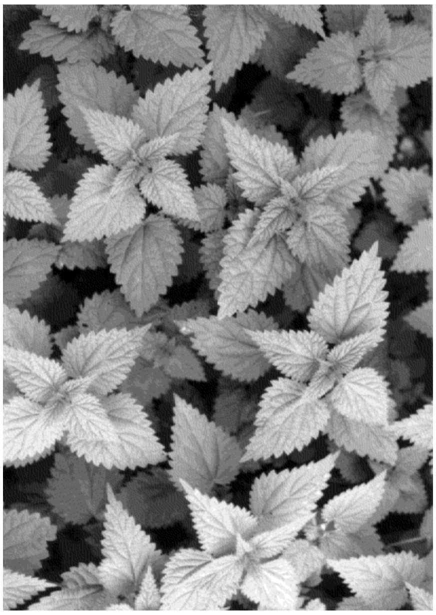
FORMES ET MOUVEMENTS

PERSPECTIVES POUR L'ENSEIGNEMENT

DE LA GÉOMÉTRIE



CREM a.s.b.l.

FORMES ET MOUVEMENTS

Perspectives pour l'enseignement de la géométrie

Cette étude a été
réalisée
dans le cadre des conventions de recherche 81, 95 à 98 passées avec le
Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation
de la Communauté française de Belgique.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère non confessionnel.
Un poste de chargé de mission a été affecté à temps
partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère confessionnel.

Avertissement. – Cette étude devait au départ s'étaler sur trois ans. À la suite d'une décision administrative, elle a duré trois ans et huit mois. Le présent volume correspond au projet initial. Un second volume, intitulé *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans*, rend compte pour l'essentiel du supplément de recherche que noua avons pu faire grâce à la prolongation de la période de recherche.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde B-1400-Nivelles
Tél. : 32 67 212527 Fax : 32 67 212202
Juin 1999

FORMES ET MOUVEMENTS

PERSPECTIVES POUR L'ENSEIGNEMENT
DE LA GÉOMÉTRIE

CREM a.s.b.l.

Préliminaire

La présente étude n'aurait pas été possible sans la collaboration active et attentive de toute une équipe constituée par Sylvie Denis, institutrice maternelle, Bernard Honclaire, régent, Luc Lismont, docteur en mathématiques, Nicolas Rouche, agrégé de l'enseignement supérieur, Serge Sabbatini, licencié en mathématiques, Thaïs Sander, institutrice primaire, Françoise Van Dieren, régente, Jacques Van Santvoort, régent et docteur en mathématiques et Marie-Françoise Van Troeye, régente. Partant de son expérience – considérable pour certains – et de ses propres points de vue, chacun a apporté à l'œuvre commune sa part d'idées et de critiques. Le travail a comporté, en grand nombre, des lectures, des expériences en classe, des exposés, des débats, des brouillons.

L. Lismont et N. Rouche ont assuré la rédaction de l'ensemble, avec les exceptions suivantes : la première partie est due à N. Rouche, dûment critiqué par tous les autres ; la substance du chapitre 11, rédigé par L. Lismont, est due à B. Honclaire et M.-F. Van Troeye : le chapitre 12 est dû à F. Van Dieren.

Dans cette partie de notre recherche, nous avons voulu creuser profond, ce qui explique le caractère dans l'ensemble assez théorique de ce volume. Mais nous n'avons jamais oublié les élèves et les enseignants et nous expliquons, dans un chapitre de conclusions, en quoi nous espérons leur être utile.

Si nous sommes arrivés à un résultat équilibré où se conjuguent sans heurts l'exigence de sens pour les élèves et le bien-fondé de la pensée mathématique – le lecteur en jugera –, nous le devons sans conteste à la composition de notre équipe. L'expérience de notre collaboration, toutes les contradictions fructueuses que nous avons affrontées, nous amèneraient à confirmer ce qu'affirmait déjà le rapport « Danblon », à savoir qu'il ne faut jamais confier une réforme de l'enseignement des mathématiques à des mathématiciens non étroitement critiqués par des enseignants expérimentés. Et réciproquement.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à toutes les personnes qui nous ont aidés par leurs idées et leurs critiques tout au long de l'élaboration de ce travail. Mentionnons tout particulièrement Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Michel Demal, Georges Demol, Christine Docq,

Thérèse Gilbert, Louis Habran, Francis Michel, Francis Michel, Guy Noël, ainsi que tous les membres des deux comités d'accompagnement, celui du CREM et celui du Ministère.

L'ensemble du texte a été saisi en LaTeX2ε par L. Lismont.
Celui-ci a aussi composé la plupart des figures avec Mathematica.
La plupart des figures du chapitre 12 ont été composées
par F. Van Dieren avec Canvas.

Avant-propos

1 Pourquoi une étude sur la géométrie ?

Montrons brièvement[1] l'opportunité d'une étude générale sur l'enseignement de la géométrie.

Jusque dans les années 60, on enseignait cette discipline en deux phases. À l'école primaire et au début du secondaire, il s'agissait d'une géométrie intuitive comportant principalement des notions sur les figures planes et les solides élémentaires, et particulièrement sur leurs aires et leurs volumes. Vers 13 ou 14 ans, on commençait une géométrie axiomatique, d'inspiration euclidienne sauf exception. Il y avait là une discontinuité dans l'apprentissage, et beaucoup d'élèves en souffraient.

Vers la fin des années 60, la réforme des mathématiques modernes instaure, dans un premier temps au secondaire seulement, une géométrie axiomatique d'inspiration ensembliste, qui déplace l'intérêt des figures vers les fondements, respecte la hiérarchie des géométries issue du programme d'Erlangen[2], et par conséquent fait jouer un rôle majeur aux transformations de l'espace (au départ il s'agit du plan). Suivant la tendance générale des mathématiques, cette géométrie est fortement algébrisée, et elle converge rapidement vers l'algèbre linéaire.

Au cours des années 70, le système d'enseignement réalise que les élèves ne peuvent guère saisir la portée des fondements lorsque ceux-ci leur sont proposés au départ. Il réalise que les figures, objets traditionnels de la géométrie, ne peuvent être oubliées. Mais il retient de l'expérience des mathématiques modernes, qui s'avère cruciale à cet égard, l'intérêt des transformations. Et il considère dorénavant l'algèbre linéaire comme un horizon principal de la géométrie.

Toutefois, la situation actuelle de l'enseignement de la géométrie continue à poser des problèmes importants. L'un d'entre eux est que cette discipline demeure un parent pauvre en primaire. Un second est que la disparition d'une axiomatique au début du secondaire a fait disparaître le fil conducteur qui montrait la voie. Les mathématiques modernes avaient non pas supprimé, mais remplacé et même affermi ce fil conducteur. On se demande maintenant entre autres quelles sont les places respectives des figures et des transformations, et s'il faut une priorité[3]. La disparition de l'axiomatique a entraîné une autre difficulté : en effet elle était la source même de la rigueur, et on se demande maintenant comment travailler sérieusement, rigoureusement. Il y a comme un deuil de la rigueur. Un débat est ouvert sur la preuve, souvent considérée comme obéissant à un modèle unique et devant être enseignée brusquement, à partir d'un âge déterminé. Ce débat fait apparaître des opinions contradictoires.

Ainsi, il y a un malaise du côté de la géométrie. Certains se demandent même s'il faut encore l'enseigner, et beaucoup d'enseignants de la génération formée aux mathématiques modernes se sentent mal préparés pour le faire.

L'objectif principal de la présente étude est d'examiner l'apprentissage de la géométrie, de chercher les conditions de sa pertinence et les modalités possibles de son évolution sans heurt à travers toute la jeunesse. Un concept clef pour examiner cette question est celui d'enseignement en spirale.

[1] Pour une discussion plus complète accompagnée de références, voir entre autres l'étude du CREM : *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, [1995].

[2] Félix Klein [1872].

[3] Voir par exemple à cet égard l'étude de M. Demal [1998].

2 Un enseignement en spirale

L'organisation d'un enseignement des mathématiques « en spirale » apparaît aujourd'hui comme un objectif approprié, susceptible de contribuer à la cohérence, à la continuité de cet enseignement[4]. Rappelons brièvement, en citant le rapport « Danblon », ce que l'on entend par *enseignement en spirale* : « Dans l'enseignement dit « en spirale », chaque notion, chaque théorie vue une première fois à un niveau élémentaire et dans un contexte peu étendu est reprise et approfondie plus tard dans un contexte élargi, et ainsi plusieurs fois jusqu'à ce que, d'approfondissement en approfondissement et de généralisation en généralisation, elle arrive à maturité en établissant ses connexions naturelles avec les notions et théories voisines[5]. »

Si on admet l'opportunité d'un enseignement en spirale, encore faut-il le concevoir. On a besoin pour cela d'une vue argumentée de l'apprentissage depuis son terrain de départ, celui des intuitions familières, jusqu'aux mathématiques constituées. En effet, des petits bouts de spirale raccordés vaille que vaille ne peuvent convenir. C'est un travail long et difficile, mobilisant des registres de connaissance et des expériences d'enseignement extrêmement variés. Aucune personne isolée ne peut espérer en venir à bout. Heureusement, le présente étude a bénéficié de la collaboration suivie d'une institutrice maternelle, une institutrice, trois régents, un licencié et deux docteurs en mathématiques.

L'étude est divisée en six parties. La première examine *Les origines de la géométrie* dans les perceptions et les mouvements. Elle tente de montrer comment se forment les premiers concepts, comment naissent les premières implications évidentes.

La deuxième partie, intitulée *Une géométrie naturelle*, part des premières implications évidentes issues des actions et perceptions quotidiennes pour arriver à quelques propriétés non évidentes de géométrie plane. L'exposé tente de montrer qu'une géométrie argumentée sérieusement peut s'appuyer sur des moyens de connaissance tels que des expériences, des perceptions de symétries, des mouvements continus. Il est construit à l'écart de tout contexte familier, pour mieux mettre en évidence la logique propre à cette géométrie intuitive et informelle.

La troisième partie, intitulée *La géométrie en classe à douze ans*, expose dans quels contextes et à travers quelles activités des enseignants du début du secondaire proposent d'éveiller la curiosité géométrique de leurs élèves, et comment il les amènent à construire des éléments de théorie satisfaisant cette curiosité. Cette partie comprend deux chapitres, relatant deux conceptions de cet enseignement, deux façons en somme d'interpréter le programme.

Jusque-là l'étude est donc consacrée à l'émergence de la géométrie, depuis les premières perceptions et intuitions jusqu'au développement des premières argumentations, des premiers raisonnements. Toute la suite du travail est consacrée à la présentation de trois fils conducteurs qui nous paraissent susceptibles d'inspirer un enseignement cohérent de la géométrie depuis l'école maternelle jusqu'à la fin du secondaire. Comme on va le voir, chacun de ces trois fils fait l'objet d'une partie de ce rapport.

Les objets, qu'ils soient plans ou à trois dimensions, sont souvent peu accessibles à la perception parce qu'ils sont mal placés, vus incomplètement, trop grands, trop petits,... D'où le nécessaire va-et-vient entre eux et des représentations de toutes sortes. La quatrième partie propose une vue argumentée des représentations, depuis les plus simples jusqu'à la perspective centrale, en passant par les développements de solides et les maquettes. Elle montre pourquoi les représentations font partie intégrante de la géométrie.

[4] La continuité de l'enseignement des mathématiques apparaît comme une préoccupation centrale dans plusieurs documents officiels, entre autres le rapport « Danblon » [1990] et la brochure *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences*, [1996].

[5] L'idée d'enseignement en spirale est développée en détail et rattachée à ses origines dans F. Buekenhout [1982].

La cinquième partie explique le développement de la structure linéaire en partant des opérations élémentaires sur les grandeurs et en passant par la notion de mesure, la proportionnalité, les vecteurs et les transformations linéaires. La linéarité, contrastée à la non-linéarité, peut – oserait-on dire doit ? – jouer un rôle de fil conducteur dans un enseignement en spirale des mathématiques en général, et

particulièrement de la géométrie.

La sixième partie enfin expose le thème de l'orientation depuis l'avant et l'arrière, le dessus et le dessous, la gauche et la droite, en passant par les horloges et les tire-bouchons, jusqu'aux changements de base dans un espace vectoriel.

3 Pour quels lecteurs ?

Pour que cette étude atteigne son objectif, qui est d'aider à la conception d'un enseignement en spirale de la maternelle jusqu'à l'âge adulte, il fallait quelle soit, pour l'essentiel, lisible par les enseignants de tous niveaux. C'est pourquoi les sujets mathématiques y sont introduits doucement et de manière explicite. Seules les matières les plus avancées sont traitées avec moins de ménagements, car il n'était pas possible de tout réexpliquer en détail. L'espoir est que chaque lecteur puisse avancer assez loin dans chaque chapitre, et de plus saisir la portée de l'ensemble.

Indications pour la lecture – Les renvois à la bibliographie, située en fin d'ouvrage, se font par le nom de l'auteur, suivi par la date de la publication placée entre crochets. À de rarissimes exceptions près, tous les ouvrages mentionnés sont disponibles au centre de documentation du CREM.

Première partie

Les origines de la géométrie

Introduction
une certaine épistémologie

Zurück zu den Zachen selbst.

Edmund Husserl

Pour repenser l'enseignement de la géométrie, il semble essentiel de s'interroger sur la façon dont cette discipline se constitue au départ de l'environnement quotidien.

Or l'environnement est peuplé d'objets dont la plupart ne se déforment pas et que l'on peut donc à loisir considérer de divers points de vue, selon qu'on les déplace ou qu'on se déplace par rapport à eux. Le matériau de la pensée géométrique à son début est constitué de ces objets-là, et non de figures immobiles, et moins encore de sous-ensembles d'un ensemble de points appelé *espace*.

Nous nous proposons de chercher comment les premiers concepts, les premières inférences de la géométrie peuvent naître des sensations, des perceptions et des actions sur les objets. En ce sens, nous nous intéressons aux *origines de la géométrie*.

Ceci dit, nous devons avant tout préciser sur quel terrain nous poursuivrons notre enquête. Car diverses possibilités peuvent être envisagées.

1 Trois approches des origines

1.1 L'histoire

La première possibilité serait de regarder du côté de l'histoire. Comment les hommes ont-ils, une première fois, résolu par la force du raisonnement quelques questions géométriques rencontrées dans leur environnement ? Une telle interrogation nous fait remonter à la nuit des temps, c'est-à-dire plutôt à la préhistoire qu'à l'histoire. Mais alors, faute de documents, nous en sommes réduits à des conjectures peut-être à jamais insolubles[1].

D'où la question : que pouvons-nous tirer des documents les plus anciens ? Ils sont certes tous largement postérieurs à l'émergence dans l'humanité d'une première pensée géométrique. Mais l'historien Fernand Braudel [1969] nous a appris à chercher, dans les sources historiques léguées par une époque donnée, les traces

[1] Pourtant, E. Husserl dans *L'origine de la géométrie* [1962] estime qu'en étudiant dans le présent les phénomènes qui ont objectivement dû provoquer l'apparition de la pensée géométrique, il est possible de reconstituer la démarche des premiers êtres humains qui ont « fait de la géométrie ».

d'un passé parfois beaucoup plus lointain. C'est ce qu'il a appelé *le temps long de l'histoire*.

Parmi les écrits anciens, on pense tout de suite à Euclide. Mais les *Éléments* témoignent d'une géométrie déjà longuement élaborée, inspirée par un projet global de construction déductive et qui de ce fait se trouve très loin des commencements qui nous préoccupent. On peut toutefois penser par exemple qu'aux rares endroits où Euclide recourt à des mouvements, il manifeste le caractère inévitable et donc nécessairement primitif de ce recours. Comment en effet les hommes auraient-ils conçu la congruence de deux objets plans sans porter l'un sur l'autre comme à la quatrième notion commune du Livre I : « Les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. » (cf. Euclide [1990]).

D'autres géométries anciennes sont plus proches qu'Euclide d'un état premier de la géométrie. Il s'agit surtout des géométries indienne et chinoise. Comme l'écrit J.-Cl. Martzloff [1990], les mathématiques chinoises sont « dépourvues d'axiomes, de définitions, de théorèmes, de raisonnement hypothético-déductif. » Elles recourent surtout à des moyens de preuve intuitifs, essentiellement des découpages d'aires en quelques parties que l'on réarrange ensuite autrement. Mais par ce type de procédé, elles démontrent des propriétés non triviales[2].

1.2 L'ethnologie

En dehors de l'histoire, une autre façon d'étudier les origines de la géométrie consiste à observer la pratique des peuples primitifs, lorsqu'ils mesurent des terrains, élèvent des habitations ou des monuments, ornent des surfaces[3]. C'est un courant de recherche qui s'amplifie depuis quelques années sous la dénomination d'*ethnomathématique*.

1.3 La psychologie génétique

Par ailleurs, les origines de la géométrie ont aussi été étudiées par les psychologues généticiens et singulièrement par Jean Piaget et ses successeurs. Mais leur point de vue est très différent des précédents : il s'agit pour eux d'étudier l'acquisition des connaissances non plus dans l'histoire de l'humanité (ce que l'on appelle la *phylogenèse*), mais bien dans celle des individus à partir du plus jeune âge et jusqu'à l'adolescence (on parle alors de l'*ontogenèse*). Mais de quelles connaissances s'agit-il ? Piaget[4] s'intéresse aux connaissances géométriques observables chez la plupart des individus ayant connu jusqu'à l'adolescence une vie familiale, sociale et scolaire « ordinaire »[5]. Il en décrit la genèse au cours de l'enfance. Ces connaissances sont élémentaires,

[2] Voir par exemple les démonstrations du théorème de Pythagore dans M.-F. Coste-Roy *et al.* [1980].
[3] Voir par exemple Marcia Ascher [1991].
[4] Voir Piaget [1947], [1948] et [1967].
[5] Il s'agit *en fait* des adolescents d'une certaine société genevoise du XX^{e} siècle.

elles relèvent pour l'essentiel du sens commun, de ce fait elles semblent aller de soi pour les adultes et ne s'étendent donc pas à l'explication de phénomènes intrigants. Piaget ne discute pas le rôle de l'école dans leur acquisition. Mais il est clair que l'école y est pour beaucoup[6].

Chacune des trois approches que nous venons de relever – l'histoire, l'ethnologie et la psychologie génétique – est une modalité de l'épistémologie, c'est-à-dire de l'explication du fondement de la science ou des savoirs, de leur genèse et de leur portée.

Ce que nous comptons faire ici relève d'une quatrième voie qui se situe pour l'essentiel dans le présent (elle n'est pas d'abord historique), dans la civilisation qui est la nôtre (elle n'est pas ethnologique), et dans la pensée adulte (elle n'est pas psychogénétique). Ceci mérite une explication détaillée.

2 Une quatrième voie

2.1 Qu'est-ce qui provoque la pensée géométrique ?

Et tout d'abord qu'est-ce qui met en route la pensée géométrique ? Ce sont évidemment des phénomènes intrigants, des choses qui, dans notre environnement, sont assez aisément constatables mais non immédiatement explicables. On se demande à leur sujet : comment cela se fait-il ?

La géométrie élémentaire est parsemée de phénomènes qui ne vont pas de soi. Par exemple, par trois points passe un cercle et un seul. Ou encore, tous les points d'où on voit un segment sous un angle donné sont disposés sur deux arcs de cercle.

H. Freudenthal [1973] a tenu lui aussi à bien marquer que la pensée géométrique est provoquée par des questions, dont il donne une bonne vingtaine d'exemples. En voici quelques-unes. On remarquera que leurs énoncés sont clairs, accessibles à n'importe qui, tandis que les réponses, elles, ne sont pas évidentes.

> Pourquoi une feuille de papier se plie-t-elle selon une droite ?
>
> Pourquoi une feuille de papier enroulée devient-elle rigide ?
>
> Pourquoi une bande de papier que l'on noue prend-elle la forme d'un pentagone régulier ?
>
> D'où proviennent les ombres ?
>
> Quelle est l'intersection d'un plan et d'une sphère, de deux sphères ?
>
> Pourquoi le rayon d'un cercle peut-il être reporté exactement six fois autour de son périmètre ?
>
> Comment une belle étoile naît-elle de cette construction ?
>
> Pourquoi la ligne droite est-elle la plus courte ?

---

[6] Au contraire de Piaget, L. Vygotski [1997] contraste les modalités d'acquisition des savoirs d'une part dans la famille et le milieu social, et d'autre part à l'école.

> Pourquoi des triangles congruents peuvent-ils paver le plan, alors que des pentagones congruents en général ne le peuvent pas ?
>
> Comment arrive-t-on à mesurer de grandes distances sur la terre, le diamètre de la terre, les distances des corps célestes ?
>
> etc., etc.

2.2 Où trouver des explications ?

Il n'y a qu'un recours pour expliquer les phénomènes intrigants, c'est de s'appuyer sur des phénomènes qui vont de soi, qui ne sont pas intrigants. Or l'environnement quotidien nous offre des évidences géométriques en assez grand nombre. En voici trois exemples.

> Nous reconnaissons sans peine qu'une figure plane possède un axe de symétrie, à condition qu'elle nous soit présentée dans un plan frontal, avec son axe en position verticale.
>
> Lorsqu'on pose une échelle à deux montants égaux sur un sol horizontal, on s'aperçoit que les deux montants prennent une égale inclinaison.
>
> Pour aller chercher de l'eau dans un fleuve dont la berge est rectiligne, le plus court chemin est la perpendiculaire à la berge.

Ces trois évidences et d'autres analogues tiennent, si on peut dire, à la *nature des choses.*

Au XVIIe siècle, Blaise Pascal[7] affirmait l'existence de choses évidentes susceptibles de former la base de la géométrie, et de choses non évidentes à éclairer par les premières. Il écrivait : « [L'ordre de la géométrie] ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours[8]. » Il s'impose, disait-il encore, « de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres », et aussi de « ne point prouver toutes les choses connues de tous les hommes et de prouver toutes les autres. »

Mais c'est là une affirmation générale. Où pouvons-nous trouver à préciser cette idée de la lumière naturelle en géométrie ? Pascal ne nous a pas laissé d'exposé de la géométrie élémentaire. Descartes non plus. Par contre Antoine Arnauld [1667], ami de Pascal, et plus tard Claude-Alexis Clairaut [1741] ont écrit des éléments de géométrie fondés sur des évidences (et donc en rupture avec la rigueur grecque). À lire ces auteurs, on s'aperçoit que

[7] Voir B. Pascal [1657-58].

[8] *Au défaut du discours*, c'est-à-dire *à défaut de la preuve*. On note la référence de Pascal à la *lumière naturelle* et à la *nature*. C'est dans le même sens que nous avons parlé ci-dessus de la *nature des choses*. Avant Pascal, Descartes [1637] avait reconnu l'existence de la lumière naturelle lorsqu'il écrivait, au début du *Discours de la méthode*, que « le bon sens est la chose du monde la mieux partagée », et lorsque dans le premier principe de sa méthode il se promettait de « ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire [...] de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute. »

leur lumière naturelle est aussi la nôtre, que ce qu'ils trouvaient évidents, nous le trouvons aussi. Certes, bien d'autres considérations par delà la lumière naturelle se trouvent à la base de la géométrie – des géométries – d'aujourd'hui. Mais la lumière naturelle importe à ceux qui enseignent la géométrie élémentaire, car elle constitue le terrain d'expérience et de réflexion des débutants.

2.3 D'où vient la lumière naturelle ?

Mais alors que pouvons-nous faire de plus qu'Arnauld et Clairaut ? Sommes-nous réduits à les imiter, à mettre seulement leur discours au goût du jour ? Certainement pas. D'abord parce que leur horizon, la direction dans laquelle ils orientaient leurs élèves, était celle de la géométrie d'Euclide. Nous devons aujourd'hui refaire une géométrie naturelle orientée vers les géométries contemporaines[9]. Il faut toujours partir du terrain de l'élève, mais sans oublier où l'on va.

Mais il y a plus. Arnauld et Clairaut ont exhibé des évidences et s'en sont servi pour construire des preuves. Nous le ferons aussi, dans la deuxième partie de ce travail. Mais d'abord nous chercherons à expliquer la nature et l'origine des évidences, des premiers concepts et des premières inférences géométriques, les modalités des premières formations discursives.

Divers travaux nous y aideront. En suivant Maurice Merleau-Ponty [1945], nous tenterons de voir comment se constitue dans la conscience l'idée de la constance de la forme et des dimensions d'un objet indéformable. Nous trouverons dans Ernst Mach [1922] les conditions dans lesquelles l'être humain perçoit certaines symétries simples. Nous chercherons comment l'on passe de la connaissance d'un objet singulier à celle d'une classe d'objets, comment se constituent les objets mentaux. Nous nous appuierons à ce propos sur les contributions de Lev Vygotski [1997]. Nous essayerons ensuite de classer les objets, les figures, selon la plus ou moins grande difficulté d'accès que nous avons à leur structure. Puis nous chercherons à voir en quoi consistent les évidences nécessaires à la construction d'une première géométrie. Nous verrons que ce sont des évidences d'implication, issues de la causalité physique.

Toutes ces questions dépendent d'une analyse de la nature des choses. Elles renvoient entre autres aux symétries des objets, à celle des organes de perception de l'être humain, aux directions physiques de base, à savoir la verticale et l'horizontale. Elles ne relèvent a priori ni de l'histoire, ni de l'ethnologie, ni de la psychologie génétique, même si ces trois disciplines aident souvent, par les questions et les analyses qu'elles proposent, à comprendre les phénomènes en cause.

[9] Et plus particulièrement vers l'algèbre linéaire.

En approfondissant ainsi la nature et les origines de la lumière naturelle, nous espérons reconnaître les conditions qui en favorisent la maturation, en particulier chez les enfants, et contribuer par là à l'efficacité de l'enseignement de la géométrie.

Terminons par deux remarques. D'abord notre propos ne se situe pas dans la ligne d'une épistémologie philosophique. Nous ne cherchons pas à préciser nos opinions sur l'origine et la valeur des vérités mathématiques. Par exemple, nous expliquons qu'en dessinant aux instruments, on peut réaliser qu'un quadrilatère qui possède deux côtés congruents perpendiculaires à un troisième est un rectangle. En faisant ce constat utile, nous ne voulons prendre aucune position pour ou contre une philosophie empiriste ou idéaliste. Nous voulons demeurer dans le concret des observations utiles aux enseignants, en quelque sorte au niveau d'un bon sens éclairé, d'une expérience argumentée. Deuxièmement, il est vrai que la science cognitive tente aujourd'hui de cerner rigoureusement certains phénomènes de connaissance. Mais elle ne permet pas, ou pas encore, pour autant que nous soyons capables d'en juger, de construire sur l'acquisition de la géométrie une synthèse – fut-elle provisoire – dont l'enseignement a grand besoin. C'est à une telle synthèse que nous nous efforçons de contribuer.

Avertissement. – Dans cette première partie, nous utilisons le terme *congruent* pour désigner l'identité de forme et de grandeur. Bien que ce soit un terme d'origine savante, nous le préférons à *isométrique*, parce qu'il nous évite la référence à une mesure des distances, qui n'a rien à voir avec notre propos.

Dans d'autres parties de cette étude, nous utiliserons d'autres mots, et nous annoncerons ces choix. Sur tous les termes qui tournent autour de *congruent* et *isométrique*, voir l'appendice à la page 301.

1

La perception des objets

Tout ce que je sais du monde, même par science, je le sais à partir d'une vue mienne ou d'une expérience du monde sans laquelle les symboles de la science ne voudraient rien dire.

Maurice Merleau-Ponty

[...] si peu que nous sachions du monde environnant historique des premiers géomètres, il est toutefois certain [...] que c'était un monde de choses (parmi lesquelles les hommes eux-mêmes en tant que sujets de ce monde).

Edmund Husserl

Dans ce chapitre, nous étudions la perception de la forme, des symétries et des dimensions des objets indéformables, d'abord plans, puis à trois dimensions. Nous montrons aussi comment la perception des symétries provoque un sentiment esthétique élémentaire.

1 La constitution mentale des objets

Le monde environnant contient une foule d'objets indéformables (sauf si on les sollicite trop violemment[1]) et qui peuvent occuper des positions diverses par rapport à nous. Dans notre recherche sur les origines de la géométrie, nous nous occupons d'abord de tels objets et non, comme nous l'avons dit dans l'introduction, de figures immobiles ou de parties de l'espace.

Au départ se trouve nécessairement la question : comment reconnaissons-nous qu'un objet *conserve sa grandeur et sa forme*, bien que *son apparence change* selon les positions qu'il occupe par rapport à nous ? Merleau-Ponty [1945] essaye de répondre à cette question principalement pour les objets plans d'une taille telle que le regard peut les embrasser lorsqu'ils sont amenés de-

[1] Cette simple affirmation renvoie au paradoxe suivant : comment sait-on qu'un objet est indéformable ? En pratique, on vérifie que ses mesures ne changent pas. Mais pour vérifier cela, on doit disposer d'un instrument de mesure, une règle graduée par exemple, et celle-ci pour être utile doit nécessairement être indéformable. On peut, en demeurant au plan du bon sens, ne pas se préoccuper de ce cercle vicieux. On peut aussi, en suivant Hans Freudenthal [1983], décréter qu'il existe des transformations (et des transports) d'objets que l'on qualifie de *douces* (des *gentle transformations*), qui par définition ne déforment pas les objets. Nous suggérons au lecteur de ne pas s'inquiéter à ce sujet.

vant l'observateur en position frontale, à distance de toucher. La grandeur et la forme objectives de l'objet seraient celles que nous lui attribuons dans cette position privilégiée[2].

Mais qu'est-ce que la constance de cette forme et de cette grandeur à travers la variation des apparences ? Pour chaque objet, ce *système d'apparences* liées aux conditions de sa présentation est un système structuré, et la constance de cette structure s'identifie à ce que nous appelons la constance de la grandeur et de la forme.

Par exemple, dit Merleau-Ponty, « si je tiens mon porte-plume près de mes yeux et qu'il me cache presque tout le paysage, sa grandeur réelle reste médiocre, parce que ce porte-plume qui masque tout est aussi un porte-plume *vu de près*, et que cette condition, toujours mentionnée dans ma perception, ramène l'apparence à des proportions médiocres. »

À l'opposé, si on me présente un objet tout nouveau pour moi, un objet comme je n'en ai jamais vu de semblable, il se réduit dans l'immédiat à sa seule apparence présente. Il n'atteindra pour moi son existence objective que lorsque j'aurai intégré en un tout cohérent l'ensemble de ses aspects possibles[3].

Par ailleurs, expliquer ainsi la perception objective des objets solides, c'est faire de cette perception une analyse a posteriori où sont engagés les concepts scientifiques de distance et d'orientation. Mais ce n'est pas par cette voie argumentée que se constitue la perception objective elle-même. C'est plutôt par l'expérience vécue des diverses perceptions et leur organisation, cette dernière se situant à un niveau *prélogique*[4].

[2] Nous utiliserons beaucoup dans la suite cette notion de *position privilégiée*. Elle est définie ici en première approximation. Nous la préciserons à la section 2.

[3] Pour approfondir cette question de la constance de la grandeur et de la forme, la citation suivante de Merleau-Ponty n'est sans doute pas superflue. « Une forme ou une grandeur seulement apparente, écrit-il, est celle qui n'est pas encore située dans le système rigoureux que forment ensemble les phénomènes et mon corps. Aussitôt qu'elle y prend place, elle retrouve sa vérité, la déformation perspective n'est plus subie, mais comprise. L'apparence n'est trompeuse et n'est apparence au sens propre que quand elle est indéterminée. La question de savoir comment il y a pour nous des formes et des grandeurs vraies, objectives ou réelles se réduit à celle de savoir comment il y a pour nous des formes déterminées, et il y a des formes déterminées, quelque chose comme « un carré », un « losange », une configuration spatiale effective, parce que notre corps comme point de vue sur les choses et les choses comme éléments abstraits d'un seul monde forment un système où chaque moment est immédiatement significatif de tous les autres.

« Dans toutes ses apparences, l'objet garde ses caractéristiques invariables, demeure invariable lui-même, et il est objet, parce que toutes les valeurs possibles qu'il peut prendre en grandeur et en forme sont d'avance renfermées dans la formule de ses rapports avec le contexte. Ce que nous affirmons avec l'objet comme être défini, c'est en réalité un *facies totus universi* qui ne change pas, et c'est en elle que se fonde l'équivalence de toutes ses apparitions et l'identité de son être. »

[4] Voici comment Merleau-Ponty s'exprime à ce sujet. Pour moi qui commence à saisir la constance d'un objet solide, « la distance de moi à l'objet n'est pas une grandeur qui croît ou décroît, mais une tension qui oscille autour d'une norme ; l'orientation oblique de l'objet par rapport à moi n'est pas mesurée par l'angle qu'il forme avec le plan de mon visage, mais éprouvée comme un déséquilibre, comme une inégale répartition de ses influences sur moi ; les variations de l'apparence ne sont pas des changements de grandeur en plus ou en moins, des distorsions réelles : simplement, tantôt ses parties se mêlent et se confondent, tantôt elles s'articulent nettement l'une sur l'autre et dévoilent leurs richesses. Il y a un point de maturité de ma perception qui satisfait à la fois à ces trois normes et vers lequel tend tout le processus perceptif. »

Le fait de parler d'un niveau prélogique n'implique toutefois pas que la personne soit passive. Elle n'absorbe pas un flot de perceptions advenant au hasard. Que faisons-nous en effet pour connaître un objet ? Nous exécutons diverses manœuvres, dont certaines sont purement réflexes, et d'autres plus ou moins consientes et volontaires. Nous dirigeons notre regard vers l'objet . Nous l'éloignons ou le rapprochons de nous (ou bien nous nous éloignons ou nous rapprochons de lui) pour qu'il apparaisse dans notre champ de vision claire, ni trop grand, ni trop petit. Nous ajustons la courbure de nos cristallins pour donner de la netteté à l'image. Nous réglons le diamètre de nos pupilles pour obtenir un éclairage adéquat. Nous faisons pivoter l'objet pour qu'il vienne en position frontale. Nous le tournons encore pour situer le cas échéant un de ses axes de symétrie dans le plan de symétrie de notre appareil visuel. Nous le retournons pour en considérer l'autre face. Toutes ces manœuvres amènent en outre à identifier au passage des perceptions et des souvenirs de perceptions. Le temps intervient ici.

Les changements de position de l'objet par rapport à nous et les changements correspondants de la perception sont continus, ce qui contribue à assurer l'identité de l'objet perçu. Comme l'écrit R. Arnheim [1976] : « Dans la perception, les divers aspects d'un objet, loin de constituer une « déroutante variété », s'enchaînent en séquences continues. Ce sont plus qu'une multitude de cas éparpillés au hasard, des transformations progressives. » Et il conclut : « L'identité n'a donc pas à être extrapolée au hasard[5]. »

Qui plus est, les actions qui contribuent à la constitution mentale de l'objet s'enchaînent et se coordonnent non pas au hasard, mais guidées par une intention de connaître. On cherche entre autres le point de maturité, la position privilégiée dont parle Merleau-Ponty.

Il s'agit là d'une forme d'intelligence, ce qui est la thèse principale de R. Arnheim [1976], intelligence non pas déductive, mais au moins discursive puisqu'elle procède par étapes enchaînées. Elle est proche de l'intelligence des situations en ce qu'elle coordonne des perceptions et des mouvements, non des idées[6]qui procède par étapes enchaînées, et il ne se réfère pas à l'existence du discours auquel renvoie l'étymologie du terme *discursif*. C'est en ce sens que l'on peut avec Merleau-Ponty parler d'un « niveau prélogique ».

Merleau-Ponty ajoute encore un peu plus tard : « La constance des formes et des grandeurs dans la perception n'est donc pas une fonction intellectuelle, mais une fonction existentielle, c'est-à-dire qu'elle doit être rapportée à *l'acte prélogique* [nous soulignons] par lequel le sujet s'installe dans son monde. »

[5] Arnheim ajoute une observation significative à propos de l'environnement de l'objet perçu : « Les variations de chaque objet sont non seulement organisées entre elles, mais encore liées de façon ordonnée à d'autres variations similaires qui se produisent simultanément dans le reste du champ visuel. Ainsi, quand l'observateur se meut dans un milieu donné, les tailles projectives de tous les constituants de ce milieu se modifient à l'avenant. Le milieu dans son ensemble est sujet à un changement de taille unifié, logique. » Nous verrons plus tard en outre (cf. chapitre 4) que la continuité des perceptions contribue de manière importante à la formation des raisonnements géométriques.

[6] Sur les notions d'*intelligence discursive* et d'*intelligence des situations*, voir H. Wallon [1970].

2 Reconnaître la congruence ou la similitude

Dans la première section, nous avons cherché à voir comment nous connaissons et arrivons à connaître un objet. Mais nous n'avons envisagé qu'un objet quelconque. Autrement dit, nous n'avons pas pris en compte le rôle joué dans ce processus par les diverses formes possibles des objets.

Or notre environnement – minéral, végétal, animal, humain, manufacturé – est peuplé d'objets présentant des régularités, possédant des symétries. Nous avons tendance à l'oublier à force de vivre au milieu d'eux. Or ce sont seulement ces objets qui ont permis la constitution de la géométrie. Celle-ci n'aurait pas eu de matériau dans un univers complètement désordonné.

Voyons donc maintenant comment nous arrivons à reconnaître les symétries les plus simples. Les considérations qui suivent, empruntées pour l'essentiel à Ernst Mach [1922], ont trait à la perception des objets plans congruents, mais elles se transposent sans peine à deux parties congruentes d'un même objet plan.

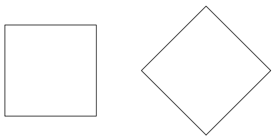


Fig. 1

Mach observe que la congruence se perçoit sans peine si les deux objets et l'observateur se trouvent dans des positions symétriques déterminées, et se perçoit mal ou pas du tout dans les autres cas[7].

« Deux formes, dit-il, peuvent être *géométriquement congruentes, mais complètement différentes sur le plan physiologique*[8], comme le montrent les deux carrés de la figure 1, dont la parenté n'est pas du tout reconnaissable sans des opérations mécaniques et[9] *intellectuelles*[10]. Un petit nombre de tests fort simples nous rendront familiers les rapports impliqués ici. Regardons une tache arbitrairement choisie (figure 2). Si nous plaçons la même tache deux ou plusieurs fois sur un rang et dans la même orientation, nous obtenons une impression particulière et agréable : nous reconnaissons sans difficulté, au premier coup d'œil, l'identité de toutes les figures (figure 3).

Fig. 2

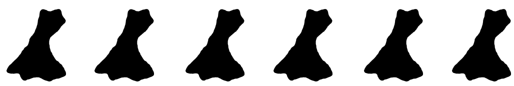


Fig. 3

[7] Mach envisage des objets plans en position frontale à distance de toucher. Les connaissances sur la perception ont progressé depuis l'époque de Mach, sans pourtant, nous semble-t-il, infirmer les observations de celui-ci. Le lecteur intéressé trouvera une porte d'entrée dans la littérature actuelle sur la perception dans J. Ninio [1989].

[8] Ici et dans toutes les citations qui suivent, c'est Mach qui souligne.

[9] Le contexte semble indiquer qu'il faudrait lire ici *ou* au lieu de *et*.

[10] Mach oppose *physiologique* à *intellectuel* (ce qui relève de l'entendement). Dans son exposé, le physiologique est principalement le visuel. Il parle aussi à cet égard de sensations *optiques*. Ce qu'il nomme sensation peut, nous semble-t-il, être interprété par *perception*, dans la mesure où son analyse prend en compte deux pôles seulement : le premier qui relève des sens, et le second de l'intellect.

Mais si nous tournons une tache par rapport à l'autre de façon suffisamment nette, leur identité de forme ne peut plus être reconnue sans l'intervention de l'intelligence (figure 4). Il est possible, en revanche, de déceler une parenté frappante entre les deux formes, lorsqu'à cette première tache on en ajoute une autre, en position symétrique par rapport au plan médian de l'observateur (figure 5). Toutefois, si le plan [l'axe] de symétrie s'écarte sensiblement du plan médian de l'observateur – comme dans la figure 6 –, l'affinité de forme n'est plus reconnaissable qu'en tournant la figure sur cet axe, ou par le biais d'*opérations intellectuelles*[11]. Si nous adjoignons à cette tache, la même tache tournée sur elle-même à 180° dans le même plan, la parenté de forme devient par contre à nouveau repérable[12] (figure 7). C'est de cette façon que l'on obtient la symétrie centrale. »

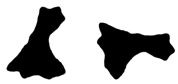


Fig. 4

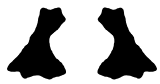


Fig. 5

Fig. 6

Mach étend ensuite son analyse aux objets semblables. Il écrit :

« Par une diminution de toutes les dimensions de la tache dans les mêmes proportions, nous obtenons une tache *géométriquement semblable*. Mais tout de même que ce qui est géométriquement congruent n'est pas pour autant physiologiquement (optiquement) congruent, et que ce qui est géométriquement symétrique n'est pas pour autant symétrique optiquement, de même ce qui est géométriquement semblable n'est pas pour autant *semblable optiquement*. Ce n'est que lorsque la tache géométriquement semblable est placée à côté de l'autre dans une *orientation identique*, qu'alors les deux paraissent *optiquement semblables* (figure 8). Une rotation de l'une de ces taches fait disparaître cette ressemblance (figure 9). Si nous substituons à l'une d'entre elles une autre tache, symétrique par rapport au plan médian de l'observateur, il se produit une ressemblance symétrique, qui a aussi une valeur optique (figure 10). Enfin, la rotation d'une figure de 180° dans son plan, qui produit une homothétie de rapport négatif [zentrisch-symmetrische Aehnlichkeit], possède encore une valeur physiologico-optique (figure 11). »

Fig. 7

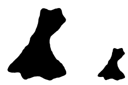


Fig. 8

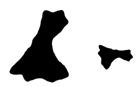


Fig. 9

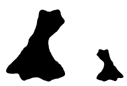


Fig. 10

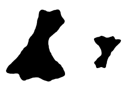


Fig. 11

Mach remarque ensuite que la plupart des situations dans lesquelles on perçoit des congruences et des similitudes sont aussi

[11] On rattache sans peine cette observation à l'expérience suivante : « En plaçant un sujet humain au centre d'une sphère sur laquelle sont fixés des disques d'égal diamètre, on constate que la constance est beaucoup plus parfaite selon l'horizontale que selon la verticale. La lune énorme à l'horizon et très petite au zénith n'est qu'un cas particulier de la même loi. Au contraire chez les singes le déplacement vertical est aussi naturel dans les arbres que le déplacement horizontal l'est pour nous sur la terre, aussi la constance selon la verticale est-elle excellente. Koffka, *Principles of Gestalt Psychology,* pp. 94 et suivantes. (Cité par Merleau-Ponty, op. cit.)

[12] Beaucoup de personnes trouvent la perception de la congruence plus difficile dans ce cas.

celles où l'œil est guidé par des parallèles effectives ou virtuelles : les couples constitués d'une droite (un segment) et de son image par une translation ou une homothétie (parallèles effectivement présentes dans la figure), ou la direction constante des droites (absentes de la figure mais empruntées par le regard) joignant les points homologues dans les translations et les symétries orthogonales[13]. Il s'agit donc d'une prégnance de la droite et du parallélisme, guidant le regard dans la reconnaissance des formes.

Il est important pour notre propos de relever clairement les trois façons de reconnaître la congruence de deux objets.

La première est la *perception* directe, et elle est possible lorsque les deux objets sont par rapport à l'observateur dans une situation de symétrie appropriée.

La seconde relève d'une *opération mécanique*. Celle-ci peut consister soit à amener le couple d'objets dans la position privilégiée où la congruence est perçue, soit plus simplement à les superposer.

La troisième passe par des *opérations intellectuelles.* Un exemple d'une telle opération est l'application d'un des théorèmes sur la congruence des triangles. Mach donne un autre exemple, qui concerne les figures semblables : « Dans les configurations géométriques semblables – écrit-il – , *toutes* les distances homologues sont proportionnelles. Mais ceci *relève de l'entendement*, non de la *sensation.* Si nous plaçons en vis-à-vis un triangle de côtés a, b, c avec un triangle de côtés $2a$, $2b$, $2c$, nous reconnaissons cette relation simple, non point immédiatement mais intellectuellement, par des mesures. Si nous voulions qu'en plus ressorte une ressemblance *optique*, il faudrait encore que les triangles soient orientés convenablement. »

Résumons notre démarche. Les objets de forme et de dimensions constantes sont les matériaux de la géométrie à ses débuts. Nous avons vu avec Merleau-Ponty comment un tel objet se constitue mentalement. En étudiant avec Mach la reconnaissance des congruences et des similitudes, nous nous sommes rapprochés de ce qu'on pourrait appeler le premier problème d'une géométrie spontanée : quand peut-on dire que deux objets ou deux parties d'un objet sont « les mêmes » du point de vue de la grandeur et (ou) de la forme, et à quoi reconnaît-on qu'ils sont les mêmes ?

Les critères perceptifs et mécaniques relèvent de la vie et de l'intelligence pratiques. On peut dire que la géométrie intervient dès que des critères intellectuels permettent *d'inférer* la congruence ou la similitude. *Mais alors que la reconnaissance visuelle ne porte jamais que sur des objets particuliers, les critères géométriques sont applicables à des catégories d'objets, des objets mentaux* (cf. chapitre 2, section 2). Vue sous cet angle, la géométrie apparaît comme un système d'instruments intellectuels qui

[13] Mach mentionne, à cet égard, les translations, mais non les symétries orthogonales.

pallie les insuffisances de la perception et permet de les dépasser. Elle étend notre connaissance des objets au delà des limites, à vrai dire étroites, de notre perception. Elle est comme un instrument d'optique qui donnerait plus de puissance à notre vue. En ce sens on peut dire qu'elle nous aide à *saisir l'espace.* Comme dit Freudenthal [1973], « la géométrie au niveau de base, c'est saisir l'espace ». En éclairant les situations spatiales, elle nous met à l'aise dans l'espace.

Toutefois, si la géométrie commence avec les opérations intellectuelles, il faut souligner avec force qu'elle se constitue sur le terrain des expériences sensorielles et mécaniques et serait impossible sans ces dernières. Mach insiste beaucoup sur cet ancrage de la géométrie dans la réalité sensible et l'action. Il écrit : « Ce sont [...] les sensations d'espace [...] qui servent de point de départ et de fondement à toute géométrie. » Et encore : « Les propriétés physiologiques ont probablement donné la première impulsion à la recherche en géométrie. » Cette affirmation nous renvoie sans doute à une préhistoire mystérieuse où les êtres humains, reconnaissant les configurations les plus symétriques et les plus simples, ont commencé à explorer plus avant l'espace à la force de leur esprit.

Mach affirme enfin que la géométrie, née sur le terrain des perceptions et du fait de leurs limitations, ne perd pas le contact avec elles. « Une géométrie scientifique, écrit-il, est impensable hors de la coopération de l'intuition sensible et de l'entendement. »

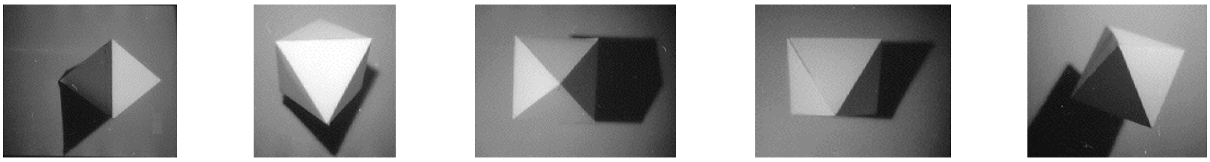
Ces affirmations ont des conséquences importantes entre autres pour les enseignements maternel et primaire. C'est sur le terrain des perceptions et de l'action que se prépare l'apprentissage de la géométrie.

Avant de passer – à la section suivante – des objets plans aux objets à trois dimensions, précisons le sens que nous attribuons désormais à l'expression : objet en *position privilégiée*. À la section 1 nous avons désigné ainsi, pour un objet plan, un position frontale dans laquelle l'objet occupe un angle de vision nette. Si l'objet possède des éléments de symétrie (parties tranlatées l'une de l'autre, axe ou centre de symétrie), nous exigerons en outre que ces éléments de symétrie soient accordés à ceux des organes de perception de l'observateur. Il n'est donc pas exclu, par exemple si un objet possède plusieurs axes de symétrie, qu'il possède aussi plusieurs positions privilégiées (en l'occurence celles dans lesquelles un axe est vertical).

3 De deux à trois dimensions

Bien que nous n'ayons parlé jusqu'ici quasiment que d'objets plans, beaucoup de nos considérations s'étendent aux objets à trois dimensions. Toutefois, ceux-ci sont plus difficiles à saisir objectivement que les objets plans. C'est ce dont nous nous occupons maintenant.

Considérons un objet à trois dimensions que nous ne connaissons pas, ou que nous ne nous attendons pas à rencontrer, par exemple l'octaèdre régulier photographié dans des positions diverses à la figure12.



(a) *(b)* *(c)* *(d)* *(e)*

Fig. 12

Dans les positions (a), (b), (c) et (d), il possède un plan de symétrie coïncidant avec celui de l'observateur. Dans les cas (a), (b) et (c), un de ses axes de symétrie est en position de bout, c'est-à-dire dirigé directement vers l'observateur. Cet axe est d'ordre 2 dans le cas (a), d'ordre 3 dans le cas (b) et d'ordre 4 dans le cas (c). En position (e), l'octaèdre est vu de côté.

Cet objet est assez simple : deux pyramides accolées par leur base carrée. Néanmoins, il offre à notre vue des aspects multiples et trompeurs. Les positions les plus symétriques par rapport à l'observateur sont aussi celles qui en donnent la vue la plus partielle. La première va jusqu'à cacher six faces sur huit ! Nous sommes loin de pouvoir, comme pour les objets plans, choisir une vue fidèle, en quelque sorte objective, liée à des conditions de symétrie.

Au contraire, c'est en regardant l'objet « de côté », en rompant l'accord de symétrie entre lui et l'observateur, que nous le découvrons le plus complètement, que nous percevons le plus complètement l'articulation de ses parties les unes sur les autres. C'est ce que montre la figure (e).

Ainsi un objet à trois dimensions n'est jamais vu complètement, ni le mieux possible. Évidemment, s'il est polyédral, on peut lui substituer le même objet réduit à ses arêtes, et alors on le voit mieux. Mais il y a des objets courbes, qui n'ont pas d'arêtes.

Toutefois, si l'objet est de dimensions modérées, on peut avec les mains tâter ses parties cachées à la vue. Parfois il est significatif de le tâter avec les deux mains, en un geste symétrique.

On le voit, la perception objective d'un objet solide, de sa forme et de sa grandeur, résulte de la constitution d'un ensemble structuré de perceptions. Mais au contraire des objets plans, cet ensemble n'est pas constitué de perceptions infidèles s'ordonnant autour d'une perception fidèle. Il est constitué de multiples perceptions particulières, visuelles et tactiles, mais alors que certaines des perceptions visuelles révèlent bien l'une ou l'autre symétrie particulière et mal l'articulation globale, d'autres montrent mieux l'articulation des parties et cachent les symétries.

En établissant un lien, en quelque sorte des filiations entre les diverses perceptions, la continuité des mouvements contribue à la structuration de celles-ci, à la connaissance géométrique de l'objet[14].

Tout ceci concerne la perception des objets à trois dimensions. Revenons au point de vue particulier de la congruence de deux objets ou de deux parties d'un objet. Dans les cas plans, lorsque la congruence était difficile à percevoir, nous avons dit que l'on recourait à des opérations mécaniques (la superposition des deux objets) ou intellectuelles. Pour les objets à trois dimensions, la superposition est généralement impossible, vu l'impénétrabilité de la matière. Tout au plus peut-on superposer deux faces de deux polyèdres pour en vérifier la coïncidence. Ainsi, si les opérations mécaniques échouent, il ne reste plus que les opérations intellectuelles.

La difficulté des perceptions et l'impossibilité des superpositions rendent l'*accès* à la géométrie de l'espace plus compliqué que l'accès à la géométrie plane. La première n'est pas plus difficile seulement parce qu'on y raisonne ordinairement sur des dessins et que ceux-ci sont infidèles, mais c'est d'abord parce que la perception des objets de l'espace eux-mêmes est le siège de difficultés propres : celles qui font que toute perception est incomplète. Même si, à la limite, on décidait d'étudier la géométrie de l'espace toujours sur des maquettes, et jamais sur des figures, d'importantes difficultés propres à l'espace seraient toujours là.

[14] Il est intéressant de rappeler que les difficultés de perception des objets de l'espace étaient pour Husserl un exemple privilégié de phénomène formant la matière d'étude de la phénoménologie. « Quelle que soit une chose de l'espace, l'expérience de celle-ci obéira à certaines contraintes invisibles au premier abord, mais saisissables si j'y réfléchis un peu : une chose dans l'espace ne peut pas être vue en entier, d'un seul coup, elle doit être appréhendée en plusieurs visions successives ; ces visions doivent être cohérentes ; chacune d'elles apporte une correction à toutes les autres. » (cité par Ph. Huneman et E. Kulich).

4 Géométrie et esthétique

> Aisthesis *fut employé par les Grecs pour évoquer une « sensation » qui est tout à la fois perception et procès de connaissance.*
>
> Encyclopédie philosophique universelle

Nous avons presque terminé[15] la partie de cette étude consacrée à la constitution mentale de l'objet ainsi qu'à la perception des congruences. Toutefois, il nous reste à traiter un point sur lequel Mach revient plusieurs fois et qui nous paraît particulièrement important, à savoir la relation – peut-être surprenante – de cette matière avec le sentiment esthétique.

Dans un des passages cités ci-dessus, Mach remarque *l'impression particulière et agréable*[16] que l'on éprouve à la vue de deux formes translatées l'une de l'autre dans un plan frontal (figure 3 à la page 20). Un peu plus loin, comme nous l'avons vu, il rattache cette impression esthétique à la constance de la direction des droites reliant chaque point remarquable d'une des deux figures à son homologue dans l'autre. Il ajoute, a contrario, que « quand l'orientation est perturbée, cette relation, et avec elle l'impression d'unité (l'impression esthétique) l'est aussi. »

Parlant de la droite, il écrit : « la *ligne droite*[17] en tous ses éléments, conserve la même direction, et excite partout *la même*[18] sensation d'espace. D'où son avantage esthétique évident. Par ailleurs, les lignes droites qui se trouvent dans le plan médian ou qui lui sont perpendiculaires bénéficient d'une situation intéressante, en ce qu'elles occupent une situation de symétrie et se comportent de la même manière par rapport aux deux moitiés de l'appareil visuel. On ressent toute autre position des lignes droites comme une distorsion par rapport à la symétrie et comme « allant de travers ». »

Des considérations de ce genre s'appliquent à toutes les situations où l'accord entre une symétrie des objets et les directions privilégiées de l'appareil perceptif entraînent la reconnaissance aisée de congruences. Ainsi ce qui est remarquable et clair sur le plan de la perception est aussi ce qui apparaît comme ordonné, un et beau. A contrario, lorsque Merleau-Ponty évoque ci-dessus la sensation de *déséquilibre*, « d'inégale répartition des influences sur moi » d'un objet orienté obliquement, n'est-ce pas à une impression inesthétique qu'il renvoie ? Et de même ce qu'il appelle le *point de maturité* de la perception renvoie à un sentiment esthétique.

[15] L'étymologie mise en exergue nous a été signalée par Michel Thomas.
[16] Nous soulignons.
[17] Mach souligne.
[18] Mach souligne.

Ces observations concernent, nous venons de le rappeler, certaines catégories particulières d'objets et de perceptions, et elles ne renvoient à aucune relation saisie intellectuellement. Elles prennent place au niveau de cette intelligence primitive (mentionnée ci-dessus) qui organise les perceptions. Elles ne concernent donc pas la beauté que l'on peut discerner dans les idées mathématiques et qui pose un problème distinct.

Néanmoins, la reconnaissance perceptive de certaines relations de forme et de grandeur se trouve *au seuil d'une emprise mentale sur l'ordre des choses*, puisqu'elle conduit à la formation des objets mentaux et des concepts (voir chapitre 2). Elle est la porte d'entrée et la condition de l'intelligibilité géométrique du monde.

Fig. 13 : la houe, velours shoowa, Congo

La valeur esthétique des congruences et similitudes reconnaissables à vue est confirmée par leur usage dans les arts. Mach en parle à propos de l'architecture, de la musique (impliquant une extension au temps des considérations ci-dessus) et plus spécialement des arts décoratifs et des arts primitifs. On trouve en abondance dans tous ces arts des effets de congruence et de répétition accessibles à la perception, mais peu ou pas du tout de structures géométriques plus compliquées, accessibles seulement à l'intelligence. C'est que les arts s'adressent à la perception d'abord, et non d'abord à l'intellect.

Certes, l'art ne se limite pas à la production d'objets symétriques simples, ou en d'autres termes, les symétries simples ne suffisent pas à produire de l'art. Mais ne peut-on pas dire qu'elles sont un des matériaux fondamentaux des arts mentionnés ci-dessus ? Et ceci même dans les œuvres les plus délicates et les plus profondes. Que l'on songe aux temples grecs, aux cathédrales, aux grandes œuvres poétiques[19] et musicales. Les quatuors de Mozart par exemple sont un entrelac de motifs et d'accords dont les répétitions et les symétries s'entendent clairement, correspondent à des translations sur l'échelle du temps et celle des fréquences, ainsi qu'à des transpositions de timbre par le passage d'un instrument à un autre.

