de Hilbert sont des choses simples, que l'on peut dessiner d'un trait de crayon et auxquels on peut appliquer, de façon géométrique, les quatre opérations usuelles.

Venons-en maintenant au nouveau fondement de la géométrie proposé par Artin [1962]. Il construit la géométrie affine plane au départ des notions primitives de point et de droite, mais introduit presque tout de suite les dilatations, c'est-à-dire les transformations du plan qui transforment toute droite en une droite parallèle (essentiellement les translations et les homothéties). Artin contruit aussi le corps de sa géométrie sans présupposer de nombres, dans le cadre géométrique lui-même. Mais les éléments de ce corps sont nettement moins élémentaires que ceux de Hilbert. Ce sont, parmi les homomorphismes de l'ensemble des translations, ceux qui conservent les traces (voir appendice). Ainsi les éléments de ce corps ne sont pas des "choses", mais des fonctions ou des opérations qui envoient un ensemble infini de fonctions (les translations) dans lui-même. On peut dire sommairement qu'un élément du corps construit par Artin est une "dilatation" ou une "contraction" de toutes les translations. Artin munit cet ensemble d'une addition et d'une multiplication. La multiplication obéit à une définition assez intuitive, puisqu'elle correspond à la composition des opérateurs. L'addition (voir sa définition dans l'appendice) est moins naturelle[14].

De ces deux refondations modernes de la géométrie, retenons comme intéressant le fait qu'elles construisent le corps de la géométrie sans mentionner *a priori* de nombres, donc sans évoquer de système de numération, non plus d'ailleurs que la distinction entre les rationnels et les irrationnels. Elles montrent – ce que nous avons illustré par des exemples à la section 3 – que la pensée géométrique peut s'aventurer très loin sans s'appuyer sur les mesures et sans devenir numérique. Cette observation n'est sans doute pas sans intérêt pour celui qui essaie de repenser l'enseignement de la géométrie élémentaire. Nous l'avons vu, les mathématiques d'aujourd'hui (jusqu'à un certain point) et la société technologique nous amènent à percevoir les choses à travers une sorte de filtre numérique. Il est intéressant de noter que les deux auteurs qui ont le plus contribué à approfondir la géométrie élémentaire au vingtième siècle, ramènent notre imagination, à travers des théories formelles, à un univers de choses et de dessins.

6.2 Birkhoff, Choquet, Dieudonné : les nombres d'abord

Les ouvrages de Hilbert et Artin étaient destinés aux lecteurs mathématiciens, ou au moins aux étudiants de mathématiques des universités. Venons-en maintenant à l'enseignement de la géométrie aux élèves adolescents qui, ayant quelques notions de géométrie expérimentale, sont prêts – pense-t-on – pour une première approche axiomatique de la géométrie. Parmi les

[13]Ce qui correspond à la présentation du produit dans la géométrie de Descartes.

[14]Si l'on choisit de définir les nombres comme opérateurs, ce qui est possible déjà pour les naturels, l'addition répond à une définition qui apparaît comme artificielle. On les remarque entre autres lorsqu'on introduit les nombres rationnels à partir des opérateurs de fractionnement. La définition de l'addition qui s'impose dans ce cadre n'est pas du tout naturelle, comme l'avait déjà remarqué F. Klein, et de ce fait, elle est peu recommandable pour un enseignement élémentaire.

textes existants à ce niveau, retenons trois des plus marquants, et qui présentent des options différentes, fortement argumentées.

Birkhoff [1940], dans sa "géométrie de base", part de deux axiomes qu'il nomme les axiomes *de la règle et du rapporteur*, permettant de disposer tout de suite de la mesure d'un segment de droite et de la mesure d'un angle. Un autre axiome n'est autre que l'un des cas de similitude des triangles. En postulant en outre, quoique momentanément (car il les démontre plus tard) certains théorèmes tels que le théorème sur l'égalité des angles d'un triangle isocèle, il arrive rapidement à des résultats géométriques importants. Il rappelle en appendice les propriétés principales des nombres réels, en supposant que les élèves les acceptent intuitivement.