Cette présence des symétries simples dans l'art semble bien être universelle. On la trouve abondamment, nous l'avons dit, dans les arts primitifs. La figure 13 en témoigne. On la retrouve jusque dans les œuvres contemporaines les plus libérées des contraintes qui pesaient sur les formes traditionnelles de l'art. Les exemples abondent. Contentons-nous de mentionner l'orientation parallèle des grandes touches de peinture chez Monnet et Cézanne, le rythme chez ce dernier des pommes et des baigneuses, l'usage de la droite et des concordances de directions chez les cubistes (figure 14), les symétries des structures d'inspiration végétale dans l'art nouveau (figure 15 à la page 29), l'exacerbation de la symétrie chez des peintres tels que Mondrian ou de

[19] Les règles de la métrique poétique et de la rime sont des règles de symétrie.

sculpteurs tels que Annesley (figure 16 à la page suivante). Picasso exprime la nécessité de ces formes aisément reconnaissables et qui se répondent lorsqu'il dit : « La peinture est poésie ; elle s'écrit toujours en vers avec des rimes plastiques, jamais en prose. Les rimes plastiques sont des formes qui riment entre elles ou qui créent des assonances avec d'autres formes ou avec l'espace qui les entoure[20]. »

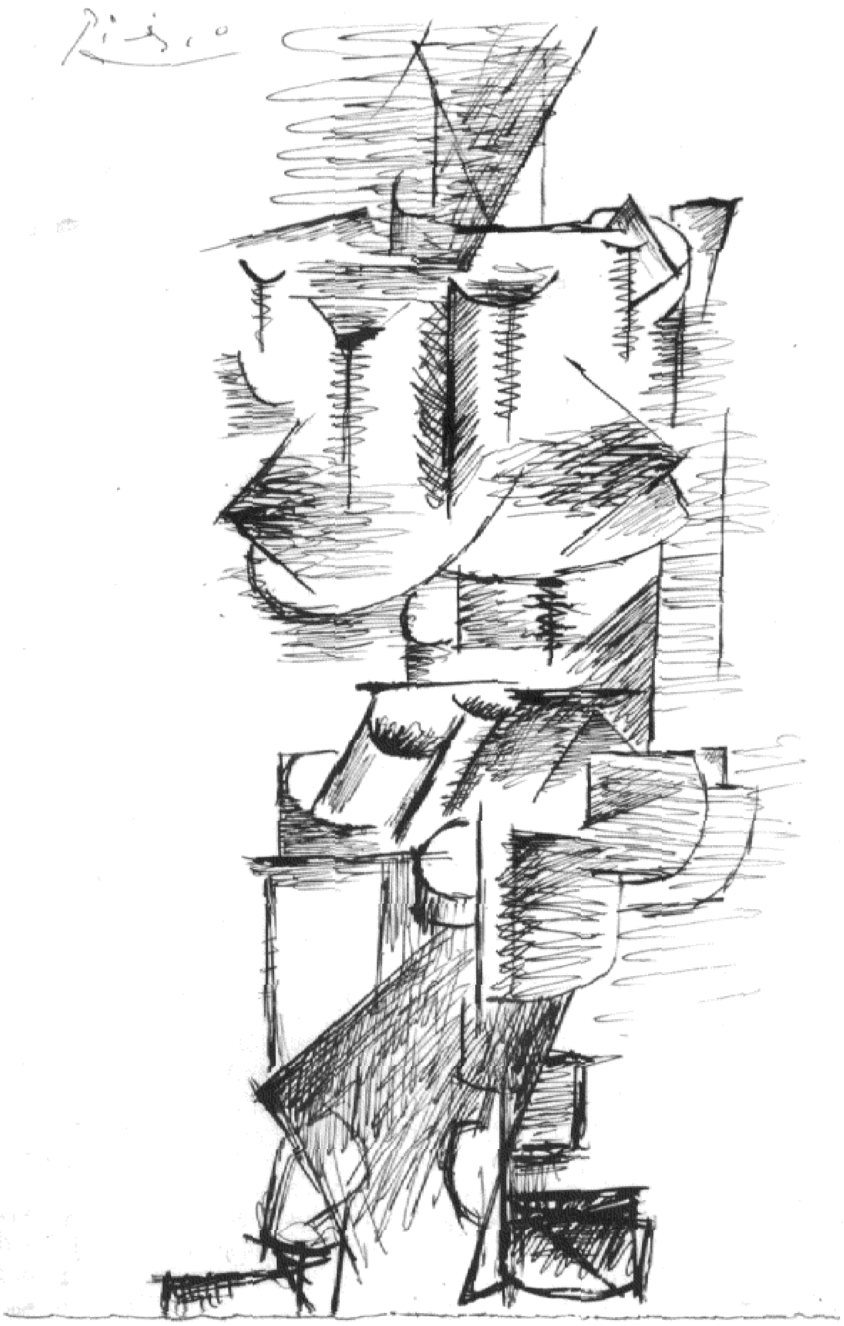


Fig. 14 : Femme debout, Pablo Picasso, 1912

[20] Cité par R. Arnheim [1976].

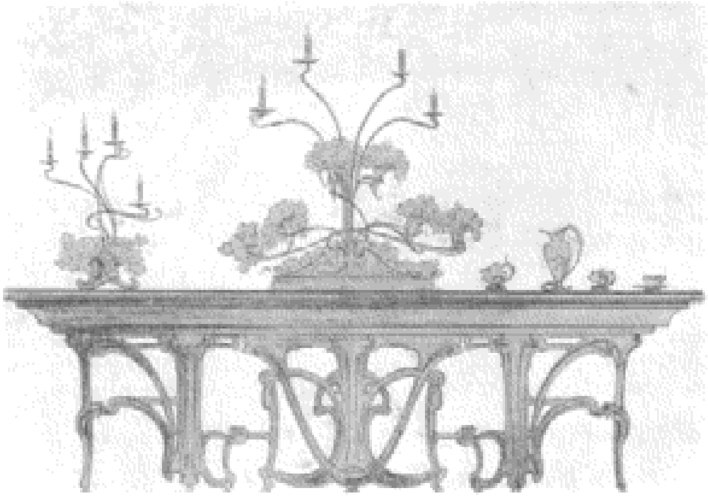


Fig. 15 : Projet pour une garniture de table, Horta, 1896

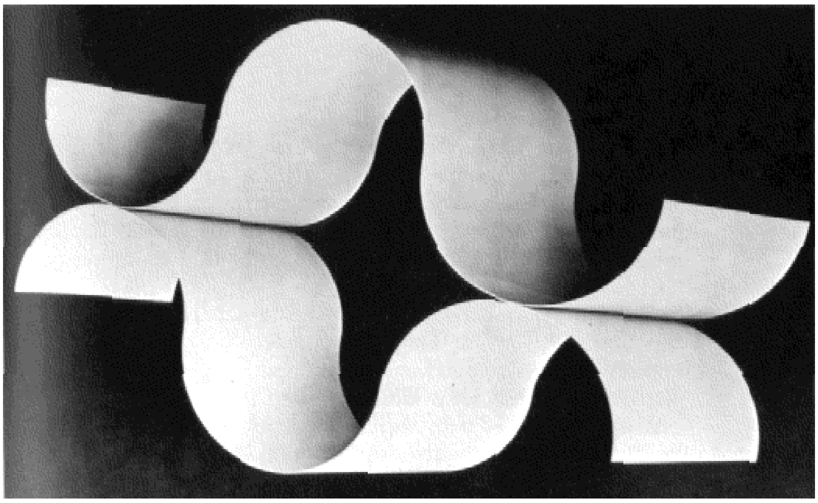


Fig. 16 : Orinoco, Annesley, 1965

Dans un tout autre domaine, le choix par un grand nombre de firmes commerciales d'un logo symétrique simple montre bien le prix que les hommes attachent à de tels objets pour la facilité et l'agrément de leur perception. Autre exemple, les symboles mathématiques les plus communs présentent des symétries simples :

$$+ \quad - \quad \times \quad : = \approx < > \quad \cap \cup \quad \Rightarrow \int \ \forall \ \exists$$

Bien entendu, comme nous l'avons déjà observé, la production de symétries *ne suffit pas* à la création artistique. Le génie de Mozart est d'avoir créé les éléments de telles symétries (les accords et les mélodies de base) et de les avoir organisées de cette façon qui nous touche. Mais d'autre part il se sert bien tout le temps de ces symétries simples, et celles-ci sont déjà porteuses par elles-mêmes d'un pouvoir esthétique élémentaire[21].

Nous arrivons ainsi à une conclusion dont la portée nous semble considérable. Le monde est intelligible parce qu'il est peuplé de régularités, de symétries. Or celles-ci sont aussi à l'origine d'un sentiment d'équilibre, d'un plaisir intime. Ainsi la science et l'art ont le même matériau de départ. L'un l'organise dans l'abstrait, sur le mode de la généralité, l'autre dans le concret, sur le mode de l'œuvre singulière.

Mais l'intelligibilité et la beauté sont là dès les commencements. La géométrie n'est pas belle seulement pour ceux qui l'ont longuement pratiquée, elle l'est aussi – dans un certain registre – dès sa naissance et pour tout le monde.

[21] Nous n'abordons pas ici la remarque fréquente qu'une symétrie trop parfaite nuit à l'impression esthétique. C'est une question difficile de savoir quelles transgressions mineures de la symétrie contribuent à l'effet artistique.

2

Les étapes de la conceptualisation

Se servir personnellement des choses c'est une façon de les identifier qui précède leur identification objective.

H. Wallon

Ce qui ne tombe pas sous le sens, contemple-le fermement comme présent par devant ta raison.

Parménide

Quoique centré encore sur la géométrie, ce chapitre, traitant de la maturation des concepts, contient beaucoup de considérations applicables bien au delà des frontières de la géométrie.

Reprenons le fil du chapitre 1. Nous y avons montré comment nous organisons mentalement, en un système structuré, nos perceptions d'un objet situé dans des positions diverses par rapport à nous. Cette connaissance de l'objet nous permet de le reconnaître en nous appuyant sur des perceptions particulières jouant le rôle d'indices.

Ces considérations concernaient notre relation d'être humain avec un objet à la fois, un objet singulier. Mais une telle relation a quelque chose d'exceptionnel, car dans l'immense majorité des cas, nous reconnaissons l'objet comme appartenant à une catégorie d'objets. Comme l'écrit L.S. Vygotski [1978], « Un caractère particulier de la perception humaine – et qui apparaît à un âge très jeune – est la *perception des objets réels*[1]. Il n'y a pas d'analogie à cela dans la perception animale. J'entends par là que je ne vois pas le monde simplement comme des couleurs et des formes, mais également comme un monde de sens. Je ne vois pas seulement une chose ronde et noire avec deux tiges ; je vois une horloge et je peux distinguer une aiguille de l'autre. Certains patients atteints de lésion cérébrale disent, quand ils voient une horloge, qu'ils voient quelque chose de rond et de blanc avec deux étroites bandes d'acier, mais ils ne savent pas que c'est une horloge ; de telles personnes ont perdu leur relation réelle avec les objets. Ces observations suggèrent que toute perception humaine consiste en perceptions catégorisées et non isolées. »

[1] Vygotski souligne.

Que veut dire dans cette citation *reconnaître une horloge* ? C'est savoir qu'il existe d'autres objets semblables à celui-là par leur forme ronde et par la présence de deux aiguilles, savoir la fonction de ces objets et la fonction particulière de chaque aiguille, savoir – peut-être – qu'on les appelle *horloges.* C'est donc regrouper dans sa conscience une catégorie de choses possédant des caractères en commun, une fonction, une structure communes, éventuellement une désignation commune.

Il est clair par ailleurs que les concepts sont susceptibles d'être acquis jusqu'à des niveaux divers de sophistication. C'est de ceux-ci dont nous allons nous occuper maintenant. Et quitte à schématiser très fort, nous en distinguerons trois :

1) les *préconcepts*, qui se situent essentiellement au niveau de l'action et de l'intelligence des situations[2] ;

2) les *objets mentaux* qui, pour le dire rapidement, sont les concepts sur lesquels on s'appuie dans la vie quotidienne ou dans une pratique scientifique élémentaire ;

3) les *concepts formels*, en prenant ici l'adjectif *formel* au sens d'*inscrit dans une théorie axiomatique ample.*

Nous expliquons en détail ces différents niveaux aux sections 1, 2 et 3.

En ce qui concerne les concepts géométriques les plus simples (ceux par exemple de rectangle, triangle, perpendiculaire, etc.), on ne peut pas le plus souvent en observer le premier niveau à l'état isolé[3] dans la pensée adulte, car la plupart des adultes sont au deuxième niveau, celui des objets mentaux, et certains assez rares ont atteint le niveau des concepts formels. Ou alors, il faudrait observer des adultes analphabètes.

Il serait intéressant d'étudier les stades d'acquisition, par des adultes, de classes d'objets simples quoique peu familiers[4]. À défaut d'avoir pu faire cela, nous utilisons ci-après l'exemple du rectangle[5]. Il est entendu alors que le premier niveau que nous décrivons doit être attibué à de jeunes enfants ou à des personnes qui, quoique d'âge adulte, n'ont pas atteint le développement mental ou culturel normal d'un adulte.

---

[2] Voir ci-dessous une explication de cette forme d'intelligence.

[3] Le premier niveau est toujours présent chez les adultes, mais il forme un tout avec le ou les deux niveaux suivants. Voir section 4.

[4] On imagine sans peine de telles classes. En voici un exemple. On considère un cube en tiges, et on en enlève des arêtes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une chaîne fermée de tiges. On peut faire cela de plusieurs façons. Les objets ainsi obtenus sont à la fois simples et insolites.

[5] Nous nous en tenons à ce seul exemple, mais le lecteur n'aura pas de difficulté à évoquer comme illustrations toutes sortes d'autres notions géométriques.

1 Les préconcepts

À un premier niveau[6], le rectangle est une forme *plate* que l'on rencontre souvent de face (une porte, une fenêtre,...) ou que l'on peut disposer devant soi *bien droite* (avec deux côtés verticaux). On reconnaît les rectangles à travers une perception globale : chaque rectangle en position privilégiée donne la sensation d'occuper l'espace de la même façon, la sensation que ses deux côtés verticaux exercent, comme dit Merleau-Ponty, la même influence sur la personne ; que le regard en s'élevant et s'abaissant passe sans heurt d'un côté horizontal à l'autre, etc. Il y a donc récurrence d'un type de perception.

Mais en outre le rectangle est utilisé dans des actions, dont certaines le déforment[7]. En voici quelques exemples :

> plier le rectangle en deux de sorte qu'une moitié recouvre exactement l'autre ; faire cela de deux façons ;
>
> le plier en quatre ;
>
> le plier en trois de manière approximative, comme on plie une lettre pour la glisser dans une enveloppe allongée ;
>
> le plier suivant une diagonale en remarquant que les deux moitiés ne se recouvrent pas, mais que le rectangle plié constitue une forme symétrique ;
>
> paver le plan avec des copies d'un même rectangle ;
>
> assembler des rectangles pour faire une boîte parallélipipédique ;
>
> déformer un rectangle constitué de tiges articulées de manière à obtenir divers parallélogrammes.

Bien entendu il ne s'agit là que d'exemples, et de plus l'expérience du rectangle varie d'une personne à l'autre.

Quelqu'un qui se trouve à ce stade de développement mental manie donc familièrement le rectangle, et éventuellement le nomme. Mais il n'est guère capable d'en parler, d'expliquer certains de ses caractères ou des phénomènes dont il est le siège. Si, à propos d'un objet rectangulaire particulier, on lui demande « c'est quoi ? », il répond volontiers : « c'est pour ... ». Si on lui demande « c'est comment ? », souvent il mime le rectangle avec les mains ou dessine un rectangle. Il y a là un décalage – surprenant pour un observateur non averti –, entre une connaissance élémentaire certes, mais pertinente au niveau de l'action, une connaissance *qui fonctionne*, et une grande incapacité ou maladresse dans l'expression.

Nous retenons pour désigner une notion qui fonctionne de cette manière, la dénomination de *préconcept*[8].

---

[6] Nous n'envisageons pas ici les concepts primitifs dont parle par exemple L. Vygotski [1997]. Observés surtout chez les petits enfants, ils regroupent des objets ayant entre eux des liens parfois fortuits, et qui en tout cas ne se réduisent pas à un ensemble de caractères communs.

[7] Nous dépassons donc ici la catégorie des objets rigides, à laquelle nous nous étions limités au chapitre 1.

[8] L.S. Vygotski [1997] appelle *concepts potentiels* ces concepts dont la connaissance se manifeste dans l'action, mais non dans l'analyse, les explications.

On le voit, les préconcepts fonctionnent dans le cadre d'une intelligence essentiellement pratique, appelée aussi *intelligence des situations*. H. Wallon [1970] parle de « cette intelligence qui fait ses preuves sans se formuler autrement qu'en trouvant la solution appropriée à chaque situation ... » Il suggère que cela aurait du sens de l'appeler *intelligence spatiale*, ce qui tend à montrer son importance dans l'acquisition de la géométrie. Mais en définitive, il l'appelle *intelligence des situations.* Il ajoute qu'elle s'observe dans « des actes qui impliquent une intuition variable et appropriée des circonstances, à laquelle il serait difficile de contester le titre d'intellectuelle[9]. Se rencontrant [...] chez l'enfant et, d'ailleurs, chez les hommes de tout âge, il y a en eux quelque chose d'immédiat, qui les rend irréductibles à la connaissance et aux formules du raisonnement. »

On nous objectera peut-être que l'intelligence des situations porte avant tout sur des objets d'usage quotidien tels qu'une feuille de papier, un fiche, une planche, une fenêtre, plutôt que sur un type d'objets déjà plus abstrait comme le rectangle. En parlant du rectangle, nous avons voulu désigner des réalisations de cette forme qui, tout en étant des objets d'usage, se prêtent à des manipulations comparables.

2 Les objets mentaux

À un deuxième niveau, le rectangle s'installe davantage dans la *conscience* et le *langage*, également dans la *volonté de connaître.* Il est non seulement utilisé et nommé, mais encore on peut *parler* des côtés horizontaux et verticaux, de l'égalité des côtés, des angles droits, du fait qu'on peut plier le rectangle en deux de sorte qu'une moitié recouvre exactement l'autre, et d'autres propriétés analogues. La capacité de parler des propriétés du rectangle et des phénomènes dont il est le siège implique la maîtrise d'un langage approprié, pas nécessairement le langage mathématique consacré[10], évoquant et mettant en relation des parties ou des éléments de la figure : des moitiés superposables, des diagonales égales et se coupant en leur milieu, des médianes perpendiculaires, etc.

Ce niveau de connaissance du concept peut être plus ou moins développé, selon l'expérience de la personne, et en particulier selon son parcours scolaire. Les connaissances en question ont leur source dans les expériences sensori-motrices présentes au niveau précédent. Mais elles manifestent un degré d'organisation mentale plus complexe. Celui-ci caractérise ce que Wallon appelle l'*intelligence discursive,* celle qui « dans l'action, s'exprime par

[9] Vygotski [1997] affirme que « la forme primaire de l'activité intellectuelle est la pensée active, pratique, dirigée vers la réalité et représentant l'une des formes fondamentales d'adaptation aux conditions nouvelles, aux situations changeantes du milieu extérieur. »

[10] Toutefois, par raison de simplicité, nous nous exprimons ci-après dans ce langage : nous parlons des *diagonales*, des *médianes*, etc.

des consignes ; dans la perception, par des énumérations, des remarques, des associations ; qui a pour référence constante des mots ; dont le langage, exprimé ou intime, est le substrat indispensable ; où chaque notion correspondante est stabilisée ; où la diversité des effets tient à la diversité des combinaisons entre éléments qui doivent rester constants ; où chaque espèce de relations tend vers une formule explicite. »

L'intelligence discursive se manifeste communément dans la pensée quotidienne des adultes ainsi que dans la pratique scientifique débutante, que ce soit en mathématiques ou ailleurs. En suivant Freudenthal [1983], nous appelons *objets mentaux* les concepts mobilisés à ce niveau de l'activité intellectuelle.

Comparés aux concepts formels[11], les objets mentaux ne sont pas appropriés à la construction d'une théorie de longue haleine. Ils sont d'une généralité et d'une efficacité modérées. Néanmoins, ils sont déjà des instruments efficaces d'organisation de l'environnement et de certains champs de phénomènes qu'on y observe communément. Ils sont utilisables dans des inférences. Leur manque éventuel d'univocité logique nuit peu à l'exercice de la pensée, dans la mesure où celle-ci ne produit pas de raisonnements longs et où elle compense les ambiguïtés par des recours au contexte et par tous les correctifs qu'apporte l'expression orale et gestuelle.

3 Les concepts formels

Toujours en schématisant, passons maintenant à un troisième niveau, celui des mathématiques constituées. Là le rectangle n'est plus, comme les rectangles de notre environnement familier, un objet que l'on peut aborder, dont on peut se servir et auquel on peut réfléchir *sans préalable*. Il apparaît à sa place dans le déroulement d'une théorie, place variable selon les axiomes que l'on se donne. Par exemple, dans une axiomatique de géométrie synthétique comme celle de Hilbert, on n'arrive au rectangle qu'après avoir construit une théorie des points, droites et plans, des relations d'incidence et de congruence, des angles, de l'orthogonalité, etc. Le rectangle conceptualisé dans ce cadre nouveau répond à une définition très technique. Les connotations techniques de la définition ont moins pour objet de dire ce qu'est précisément le rectangle que de permettre son usage dans des démonstrations qui ont, elles aussi, leur part de technique. À ce stade, le rectangle ne peut plus être manié que selon des règles strictes, aucun énoncé de propriété n'étant légitime sans preuve, toute preuve devant s'appuyer seulement sur des propriétés déjà démontrées. Le rectangle apparaît comme un épisode d'une entreprise intellectuelle exigeante et de longue haleine.

Dans le cadre de cette étude, nous avons décidé d'utiliser,

[11] Voir section 3 pour le sens que nous attribuons à cette locution.

pour désigner ce type de concepts, la locution de *concepts formels*[12].

Les objets mentaux sont différents des concepts formels. Il existe entre les uns et les autres des seuils qui tiennent à divers facteurs. L'un d'entre eux est évidemment leur technicité, que l'on ne trouve pas, ou pas à ce degré, dans les objets mentaux. Mais un autre facteur est que pour prendre leur place dans la théorie, les concepts qui ont des racines dans le quotidien voient leur sens biaisé, renvoient à des objets transformés, des objets dont la nature même est parfois différente. C'est le cas par exemple lorsque pour répondre à des nécessités des démonstrations, on passe de certains objets à des classes d'équivalence de ces objets.

L'apprentissage des mathématiques consiste en un certain sens à passer, parce que cela s'avère nécessaire pour répondre aux questions que l'on se pose, des préconcepts aux objets mentaux, puis éventuellement aux concepts formels[13].

4 La plénitude des concepts

Nous venons de décrire schématiquement trois niveaux dans la formation des concepts. Mais il ne faudrait pas croire que dans le parcours d'apprentissage de la géométrie – ou plus généralement des mathématiques – chaque niveau à partir du second remplace les précédents. Au contraire, chaque niveau intègre les niveaux antérieurs en une totalité de sens. Il n'y a pas par exemple d'objet mental qui ne doive une bonne partie de sa substance aux expériences sensori-motrices relevant de l'intelligence des situations ; il n'y a pas davantage de concept formel de rectangle qui n'ait ses racines dans le préconcept de rectangle et dans l'objet mental rectangle. Les trois niveaux des concepts sont sollicités dans la pensée mathématique créative. Les deux premiers sont surtout sources d'images et d'intuitions, le dernier fournit des instruments de la rigueur.

En prenant l'exemple de la *droite*, F. Gonseth [1936] a clairement exprimé cette intégration des niveaux conceptuels. Il écrit[14] :

« Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une for-

[12] Il est parfois difficile de choisir un terme qui satisfasse tous les lecteurs. Nous espérons que personne ne nous prêtera l'opinion que les concepts mathématiques auraient pour principal – voire pour seul – caractère, d'être formels. Cette opinion tendrait à faire croire qu'en mathématiques la forme prime le fond, ce qui est heureusement le contraire de la vérité.

[13] On trouvera dans R. Bkouche *et al.* [1991] une analyse plus fouillée de ces seuils qui séparent les objets mentaux des concepts formels. La distinction entre ces deux catégories de concepts est d'une grande importance pratique et sociale. H. Freudenthal [1983] remarque que la plupart des élèves auxquels on essaie d'inculquer les concepts formels sans passer d'abord par les objets mentaux, n'en comprennent ni le sens ni la portée et qu'ils quittent l'école plutôt déformés que formés. Par contre, ceux qui ont travaillé au niveau des objets mentaux quittent l'école avec un bagage significatif, même s'ils n'ont pas eu l'occasion de pousser leur apprentissage jusqu'aux concepts formels.

[14] Les trois niveaux identifiés par Gonseth ne coïncident pas exactement avec les nôtres. En particulier à son deuxième niveau, la droite de la géométrie grecque, représentée essentiellement par Euclide, est déjà une droite dont les propriétés sont postulées axiomatiquememt au départ d'une théorie de grande ampleur.

me donnée une fois pour toutes et un contenu *ne varietur*. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés : une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions « droit devant soi » ou « sans incliner ni à droite ni à gauche ». Le second avatar peut-être placé sous le signe de la géométrie grecque, tandis que le troisième est celui de la relation logique. Il n'est pas vrai que le dernier remplace les précédents et les détruise. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance. »

« Au contraire, même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept de droite continue à vivre parallèlement de ses existences antérieures. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes. »

S'il est vrai que cette intégration des niveaux conceptuels est nécessaire au plein exercice de la pensée mathématique, à la collaboration harmonieuse et efficace de l'imagination et de la logique, alors il est évident sur le plan pédagogique que les trois niveaux doivent être exercés, ce que certaines formes d'enseignement négligent.

D'autre part, la connaissance des trois niveaux est particulièrement utile aux enseignants lorsqu'elle leur permet d'identifier chez un élève un déficit de l'un des niveaux et de comprendre par là des difficultés que celui-ci rencontre.

5 Les objets mentaux de base

La pensée discursive, celle qui s'exprime en termes d'objets mentaux, organise des champs de phénomènes – selon l'expression de Freudenthal –, décrit, explique, analyse. Or il n'est pas d'analyse qui ne s'appuie sur des éléments ultimes, ceux qui sont au principe des explications.

Par exemple, l'analyse du rectangle et les explications qui le concernent s'appuient sur ces *objets mentaux de base* que sont les côtés (des segments), les sommets (des points), les angles, les diagonales (des segments), les médianes (des segments), le parallélisme des côtés (une relation), l'orthogonalité des angles (une relation, qui possède elle-même une relation avec le parallélisme).

Les points, les segments, les angles, les parallèles, les perpendiculaires,... sont les éléments les plus simples auxquels aboutissent forcément toutes les analyses du rectangle. Dans le mouvement régressif qui s'efforce de ramener le complexe au plus simple, il faut bien s'arrêter quelque part. Comme le souligne Vygotski, il importe de s'arrêter à des éléments qui font encore sens dans l'ordre des questions que l'on se pose. Or les points, segments, angles, parallèles et perpendiculaires sont bien les figures et relations élémentaires grâce auxquelles on recompose le rectangle de façon visible et intelligible. Par comparaison, il serait inapproprié de vouloir, au moins à un niveau élémentaire, reconstruire les figures ordinaires comme des ensembles de points. Avec son crayon et sa règle, on ne dessine pas des ensembles de points. Et on sait qu'il a fallu plus de deux millénaires à l'humanité pour construire de manière intelligible, quoique bien compliquée, un bout de droite continu avec des points[15].

Les éléments auxquels on ramène l'explication des figures géométriques simples, et en particulier des rectangles, tirent leur sens d'expériences sensorielles et psychomotrices fondamentales.

Par exemple, le *segment de droite* renvoie dans le quotidien à un certain type de figure bornée que l'on parcourt en marchant droit devant soi ou qui est représenté par une ficelle tendue, un pli sur une feuille, le bord d'une table, un rayon de soleil, une baguette qui vue de bout apparaît comme un point.

Par exemple encore, un angle dans le quotidien renvoie à une figure plus ou moins pointue qui apparaît au coin d'une table ou d'une rue, au coin d'une pièce d'habitation, à la rencontre de deux plis d'une feuille de papier, à la bifurcation d'une branche d'arbre, à un brusque changement de direction dans un parcours, etc.

Ces éléments simples sont ceux à partir desquels il est possible de construire une géométrie naturelle, ce que nous tenterons dans la deuxième partie de cette étude.

Par comparaison, les composants ultimes des géométries constituées axiomatiquement de manière globale sont le plus souvent parents de ces objets mentaux de base, mais comparés à eux, ils ont acquis une forme clairement idéalisée (la droite comparée au segment, l'angle formé de deux demi-droites (infinies) issues d'un point, etc.).

6 En extension et compréhension

Examinons maintenant une autre modalité de la formation des concepts. Un concept renvoie à un ensemble d'objets – le terme *objet* étant pris au sens le plus large – possédant des caractères communs. Il s'avère essentiel pour la suite de ce travail de se demander sous quelle forme un tel ensemble est saisi par l'esprit.

Pour voir clair dans cette question, commençons par un rappel. On sait qu'il y a, sur le plan mathématique, deux façons de définir un ensemble. La première est d'en énumérer les éléments.

[15] Vygotski donne pour exemple de réduction d'un ensemble de phénomènes à des éléments sensés, l'explication des propriétés de l'eau à partir de ses molécules (dont chacune est « un petit peu d'eau »), et non à partir de ses atomes, qui ne nous donnent que deux gaz incomparables à l'eau. C'est de la même manière qu'on explique des textes à partir des mots et non des lettres, ou la structure phonologique d'une langue à partir des phonèmes (émissions sonores élémentaires qui contribuent au sens des mots), et non des sons purs. Cette remarque et ces exemples sont caractéristiques de la forme de pensée appelée *structuralisme*

La seconde est d'énoncer les propriétés caractéristiques de ces éléments, c'est-à-dire les propriétés qu'ils possèdent tous et sont les seuls à posséder. Dans le premier cas, on dit qu'on définit l'ensemble *en extension*. Par exemple, on parlera de l'ensemble

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Dans le second cas, on dit qu'on définit l'ensemble *en compréhension*. Par exemple, l'ensemble ci-dessus est aussi défini par

$$\{\text{les nombres pairs inférieurs ou égaux à } 10\}.$$

La définition en extension devient malaisée dès que le nombre des éléments de l'ensemble est grand. Elle est impossible lorsque ce nombre est infini. Or la plupart des ensembles auxquels on a affaire en mathématiques sont infinis. Il y a une infinité de points, de droites, de triangles, de carrés, de polyèdres, de nombres, de fonctions, etc. C'est à ce point vrai que les mathématiques ont été parfois définies comme la science de l'infini. Donc, dans l'immense majorité des cas, seule une définition en compréhension est possible.

Voilà pour les définitions. Mais revenons aux façons de se saisir mentalement d'un concept. Le plus souvent, quelques objets sont rencontrés d'abord et l'on réalise, de manière imprécise et peu consciente, qu'ils se ressemblent par la fonction, la forme, ... Il y a donc d'emblée une saisie en extension partielle : des objets sont là, présents chacun, au moins dans la mémoire. Mais une première conscience se forme des propriétés qui les apparentent, et c'est là un embryon de saisie en compréhension. Au fur et à mesure que d'autres objets du même type entrent dans le champ de l'expérience, on perçoit de plus en plus l'extension du concept, mais en même temps celui-ci s'installe petit à petit dans le langage, ses propriétés se précisent et donc il progresse en compréhension. Lorsque les choses se passent ainsi, les deux modes d'appréhension progressent en parallèle et se renforcent l'un l'autre. L'apparition de nouveaux éléments de l'ensemble provoque l'observation et la formulation de propriétés, et en sens inverse la prise de conscience des propriétés provoque la recherche et l'imagination de nouveaux éléments de l'ensemble.

Mais l'élaboration mentale d'un concept ne se passe pas nécessairement de cette façon bien balancée entre l'extension et la compréhension. Lorsqu'un élève – ou un mathématicien, ou n'importe qui – rencontre la définition d'un concept nouveau pour lui, il en est momentanément réduit à le saisir en compréhension. Et il en éprouve un malaise salutaire. Il s'efforce de construire ou d'imaginer des objets, des éléments de l'ensemble. Il entame un parcours en extension, qui demeurera incomplet si l'ensemble est trop grand ou infini, mais qui apportera des intuitions utiles[16]. Une aventure possible est de découvrir que l'ensemble est vide !

[16] Il arrive qu'après avoir acquis une certaine connaissance de l'extension d'un concept, on fixe son esprit sur un

Un caractère important des concepts – nous y reviendrons longuement dans la suite – est la plus ou moins grande facilité ou difficulté avec laquelle l'imagination parcourt les éléments de l'ensemble auquel le concept renvoie. Par exemple, on se représente assez bien « tous » les rectangles , mais très malaisément et incomplètement « tous » les polyèdres à faces triangulaires. Nous le verrons, l'apprentissage de la géométrie, mais c'est aussi vrai des mathématiques en général, *démarre* au niveau des concepts qui offrent peu d'obstacles à l'imagination. Ce sont les obstacles opposés à celle-ci par les objets complexes qui obligent la pensée à s'appuyer, plutôt que sur des intuitions, sur des propriétés et des déductions.

7 Un type idéal

Pour terminer ce chapitre, revenons, pour en préciser la portée, sur ce qui en constitue l'essentiel : la distinction des trois niveaux conceptuels. Celle-ci relève d'une schématisation forte. En particulier, il existe à coup sûr des niveaux intermédiaires. Nous avons emprunté l'essentiel de notre vocabulaire à des auteurs connus, dont chacun dans son domaine est plus explicite et plus nuancé que nous. Nous nous sommes efforcés par ailleurs de respecter autant que possible le sens originel de mots tels que *intelligence des situations, intelligence discursive, objet mental,* etc.

Quoiqu'il en soit, notre schéma ne correspond fidèlement à aucune situation mentale réelle. Il est une stylisation de la réalité. Celle-ci, dans tous les cas d'espèce, est plus touffue et moins claire. Mais la distinction des trois niveaux devrait permettre d'interroger la réalité, de se poser des questions pertinentes face aux modalités concrètes de saisie des situations géométriques. En somme, notre distinction des trois niveaux est un *type idéal*[17], et en ce sens elle est moins une description de la réalité qu'un instrument d'analyse de celle-ci.

Nous pensons qu'un tel instrument est indispensable. En effet, à défaut d'avoir présent à l'esprit l'existence de niveaux de conceptualisation, ainsi que la nature de ceux-ci – fut-elle décrite sommairement – et en particulier l'existence de niveaux élémentaires de la pensée, on risque de croire que les seuls concepts, ou les seuls concepts vrais et légitimes, sont ceux des mathématiques constituées, ceux que la science authentifie. Et alors on ne comprend plus grand chose ni aux étapes de l'apprentissage, ni à la richesse de sens que dissimule la sécheresse des définitions.

élément représentatif de celui-ci, plutôt que sur une collection d'éléments diversifiés. Par exemple, pour se représenter le concept de triangle, on imagine ou dessine toujours le même triangle. Ce blocage de l'imagination peut avoir un effet négatif sur la capacité de résoudre des problèmes.

[17] Au sens du sociologue allemand Max Weber [1992].

3

Les objets géométriques : du simple au complexe

Dans le chapitre précédent, nous avons distingué trois niveaux de la conceptualisation : les préconcepts, les objets mentaux et les concepts formels. En fixant maintenant notre attention sur le niveau des objets mentaux, nous allons tenter de classer les figures géométriques selon leur richesse en symétries et leur plus ou moins grande complexité, de discerner d'une part celles qui, par leur clarté intuitive, sont le plus susceptibles de fournir les premiers objets et les premiers instruments de la pensée géométrique, et d'autre part celles qui nécessiteront des explications plus longues et des démonstrations.

1 Les objets appréhendés à similitude près

Ce qui permet d'abord d'identifier une catégorie d'objets, c'est une parenté de structure ou de symétrie *perçue.* Les régularités *perçues* jouent le premier rôle, elles font démarrer la pensée géométrique. Notre objectif est de voir par quelles étapes elles conduisent à terme aux régularités *conçues,* celles que saisit l'intellect même en l'absence de perceptions qui en témoignent directement.

Certaines catégories, comme celle des cercles ou celle des carrés (cf. la section 3 de ce chapitre) sont formées d'objets tous *semblables,* ce qui veut dire qu'ils sont de même forme et ne diffèrent entre eux que par leur grandeur. Les autres catégories au contraire sont constituées d'objets plus variés, qui peuvent différer tant par la forme que par la grandeur. Mais nous considérerons ces catégories *à similitude près.* Voyons ce que cela veut dire et pourquoi la forme apparaît souvent comme plus intéressante que la grandeur.

Lorsqu'on tient un objet plan devant ses yeux et qu'on l'écarte ou le rapproche, l'image qui s'en forme sur la rétine diminue ou grandit. Et pourtant, les mécanismes de la perception font que, si la variation des distances à l'œil n'est pas trop considérable, nous n'avons pas conscience d'une variation de grandeur[1].

[1] Voir à cet égard par exemple J. Ninio [1989], chap. XIII.

Par contre, nous sommes très sensibles à la constance de la forme. Par exemple, lorsqu'un enseignant dessine une figure au tableau et que chaque élève la reproduit dans son cahier, on a affaire à des figures distinctes, mais qui jusqu'à un certain point sont considérées comme l'objet – au singulier –, sur lequel la classe travaille. Dans le langage scolaire traditionnel, on parle d'ailleurs de *formes* (triangles, carrés, rectangles, cercles, etc.), ce qui indique que la grandeur n'est pas envisagée[2].

C'est le point de vue que nous prendrons ci-après. Sauf exception, dans notre identification d'objets mentaux, la taille n'interviendra pas, *seule la forme sera prise en compte*[3]*.* Voyons maintenant quelles sont ces premières formes dont la parenté est perçue.

2 Formes libres à symétrie simple

Repartons de la tache arbitraire de Mach. Nous avons remarqué que, sa forme étant totalement libre, elle ne renvoie à aucune catégorie d'objets géométriques. Mais il suffit de plier un papier sur une goutte d'encre fraîche[4] pour obtenir une tache de forme tout aussi arbitraire, à ceci près qu'elle possède un axe de symétrie orthogonale à l'endroit du pli (figure 1).

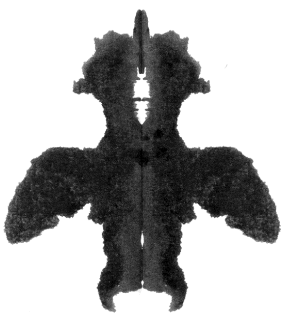


Fig. 1

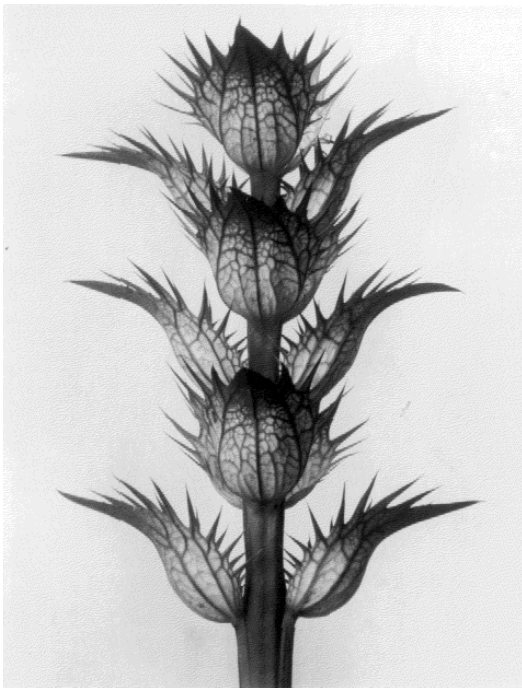


Fig. 2 : Acanthus Mollis, photographie de Karl Blossfeldt

[2] Comme l'écrit É. Borel : « Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur. » (Cité par R. Bkouche [1995])

[3] Curieusement, la similitude qui va de soi dans la perception spontanée, devient un sujet d'étude important et nullement évident dans la géométrie constituée.

[4] Comme on le fait en psychologie dans le test de Rorschach.

L'univers quotidien offre à notre perception une foule d'objets ou d'assemblages d'objets de forme libre – des formes non géométriques au sens ordinaire de ce terme – et qui pourtant manifestent une de ces symétries simples dont parle Mach : translation, symétrie orthogonale ou centrale.

On trouve des translations de motifs libres dans de nombreuses plantes, comme la figure 2 à la page précédente en donne un exemple. On en trouve dans les squelettes des vertébrés : que l'on songe à la répétition des vertèbres et des côtes des serpents. On en trouve encore dans les frises et les papiers peints, ou dans des mots tels que FROUFROU, CHICHI ou PAPA.

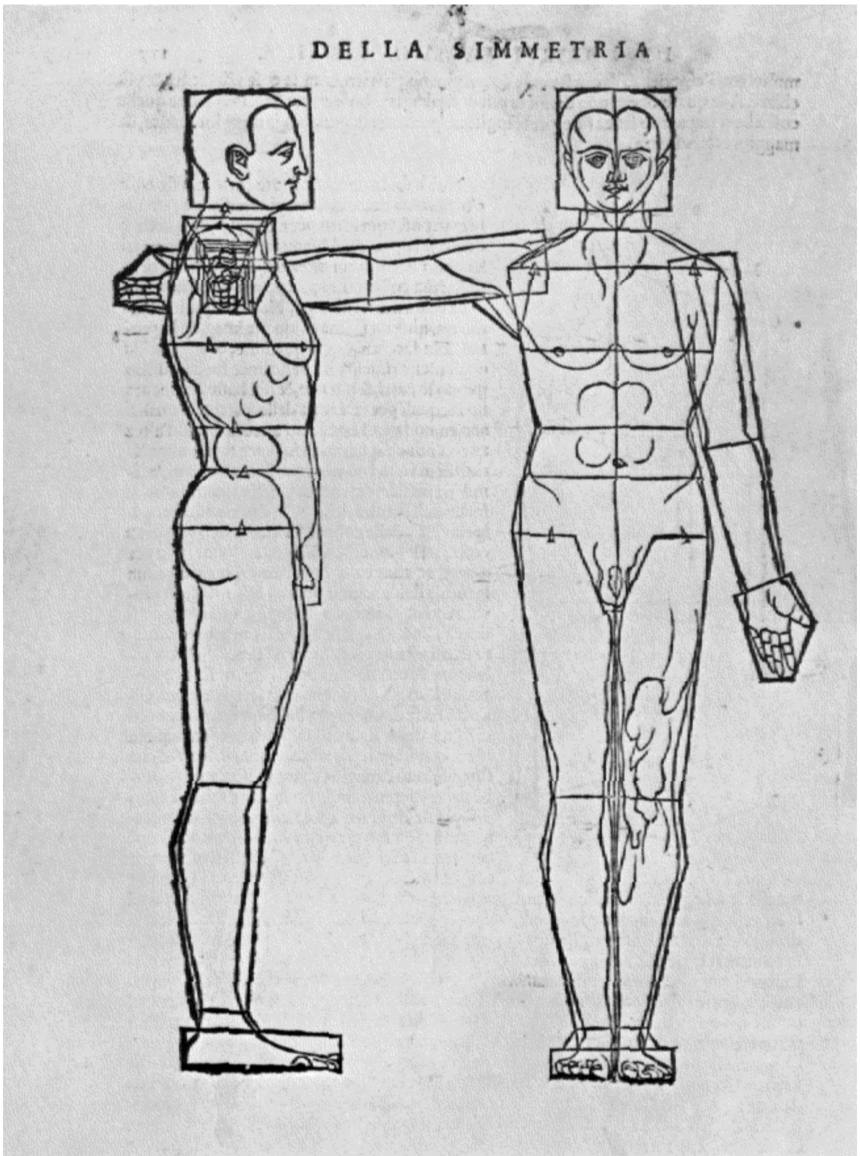


Fig. 3 : Dessin d'Albert Dürer, 1591

La figure 2 fait voir non seulement des translations, mais encore une symétrie orthogonale. Le corps humain possède, à peu de choses près, un plan de symétrie (figure 3 à la page précédente). Il en va de même de presque tous les animaux qui se meuvent : ce plan est déterminé par la verticale et la direction habituelle d'avancement. L'homme a transmis sa symétrie à une multitude d'objets tels que les brouettes, les chaises et fauteuils, les vélos, les autos, les vêtements, les paires de chaussures et de gants, etc. Les miroirs produisent des symétries orthogonales.

Les objets possédant une symétrie centrale sont plus rares. On en trouve dans ces motifs ornementaux en vogue à la Renaissance et que l'on appelle rinceaux. La figure 4 en donne un exemple.

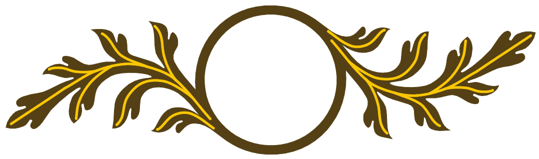


Fig. 4

À propos de tous ces objets, renversons maintenant le point de vue de Mach. Celui-ci disait : si deux formes sont transformées l'une de l'autre par une de ces symétries simples, et si en outre elles se présentent à l'observateur en situation privilégiée, alors on reconnaît sans peine leur congruence ou leur similitude. Or ce qui se passe aussi, c'est que dans les situations décrites, non seulement la congruence des figures est reconnue, mais encore le type de symétrie dont elles sont le siège est identifié lui aussi.

Une translation est reconnue comme telle, c'est-à-dire comme correspondant à un glissement d'une forme vers l'autre sans changement de direction. Les objets ou figures se présentant sous forme de parties translatées les unes des autres forment une catégorie, un objet mental, le lien entre eux étant précisément ces glissements sans changement de direction, un type de mouvement qui se retrouve dans tous.

Un objet présentant une symétrie orthogonale est reconnu aussi, en position privilégiée, moins par l'évocation du retournement (ou du mouvement de pliage) qui envoie un côté de l'axe sur l'autre et réciproquement, que par la correspondance immédiatement perçue entre ses parties gauche et droite. Les objets symétriques forment eux aussi une catégorie, un objet mental, correspondant à ce type de perception.

La parenté des objets présentant une symétrie centrale est sans doute reconnue par l'évocation mentale, pour chacun d'eux, du demi-tour qui applique l'objet sur lui-même.

Insistons, car c'est important, sur le fait que ces reconnaissance d'objets mentaux ne portent que sur les symétries simples, celles identifiées par Mach, et qu'elles exigent en outre la présentation en situation privilégiée. Les lois mathématiques plus compliquées de correspondance entre formes ne sont pas perçues, et donc ne sauraient être considérées au stade naissant de la géométrie.

Bien entendu, les symétries relevées sont toutes approximatives. C'est une observation importante sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 4.

3 Formes simples à forte symétrie

Nous venons d'examiner les objets de forme libre, souvent compliquée, mais qui possèdent une symétrie simple. Examinons maintenant les objets de forme très simple et qui possèdent une très grande symétrie (ou si on veut beaucoup de symétries, au sens mathématique du terme).

Parmi les formes planes, la plus symétrique de toutes est le rond (ou le disque, ou le cercle). On en trouve partout. Les pièces de monnaie, les assiettes, certains couvercles de boîtes, les disques de musique, les cadrans d'horloge, les roues sont ronds. Un disque roule régulièrement sur un sol plan et son point le plus haut demeure toujours à la même hauteur. Les rayons d'une roue de vélo ont tous la même longueur. On obtient des cercles en tournant une corde tendue attachée en un point, en se servant d'un compas, en coupant un saucisson, un tuyau ou un tronc d'arbre, en jetant une pierre dans l'eau, en photographiant une balle, une bulle de savon, la pleine lune, ou la terre depuis un satellite. Les enfants font des rondes, se mettent en rond pour jouer au mouchoir. On reconnaît un disque tournant autour d'un axe fixe passant par son centre au fait qu'à tout instant il occupe le même espace.

Après les disques, venons-en aux carrés. On en trouve davantage dans les objets fabriqués que dans la nature. Un grand nombre de carrelages sont faits de dalles carrées. Les élèves écrivent sur du papier quadrillé. Les cubes et les dés ont des faces carrées. Les tables à jouer et les guéridons de café ont souvent un plateau carré. De nombreuses tours ont un plan carré. Seize hommes en rangs par quatre se disposent en carré. Un carré est sans doute le parcours fermé le plus simple à commander en Logo : *avance de tant et fais un angle droit (toujours dans le même sens) quatre fois.* La position privilégiée principale d'un carré dans un plan frontal est celle où il a deux côtés horizontaux et deux côtés verticaux.

À quoi reconnaît-on le carré ? En position privilégiée, on reconnaît, en les portant mentalement l'un sur l'autre, la congruence des deux côtés verticaux, et aussi celle des deux côtés horizontaux. Mais comment reconnaître que le carré n'est pas un rectangle presque carré ? Dans les rotations d'un quart de tour que l'on tente mentalement pour vérifier la congruence de tous les côtés, la longueur de ceux-ci ne peut être tenue en mémoire pendant le transport. Le pouvoir de discrimination de ce genre de mouvement est limité.

Toutefois dans beaucoup de circonstances quotidiennes, nous identifions des formes comme carrées parce que nous sommes sûrs ou presque qu'on les a voulues telles : les carreaux d'un pavement, les cases d'un échiquier, un carton pour verre de bière, les faces d'un dé, etc.

Les paraboles constituent une classe de formes d'allure simple et qui sont toutes semblables. Toutefois, cette similitude est rarement perceptible. En effet, les paraboles étant des courbes infinies, on n'en dessine jamais qu'une partie. Les conditions pour que deux *dessins partiels* de parabole soient semblables sont rarement rencontrées.

4 Formes simples à symétrie modérée

Venons-en maintenant à des classes d'objets qui ne sont plus tous semblables entre eux. Et considérons d'abord les rectangles. La forme rectangulaire est sans doute la plus répandue dans l'environnement, au point qu'il est inutile d'en donner des exemples.

Si on partitionne l'ensemble des rectangles en classes de similitude, ce qui revient à considérer que deux rectangles sont *les mêmes* s'ils ont même proportion, alors un rectangle est déterminé par le rapport de grandeur de ses côtés. Ainsi, la classe des rectangles considérés *à similitude près* est *une classe à un paramètre*. Cette propriété est importante : elle se traduit par le fait que l'on peut représenter l'ensemble des rectangles par une vue ordonnée de certains d'entre eux, en les disposant en une seule rangée. C'est ce que montre la figure 5.

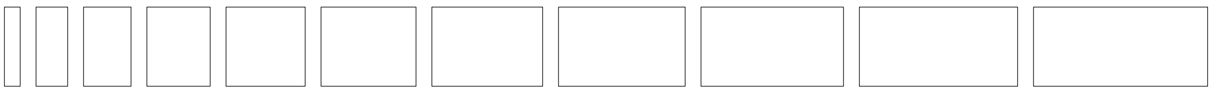


Fig. 5

Comme tout autre objet mental, la catégorie des rectangles se constitue en objet mental de deux façons : en *extension* et en *compréhension* .

Saisir la catégorie des rectangles en *extension,* c'est-à-dire en évoquant tous les rectangles (fut-ce à similitude près) est impossible, puisqu'ils sont en nombre infini. Néanmoins l'imagination s'engage sans obstacle dans un parcours de la figure 5 vers la gauche ou la droite. Elle peut la prolonger mentalement des deux côtés et la compléter par des rectangles intermédiaires. Il est vrai aussi que lorsqu'on évoque spontanément un rectangle, on n'en imagine quasiment jamais un exemplaire extrême. Comme le remarque A. Berté [1993], dès qu'un rectangle est un tant soit peu allongé, on l'appelle plus volontiers *bande* que rectangle. Et c'est d'ailleurs en réfléchissant au rectangle en compréhension que l'on peut avoir son attention attirée vers les rectangles extrêmes (ou vers le carré. . .).

Saisir les rectangles en *compréhension*, revient à les saisir à travers des propriétés caractéristiques. Mais les propriétés du rectangle sont nombreuses. Seules les plus prégnantes, celles qui s'imposent le plus facilement à l'observateur, vont jouer. Mais encore chaque observateur a-t-il sans doute sa manière de reconnaître un rectangle. Par exemple, le rectangle en position privilégiée peut être saisi par le fait qu'il a deux côtés verticaux et deux horizontaux. Ou encore parce qu'il a deux paires de côtés égaux et quatre angles droits.

Les triangles isocèles sont moins répandus que les rectangles dans l'univers familier, mais on en trouve tout de même aux pignons des maisons, aux frontons des édifices, dans la configuration que font avec le sol une échelle à deux montants égaux, ou encore les deux jambes écartées d'une personne.

Les triangles isocèles sont caractérisés, à similitude près, par le rapport de leur base à leur hauteur. Ils forment donc une classe à un paramètre. La figure 6, aisée à parcourir d'un bout à l'autre, donne une idée raisonnable de tous les triangles isocèles possibles. Une autre idée de ces triangles s'obtient à partir de l'un d'eux, dont on maintient la base constante, en faisant tendre sa hauteur successivement vers zéro et vers l'infini. Ou encore on considère une échelle à deux montants égaux : on part de la position où les montants sont joints, puis on les écarte jusqu'à ce qu'ils viennent dans le prolongement l'un de l'autre. Ce sont là trois manières de saisir le triangle isocèle en extension.

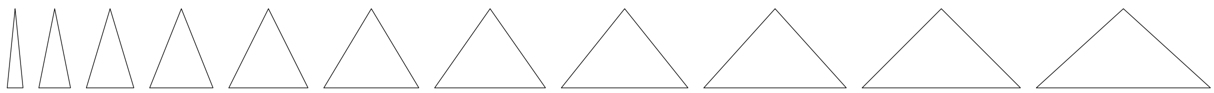


Fig. 6

Mais on les saisit aussi en *compréhension,* c'est-à-dire en en évoquant l'une ou l'autre propriété caractéristique prégnante : par exemple, en position privilégiée, l'égale inclinaison de deux d'entre eux sur la base horizontale, la propriété de symétrie orthogonale.

Considérée de même à similitude près, la classe des parallélogrammes est une *classe à deux paramètres*. Pour déterminer un parallélogramme, on doit se donner le rapport de grandeur de ses côtés adjacents, et l'angle qu'ils font entre eux. Du fait qu'il dépend de deux paramètres, le parallélogramme est une figure plus compliquée que le rectangle ou le triangle isocèle. La figure 7 à la page suivante se présente sous forme d'un tableau à double entrée. Celui-ci ne se prête pas à un parcours linéaire, comme c'était le cas pour les rectangles et les triangles isocèles. Néanmoins, il n'est pas trop malaisé à percevoir ni à imaginer. Il n'est donc pas trop difficile de saisir le parallélogramme en extension.

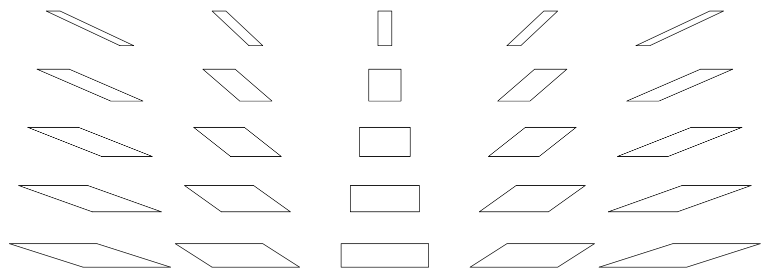


Fig. 7

Pour le saisir en *compréhension*, on évoque, par exemple, en position privilégiée, l'horizontalité et la congruence de deux côtés, l'égale inclinaison et la congruence des deux autres.

5 Objets géométriques complexes

Il est raisonnable de penser que la première géométrie raisonnée va se constituer à partir de figures simples telles que le rectangle ou le triangle isocèle, ou relativement simples comme le parallélogramme.

Mais qu'est-ce qu'une figure simple ? C'est une figure aisément accessible en extension et en compréhension, une figure dont les variétés se parcourent sans peine en imagination et dont certaines propriétés caractéristiques sont saisies facilement.

Pour montrer par contraste ce qu'est une figure simple, montrons deux sortes de figures compliquées.

D'abord on ne reconnaît pas à vue un heptagone (ou un octogone), même s'il est régulier. Il faut pour l'identifier une intervention de l'intelligence, que ce soit par comptage du nombre des côtés ou par analyse détaillée des symétries. Il en va de même pour toutes les classes de polygones réguliers comportant beaucoup de côtés.

Considérons ensuite la classe des quadrilatères. Montrons qu'elle est une famille à 4 paramètres. Soit par exemple, à la figure 8 à la page suivante, un quadrilatère quelconque $ABCD$, et soit à construire un quadrilatère semblable à celui-là. On peut se donner un côté $[A'B']$ quelconque pour correspondre à $[AB]$. Ensuite on reproduit l'angle α. On construit $[B'C']$ avec un rapport à $[A'B']$ égal au rapport de $[BC]$ à $[AB]$. On reproduit ensuite l'angle β, puis on construit le côté $[D'C']$ avec un rapport à $[B'C']$ égal au rapport de $[DC]$ à $[BC]$. Comme nous avons choisi quatre dimensions de manière arbitraire, la famille a bien quatre paramètres.

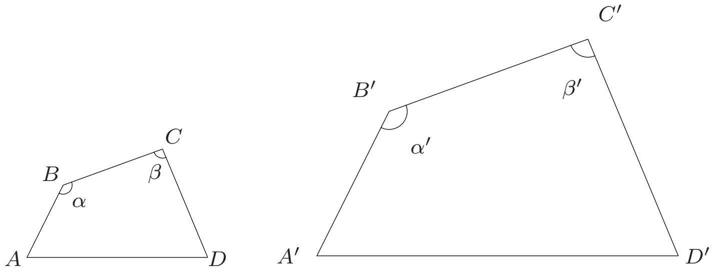


Fig. 8

À cause du nombre de degrés de liberté, des phénomènes nouveaux apparaissent, que l'on n'avait pas rencontrés dans le rectangle, le triangle isocèle ou le parallélogramme, à savoir la non-convexité et les points doubles (lorsque deux côtés se croisent).

La variété des quadrilatères défie l'imagination. La figure 9 n'en donne qu'une faible idée. On ne peut pas représenter cette famille par une figure analogue à celle que nous avons proposée pour les parallélogrammes : il faudrait ici construire un réseau de figures à quatre dimensions.

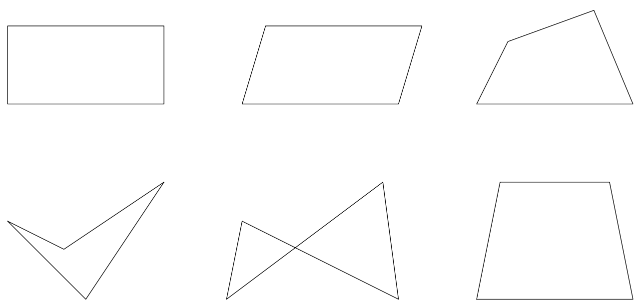


Fig. 9

Ainsi la famille des quadrilatères, aisée à saisir en compréhension (quatre côtés rectilignes enchaînés) est extrêmement difficile, sinon impossible à saisir en extension[5].

6 Le sens large

Saisir une catégorie de figures en compréhension, c'est – nous l'avons dit – en évoquer quelques propriétés caractéristiques. Mais faire cela, ce n'est pas nécessairement rattacher la figure à une définition explicitement énoncée.

À condition qu'ils nous soient présentés en position privilégiée, nous *reconnaissons* de tels objets à des indices que nous percevons et d'une façon de prime abord non intellectuelle. Nous reconnaissons un triangle isocèle à l'équilibre de sa présentation symétrique, à l'horizontalité de sa base, à l'égale inclinaison de ses

[5] La familles des paraboles, bien qu'elle ait zéro degré de liberté, est à l'opposé de celle des quadrilatères. On la saisit facilement en extension, mais non en compréhension : en effet, elle n'a pas de propriétés caractéristiques qui sautent aux yeux ; pour la caractériser on recourt à des propriétés difficiles à voir (section conique) ou théoriques (équation).

côtés égaux, sans que ces caractères aient à être formulés, fut-ce mentalement. De même nous reconnaissons un parallélogramme dont deux côtés sont horizontaux à la sensation d'égal déséquilibre que nous donnent ses deux côtés penchés et cela à nouveau sans avoir à expliciter cette sensation. En d'autres termes, pour rattacher un triangle isocèle – ou un parallélogramme – à sa catégorie, pour le reconnaître parent de tous ses congénères, nous n'avons pas besoin d'en vérifier la conformité à une définition, nous le reconnaissons à « son air de famille ».

Mais d'autre part, dès que nous réfléchissons à un tel objet, nous pouvons faire état de toute l'expérience que nous en avons et d'une foule de propriétés qu'il possède. Celles-ci s'expriment en termes de perceptions, de relations à la verticale et à l'horizontale, aux symétries de notre corps, et à toutes sortes d'expériences que nous avons de la figure en question, y compris des déformations continues. Nous avons déjà évoqué des exemples de telles expériences à propos du rectangle, en parlant de pliages, de pavages du plan, de constructions de parallélipipèdes rectangles et d'assemblages de rectangles en tiges articulées. Ce lot d'expériences s'enrichit de toutes celles où nous avons dessiné ou découpé un rectangle à l'aide d'instruments divers. Il se complète aussi de toutes les constructions que nous avons ajoutées à un rectangle et qui ont fait apparaître une figure enrichie avec des configurations et des symétries perceptibles. Par exemple :

- chaque médiane d'un rectangle le divise en deux rectangles congruents (figure 10) ;
- les deux médianes d'un rectangle divisent celui-ci en quatre rectangles congruents (figure 11) ;
- les médianes d'un rectangle sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu ;
- le rectangle possède deux axes de symétrie orthogonale. Ces deux axes sont orthogonaux entre eux.

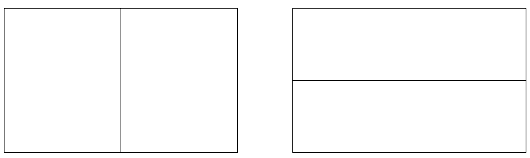


Fig. 10

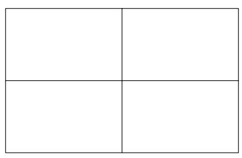


Fig. 11

Les diagonales font apparaître de nouvelles propriétés :

- chaque diagonale d'un rectangle décompose celui-ci en deux triangles rectangles congruents (figure 12 à la page suivante) ; l'un quelconque des deux est superposable à l'autre par un mouvement d'un demi-tour autour de la diagonale en question ;

– les deux diagonales décomposent le rectangle en deux couples de triangles isocèles congruents (figure 13) ; dans chaque couple, les deux triangles sont symétriques orthogonaux l'un de l'autre.

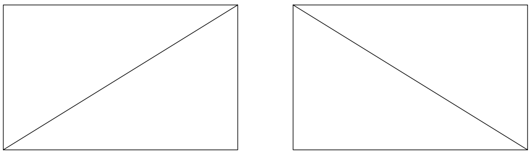


Fig. 12

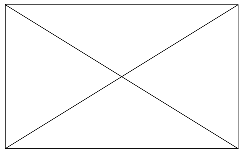


Fig. 13

Si on trace dans un rectangle les médianes et les diagonales, on obtient une nouvelle décomposition intéressante :

– les médianes et les diagonales d'un rectangle décomposent celui-ci en huit triangles rectangles congruents (figure 14).

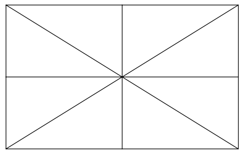


Fig. 14

Comme nous l'avons dit, toutes ces propriétés contribuent à la connaissance familière du rectangle. Cette connaissance varie et est plus ou moins riche d'une personne à l'autre. Les structurations plus complexes du rectangle n'en font habituellement pas partie. Par exemple, la plupart des gens ne pensent pas spontanément au losange que l'on obtient en joignant les milieux des côtés d'un rectangle (figure 15), et beaucoup moins encore au carré que forment les bissectrices d'un rectangle (figure 16). L'essentiel pour nous maintenant et pour ce qui va suivre, est que le rectangle possède pour chaque personne un visage familier fait d'un certain nombre de traits fondamentaux, un paquet de propriétés. Nous parlons à ce propos du *sens large* du rectangle, ou de tout autre objet mental[6].

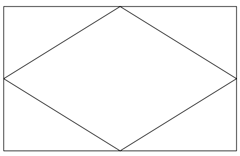


Fig. 15

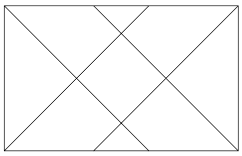


Fig. 16

Notons pour terminer que le rectangle ne se ramène pas dans l'esprit à une *juxtaposition passive* de quelques propriétés, car tout de suite on saisit des liens d'implication entre certaines de celles-ci. On sait par exemple que si on a dessiné une médiane d'un rectangle, lorsqu'on dessinera l'autre, on la trouvera perpendiculaire à la première. Et de même certaines propriétés expriment par elles-mêmes une implication, ou une causalité, ce qui est plus ou moins apparent selon leur formulation. Par exemple, *si* on coupe un rectangle suivant une diagonale, on obtient deux

[6] Sur la notion de *sens large*, voir aussi R. Bkouche et al. [1991], chapitre 8.

triangles et on peut superposer l'un à l'autre par un demi-tour autour du milieu de la diagonale. Ou encore, *si* on joint les milieux des côtés successifs d'un rectangle, on obtient un losange.

Ainsi la constitution des objets mentaux fournit immédiatement des amorces d'une pensée déductive. Nous consacrons le chapitre suivant au développement de cette pensée.

4

Des objets mentaux aux inférences

Un grand avantage de la géométrie, c'est précisément que les sens peuvent y venir au secours de l'intelligence, et aident à deviner la route à suivre.

H. Poincaré

Au chapitre 3, nous avons vu comment certaines figures, objets de la géométrie élémentaire, se constituent en objets mentaux, en catégories de figures rassemblées autour de certaines symétries ou régularités *aisément perçues*. La question qui se pose ensuite est de savoir comment se fait le passage des objets mentaux aux explications, aux raisonnements. Tel est l'objet de ce chapitre.

1 Quelques exemples d'inférences

Appuyons-nous à nouveau sur l'exemple du rectangle. Comme nous l'avons vu, nous connaissons cette figure par un lot de propriétés. Mais un rectangle est d'abord un quadrilatère : c'est là un constat minimal. Cherchons maintenant, dans le lot de ses autres propriétés, ce qui nous permettrait d'affirmer qu'un quadrilatère est une rectangle.

1.1 Deux côtés congruents perpendiculaires à un troisième

Dans un plan frontal (un tableau noir par exemple), on fait le dessin suivant (figure 1) :

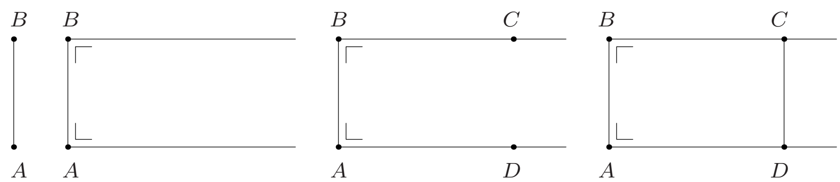


Fig. 1 (a,b,c,d)

(a) on trace un segment vertical $[AB]$;

(b) À partir de A et de B, et du même côté de $[AB]$, on dessine deux demi-droites horizontales ;

(c) on porte une même distance sur chacune de ces deux demi-droites, ce qui détermine deux points C et D ;

(d) on joint C et D ; le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Cette construction faite ou refaite – en réalité de nombreuses fois refaite en pensée – conduit à la propriété suivante :

1. *Si un quadrilatère possède deux côtés congruents perpendiculaires à un même troisième, il est rectangle.*

1.2 Trois angles droits

On réalise ensuite la construction suivante (figure 2) :

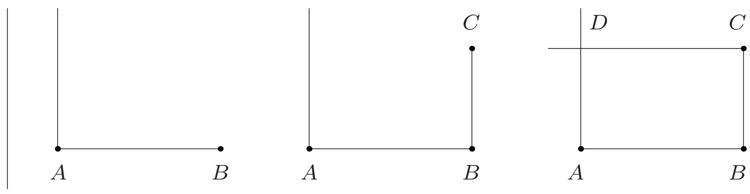


Fig. 2 (a,b,c,d)

(a) on dessine une droite verticale ;

(b) d'un point A de cette droite, on part horizontalement vers la droite et on s'arrête en un point B ;

(c) on monte verticalement jusqu'à un point C ;

(d) arrivé-là on repart horizontalement vers la gauche jusqu'à couper la droite de départ en un point D ; le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

D'où la propriété :

2. *Si un quadrilatère possède trois angles droits, il est rectangle.*

1.3 Diagonales congruentes se coupant en leur milieu

On articule en leur milieu deux tiges de longueurs égales. On dispose l'objet ainsi obtenu dans un plan frontal, de sorte que les deux tiges aient une pente égale, en deux sens opposés (figure 3a). Les extrémités A et B sont alors sur une horizontale, de même que les extrémités D et C. De même A et D sont sur une verticale, ainsi que B et C. Si on dessine le quadrilatère $ABCD$, on trouve un rectangle (figure 3b).

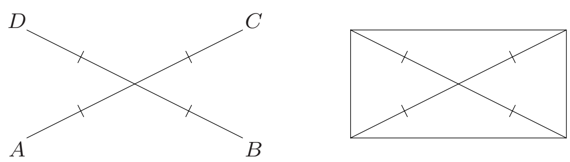


Fig. 3 (a,b)

On arrive ainsi à la propriété suivante :

3. *Si les diagonales d'un quadrilatère sont congruentes et se coupent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.*

1.4 Déformer un parallélogramme

Après avoir examiné ces trois constructions et réalisé comment chacune donne une idée de ce qui détermine un rectangle, voyons maintenant comment un mouvement continu peut aussi suggérer une détermination de la forme rectangulaire. On réalise un parallélogramme avec des tiges articulées, et on dispose devant soi de manière que deux de ses côtés soient horizontaux. Les deux autres ont un certaine inclinaison par rapport à la verticale. Mais ils sont parallèles, et qui plus est, ils le demeurent lorsque je déforme continûment l'objet. On redresse un de ces deux côtés en le faisant tendre vers la verticale. L'autre arrive à la verticale en même temps, et le quadrilatère obtenu ainsi est bien un rectangle. On arrive ainsi à la propriété suivante :

4. *Si un parallélogramme possède un angle droit, il est un rectangle.*

Ce que nous avons montré sur l'exemple du rectangle se transpose sans peine à d'autres figures simples. Voici par exemple des conditions qui déterminent triangle isocèle :

5. *Si un triangle a deux angles congruents, il est isocèle.*

6. *Si un triangle a deux côtés congruents, il est isocèle.*

7. *Si un sommet d'un triangle est sur la médiatrice du côté opposé, le triangle est isocèle.*

De même des conditions qui assurent qu'un quadrilatère est un parallélogramme sont par exemple qu'il ait deux côtés parallèles et égaux, ou encore deux paires de côtés parallèles.

Voilà quelques implications évidentes de formes telles que les rectangles, triangles isocèles et parallélogrammes. Nous nous sommes servis pour les établir des termes habituels : côté, sommet, médiane, diagonale, médiatrice, axe de symétrie, etc., tout un vocabulaire témoignant déjà de connaissances géométriques non négligeables.

Dans l'idée d'entamer une construction de la géométrie à partir des évidences les plus immédiates, exprimées dans le langage le plus sobre possible, montrons maintenant quelques exemples d'implications évidentes formulées sans recourir à d'autres termes que ceux désignant les *objets mentaux de base* tels que droite, segment, angle, perpendiculaire, parallèle, etc. (sur ces derniers, voir chapitre 2, section 5).

1.5 Une perpendiculaire et deux obliques

Considérons comme à la figure 4 une droite, un segment perpendiculaire à la droite et deux segments obliques congruents appuyés sur le segment perpendiculaire.

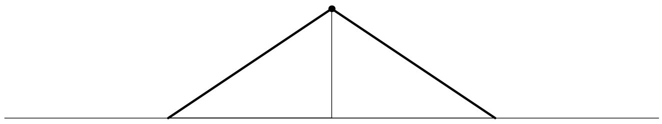


Fig. 4

Lorsque cette figure est présentée en position privilégiée, c'est-à-dire dans un plan frontal et avec la droite horizontale, on observe que les deux obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, qu'elles forment des angles égaux avec le segment vertical, et aussi avec la droite horizontale.

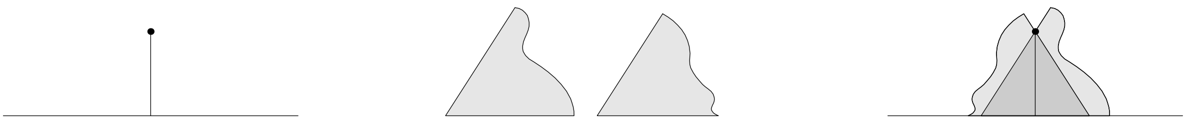


Fig. 5 (a,b,c)

Soit maintenant une figure comportant seulement la droite et le segment (figure 5(a)). Et soient, à côté de cette figure, deux angles aigus congruents découpés dans du papier (figure 5(b)). Si on dispose ces deux angles de part et d'autre du segment de sorte qu'ils aient un côté le long de la droite et que l'autre passe par l'extrémité supérieure du segment, on obtient la figure en question (figure 5(c)). Cette expérience conduit à la proposition suivante :

8. *Étant donné une droite et un segment perpendiculaire à celle-ci disposés comme sur la figure 5(a), si deux segments issus du point le plus haut du segment perpendiculaire font avec la droite deux angles aigus congruents, alors ces deux segments sont congruents, ils forment des angles égaux avec le segment vertical, et les points par lesquels ils touchent la droite sont également écartés du pied de la perpendiculaire.*

1.6 L'inégalité triangulaire

Considérons trois segments (ou trois tiges) dont l'un est plus grand que chacun des deux autres. Distinguons trois cas.

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment plus petit que le troisième. Dans ce cas, on n'arrive pas à les assembler en triangle (figure 6 à la page suivante).

Fig. 6

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment égal au troisième. Alors on n'arrive pas non plus à les assembler en triangle. En effet, lorsqu'on essaie, les deux plus petits ne se touchent que lorsqu'ils viennent s'aligner sur le grand (figure 7).

Fig. 7

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment plus grand que le troisième. Alors on peut les assembler en triangle. En effet, on peut disposer les deux plus petits (appelons-les AB et CD) de sorte qu'ils se coupent. Tournons ensuite le segment AB jusqu'à ce qu'il passe par D. Faisons ensuite glisser D sur AB jusqu'à ce que D vienne coïncider avec B. Nous avons obtenu un triangle (figure 8).

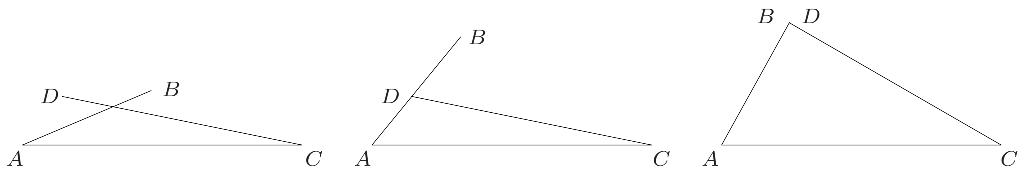


Fig. 8

Toutes ces manipulations conduisent à la proposition suivante :

9. *Si trois segments (inégaux) sont tels que le plus long est plus petit que la somme des deux autres, alors on peut les disposer en triangle. Sinon ce n'est pas possible.*

1.7 Des parallèles et une transversale

La figure 9 à la page suivante montre deux parallèles et une transversale. Le fait que les parallèles soient horizontales aide à percevoir que la transversale fait avec elles des angles a et b égaux. Ces angles correspondent tous deux à l'inclinaison de la transversale sur l'horizontale. Cette propriété – des angles égaux faits par une transversale avec des parallèles – est encore plus aisément perçue si la transversale traverse un réseau de parallèles comme à la figure 10 à la page suivante. La reproduction rythmée du phénomène le rend plus prégnant.

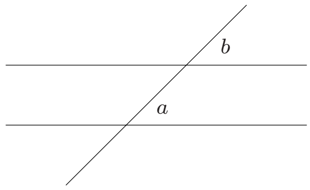


Fig. 9

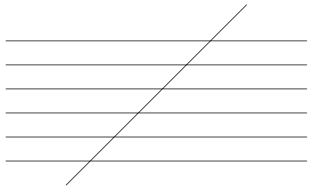


Fig. 10

2 Des conditions déterminantes évidentes

Après avoir parcouru ces quelques exemples d'inférences élémentaires, voyons maintenant ce qu'elles ont en commun. Dans chaque cas, on a sous les yeux – ou comme image mentale –, un objet, une situation : un rectangle que l'on cherche à dessiner, deux tiges que l'on assemble, un parallélogramme articulé, trois tiges que l'on cherche à assembler en triangle, etc. Il s'agit de situations simples, d'objets que l'on reconnaît sans analyse, dont on connaît par ailleurs diverses propriétés et que l'on sait manipuler. Dans chaque cas, on réalise réellement ou en pensée une expérience, une action, un dessin et on conclut de la même façon : quand on fait telle ou telle chose, on obtient tel ou tel résultat. En d'autres termes, telles ou telles propriétés que l'on mobilise entraînent que l'on obtient (ou que l'on ne peut obtenir) la figure souhaitée. On reconnaît celle-ci sans analyse, ou au moins de manière implicite, sans recourir à une définition. Par exemple, on n'a pas besoin de *formuler* que si deux côtés sont horizontaux et les deux autres verticaux, on a bien un rectangle. Ou encore on reconnaît un triangle à vue.

Nous appelons *conditions déterminantes* d'un type de figure ou de configuration géométrique, des conditions suffisantes obtenues ainsi par expérience réelle ou mentale.

Les conditions déterminantes ne portent bien entendu pas sur une seule figure, une seule situation. Lorsqu'il était ci-dessus question du rectangle, il s'agissait de tous les rectangles, et dans le quatrième expérience, il s'agissait de tous les triplets de tiges. En d'autres termes, l'inférence porte dans chaque cas sur une infinité de figures, même si l'objet sur lequel on expérimente en réalité ou en pensée est un objet singulier. Il représente tous les autres objets de son espèce. Il est *paradigmatique*.

A. Arnauld [1667] observait déjà au XVII^e siècle que les ensembles de figures dont traite la géométrie sont infinis : « On peut dire que toutes les propositions géométriques sont de même infinies en étendüe ; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une seule ligne, d'un seul angle, d'un seul cercle, d'un seul triangle, mais de toutes les lignes, de tous les angles, de tous les cercles, de tous les triangles ; et qu'ainsy l'esprit les renferme et les comprend tous en quelque sorte quelques infinis qu'ils soient. »

Mais qu'est-ce qui permet, dans le cas des expériences que nous avons décrites, d'étendre la conclusion d'une figure à toutes celles de la même espèce ? Deux circonstances rendent cette extension possible et naturelle : le première est que nous faisons l'expérience en position privilégiée, c'est-à-dire que nous nous mettons dans les conditions les meilleures pour voir ce qui se passe ; la seconde est que les figures ou situations sur lesquelles nous expérimentons sont simples. Elles sont définies, à similitude près, par un ou deux paramètres. L'imagination glisse facilement d'une figure à une autre de la même famille, et ceci d'autant plus que les paramètres définissant la famille peuvent varier continûment. L'imagination entame en douceur le parcours de tous les cas possibles.

Mais il ne va pas de soi que tout le monde partage les mêmes évidences. Il est sans doute vrai que certains phénomènes très simples et très symétriques sont universellement admis comme évidents. Ce pourrait être le cas par exemple pour l'égale inclinaison des deux montants d'une échelle à montants égaux dressée sur un sol horizontal. Mais il existe des phénomènes évidents pour certains esprits, et non pour tous.

Ainsi les évidences ne sont pas nécessairement des données immédiates de la perception, elles s'appuient sur un vécu, sur une expérience. Il semble clair que certains phénomènes apparaissant comme non évidents à certaines personnes, deviennent évidents pour elles à la suite d'observations, de constructions, de manipulations appropriées. C'est ainsi que peut être installé, dans un groupe d'élèves hétérogène, un consensus minimal pour servir de base aux premiers éléments d'une géométrie raisonnée.

3 Des inférences inductives

Il semble assez clair que les conditions déterminantes trouvent leur fondement dans la causalité physique. Comme nous venons de le voir, le schéma est constant : on construit, on dessine, on dispose des objets de telle ou telle façon, puis on constate tel résultat. Et ensuite la propriété observée est étendue à l'ensemble des figures du même type. Il s'agit donc au départ d'inférences inductives.

Mais qu'est-ce que cela veut dire au juste ? « La méthode des sciences physiques, écrit Henri Poincaré [1927], repose sur l'induction qui nous fait attendre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance. » Cette définition énonce le principe même de l'induction. Mais il faut la compléter pour discerner la portée des inférences inductives.

Tout d'abord les circonstances de lieu d'un phénomène peuvent varier, en particulier sa situation par rapport à l'observateur : nous reviendrons sur ce point à la section 4. Mais, et ceci est important, la forme de l'objet en cause peut aussi varier.

Reprenons l'un de nos exemples. Nous observons une première fois qu'en dessinant deux segments congruents qui se croisent en leur milieu, nous obtenons les diagonales d'un rectangle. Quel serait l'intérêt de cette observation si nous n'en tirions que ceci : chaque fois que nous dessinons deux segments de même longueur que ceux de la première expérience et que nous les faisons se croiser en leur milieu, de sorte en outre qu'ils fassent entre eux le même angle que dans la première expérience, nous obtenons un rectangle (congruent à celui obtenu la première fois). Ce n'est pas cela qui nous intéresse. L'inférence utile et productive est ici celle qui nous dit : quelle que soit la longueur commune des deux segments, et quelle que soit l'angle qu'ils font entre eux, nous obtenons bien un rectangle. Ainsi, nous maintenons certaines circonstances de l'expérience, mais nous en libérons d'autres, ce qui nous permet d'étendre la propriété observée à la catégorie tout entière des rectangles, de nous dire que les choses se passeront *forcément toujours* comme cela.. Seul un tel type d'induction nous permettra d'enclencher des raisonnements géométriques intéressants. On qualifie de *paradigmatiques* les expériences de cette sorte, qui sont représentatives d'une infinité d'expériences analogues.

Montrons a contrario une expérience non paradigmatique, c'est-à-dire dont on ne voit pas avec évidence qu'elle donnera le même résultat dans tous les cas de figure possibles. Il n'est pas d'emblée évident que la somme des angles d'un triangle soit égale à deux droits. Constater cette propriété sur quelques triangles particuliers, par exemple en mesurant les angles et faisant la somme des mesures, n'aide en rien à se convaincre que les choses se passeront toujours de la même façon. Il faut aménager l'expérience de sorte qu'on voit l'*inéluctabilité* du résultat, sa *nécessité*. Il faut créer les conditions qui rendent la généralisation – autrement dit l'induction –, évidente.

4 Extension aux situations non privilégiées

On peut se demander à quoi servent les conditions déterminantes. Par exemple, à quoi bon considérer des conditions qui déterminent la forme rectangulaire, puisque nous reconnaissons habituellement les rectangles sans analyse ? Il est vrai que nous les reconnaissons sans analyse, mais à condition qu'ils soient en position privilégiée. Qui plus est, nous l'avons dit, c'est aussi et forcément en position privilégiée que nous reconnaissons l'évidence des conditions déterminantes. *Mais ces conditions sont exportables en position non privilégiée.* En d'autres termes, si nous savons par une raison quelconque – ou un raisonnement – qu'un quadrilatère situé n'importe comment répond à des conditions déterminantes de la forme rectangulaire, nous en concluons – sans aucun besoin de nous en convaincre par la vue – que ce quadrilatère est un rectangle. Ceci montre par quel mécanisme les conditions déterminantes augmentent notre capacité de saisir l'espace.

Un exemple concret suffira à illustrer cela. Supposons que nous doutions de la forme rectangulaire d'une vaste place publique bordée de maisons. Impossible d'amener cette place en position privilégiée : elle est trop grande et trop lourde ! Mais nous pouvons vérifier par des opérations de visée que ses bords sont rectilignes, et par des mesures exécutées localement, qu'elle a deux côtés égaux et perpendiculaires à un troisième. Nous saurons alors que la place est rectangulaire, sans pourtant avoir jamais pu la saisir d'un coup d'œil comme un rectangle.

Pour pouvoir exporter dans toutes les situations possibles une inférence constatée en situation privilégiée, il faut être assuré que les objets que nous éloignons de nous, que nous orientons arbitrairement, que nous ne percevons que partiellement, demeurent inchangés pendant qu'on les transporte ou qu'on les soumet à des observations particulières. Nos inférences seraient inopérantes dans un univers de terre glaise ou de caoutchouc. Il nous arrive d'ailleurs de nous laisser surprendre par des variations inattendues d'un objet. Autrement dit, notre géométrie débutante s'applique à des objets *qui se conservent*, à des objets, comme dit Freudenthal [1983], qui ne subissent que des *gentle transformations*, des transformations douces[1].

5 Du réel à l'idéal

Nous avons parlé jusqu'ici des objets et des figures géométriques comme de choses réelles obtenues en dessinant, en articulant des tiges, en découpant et pliant des papiers, etc. Or aucune de ces choses ne s'identifie à une figure idéale. Par exemple nous ne pouvons jamais dire si un rectangle réel est un rectangle, absolument parlant. Il y a des cas où nous sommes incapables de discerner si deux segments bout à bout sont à eux deux plus longs, égaux ou plus courts qu'un segment donné. Rappelons qu'il y a deux raisons à cela. La première est physiologique : nos sens ne nous communiquent que des images approximatives. La seconde est physique : les objets réels se résolvent en atomes et particules qui leur enlèvent, dans le monde microscopique, toute possibilité de correspondre exactement aux objets idéalisés de la géométrie.

[1] Cette affirmation provoque un paradoxe. En effet, comment pourrions-nous nous convaincre que les objets qui nous occupent se conservent, ou en d'autres termes ne subissent que des transformations douces, sans leur appliquer des mesures relevant de la géométrie que nous sommes précisément en train de construire ? Ce paradoxe se résout pratiquement au niveau du bon sens : nous verrons bien à l'usage quand notre géométrie ne fonctionnera plus. On le résout au niveau théorique en *postulant* l'existence des transformations douces.

Il est donc exclu que l'évidence de la première condition déterminante ci-dessus (cf. 1.1) se ramène à ceci : si je suis sûr, *absolument*, qu'une figure est un quadrilatère, et si j'ai vérifié, *sans marge d'erreur*, qu'elle a deux côtés égaux et perpendiculaires à un troisième, alors je sais *sans erreur possible* que le quadrilatère est un rectangle. L'évidence n'est pas de cet ordre-là.

L'évidence n'ayant pas un tel fondement absolu, elle s'appuie sur une *expérience* entourée d'une marge d'indétermination. À propos du rectangle par exemple, je pourrais dire ceci, ou quelque chose d'approchant : chaque fois que j'ai construit un quadrilatère avec trois angles dessinés soigneusement à l'équerre, j'ai pu vérifier que le quatrième angle correspondait, aussi précisément que je pouvais le voir, à l'angle de l'équerre. Dans tous les cas où, peut-être parce que j'étais fatigué ou distrait, j'ai obtenu un « rectangle » un peu bancal, j'ai recommencé la construction et j'ai obtenu un rectangle que j'estimais satisfaisant. Bien sûr je n'ai jamais, et pour cause, construit un rectangle d'un kilomètre de long et d'un millimètre de large. Qui plus est, j'ai même rarement pensé à un tel rectangle. Pourtant j'arrive un peu à l'imaginer.

Ainsi mon sentiment d'évidence est tempéré par ma conscience des imprécisions des objets réels et de mes sens, et par mon impuissance à saisir la famille infinie des quadrilatères, et celle des rectangles. Mon évidence au départ est d'ordre pratique et s'étend à des catégories d'objets à mon échelle[2].

Ainsi, nos premières implications ne sont jamais vérifiables qu'approximativement. Toutefois, elles s'énoncent avec des mots (des concepts) qui ne sont guère connotés par l'indétermination des choses. Quand nous pensons à un rectangle, un angle droit, une égalité de segments, nous ne nous embarrassons pas spontanément du fait qu'il n'existe ni rectangle, ni angle droit, ni égalité absolue. Les concepts sont univoques par nature. Et puisque nous savons d'expérience que les propriétés que nous évoquons, quoique vérifiées imparfaitement par les objets réels, sont néanmoins vérifiées par eux avec une marge d'erreur d'autant plus petite qu'ils ont été construits ou dessinés avec plus de précision, nous appliquons spontanément ces propriétés à des objets infiniment précis.

Ainsi, les choses et les phénomènes s'installent dans la pensée avec une netteté qu'ils n'ont pas dans la réalité. Ce qui prend la forme d'une idée devient par là même idéal. Il en résulte que les ensembles infinis d'objets auxquels renvoient les mots sont moins réels qu'imaginaires.

L'évolution de la physique au XX^e siècle nous a fait perdre par ailleurs l'illusion que cet idéal pourrait aussi être vu dans la

[2] De telles indéterminations laissent la porte ouverte à d'autres géométries. Si l'espace est doté d'une courbure imperceptible à mon échelle, il se pourrait bien que mon évidence sur les quadrilatères possédant deux côtés égaux perpendiculaires à un troisième soit mise en défaut. Mais ces phénomènes étranges se passeraient sous le seuil de mes perceptions claires.

nature « si nous disposions d'instruments infiniment précis ». En ce sens la géométrie est une construction de l'esprit[3].

6 Vers une théorie

Nous sommes passés de quelques expériences paradigmatiques à des évidences portant chaque fois sur une famille infinie de figures en situation privilégiée. Nous avons ensuite étendu les conditions déterminantes ainsi obtenues à toutes les figures en situation quelconque. Mais la vocation des conditions déterminantes est de servir de points de départ pour une géométrie qui prouve des propositions non évidentes, des propriétés de figures compliquées.

Les conditions déterminantes, basées sur des expériences, ont la forme d'implications entre propriétés, et donc elles se situent au niveau de la saisie des figures en compréhension. Toutefois, leur évidence est telle qu'on les voit assez clairement fonctionner en extension. On étend sans peine ces expériences en pensée à l'ensemble des cas de figure. Tel ne sera évidemment plus le cas pour les propriétés des figures compliquées, celles où l'imagination en est réduite à des parcours très partiels des cas de figure. La part de l'intuition se réduit ainsi par nécessité. Bien entendu, les intuitions appliquées à certains cas de figure demeurent essentielles sur le plan heuristique. Mais les cas de figure accessibles ne sont plus représentatifs de tous les cas possibles. Ainsi les intuitions se font hasardeuses et la pensée déductive s'impose comme unique alternative.

Montrons sur un exemple comment une propriété déterminante peut être appliquée à la preuve d'une propriété a priori non évidente. Quelques expériences montrent que, de quelques points d'un cercle, on voit un diamètre de celui-ci sous un angle droit. Mais deux questions se posent : est-ce qu'il en est toujours ainsi ? et si oui, à quoi est due cette propriété remarquable ? On dessine alors dans un cercle un angle inscrit interceptant un diamètre (figure 11). On ajoute à la figure le diamètre issu du sommet de l'angle. Les deux diamètres sont égaux et se coupent en leur milieu. Leurs extrémités sont donc les sommets d'un rectangle. L'angle inscrit de départ est donc bien un angle droit.

[3] Le phénomène constaté de manière imprécise dans la réalité se mue en évidence précise dans l'esprit. C'est ce dont témoigne d'Alembert lorsqu'il écrit, évoquant la congruence de deux figures : « Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaine parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures. Cette manière de démontrer a donc l'avantage non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux. » (Cité par R. Bkouche).

Le mode de preuve évoqué par d'Alembert n'a plus cours dans les mathématiques d'aujourd'hui. On peut penser toutefois qu'il demeure un palier incontournable dans l'apprentissage de la preuve en géométrie.

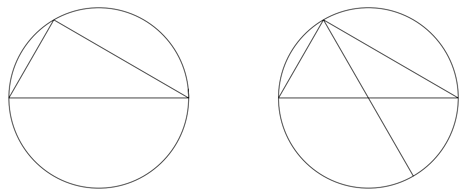


Fig. 11

Remarquons qu'un telle preuve consiste essentiellement à amener la propriété en cause à l'évidence. Elle ne consiste pas *d'abord* à montrer que la propriété découle d'autres propriétés connues. Dans les débuts de la géométrie, on s'intéresse à des phénomèrnes, à des propriétés. Il faudra toute une évolution de la pensée pour qu'on s'intéresse à la cohérence d'une théorie, et que corrélativement la portée, la visée – sinon la nature – des preuves change, pour que l'attention se déplace de l'évidence du phénomène vers l'évidence des implications[4].

7 L'univers de la géométrie commençante

Toute notre étude jusqu'à présent a été structurée en trois parties principales : percevoir (chapitre 1), concevoir (chapitres 2 et 3), inférer (chapitre 4). Cette division marque les étapes d'une analyse, plutôt que des moments clairement discernables et successifs de la pensée géométrique en formation. Il est rare en effet que nous percevions un objet sans le rattacher à l'une ou l'autre catégorie. Par exemple un triangle particulier est sans peine rattaché – fut-ce implicitement –, à la forme triangulaire en général. Qui plus est, les formes géométriques simples ne sont pas seulement des objets de contemplation. Comme nous l'avons vu, la connaisssance que nous en avons comporte des expériences de déplacements, de constructions, de déformations, et plus généralement de manipulations génératrices d'inférences spontanées : quand je fais ceci, j'obtiens tel résultat. En cela consiste l'expérience des choses, sur laquelle se bâtit, entre autres, une première connaissance géométrique. Ainsi, les trois plans que discerne l'analyse, – percevoir, concevoir et inférer –, s'intègrent dans un mode spontané d'activité qui est à la fois manuel, perceptif et intellectuel.

L'univers de cette activité, qui est aussi celui des premières acquisitions géométriques, n'est pas constitué d'un espace et de parties immobiles de cet espace, dont on étudierait les propriétés. Il est peuplé d'objets et de figures déplaçables soumises à des mouvements continus et comportant des symétries. Celles-ci sont mises en relation avec les symétries du corps humain et les directions physiques privilégiées – la verticale et l'horizontale. Mais ill y a un long chemin à parcourir pour passer de cette géométrie

[4] Cf. N. Rouche [1990].

commençante à la géométrie constituée. Nous nous contentons ici d'évoquer ce parcours, en soulignant que ses étapes dans l'enseignement méritent d'être soigneusement motivées.

8 Mais aussi chercher

Examinons pour terminer un quatrième registre de la pensée géométrique à ses débuts. Il est évidemment déjà intéressant et utile de posséder quelques vérités géométriques évidentes. Mais pour avancer, il faut arriver à en trouver et prouver de nouvelles. On trouve en se posant des questions, en expérimentant, en tâtonnant. On prouve en construisant des preuves. Et pour prouver, il faut des arguments. L'exemple ci-dessus de l'angle inscrit interceptant un diamètre montre que l'argument clé d'une preuve – en l'occurence « deux segments égaux se coupant en leur milieu déterminent un rectangle » – n'est pas révélé d'office à qui contemple passivement la situation. Il faut puiser dans ses souvenirs, faire fonctionner son imagination, mobiliser sa pensée dans un univers bien peuplé de choses et de propriétés diverses, avec entre elles le plus possible de relations significatives. Il ne suffit pas d'avoir la tête bien faite, il faut aussi qu'elle soit bien pleine, et encore pas de n'importe quoi.

On retrouve ici le sens large, mentionné à la section 1. La pensée en recherche s'appuie sur le sens large, sur toutes les choses que l'on est capable d'associer à chaque figure, à chaque phénomène, à chaque mot, à chaque symbole. Une condition déterminante est une condition suffisante pour obtenir telle ou telle configuration. Mais elle apporte avec elle et rend disponible pour la recherche toutes les propriétés connues de la figure ou de la configuration.

Notons enfin l'importance, du point de vue heuristique, de ce que nous avons appelé les figures simples à symétrie modérée, celles qui forment des familles à un ou deux paramètres. On comprend leur rôle particulier dans la recherche des preuves en géométrie élémentaire. En effet, d'une part – nous l'avons abondamment expliqué – leur simplicité fait que l'on parcourt de telles familles en extension sans trop de difficulté. Mais d'autres part, comme elles sont plus variées que les figures à zéro degrés de liberté, on les retrouve plus souvent comme sous-figures dans des figures compliquées qui posent problème. Elles jouent donc plus souvent le rôle de *figures clés*, génératrices de clarté. Une figure compliquée est comme une forteresse qui décourage les attaques. Une manière efficace d'en percer les secrets consiste à y chercher, et bien souvent à y introduire (comme un cheval de Troie), une figure clé qui l'éclaire.

Appendice : les débuts de la géométrie d'Euclide

Après avoir cherché les origines de la géométrie dans les phénomènes les plus familiers, il nous paraît intéressant de voir dans quelles évidences et manœuvres élémentaires s'enracinait la géométrie d'Euclide. Au début des Éléments, Euclide parle, dans ce qu'il appelle les notions communes, de la grandeur et de l'égalité des choses. Voici les notions communes[1] :

(A) *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*

(B) *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*

(C) *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*

(D) *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.*

(E) *Et le tout est plus grand que la partie.*

Euclide on le voit parle de choses considérées du point de vue d'une grandeur : elles sont *égales*, ou l'une est *plus grande* que l'autre. Elles sont égales lorsqu'elles s'ajustent les unes sur les autres, ce qu'il faut interpréter par : *lorsqu'elles peuvent être amenées en coïncidence.* Mais des choses que l'on peut amener à coïncider sont des choses transportables et qui conservent, au cours du transport, leur forme et leur grandeur ou, si on veut, leur identité géométrique.

Cette géométrie à son départ s'occupe donc d'objets déplaçables. Elle est, sur ce point important, parente proche de la pensée commune. Et elle se distingue de la plupart des exposés géométriques d'aujourd'hui, d'où l'idée d'un mouvement possible des objets ou des figures est absente.

Voyons sur un exemple clef comment Euclide prouve l'égalité de deux choses en les amenant à coïncider, ou si on veut en les superposant. Il s'agit du théorème 4 du Livre I, qui s'énonce comme suit :

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux

[1] Nous suivons la traduction de B. Vitrac (cf. Euclide [1990]).

angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.

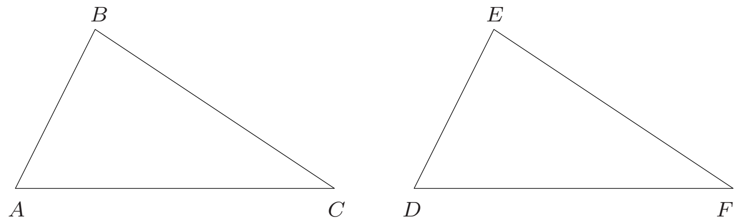


Fig. 1

La démonstration peut se résumer ainsi : Soient deux triangles ABC et DEF tels que AB soit superposable à DE, que AC soit superposable à DF et que l'angle BAC soit superposable à l'angle EDF (figure 1).

On transporte AB sur DE, ce qui est possible par hypothèse. L'égalité des deux angles[2] fait que AC prend la direction de DF, et donc que C vient en F. Ainsi BC est superposé à EF, car un segment est déterminé par ses deux extrémités. Les deux triangles sont donc superposés.

On voit clairement dans cette démonstration le triangle ABC voyager vers DEF. Il s'agit bien entendu d'un transport mental. Mais les points A, B et C ne sont pas des points immobiles du plan, ce sont les sommets d'un triangle mobile, qui est une chose au sens des notions communes. Ce concept de *chose* ne s'identifie pas à *partie du plan*.

Répétons-le, la notion de *superposabilité* de deux objets implique nécessairement d'imaginer le *transport* de l'un vers l'autre, ou le transport des deux vers un lieu commun. D'après la notion commune (D), la superposabilité définit ce qu'Euclide appelle l'*égalité* des choses, des objets. La démonstration que nous venons d'examiner s'appuie sur le transport d'un triangle. Celui-ci est un objet, sur lequel on discerne 3 sommets, 3 côtés, 3 angles. Le sens du théorème est que dorénavant, moyennant les hypothèses, on ne devra plus recourir à un tel transport. En effet, il suffira d'évoquer la superposabilité de trois parties simples de l'objet avec les parties correspondantes de l'autre. Ces parties simples sont deux côtés et un angle. Ainsi, on ramène la superposabilité d'objets complexes à la superposabilité d'objets plus simples.

Dans la plupart des théorèmes qui suivent, Euclide ne recourt plus au transport – fût-il mental – d'une figure vers une autre. Cela pourrait donner à croire qu'il s'appuie certes au départ sur le mouvement, mais qu'il s'en passe aussi tôt que possible. La vérité nous semble plus nuancée. Euclide se sert une fois ou l'autre au début des Éléments (à part le théorème 4 analysé ci-dessus, voir encore le théorème 8 du Livre I) du transport d'une figure

[2] Euclide n'envisage pas le cas de deux triangles qui seraient superposables par « retournement », mais cette lacune n'a pas d'importance pour notre propos.

complexe, pour arriver le plus vite possible à ne plus devoir le faire. Mais dans la mesure même où un grand nombre de théorèmes ultérieurs démontrent la superposabilité de deux objets en s'appuyant sur la superposabilité d'objets plus simples, les mouvements, quoique évacués du discours explicite des démonstrations, demeurent bien présents au niveau implicite, étant inhérents à l'idée même de superposabilité.

On peut se demander d'ailleurs si les objets de la géométrie à ses débuts dans l'histoire auraient pu être autres que des objets indéformables et déplaçables. Le matériau premier, et aussi le plus simple, le plus stable, que la vie quotidienne propose à la réflexion des hommes est bien celui-là. Les Chinois et les Indiens ont produit aussi une science géométrique, dont le procédé principal consiste à décomposer des objets en morceaux pour recomposer d'autres objets, des sortes de transformations d'un puzzle en un autre. Par opposition à Euclide, ils ont librement déplacé des objets variés, sans souci de ramener le transport de ceux-ci à celui d'objets plus simples.

Deuxième partie

Une géométrie naturelle

Introduction

1 Des premières inférences à la théorie

Dans la première partie, nous avons essayé de montrer comment la perception des objets indéformables engendre des objets mentaux, et comment ceux-ci engendrent des évidences. Une fois dégagées – fut-ce à titre d'hypothèses – ces modalités de naissance de la pensée géométrique, encore faut-il montrer qu'elles peuvent déboucher sur une théorie géométrique quelque peu ample et cohérente. C'est à quoi nous consacrons cette deuxième partie. Il se fait assez naturellement que cette première géométrie argumentée recouvre l'essentiel de la matière de géométrie plane du début du secondaire[1].

Comme il s'agit d'une première géométrie accrochée à des intuitions quotidiennes, nous avions d'abord voulu l'appeler *géométrie naïve*, au sens où on parle aussi de *théorie naïve des ensembles*[2]. E. C. Wittmann nous a convaincus que *géométrie naturelle* serait mieux reçu par cette partie du public qui aurait tendance à comprendre *naïf* dans le sens de peu informé, peu sérieux, voire pas mathématique.

Nous cherchons à montrer qu'il est possible, à partir des premières inférences évidentes (qui s'expriment en termes d'objets mentaux) de construire une géométrie élémentaire logiquement satisfaisante. Pour réaliser cet objectif, nous avons éliminé tout contexte, et de ce fait l'exposé est impropre à un enseignement vivant. Néanmoins, il pourra donner aux enseignants des clefs d'explication des difficultés rencontrées par les élèves dans des contextes divers. Étant proches du registre de pensée des enfants, ces clefs devraient fonctionner mieux que celles tirées d'une géométrie axiomatisée globalement.

2 Des évidences de départ

Comme nous l'avons vu dans la première partie, l'environnement familier nous offre des évidences géométriques. Nous n'en avons pas fait le tour, mais elles sont assez nombreuses. D'où une première question au départ d'une géométrie naturelle : quelles sont ces évidences ? Il est nécessaire de savoir ce qui est déjà là

[1] Niveau du collège en France.

[2] Voir par exemple R. Halmos, *Naive set theory*, [1960]. Il est important de savoir que la majorité des mathématiciens ne recourent jamais à la théorie axiomatique des ensembles. Pour ce qu'ils font, la théorie naïve (ou informelle) des ensembles est une référence sûre. Ainsi, ce n'est pas seulement aux débutants qu'une pensée informelle vient à point.

au départ, quelles sont ces connaissances qui, étant disponibles et claires, ne doivent pas être revues dans l'immédiat et peuvent servir à aller plus loin.

Une objection peut être que ces évidences, par leur grand nombre, sont sources de confusion. « [...] je ne pense pas, écrit Choquet [1964], qu'il soit désirable, comme l'ont préconisé certains professeurs, de prendre au départ de très nombreux axiomes : le jeu mathématique basé sur trop de règles, devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude. » Mais le propos de Choquet n'était pas d'écrire une géométrie naturelle. Il proposait, pour les élèves de la fin du secondaire des années soixante, une géométrie axiomatisée globalement, conduisant rapidement aux espaces vectoriels[3]. Nous voulons au contraire chercher un passage naturel, une voie de moindre difficulté, entre le savoir géométrique familier, nullement négligeable, et les premières propositions non évidentes de la géométrie.

Heureusement, ces évidences assez nombreuses ont entre elles des parentés qui permettent de les répartir en quelques ensembles cohérents. Ces regroupements nous ont fourni une répartition en chapitres pour la géométrie naturelle. Voyons comment ces chapitres ont été conçus.

Chaque chapitre évoque d'abord une "structure de base" et traite ensuite de phénomènes qui lui sont apparentés. Nous avons identifié six structures de base (voir ci-dessous), d'où les six chapitres de cette partie.

Expliquons plus en détails la forme des chapitres. Dans chacun d'eux, la structure de base est donc exposée pour commencer, sous forme de quelques expériences, quelques phénomènes porteurs d'évidences intuitives (nous les appelons *phénomènes de base*. La suite du chapitre amène d'autres phénomènes. Certains sont aussi évidents que les premiers. La plupart de ceux qui ne sont pas évidents s'expliquent en prenant appui sur la structure de base. Mais parfois, l'explication s'appuie sur une évidence supplémentaire, qui est alors évoquée sur le tas. Bien entendu, les explications s'appuient aussi sur des propositions déjà démontrées.

Nous avons écrit ces chapitres en imaginant devant nous un interlocuteur sensé, susceptible d'être attentif aux données immédiates de l'environnement et n'ayant retenu que peu de choses de la géométrie enseignée en primaire (par exemple, il sait reconnaître un triangle, un rectangle,...). Nous imaginons – nous espérons – qu'il nous quittera en ayant compris et appris un certain nombre de propriétés géométriques non évidentes, et aussi qu'il aura compris comment on manœuvre pour acquérir de nouvelles connaissances en géométrie élémentaire.

Cette partie de notre étude doit être considérée comme un

[3] G. Papy, de son côté, a proposé une géométrie axiomatisée globalement à partir de l'âge de douze ans. Cf. G. Papy [1970].

premier essai. Nous nous proposons de le revoir prochainement en argumentant nos choix, ainsi qu'en proposant des alternatives tenant compte de ce que les évidences intuitives varient d'une personne à l'autre. Nous le compléterons aussi, entre autres du côté de la géométrie de l'espace, et l'accompagnerons de notes méthodologiques expliquant les modes de raisonnement.

Le chapitre 5, intitulé *Une perpendiculaire et deux obliques*, part de la structure de base constituée d'une droite, une perpendiculaire et deux obliques (figure 1). Il se poursuit par d'assez nombreuses évidences relatives à la médiatrice d'un segment, au triangle isocèle, au losange, à un cercle muni d'une corde, à la bissectrice d'un angle. Il débouche sur la tangente au cercle et sur deux propriétés non évidentes, celle du cercle circonscrit à un triangle et celle du cercle inscrit.

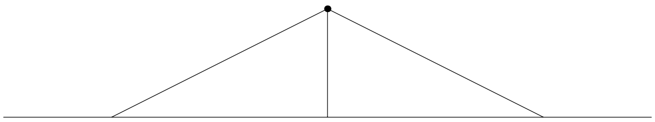


Fig. 1

Le chapitre 6, intitulé *Trois segments,* part des évidences relatives à l'inégalité triangulaire et débouche sur l'intersection de deux cercles et les cas d'égalité des triangles.

Le chapitre 7, intitulé *Rectangles, cercles et angles,* part de quelques propriétés élémentaires du rectangle. Il traite ensuite de l'angle au centre dans un cercle, de l'arc qu'il intercepte et de la corde qui sous-tend cet arc. Il conduit aux propriétés des angles inscrits dans un cercle et se termine par la question des quadrilatères inscriptibles.

Le chapitre 8, intitulé *Parallèles et angles,* part de la structure de base constituée par deux parallèles et une transversale. Il rassemble au départ un tout petit nombre d'évidences, et débouche sur une série assez longue de propriétés des angles des polygones.

Le chapitre 9 traite des puzzles de carrés et de triangles qui conduisent au théorème de Pythagore et à sa réciproque.

Le chapitre 10, intitulé *Parallèles et longueurs,* part d'une situation de base proche du chapitre 8 : un réseau régulier de parallèles, traversé par une ou deux sécantes. De quelques évidences au départ, il tire de multiples propriétés sur la conservation des rapports, les homothéties, les systèmes de coordonnées et les équations de droites.

3 Ce que la géométrie naturelle est ou voudrait être

Comment situer cette géométrie naturelle, en particulier par rapport aux géométries les plus connues ? Comme la plupart des autres exposés théoriques, elle est, nous l'avons dit, construite en dehors de tout contexte concret. Elle ne s'appuie sur aucun thème, au rebours par exemple de la géométrie de Clairaut [1741], qui visait tout au long la mesure des terrains.

Les évidences de départ de la géométrie naturelle sont issues de l'environnement familier, des objets et relations qui y sont omniprésents et qui ont le statut d'objets mentaux. Rappelons-les (voir section 5 du chapitre 2) pour l'essentiel :

les points, droites, segments et angles,
les parallèles, perpendiculaires et sécantes,
les égalités et inégalités de grandeurs,
les translations, symétries orthogonales et demi-tours.

Ces structures sont celles que l'être humain rencontre immanquablement et sans cesse lorsqu'il s'efforce de saisir l'espace pour y vivre et agir. Non pas l'espace entité abstraite et vide, mais l'espace peuplé de formes et de mouvements.

La géométrie naturelle cherche à respecter deux principes, qui la distinguent des géométries constituées.

Le premier, déjà relevé ci-dessus, est qu'*elle n'exclut au départ aucun des moyens de connaissance et de pensée disponibles*. Par contraste, les géométries les plus connues, du fait même qu'elles sont des théories unifiées au départ d'un *petit* nombre d'axiomes, et même si ceux-ci sont proches de perceptions et d'expériences quotidiennes, excluent un certain nombre de moyens de pensée. Donnons-en quelques exemples.

Euclide, souvenons-nous (voir l'appendice page 66), évoque brièvement les mouvements, mais s'en passe le plus vite possible. Hilbert [1899] les accepte, au sens où les congruences directes sont des déplacements idéalisés. Mais il n'adopte pas comme terme primitif les symétries et mouvements simples (symétrie orthogonale, translation, demi-tour) qui servent dans le quotidien à se convaincre de certaines congruences. Choquet [1964] écarte les angles au départ et exprime sa satisfaction d'avoir réussi à ne les introduire que très tard. Artin [1957] ne prend en compte au départ, parmi les objets et transformations qui possèdent un correspondant dans le quotidien, que les points, les droites, les parallèles et les translations. Les homothéties, qu'il utilise aussi, sont des transformations savantes. Bachmann [1973] ne considère ni les points, ni les droites, mais s'appuie par contre sur les symétries orthogonale et centrale. Enfin, et bien entendu, lorsque la géométrie est immédiatement vectorielle, elle est dès son origine assez loin des intuitions quotidiennes (voir Dieudonné [1968])[4].

La géométrie naturelle cherche à respecter un deuxième principe, qui complète le premier : *elle ne s'appuie au départ sur aucune connaissance non disponible au débutant.*

En soulignant cela, nous pensons surtout, par contraste, à toutes les géométries qui présupposent la connaissance des nombres réels, et donc ne s'adressent pas aux débutants. C'est le cas bien entendu de la géométrie construite d'emblée dans le cadre d'un espace vectoriel (voir à nouveau Dieudonné [1968]). On trouve aussi les réels au départ de la géométrie chez Choquet [1964], chez Birkhoff et Beatley [1959], et dans la géométrie proposée naguère par le GEM [1982].

Nous croyons réaliste qu'une première géométrie s'intéresse d'abord aux grandeurs et aux formes elles-mêmes, sans renvoyer immédiatement à leurs expressions numérisées. Les nombres (autres que les naturels) sont, à travers les mesures, un produit de l'activité géométrique, ils n'en sont pas un préalable[5].

Ces deux principes montrent que la géométrie naturelle proposée ici s'efforce de partir du quotidien. Elle n'est pas une forme adaptée aux élèves, vulgarisée, d'une géométrie constituée.

Toutefois, elle est formée avec des matériaux qu'on retrouve, au moins en partie, dans les géométries constituées. Elle utilise, comme celles-ci, la logique ordinaire. Et par delà son objectif principal qui est d'apprendre à saisir l'espace, elle est une première étape vers ces géométries. Elle s'attarde en particulier sur le parallélogramme, les projections parallèles et la propriété de Thalès, faisant ainsi un bout de chemin vers la notion d'espace vectoriel.

4 Et la rigueur ?

La géométrie naturelle est informelle au sens où elle se sert d'objets mentaux issus de l'expérience quotidienne et où elle n'est pas axiomatisée dans son ensemble. D'où la question : est-elle rigoureuse ? Évite-t-elle les pièges logiques ?

Voici un premier élément de réponse. Dans une théorie axiomatisée de grande ampleur, chaque concept doit tenir la route d'un bout à l'autre. Pour cela, il prend en compte le champ entier, souvent gigantesque, des objets de la théorie. Il est muni d'emblée de caractéristiques techniques lui permettant de traverser indemne les arcanes des démonstrations les plus difficiles.

[4] Le fait que chacune de ces géométries ait sélectionné sévèrement ses termes primitifs et ses axiomes, répondant chaque fois à une intention théorique significative, est extrêmement intéressant. Qu'on ne se méprenne donc pas sur notre intention : rappeler ces sélections sévères n'est pas une critique, car chacune, grâce précisément aux contraintes imposées, révèle un aspect profond de la géométrie. On peut même dire que pour bien connaître, en mathématicien, *la géométrie*, il est essentiel d'en connaître *plusieurs versions axiomatiques*.

[5] Rappelons, pour situer historiquement notre propos, que la géométrie d'Euclide ne recourt à aucun nombre à part des naturels. Hilbert et Artin construisent tous deux le corps de leur géométrie au sein même de la théorie. Le corps de la géométrie de Hilbert, étant fondé sur un calcul de segments, est d'ailleurs beaucoup plus proche du quotidien que celui d'Artin.

La géométrie naturelle au contraire ne s'intéresse pas tout de suite à un vaste champ d'objets et de phénomènes, entièrement cerné d'entrée de jeu. Elle s'intéresse d'abord, que la chose soit explicite ou non, à des champs restreints d'objets. Dans chacun de ces champs, des objets mentaux définis sans trop de technicité sont de bons instruments d'explication des phénomènes. Bornons-nous à un seul exemple : si dans un contexte donné, on ne rencontre aucun « angle mesurant plus de 180 degrés », une certaine idée familière des angles fonctionnera bien. Un jour il faudra en changer[6]. Autant attendre d'apercevoir les raisons qui imposeront ce changement[7]. Voici ce qu'écrit Morris Kline [1997] à ce sujet : « Avant qu'on puisse apprécier une formulation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée est formulée, quelles exceptions et quels pièges l'énoncé s'efforce d'éviter. Donc il faut être capable d'évoquer toute une richesse d'expérience acquise avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. »

Par commodité, nous avons parlé jusqu'ici de *la géométrie naturelle*, au singulier. Cela risque de donner à croire qu'il s'agit d'un nouveau canon pédagogique. Loin de nous cette idée. D'abord il s'agit d'un essai, qui doit être mis à l'épreuve auprès du public intéressé. Ensuite la solution que nous présentons n'est pas unique. En effet, à tout moment, nous avons eu à choisir entre divers chemins raisonnables. Parce que nous voulions un texte bref, nous n'avons proposé aucune alternative.

Avertissement. – Dans cette partie, nous utilisons les termes *identiques* et *les mêmes* pour renvoyer à deux figures congruentes. Par exception, nous utilisons *égal* lorsque la figure est un segment ou un angle. Ces termes familiers nous ont paru les plus appropriés pour une géométrie informelle. Mais nous ne souhaitons pas imposer ce vocabulaire. On trouvera à l'appendice page 301 des arguments pour éclairer d'autres choix éventuels.

Remerciements. – Sept personnes nous ont fait part de leurs difficultés et de leurs critiques à la lecture d'une première version de cette *Géométrie naturelle*. Ce sont J. Bartholomé, régente en français, C. David, sans profession, M. de Terwangne, institutrice primaire, A. Frère, institutrice primaire, M. Meuret, institutrice maternelle, P. Planche, régent en géographie, A. Warnier, licenciée en mathématiques.Nous avons clarifié notre texte en tenant compte de toutes leurs observations et les remercions chaleureusement.