G. Choquet [1964] introduit la géométrie affine plane en s'appuyant entre autres sur un axiome qui établit une bijection appropriée entre les réels et la droite. Au rebours de la géométrie euclidienne classique, et on vient de le voir, de la géométrie de base de Birkhoff, il privilégie le parallélogramme par rapport au triangle et construit le plus rapidement possible la structure d'espace vectoriel. Il introduit ensuite le produit scalaire par le biais du rapport de projection. De propos délibéré, il rejette l'introduction des angles le plus loin possible dans son exposé, considérant qu'il s'agit-là d'une notion particulièrement difficile. Ceci aboutit au paradoxe que les angles, quoique omniprésents dans l'univers familier et irremplaçables dans l'interprétation des phénomènes géométriques quotidiens, sont absents pendant longtemps d'une première géométrie axiomatique proposée aux élèves.

Dieudonné [1968] de son côté introduit la géométrie élémentaire dans le cadre classique de l'algèbre linéaire. Il part donc de la notion d'espace vectoriel sur le corps des réels. Il s'agit d'une géométrie intégralement symbolisée dès le départ, exposée par l'auteur sans aucune figure, bien que la pratique de cette géométrie en classe doive évidemment être éclairée par de nombreux dessins. Dieudonné explique qu'il s'agit-là pour lui de la voie la plus claire, exhibant d'emblée le lien de la géométrie élémentaire avec la structure d'espace vectoriel, centrale dans les mathématiques d'aujourd'hui. Il estime, par contraste, que la géométrie de Hilbert est compliquée et totalement inadaptée à un enseignement élémentaire.

Alors que Hilbert et Artin construisent chacun le corps de leur géométrie, Birkhoff, Choquet et Dieudonné présupposent le corps des nombres réels, dont il faut donc bien supposer que les élèves l'ont acquis préalablement sur une autre terrain, ou plus vraisemblablement, qu'ils en ont une connaissance intuitive[15]. C'est un changement historique considérable que de supposer connus, à l'entrée de la géométrie, les moyens conceptuels qui permettent la mesure des grandeurs et en particulier la longueur des segments. Dans de telles approches de la géométrie, on n'apprend plus à mesurer les longueurs et à calculer avec ces mesures, puisque tous les segments sont mesurés d'avance et que les règles de calcul applicables à ces mesures sont données *a priori*.

Revenons par comparaison à Euclide. Bien sûr celui-ci ne pouvait construire les réels, et son objectif n'était pas de mesurer des longueurs ou plus généralement des grandeurs au sens actuel du verbe *mesurer*. Ce qu'il voulait, c'était comparer des grandeurs, ce qui nécessitait une théorie des rapports de grandeurs et un calcul sur ces rapports. Cette théorie est le correspondant, dans ce cadre, de notre théorie des réels. On la trouve au Livre V. Ce qui était à la fois un objet et un instrument essentiel de la géométrie d'Euclide – à savoir la comparaison des grandeurs – a été évacué de la géométrie par les trois auteurs que nous avons cités. L'effet d'une telle option

[15]Il est remarquable d'ailleurs que certains cours universitaires d'analyse élémentaire prennent une position analogue. Le cours d'analyse moderne de Dieudonné [1960] part d'un rappel axiomatique des propriétés des réels. D'autres auteurs ont fait le même choix.

sur les élèves est qu'ayant acquis des notions intuitives sur les réels (ou plus modestement sur les nombres qui servent à mesurer) à l'école primaire et au début du secondaire, ils en restent là, n'étant jamais ultérieurement amenés à compléter la construction des réels avec quelque rigueur. Ces nombres risquent de leur apparaître comme des êtres mystérieux, munis de propriétés subtiles postulées dogmatiquement par l'intelligentsia mathématique.

6.3 Lebesgue, Papy : les réels sont des mesures

Suivons maintenant, à travers les cent trente dernières années, quatre auteurs qui ont écrit sur la construction des nombres réels.

Au début du vingtième siècle, Henri Lebesgue[16] a proposé, pour les élèves de la fin du secondaire, de définir les réels comme les décimaux illimités qui donnent les abscisses sur un axe. Le titre de son ouvrage était significatif : *la mesure des grandeurs*. Il définit la somme par des translations sur l'axe, et la multiplication par un changement de l'unité de mesure. P. van Praag[17], en pensant lui aussi aux mêmes élèves, a repris récemment la construction des réels comme décimaux illimités, quoique dans un cadre de géométrie plane, en s'appuyant sur les translations et les homothéties (de ce point de vue, voir aussi Papy ci-dessous). Dans les deux cas, un résultat important est la détermination de la $n^{\text{ième}}$ décimale de la somme et de la $n^{\text{ième}}$ décimale du produit. Ces deux constructions s'appuient sur la connaissance préalable des entiers rationnels, qui permettent d'établir une première graduation de la droite.