[6] Les angles dont il est question aux chapitres 5 et 6 ci-après sont strictement inférieurs à 180 degrés. C'est pourquoi nous en parlons sans définition ni précautions particulières. Il s'agit de la notion d'angle la plus spontanée, et elle fonctionne bien dans ce cadre. À partir du chapitre 7 par contre, nous envisageons des angles de 180 degrés et davantage, ce qui mérite une mise au point.

[7] C'est en gros dans ces termes-là qu'on peut parler des paliers de rigueur qu'évoque Freudenthal [1973].

5

Perpendiculaires et obliques

1 Une perpendiculaire et des obliques

Phénomène de base 1. – La figure 1 montre un point P, une droite d et divers chemins pour aller de P à d. Pour y voir plus clair, disposons la droite d horizontalement (figure 2). Le chemin le plus court suit la perpendiculaire.

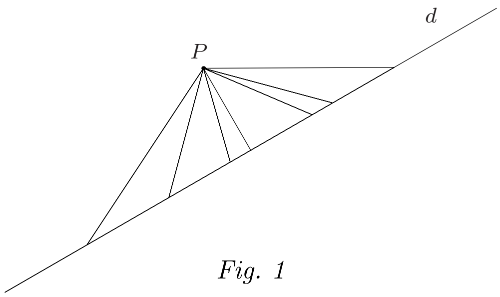


Fig. 1

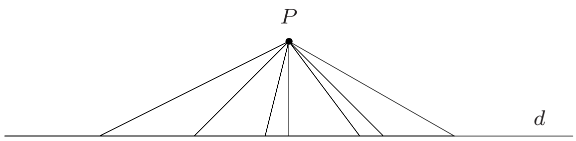


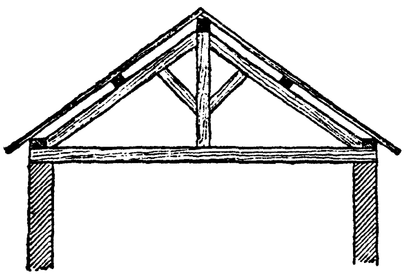
Fig. 2

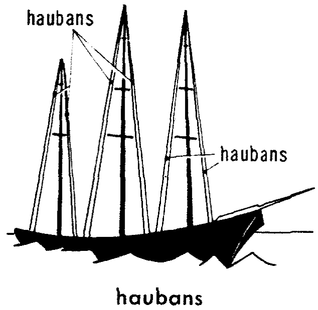
Cette observation est assez importante pour que nous la mettions clairement en évidence.

1. *Si d'un point extérieur à une droite, on mène vers celle-ci une perpendiculaire et des obliques, la perpendiculaire est plus courte que chaque oblique.*

La distance donnée par la perpendiculaire est appelée *distance du point à la droite.*

2 La perpendiculaire et deux obliques égales





Donnons-nous une droite d horizontale, un point P et la perpendiculaire. À partir de là, nous allons faire quatre observations.

Phénomène de base 2. – Donnons-nous en outre deux baguettes de même longueur, plus longues que la distance de P à d (figure 3). Disposons ces deux baguettes symétriquement de la manière suivante (voir figure 4) :

– plaçons la première à gauche avec une extrémité en P ; l'autre extrémité touche la droite horizontale en B ;
– plaçons la deuxième baguette à droite avec une extrémité en P ; l'autre extrémité touche la droite horizontale en B'.

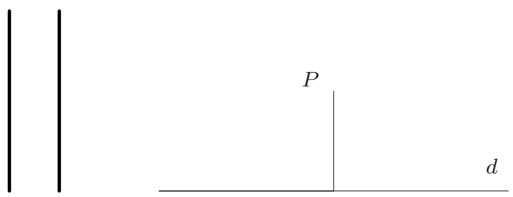


Fig. 3

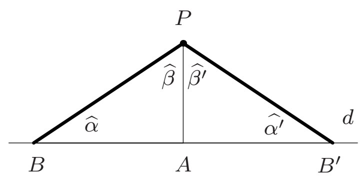


Fig. 4

Puisque nous sommes partis d'une situation symétrique – la droite (elle est infinie) et la perpendiculaire – et que nous avons rajouté les deux segments symétriquement, la figure finale est complètement symétrique. Il en résulte que les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ entre les deux baguettes et d sont égaux, les segments $[AB]$ et $[AB']$ sont égaux, et les angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$ sont aussi égaux (figure 4).

Phénomène de base 3. – Donnons-nous deux angles aigus égaux $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ découpés dans du carton (figure 5 à la page suivante). Disposons-les ensuite symétriquement l'un à gauche et l'autre à droite, comme le montre la figure 6, avec un côté le long de d et l'autre passant par P. À nouveau, nous avons rajouté symétriquement des éléments à une figure symétrique. Le résultat est symétrique : les deux segments $[BP]$ et $[B'P]$ sont égaux, ainsi que les deux segments $[AB]$ et $[AB']$ et les deux angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$.

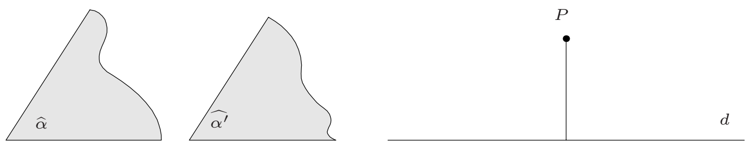


Fig. 5

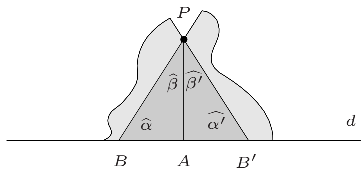


Fig. 6

Phénomène de base 4. – Donnons-nous deux baguettes de même longueur (figure 7) et disposons-les symétriquement le long de d avec une de leurs extrémités au pied A de la perpendiculaire, comme le montre la figure 8. Dessinons ensuite les segments $[BP]$ et $[B'P]$. La figure obtenue ainsi étant entièrement symétrique, $[BP]$ et $[B'P]$ sont égaux, de même que les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$, et les angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$.

Fig. 7

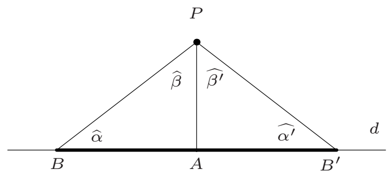


Fig. 8

Phénomène de base 5. – Donnons-nous deux angles égaux $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$ découpés dans du carton (figure 9). Disposons-les symétriquement avec leur sommet en P et un de leurs côtés le long de la perpendiculaire comme le montre la figure 10. Cette figure étant entièrement symétrique, les deux segments obliques $[PB]$ et $[PB']$ sont égaux, les deux segments $[AB]$ et $[AB']$ sont égaux, et les deux angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ sont aussi égaux.

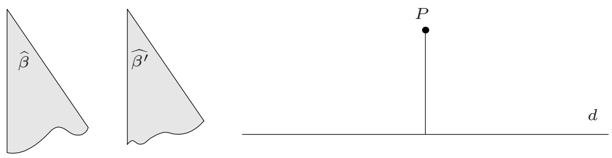


Fig. 9

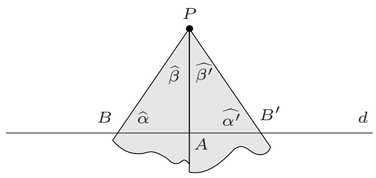


Fig. 10

Dans la suite nous reviendrons à diverses reprises sur ces phénomènes de base. Ils sont résumés dans la proposition suivante.

2. *D'un point extérieur à une droite, on mène vers celle-ci une perpendiculaire et deux obliques. Si une quelconque des quatre propriétés suivantes est vérifiée, les trois autres le sont aussi :*

(a) les deux obliques sont égales ;

(b) les angles formés par la droite et chacune des deux obliques sont égaux ;

(c) les pieds des deux obliques sont à égale distance du pied de la perpendiculaire ;

(d) les angles formés par la perpendiculaire et chacune des deux obliques sont égaux.

En reparcourant les deux phénomènes de base 2 et 3, on s'aperçoit qu'on peut aussi les simplifier en s'arrangeant pour que la perpendiculaire n'y joue plus de rôle. Ceci nous conduit à une autre proposition, un peu plus légère, dans laquelle nous isolons les conclusions *(a)* et *(b)* de la proposition 2.

3. *D'un point extérieur à une droite, on mène deux obliques vers celle-ci. Si une des deux propriétés est vérifiée, l'autre l'est aussi :*

(a) les deux obliques sont égales ;

(b) les angles formés par la droite et chacune des deux obliques sont égaux.

3 Un segment et sa médiatrice

Rappelons qu'on appelle *médiatrice d'un segment* la droite perpendiculaire à celui-ci en son milieu. Le terme *médiatrice* dérive du latin *medius* : qui est au milieu.

La figure 11a illustre cette définition. On voit mieux la situation lorsqu'on amène le segment à l'horizontale (figure 11b).

Fig. 11 (a,b)

Voici maintenant une première question à propos de la médiatrice : si on considère un point P sur la médiatrice d'un segment (figure 12a), ce point est-il à distance égale des extrémités du segment ?

En posant cette question, on se retrouve dans la situation du phénomène de base 4 à la page précédente : les deux distances sont égales (figure 12b).

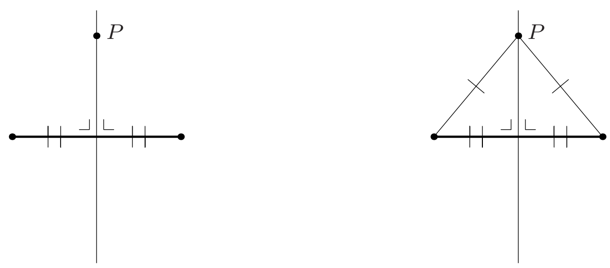


Fig. 12 (a,b)

Voici ensuite une deuxième question, inverse de la première : si on considère un point P à égale distance des extrémités d'un segment (figure 13a), ce point est-il sur la médiatrice du segment ?

Du point P, menons la perpendiculaire au segment (figure 13b). Ceci fait, nous nous retrouvons dans la situation du phénomène de base 2 à la page 78 : les segments $[AB]$ et $AB']$ sont égaux (figure 13c). Ainsi la perpendiculaire est bien médiatrice du segment, et le point P est sur la médiatrice.

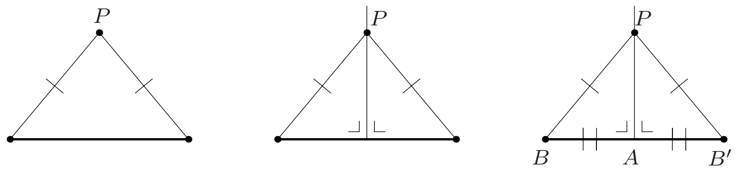


Fig. 13 (a,b,c)

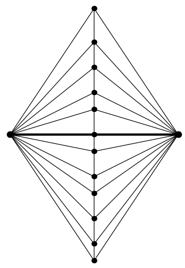


Fig. 14

La figure 14 montre un segment, sa médiatrice et un ensemble de points à égale distance des extrémités du segment.

La proposition suivante résume ce que nous venons d'observer à propos de la médiatrice.

4. *(a) Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à égale distance des extrémités de celui-ci.*

(b) Si un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment, il est sur la médiatrice de celui-ci.

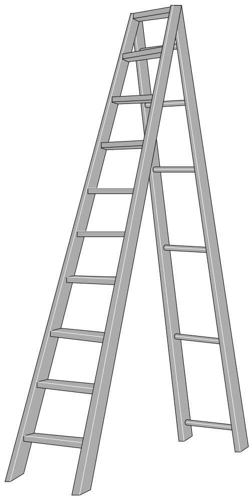
Cette proposition double peut aussi s'énoncer d'un seul coup sous la forme :

4′. *Un point est sur la médiatrice d'un segment si et seulement s'il est à distance égale des extrémités de celui-ci.*

Ainsi la médiatrice d'un segment est constituée de tous les points situés à égale distance des extrémités de celui-ci et de ces points seulement. « Être à égale distance des extrémités d'un segment » est donc une propriété qui caractérise les points de la médiatrice du segment. On exprime cela en disant :

4″. *La médiatrice d'un segment est le lieu des points situés à égale distance de ses extrémités.*

4 Le triangle isocèle



-

Alvéoles de la mosquée de Tichitt

La figure 15 montre quelques triangles isocèles. À la figure 16, les mêmes triangles sont posés sur leur base. C'est dans cette position qu'on reconnaît le plus facilement un triangle isocèle. On voit qu'il est symétrique, avec deux côtés inclinés de la même manière, l'un montant de gauche à droite et l'autre de droite à gauche.

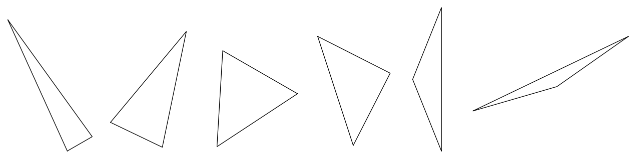


Fig. 15

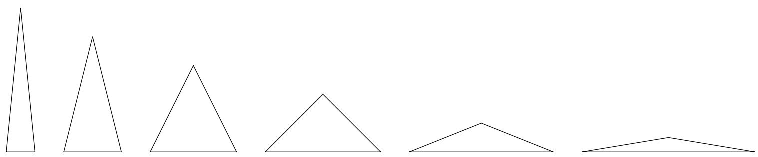


Fig. 16

4.1 Quelques propriétés du triangle isocèle

Le triangle isocèle est une figure familière. Il possède de nombreuses propriétés. Voici les principales.

5. *Il a deux côtés égaux (figure 17 à la page suivante).*

Isocèle est d'ailleurs dérivé de deux mots grecs : *isos* qui veut dire *égal* et *skalos* qui veut dire *jambe*. Un triangle isocèle est un triangle qui a deux jambes égales.

6. *Il a les angles à la base égaux (figure 18).*

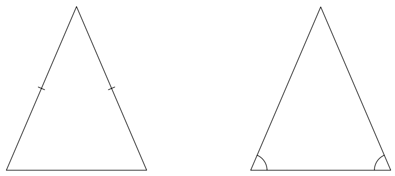


Fig. 17 *Fig. 18*

7. *Il possède un axe de symétrie ; celui-ci :*

1. *passe par le sommet ;*
2. *est perpendiculaire à la base (figure 20) ;*
3. *coupe la base en deux segments égaux (figure 19) ;*
4. *coupe l'angle au sommet en deux angles égaux (figure 21).*

En mettant ensemble les propriétés 2 et 3, on voit que l'axe est médiatrice de la base.

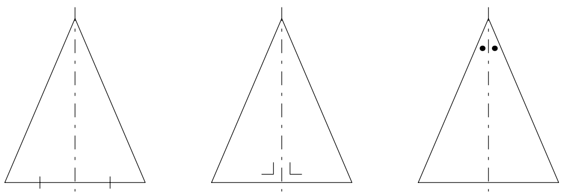


Fig. 19 *Fig. 20* *Fig. 21*

Pour la plupart des personnes, les propriétés 5 et 6 à la page précédente donnent une sorte de portrait de base du triangle isocèle. La propriété 7 est plus savante et appartient plutôt à un portrait enrichi.

4.2 Conditions déterminantes du triangle isocèle

8. *Si un triangle a deux angles égaux (figure 22), alors il est isocèle.*

Du sommet P abaissons la perpendiculaire au côté opposé (figure 23). Nous nous trouvons dans la situation du phénomène de base 3 à la page 78. Et nous reconnaissons un triangle isocèle.

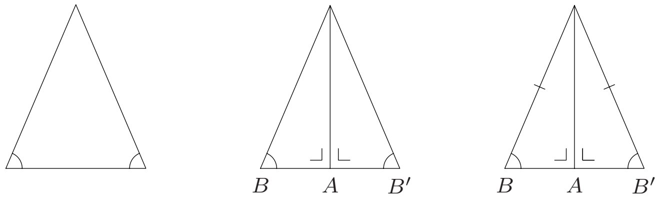


Fig. 22 *Fig. 23* *Fig. 24*

9. *Si un sommet d'un triangle est sur la médiatrice du côté opposé (figure 25 à la page suivante), alors il est isocèle.*

Nous nous trouvons là dans les circonstances du phénomène de base 4 à la page 79 (voir figure 26). Nous aboutissons bien encore à un triangle isocèle.

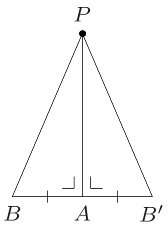


Fig. 25

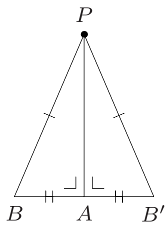


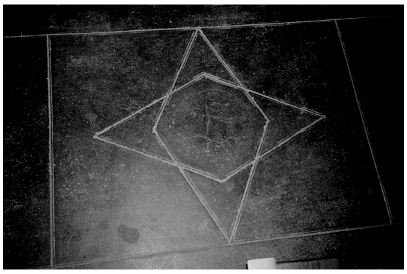
Fig. 26

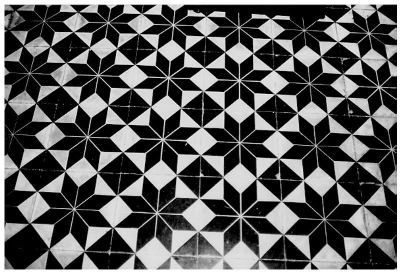
10. *Si dans un triangle la hauteur issue d'un sommet est médiatrice du côté opposé (voir à nouveau la figure 25), alors il est isocèle.*

Comme dans le cas précédent, nous nous trouvons dans la situation du phénomène de base 4 à la page 79 : le triangle est bien isocèle.

5 Le losange

Le nom de *losange* vient du gaulois *lausa* qui veut dire *pierre plate*.





La figure 27 montre quelques losanges en position quelconque. Les figures 28 et 29 montrent les mêmes losanges dans les deux positions où on observe mieux leur symétrie. Prises ensemble, ces deux figures montrent des formes possibles d'un losange articulé.

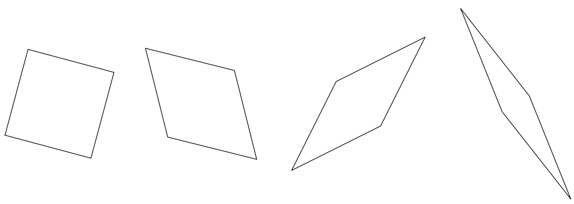


Fig. 27

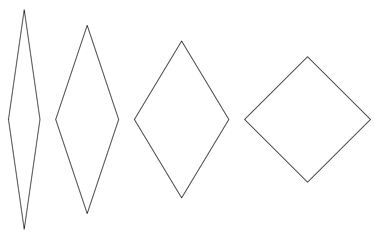


Fig. 28

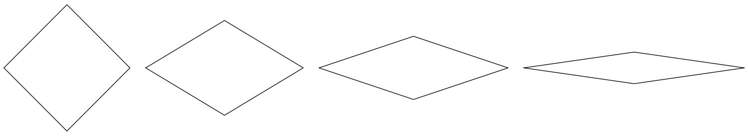


Fig. 29

5.1 Quelques propriétés du losange

11. *Le losange a quatre côtés égaux (figure 30).*

12. *Il a les angles opposés égaux (figure 31).*

13. *Il a les côtés opposés parallèles.*

On le voit sur la figure 32a, et sans doute mieux sur la figure 32b.

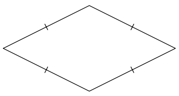


Fig. 30

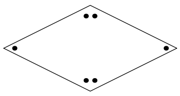


Fig. 31

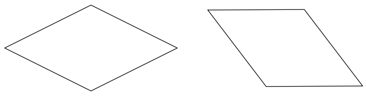


Fig. 32 (a,b)

14. *Chacune de ses diagonales le divise en deux triangles isocèles identiques (figure 33).*

15. *Chacune de ses diagonales est un axe de symétrie (figure 33).*

16. *Ses diagonales sont perpendiculaires et se rencontrent en leur milieu (figure 34).*

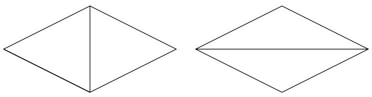


Fig. 33

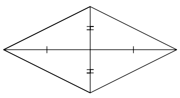


Fig. 34

5.2 Une condition déterminante du losange

17. *Si dans un quadrilatère les diagonales sont perpendiculaires et se rencontrent en leur milieu, ce quadrilatère est un losange.*

Considérons deux segments perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu (figure 35 à la page suivante). La symétrie de la figure (ou une double application du phénomène de base 4 à la page 79) montre que les quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ sont égaux (figure 36 à la page suivante).

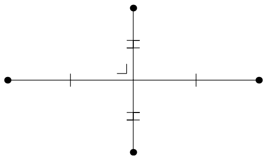


Fig. 35

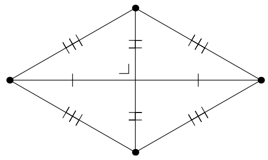
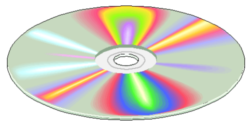


Fig. 36

6 Un cercle et une droite



Le cercle est une figure familière, qu'il est à peine besoin de présenter. Alors que les triangles isocèles n'ont pas tous la même forme, et les losanges non plus, tous les cercles ont la même forme. La seule différence qui peut exister entre deux cercles est leur grandeur. De plus, pour bien voir un cercle sur une feuille ou un tableau en position frontale, il n'est pas besoin de l'orienter de façon particulière : toutes les orientations se valent (figure 37).

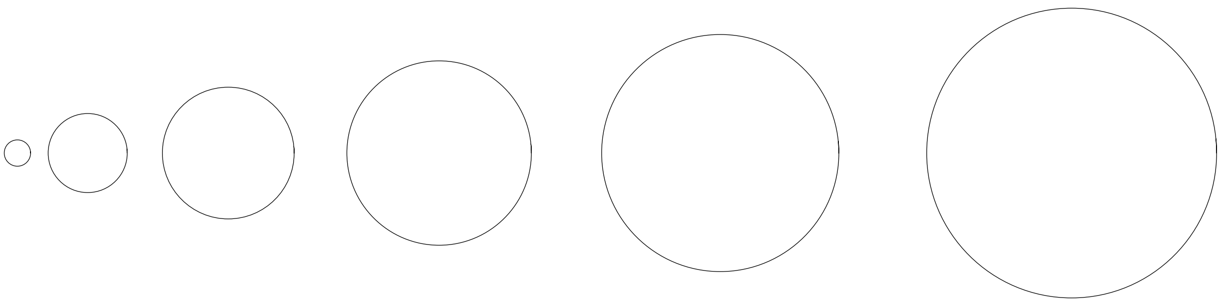


Fig. 37

Voici quelques propriétés du cercle.

18. *Tous les points d'un cercle sont à égale distance d'un point appelé* centre. *Cette distance est le* rayon.

Signalons qu'on appelle aussi rayon tout segment qui joint le centre du cercle à l'un de ses points.

19. *Tout point qui se trouve à une distance du centre égale au rayon est sur le cercle.*

20. *Ces deux propriétés se résument en une seule : un cercle de centre* O *et de rayon* r *est le lieu des points qui se trouvent à distance* r *de* O.

21. *Tous les points intérieurs à un cercle sont à une distance du centre inférieure au rayon.*

22. *Tous les points extérieurs à un cercle sont à une distance du centre supérieure au rayon.*

23. *Tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie pour celuici (figure 38a).*

On voit mieux cette symétrie du cercle si on amène le diamètre en position verticale (figure 38b).

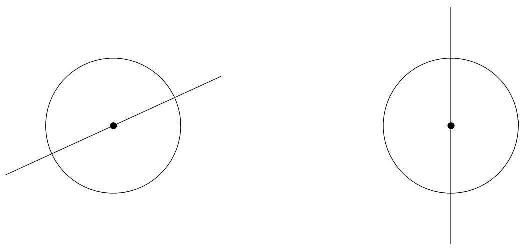


Fig. 38 (a,b)

Considérons maintenant une figure formée par un cercle et une droite d qui le rencontre (figure 39a). Ici on voit mieux la symétrie si on dispose la droite horizontalement (figure 39b).

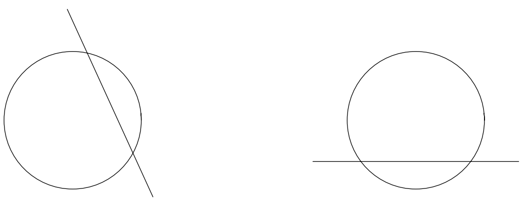


Fig. 39 (a,b)

Première question : si on trace la médiatrice de la corde (figure 40a), est-ce qu'elle passe par le centre ? (Rappelons qu'on appelle *corde* d'un cercle n'importe quel segment dont les extrémités sont sur le cercle.) Le centre étant à égale distance des extrémités de la corde (figure 40b), il est sur la médiatrice (voir proposition 4b à la page 81).

Fig. 40 (a,b)

Question réciproque : si on abaisse la perpendiculaire du centre sur la corde (figure 41a), est-elle médiatrice de celle-ci ? En dessinant deux rayons comme sur la figure 41b, nous nous retrouvons dans les conditions du phénomène de base 2 à la page 78 : le pied de la perpendiculaire divise la corde en deux segments égaux, et la perpendiculaire est bien la médiatrice supposée (figure 41c).

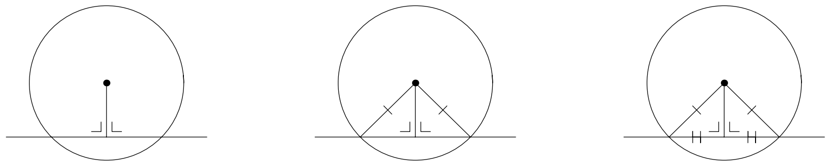


Fig. 41 (a,b,c)

Nous résumons cela par la proposition suivante.

24. *(a) Si on trace la médiatrice d'une corde d'un cercle, cette médiatrice passe par le centre du cercle et est donc un diamètre.*

(b) Si on abaisse la perpendiculaire du centre d'un cercle sur une corde, cette perpendiculaire est la médiatrice de la corde.

Phénomène de base 6. – Si, comme à la figure 42a, on considère une corde perpendiculaire à un diamètre et qui s'éloigne continûment du centre, on voit ses points d'intersection avec le cercle se rapprocher de plus en plus. À la fin, ils se rejoignent. La droite, qui n'a pas cessé d'être perpendiculaire au diamètre, n'a plus alors qu'un seul point de contact avec le cercle. Elle est présentée à la figure 42b. Tous ses autres points sont extérieurs au cercle, puisqu'ils sont à une distance du centre supérieure au rayon (figure 42c).

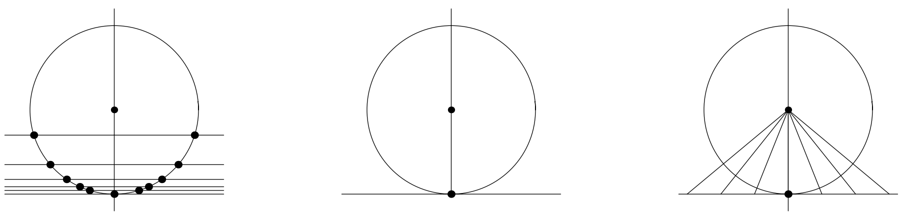


Fig. 42 (a,b,c)

On appelle *tangente* à un cercle toute droite perpendiculaire à un rayon à son extrémité. Une tangente ne touche le cercle qu'en un point. Le mot latin *tangere* veut dire toucher.

Soit maintenant une droite, un point extérieur à la droite et la perpendiculaire joignant le point à la droite (figure 43a à la page suivante). Dessinons le cercle qui a son centre au point donné et qui a pour rayon la perpendiculaire. La droite est tangente au cercle (figure 43b).

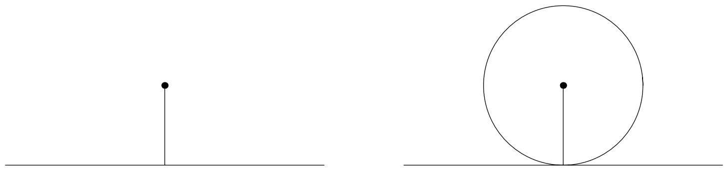


Fig. 43 (a,b)

Aucun autre cercle de même centre n'est tangent à la droite. Voyons cela en détail. Si nous dessinons un *autre* cercle dont le centre ce trouve au même point, son rayon est soit plus petit que la distance du point à la droite (figure 44a) soit plus grand (figure 44b) :

– s'il est plus petit, aucun de ses rayons ne peut toucher la droite, car si un des rayons arrivait jusqu'à la droite, il serait au moins égal à la perpendiculaire (voir la proposition 1 à la page 77) ;
– si au contraire le rayon est plus grand que la perpendiculaire, en dessinant deux rayons comme sur la figure 44c, nous retrouvons les conditions du phénomène de base 2 à la page 78. Il y a deux points du cercle qui se trouvent sur la droite.

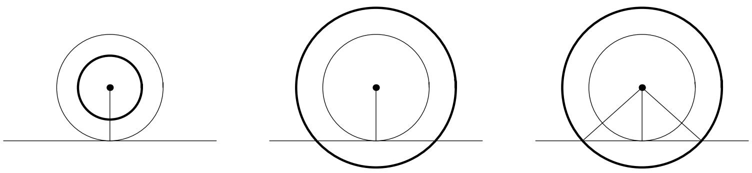


Fig. 44 (a,b,c)

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

25. *En prenant pour centre un point extérieur à une droite, on peut dessiner un et un seul cercle auquel la droite est tangente.*

7 Un angle et sa bissectrice

Appelons ici *bissectrice d'un angle* la demi-droite qui coupe celui-ci en deux angles égaux. La figure 45a montre un angle et sa bissectrice. On discerne mieux l'égalité des deux angles résultant du partage si on dispose la bissectrice verticalement, comme le montre la figure 45b ou la figure 45c.

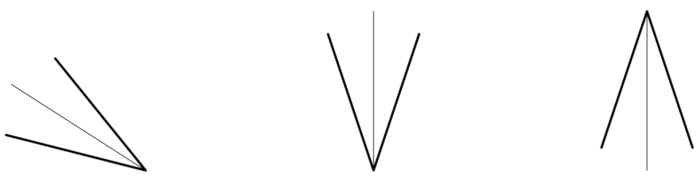


Fig. 45 (a,b,c)

Considérons un point P sur la bissectrice d'un angle (figure 46a). De ce point menons des perpendiculaires aux deux côtés de l'angle (figure 46b). Comme la figure est symétrique par rapport à la bissectrice, et que nous la complétons par deux constructions symétriques, la perpendiculaire dessinée à gauche est égale à la perpendiculaire dessinée à droite. Donc le point de la bissectrice est à égale distance des deux côtés de l'angle (figure 46c).

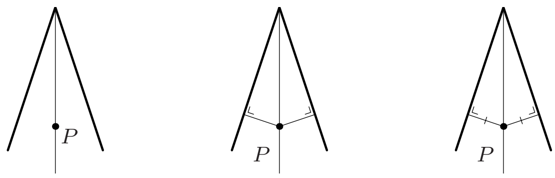


Fig. 46 (a,b,c)

26. *Tout point de la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés de celui-ci.*

Considérons maintenant un point P intérieur à l'angle et situé à égale distance de ses côtés (figure 47a). Traçons les perpendiculaires $[PB]$ et $[PB']$ aux deux côtés. Ces deux segments sont égaux. Joignons les points P et A (figure 47b). Nous allons montrer que les angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{B'AP}$ sont superposables, et que par conséquent, le point P est sur la bissectrice de l'angle.

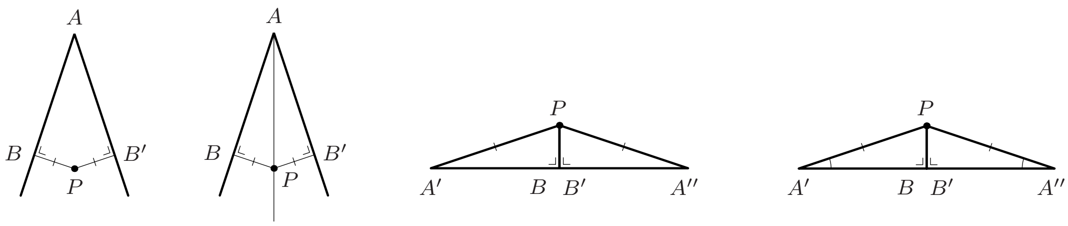


Fig. 47 (a,b,c,d)

Pour montrer cela, une manœuvre nous sera utile : elle est destinée à amener les conditions du phénomène de base 2 à la page 78. Transportons les deux triangles PBA et $PB'A$ de manière que leurs côtés $[PB]$ et $[PB']$ soient accolés, comme le montre la figure 47c. Nous sommes effectivement dans les conditions du phénomène de base 2, puisque $[PA']$ est superposable à $[PA'']$. Ainsi les angles $PA'B$ et $PA''B'$ sont superposables (figure 47d).

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante[1].

27. *Tout point à l'intérieur d'un angle et situé à égale distance de ses côtés est sur la bissectrice de celui-ci.*

Ces deux propositions peuvent se résumer en un seule.

[1] Dans ce chapitre le terme *angle*, qui n'a pas été défini, renvoie à l'angle quotidien, toujours strictement inférieur à 180°. Dans ces conditions, la locution *l'intérieur d'un angle* ne présente pas d'ambiguïté.

28. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points intérieurs à l'angle et équidistants de ses côtés.*

Cette proposition a pour conséquence la proposition suivante.

29. *En prenant comme centre un point de la bissectrice d'un angle, on peut tracer un cercle tangent aux deux côtés de l'angle (figure 48).*

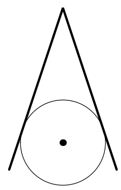


Fig. 48

8 Un triangle dans un cercle

Jusqu'à présent dans ce chapitre, nous avons étudié des propriétés de symétrie de figures simples, toutes plus ou moins parentes entre elles. Ces propriétés n'avaient pas grand chose d'étonnant : elles résultaient de manière naturelle de la symétrie.

Maintenant nous allons étudier une propriété des triangles qui n'est pas du tout évidente, et comme nous allons le voir, la situation sera peu symétrique. Cette propriété concerne les médiatrices d'un triangle. Rappelons qu'on appelle *médiatrices d'un triangle*, les médiatrices de ses côtés.

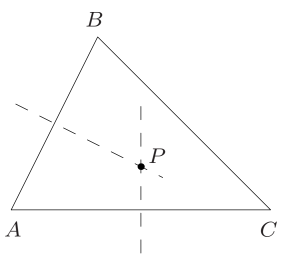


Fig. 49

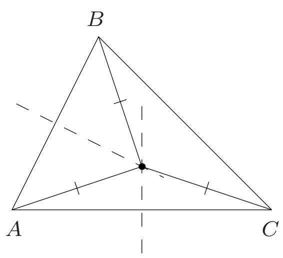


Fig. 50

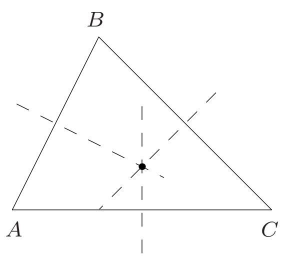


Fig. 51

Considérons un triangle ABC quelconque (figure 49) et deux de ses médiatrices. Elles se rencontrent en un point P. Puisque ce point est sur la médiatrice de $[AC]$, il est à égale distance de A et de C (voir proposition 4a à la page 81). Pour la même raison, puisqu'il est sur la médiatrice de $[AB]$, il est à égale distance de A et de B. Donc il est à égale distance de B et de C (figure 50), et par conséquent il est sur la médiatrice de $[BC]$ (voir proposition 4b). C'est ce que montre la figure 51. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

30. *Dans n'importe quel triangle, les médiatrices se rencontrent en un même point.*

Puisque le point de concours des médiatrices est à égale distance des trois sommets du triangle, ce point est le centre d'un cercle qui passe par ces trois sommets.

Remarquons que pour chaque triangle il n'y a qu'un seul cercle qui passe par ses trois sommets. Le point de rencontre des

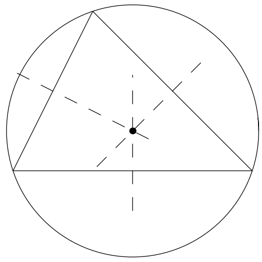


Fig. 52

médiatrices est en effet la seule position possible pour le centre d'un tel cercle : celui-ci doit se trouver à égale distance des trois sommets, et donc, en vertu de la proposition 4b, sur chacune des médiatrices. Nous avons donc la proposition suivante.

31. *Pour n'importe quel triangle, il existe un cercle qui passe par ses trois sommets, et il n'y en a qu'un seul.*

La figure 52 montre un tel cercle, que l'on appelle *cercle circonscrit* au triangle.

9 Un cercle dans un triangle

Venons-en maintenant à une propriété des bissectrices d'un triangle. Rappelons qu'on appelle *bissectrices d'un triangle*, les bissectrices de ses angles.

Considérons un triangle ABC quelconque et deux de ses bissectrices. Elles se rencontrent en un point P. Puisqu'il est sur la bissectrice de l'angle en A, ce point se trouve à égale distance de $[AB]$ et de $[AC]$ (voir proposition 26 à la page 90). Pour la même raison, et puisqu'il est sur la bissectrice de l'angle en C, il est à égale distance de $[AC]$ et de $[BC]$. Donc ce point est à égale distance de $[AB]$ et de $[BC]$, et par conséquent, il est sur la bissectrice de l'angle en B (voir proposition 27 à la page 90). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

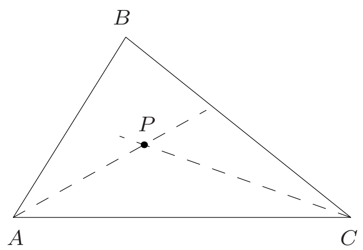


Fig. 53

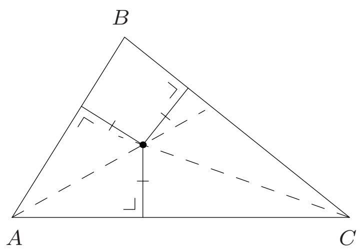


Fig. 54

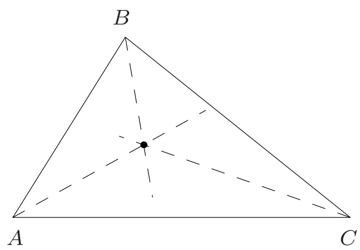


Fig. 55

32. *Dans n'importe quel triangle, les bissectrices se rencontrent en un même point.*

Puisque le point de concours des bissectrices est à égale distance des trois côtés du triangle, nous avons aussi la proposition suivante.

33. *Dans n'importe quel triangle, il existe un cercle tangent à ses trois côtés.*

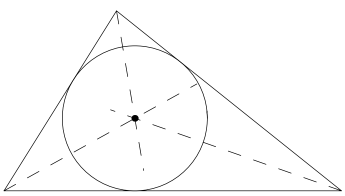


Fig. 56

La figure 56 montre un tel cercle, que l'on appelle *cercle inscrit* au triangle.

Remarquons aussi que pour chaque triangle il n'y a qu'un seul cercle qui est tangent à ses trois côtés. Le point de rencontre des bissectrices est en effet la seule position possible pour le centre d'un tel cercle : celui-ci doit se trouver à égale distance des trois côtés, et donc, en vertu de la proposition 27, sur chacune des bissectrices.

6

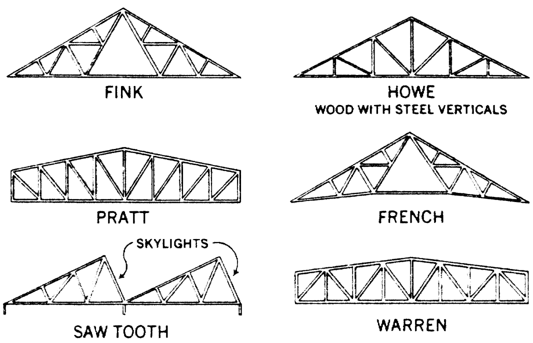
Trois segments

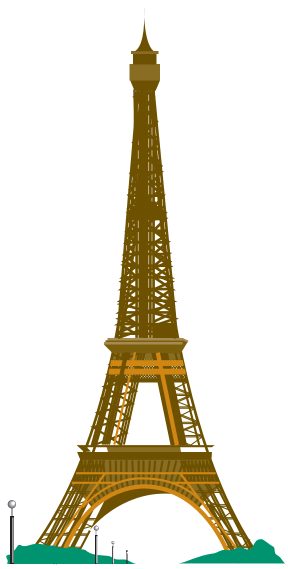
Considérons trois phénomènes géométriques qui n'ont pas l'air d'avoir grand chose en commun.

Le premier est que le plus court chemin d'un point à un autre est celui qui va en ligne droite.

Le second est que deux cercles, selon la façon dont ils sont disposés, se rencontrent soit en deux points, soit en un seul, soit en aucun.

Le troisième concerne les triangles. Si on considère tous les polygones réalisés à l'aide de tiges articulées (absolument rigides), on s'aperçoit que le triangle est le seul qui soit indéformable. C'est pourquoi on l'utilise pour construire des charpentes et plus généralement des structures rigides. Par exemple, pour rigidifier une étagère, il suffit de la munir d'une barre transversale qui décompose le rectangle en deux triangles.





Nous montrons dans ce chapitre que, malgré l'apparence, ces trois phénomènes ont entre eux un lien de parenté assez étroit.

1 L'inégalité triangulaire

Phénomène de base 1. – Soit, comme sur la figure 1 à la page suivante, trois segments (ou trois baguettes) $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ disposés en triangle. Le chemin direct de A à C est plus court que le chemin qui passe par B. Nous pouvons écrire cela sous la forme

$$|AC| < |AB| + |BC|.$$

De manière générale, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

1. *Chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.*

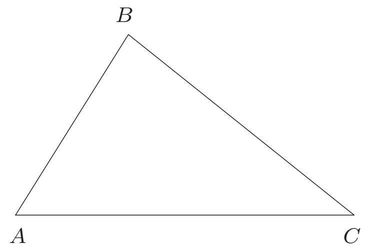


Fig. 1

Cette propriété est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

Donnons-nous maintenant trois segments inégaux.

Phénomène de base 2. – À la figure 2a, le plus grand des trois segments est plus grand que la somme des deux autres. Il est clair que nous ne pouvons pas former un triangle dans ce cas (figure 2b).

Fig. 2 (a,b)

Phénomène de base 3. – À la figure 3a, le plus grand des trois segments est égal à la somme des deux autres. Nous ne pouvons pas non plus former un triangle (figure 3b).

Fig. 3 (a,b)

Cette situation nous conduit à la proposition suivante, illustrée par la figure 4.

2. *Si trois segments* $[AB]$, $[BC]$ *et* $[AC]$ *sont tels que*

$$|AB| + |BC| = |AC|,$$

alors les points A, B *et* C *sont alignés.*

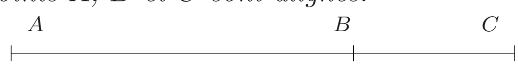


Fig. 4

Phénomène de base 4. – Enfin à la figure 5a , le plus grand des trois est plus petit que la somme des deux autres. Cela nous permet de les disposer en triangle, comme le montre la figure 5b.

Fig. 5 (a,b)

Dans le cas particulier où deux des trois segments donnés sont égaux, nous pouvons former un triangle dès que la somme des deux segments égaux est plus grande que le troisième. Le triangle obtenu est alors isocèle. La figure 6 illustre deux cas possibles.

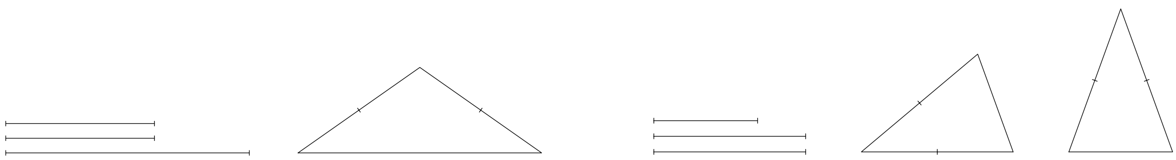


Fig. 6

2 Deux cercles

Pour étudier les positions respectives possibles de deux cercles, on est amené à considérer aussi trois segments : deux d'entre eux correspondent aux rayons des deux cercles, et le troisième est donné par la distance entre leurs centres.

2.1 Intersection de deux cercles

Phénomène de base 5. – Dans un premier temps, donnons-nous deux cercles de rayons différents (figure 7). Quelles sont toutes les façons de les disposer l'un par rapport à l'autre ? Partant du cas où les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre comme à la figure 7, déplaçons progressivement le petit cercle vers la gauche.

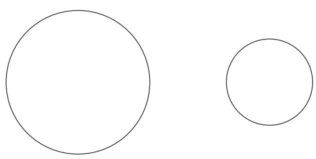
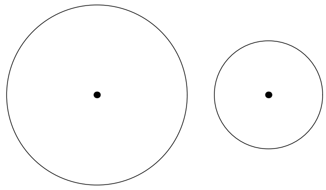


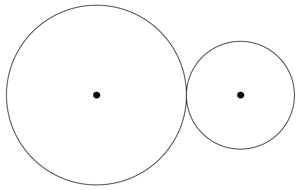
Fig. 7

Nous obtenons successivement les situations suivantes :

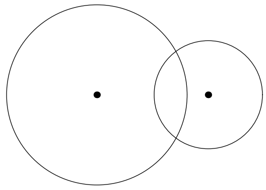
(*a*) Le petit cercle est à l'extérieur du grand, et les deux cercles ne se rencontrent pas.



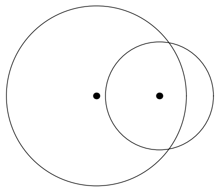
(*b*) Le petit cercle est encore à l'extérieur du grand, mais il le touche juste en point.



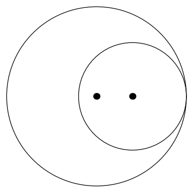
(*c*) Le centre du petit cercle est encore à l'extérieur du grand cercle, mais les deux cercles se rencontrent maintenant en deux points.



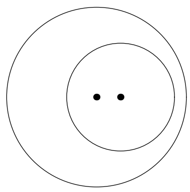
(*d*) Le centre du petit cercle est maintenant à l'intérieur du grand cercle et le petit cercle déborde encore à l'extérieur du grand ; les cercles se rencontrent encore en deux points.



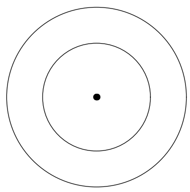
(*e*) Le petit cercle est à l'intérieur du grand, mais il le touche encore en un point.



(*f*) Le petit cercle est entièrement à l'intérieur du grand, et les deux cercles ne se rencontrent pas.



(*g*) Les deux cercles ont le même centre.



2.2 Trois segments et deux cercles

Nous pouvons rapprocher ces observations de celles faites avec trois segments à la section précédente. Pour cela, revenons à l'idée de faire un triangle avec trois segments p, q et r (figure 8a). Pour y voir clair, disposons le plus grand segment, à savoir r, horizontalement. Pour construire un triangle, nous devons accrocher p par exemple à l'extrémité gauche de r, et q à l'extrémité droite (figure 8b). Ceci fait, nous devons tourner p autour de son point d'attache, et q autour du sien, jusqu'à ce que les deux extrémités se rencontrent. Mais toutes les positions que l'extrémité de p peut occuper sont sur un cercle, et de même pour toutes les positions que peut occuper l'extrémité de q. Si les deux cercles ne se rencontrent pas, il n'y aura pas de triangle possible. En d'autres termes, nous cherchons le troisième sommet du triangle : il doit se trouver sur les deux cercles à la fois, c'est-à-dire en un point où ils se rencontrent. Il n'y a pas de tel point sur la figure 8c.

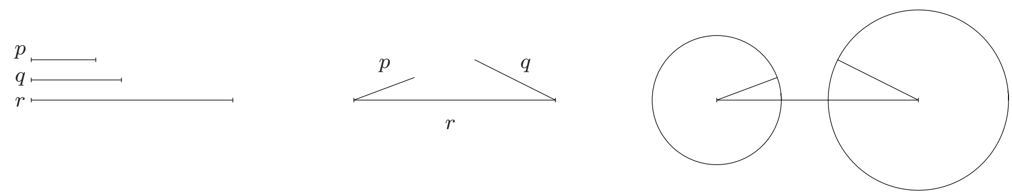
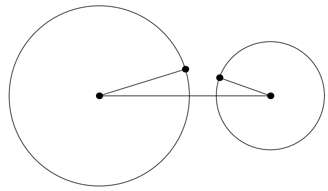


Fig. 8 (a,b,c)

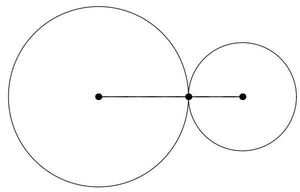
À la section précédente nous avons rencontré les différents cas qui peuvent se présenter : soit les deux cercles ne se rencontrent pas (cas a, f et g), soit ils se rencontrent en un point (cas b et e), soit ils se rencontrent en deux points (cas c et d). Comme nous avons en effet placé le plus grand des trois segments horizontalement (figure 8b), seuls les cas a, b et c nous intéressent : le segment qui joint les centres des cercles y est le plus grand. Les deux autres sont les rayons des deux cercles.

Reprenons ces différents cas, en marquant chaque fois sur la figure les rayons et le segment déterminé par les centres des deux cercles :

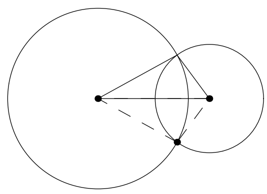
(*a*) Le segment déterminé par les deux centres est plus grand que la somme des deux autres et, comme nous l'avons déjà observé, on ne peut pas construire de triangle avec les trois segments.



(*b*) Le segment déterminé par les centres est égal à la somme des deux autres ; les deux cercles se touchent en un seul point ; il n'y a pas de triangle possible.



(*c*) Le segment déterminé par les centres (qui reste le plus grand des trois segments) est cette fois plus petit que la somme des deux autres, et il y deux triangles possibles.



2.3 Axe de symétrie de deux cercles

La figure formée par deux cercles de centres distincts possède un axe de symétrie. La droite qui joint les deux centres est en effet axe de symétrie pour chacun des deux cercles (voir la proposition 23 à la page 87). On voit bien cette symétrie si on amène l'axe en position verticale. Les différentes positions relatives de deux cercles ont été représentées avec leur axe de symétrie à la figure 9.

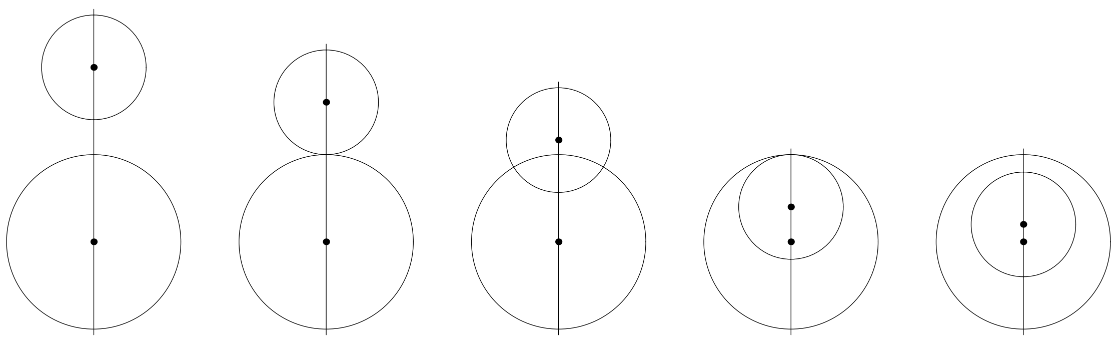


Fig. 9

Dans le cas où les deux cercles se rencontrent en deux points, dessinons la *corde commune aux deux cercles*, c'est-à-dire la corde qui passe par les deux points de rencontre des cercles (figure 10 à la page suivante). La figure est parfaitement symétrique et cette corde est perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres.

Considérons maintenant les deux cas où les cercles se touchent en un point. Pour des raisons de symétrie, ce point se trouve sur la droite qui joint les deux centres. Menons en ce point la perpendiculaire à cette droite (figure 11). Elle est tangente aux deux cercles[1]. Les deux cercles et la droite ont un seul point en commun. Dans le premier cas, on dit que les deux cercles sont *tangents extérieurement*, et dans le deuxième *tangents intérieurement.*

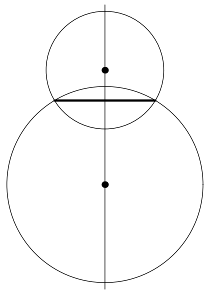


Fig. 10

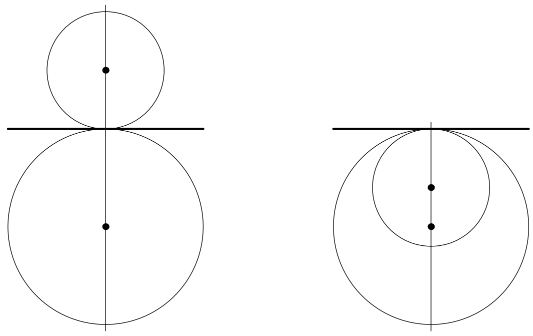


Fig. 11

3 Deux triangles

Le problème que nous nous posons maintenant est celui de savoir quand deux triangles sont identiques. Une première réponse est simple : il suffit de les superposer. Mais pour cela, il faut qu'au moins un des deux soit transportable, ce qui n'est pas toujours le cas.

Voyons donc comment – *avec un minimum d'information* – nous pouvons affirmer que deux triangles sont identiques. Nous considérerons trois cas.

3.1 Le cas « côté-angle-côté »

3. *Si deux triangles ont un angle égal et les côtés adjacents à cet angle égaux deux à deux, ils sont identiques.*

Soient donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ (figure 12).

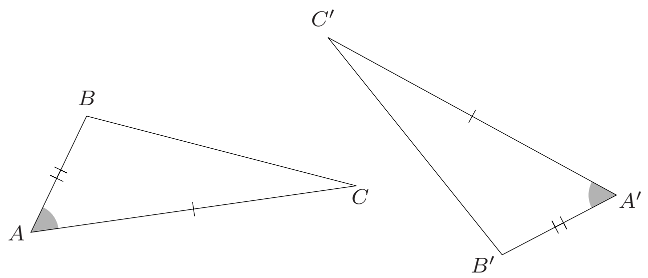


Fig. 12

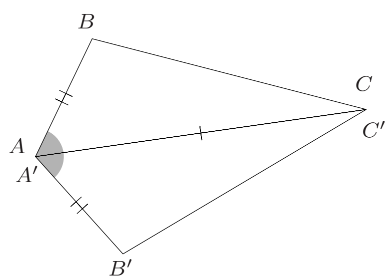


Fig. 13

[1] La notion de *droite tangente à un cercle* a été introduite au chapitre 5 à la page 88.

Supposons que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, et qu'en outre $|AB| = |A'B'|$ et $|AC| = |A'C'|$. Transportons mentalement $A'B'C'$ vers ABC de sorte que $[A'C']$ vienne sur $[AC]$. Si à ce moment B et B' sont de part et d'autre de $[AC]$ (comme le montre la figure 13 à la page précédente), retournons $A'B'C'$. Alors $[A'B']$ prend la direction de $[AB]$ (grâce à l'égalité des angles). Donc B' vient sur B. Ceci fait, les trois points A', B', C' coïncident respectivement avec A, B, C, et les deux triangles coïncident.

3.2 Le cas « angle-côté-angle »

4. *Si deux triangles ont un côté égal et les angles adjacents à ce côté égaux deux à deux, ils sont identiques.*

Soient donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ (figure 14).

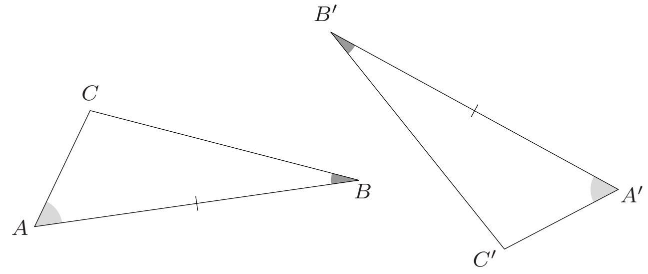


Fig. 14

Supposons que $|AB| = |A'B'|$ et qu'en outre $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Transportons mentalement $A'B'C'$ vers ABC de sorte que $[A'B']$ vienne sur $[AB]$. Si à ce moment C et C' sont de part et d'autre de $[AB]$, retournons $A'B'C'$. Alors $[A'C']$ prend la direction de $[AC]$ et $[B'C']$ la direction de $[BC]$ (grâce à l'égalité des angles). Dans ces conditions, les trois côtés des deux triangles coïncident, et donc les deux triangles coïncident.

3.3 Le cas « côté-côté-côté »

5. *Si deux triangles ont leurs trois côtés égaux deux à deux, ils sont identiques.*

Soient donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ (figure 15).

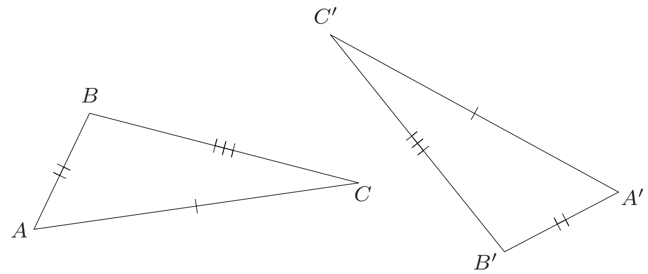


Fig. 15

Supposons que $|AB| = |A'B'|$, que $|BC| = |B'C'|$ et que $|CA| = |C'A'|$. Transportons mentalement $A'B'C'$ vers ABC de sorte que $[AB]$ vienne sur $[A'B']$. Si à ce moment C et C' sont de part et d'autre de $[AB]$, retournons $A'B'C'$. Le point C est un des deux points d'intersection du cercle de centre A et de rayon $|AC|$ et du cercle de centre B et de rayon $|BC|$. Il en va de même pour C', puisque $|AC| = |A'C'|$ et que $|BC| = |B'C'|$ (deux cercles de même centre et de même rayon sont identiques). Donc, les points C et C' coïncident, puisqu'ils se trouvent du même côté de $[AB]$. Les deux triangles sont identiques.

Ces trois théorèmes permettent de conclure que deux triangles sont identiques, même dans des circonstances où cette identité n'est pas du tout évidente. Par exemple, si on sait que les deux dessins de la figure 16 représentent le même cube en perspective, on en déduit que les deux triangles grisés sont identiques, parce que leurs côtés sont égaux deux à deux.

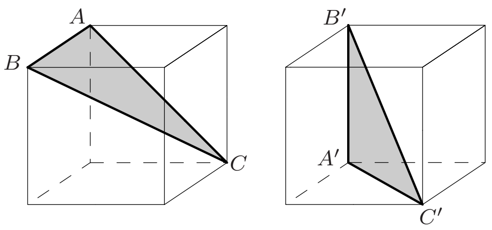


Fig. 16

Revenons enfin à une observation que nous avions faite au début de ce chapitre : un triangle réalisé en tiges articulées est indéformable. L'explication de cette propriété est maintenant simple : si un tel triangle pouvait être déformé, sans bien entendu que les longueurs des tiges soient modifiées, alors on aurait deux triangles non superposables avec des côtés deux à deux de même longueur. Mais nous savons par la proposition 5 que c'est impossible.

7

Rectangles, cercles et angles

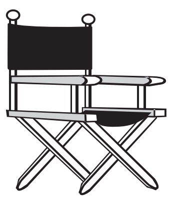
1 Horizontale et verticale

Phénomène de base 1. – Sur un tableau vertical, dessinons une ligne horizontale et une ligne verticale qui se rencontrent. Elles forment quatre angles droits.

Phénomène de base 2. – Sur un tableau vertical, plaçons un angle droit dont un côté est vertical. Son autre côté est alors horizontal. Plaçons-y un autre angle droit dont un côté est horizontal. Son autre côté est alors vertical.

Phénomène de base 3. – Sur un tableau vertical, dessinons une ligne horizontale (figure1a) et, au dessus de cette ligne, deux segments verticaux de même longueur dont les extrémités inférieures reposent sur cette ligne (figure 1b). La droite qui passe par leurs extrémités supérieures est horizontale (figure 1c).

Fig. 1 (a,b,c)



Phénomène de base 4. – Formons une croix au moyen de deux segments égaux se coupant en leur milieu (figure 2a à la page suivante). Pour voir plus clairement la forme dessinée par les extrémités de la croix, dessinons une ligne horizontale sur un tableau vertical, et déposons-y la croix (figure 2b). Les quatre extrémités de la croix forment un rectangle (figure 2c).

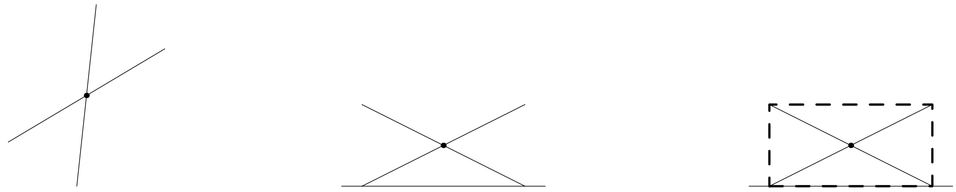
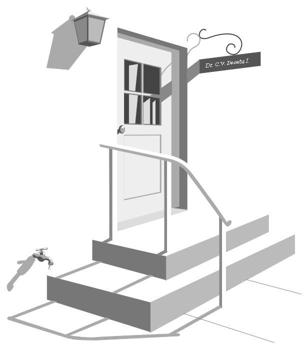
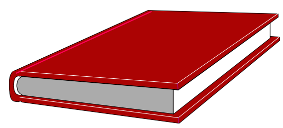


Fig. 2 (a,b,c)

2 Rectangles

Le rectangle est sans doute la figure la plus commune dans les objets produits par l'homme. Il est présent autour de nous dans toutes les positions. Par exemple, le plus souvent, les portes et les fenêtres sont des rectangles verticaux, le dessus d'une table est un rectangle horizontal, les armoires sont formées par assemblage de rectangles horizontaux et verticaux. Les livres ont des couvertures rectangulaires et on les tient souvent en position inclinée.





La figure 3 montre quelques rectangles en position quelconque. La figure 4 les montre rangés les uns à côtés des autres.

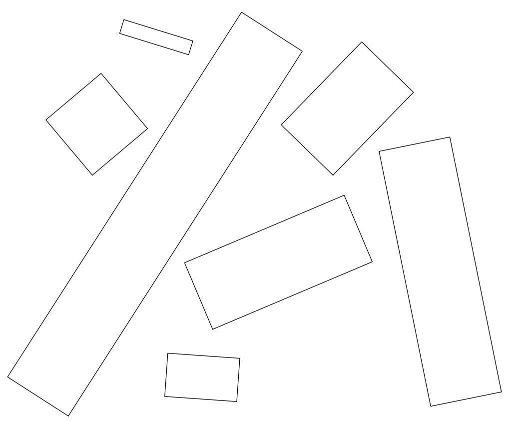


Fig. 3

Fig. 4

2.1 Propriétés du rectangle

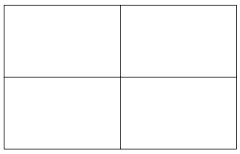


Fig. 5

1. *Le rectangle a quatre angles droits.*

2. *Quand un rectangle a deux côtés verticaux, ses deux autres côtés sont horizontaux.*

3. *Le rectangle a ses côtés opposés parallèles.*

4. *Le rectangle a ses côtés opposés égaux.*

5. *Les médianes du rectangle se rencontrent en leur milieu et le décomposent en quatre rectangles identiques (figure 5).*

6. *Chaque diagonale découpe le rectangle en deux triangles identiques (figure 6). Chacun de ceux-ci peut être superposé à l'autre par rotation d'un demi-tour autour du milieu de la diagonale.*

7. *Les diagonales du rectangle sont égales et se rencontrent en leur milieu (figure 7). Elles divisent le rectangle en deux fois deux triangles isocèles identiques.*

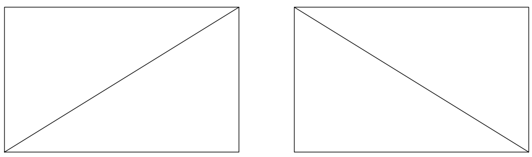


Fig. 6

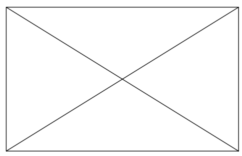


Fig. 7

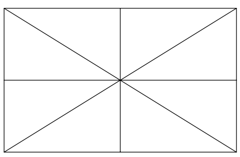


Fig. 8

8. *Les diagonales et les médianes du rectangle se rencontrent en un même point. Elles divisent le rectangle en huit triangles identiques (figure 8).*

2.2 Conditions déterminantes du rectangle

9. *Si un quadrilatère a deux côtés égaux perpendiculaires à un même troisième et situés d'un même coté de celui-ci, il est un rectangle.*

Plaçons le troisième côté de la figure horizontalement sur un tableau vertical, avec les deux côtés égaux orientés vers le haut. Ils sont verticaux (phénomène de base 2 à la page 102). La figure se trouve dans les conditions du phénomène de base 3. Le quatrième côté est donc horizontal et la figure est un rectangle.

10. *Si un quadrilatère a trois angles droits, il est un rectangle.*

Plaçons en effet un premier côté en position horizontale sur un tableau vertical avec à ses extrémités deux côtés qui forment avec lui un angle droit. Ils sont verticaux (phénomène de base 2). Le dernier côté forme un angle droit avec un des côtés verticaux. Il est donc horizontal et le quadrilatère est un rectangle.

11. *Si les deux diagonales d'un quadrilatère sont égales et se rencontrent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.*

Il suffit de placer la croix formée par les diagonales comme dans le phénomène de base 4 pour reconnaître un rectangle.

3 Angles au centre

Soit un cercle et un angle dont le sommet se trouve au centre du cercle (figure 9a). On appelle un tel angle *angle au centre*. La portion de cercle que détermine l'angle est appelée *arc de cercle intercepté par l'angle* (figure 9b), et le segment reliant les deux extrémités de cet arc est appelé *corde interceptée par l'angle* (figure 9c).

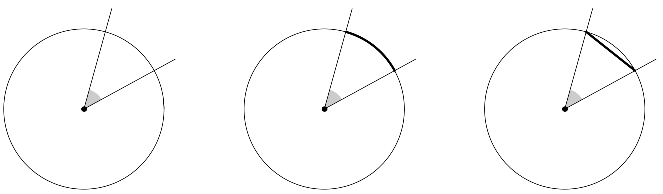


Fig. 9 (a,b,c)

Phénomène de base 5. – Donnons-nous deux angles au centre égaux (figure 10a). Faisons tourner l'un des deux autour du centre, en même temps que l'arc et la corde correspondants, de manière à le superposer à l'autre (figure 10b). Les cordes et les arcs interceptés par les deux angles coïncident.

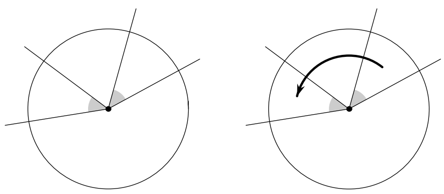


Fig. 10 (a,b)

Phénomène de base 6. – Donnons-nous maintenant deux angles interceptant des arcs égaux (figure 11a à la page suivante). Faisons glisser un des deux arcs le long du cercle de manière à les superposer, en faisant suivre l'angle au centre qui intercepte cet arc. Les angles au centre qui interceptent les deux arcs coïncident (figure 11b).

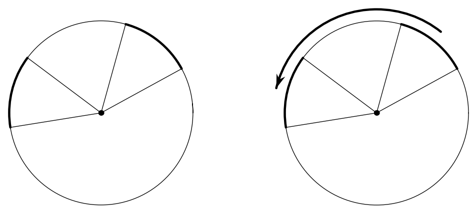


Fig. 11 (a,b)

Nous pouvons résumer tout ceci de la manière suivante :

12. *Dans n'importe quel cercle,*

- *deux angles au centre égaux interceptent des cordes et des arcs égaux ;*
- *deux arcs égaux sont interceptés par des angles au centre égaux.*

Considérons la situation particulière où les deux angles égaux sont obtenus en dessinant deux diamètres du cercle (figure 12a). Tournons cette figure pour mieux voir la symétrie (figure 12b). Nous pouvons y reconnaître un rectangle (figure 12c). Nous savons en effet que lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont égales et se rencontrent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.

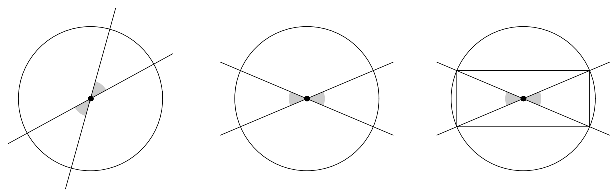


Fig. 12 (a,b,c)

4 Angles inscrits

Un *angle inscrit* à un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés le traversent. La figure 13a montre un tel angle. À nouveau, cet angle intercepte un arc de cercle (figure 13b) et une corde (figure 13c).

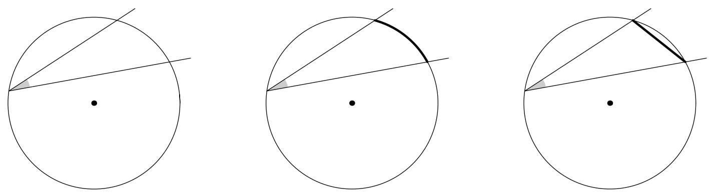


Fig. 13 (a,b,c)

Un cas particulier se présente lorsque la corde interceptée est un diamètre (figure 14a). En traçant le diamètre qui passe par le sommet de l'angle (figure 14b), nous pouvons, comme à la figure 12, faire apparaître un rectangle (figure 14c).

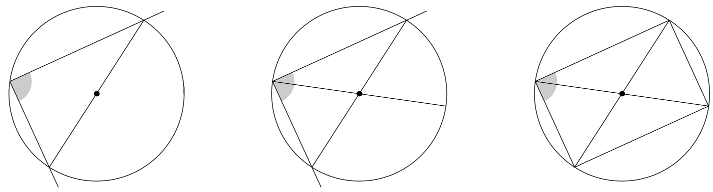


Fig. 14 (a,b,c)

Nous venons donc de démontrer la proposition suivante :

13. *Dans n'importe quel cercle, un angle inscrit qui intercepte un diamètre est un angle droit.*

Soit maintenant un angle inscrit dont un côté est un diamètre (figure 15a). Complétons la figure pour y faire à nouveau apparaître un rectangle et ses deux diagonales(figure 15b). Dans cette figure, il y a un angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit de départ. Les médianes découpent ce rectangle en huit triangles identiques (figure 15c). L'angle au centre vaut donc deux fois l'angle inscrit.

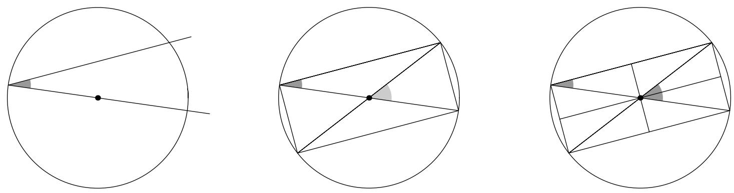


Fig. 15 (a,b,c)

Cette propriété s'étend à n'importe quel angle inscrit. Si le centre du cercle se trouve à l'intérieur de l'angle (figure 16a), on décompose celui-ci en deux angles inscrits ayant chacun un diamètre (le même) pour côté (figure 16b). Chacun d'eux vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc (figure 16c). Au total, l'angle inscrit de départ vaut donc la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.

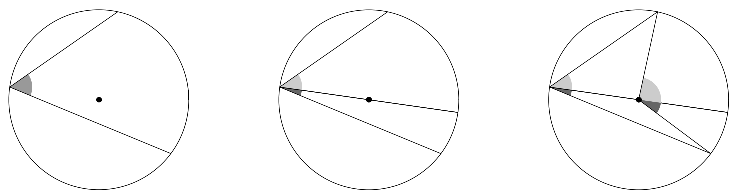


Fig. 16 (a,b,c)

La figure 17 montre la même situation pour un autre cas de figure, celui où l'angle inscrit est obtus.

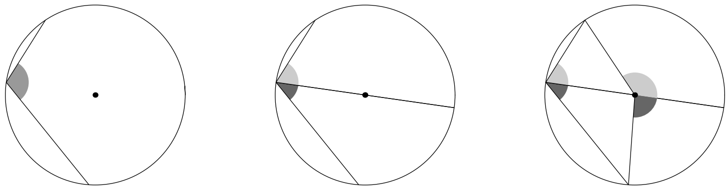


Fig. 17

Si le centre du cercle se trouve à l'extérieur de l'angle (figure 18a), on considère deux angles inscrits ayant chacun pour côté un (même) diamètre (figure 18b), et dont l'angle inscrit de départ est la différence. Chacun d'eux vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc, comme le montrent les figures 18c et 18d. L'angle inscrit de départ vaut donc également la moitié de l'angle au centre[1] interceptant le même arc.

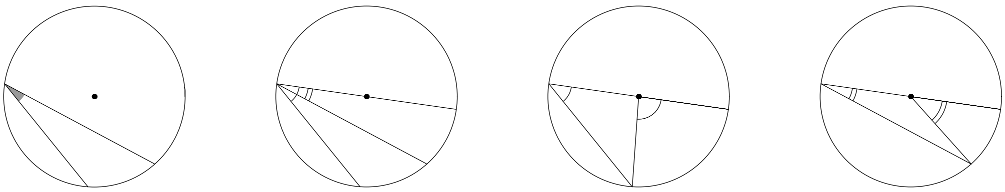


Fig. 18 (a,b,c,d)

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

14. *Dans n'importe quel cercle, un angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.*

Par conséquent, des angles inscrits interceptant le même arc de cercle sont égaux. Pour visualiser cette propriété, considérons un arc de cercle et une suite d'angles inscrits l'interceptant. Faisons parcourir l'arc de cercle supérieur par le sommet de l'angle (figure 19) : tous les angles obtenus sont égaux.

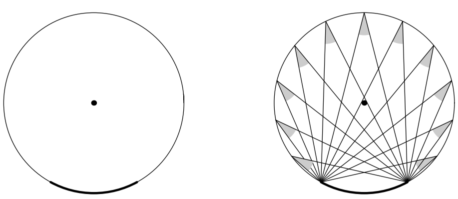


Fig. 19

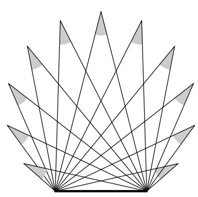


Fig. 20

Une nouvelle question se pose alors. Considérons la corde déterminée par cet arc. Y a-t-il des angles qui interceptent ce

[1] Nous rencontrons ici pour la première fois un angle de plus de 180°. Il ne nous pose pas de problème dans l'immédiat. Si nous voulions développer une théorie générale des angles, nous devrions tenir compte de ce type d'angles.

segment, autres que les angles inscrits que nous venons de déterminer (figure 20), mais qui leur soient égaux ?

Il y a évidemment les angles symétriques par rapport à la corde (figure 21). Pour vérifier qu'il n'y en a pas d'autres, procédons comme suit. Concentrons-nous sur les angles dont le sommet est situé au dessus du segment (par symétrie, nous pourrions examiner de même les angles dont le sommet se trouve en dessous du segment). Considérons tous les angles dont le sommet se trouve sur une demi-droite quelconque partant du milieu du segment choisi, et au dessus de ce segment (figure 22a). Cette demi-droite rencontre le cercle en un point, qui est le sommet d'un des angles inscrits interceptant cette corde (figure 22b). Si l'on prend sur la demi-droite un point intérieur au cercle comme sommet d'un angle, celui-ci est plus grand que l'angle considéré (figure 22c) ; si l'on prend le sommet à l'extérieur du cercle, l'angle est plus petit que l'angle considéré (figure 22d).

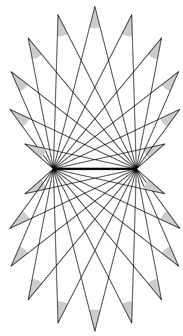


Fig. 21

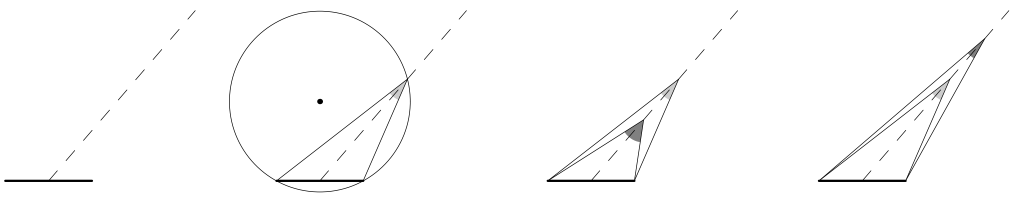


Fig. 22 (a,b,c,d)

Nous pouvons parcourir ainsi toutes les directions. Par conséquent, les seuls angles qui conviennent sont bien ceux de la figure 21.

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante :

15. *Soit un segment $[AB]$ et un point P. Tous les angles*

– *égaux à $\widehat{APB}$,*
– *qui interceptent le segment $[AB]$*
– *et qui se trouvent du même côté de $[AB]$ que P*

sont sur l'arc de cercle qui passe par A, B et P (figure 23).

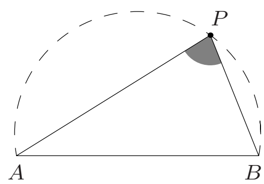


Fig. 23

Il est utile de se rappeler que la proposition 31 à la page 92 (chapitre 5) garantit l'existence et l'unicité du cercle passant par A, B et P.

5 Quadrilatères dans un cercle

Terminons ce chapitre sur les cercles et les angles en examinant les quadrilatères dont les sommets se trouvent sur un cercle. Nous avons vu que n'importe quel triangle possède un cercle circonscrit (cf. proposition 31 à la page 92). Qu'en est-il des quadrilatères ?

On peut aisément vérifier que tous les quadrilatères ne sont pas inscriptibles à un cercle. Inscrivons un quadrilatère dans un cercle (figure 24a). Choisissons trois de ces sommets. En vertu de la proposition 31, ce cercle est le seul passant par ces trois points (figure 24b). Si on remplace le quatrième sommet par un point qui ne se trouve pas sur ce cercle, on ne pourra pas trouver de cercle qui passe par les quatre sommets de ce nouveau quadrilatère (figure 24c). Si on en trouvait un, on aurait deux cercles qui passeraient par les trois points.

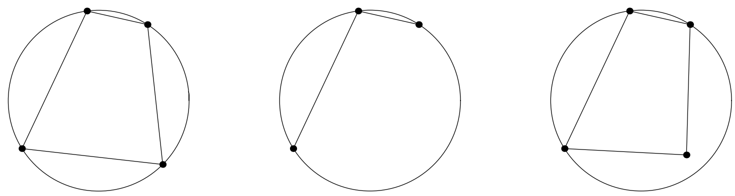


Fig. 24 (a,b,c)

La figure 25 montre un quadrilatère[2] inscrit dans un cercle. Considérons les angles opposés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. L'angle $\widehat{\alpha}$ vaut la moitié de $\widehat{\alpha'}$ et $\widehat{\beta}$ vaut la moitié de $\widehat{\beta'}$ (proposition 14 à la page 108). Comme $\widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'}$ vaut quatre droits, la somme des deux angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ vaut deux droits.

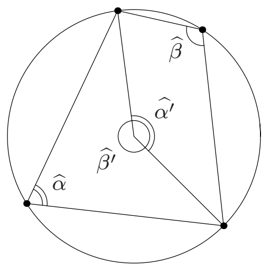
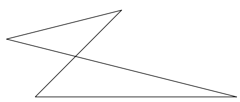


Fig. 25

D'autre part, lorsqu'un quadrilatère a deux angles opposés dont la somme vaut deux droits, on peut l'inscrire dans un cercle. En effet, soit $ABCD$ un tel quadrilatère (figure 26a à la page suivante) dont la somme des angles en B et D vaut deux droits. On considère trois de ses sommets A, B et C. Un cercle passe par ces trois points (figure 26b). On sait que si l'on choisit un quatrième sommet D' sur le cercle, l'angle en D' sera égal à l'angle en D, puisque chacun d'eux ajouté à l'angle en B donne deux droits. On sait aussi que tous les angles égaux à D' et qui interceptent la corde $[AC]$ (et qui se trouvent du même côté de $[AC]$ que D) sont sur l'arc de cercle entre A et C (proposition

[2] Nous ne considérons pas de quadrilatère croisé comme le montre la figure ci-contre.



15 à la page 109). Donc le point D doit se trouver sur cet arc de cercle. Le quadrilatère est donc inscriptible (figure 26d).

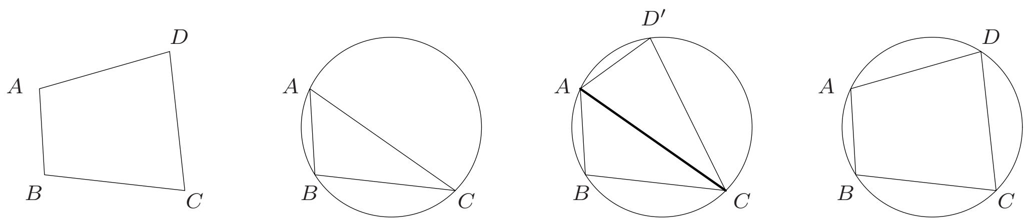


Fig. 26 (a,b,c,d)

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante :

16. *Un quadrilatère est inscriptible à un cercle si et seulement si la somme de deux de ses angles opposés vaut deux droits.*

8

Parallèles et angles

La figure 1a montre deux ensembles de lignes droites qui se croisent. Chaque ensemble est clairement identifiable : ses lignes sont toutes parallèles entre elles. En disposant cette figure de manière qu'un des ensembles soit horizontal, on y voit plus facilement toute une série d'angles et de segments égaux qui vont nous intéresser (figure 1b).

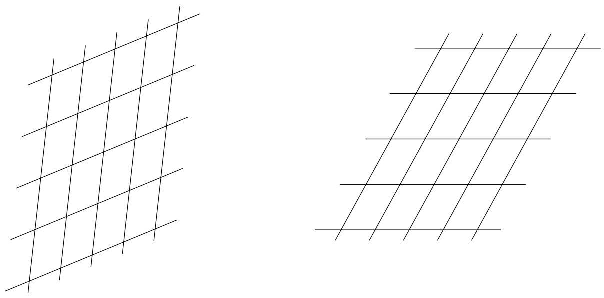


Fig. 1 (a,b)

Comme le montre la figure 2, l'ombre au soleil d'une damier vu par transparence a souvent une forme analogue à celle de la figure 1.

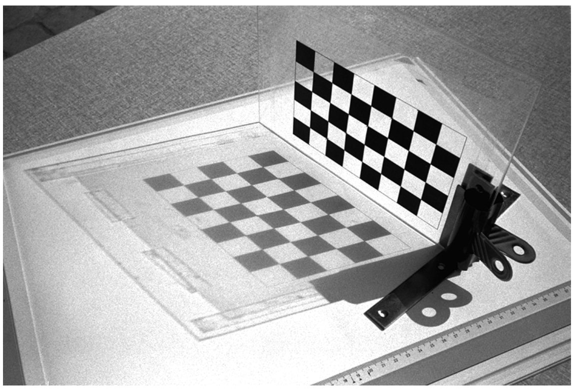


Fig. 2

1 Parallèles, angles et demi-tour

Phénomène de base 1. – Dans un premier temps, dessinons seulement deux droites qui se rencontrent : les droites a et b de la figure 3a. Nous y voyons des angles égaux (figures 3b et 3c), que l'on appelle *angles opposés par le sommet*. En plaçant les deux lignes comme sur la figure 4, on voit encore mieux l'égalité des deux angles.

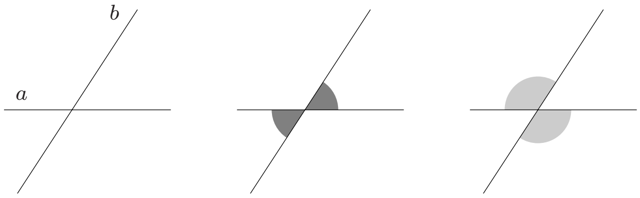


Fig. 3 (a,b,c)

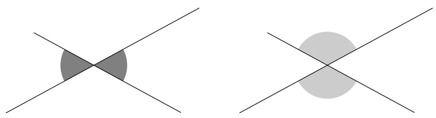


Fig. 4

Phénomène de base 2. – Traçons ensuite deux droites parallèles et une transversale (figure 5). Nous voyons que les deux droites sont inclinées de la même façon sur la transversale : les angles grisés de la figure 6 sont donc égaux. On les appelle *angles correspondants*. La figure 7 montre d'autres couples d'angles correspondants.

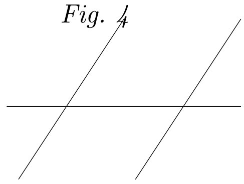


Fig. 5

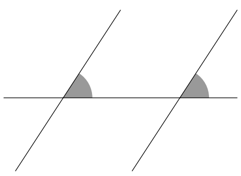


Fig. 6

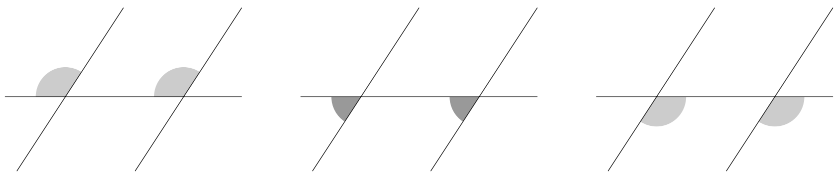


Fig. 7

Sur la figure 8, on voit les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ qui sont égaux car ce sont des angles correspondants. Mais les angles $\widehat{b}$ et $\widehat{c}$ sont aussi égaux car ils sont opposés par le sommet. Ainsi les deux angles grisés de la figure 9 sont égaux. Des angles disposés de cette façon sont appelés *angles alternes internes.* La figure 10 montre une autre paire d'angles alternes internes.

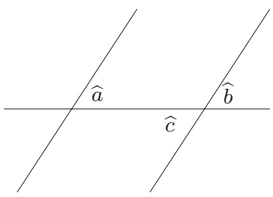


Fig. 8

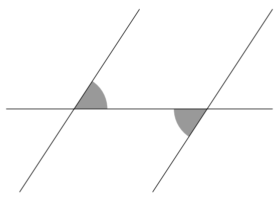


Fig. 9

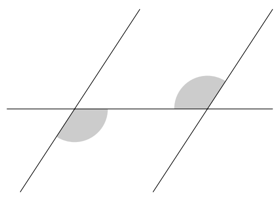


Fig. 10

Considérons maintenant les phénomènes suivants.

Phénomène de base 3. – Donnons-nous deux angles égaux $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ (figure 11) et déposons-les sur une droite c, du même côté de c et inclinés du même côté (figure 12). Les côtés des deux angles qui ne reposent par sur c sont parallèles[1].

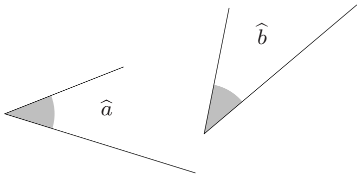


Fig. 11

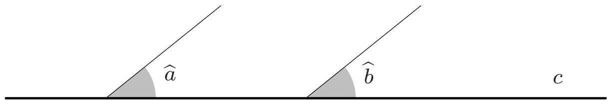


Fig. 12

Phénomène de base 4. – Considérons encore la figure 12. On peut passer de l'angle $\widehat{a}$ à l'angle $\widehat{b}$ en faisant glisser $\widehat{a}$ le long de c. Durant tout le mouvement, le côté de $\widehat{a}$ qui n'est pas sur c reste parallèle à lui-même (figure 13).

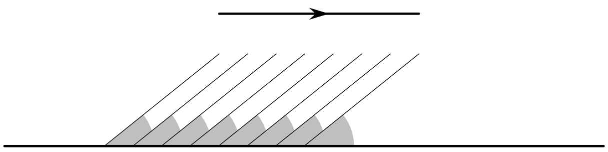


Fig. 13

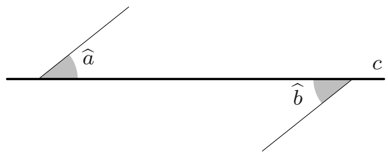


Fig. 14

Phénomène de base 5. – Donnons-nous deux angles égaux a et b (figure 11) et déposons-les sur une droite c, de part et d'autre de c et inclinés comme à la figure 14. Les côtés des deux angles qui ne sont pas sur c sont parallèles.

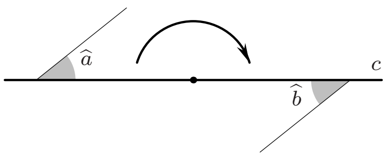


Fig. 15

Phénomène de base 6. – Considérons encore la figure 14. On peut passer de l'angle a à l'angle b en faisant tourner a d'un demi-tour autour du milieu du segment qui relie les deux sommets (figure 15).

La proposition suivante résume nos observations et expériences :

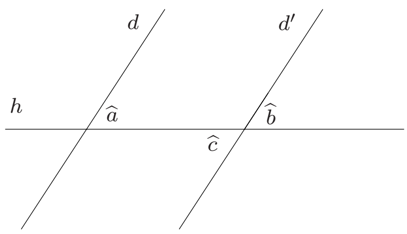


Fig. 16

1. *Soit trois lignes droites h, d et d' telles que h et d se rencontrent (figure 16). Si une des trois propriétés suivantes est vérifiée, alors les deux autres le sont aussi :*

1. *d et d' sont parallèles ;*
2. *les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont égaux ;*
3. *les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{c}$ sont égaux.*

[1] On comparer ca ceci au phénomène de base 3 à la page 78.

Notons au passage qu'en formulant le phénomène de base 6 à la page précédente, nous avons imaginé de faire faire un demi-tour à une figure. Nous recourrons plusieurs fois dans la suite à la proposition suivante :

2. *Si on fait faire à une droite d'un plan un demi-tour autour d'un point, la droite à l'arrivée est parallèle à la droite de départ.*

2 La somme des angles d'un triangle

Intéressons-nous maintenant à ce qu'on appelle couramment *la somme des angles d'un triangle.* On dit en abrégé *somme des angles* pour *somme des mesures des angles.* Rappelons qu'on mesure habituellement les angles en degrés.

La figure 17 montre quatre triangles. Nous allons prouver un résultat étonnant : quel que soit le triangle, la somme de ses angles est la même.

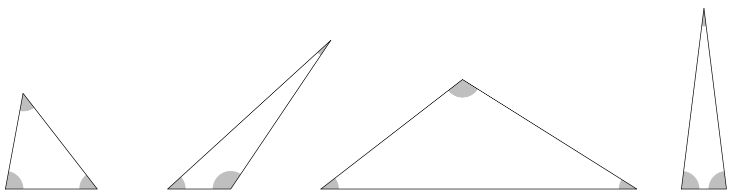


Fig. 17

Donnons-nous donc un triangle (figure 18). Complétons-le par une ligne parallèle à l'un de ses côtés (figure 19).

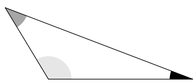


Fig. 18

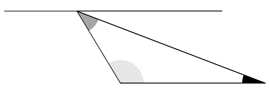


Fig. 19

Nous y retrouvons de deux manières distinctes deux parallèles coupées par une transversale. D'abord, à la figure 20, on voit des angles alternes-internes, qui sont donc égaux. Ensuite, à la figure 21, on trouve deux autres angles égaux. On conclut que la juxtaposition des trois angles du triangle donne un angle plat, c'est-à-dire 180°.

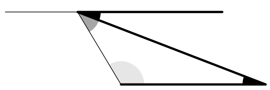


Fig. 20

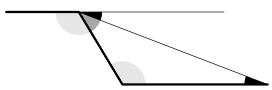


Fig. 21

3. *La somme des angles de n'importe quel triangle vaut* 180°.

3 La somme des angles d'un quadrilatère

La figure 22 montre quatre quadrilatères. Nous allons maintenant prouver un nouveau résultat étonnant : quel que soit le quadrilatère choisi, la somme de ses angles est la même, et elle vaut quatre angles droits (ce que l'on voit facilement pour le rectangle).

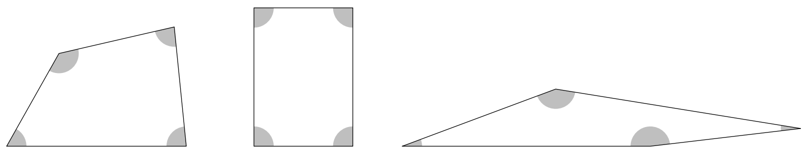


Fig. 22

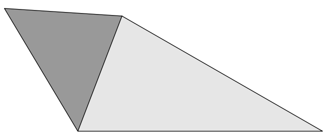


Fig. 23

N'importe quel quadrilatère peut être découpé en deux triangles par un coup de ciseau le long d'une diagonale (figure 23). La somme des angles est donnée par la somme des angles des deux triangles. Elle vaut donc 360°.

4. *La somme des angles de n'importe quel quadrilatère convexe vaut*
360°.

Nous n'avons envisagé que les quadrilatères *convexes*, ce qui veut dire que nous n'avons pas pris en considération les quadrilatères qui, comme celui de la figure 24, ont un angle rentrant. Nous n'avons pas non plus considéré les quadrilatères dont deux côtés se croisent (comme par exemple celui de la figure 25).

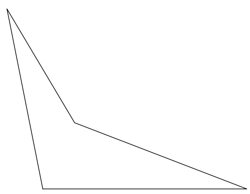


Fig. 24

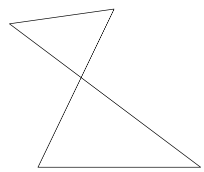


Fig. 25

4 La somme des angles d'un polygone quelconque

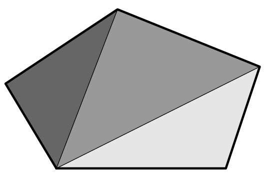


Fig. 26

Dans ces conditions, on peut décomposer un polygone à n côtés en $n-2$ triangles. On voit dans ces cas-là que la somme des angles du polygone vaut $(n-2) \times 180°$.

Par exemple, on peut décomposer un pentagone en trois triangles. La somme de ses angles vaut donc $3 \times 180°$. On peut décomposer un hexagone en quatre triangles. La somme de ses angles vaut donc $4 \times 180°$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

5. *La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut* $(n-2) \times 180°$.

5 Les angles des polygones réguliers

Un *polygone régulier* est un polygone dont tous les côtés sont égaux et dont tous les angles sont égaux.

Une manière de calculer la somme des angles d'un polygone régulier fait appel à la proposition 5. Prenons par exemple un pentagone régulier (figure 27). La somme de ses angles vaut $3 \times 180°$, c'est-à-dire $540°$. Comme il y a cinq sommets, l'angle en chaque sommet vaut $\frac{540°}{5} = 108°$.

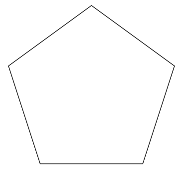


Fig. 27

De manière générale :

6. *L'angle en chaque sommet d'un polygone régulier ayant n côtés vaut* $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$.

6 Pavages

La figure 28 représente un pavage avec des dalles carrées. Elle suffit à montrer que l'on peut assembler certains polygones de sorte

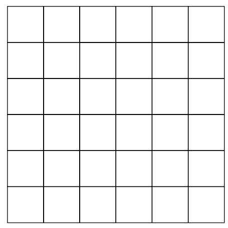


Fig. 28

(a) qu'ils ne se recouvrent pas,

(b) qu'ils ne laissent aucune lacune (aucune partie non recouverte) entre eux,

(c) que l'assemblage puisse être étendu à tout le plan.

Nous allons nous intéresser à des pavages de ce genre en ajoutant deux conditions :

(d) la première est que, comme c'est déjà le cas pour la figure 28, tous les polygones soient identiques ;

(e) la seconde est qu'ils se côtoient toujours le long d'un côté entier ; par exemple, le pavage de la figure 29 ne satisfait pas à cette condition.

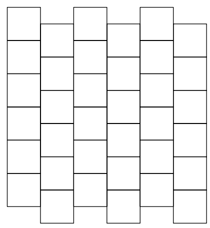


Fig. 29

Nous venons de voir qu'on peut paver le plan avec des carrés. Avec quels autres polygones réguliers est-ce encore possible ?

Puisque l'angle du triangle équilatéral vaut 60 degrés, on peut assembler six triangles équilatéraux autour d'un point (figure 30 à la page suivante). En effet, le tour complet vaut 360 degrés, c'est-à-dire exactement 6 fois soixante degrés. Qui plus est cette figure peut être étendue pour couvrir le plan entier, comme le montre la figure 31 à la page suivante.

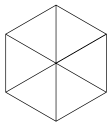


Fig. 30

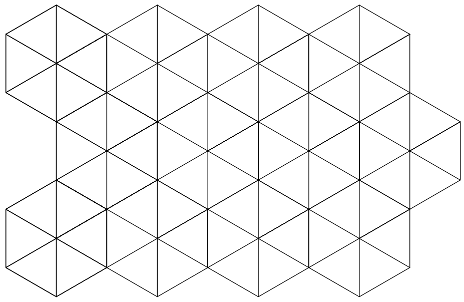
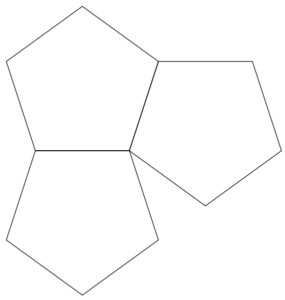


Fig. 31

Que se passe-t-il lorsque l'on prend des pentagones réguliers ? En chaque sommet, l'angle intérieur vaut $\frac{3 \times 180°}{5} = 108°$. En juxtaposant trois angles on obtient un angle total de 324°, ce qui n'est pas assez (figure 32a). En en juxtaposant quatre, on obtient 432°, ce qui est trop (figure 32b). Il est donc impossible de paver le plan avec des pentagones réguliers.



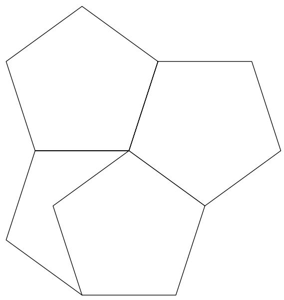


Fig. 32 (a,b)

Les angles intérieurs des hexagones réguliers valent

$$\frac{(6-2) \times 180°}{6} = \frac{4 \times 180°}{6} = 120°.$$

Trois hexagones s'ajustent parfaitement en chaque nœud, comme le montre la figure 33. Ici aussi, cette figure peut être étendue au plan entier (voir figure 34). En divisant chaque hexagone en six triangles équilatéraux, on retrouve le pavage de la figure 31.

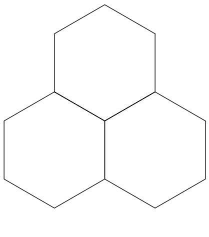


Fig. 33

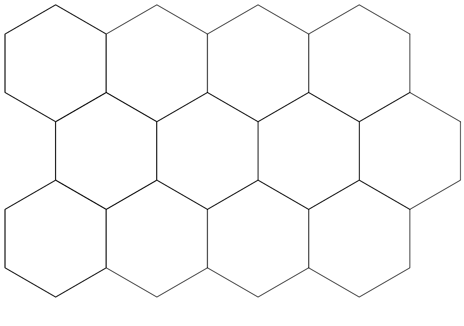


Fig. 34

Dans le cas de l'heptagone régulier, en chaque sommet l'angle intérieur vaut $\frac{5\times180°}{7}$, c'est-à-dire entre 128° et 129°. Trois angles juxtaposés mesurent au total plus de 384°, ce qui est trop. On ne peut donc pas paver en n'utilisant que des heptagones réguliers.

On peut observer, et on prouverait sans peine, que plus le nombre de côtés d'un polygone régulier est élevé, plus grand est l'angle en chacun de ses sommets. Ceci montre qu'il n'est pas possible de paver le plan avec des polygones réguliers dont le nombre de côté est plus grand que six.

On dit qu'un pavage du plan est *régulier* lorsque, satisfaisant aux conditions que nous nous sommes données ci-dessus, il est réalisé avec des polygones réguliers.

Nous avons donc démontré que :

7. *Il y a trois pavages réguliers : les pavages avec des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers. Ils ont respectivement six, quatre et trois polygones autour de chaque nœud.*

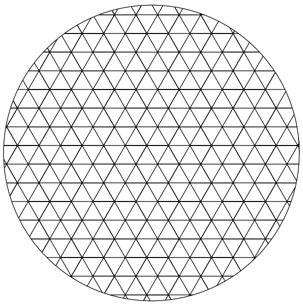


Fig. 35

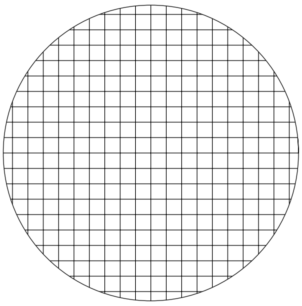


Fig. 36

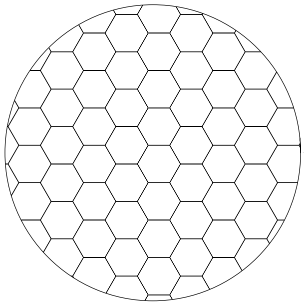


Fig. 37

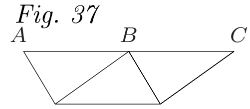


Fig. 38

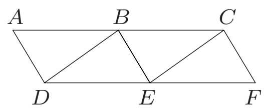


Fig. 39

La question des pavages du plan est vaste. Contentons-nous ici de nous poser à ce sujet une dernière question : avec quels types de polygones quelconques peut-on paver le plan ?

Montrons d'abord qu'on peut paver le plan avec un triangle quelconque. La figure 38 montre trois triangles identiques, accolés de telle sorte que les côtés $[AB]$ et $[BC]$ soient alignés (la somme des angles se trouvant en B vaut 180°). Ajoutons un triangle à cet assemblage (figure 39) ; les côtés $[DE]$ et $[EF]$ sont alignés. En continuant de même, on forme une bande (figure 40), que l'on peut prolonger indéfiniment des deux côtés.

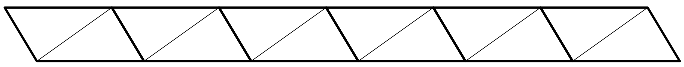


Fig. 40

En accolant indéfiniment de telles bandes, on arrive à paver tout le plan (figure 41 à la page suivante).

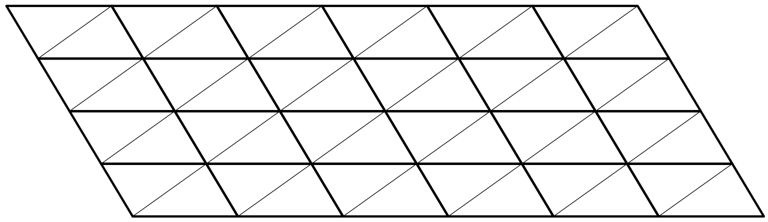


Fig. 41

8. *On peut paver le plan avec n'importe quel triangle.*

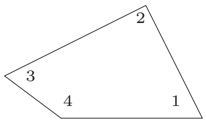


Fig. 42

Ce qui est plus surprenant, c'est que l'on peut également paver avec n'importe quel quadrilatère. Partons d'un premier quadrilatère comme le montre la figure 42. Numérotons ses angles. Créons-en un deuxième en tournant le premier d'un demi-tour autour du milieu d'un de ses côtés, ce qui amène l'angle 2 à côté de l'angle 1. Continuons de même en faisant tourner le deuxième quadrilatère, ce qui amène l'angle 3 à côté de l'angle 2. On fait ensuite de même avec le troisième quadrilatère, ce qui amène l'angle 4 à côté de l'angle 3. Puisque la somme des angles intérieurs de n'importe quel quadrilatère mesure 360°, les quatre quadrilatères occupent exactement le tour complet autour du point où les angles se rassemblent (figure 43).

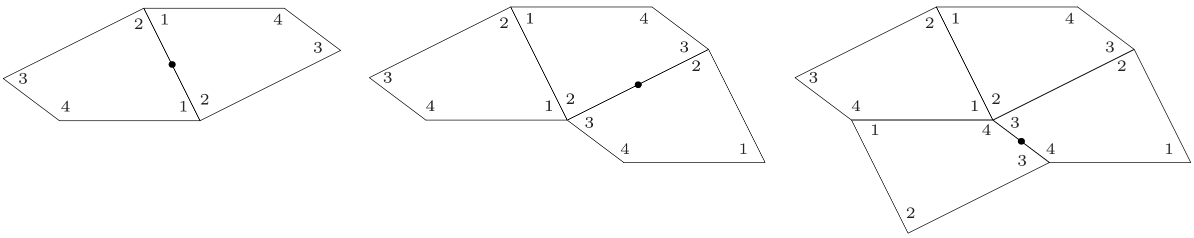


Fig. 43

Peut-on maintenant étendre ce début de pavage au plan entier ? Repartons à la figure 44 de l'octogone obtenu à la figure 43 en accolant quatre quadrilatères. On veut lui accoler une copie de lui-même, comme le suggère la figure 45. Il suffit de numéroter

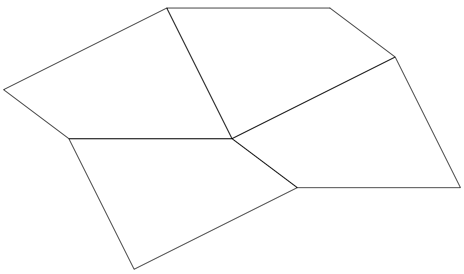


Fig. 44

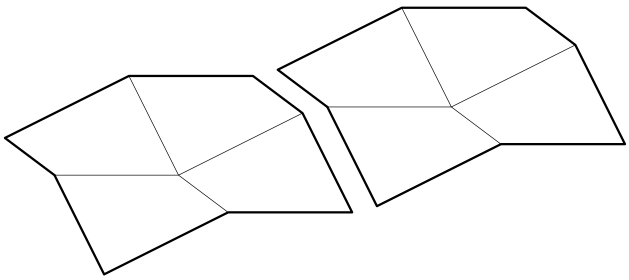


Fig. 45

certains angles comme précédemment pour voir que les deux octogones se raccordent parfaitement, la somme des angles au point

P valant 360° (figure 46). On peut alors composer toute une bande d'octogones comme le montre la figure 47.

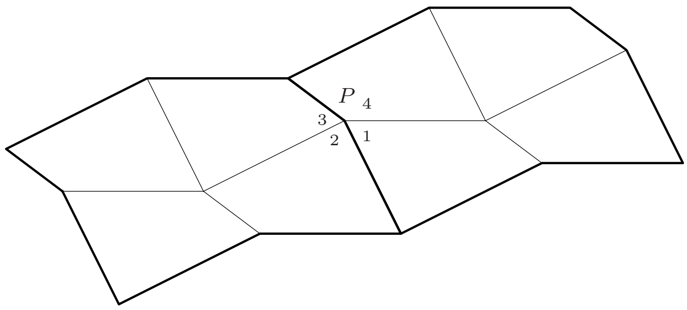


Fig. 46

Ceci fait, on montre par un argument analogue que le bord du dessus de la bande est identique au bord du dessous. Ceci permet d'empiler de telles bandes comme le montre la figure 48. Et donc on peut de cette façon couvrir tout le plan.

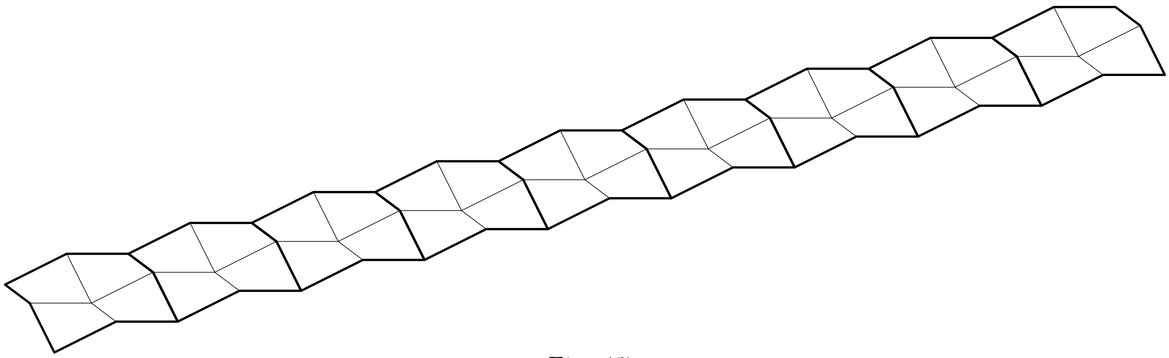


Fig. 47

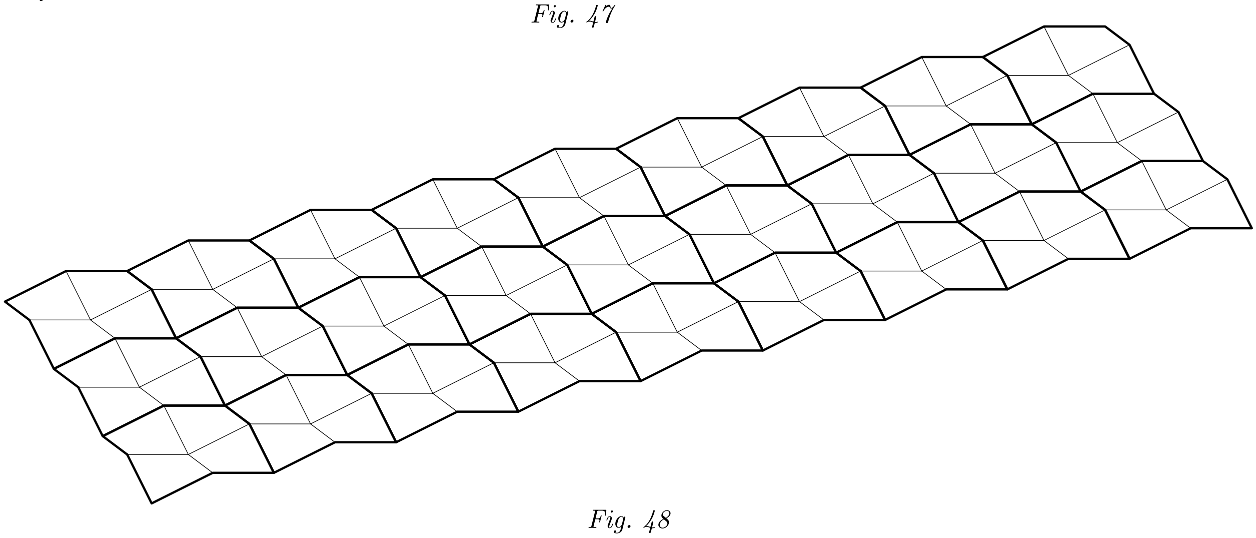


Fig. 48

9. *On peut paver le plan avec n'importe quel quadrilatère.*

Dernière question enfin : peut-on paver le plan avec n'importe quel pentagone ? La réponse est non, puisque, comme nous l'avons vu, c'est déjà impossible avec des pentagones réguliers. Mais la figure 49 montre que c'est possible avec certains pentagones.

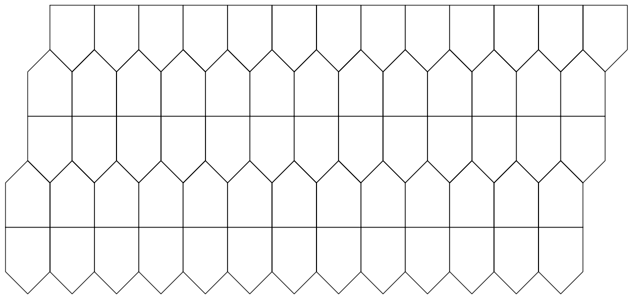


Fig. 49

9

Le théorème de Pythagore

1 En considérant des surfaces

Considérons un triangle rectangle et construisons un carré sur chacun de ses côtés (figure 1). Nous allons montrer que la somme des deux carrés construits sur les côtés a et b de l'angle droit égale le carré construit sur l'hypoténuse (*additionner des carrés* veut dire ici additionner leurs aires ; dans tout triangle rectangle, on appelle *hypothénuse* le plus grand côté).

Pour cela, considérons un grand carré de côté $a+b$ et quatre copies de notre triangle (figure 2).

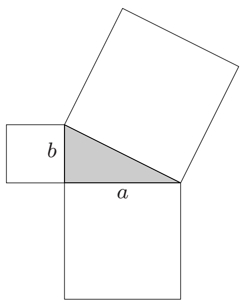


Fig. 1

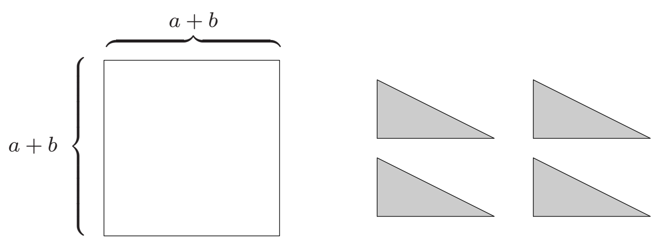


Fig. 2

Disposons nos quatre triangles dans le carré, d'abord comme le montre la figure 3a, puis comme le montre la figure 3b.

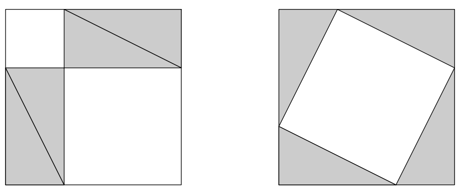


Fig. 3 (a,b)

La partie blanche de la figure 3a est égale à la partie blanche de la figure 3b. Or la partie blanche de la figure 3a est la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Quant à la partie blanche de la figure 3b, elle est le carré construit sur l'hypoténuse. Pour affirmer cela, nous devons être sûrs que cette partie blanche est bien un carré. Or elle a quatre côtés égaux. De plus chacun de ses angles est droit. On le voit au fait qu'ils ont tous été construits de la même façon : ils sont donc égaux et valent chacun 360 degrés/4 (cf. proposition 4 du chapitre 8 à la page 116).

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

1. *Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit est égale au carré construit sur l'hypoténuse.*

En utilisant la formule de l'aire du carré, on voit que le théorème de Pythagore a pour expression

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

où a, b et c sont ici les mesures des trois côtés du triangle prises dans une même unité.

Cette formule est souvent utile pour calculer des longueurs de segments.

Si l'on connaît les mesures a et b des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, il est donc possible de calculer la mesure de l'hypoténuse c :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2 Réciproque du théorème

Considérons maintenant un triangle dont nous ne savons pas s'il est rectangle ou non. Mais supposons qu'on nous dise que la somme des carrés construits sur deux de ses côtés est égale au carré construit sur le troisième. Le triangle est-il rectangle ?

Montrons que oui (la démonstration qui suit s'inspire de FESEC [1996]). Soit le triangle de la figure 4, avec l'hypothèse que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Le côté c est le plus grand. Disposons-le horizontalement, ce que montre la figure 5. Le pied de la hauteur issue de P tombe sur le côté c. (Les situations montrées par les figures 7 et 8 sont impossibles parce que c n'y est pas le plus grand côté.)

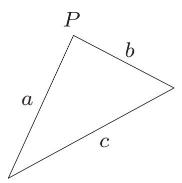


Fig. 4

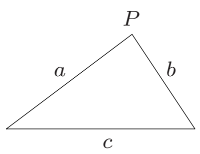


Fig. 5

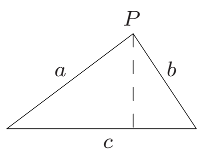


Fig. 6

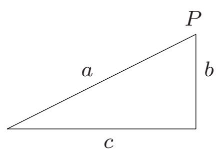


Fig. 7

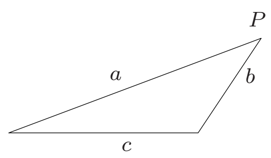
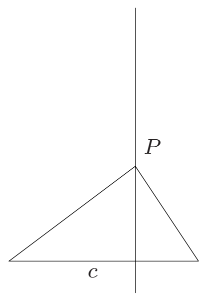


Fig. 8

La figure 9a à la page suivante reproduit la figure 5, mais nous y avons ajouté une verticale issue du sommet P.