Dans les années soixante, G. Papy avait proposé, cette fois pour les élèves de 13 à 14 ans, une construction des réels basée elle aussi sur une première graduation de la droite à l'aide des translations et des entiers rationnels. Les réels étaient définis aussi à l'aide de sous-graduations de la droite et en s'appuyant sur l'axiome des intervalles emboîtés. Les proporiétés telles que la commutativité et l'associativité étaient obtenues par voie géométrique, à partir des propriétés analogues des translations et des homothéties.

7 Conclusion

Concluons brièvement par quatre questions. Les grandeurs, considérées avant toute mesure, sont-elles assez présentes dans l'apprentissage des premiers nombres (jusqu'aux rationnels) ? N'ont-elles pas un rôle à jouer, plus grand que celui qu'on leur reconnaît aujourd'hui, comme sources de monstrations et de conjectures à un niveau plus avancé des mathématiques scolaires ? La construction du corps des réels qui est la plus simple, la plus proche des grandeurs quotidiennes, est celle de Hilbert. Ne suffirait-il pas, pour les élèves qui ne devront pas faire beaucoup de mathématiques, qu'ils aient des nombres une connaissance géométrique de ce type, tout en acceptant un axiome qui associerait une mesure décimale (fut-elle illimitée) à tout segment ? La construction des réels est habituellement négligée de nos jours dans la formation des futurs enseignants de mathématiques. N'importerait-il pas de corriger ce défaut en choisissant une théorie qui n'écarte pas trop les réels des mesures de grandeurs, dont ils sont en quelque sorte les archétypes ?

[16] Dans un texte destiné aux enseignants.

[17] Également dans une étude destinée aux enseignants.

8 Appendice

8.1 Le corps de la géométrie de Hilbert

On considère l'ensemble des segments et la relation de congruence entre segments. Cette relation est une équivalence. On munit d'une addition l'ensemble des classes de congruence de segments, par mise bout à bout des segments. Pour le munir ensuite d'une multiplication, on choisit arbitrairement comme *unité* une classe de segments non nuls. Le produit de deux classes a et b de segments s'obtient alors comme le montre la figure 7, en accord avec le théorème de Thalès.

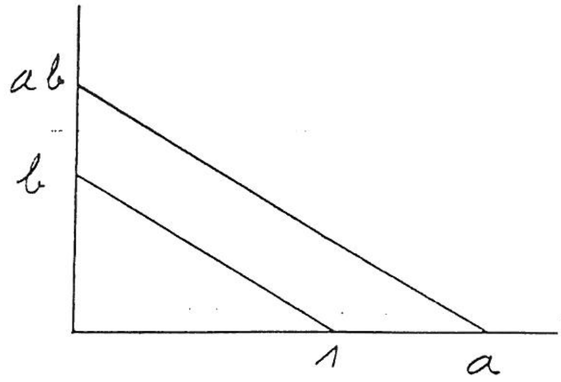

Fig. 7

La plupart des règles de calcul se démontrent trivialement. La commutativité et l'associativité de la multiplication sont un peu plus compliquées : leur démonstration s'appuie sur le théorème de Pappus.

La structure ainsi construite est complétée pour en faire un corps par l'introduction d'un ensemble de segments dits *négatifs*, ceux considérés jusque-là étant réputés positifs.

On peut difficilement imaginer une construction plus simple. On remarquera toutefois que la multiplication dépend du choix arbitraire d'une unité. Bien entendu, les propriétés de continuité doivent encore être postulées à part. On sait que l'axiome de continuité de Hilbert n'est pas d'accès facile. Mais il est possible de le remplacer par l'axiome de Dedekind[18].

8.2 Le corps de la géométrie d'Artin

Il s'agit ici d'une géométrie affine plane, dans laquelle apparaissent d'emblée les translations et les homothéties. On considère l'ensemble T des translations du plan, muni de la loi de composition des translations, puis l'ensemble des homomorphismes de $T \longrightarrow T$ qui préservent les traces, ou en d'autres termes (dans le cas de translations non nulles) la direction des translations. Les éléments de ce dernier ensemble, munis d'une somme et d'un produit, deviendront les éléments du corps de la géométrie.