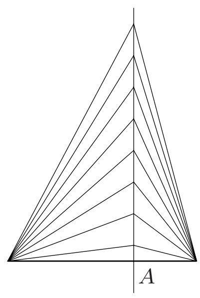
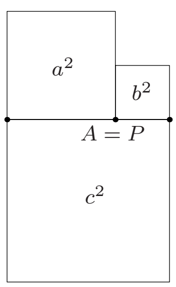


Fig. 9 (a,b)

Imaginons maintenant de déformer le triangle en promenant le sommet P le long de cette verticale. Partons du point A vers le haut. Lorsque P est en A, on a clairement

$$a^2 + b^2 < c^2.$$



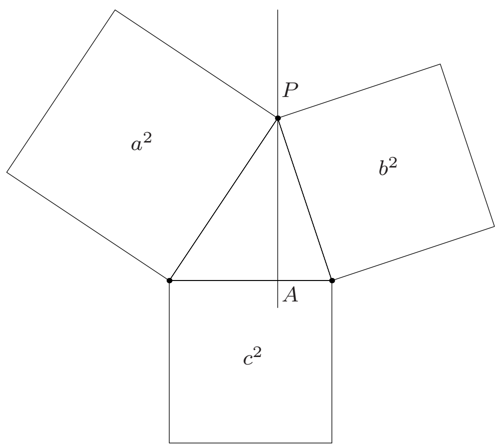


Fig. 10 (a,b)

C'est ce qu'illustre la figure 10a. Lorsque P monte, les carrés construits sur les côtés a et b grandissent, alors que le carré construit sur c reste le même. Lorsque P coïncide avec A, l'angle au sommet du « triangle » est en quelque sorte un « angle plat » : il vaut 180°. Lorsque P monte indéfiniment, l'angle tend vers 0. Pour une certaine position intermédiaire, l'angle est droit, et on a

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

En dessous de cette position on a donc

$$a^2 + b^2 < c^2,$$

et au dessus de cette position

$$a^2 + b^2 > c^2.$$

La figure 10b illustre cette dernière inégalité.

Donc le triangle avec un angle droit, étant le seul pour lequel on a l'égalité, est bien le triangle donné.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

2. *Si, dans un triangle, la somme des carrés construits sur deux des côtés est égale au carré construit sur le troisième, alors le triangle est rectangle.*

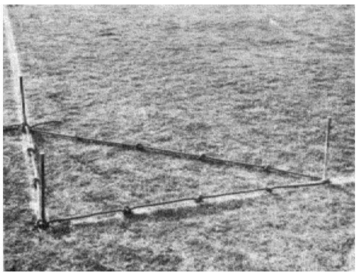


Fig. 11

Cette proposition est souvent utilisée pour tracer des angles droits sans utiliser une équerre : il suffit d'assembler en triangle des segments (des ficelles tendues) dont les côtés sont proportionnels à 3, 4 et 5. En effet, on a

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

On peut combiner les propositions 1 et 2 en une seule, de la manière suivante.

3. *Un triangle est rectangle si et seulement si la somme des carrés construits sur deux de ses côtés est égale au carré construit sur le troisième.*

10

Parallèles et longueurs

Comme au chapitre 8, nous partons ici d'un réseau de parallèles équidistantes coupé par des transversales. Mais cette fois nous nous intéresserons moins aux ensembles d'angles égaux qu'aux ensembles de segments égaux.

1 Parallèles et transversales

Les cinq phénomènes de base suivants plantent le décor de ce chapitre.

Phénomène de base 1. – Considérons un réseau de parallèles équidistantes (figure 1a). Posons une droite (une baguette) en travers sur ce réseau (figure 1b). Les parallèles déterminent sur celle-ci des segments égaux (figure 1c).

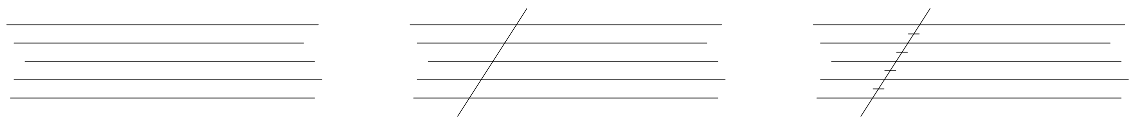


Fig. 1 (a,b,c)

Phénomène de base 2. – Sur un réseau de parallèles équidistantes (figure 2a), posons deux transversales parallèles (figure 2b). Tous les segments déterminés sur ces deux parallèles sont égaux (figure 2c).

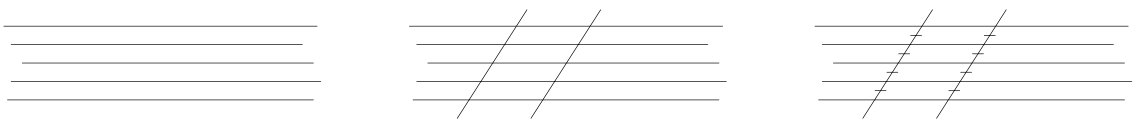


Fig. 2 (a,b,c)

Phénomène de base 3. – Considérons un réseau de parallèles équidistantes traversé par deux droites parallèles (figure 3a). Nous venons de voir que le réseau découpe sur ces transversales des chaînes de segments égaux. Rajoutons à chaque chaîne et du même côté, un segment égal aux précédents (figure 3b)). La droite qui joint leurs extrémités est parallèle aux droites du réseau : elle prolonge celui-ci (figure 3c).

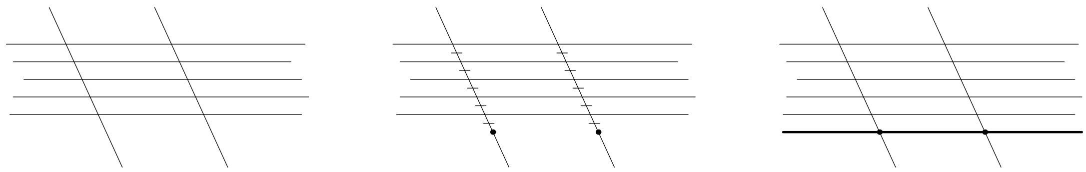


Fig. 3 (a,b,c)

Phénomène de base 4. – Considérons un réseau de parallèles équidistantes traversé par deux droites quelconques (figure 4a). Rajoutons à chaque chaîne de segments égaux et du même côté, un segment égal aux segments de la chaîne (figure 4b). La droite qui joint leurs extrémités est parallèle aux droites du réseau : elle prolonge celui-ci (figure 4c).

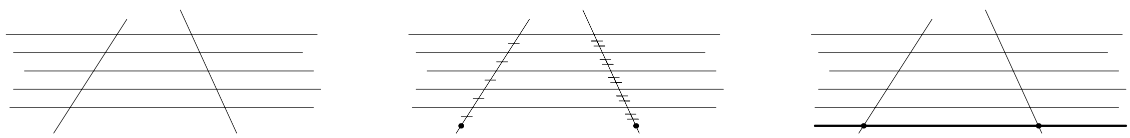


Fig. 4 (a,b,c)

Phénomène de base 5. – Considérons deux réseaux croisés de parallèles équidistantes (figure 5a). Partant d'un point A, allons vers un point B en avançant d'un segment, puis en montant obliquement d'un segment (figure 5b). Allons de même du point B au point C, puis de C à D, etc. À chaque étape, nous avons avancé horizontalement d'une certaine longueur toujours la même, puis nous sommes montés aussi d'une certaine longueur (autre) toujours la même. Les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, etc. ont tous la même pente. Les points A, B, C, $D\ldots$ sont alignés (figure 5c).

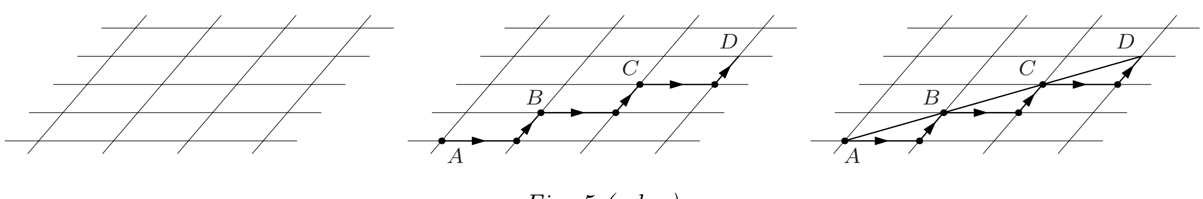


Fig. 5 (a,b,c)

La figure 6 à la page suivante montre divers exemples où on voit qu'en progressant rythmiquement toujours de tant dans une direction, puis de tant dans l'autre, on passe par des points alignés.

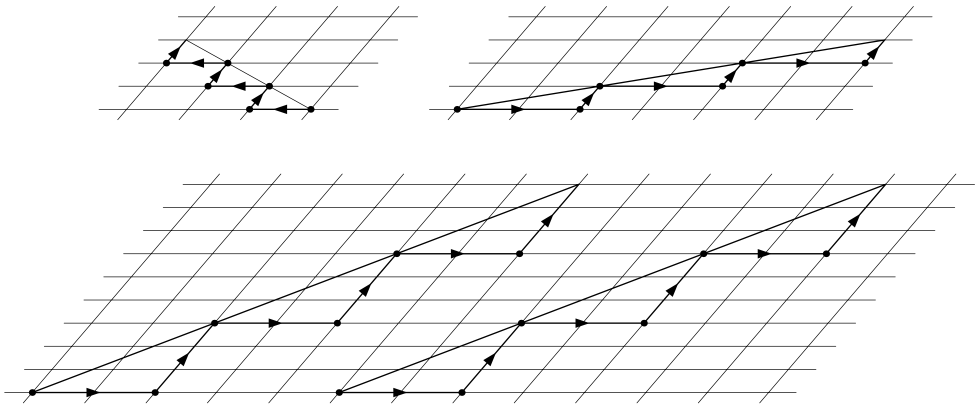


Fig. 6

2 Le parallélogramme

La figure 7 montre quelques parallélogrammes en position quelconque. La figure 8 les montre chacun avec deux côtés horizontaux.

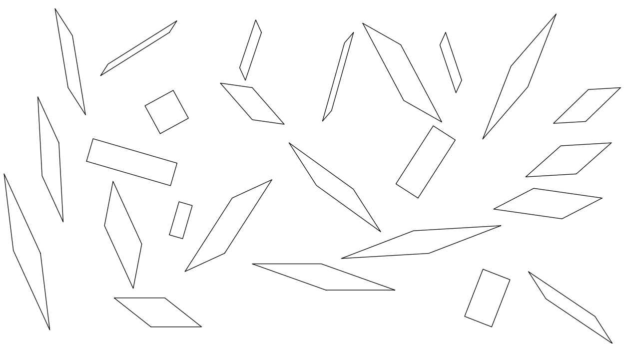


Fig. 7

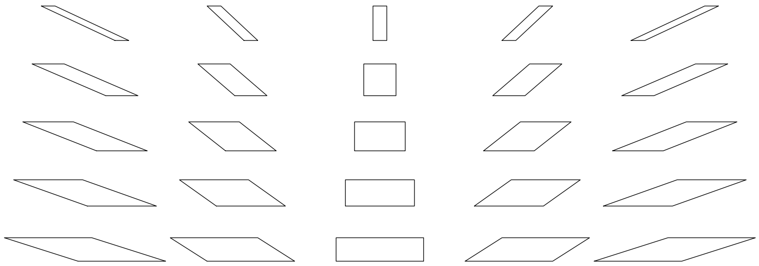


Fig. 8

Fig. 9

Le soleil donne souvent l'image d'une fenêtre sur un mur ou un plancher sous la forme d'un parallélogramme. On obtient également des parallélogrammes en déformant un rectangle articulé.

Phénomène de base 6. – Donnons-nous un rectangle, (figure 9). Si on imagine ce rectangle articulé et qu'on le déforme, on n'obtient que des parallélogrammes (figure 10).

Fig. 10

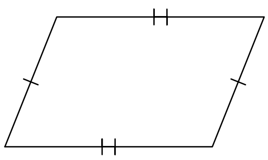


Fig. 11

2.1 Propriétés du parallélogramme

1. *Le parallélogramme a ses côtés opposés parallèles.*

2. *Le parallélogramme a ses côtés opposés égaux (figure 11).*

Cette observation recoupe le phénomène de base2 (page 127).

3. *Le parallélogramme a ses angles opposés égaux (figure 12).*

Pour s'en convaincre, il suffit de prolonger ses côtés (figure 13) et d'observer les angles correspondants et alternes internes (cf. la section 1 du chapitre 8, page 113).

Fig. 12

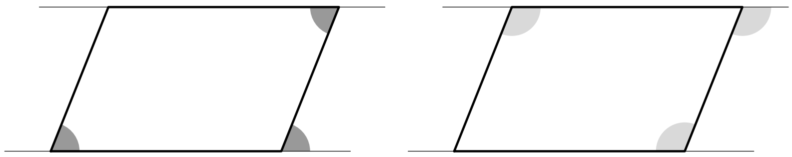


Fig. 13

4. *Les médianes du parallélogramme se rencontrent en leur milieu et le décomposent en quatre parallélogrammes identiques (figure 14 à la page suivante).*

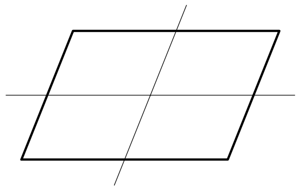


Fig. 14

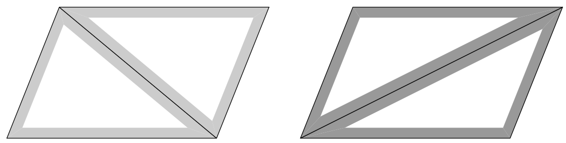


Fig. 15

5. *Chaque diagonale décompose le parallélogramme en deux triangles identiques (figure 15). Chacun de ceux-ci peut être superposé à l'autre par rotation d'un demi-tour autour du milieu de la diagonale (figure 16).*

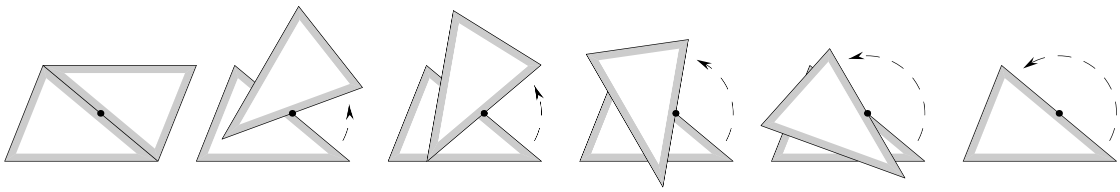


Fig. 16

6. *Les diagonales du parallélogramme se rencontrent en leur milieu (figure 17).*

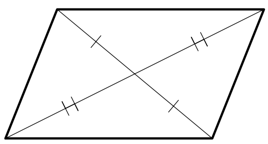


Fig. 17

Pour nous en assurer, relisons la figure 16 en sens inverse (figure 18), mais après avoir ajouté une médiane au triangle de départ. (Dans un triangle, une *médiane* est un segment qui joint le milieu d'un côté au sommet opposé.)

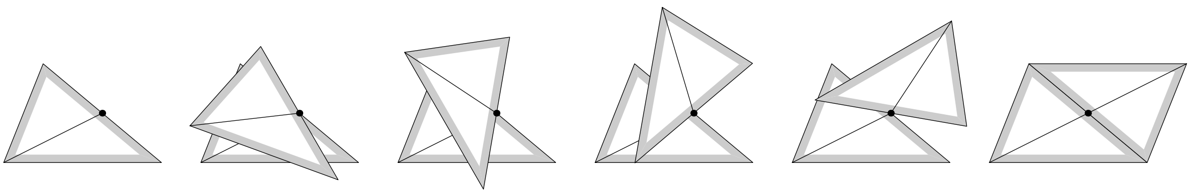


Fig. 18

Après le demi-tour, cette médiane vient s'aligner sur la position qu'elle avait au départ. Les deux médianes (celle au départ et celle à l'arrivée) dessinent donc la diagonale du parallélogramme.

Les deux côtés juxtaposés des deux triangles forment la deuxième diagonale.

7. *Les médianes et les diagonales du parallélogramme se rencontrent en un même point (figure 19).*

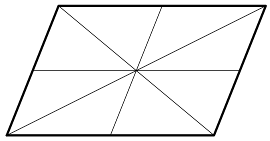


Fig. 19

Repartons en effet du parallélogramme muni de ses deux médianes (figure 20a). Joignons les points A et B, ainsi que B et C (figure 20b). Les points A, B et C sont alignés, et donc B est sur la diagonale $[AC]$ du parallélogramme (cf. le phénomène de base 5 à la page 128). On raisonne de même pour l'autre (figure 20c).

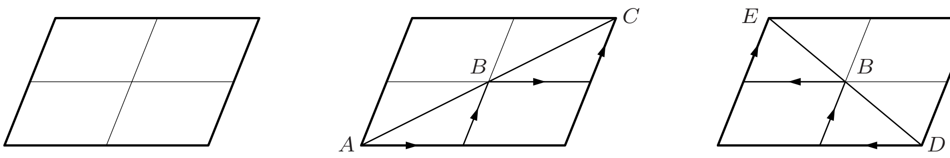


Fig. 20 (a,b,c)

2.2 Conditions déterminantes du parallélogramme

8. *Si un quadrilatère convexe a deux paires de côtés parallèles, il est un parallélogramme.*

9. *Si un quadrilatère a deux côtés parallèles et égaux, il est un parallélogramme (figure 21).*

C'est un cas particulier du phénomène de base3 (page 127).

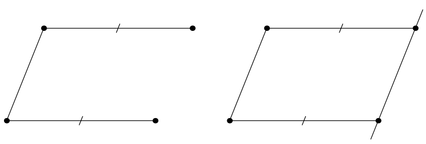


Fig. 21

10. *Si un quadrilatère convexe a les côtés opposés égaux, il est un parallélogramme.*

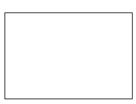


Fig. 22

En effet, avec deux paires de côtés égaux, on peut construire un rectangle (figure 22). Et si on imagine ce rectangle articulé de manière à pouvoir le déformer sans croiser les tiges, on n'obtient que des parallélogrammes (phénomène de base6 à la page 130).

11. *Si un quadrilatère a les diagonales qui se rencontrent en leur milieu, il est un parallélogramme.*

En effet, soit deux segments qui se rencontrent en leur milieu (figure 23a).

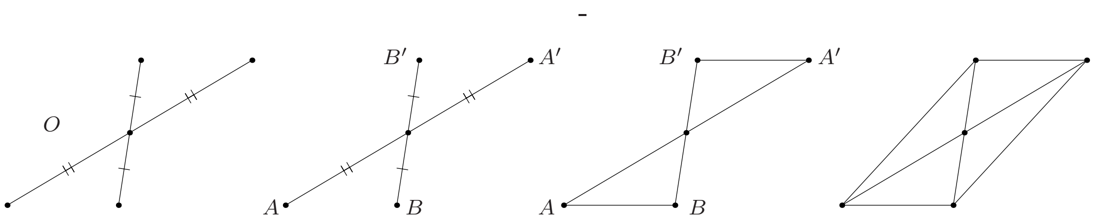


Fig. 23 (a,b,c,d)

En faisant tourner cette figure d'un demi-tour autour de ce milieu O, on amène le point A en A', et B en B' (figure 23b). Donc AB est parallèle à $A'B'$ (cf. la propositon 6 du chapitre 8, page 114), et comme en outre $[AB] = [A'B']$, la figure $ABA'B'$ est un parallélogramme (figures 23c et 23d) .

12. *Si on superpose deux triangles identiques et qu'on fait tourner l'un d'eux d'un demi-tour autour du milieu d'un de ses côtés, on obtient un parallélogramme (figure 24).*

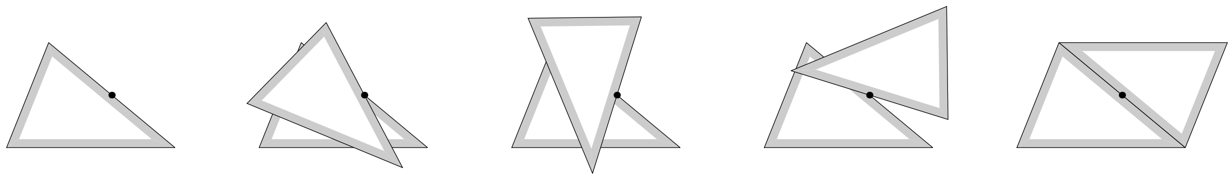


Fig. 24

3 Parallèles et rapports de longueurs

3.1 Le rapport de deux longueurs

Dans cette section nous étudions surtout les rapports de longueurs. Précisons donc cette notion.

Considérons deux segments a et b (figure 25a). Supposons qu'un troisième segment c soit contenu trois fois dans a et cinq fois dans b (figure 25b). Nous dirons alors que *a est à b comme 3 est à* 5, ou encore que *le rapport de a à b vaut* $\frac{3}{5}$. Et de même pour d'autres nombres (naturels) que 3 et 5.

Fig. 25 (a,b)

Il nous arrivera souvent ci-après de considérer des rapports égaux. Par exemple sur la figure 26 à la page suivante, a est à b

comme c est à d (et comme 3 est à 2). Nous exprimerons cette égalité de deux rapports en écrivant

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

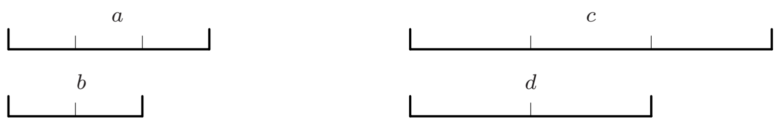


Fig. 26

Nous ferons, pour la suite de ce chapitre, l'importante supposition suivante : *nous n'envisageons que des couples de segments pour lesquels il existe un troisième segment (éventuellement égal à l'un des deux premiers) qui est contenu un nombre entier de fois dans le premier segment du couple, et aussi un nombre entier de fois dans le second.*

3.2 Des parallèles aux égalités de rapports

Donnons-nous trois droites parallèles et deux transversales (figure 27a). Supposons que $[A_1B_1]$ soit à $[B_1C_1]$ comme 3 est à 7, et donnons-nous des points de subdivision qui montrent ce rapport (figure 27b). Par ces points, traçons de nouvelles parallèles (figure 27c). Celles-ci divisent $[A_2B_2]$ en trois segments égaux, et $[B_2C_2]$ en sept segments égaux (cf. phénomène de base1 à la page 127). Donc

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}.$$

Cette conclusion est valable pour un rapport quelconque. Nous avons donc démontré la proposition suivante.

13. *Trois parallèles déterminent des segments sur une transversale quelconque. Les rapports entre ces segments sont les mêmes sur n'importe quelle transversale.*

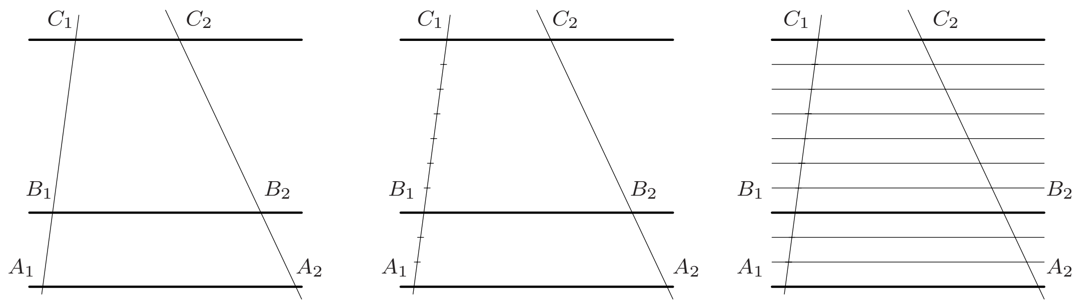


Fig. 27 (a,b,c)

La figure 28 à la page suivante montre divers cas où cette proposition s'applique. Dans tous ces cas,

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}.$$

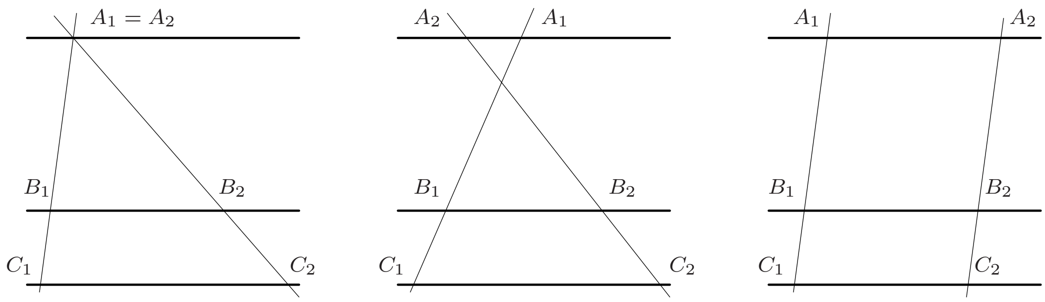


Fig. 28

Cette proposition est bien sûr également vraie pour les autres rapports déterminés sur ces transversales par les même parallèles :

$$\frac{[A_1C_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2C_2]}{[B_2C_2]} \quad \text{et} \quad \frac{[A_1B_1]}{[A_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[A_2C_2]}.$$

3.3 Des parallèles et des égalités de rapports à de nouvelles parallèles

Donnons-nous deux droites parallèles et deux transversales (figure 29a). Supposons que

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}.$$

Donnons-nous des points de subdivision qui montrent ces rapports (figure 29b). Par ces points sur $[A_1B_1]$, menons des parallèles à A_1A_2. Puisque celles-ci découpent $[A_2B_2]$ en segments égaux, elles passent par les points de subdivision déjà marqués sur $[A_2B_2]$ (figure 29c).

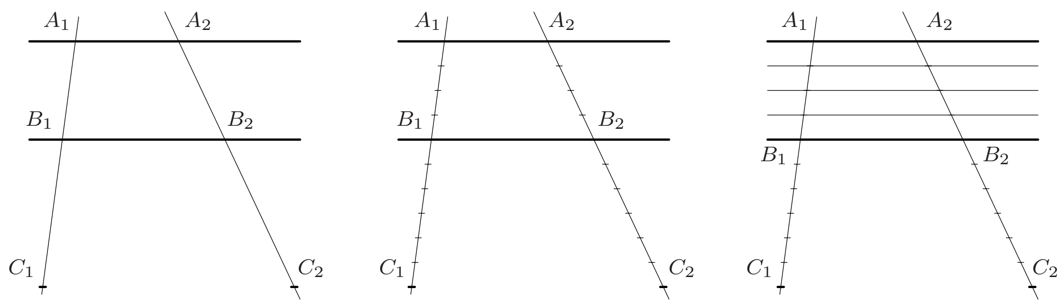


Fig. 29 (a,b,c)

Ceci fait, joignons le premier point de subdivision de $[B_1C_1]$ au premier point de subdivision de $[B_2C_2]$ (figure 30a à la page suivante). La droite que nous traçons ainsi est aussi parallèle à A_1A_2 (voir le phénomène de base 4 à la page 128). Nous pouvons de même joindre tous les points de subdivision de $[B_1C_1]$

aux points correspondants de $[B_2C_2]$. Toutes ces droites sont parallèles. En particulier C_1C_2 est parallèle à A_1A_2 et B_1B_2 (figure 30b).

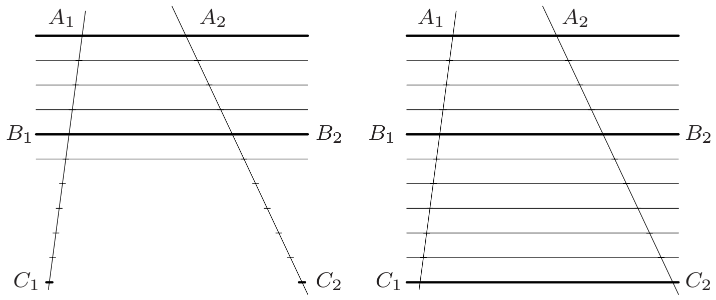


Fig. 30 (a,b)

D'où la proposition suivante.

14. *Soient deux parallèles A_1A_2 et B_1B_2 et deux transversales comme sur la figure 29a. Si*

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]},$$

alors C_1C_2 est parallèle à A_1A_2 et B_1B_2.

Cette proposition est bien sûr également vraie lorsque l'on remplace l'égalité $\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}$ par une des deux égalités suivantes :

$$\frac{[A_1B_1]}{[A_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[A_2C_2]} \quad \text{ou} \quad \frac{[A_1C_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2C_2]}{[B_2C_2]}.$$

Voici un cas particulier important de cette proposition.

15. *Soient deux droites sécantes (figure 31a). Si*

$$\frac{[OB_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[OB_2]}{[B_2C_2]},$$

alors C_1C_2 est parallèle à B_1B_2 (figure 31b).

Pour voir que cette proposition se ramène à la précédente, il suffit de considérer que les points A_1 et A_2 de la figure 29 sont confondus, ce qui conduit à la figure 31c.

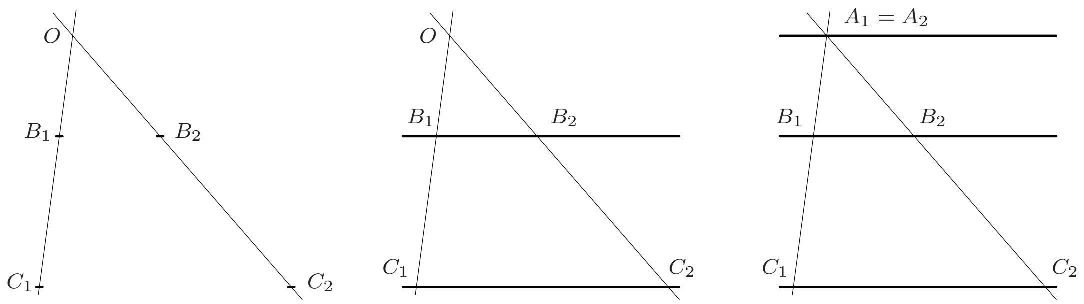


Fig. 31 (a,b,c)

À nouveau, cette proposition est également vraie lorsque l'on remplace l'égalité $\frac{[OB_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[OB_2]}{[B_2C_2]}$ par l'une des deux égalités suivantes :

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[OB_2]}{[OC_2]} \quad \text{ou} \quad \frac{[OC_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[OC_2]}{[B_2C_2]}.$$

3.4 Des parallèles à de nouvelles égalités de rapports

Donnons-nous deux droites parallèles et une transversale (figure 32a). Puis ajoutons une deuxième transversale (figure 32b).

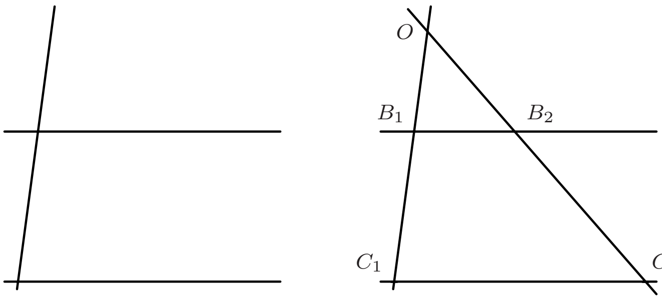


Fig. 32 (a,b)

Nous savons que

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[OB_2]}{[OC_2]}.$$

Soient $[OB_1]$ et $[OC_1]$ divisés en segments égaux (figure 33a). Par les points de subdivision, menons des parallèles à OC_2 (figure 33b). Ces droites découpent $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$ en segments égaux (voir les phénomènes de base 4 et 2 à la page 127). Donc

$$\frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]} = \frac{[OB_1]}{[OC_1]}.$$

On aurait pu faire le même raisonnement en subdivisant $[OC_2]$, comme le montre la figure 33c.

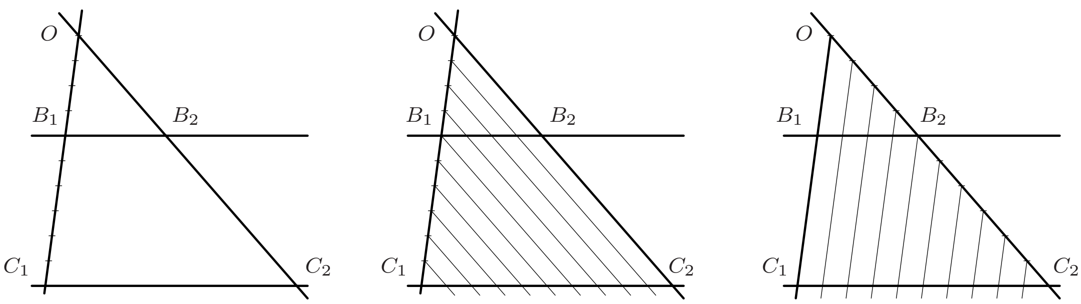


Fig. 33

Nous arrivons donc, de deux façons, à la proposition suivante.

16. *Soient deux parallèles et deux transversales comme sur la figure 32a. On a*

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[OB_2]}{[OC_2]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}.$$

3.5 Des égalités de rapport à l'alignement

Regardons maintenant la réciproque de cette proposition. Donnons-nous deux droites parallèles et une transversale. Soit O un point de celle-ci, non situé sur une des parallèles. Situons les points B_1, B_2, C_1 et C_2 (figure 34a), de sorte qu'on ait

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}.$$

Donnons-nous des points de subdivision qui montrent ces rapports (figure 34b).

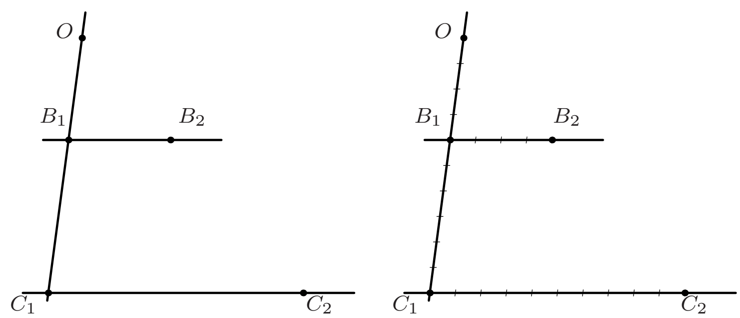


Fig. 34 (a,b)

Par les points de subdivision de $[OC_1]$, menons des parallèles à C_1C_2, et par les points de subdivision de $[C_1C_2]$, menons des parallèles à OC_1 (figure 35a). Deux de ces parallèles se croisent en B_2. La figure 35b nous renvoie au phénomène de base 5 à la page 128, et montre que O, B_2 et C_2 sont alignés. Nous avons donc prouvé la proposition suivante.

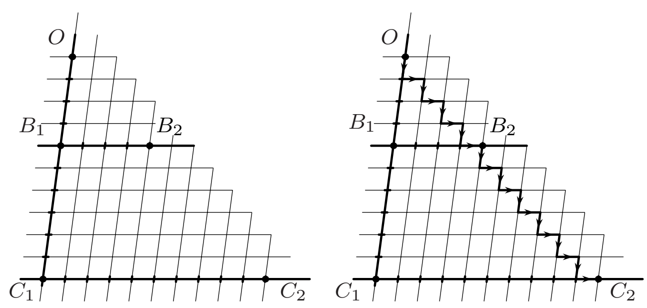


Fig. 35 (a,b)

17. *Soient deux parallèles, une transversale et des points O, B_1, B_2, C_1 et C_2 comme à la figure 34a à la page précédente. Si*

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}.$$

alors les points O, B_2 et C_2 sont alignés,

Les questions que nous venons de traiter amènent à envisager les systèmes de coordonnées et les équations de droites. Nous ébauchons ci-après le chemin qui permet d'y arriver sans peine. Reprenons nos deux dernières propositions, en orientant autrement les figures. En fait, nous avons démontré ceci :

(a) *sur la figure 36 et les figures analogues, on a*

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}\ ; \qquad (1)$$

(b) *si sur la figure 37 ou une figure analogue, on a la relation* (1), *alors les points O, B_2 et C_2 sont alignés.*

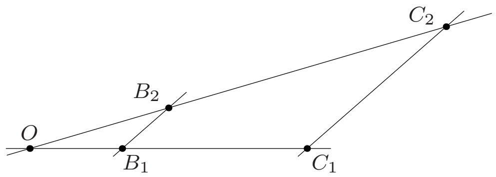


Fig. 36

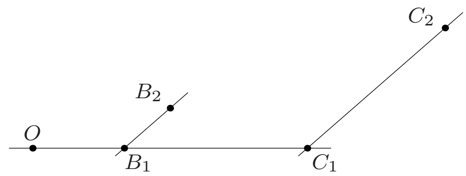


Fig. 37

Supposons maintenant qu'un même segment soit contenu un nombre entier de fois dans $[OB_1]$, $[OC_1]$, $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$, comme le montre la figure 38. Alors, contrairement à ce que nous avons fait jusqu'à présent, envisageons des rapports tels que

$$\frac{[OB_1]}{[B_1B_2]} \quad \text{ou encore} \quad \frac{[OC_1]}{[C_1C_2]}$$

entre des segments de directions différentes.

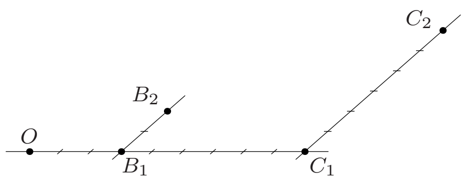


Fig. 38

Mais puisque

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]},$$

nous avons aussi

$$\frac{[OB_1]}{[B_1B_2]} = \frac{[OC_1]}{[C_1C_2]}.$$

De façon plus générale, sur une figure telle que la figure 39, on aura

$$\frac{[OB_1]}{[B_1B_2]} = \frac{[OC_1]}{[C_1C_2]} = \frac{[OD_1]}{[D_1D_2]} = \frac{[OE_1]}{[E_1E_2]} = \frac{[OF_1]}{[F_1F_2]} = \frac{[OG_1]}{[G_1G_2]}.$$

et tous les points qui ont un 2 pour indice sont alignés.

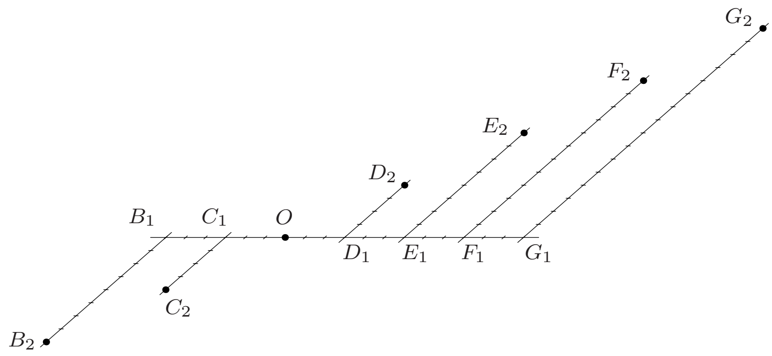


Fig. 39

Au cours de ce chapitre, nous avons dit ne prendre en considération que des couples de segments pour lesquels on peut en trouver un troisième, éventuellement très petit, qui va un nombre entier de fois dans le premier segment, et aussi un nombre entier de fois dans le second. On a l'impression que cela doit être vrai pour deux segments quelconques. Tel n'est pourtant pas le cas, comme l'ont montré déjà les Pythagoriciens vers le V^e siècle avant J.-C. C'est là un des grands problèmes de la géométrie, mais dont nous n'aurons pas le loisir de nous occuper ici.

Troisième partie

La géométrie en classe à douze ans

Introduction

1 Des situations-problèmes à douze ans : deux exemples d'enseignement

Dans les deux premières parties de cette étude, nous avons tenté de montrer comment les premiers éléments de géométrie peuvent se construire à partir des perceptions ainsi que des mouvements et des manipulations d'objets. Pour ce faire, nous nous sommes concentrés sur la logique de la construction. Il en est résulté un texte dépouillé, impropre – nous l'avons déjà souligné – à inspirer directement un enseignement vivant.

La meilleurs façon de commencer à apprendre la géométrie est sans doute de se poser des questions relatives à l'environnement quotidien ou à des phénomènes géométriques simples. C'est alors en effet que la théorie prend un sens, puisqu'elle répond à une attente.

Cette troisième partie est composée de deux chapitres indépendants l'un de l'autre, tous deux rédigés avant la géométrie naturelle (2^{e} partie). Ils montrent comment intéresser des jeunes à partir de douze ans, dans des contextes appropriés, aux premiers développements de la géométrie.

Nous ne disposons pas d'une étude analogue pour l'enseignement fondamental. C'est pourquoi nous terminons cette introduction par quelques indications sur des sources intéressantes, qui permettraient de concevoir un tel enseignement vivant de la géométrie au niveau fondamental. Nous avons l'intention d'exploiter ces sources dans des publications à venir.

2 Matériaux pour l'enseignement fondamental

Les activités corporelles des enfants, en les conduisant à une première maîtrise de l'espace, sont porteuses d'apprentissages géométriques ultérieurs. On trouve dans les ouvrages de psychomotricité des activités diverses basées sur des attitudes et des mouvements mettant en jeu les symétries du corps. L'enfant peut prendre lui-même ces attitudes ou exécuter ces mouvements sous une consigne, puis donner lui-même des consignes à d'autres. Des activités de groupe mettent en jeu le cercle (des rondes), la droite (des files, des rangs), le carré, etc. Les attitudes et leurs symétries peuvent être imitées dans des modelages. Voir B. De Lièvre [1993].

Les boîtes percées de trous polygonaux ou d'autres formes, et dans lesquelles il faut faire entrer des plaques planes ayant la forme des trous, amènent un contact avec ces formes. Des plaques polygonales, entre autres celles tirées du tangram, se prêtent à des compositions diverses, libres ou guidées par des modèles. Voir Mitsumasa Anno [1994] vol. 2 et 3 ; sur le tangram, A. Bertotto et J. Hélayel [1996].

On peut créer facilement des puzzles en découpant (par exemple par des traits rectilignes) des papiers-cadeaux ou des papiers peints. Avec de tels puzzles, on peut exploiter de multiples façons le fait que l'image de base présente des symétries, d'ailleurs très variables d'un papier à l'autre. Voir sur ce sujet G. Jullemier [1989].

Autre contexte : les frises et rosaces obtenues par rangement d'objets, dessin, pliage, découpage, en choisissant des rythmes et symétries. Par exemple on peut enfiler des perles en alternant les couleurs ou les formes ; faire une tour de cubes de différentes couleurs ; créer par pliage et découpage des ribambelles et rosaces. Sur les rosaces en particulier, voir C. Hameau [1996].

Les symétries orthogonales peuvent être abordées par manipulation (retournement de calques), dessin, pliage. Voir en général L. Baron [1995] et [1996] ; sur les pliages plus particulièrement, voir D. Boursin [1997].

On rencontre aussi les symétries orthogonales dans les jeux et dessins avec des miroirs. Voir Jeu du miroir [sans date] et G. N. Müller et E. C. Wittmann [1997] (ce dernier ouvrage propose des activités utilisant deux miroirs articulés).

En ce qui concerne les transformations du plan en général et leur apprentissage à l'école primaire, on consultera l'étude de base de M. Demal [1998], ainsi que d'autres contributions du même auteur, entre autres sur l'utilisation des miroirs.

11

Assembler des figures

Ce chapitre propose aux enseignants du début du secondaire l'ébauche d'un fil conducteur pour l'enseignement de la géométrie. Il est constitué d'une suite de situations-problèmes qui montre comment, à partir de propriétés élémentaires de figures et de quelques mouvements simples, on peut aborder une géométrie plus structurée, plus argumentée. Chaque situation-problème fait l'objet d'une section. Pour chacune d'elles, on propose quelques pistes d'exploitation, les contenus théoriques qui s'élaborent et des remarques en marge à l'attention des professeurs. Les exercices d'application, de fixation ou d'évaluation sont absents de ce document. Cela ne signifie pas que nous préconisions un enseignement faisant l'impasse sur ce type d'activités. Mais, pour la facilité du lecteur, il nous a semblé plus judicieux de nous en tenir aux activités de recherche et à l'élaboration d'un embryon de théorie.

Notre expérience dans les classes de première année nous a montré que les élèves sortant de l'enseignement primaire avaient généralement une assez bonne connaissance des figures (ils les reconnaissent, peuvent les nommer, citer quelques-unes de leurs propriétés) mais ne possédaient que très peu de notions sur les transformations du plan (exception faite de la symétrie axiale). Même si ce bagage géométrique est assez variable, il nous paraît indispensable de baser notre enseignement sur ces acquis. Nous partons donc de quelques notions sur les figures qu'il nous semble raisonnable de considérer comme acquises par la majorité des élèves :

- Le rectangle est un quadrilatère qui possède quatre angles droits.
- Le parallélogramme est un quadrilatère formé par deux paires de côtés parallèles.
- Quand on découpe un parallélogramme suivant une de ses diagonales, on obtient deux triangles superposables.
- On connaît aussi les losanges (quatre côtés de même longueur) et les carrés (quatre côtés de même longueur et quatre angles droits).

– Si deux figures sont superposables, tous les éléments correspondants des figures ont même mesure.

Si certains de ces points posent problème (ce qui sera sans doute le cas pour la troisième propriété), il faudra bien sûr proposer des activités qui les amènent à l'évidence.

D'autre part, nous nous baserons aussi sur les mouvements qui interviennent dans la construction de figures par assemblage. C'est pourquoi la mise en place d'une activité[1]qui fixe un vocabulaire de base tel que *tourner*, *retourner*, *glisser* peut s'avérer utile avant de commencer. Remarquons que ces mouvements sont encore très éloignés des transformations du plan. Par exemple, lorsque l'on dit tourner, il s'agit d'une expression naïve qui ne fait aucun appel à un quelconque centre.

En partant ainsi des figures et des mouvements, par des activités d'assemblage de triangles, nous mettons doucement en place des « figures-clés » comme le triangle isocèle, le cerf-volant ou le parallélogramme. Par le biais de problèmes de construction, nous établissons les conditions déterminantes de ces figures. Celles-ci deviennent alors des outils pour justifier d'autres propriétés, d'autres constructions.

Enfin des activités de pavage avec des triangles puis des quadrilatères amènent petit à petit les élèves aux notions de plan et de transformations du plan.

Toutes ces activités mettent en évidence l'importance des manipulations et des constructions dans l'apprentissage de la géométrie. Celui-ci doit, nous en sommes intimement persuadés, passer d'abord par les mains. Une conceptualisation trop précoce est sans doute un des facteurs qui explique le peu de succès que rencontre actuellement la géométrie auprès de nos élèves.

1 Tourner la page

Lorsqu'on superpose deux feuilles rectangulaires puis qu'on tourne l'une d'elles d'un quart de tour, les bords d'en haut et d'en bas de la première feuille se retrouvent parallèles aux bords latéraux de la seconde. Si on la fait tourner d'un demi-tour au lieu d'un quart de tour, les bords d'en haut et d'en bas de la première feuille se retrouvent parallèles aux bords d'en haut et d'en bas de la seconde. *Que deviennent des figures tracées sur une feuille lorsqu'on les tourne de cette façon ?*

Pour examiner l'effet d'un quart de tour, on prend deux feuilles rectangulaires de même format dont l'une est transparente. On dessine par exemple une droite sur la feuille, puis on la décalque sur le calque. On fait tourner le calque de 90°. On obtient une situation analogue à celles des figures 1 ou 2 à la page suivante.

[1] Voir par exemple la brochure du CREM [1998].

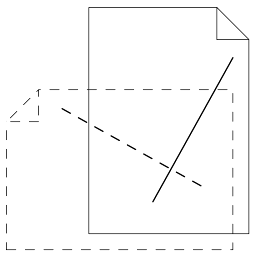


Fig. 1

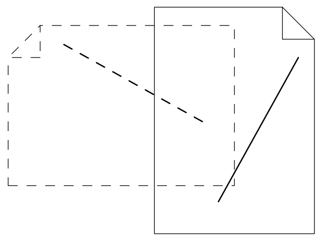


Fig. 2

Dans la figure 1, les droites sont visiblement perpendiculaires. Les droites de la figure 2 ne se rencontrent pas. Pour qu'elles se rencontrent, il faut en prolonger une. Il n'y pas de doute non plus quant à leur perpendicularité.

Lorsqu'on fait tourner le calque d'un demi-tour, les deux droites sont parallèles (figure 3).

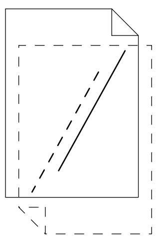


Fig. 3

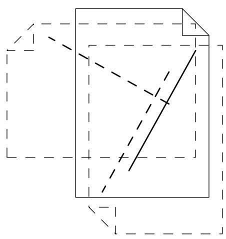


Fig. 4

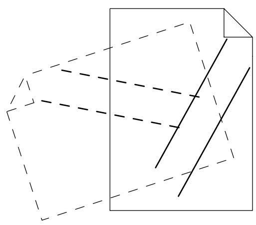


Fig. 5

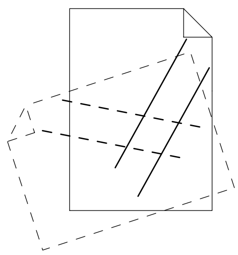


Fig. 6

La figure 4 montre qu'une telle rotation de 180° peut être obtenue en composant deux rotations de 90°. On peut exprimer cette propriété autrement : si on dessine une droite a perpendiculaire à une droite b qui est elle-même perpendiculaire à une droite c, alors la droite a est parallèle à la droite c.

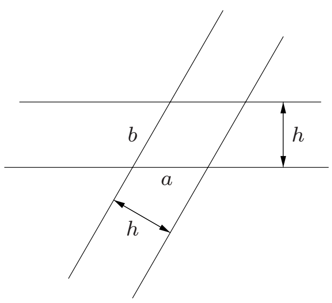


Fig. 7

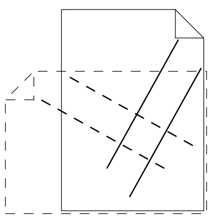


Fig. 8

On peut aussi dessiner des droites parallèles et observer l'effet de rotations qui ne sont pas nécessairement de 90° ou 180°. *Quelles sont les figures que l'on peut obtenir par de telles rotations en partant de deux droites ?* Dans le cas où les deux droites sont parallèles, on rencontre une situation analogue à celles montrées dans les figures 5 ou 6. Les droites parallèles restent parallèles après avoir subi une rotation. Si l'on ne fait pas un demi-tour, les quatre droites forment alors un parallélogramme. (Il peut être nécessaire de les prolonger comme dans le cas de la figure 5.)

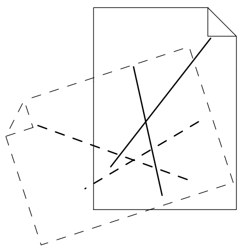


Fig. 9

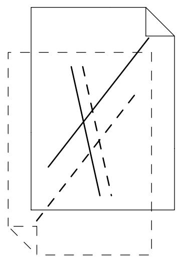


Fig. 10

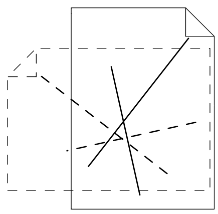


Fig. 11

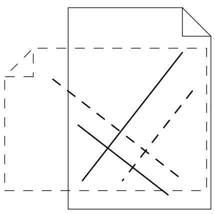


Fig. 12

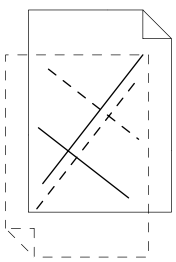


Fig. 13

Il y a alors une question qui peut se poser : *la figure formée par ces deux paires de droites parallèles, est-elle un parallélogramme ou un losange ?* Comment trancher ? Mesurer deux côtés consécutifs ne permettra pas d'avoir une réponse sûre, car les imprécisions des mesurages laissent planer le doute. On peut calculer l'aire du parallélogramme (figure 7 à la page précédente) en prenant pour base d'abord un des côtés (soit a), puis l'autre (soit b). Comme la distance entre les deux paires de parallèles est la même, on ne doit mesurer qu'une hauteur (soit h). On exprime l'aire du parallélogramme par $a \times h$ et par $b \times h$. Ces produits représentant la même aire, ils doivent être égaux. Les côtés consécutifs doivent donc avoir même mesure. Les égalités : $a \times h = b \times h$ et $a = b$ traduisent ce raisonnement.

Lorsqu'on fait tourner la feuille avec les deux droites parallèles d'un quart de tour, on obtient un carré (figure 8 à la page précédente).

On peut aussi faire tourner des droites qui ne sont pas parallèles. Lorsqu'on les fait tourner d'un angle quelconque, on ne remarque rien de particulier (figure 9). Par contre, lorsque c'est d'un demi-tour qu'elles tournent, on peut trouver un parallélogramme (figure 10). Tourner d'un quart de tour n'apporte rien d'exploitable pour le moment (figure 11).

Lorsque ces deux droites sont perpendiculaires, les manœuvres de tourner d'un quart de tour et d'un demi-tour créent toutes deux une forme particulière : un rectangle (figures 12 et 13).

2 Assembler deux triangles

Une motivation à ce type d'activité peut être trouvée dans l'existence de pavages géométriques dans l'environnement des enfants. La question peut se poser de savoir si l'on peut réaliser des pavages avec n'importe quelle forme géométrique.

Que se passe-t-il lorsqu'on assemble des copies du même triangle ? On peut aborder cette question par le cas le plus simple, et n'assembler que deux triangles superposables. *Combien de figures obtient-on ? Quelles sont-elles ? Quelles en sont les propriétés ?*

Les assemblages à réaliser sont tels que deux côtés des triangles « collent » parfaitement l'un à l'autre sans se « dépasser ». En le faisant, on se rend compte que l'on obtient beaucoup de figures ! Il faut donc essayer d'organiser le travail pour y voir clair.

On peut par exemple coder les différents côtés des triangles en couleurs différentes. On le fait en ne codant qu'une seule face de chaque triangle. On observe alors qu'il y a deux types de triangles (figure 14). Appelons-les types P et F (comme pile et face). Les assemblages seront de type PP, FF et PF. Puisqu'il y a trois côtés à chaque triangle et que l'on fait correspondre les côtés de même longueur, il y aura trois assemblages de chaque type (figure 15 à la page suivante).

Si le professeur travaille avec des triangles magnétiques et les enfants avec des triangles en carton, les enfants remarquent très vite que pour reproduire le matériel de leur professeur, ils ne doivent coder qu'une seule face de chaque triangle. Pour que les enfants puissent s'en rendre compte, et donc aussi découvrir qu'il y a deux types de triangles, il est important qu'ils ne reçoivent pas des triangles déjà codés.

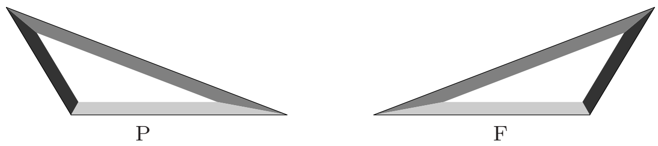


Fig. 14

On remarque une parenté entre les assemblages de triangles de type PP et de type FF. On ne peut toutefois pas les superposer l'un à l'autre en les faisant simplement glisser et tourner. Il faut pour cela en soulever un et le retourner. Lorsque deux figures sont telles qu'en en soulevant une et en la retournant, on peut la superposer à l'autre, on dira qu'elles sont *figures superposables par retournement*. Les figures qu'on peut superposer en les faisant glisser et tourner de manière adéquate, on dira qu'elles sont *superposables par déplacement*. Tous les triangles de type P sont superposables par déplacement et tous ceux de type F également. Un triangle de type P et un de type F sont superposables par retournement.

Ces assemblages donnent donc neuf figures. Parmi toutes ces figures, on reconnaît des parallélogrammes (*A, B, C, D, E* et *F*). On remarque que ce sont celles qui sont obtenues comme assemblages de triangles de même type (PP ou FF), c'est-à-dire superposables par déplacement.

Examinons maintenant les parallélogrammes. Les autres figures, celles qui sont obtenues par assemblage de deux triangles de type différents (PF), c'est-à-dire superposables par retournement, sont des cerfs-volants et des pointes de flèche que nous analyserons plus tard.

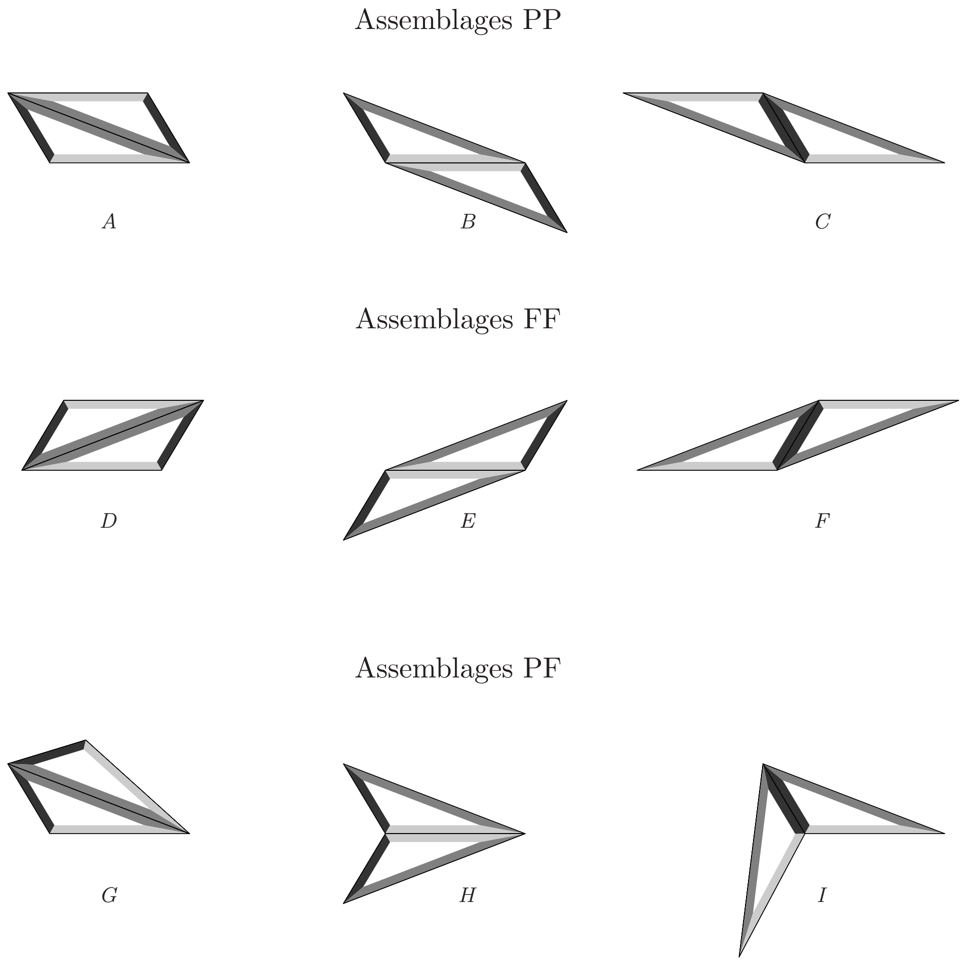


Fig. 15

3 Les parallélogrammes

On a obtenu des parallélogrammes en juxtaposant deux triangles superposables par déplacement. On peut faire exactement l'inverse : découper des parallélogrammes en deux triangles. Pour parvenir à le faire, il faut découper suivant la diagonale du parallélogramme. On obtient alors deux triangles qui sont superposables par déplacement. Lorsqu'on découpe le même parallélogramme (voici un nouvel abus de langage : comment découper le même parallélogramme puisqu'il a déjà été découpé et qu'il n'est donc plus un parallélogramme ?) en suivant l'autre diagonale, on obtient à nouveau deux triangles superposables (figures 16 et 17 à la page suivante). Sauf cas particuliers, ces nouveaux triangles ne se superposent pas aux deux premiers .

Nous supposons que cette propriété importante a déjà été travaillée au primaire. Si ce n'était pas le cas, cela vaut la peine de faire précéder l'activité d'assemblage des triangles par une activité telle que *Couper en deux, c'est bête comme chou ! Voire, cf. C. De Block-Docq et N. Rouche* [1996].

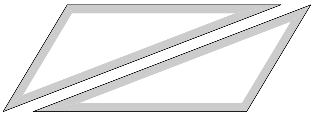


Fig. 16

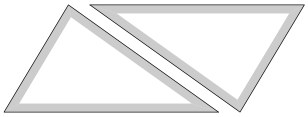


Fig. 17

On peut donc voir les parallélogrammes comme les figures géométriques constituées de deux triangles superposables par déplacement accolés le long d'un côté commun. Ceci fournit immédiatement des informations à leur sujet :

On identifie ci-contre la famille des parallélogrammes à celle des figures obtenues comme assemblages de triangles superposables par déplacement. Il faut toutefois remarquer une dissymétrie entre le découpage de parallélogramme et l'assemblage de triangles. Si l'on découpe un parallélogramme suivant une diagonale, on obtient toujours deux triangles superposables. Si l'on assemble deux triangles superposables, on n'obtient un parallélogramme que s'ils sont superposables par déplacement.

– Leurs côtés opposés ont la même longueur. Les triangles qui les constituent étant superposables, les longueurs de leurs côtés correspondants sont forcément les mêmes.
– Les angles opposés ont même amplitude (figure 18). Les angles se correspondant dans deux figures superposables ont en effet même amplitude. Ceci indique immédiatement que les angles en B et en D ont même amplitude. Pour les angles en A et en C, la superposabilité des triangles entraîne que les angles marqués d'un point ont même amplitude, ainsi que les angles marqués d'une étoile, ce qui implique évidemment l'égalité des amplitudes des sommes des angles considérés.

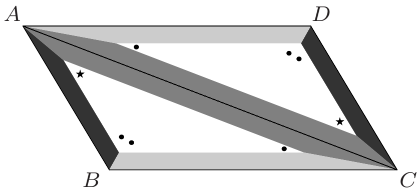


Fig. 18

– Les côtés opposés sont parallèles. C'est sans doute la caractéristique la plus marquante du parallélogramme . On peut se rendre compte qu'elle découle aussi de la manière dont on a formé ici les parallélogrammes. En effet chaque assemblage donnant un parallélogramme peut être obtenu de la manière suivante : on superpose deux triangles superposables et on en fait tourner un d'un demi-tour. Quand on fait tourner d'un demi-tour une figure rectiligne, chaque côté de cette figure prend une position parallèle par rapport à celle qu'il occupait avant le demi-tour (*cf.* la figure 3 à la page 147). Par exemple (figure 18), le côté $[CD]$ avait au départ la même position que le côté $[AB]$. Après avoir tourné d'un demi-tour, il a pris une position parallèle au côté $[AB]$.

Il y a d'autres manières de construire des parallélogrammes que d'assembler des triangles. Partons de trois points A, B et C. *Combien y a-t-il de parallélogrammes ayant ces trois points comme sommets ?* Les trois parallélogrammes ayant A, B et C comme sommets sont représentés à la figure 19 à la page suivante.

Au lieu de dessiner le triangle ABC, d'en faire un copie et d'accoler de différentes manières ces deux triangles, pour construire chacun de ces parallélogrammes, on peut :

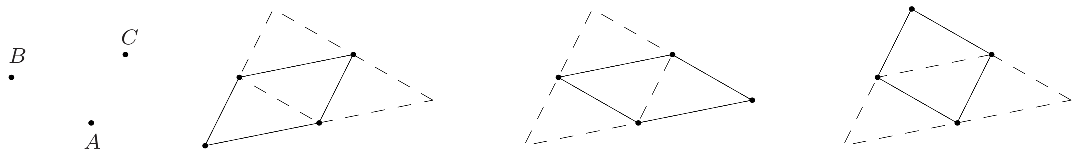


Fig. 19

– tracer les côtés parallèles deux à deux, par exemple en traçant par A la parallèle à $[BC]$ et par C la parallèle à $[AB]$ (figure 20) ;

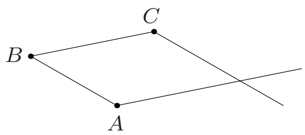


Fig. 20

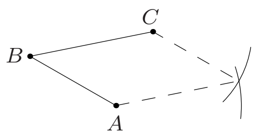


Fig. 21

Il y a une différence entre celui qui sait ce qu'est un parallélogramme et donc sait à peu près où devra se trouver le quatrième sommet, et un logiciel tel que *cabri-géomètre* qui cherchera précisément l'intersection de deux cercles et trouvera donc deux sommets possibles. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire d'ajouter la condition de convexité.

On peut faire la même remarque pour l'intersection d'un cercle et d'une droite que pour l'intersection de deux cercles.

– tracer les côtés opposés de même longueur, par exemple en traçant un cercle de centre A et de rayon $|BC|$ et un cercle de centre C et de rayon $|AB|$, et en choisissant le bon point d'intersection de ces deux cercles (figure 21) ;

– tracer deux côtés parallèles et de même longueur, par exemple en traçant par A un côté parallèle à $[BC]$ de même longueur que lui, dans l'un ou l'autre sens, mais en étant attentif à la convexité de la figure (figure 22).

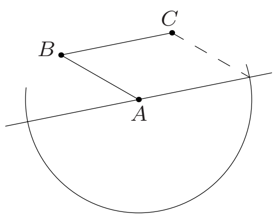


Fig. 22

Ces constructions permettent de regarder les propriétés du parallélogramme de manière plus dynamique. Chacun des procédés utilisés permet d'aboutir à une figure dont on est sûr qu'elle est un parallélogramme. Les propriétés utilisées caractérisent entièrement le type de figure. Nous dirons qu'elles *déterminent* la figure. Nous dirons encore que ces propriétés sont des *conditions déterminantes du parallélogramme.* Reprenons-les clairement :

Pour les élèves, les conditions déterminantes s'écrivent sous forme de synthèses dans des tableaux de la manière suivante :

Je sais que	Je déduis que
...	...

Elles sont différentes des synthèses descriptives que l'on a faites jusqu'ici. Ce sont des outils pour la suite.

1. *Lorsqu'un quadrilatère a les côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme (figure 23 à la page suivante).*

2. *Lorsqu'un quadrilatère convexe a les côtés opposés de même longueur, c'est un parallélogramme (figure 24).*

3. *Lorsqu'un quadrilatère convexe a deux côtés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme (figure 25).*

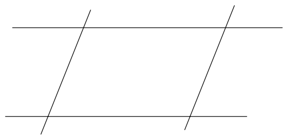


Fig. 23

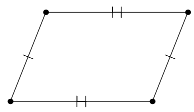


Fig. 24

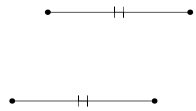


Fig. 25

4 Assembler deux triangles rectangles

Nous avons considéré jusqu'à présent deux triangles *quelconques.* En fait ils n'étaient pas tout à fait quelconques : ils n'étaient ni rectangles, ni isocèles, ni équilatéraux... Par exemple s'ils avaient été équilatéraux, il n'y aurait eu qu'une seule figure, quelle que soit la manière dont les deux triangles auraient été assemblés ! Occupons-nous maintenant des triangles rectangles.

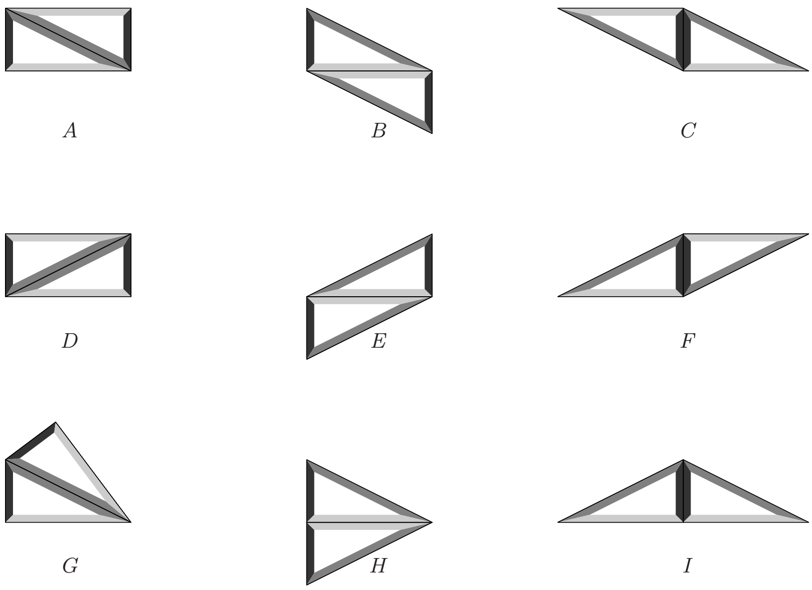


Fig. 26

Les différents assemblages de deux triangles rectangles superposables sont présentés à la figure 26. Certains des parallélogrammes sont devenus des rectangles (assemblages A et D), et les pointes de flèches sont devenues des triangles isocèles (assemblages H et I). Dans le premier cas, cela montre que le rectangle est un parallélogramme particulier. Dans le deuxième cas, il est plus difficile de concevoir le triangle isocèle comme cas particulier des cerfs-volants ou des pointes de flèches, car celles-ci sont des quadrilatères ! On est ainsi confronté à la question de l'alignement :

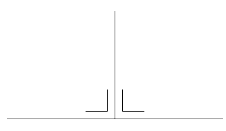


Fig. 27

4. *Si on accole deux angles droits le long d'un côté commun, les autres côtés des angles s'alignent (figure 27).*

5 Assembler deux triangles isocèles

On a obtenu des triangles isocèles en juxtaposant deux triangles rectangles superposables par retournement. Cette juxtaposition se fait le long d'un des côtés de l'angle droit. Ce côté devient l'axe du triangle isocèle (figure 28). On peut faire exactement l'inverse : découper un triangle isocèle de manière à obtenir deux triangles rectangles superposables par retournement. On peut aussi le faire sans découper le triangle. On prend le milieu de la base et on plie le triangle isocèle en deux, puis on le déplie. Les deux parties se juxtaposent parfaitement.

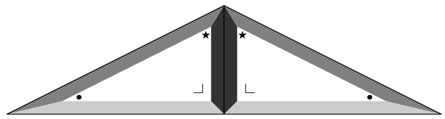


Fig. 28

On peut donc voir les triangles isocèles comme les figures géométriques constituées de deux triangles rectangles superposables par retournement accolés le long d'un côté de l'angle droit. Ceci fournit immédiatement des informations à leur sujet.

– Ils ont deux côtés de même longueur.
– Ils ont deux angles de même amplitude.
– Ils possèdent un *axe de symétrie* :
  · cet axe passe par un sommet et coupe le côté opposé en son milieu (c'est une *médiane*) ;
  · il passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé (c'est une *hauteur*) ;
  · il passe par le milieu d'un côté et lui est perpendiculaire (c'est une *médiatrice*) ;
  · il partage un angle du triangle en deux angles de même amplitude (c'est une *bissectrice*).

Il y a d'autres manières de construire des triangles isocèles que d'assembler deux triangles rectangles. Partons de deux points A et B. *Où peut être le troisième pour que le triangle ayant les trois points pour sommets soit isocèle ?*

Il y a deux types de solutions, présentées séparément à la figure 29 à la page suivante et conjointement à la figure 30.

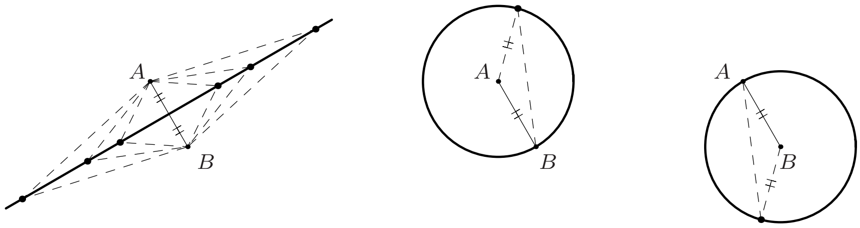


Fig. 29

Si on cherche le sommet C du triangle tel que le côté $[AC]$ ait même longueur que $[BC]$, on obtient le premier type de solutions : le sommet se trouve n'importe où sur la médiatrice du segment $[AB]$, sauf au milieu de ce segment. On peut aussi chercher le sommet C de telle manière que le côté $[AC]$ (ou le côté $[BC]$) ait même longueur que le côté $[AB]$. On obtient, dans ce cas, le deuxième type de solutions : le sommet C se trouve sur un cercle de centre A (ou de centre B) et de rayon $|AB|$.

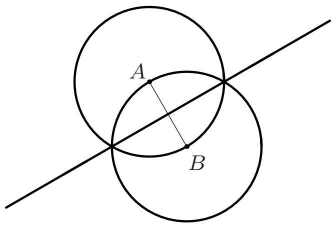


Fig. 30

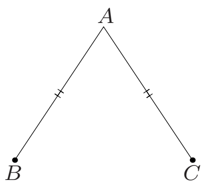


Fig. 31

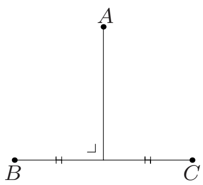


Fig. 32

Comme dans le cas du parallélogramme, ces deux types de constructions permettent de concevoir certaines propriétés de manière plus dynamique. On obtient ainsi les premières *conditions déterminantes* du triangle isocèle :

5. *Si un triangle a deux côtés de même longueur, alors c'est un triangle isocèle (figure 31).*

6. *Si un triangle a un sommet sur la médiatrice des deux autres, alors c'est un triangle isocèle (figure 32).*

On peut aussi se poser la question de la construction d'un triangle isocèle lorsqu'on n'a pas deux sommets, mais la position relative de deux côtés, c'est-à-dire lorsqu'on connaît l'angle que forment ces deux côtés.

Il y a à nouveau deux possibilités de solutions (figure 33 à la page suivante) :

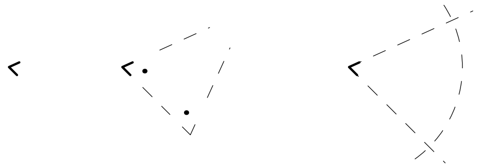


Fig. 33

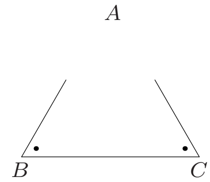


Fig. 34

– On prolonge un des côtés, ce qui donne un segment. Du côté de celui-ci où se trouve l'angle, on reporte un angle de même amplitude. Ceci détermine le troisième côté du triangle.
– Un autre cas se présente lorsque l'angle donné n'est pas un des deux angles de même amplitude. On peut construire le triangle en trouvant les points de rencontre des côtés de l'angle (éventuellement prolongés) avec un cercle dont le centre est le sommet de l'angle.

La première de ces deux constructions permet de compléter la liste des conditions déterminantes du triangle isocèle :

7. *Si un triangle a deux angles de même amplitude, alors c'est un triangle isocèle (figure 34).*

Si l'on a un triangle isocèle, on peut également répertorier tous les moyens de construire son axe. Ces constructions indiquent les conditions déterminantes de l'axe d'un triangle isocèle :

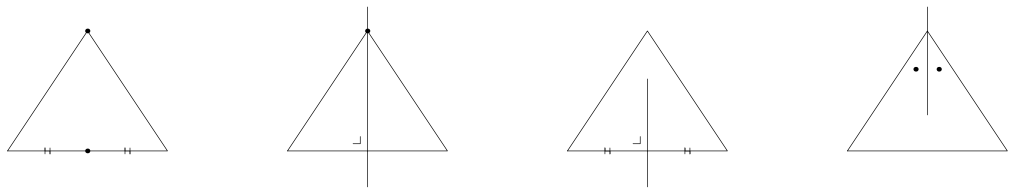


Fig. 35

8. *Pour chaque triangle isocèle que l'on peut dessiner, chacune des propriétés* être médiane*,* être hauteur*,* être médiatrice *et* être bissectrice *est condition déterminante de son axe (figure 35).*

6 Les angles des triangles et des polygones

Le rectangle possède quatre angles droits. Lorsqu'on fait la somme de ses quatre angles on obtient donc 360°. Si on prend un triangle rectangle, qu'on en fait une copie, qu'on juxtapose de manière adéquate cette copie au premier triangle, on obtient un rectangle. Cette manœuvre permet de déterminer la somme des angles de ce triangle (figure 36 à la page suivante).

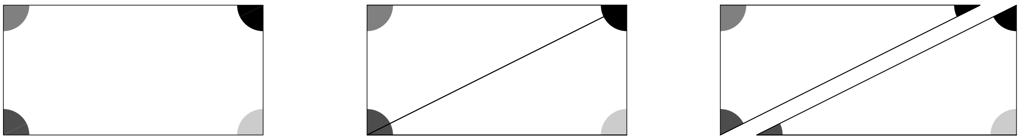


Fig. 36

En effet, si on redécoupe le rectangle suivant sa diagonale, deux des angles droits sont aussi coupés en deux. Comme les angles des deux triangles rectangles superposables ont évidemment même amplitude, la somme des angles du rectangle vaut deux fois la somme des angles de chacun des deux triangles. Celle-ci vaut donc 180°. De plus, dans chaque triangle rectangle, la somme des deux angles aigus vaut dès lors 90°. De tels angles sont appelés *angles complémentaires*.

On peut remarquer que la manœuvre de découpage du rectangle qui vient d'être réalisée ne se transfère à la somme des angles que parce que l'on a découpé suivant une diagonale et que, par conséquent, des angles ont aussi été découpés. Si on découpe par exemple le rectangle en deux quadrilatères comme à la figure 37, on voit que la somme des angles du rectangle n'est pas la même que la somme de tous les angles des deux quadrilatères obtenus !

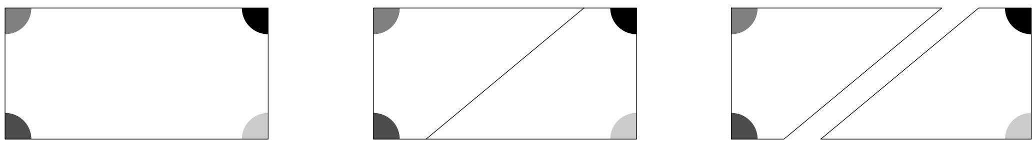


Fig. 37

Pour calculer la somme des angles d'un triangle quelconque, on peut le découper en triangles rectangles. Reprenons par exemple le premier triangle que nous avions utilisé pour faire des assemblages (figure 14 à la page 149). Comment le découper en deux triangles rectangles ? Il suffit de tracer la hauteur relative au côté le plus grand (figure 38 à la page suivante). On voit alors que la somme des angles du triangle ABC est :

$$\begin{array}{rl} & \text{la somme des angles aigus du triangle } ADC \\ + & \text{la somme des angles aigus du triangle } ADB, \end{array}$$

c'est-à-dire $\widehat{A_1} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A_2}$, ou encore $90° + 90° = 180°$. On peut aussi calculer cette somme de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl} & \text{la somme des angles du triangle rectangle } ADC \\ + & \text{celle des angles du triangle rectangle } ADB \\ - & \text{les deux angles droits en } D. \end{array}$$

C'est donc $180° + 180° - 90° - 90°$, c'est-à-dire 180°.

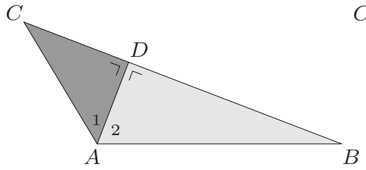


Fig. 38

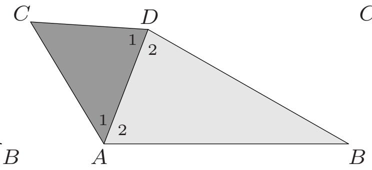


Fig. 39

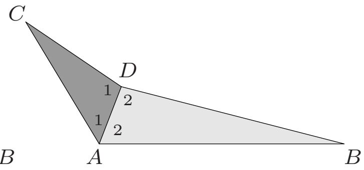


Fig. 40

Poursuivons notre exploration de la somme des angles de figures géométriques en revenant aux quadrilatères. On est parti du rectangle pour passer au triangle. Le triangle permet maintenant de repasser à n'importe quel quadrilatère (non croisé) : celui-ci peut être découpé en deux triangles par un coup de ciseau le long d'une diagonale (figures 39 et 40). Cette fois, la somme des angles est donnée par la somme des angles du triangle ADC et du triangle ABD. Elle vaut donc 360°.

On peut encore chercher à généraliser ce résultat : quelle est la somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque. En utilisant la décomposition en triangles, on s'aperçoit que cette somme dépend du nombre de côtés ou de sommets du polygone (figures 41 et 42).

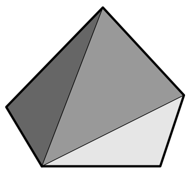


Fig. 41

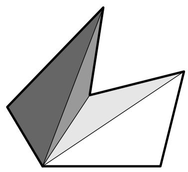


Fig. 42

Par exemple, on peut décomposer un pentagone en trois triangles. La sommes des angles intérieurs vaut donc $3 \times 180°$. On peut décomposer un hexagone en quatre triangles. La somme des angles intérieurs vaut donc $4 \times 180°$. En général, si un polygone a n côtés (et donc n sommets), on pourra le décomposer en $(n-2)$ triangles. La somme de ses angles intérieurs vaudra donc $(n-2) \times 180°$.

7 Emboîtement de familles de quadrilatères

Assembler des triangles et découper des figures en triangles s'est avéré très utile pour étudier des propriétés de figures. Cela peut aussi être utile pour classer les figures. Le tableau 1 à la page suivante rassemble différents cas et les conclusions que l'on peut en tirer à propos des quadrilatères en les regardant comme assemblages de triangles.

Triangles superposables par déplacement		
Lorsqu'on assemble deux triangles quelconques, on obtient un parallélogramme.		
La figure :	peut toujours être obtenue comme assemblage de :	
rectangle	deux triangles rectangles	le rectangle est un parallélogramme particulier
losange	deux triangles isocèles	le losange est un parallélogramme particulier
carré	deux triangles isocèles rectangles	le carré est un parallélogramme particulier
Triangles superposables par retournement		
Lorsqu'on assemble deux triangles quelconques, on obtient un cerf-volant (ou une pointe de flèche)		
La figure :	peut toujours être obtenue comme assemblage de :	
losange	deux triangles isocèles	le losange est un cerf-volant particulier
le carré	deux triangles isocèles rectangles	le carré est un cerf-volant particulier

Tabl. 1

8 Assembler plus de deux triangles

Pour assembler trois triangles, on commence par en assembler deux. On en ajoute ensuite un troisième. En assemblant trois triangles superposables par déplacement, on peut par exemple obtenir les assemblages de la figure 43.

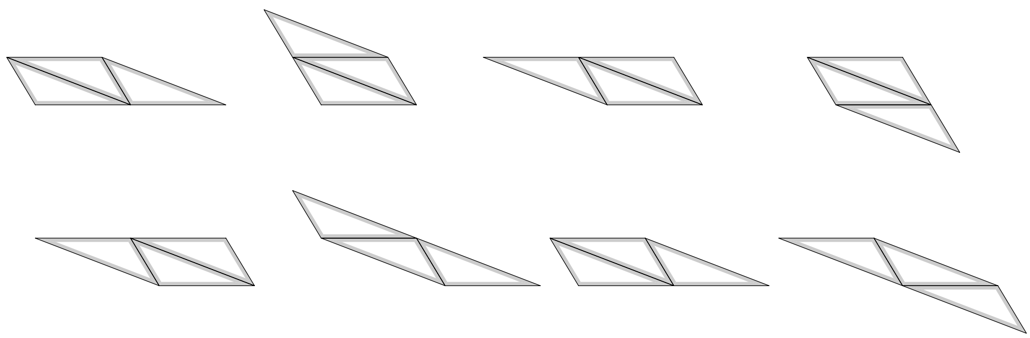


Fig. 43

Pour obtenir ces huit assemblages, on a pris deux des trois parallélogrammes obtenus en assemblant deux triangles. On y a ensuite ajouté un troisième triangle le long d'un côté du parallélogramme, et cela de toutes les manières possibles. Pour avoir tous les assemblages possibles il aurait encore fallu prendre le troisième parallélogramme obtenu en assemblant deux triangles. On peut observer que certaines figures apparaissaient en double. En réalité, avec trois triangles superposables par déplacement, on n'obtient que trois assemblages différents (figure 44).

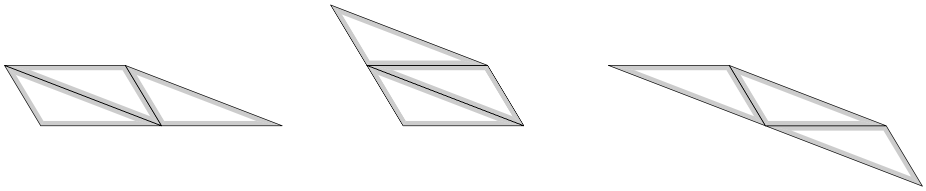


Fig. 44

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que, dans chacune de ces figures, deux côtés de deux triangles différents s'alignent. Les figures obtenues sont des trapèzes. La raison de cet alignement peut être trouvée dans la somme des angles de tout triangle qui vaut 180°, c'est-à-dire un angle plat. L'endroit où se passe cet alignement est précisément l'endroit où se rencontrent trois angles différents des triangles. Puisque les trois triangles sont superposables, ceci revient au même que les trois angles d'un des triangles.

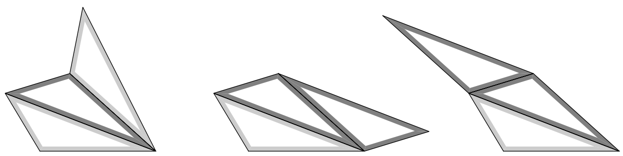


Fig. 45

Une activité peut être de trouver à quelle(s) condition(s) le premier assemblage de la figure 45 se referme lorsqu'on le poursuit avec d'autres triangles, ou à quelle(s) condition(s) un alignement se produit dans les deux autre figures.

Les assemblages avec des triangles superposables par retournement semblent ne rien donner de particulièrement remarquable (figure 45).

L'alignement dans le cas des triangles superposables par déplacement a plusieurs conséquences importantes. Il permet par exemple de poursuivre l'assemblage de triangles en constituant comme à la figure 46 une bande de triangles (qu'on peut aussi voir comme une bande de parallélogrammes).

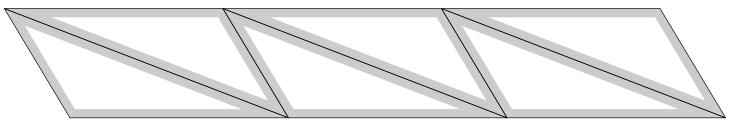


Fig. 46

On accolant plusieurs bandes on peut alors couvrir toute la feuille de travail, et même plus... En juxtaposant des copies du même triangle, on peut donc réaliser un pavage[2].

[2] Construire un *pavage* consiste à juxtaposer des formes de telle manière que :

– les différentes formes s'ajustent parfaitement sans se chevaucher ;

– l'on puisse continuer aussi loin de que l'on veut.

Une autre manière de poursuivre l'assemblage consiste à placer un quatrième triangle en combinant les deux premiers assemblages de la figure 44 à la page précédente. On obtient alors un nouveau triangle qui ressemble au triangle de départ, sauf qu'il est plus grand (figure 47). L'alignement de deux côtés des triangles se réalise ici trois fois. On remarque que tous les côtés de ce nouveau triangle sont deux fois plus longs que ceux du triangle de départ, mais que son aire est quatre fois plus grande.

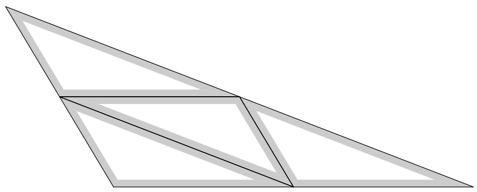


Fig. 47

On peut alors continuer à assembler 5, 6, 7 ou 8 triangles. Nous ne regarderons ici que les cas les plus intéressants.

Repartant des trapèzes de la figure 44 à la page précédente, on peut réaliser l'assemblage de six triangles comme à la figure 48. On prend un des trapèzes, on lui accole une copie superposable par déplacement. Quel que soit le trapèze que l'on choisit, on obtient le même hexagone. Cette figure a les propriétés suivantes :

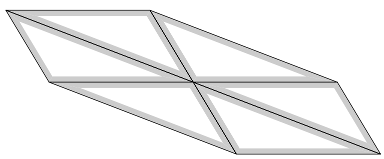


Fig. 48

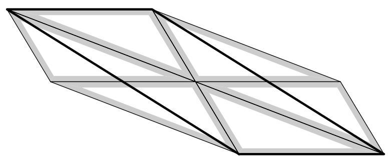


Fig. 49

- les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
- les côtés opposés ont même longueur ;
- les diagonales joignant les sommets opposés se coupent en leur milieu.

On dit d'une figure qui possède ces propriétés que le point d'intersection des diagonales est un *centre de symétrie*.

Ces propriétés ne dépendent pas du nombre de côtés. D'ailleurs cette figure possède plusieurs sous-figures qui possèdent ces propriétés. Regardons par exemple le quadrilatère dont le contour est dessiné en gras à la figure 49. Ce quadrilatère possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur. La condition déterminante 3 à la page 153 permet d'affirmer que c'est un parallélogramme.

Ceci nous donne une propriété supplémentaire du parallélogramme : ses diagonales se coupent en leur milieu. En effet, tout parallélogramme peut s'intégrer à un hexagone comme celui de la figure 48 à la page précédente. On peut partir d'un parallélogramme quelconque et voir comment construire cet hexagone. Le fil de cette construction est repris à la figure 50.

Pour le construire, les diagonales sont importantes et il est utile de les mettre en évidence. Partant de leur point de rencontre, on construit deux nouveaux parallélogrammes en traçant un segment parallèle à deux côtés du parallélogramme de départ et de même longueur qu'eux (condition déterminante 3 à la page 153). Les autres côtés parallèles de ces deux parallélogrammes en déterminent un nouveau (condition déterminante 1 à la page 152). Ces trois parallélogrammes permettent alors d'exhiber quatre triangles superposables par déplacement. En recommençant cela de l'autre côté du parallélogramme de départ, on a bien reconstruit le « même » hexagone que celui de la figure 48 à la page précédente.

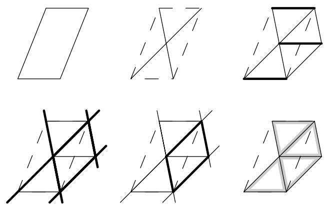


Fig. 50

Le parallélogramme possède donc les trois propriétés énoncées ci-dessus. Le point de rencontre des diagonales du parallélogramme est son centre de symétrie.

Partons du triangle divisé en quatre de la figure 47 à la page précédente. Juxtaposons-en deux copies comme à la figure 51. La figure obtenue est un parallélogramme divisé en quatre parallélogrammes, eux-mêmes divisés en deux triangles. L'analyse de cette figure indique que les médianes du grand parallélogramme se coupent en leur milieu. Leur point de rencontre se trouve sur la diagonale du grand parallélogramme et coupe d'ailleurs cette dernière en deux parties de même longueur.

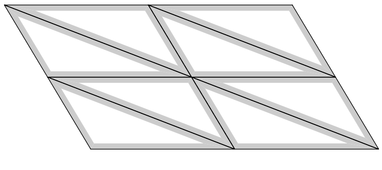


Fig. 51

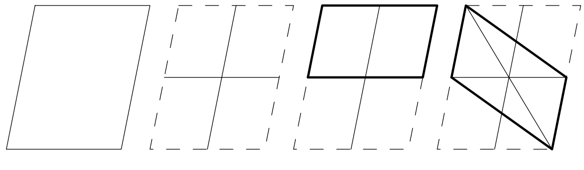


Fig. 52

Pour vérifier que cette propriété est vraie pour tous les parallélogrammes, il faut s'assurer que tout parallélogramme se décompose de cette manière en huit triangles superposables par déplacement. On peut aussi suivre le fil suivant repris à la figure 52.

On trace un parallélogramme et ses médianes, c'est-à-dire les segments qui joignent les milieux des côtés opposés. Comme les côtés opposés du parallélogramme ont même longueur, les moitiés de côtés opposés ont aussi même longueur, ce qui permet de trouver de nouveaux parallélogrammes de deux types dans cette figure grâce à la condition déterminante 3 à la page 153. Le premier type permet de déduire que les médianes du parallélogramme sont parallèles à certains côtés. Le deuxième type permet de déduire que les médianes se coupent en leur milieu et au même point que les diagonales. Pour cela, on utilise la propriété qui vient être vue : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

On sait que chaque parallélogramme se décompose de deux manières en deux triangles superposables par déplacement. On aurait pu faire exactement le même genre d'assemblage avec le deuxième type de triangles obtenu par découpage le long de l'autre diagonale. En assemblant de manière adéquate huit exemplaires de ce triangle, on obtient à la figure 53.

On peut encore reprendre les triangles des figures 51 et 53 pour les combiner autrement. On peut obtenir par exemple les figures 54 et 55. La première montre très clairement la double propriété des médianes et des diagonales du parallélogrammes. La seconde montre que lorsqu'on joint les milieux des côtés d'un parallélogramme, on obtient un nouveau parallélogramme.

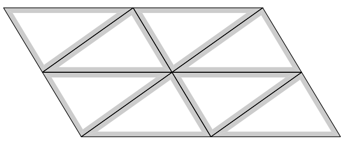


Fig. 53

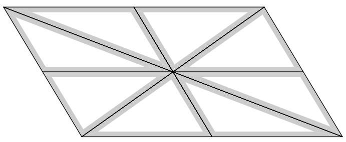


Fig. 54

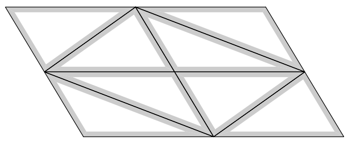


Fig. 55

Dans le cas où les triangles sont rectangles, le parallélogramme est un rectangle. Ce que l'on vient de faire reste vrai. Remarquons que, cette fois, tous les triangles de la figure 56 sont superposables (par déplacement ou par retournement), et que dans le cas de la figure 57, la figure obtenue en joignant les milieux des côtés du rectangle, est un losange.

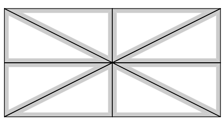


Fig. 56

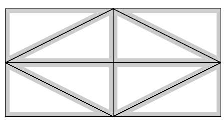


Fig. 57

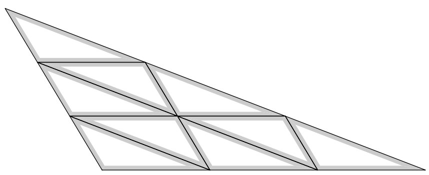
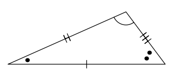


Fig. 58

Pour en terminer avec les assemblages de triangles, on va encore prolonger l'assemblage de quatre triangles de la figure 47 à la page 161. En assemblant neuf triangles, on peut encore agrandir le triangle qu'on obtient (figure 58 à la page précédente). Les alignements des côtés garantissent que c'est bien un triangle que l'on obtient à nouveau. Chaque côté a été triplé. L'aire du triangle a été multipliée par neuf. On peut poursuivre ces assemblages en agrandissant encore le triangle en lui ajoutant 7 nouveau triangles[3].

9 Cerfs-volants et pointes de flèche

En assemblant des triangles quelconques superposables, nous avons rencontré, entre autres, des cerfs-volants et des pointes de flèche (figure 59).



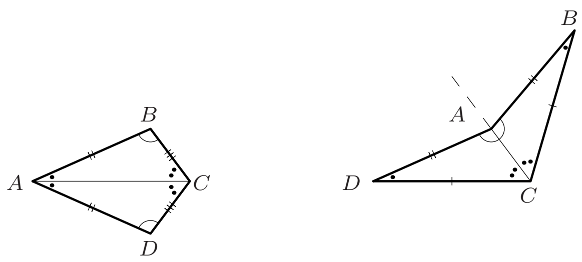


Fig. 59

Les codages permettent de dégager une liste de propriétés de ces figures :

- avoir deux paires de côtés consécutifs de même longueur ;
- avoir deux angles de même amplitude ;
- avoir une diagonale bissectrice des deux autres angles.

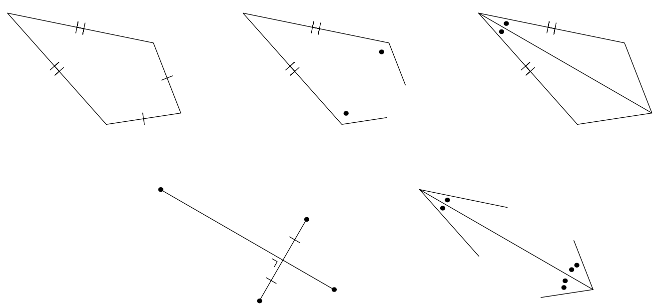
Grâce à la condition déterminante 5 des triangles isocèles (avoir deux côtés de même longueur), nous pouvons reconnaître que les triangles ABD et BDC sont isocèles. Ceci nous permet de trouver une propriété supplémentaire des cerfs-volants et pointes de flèches :

- avoir une diagonale médiatrice de l'autre.

En effet, comme AC est bissectrice des angles en A et en C, ce qui est une condition déterminante de l'axe de symétrie des triangles isocèles, AC est médiatrice de $[BD]$. Remarquons que dans le cas de la pointe de flèche, il est nécessaire de considérer les angles supplémentaires en A.

Examinons les conditions déterminantes de ces figures (figure 60 à la page suivante).

[3] On peut utiliser ce type d'assemblages pour établir que la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2.



Les conditions déterminantes 9, 10 et 11 sont équivalentes aux cas d'isométrie des triangles.

Fig. 60 (a,b,c,d,e,f)

9. *Si un quadrilatère a deux paires de côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

10. *Si un quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur et deux angles adjacents à ces côtés de même amplitude, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche (voir figure 60(b).*

11. *Si un quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur et une diagonale bissectrice de l'angle entre ces deux côtés, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

12. *Si un quadrilatère a une diagonale médiatrice de l'autre, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

13. *Si un quadrilatère a une diagonale bissectrice de deux angles, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

On peut encore remarquer que le losange est un cerf-volant particulier : il suffit de prendre comme triangles de départ deux triangles isocèles superposables que l'on accole de manière adéquate. Comme deux triangles isocèles superposables le sont par déplacement *et* par retournement, le losange est *à la fois* un parallélogramme et un cerf-volant.

Les propriétés des triangles isocèles et des cerfs-volants permettent de mettre au point et de justifier des techniques de construction des médiatrices et des bissectrices :

- *Construction de la médiatrice d'un segment.* Pour déterminer la médiatrice d'un segment, il suffit de considérer ce dernier comme la base d'un triangle isocèle. La médiatrice est l'axe de ce triangle. On peut aussi voir ce segment comme diagonale d'un cerf-volant ou d'un losange, et déterminer l'un ou l'autre en deux ou quatre coups de compas.
- *Construction de la bissectrice d'un angle.* Pour construire une bissectrice, on regarde l'angle comme l'angle au sommet d'un triangle isocèle. Il suffit alors de déterminer l'axe de ce triangle. Une autre manière de construire la bissectrice est de « coincer » un losange ou un cerf-volant dans cet angle. On y arrive en trois coups de compas.

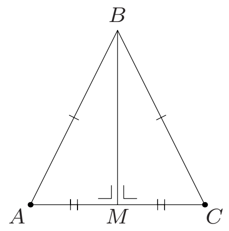


Fig. 61

La configuration du triangle isocèle permet également d'introduire la symétrie orthogonale : par exemple, dans le triangle isocèle ABC (figure 61), on regarde le point C comme étant l'image du point A par la symétrie d'axe BM.

Grâce aux configurations du triangle isocèle et du cerf-volant, on peut alors mettre au point et justifier des constructions de l'image d'un point par cette symétrie.

– *Triangle isocèle* : pour déterminer l'image A' d'un point A par une symétrie d'axe m (figure 62(a)), il suffit de voir cet axe comme l'axe d'un triangle isocèle dont A est un point de la base (figure 62(b)). Pour trouver A', il suffit donc de reporter sur la perpendiculaire à l'axe, de l'autre côté de l'axe, la même distance que celle entre l'axe et A (figure 62(c)).

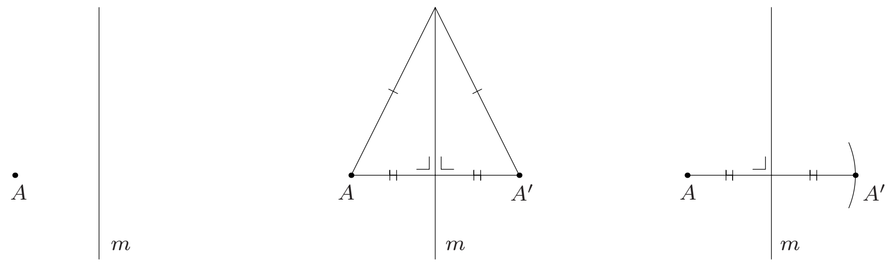


Fig. 62 (a,b,c)

– *Cerf-volant* : pour déterminer l'image A' d'un point A par une symétrie d'axe m (figure 63(a)), il suffit de voir cet axe comme la diagonale d'un cerf-volant ; les points A et A' sont les extrémités de l'autre diagonale (figure 63(b)). Pour trouver A', il suffit donc de choisir deux points B et C sur l'axe et de tracer deux arcs de cercles passant par A et dont les centres sont B et C. Leur deuxième point d'intersection est A' (figure 63(c)).

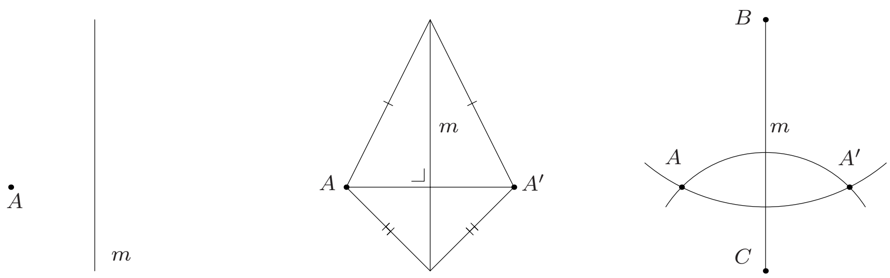


Fig. 63 (a,b,c)

En considérant en outre les configurations du rectangle, du trapèze isocèle et du quadrilatère croisé formé par les diagonales du trapèze isocèle, on élabore une synthèse à propos de la construction de l'image d'un segment par une symétrie orthogonale (figure 64). (Dans cette synthèse n'apparaissent pas les deux cas triviaux où le segment est inclus ou perpendiculaire à l'axe.)

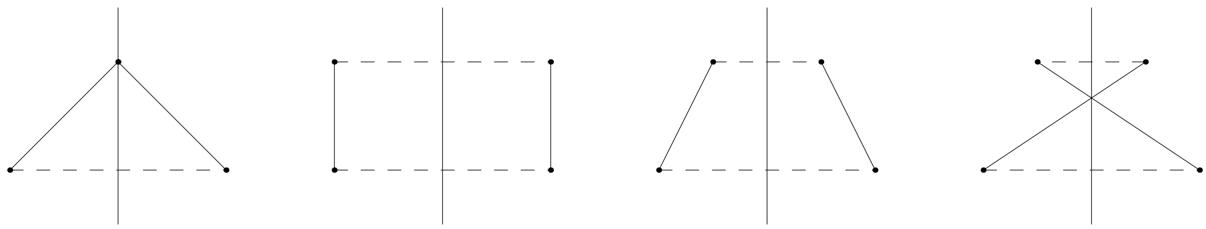


Fig. 64

10 Paver avec des quadrilatères

Nous avons vu à la section 8 à la page 159 qu'il est possible de paver le plan avec n'importe quel triangle (c'est-à-dire en utilisant des triangles superposables à un triangle quelconque). *Est-il possible de le faire avec n'importe quel quadrilatère ?*

L'activité de recherche libre amène les élèves, après beaucoup d'essais et erreurs, à penser que l'on peut paver le plan avec des quadrilatères quelconques à condition qu'ils soient tous superposables par déplacement (figure 65). Le fait que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° achève alors de les convaincre[4] : en chaque un nœud du pavage on peut toujours placer quatre quadrilatères de telle sorte que s'y assemblent quatre angles dont la somme vaut 360° (ils sont chacun superposable à un angle différent du quadrilatère).

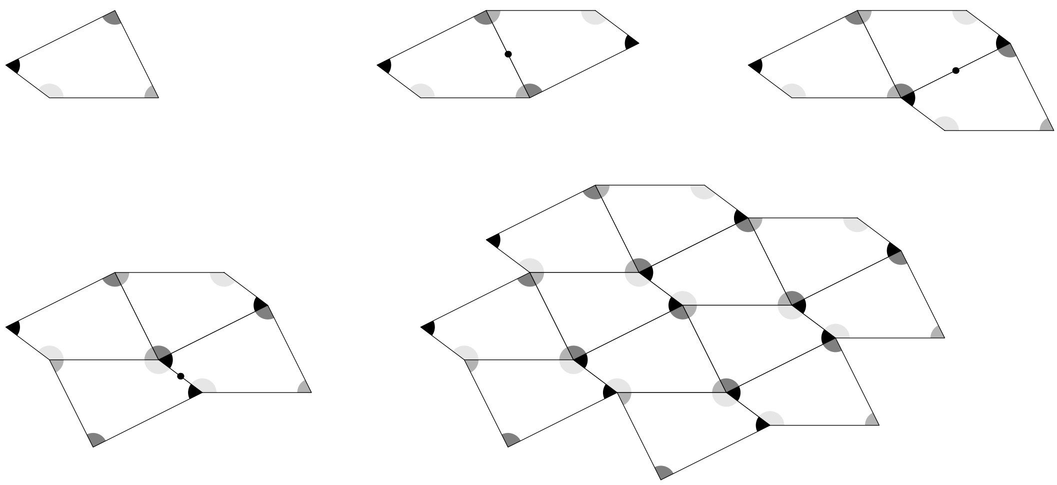


Fig. 65

[4] Cet argument peut ne pas convaincre suffisamment du fait que l'on peut poursuivre le pavage « à l'infini de tous les côtés ». Une manière plus complète de s'en convaincre est proposée à la section 6 à la page 121 (chapitre 8).

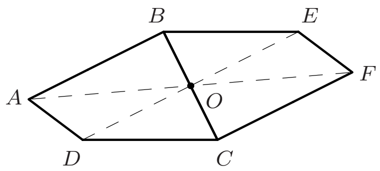


Fig. 66

Une fois cette propriété établie, on passe en revue et on analyse différentes étapes dans la réalisation du pavage. L'activité est donc relancée par l'assemblage de deux quadrilatères et par l'analyse de la figure obtenue.

Dans ce début de pavage (figure 66), on détecte plusieurs parallélogrammes : il y a en effet trois quadrilatères dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Leurs diagonales se coupent en leur milieu. Comme deux quelconques parmi ces trois parallélogrammes ont une diagonale en commun, elles se coupent toutes en un même point central O. On l'on appelle *centre de symétrie* de la figure.

Le tableau 2 montre comment le travail de recherche peut s'écrire sous forme de synthèse au cahier.

Je sais que	Je déduis que
Les côtés $[AB]$ et $[CF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$ABFC$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[BC]$ et de $[AF]$.
Les côtés $[DC]$ et $[BE]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DBEC$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[BC]$ et de $[DE]$
Les côtés $[AD]$ et $[EF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DAEF$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[DE]$ et de $[AF]$.
Conclusion *Le point M est le milieu des segments $[AF]$, $[DE]$ et $[BC]$; c'est le centre de symétrie de l'hexagone. On dit aussi que c'est le centre de la symétrie centrale ou de la rotation de* 180° *qui applique le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $CBEF$.*	

Tabl. 2

On analyse maintenant la figure obtenue par l'ajout d'un troisième quadrilatère (figure 67 à la page suivante). Le passage entre les quadrilatères $ABCD$ et $CBEF$ vient d'être analysé, de même que celui entre les quadrilatères $CBEF$ et $EHGF$. Pour passer du quadrilatère $ABCD$ à $EHGF$, le repérage de quatre parallélogrammes fait apparaître quatre segments parallèles et de même longueur : ce sont ceux qui relient chaque sommet du premier quadrilatère au sommet correspondant du second. Ces segments sont les traces de la translation qui applique $ABCD$ sur $EHGF$.

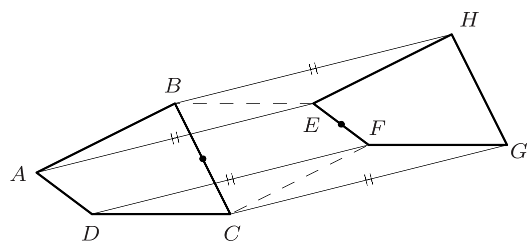


Fig. 67

Ces observations peuvent aussi faire l'objet d'une synthèse écrite au cahier (tableau 3).

Je sais que	Je déduis que
Les côtés $[AB]$ et $[EH]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$ABHE$ est un parallélogramme. Les droites BH et AE sont parallèles et les segments $[BH]$ et $[AE]$ ont même longueur.
Les côtés $[BC]$ et $[HG]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$BHGC$ est un parallélogramme. Les droites BH et CG sont parallèles et les segments $[BH]$ et $[CG]$ ont même longueur.
Les côtés $[CD]$ et $[GF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DCGF$ est un parallélogramme. Les droites CG et DF sont parallèles et les segments $[CG]$ et $[DF]$ ont même longueur.
Les côtés $[AD]$ et $[EF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DAEF$ est un parallélogramme. Les droites AE et DF sont parallèles et les segments $[AE]$ et $[DF]$ ont même longueur.
Conclusion *Le quadrilatère $ABCD$ est « relié » au quadrilatère $EHGF$ par des droites BH, AE, DF et CG qui sont parallèles et des segments $[BH]$, $[AE]$, $[DF]$ et $[CG]$ qui ont même longueur (ce sont les côtés non dessinés des parallélogrammes). On dit que le quadrilatère $EHGF$ est l'image du quadrilatère $ABCD$ par une translation.*	

Tabl. 3

L'étape suivante de cette activité consiste à observer ce qui se passe lorsque l'on ajoute un quatrième quadrilatère comme à la figure 68 à la page suivante. Un travail d'analyse analogue aux précédents fait apparaître un point central O, milieu des diagonales de parallélogrammes. C'est le centre de la symétrie qui applique le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $HIJG$.

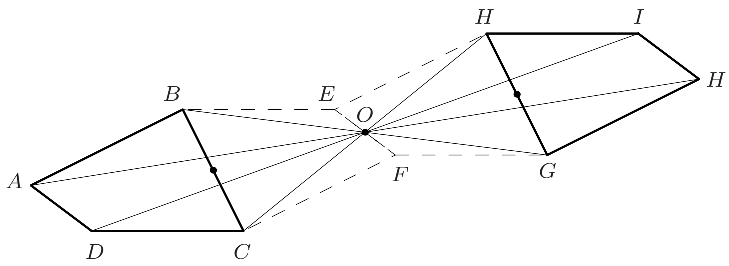


Fig. 68

Une synthèse analogue aux précédentes peut alors être établie avec les élèves.

On complète l'étude des trois transformations ainsi obtenues (symétrie orthogonale, symétrie centrale et translation) par les constructions aux instruments des images de points par symétrie centrale et translation. Ceci se fait à partir des configurations présentée dans les figures 66, 67 et 68.

12

Figures en mouvement

Notre contribution dans ce chapitre, consiste à mettre à la disposition des enseignants du début du secondaire une façon d'articuler situations-problèmes et construction théorique.

Les situations-problèmes sélectionnées sont destinées à des élèves de 11 à 13 ans. Elles s'enchaînent de manière à ce que les notions acquises dans l'une soient utiles pour travailler les suivantes. Chaque situation-problème se clôture par une synthèse qui met en évidence des formulations, des modes de pensée et des énoncés. Dans la pratique, elles sont écrites par les élèves sous la guidance du professeur, elles articulent les formulations, les figures-clefs et les raisonnements qui ont émergé dans la situation-problème. Elles diffèrent d'une classe à l'autre. Celles qui sont proposées ici donnent une idée de ce type de synthèse.

Les situations proposées inaugurent une approche argumentée de la géométrie : elles mettent en place des outils d'analyse pour une approche discursive des figures.

Il y a tout d'abord quelques mouvements qui introduisent le temps dans des configurations spatiales : une partie de figure est regardée avant une autre, on distingue un départ et une arrivée. La notion de figures superposables est structurée par ce qui apparaît comme une régularité visuelle.

Ensuite, par le biais de constructions aux instruments, d'autres outils d'analyse des figures sont mis en place : les tracés sont regardés à la lumière des mouvements qui les engendrent.

Une troisième série d'activités articule des propriétés des triangles et des quadrilatères à celles des mouvements. On voit ainsi se tisser, à partir d'objets apparemment hétérogènes, des réseaux de propriétés.

Les choix d'activités sont guidés par deux préoccupations :

1. *Montrer l'importance des transformations*. Les liens naturels qu'elles entretiennent avec la perception contribuent à en faire des outils de pensée efficaces, accessibles à des débutants. Il nous semble que les difficultés rencontrées parfois dans l'apprentissage des transformations et surtout dans leur usage pour démontrer sont dues à ce qu'on en donne des définitions trop générales et que l'on néglige les intuitions de mouvement.

2. *Montrer l'importance des constructions aux instruments.* L'enseignement par logiciels que nous préconisons par ailleurs ne peut se substituer entièrement à une appréhension de la géométrie par les mains. La réalisation de figures mobilise une coordination des mouvements du regard et des mains et requiert un va-et-vient entre les propriétés des instruments et celles des figures.

1 Papiers peints

Le professeur dispose pour chaque élève de papiers peints du type de ceux montrés par la figure 1 à la page suivante, dont quelques-uns ont le format de la figure 2 à la page 174. Il en distribue progressivement, selon l'avancement de chacun[1]. Le professeur dispose aussi de feuilles transparentes pour décalquer des motifs. Les consignes de travail suggérées ci-dessous sont données l'une après l'autre. Elles sont encadrées dans le texte, chacune fait l'objet de commentaires oraux avant que l'on passe à la suivant. À la faveur des comparaisons entre les diverses réalisations, des acquis antérieurs refont surface, des questions surgissent et un vocabulaire commun s'installe. La synthèse est une activité à part entière qui intervient tout à la fin.

L'objectif est de découvrir trois familles de transformations du plan : les translations, les rotations et les symétries orthogonales, dans un contexte où elles sont toutes trois présentes. On attend des élèves qu'à l'issue de ce travail, ils puissent distinguer chacune de ces transformations et indiquer les éléments qui la déterminent. Le contexte induit que ce qui se passe localement peut être étendu au plan tout entier. Mais cette extension n'est pas un but à ce stade, qui est celui d'une première initiation. Elle ne figure donc dans pas la synthèse.

Activité 1

Colorier différents papiers peints choisis parmi ceux de la figure 1 à la page suivante.

[1] Cette activité est inspirée par les travaux de Brigitte Sénéchal [1979], à laquelle nous avons emprunté les jolis papiers peints formés de gouttes.

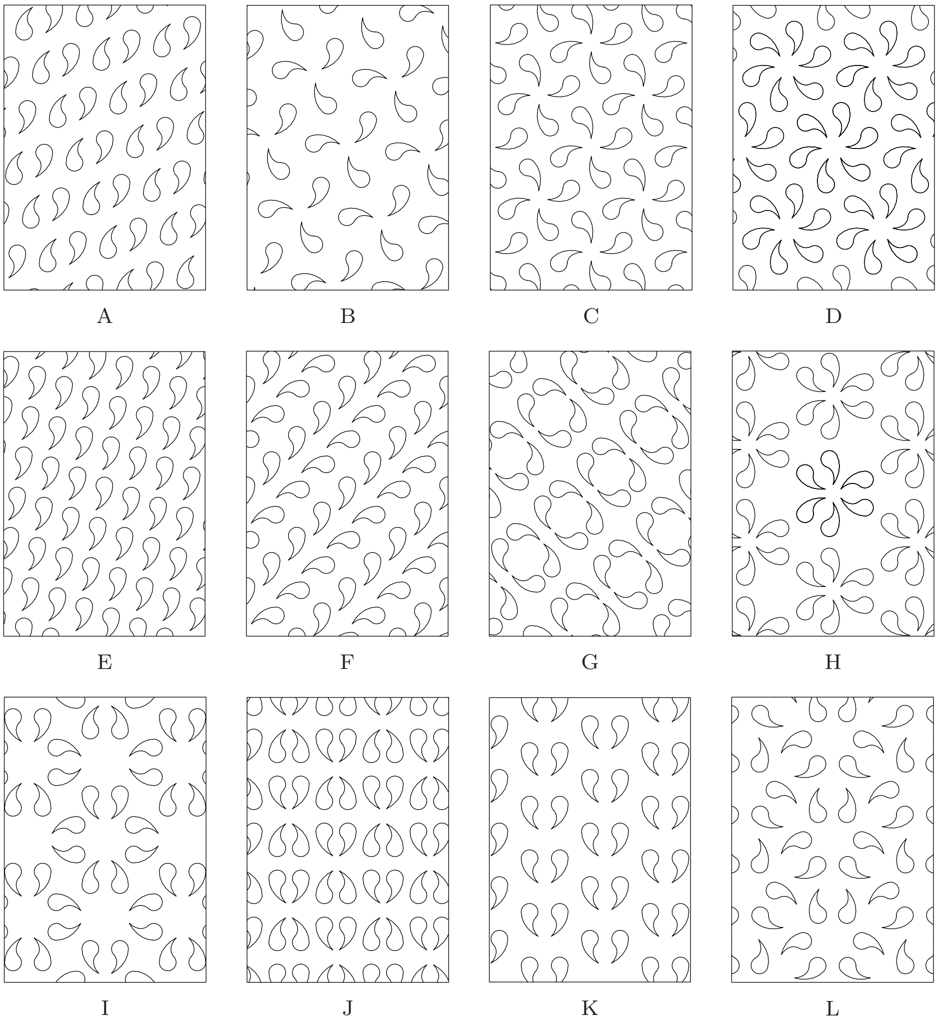


Fig. 1

Commentaires

Cette activité part de ces objets familiers que sont les papiers peints. Des questions analogues peuvent être posées à partir de frises ou de pavages du plan par exemple, d'extraits tirés de l'œuvre d'Escher. Nous fournissons un choix de papiers peints assez large afin de ménager la surprise : trois procédés suffisent pour expliquer comment sont conçus les papiers peints proposés ici. Il n'est pas nécessaire pour cela que tous les élèves travaillent tous les papiers peints. Le professeur peut répartir le travail et l'adapter aux différents rythmes des élèves.