Commençons par présenter graphiquement un de ces éléments, en montrant (figure 8) son effet sur une translation arbitraire $\tau : A \longrightarrow A^*$. Soit σ une homothétie de centre O, par exemple celle qui envoie A sur B. Voyons où A sera envoyé par $\sigma\tau\sigma^{-1}$. D'abord σ^{-1} envoie A sur A',

[18]Voir par exemple à ce sujet G. Vitali [1983] et F. Borceux [1986].

puis τ envoie A' sur A'', et enfin σ envoie A'' sur A'''. On a donc

$$A''' = \sigma\tau\sigma^{-1}A.$$

On pourrait refaire une construction analogue pour une translation quelconque. Il est clair en outre que cette construction préserve la composition des translations. Ainsi

$$h : T \to T : \tau \to h(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$$

est un homomorphisme de T préservant les traces.

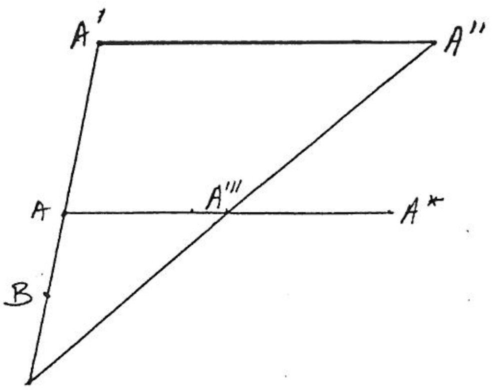

Fig. 8

Le produit de deux éléments du corps est défini par la composition des homomorphismes. La somme de deux éléments est l'homomorphisme qui envoie chaque translation sur la composée de ses transformées par chacun de ces deux éléments. Le contenu intuitif de cette définition ne saute pas aux yeux.

On peut se représenter chaque élément du corps comme une sorte de "dilatation" de toutes les translations du plan dans une proportion donnée. Le zéro est alors l'homomorphisme qui envoie toute translation sur la tranformation identique. L'unité du corps est l'homomorphisme qui envoie toute translation sur elle-même. Ainsi le zéro et l'unité ne dépendent d'aucun choix arbitraire. Les négatifs n'ont pas besoin d'être introduits par une opération supplémentaire : ils sont présents dans l'ensemble d'homomorphismes défini au départ.

La plupart des lois de calcul se démontrent très simplement. Toutefois, la commutativité de la multiplication dépend ici aussi du théorème de Pappus.

Remerciements. Merci amicalement à Thérèse Gilbert et Paul van Praag, dont les critiques ont permis d'améliorer cette étude sur plusieurs points.

Bibliographie

Émile Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1962

George D. Birkhoff, Ralph Beatley, *Basic geometry*, Chelsea, New York, 1940

Francis Borceux, *Invitation à la géométrie*, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986

Fernand Braudel, *Écrits sur l'histoire*, Flammarion, Paris, 1969

Augustin-Louis Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, première partie : Analyse algébrique,* Debure, Paris, 1821 ; rééd. Gabay, 1989

Gustave Choquet, *L'enseignement de la géométrie,* Hermann, Paris, 1964

Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, Paris, 1968

Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis,* Academic Press, New York, 1960

Euclide, *Les Éléments,* trad. B. Vitrac, vol. 1, Presses Universitaires de France, Paris, 1990

David Hilbert, *Foundations of geometry,* Open Court, La Salle Illinois, 1971

Félix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus,* volume 1, Springer, Berlin, 1908 ; quatrième édition 1933

Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs,* Blanchard, Paris, réédition 1975

Roger B. Nelsen, *Proofs without words, Exercises in visual thinking,* The Mathematical Association of America, Washington DC, 1993

Georges Papy, *Mathématique moderne 1,* quatrième édition, Didier, Bruxelles, 1970

Georges Papy, *Mathématique moderne 2,* Didier, Bruxelles, 1970

Nicolas Rouche, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels,* Didier-Hatier, Bruxelles , 1992

Giuseppe Vitali, Sulle applicazioni del postulato della continuità nella geometria elementare, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* F. Enriques coord., vol. 1, Zanichelli, Bologna, troisième édition 1983 ; pages 193-230

Paul van Praag, *Les nombres décimaux illimités,* CREM et GEPEMA, Nivelles, 1997