Dans le coloriage libre, les choix spontanés font apparaître des régularités, des rythmes qui structurent chaque papier peint.

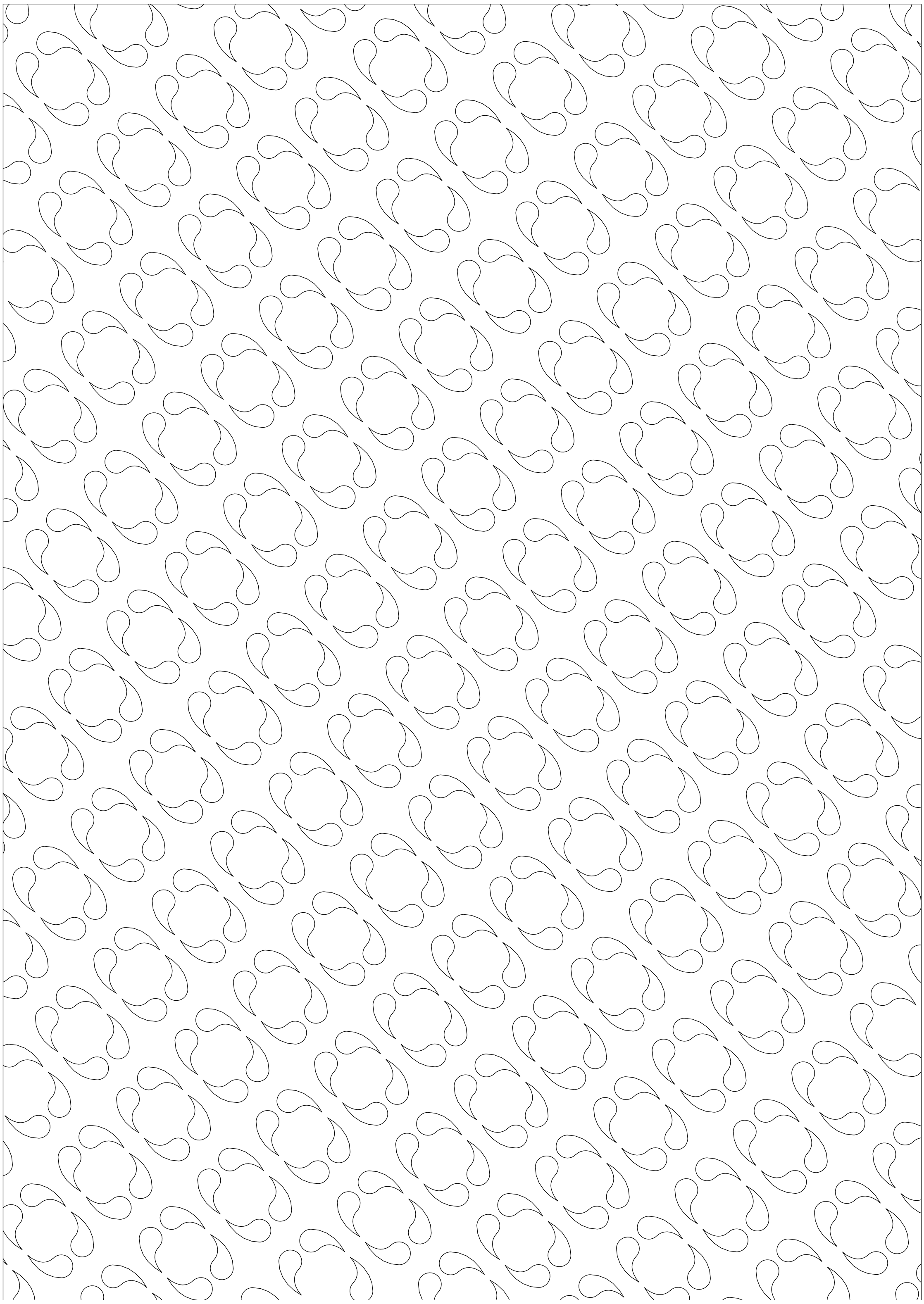


Fig. 2

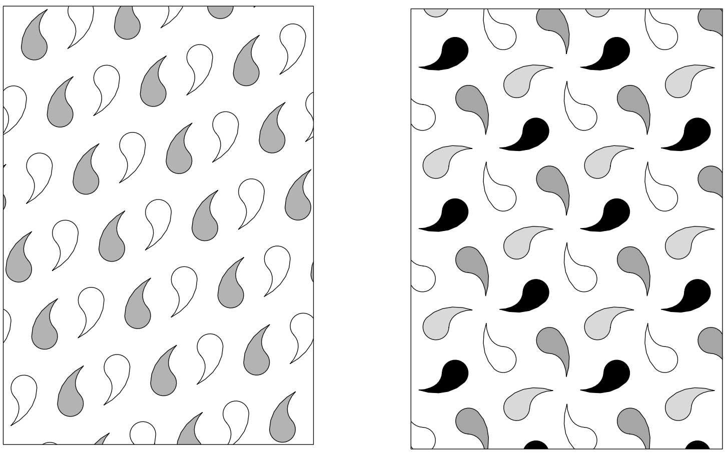
Cette première phase est fondamentale : les contrastes entre les régularités et les différences (à l'intérieur de chaque papier et d'un papier à l'autre) stimulent la recherche de rythmes visuels qui incitent à découvrir une règle de coloriage. L'explicitation de la règle est liée pour les rotations et les translations, au mouvement du regard qui va d'une goutte à l'autre : on dit que les gouttent glissent, qu'elles tournent d'un demi-tour. À propos des symétries orthogonales, les élèves reconnaissent ce qu'ils appellent *symétrie en miroir* ou *symétrie* tout court. C'est souvent la seule transformation apprise dans l'enseignement fondamental.

Une règle particulièrement significative consiste à colorier de même toutes les gouttes disposées de la même façon, ce qui correspond à un mouvement de glissement en ligne droite et introduit la notion de translation.

Activité 2

Colorier d'une même couleur toutes les gouttes qui sont images l'une de l'autre par une translation.

La seconde mise en couleur organise la vision des différents papiers peints : on compare le nombre de couleurs employées, la disposition des gouttes de couleurs différentes. On voit apparaître des alignements, des groupes de gouttes de couleurs différentes. Ces observations aident à déterminer la couleur des gouttes tronquées par le cadre. Regardons les papiers peints A, C (figure 3) et K.



A C

Fig. 3

Pour le papier peint A, deux couleurs sont nécessaires pour indiquer les gouttes images l'une de l'autre par translation. Deux gouttes (quelconques) de couleurs différentes sont image l'une de l'autre par une rotation d'un demi-tour (180°). Pour s'en rendre compte on décalque une goutte, par exemple une blanche, et on tourne le calque pour qu'elle vienne se superposer à une goutte grise. On peut préciser ce mouvement en cherchant avec une pointe de compas (ou une aiguille) le point autour duquel on doit tourner pour que le mouvement corresponde à un seul geste.

Quatre couleurs sont nécessaires pour le papier peint C. Il y a plusieurs façons de voir un groupe de quatre gouttes, toutes de couleurs différentes. La figure 4 en présente deux. Dans la première, la rotation d'un quart de tour est beaucoup plus facile à voir, car les quatre gouttes pointent vers le centre.

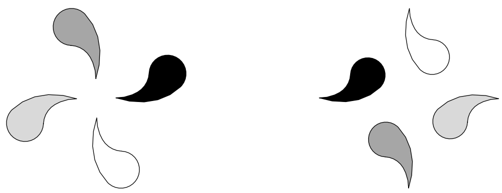


Fig. 4

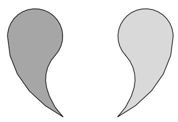


Fig. 5

Dans le papier peint K, chaque goutte ne peut être superposée à une goutte de couleur différente que si l'on retourne le calque (figure 5).

Activité 3

Pour les papiers peints A, B et E, repérer trois translations par des flèches.

La figure 6(a) à la page suivante montre trois translations parmi d'autres qui répondent à la question. Il arrive souvent que des élèves considèrent indûment des flèches situées à différents endroits comme des translations distinctes. C'est le cas de la figure 6(b). On voit ici l'intérêt de travailler sur une figure qui montre qu'un même mouvement de translation déplace « beaucoup » de motifs. C'est ce que montre la figure 6(c). Pour visualiser cela, on considère un papier peint et sa copie sur transparent. On pose la copie sur le papier peint, puis on la déplace : on voit ainsi que chaque translation qui envoie une goutte sur une autre, fait subir le même mouvement aux autres gouttes (pour peu qu'on imagine que le papier peint peut être prolongé, qu'on n'en voit qu'une « fenêtre »).

On introduit la représentation d'une translation par une flèche : la flèche a en effet les mêmes caractéristiques qu'une translation, elle a une direction, un sens et une longueur.

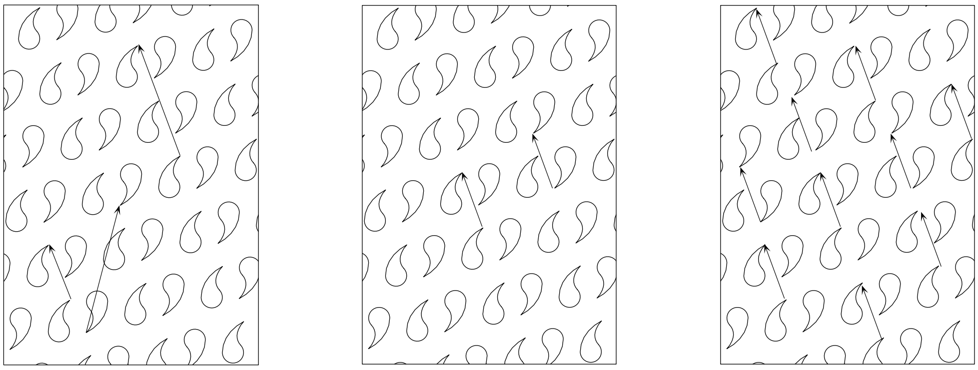


Fig. 6 (a,b,c)

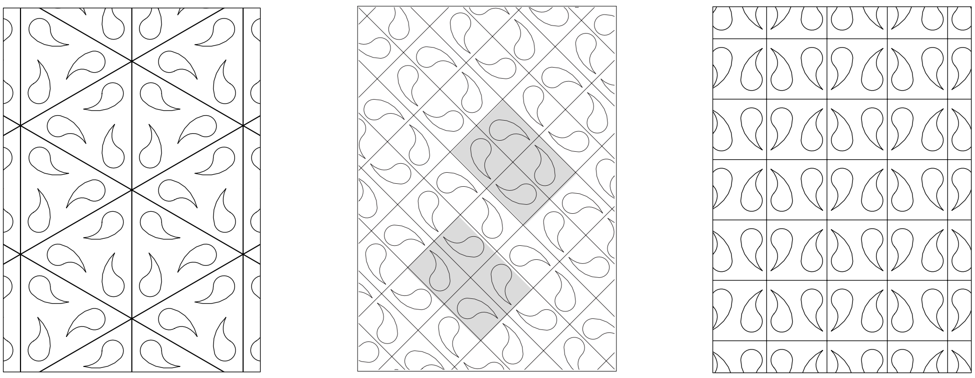
Activité 4

Pour les papiers peints F, G, H, I, J, K et L, repérer des symétries orthogonales qui envoient une goutte sur une autre.

En marquant le « pli » qui envoie une goutte sur l'autre, certains élèves, qui ne considèrent qu'une paire de gouttes à la fois, dessinent d'abord des axes très courts. D'autres procèdent par pliage, ce qui montre des axes traversant tout le papier peint. On peut observer sur un papier peint reproduit sur transparent que le pliage qui envoie une goutte sur une autre superpose toute autre goutte à une autre.

Le tracé d'un axe, pour être précis, conduit le plus souvent les élèves à déterminer deux paires de ses points suffisamment éloignés. Rares sont ceux qui utilisent spontanément le fait que l'axe est perpendiculaire au segment qui relie une paire de points. Ce fait sera examiné lors de la synthèse.

Les axes font apparaître des *bandes* ou des *boîtes*. Regardons par exemple les papiers peints de la figure 7.



L G J

Fig. 7

À l'intérieur des triangles du papier peint L, on a des rotations de 120° et 240°. Chaque *boîte* du papier peint G contient une seule goutte, mais on peut aussi voir des rectangles qui comportent quatre gouttes, images les unes des autres par des symétries orthogonales d'axes perpendiculaires et par une rotation de 180°. Pour le papier peint J, à l'intérieur de chaque *boîte* carrée, les deux gouttes sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°.

Activité 5

Sur les papiers peints A, C, D et K, repérer des rotations de 180° qui envoient une goutte sur une autre goutte.

Il importe de traiter cette rotation à part des autres, d'une part parce que, sur le plan de la perception, on la distingue parfois difficilement de la symétrie orthogonale (chacune à sa façon, est un mouvement de « volte-face ») et d'autre part parce qu'elle joue un rôle fondamental dans l'étude du parallélogramme. Ici aussi le mouvement de rotation du calque est éclairant. Eu égard à ce mouvement nous préférons la considérer comme une rotation particulière, plutôt que comme une symétrie centrale. La recherche d'un centre qui envoie une goutte sur une autre fera entrevoir que le même mouvement concerne d'autres gouttes et même le papier peint tout entier.

Activité 6

On colorie deux gouttes sur un papier peint. Décrire le mouvement qui permet d'envoyer une goutte sur l'autre.

Cette activité contribue à installer une image mentale pour chaque isométrie. La description demandée comporte la détermination de la flèche, de l'axe ou du centre.

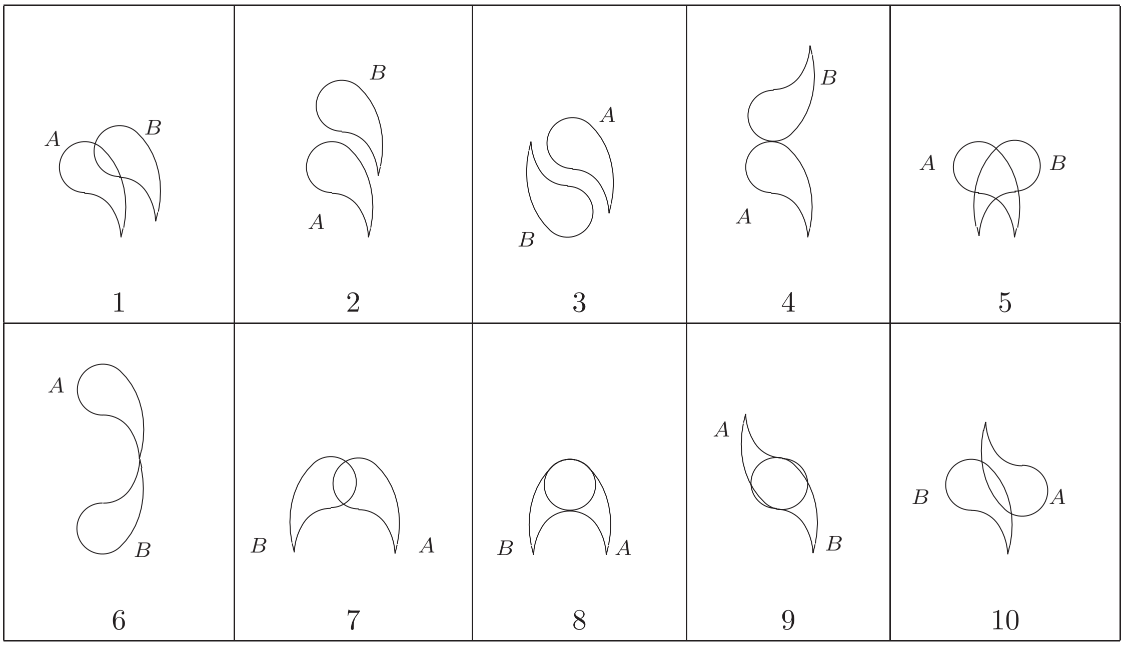
Pour repérer les centres de rotation autres que celles de 180°, il est avantageux d'utiliser du papier calque et de chercher le centre à vue à l'aide d'une pointe de compas. Ceci n'est pas nécessaire pour les papiers peints dans lesquels les centres sont à l'intersection des axes de symétrie (comme le papier G).

On peut déterminer les angles des autres rotations sans devoir mesurer : ce sont toujours des diviseurs entiers de 360°.

Lorsqu'on sélectionne deux gouttes quelconques et qu'on cherche comment envoyer l'une sur l'autre, on constate qu'on y arrive toujours par un des trois mouvements qu'on a identifiés, suivi (ou précédé) éventuellement d'une translation.

Exercice

1. Identifier, dans les figures ci-dessous, le mouvement qui envoie le motif A sur le motif B.



2. Selon le cas, tracer l'axe ou la flèche, ou encore repérer le centre.

En focalisant l'attention sur une seule paire de gouttes, cet exercice cerne l'essentiel des notions visées par les activités qui précèdent et apporte quelques compléments :

– distinguer une figure de départ et son image n'est pas nécessaire pour déterminer une symétrie orthogonale ou une rotation de 180°,

– envisager des figures qui se chevauchent.

Synthèse

En examinant les différents papiers peints, nous avons décrit comment un motif est envoyé sur un autre. Nous avons utilisé un calque pour observer les différents mouvements.

Translation

Dans une translation, le calque glisse en ligne droite.

1. *Une translation est déterminée par une flèche qui relie n'importe quel point de départ à son image.*

Toutes les flèches d'une même translation sont parallèles ; elles ont même sens et même longueur.

Il suffit de dessiner une seule flèche pour déterminer une translation.

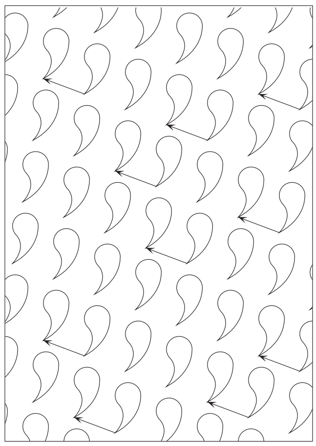


Fig. 8

Rotation de 180°

La figure 9 montre plusieurs segments qui relient chaque fois un point de départ et son image à l'arrivée pour une même rotation[2] de 180°.

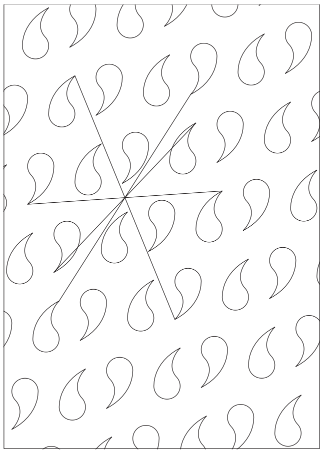


Fig. 9

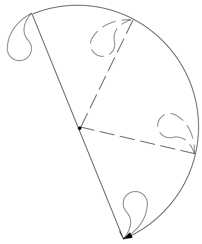


Fig. 10

La figure 10 détaille le mouvement pour un motif particulier.

Dans une rotation de 180°, le calque tourne autour d'un point.

Lorsqu'on relie un point quelconque du motif au centre, le segment tracé balaie la moitié d'un disque dans le plan de la feuille. À l'arrivée, il se trouve dans le prolongement de sa position de départ.

2. *Une rotation de 180° est déterminée par son centre.*

Pour trouver le centre, on peut relier un point de départ à son image. Le centre est au milieu de ce segment.

On peut aussi tracer deux segments qui relient chacun un point de départ à son image, le centre appartient aux deux segments. Il est déterminé à condition que les deux segments soient sécants.

Remarquons que si un point est sa propre image, alors il est le centre.

[2] Parmi les rotations rencontrées, celles de 180° et de 90° seront utilisées dans l'étude du parallélisme, de la perpendicularité et des propriétés des quadrilatères. Notre synthèse porte uniquement sur celle de 180°. Un synthèse analogue doit être faite pour les rotations de 90°.

Symétrie orthogonale

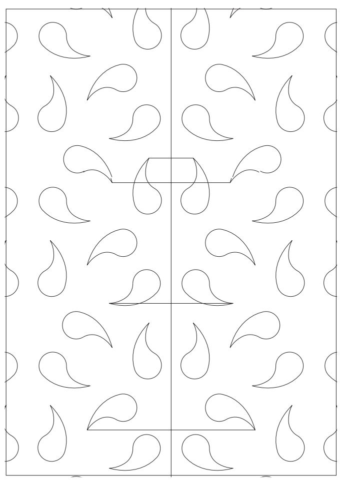


Fig. 11

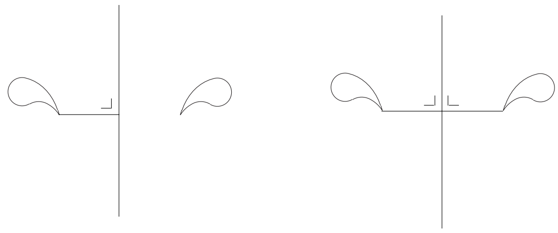


Fig. 12 (a,b)

La figure 11 montre plusieurs couples pour une même symétrie orthogonale.

Dans la figure 12(a), on a mené un segment issu d'un point du motif de départ, perpendiculaire à l'axe et s'arrêtant à celui-ci. La figure 12(b) montre cette perpendiculaire à l'arrivée après un mouvement autour de l'axe (comme celui d'une porte qui tourne autour de sa charnière).

Le segment tracé a balayé la moitié d'un disque dans l'espace. À l'arrivée, le segment est perpendiculaire à l'axe.

Pour superposer la figure de départ et la figure à l'arrivée par l'intermédiaire d'un transparent, il faut poser le calque sur l'autre face.

3. *Pour déterminer une symétrie orthogonale, on peut tracer son axe.*

Pour tracer l'axe, on peut relier un point de départ à son image et repérer le milieu de ce segment. L'axe est perpendiculaire à ce segment et passe par ce point milieu.

On peut aussi tracer deux segments qui relient chaque fois un point de départ à son image et repérer les milieux de ces segments. L'axe passe par ces deux milieux. Il est déterminé à condition que les milieux ne coïncident pas.

Remarquons que si un point est sa propre image, alors il appartient à l'axe.

2 Tracer des perpendiculaires et des parallèles

Activité 1

Les élèves disposent d'instruments de dessin et de feuilles qu'ils peuvent plier ou découper.
On demande de tracer trois ou quatre perpendiculaires à une droite donnée, passant par des points donnés. Ces points sont tantôt sur la droite, tantôt en dehors. Il s'agit de découvrir et de décrire plusieurs procédés de construction différents.
On demande la même chose pour des parallèles.

Commentaires

Ce qui fait problème ici, ce sont les procédés qui ne recourent pas à des mesures. Au cours de l'activité, les élèves sont invités à décrire oralement le procédé utilisé, de manière à ce qu'un autre élève puisse l'appliquer. On procède ensuite à une rédaction écrite collective. On met en évidence, pour l'un ou l'autre procédé, les mouvements et les propriétés sous-jacents .

Nous commentons ci-après ce que peuvent apporter des constructions par pliage et des constructions avec équerre et règle non graduée.

On plie la feuille le long de la droite donnée. On choisit le point par lequel la perpendiculaire doit passer ; on replie de manière à ce que ce premier pli se superpose à lui-même. On ouvre et obtient deux plis perpendiculaires (figure 13).

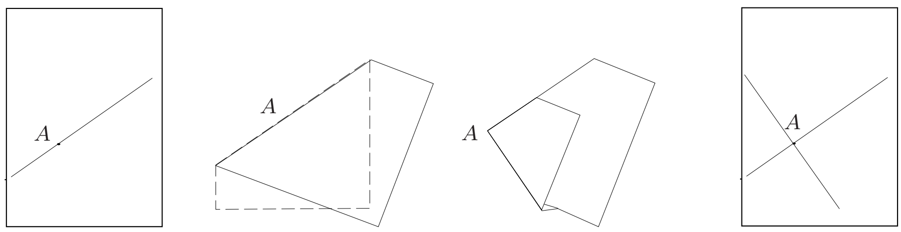


Fig. 13

Si on plie à nouveau de la même façon, de manière à ce que le pli passe par autre point donné, on détermine une seconde perpendiculaire à la droite donnée.

Lorsqu'on place l'équerre de façon à ce qu'un côté qui borde l'angle droit glisse le long de la droite donnée (figure 14), chaque fois que l'autre côté de l'angle droit rencontre un point donné, on peut tracer une perpendiculaire. L'équerre fait un mouvement de translation et toutes les perpendiculaires à la droite donnée sont parallèles entre elles.

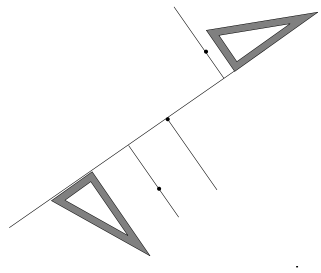
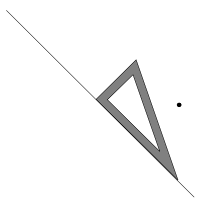
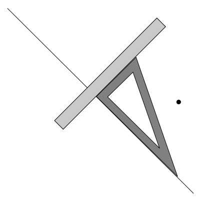
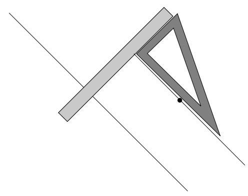


Fig. 14

Pour construire des parallèles sans procéder à aucune mesure, les élèves passent le plus souvent par la construction de deux perpendiculaires. Le procédé de glissement de l'équerre le long de la règle n'arrive pas spontanément. Il est nécessaire de l'introduire. La coordination des actions pour positionner la règle et l'équerre est difficile à acquérir. Nous pensons cependant que cette conquête contribue de manière substantielle à saisir les relations entre droites, points et mouvement de translation. Ce procédé est efficace lorsqu'on est amené à construire plusieurs parallèles, comme par exemple dans les dessins en perspective parallèle.

Lorsque la manœuvre est bien maîtrisée, le professeur distribue une suite de figures montrant certaines étapes de la construction. Les élèves rédigent les légendes. Quelques textes sont reproduits au tableau, ils sont corrigés et remaniés. Dans l'exemple ci-dessous, le commentaire met en évidence le mouvement de translation.

Pour tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné :

		
On place l'équerre contre la droite. Un de côtés de l'équerre doit longer la droite.	On place une règle le long d'un autre côté de l'équerre.	On maintient la règle dans cette position et on glisse l'équerre le long de la règle. On arrête ce mouvement de translation lorsque le côté de l'équerre qui longeait la droite passe par le point donné.

La figure 15 à la page suivante montre une autre façon de placer l'équerre et fait voir le mouvement de translation le long de la droite donnée.

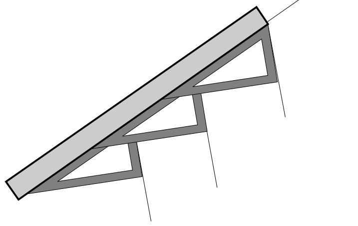


Fig. 15

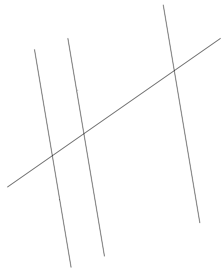


Fig. 16

Les tracés aux instruments ne montrent que les demi-droites situées d'un même côté de la droite donnée, il faut donc les prolonger (figure 16). Apparaît ainsi une figure clef : un faisceau de parallèles coupées par une sécante. La figure 17 montre qu'on peut placer le même « coin » de l'équerre de l'autre côté de la droite donnée. Elle montre aussi la rotation de 180° qui permet de passer d'une position à l'autre. Ce phénomène sera expliqué lors de la synthèse.

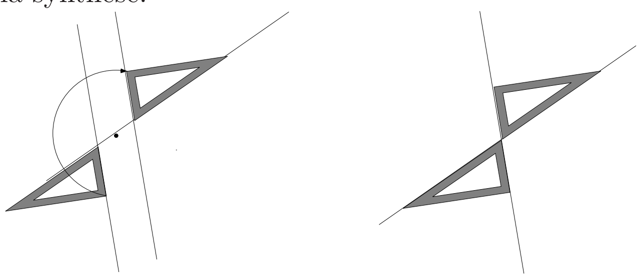


Fig. 17

Synthèse

Perpendiculaires et parallèles

4. *Quand on a un point et une droite, on peut toujours construire une perpendiculaire à la droite de façon à ce que cette perpendiculaire passe par le point. On ne peut en construire qu'une.*

5. *Quand on a un point et une droite, on peut toujours construire une parallèle à cette droite de façon à ce que la parallèle passe par le point. On ne peut en construire qu'une.*

6. *Une droite est déterminée quand on connaît deux de ses points.*

7. *Une droite est déterminée quand on connaît un de ses points et sa direction.*

8. *Quand des droites sont perpendiculaires à une même autre droite, on est sûr que ces droites sont parallèles entre elles.*

Fig. 18

9. *Quand des droites sont parallèles, elles forment avec une sécante non perpendiculaire des angles aigus de même amplitude (de même pour les angles obtus).*

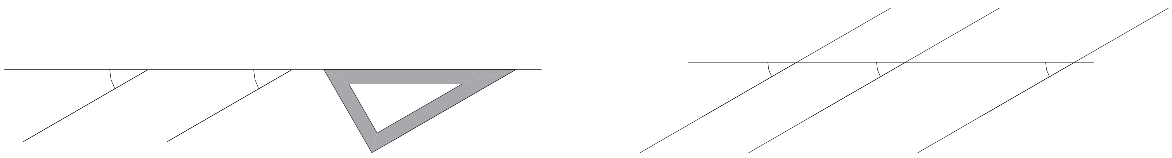


Fig. 19

10. *Quand des droites sont parallèles et qu'on trace une perpendiculaire à l'une, elle est perpendiculaire aux autres.*

Translation et droites parallèles

11. *Dans une translation, une droite à l'arrivée est parallèle à la droite de départ*

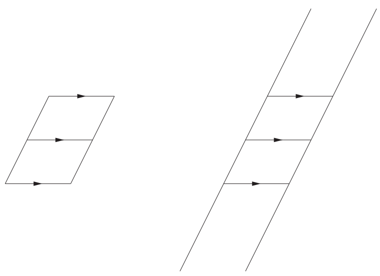


Fig. 20

12. *Quand deux droites sont parallèles, on peut déterminer beaucoup de translations qui envoient une droite sur l'autre.*

Fig. 21

Plus tard, lorsque les élèves auront été amenés à engager ces énoncés dans des raisonnements, on peut reformuler les énoncés pour les rendre d'emblée disponibles pour un raisonnement déductif. Cette initiation peut se faire sous la forme d'un tableau à compléter.

Si on sait que	**on peut conclure que**
une droite est image d'une autre par une translation,	ces droites sont parallèles ;
des droites sont parallèles,	une droite est image de l'autre par une translation ;
des droites sont parallèles,	elles forment avec une sécante non perpendiculaire des angles aigus de même amplitude ; idem pour des angles obtus ;
des droites sont perpendiculaires à une même troisième,	ces droites sont parallèles.

Rotation de 180° et droites parallèles

Le mouvement des aiguilles d'une horloge donne une bonne image des rotations. La rotation de 180°, par exemple, correspond au mouvement de l'aiguille des minutes pendant une demi-heure. Après la demi-heure, cette aiguille vient se placer dans le prolongement de sa position de départ.

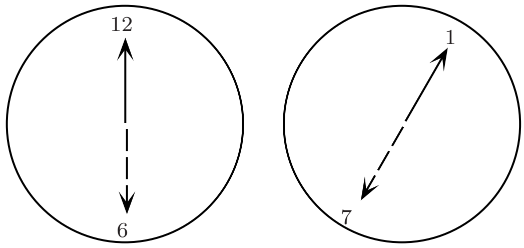


Fig. 22

Si on colle une droite à la flèche pour qu'elle suive le même mouvement, on voit qu'après une demi-heure, la direction à l'arrivée est la même que la direction au départ.

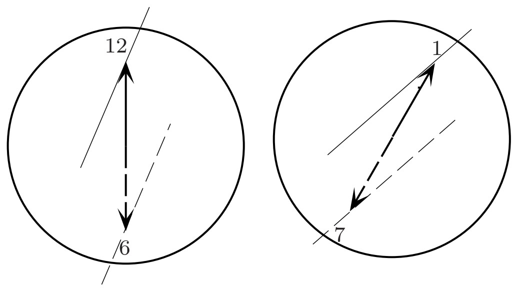


Fig. 23

13. *Lorsqu'une droite tourne de 180° autour d'un de ses points, elle vient se superposer à elle-même.*

14. *Lorsqu'une droite tourne de 180° autour d'un point extérieur, la droite à l'arrivée est parallèle à celle de départ.*

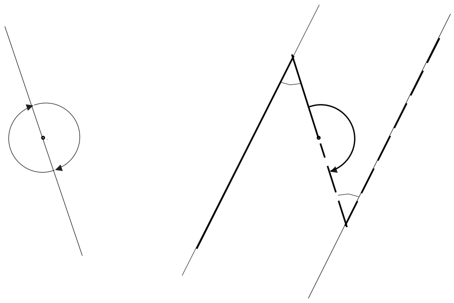


Fig. 24

Plus tard ces énoncés peuvent être reformulés de manière à ce qu'ils soient d'emblée disponibles pour l'argumentation.

Si on sait que	**on peut conclure que**
deux droites sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°,	ces droites sont parallèles ;
deux droites sont parallèles,	ces droites sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°.

Exercice

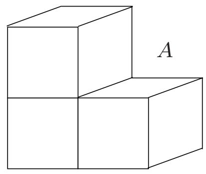


Fig. 25

On donne à chaque élève des cubes attachables (au moins quatre) et un dessin en perspective cavalière d'un assemblage de trois cubes identiques (module A). Il s'agit de fabriquer des modules composés de quatre cubes. Tous les modules doivent être différents (il y en a six). Compléter les dessins ci-dessous chaque fois qu'un nouveau module est découvert.

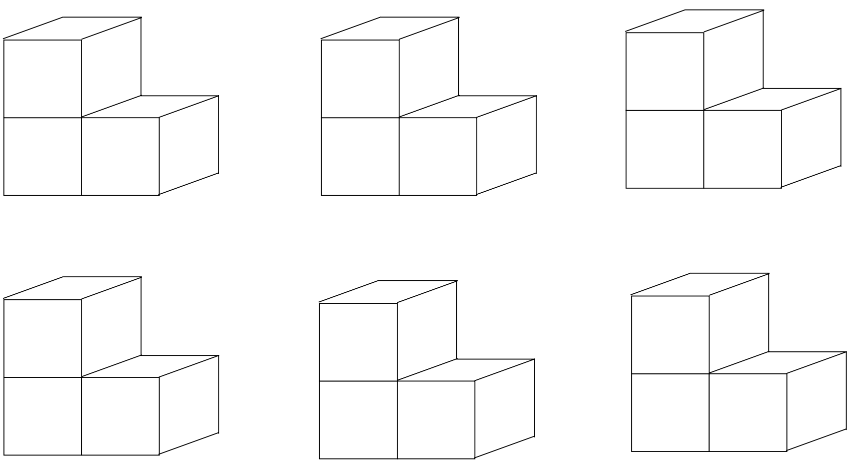


Fig. 26

Commentaires

Cet exercice de dessin vise à exercer le tracé de parallèles dans un contexte où l'usage de la règle et de l'équerre permet de construire rapidement plusieurs arêtes parallèles. Il peut être exécuté sans qu'aucune propriété de la perspective parallèle ait été donnée au préalable.

Un premier travail à main levée est souvent nécessaire pour imaginer les étapes des tracés aux instruments.

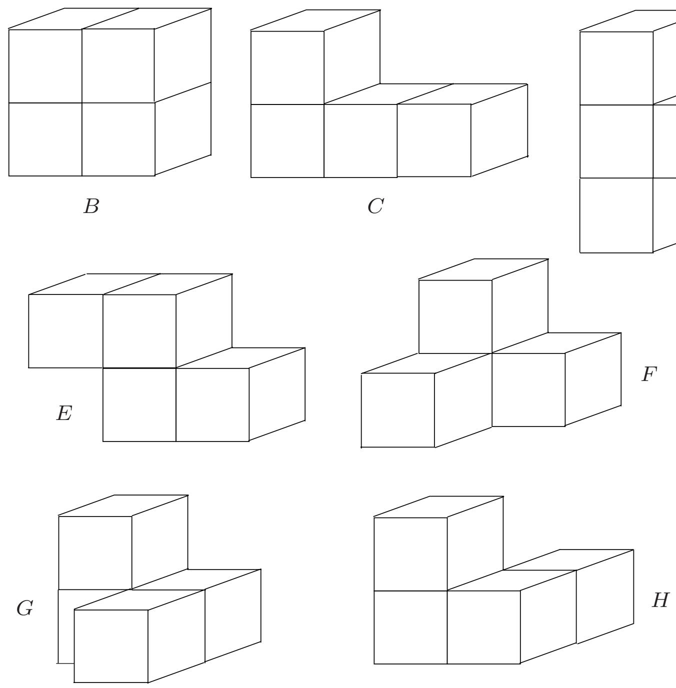


Fig. 27

Il arrive souvent dans les classes que sept assemblages apparaissent comme distincts. Ils sont montrés à la figure 27.

Il est intéressant alors de placer les solides G et H *en miroir* pour faire voir qu'ils sont symétriques.

Signalons que les sept solides A (voir figure 25 à la page précédente), B, C, D, E, F et G peuvent être assemblés pour former un cube. On peut aussi former un cube en assemblant les solides A, C, D, E, F, G et H.

3 Assembler des triangles quelconques

Les élèves disposent de deux triangles quelconques. Ils sont découpés dans du papier fort.

Il est nécessaire pour y voir clair de discerner les deux faces d'un même triangle en les coloriant de couleurs différentes. Deux triangles posés sur des faces d'une même couleur sont superposables par déplacement, deux triangles posés sur des faces de couleurs différentes sont superposables par retournement.

Activité 1

Combien[3] de quadrilatères distincts peut-on former en accolant deux triangles quelconques superposables ?

Commentaires

Les élèves gardent une trace des quadrilatères obtenus en contournant au fur et à mesure les figures déposées sur les cahiers.

Pour obtenir un quadrilatère convexe avec des triangles qui ne comportent pas d'angles droits, il faut accoler des côtés de même longueur.

Lorsqu'on utilise deux triangles à l'endroit, on obtient trois parallélogrammes différents : ils ne sont pas superposables ; d'un parallélogramme à l'autre, on repère facilement des côtés et des angles qui n'ont pas même mesure (figure 28).

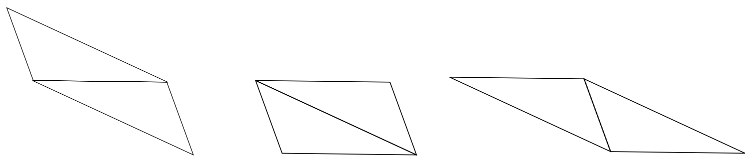


Fig. 28

Lorsqu'on utilise deux triangles à l'envers, on obtient aussi trois parallélogrammes. Chacun d'eux est superposable par retournement à l'un des trois précédents. On s'en assure soit en reportant un quadrilatère sur l'autre, soit en comparant les mesures d'angles et de côtés des différents quadrilatères et en vérifiant qu'ils sont agencés de la même façon.

On convient d'appeler *cerfs-volants*, les quadrilatères que l'on obtient lorsqu'on utilise un triangle à l'endroit et un triangle à l'envers.

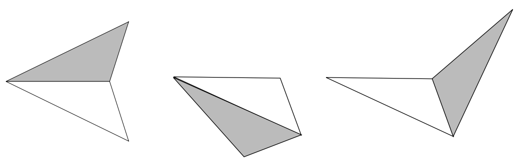


Fig. 29

On conclut donc que lorsqu'on assemble deux triangles quelconques superposables le long d'un de leur coté, on peut former

[3] Ces activités d'assemblage sont assez proches de celles que nous avons proposées dans F. Van Dieren-Thomas *et al.* [1993], toutefois, le rôle des mouvements est ici plus explicite et les synthèses sont plus développées.

six quadrilatères distincts (à savoir, qui ne sont superposables ni par déplacement, ni par retournement).

Cette activité de dénombrement ouvre une question : comment se fait-il que tous les assemblages par déplacement aboutissent à des parallélogrammes ? On y répond en regardant la rotation de 180° suivante : un triangle est posé sur un autre, il vient ensuite se placer contre celui-ci (figure 30).

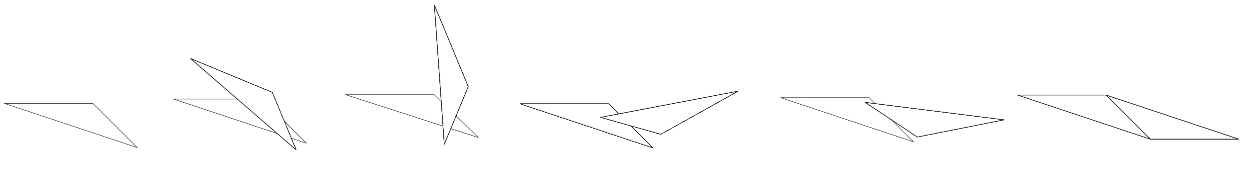


Fig. 30

Ce mouvement évoque celui qui lie rotation de 180° et parallélisme (figure 31).

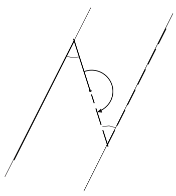


Fig. 31

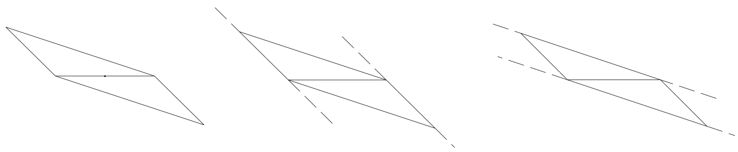


Fig. 32 (a,b,c)

Ce rapprochement constitue l'essence de la démonstration[4] que voici (voir figure 32) :

(*a*) Le quadrilatère est formé de deux triangles superposables par rotation de 180°.

(*b*) On prolonge un côté du parallélogramme pour faire apparaître une droite qui tourne de 180° autour d'un point extérieur ; la droite à l'arrivée est parallèle à celle de départ (énoncé 14 à la page 186).

(*c*) On fait le même raisonnement pour l'autre paire de côtés.

Synthèse

Parallélogramme et rotation de 180°

15. *Lorsque deux polygones sont superposables, les côtés correspondants ont même longueur et les angles correspondants ont même amplitude.*

[4] Cette démonstration ne sera faite que si l'on estime que les élèves ont saisi la portée de la question. Il n'est en effet pas facile de s'interroger sur l'existence d'une figure que l'on a sous les yeux. Même dans ce cas, la démonstration sera faite oralement, gestes à l'appui. Elle ne doit pas être mémorisée.

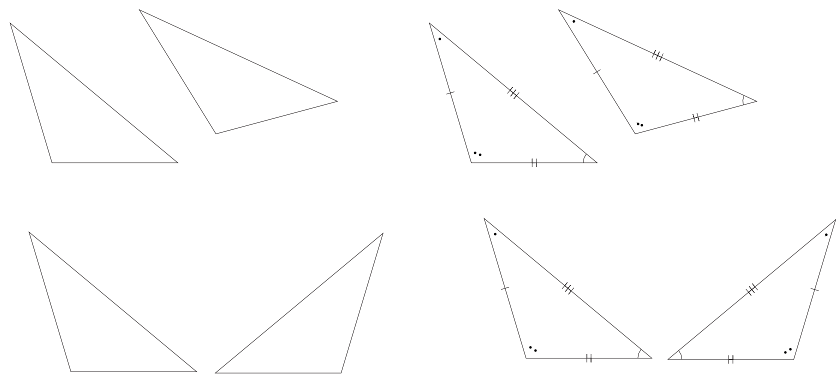


Fig. 33

16. *Le parallélogramme a ses côtés opposés parallèles.*

17. *Lorsqu'un quadrilatère est formé de deux triangles superposables et que l'un peut être envoyé sur l'autre par une rotation de 180°, le quadrilatère obtenu est un parallélogramme.*

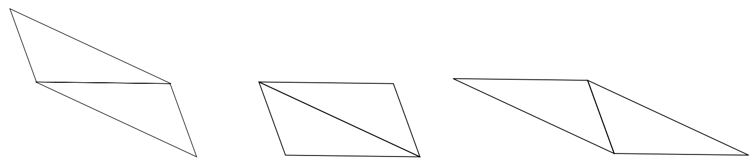


Fig. 34

Activité 2

Assembler deux triangles pour former un parallélogramme et coder les éléments qui ont même mesure. Compléter la figure pour établir une liste des propriétés du parallélogramme.

Commentaires

Les propriétés du parallélogramme sont connues. Les rattacher à une figure clef et à des mouvements de rotation et de translation leur donne une intelligibilité et une cohérence nouvelles.

Le codage des éléments qui sont superposables par une rotation de 180° fait apparaître les propriétés des côtés et des angles du parallélogramme qui sont liées à cette rotation.

Pour relier les propriétés des diagonales et des médianes à celles des mouvements de rotation ou de translation, il faut ajouter quelques éléments à la figure.

Figures et propriétés correspondantes sont présentées dans la synthèse.

Synthèse

Côtés et angles du parallélogramme

Le parallélogramme étant formé de deux triangles superposables par rotation de 180°, il a les propriétés suivantes :

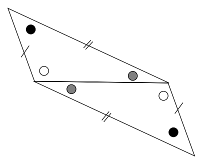


Fig. 35

18. *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.*

19. *Le parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.*

20. *Le parallélogramme a ses angles opposés de même amplitude.*

Diagonales du parallélogramme

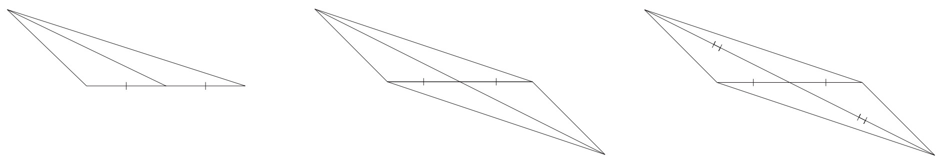


Fig. 36 (a,b,c)

(a) Sur chacun des deux triangles identiques avec lesquels on va former des parallélogrammes, on trace le segment qui joint un sommet au centre de rotation. On superpose les deux triangles.

(b) On fait tourner un des deux triangle de 180° autour du centre. Le segment de départ et son image sont alignés (énoncé 13 à la page 186).

(c) On code les éléments superposables.

On conclut :

21. *Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.*

Médianes du parallélogramme

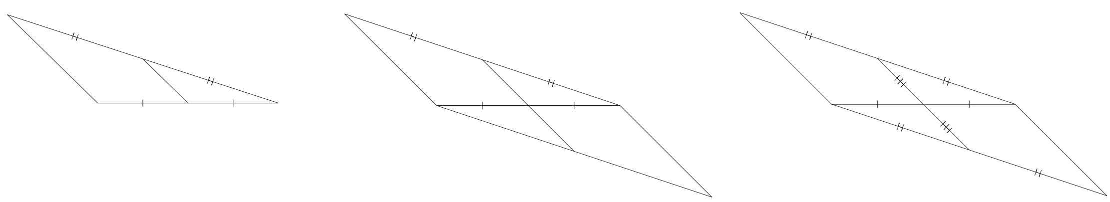


Fig. 37 (a,b,c)

(a) On joint le milieu d'un côté au centre de rotation pour les deux triangles que l'on commence par superposer.

(b) On fait tourner un des deux triangles de 180° autour du centre. Le segment de départ et son image sont alignés (énoncé 13).

(c) On code les éléments superposables.

On fait de même pour l'autre médiane. On conclut :

22. *Dans un parallélogramme, les médianes et les diagonales se coupent en un même point.*

23. *Les médianes se coupent en leur milieu.*

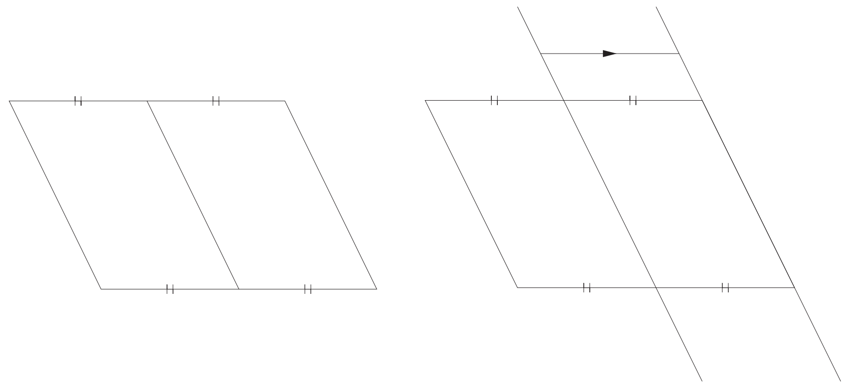


Fig. 38 (a,b)

(a) On trace une médiane du parallélogramme et on code les segments de même longueur.

(b) La médiane peut glisser le long d'un côté du parallélogramme et arriver sur un autre côté.

On fait de même pour l'autre médiane. On conclut avec l'énoncé 24 :

24. *Chaque médiane est parallèle à deux côtés du parallélogramme.*

Égalités de longueurs et relations de parallélisme conduisent à la figure39 qui montre que les quatre parallélogrammes formés par les médianes sont superposables.

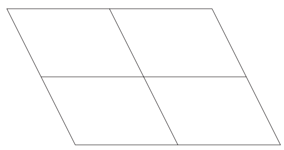


Fig. 39

Activité 3

Coder, dans le cerf-volant, les segments et les angles qui ont même mesure.

Commentaires

Le cerf-volant est utile en géométrie en raison surtout de sa symétrie orthogonale. C'est pourquoi la symétrie orthogonale intervient dans la définition que nous proposons. Comme pour le triangle isocèle, cette symétrie permet de voir toutes les propriétés d'un seul coup.

Synthèse

Cerf-volant et symétrie orthogonale

On peut toujours décomposer un cerf-volant en deux triangles de sorte qu'on passe d'un triangle à l'autre en le retournant autour du côté commun pris comme charnière. Dans ce mouvement, un triangle sort du plan pour venir s'appliquer sur l'autre.

25. *Le cerf-volant est formé de deux triangles superposables, images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale dont l'axe est le côté commun.*

Le travail de codage conduit aux propriétés du cerf-volant que l'on rapproche de celles de la symétrie orthogonale.

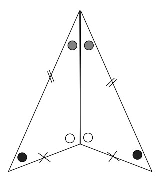


Fig. 40

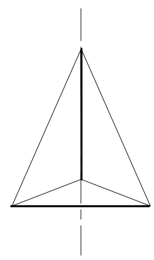


Fig. 41

Les figures 40 et 41 montrent que :

26. *Une diagonale du cerf-volant est l'axe de symétrie qui envoie un triangle sur l'autre.*

Cette diagonale est bissectrice des angles qu'elle partage.

Les côtés situés de part et d'autre de l'axe ont même longueur.

27. *Dans un cerf-volant, les diagonales sont perpendiculaires.*

La figure 41 illustre cette propriété : les sommets qui n'appartiennent pas à l'axe sont images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale, le segment qui les relie est perpendiculaire à l'axe.

4 Assembler des triangles rectangles

Cette activité se déroule selon un schéma analogue aux deux précédentes. Elles peut être travaillée de manière plus autonome par les élèves, soit dans des travaux d'équipes, soit dans des travaux personnels.

Activité 1

Combien de quadrilatères distincts peut-on former en assemblant deux triangles rectangles superposables ?

Commentaires

La figure 42 montre les figures que l'on obtient en s'organisant comme pour les triangles quelconques : les trois premières par rotation de 180° autour du milieu d'un côté, les trois suivantes par symétrie orthogonale autour d'un des côtés.

Lorsqu'on accole deux côtés qui bordent l'angle droit, les autres côtés d'angles droits s'alignent.

On obtient donc de nouvelles figures : deux triangles et même, lorsqu'on songe à accoler deux côtés de longueurs inégales, un quadrilatère non convexe.

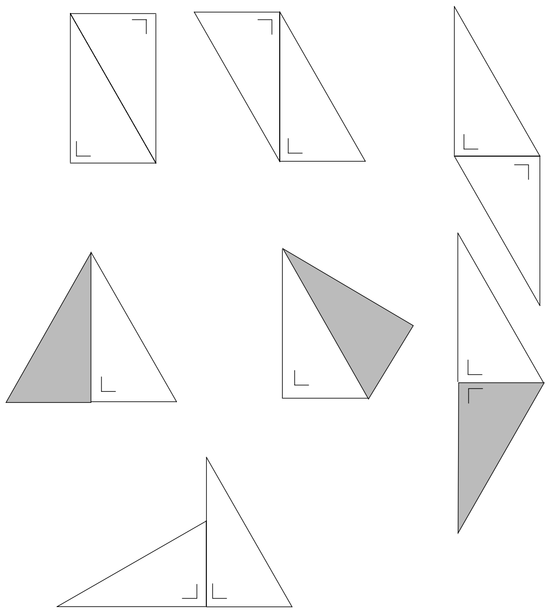


Fig. 42

Les triangles obtenus sont isocèles, on les reconnaît à leurs côtés et à leurs angles de même mesure.

Parmi les quadrilatères on trouve un rectangle. Comment expliquer qu'au départ, d'un seul angle droit, celui du triangle, on obtient les quatre angles droits du rectangle[5] ? Le mouvement de rotation montré par la figure 43 explique l'apparition du second angle droit.

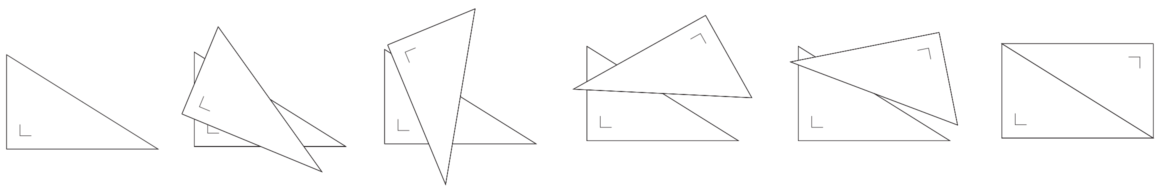


Fig. 43

[5] La note 4 à la page 190 indique comment envisager cette démonstration dans les classes.

La figure 44 montre une première translation de l'équerre qui envoie un côté du parallélogramme sur l'autre, et en dessous une seconde translation analogue. Dans chaque mouvement, l'angle droit est conservé. On explique ainsi la présence des deux autres angles droits.

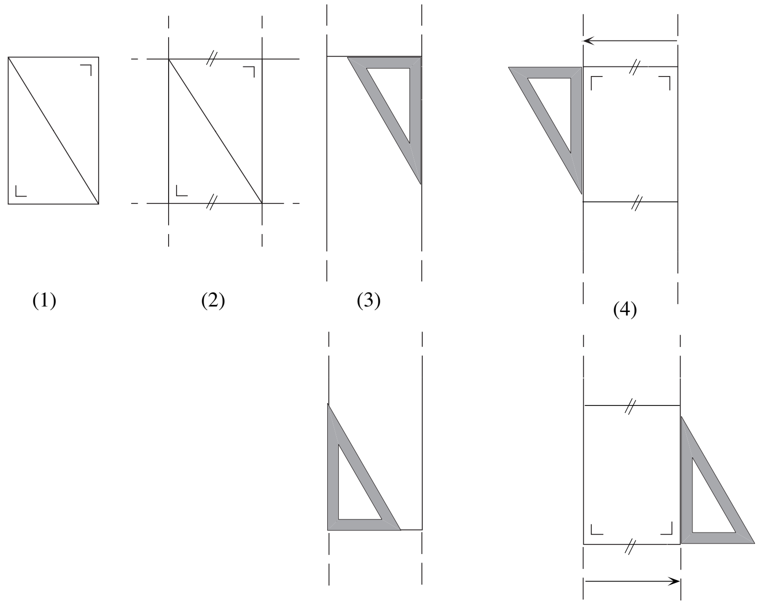


Fig. 44

Les activités qui suivent regroupent par thèmes les questions qui viennent lors des assemblages. Dans les classes, elles ne se présentent pas dans le même ordre et ne sont pas nécessairement traitées de manière aussi exhaustive. Les questions posées préparent directement les synthèses qui figurent en fin de section.

Activité 2

Vrai ou faux ?

- Dans un triangle rectangle, il n'y a jamais d'angle obtus.
- Dans n'importe quel triangle rectangle, les angles aigus ont même amplitude.
- Dans tous les triangles rectangles, la somme des amplitudes des angles est la même.
- Dans tous les triangles, la somme des amplitudes des angles est la même.

Commentaires

Ces questions ménagent des surprises :

– elles conduisent à évaluer une somme d'angles sans qu'on connaissen pour autant l'amplitude de chacun,

– elles concernent des angles intérieurs mais les configurations qui les éclairent conduisent le regard à l'extérieur de la figure.

Les activités qui précèdent ont familiarisé avec cette idée que certaines propriétés peuvent être expliquées en juxtaposant des figures superposables.

Ainsi on peut découvrir, en assemblant deux triangles rectangles superposables, que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires,(figure 45 à la page suivante dans la synthèse).

Ou encore, en assemblant trois triangles quelconques superposables, que la somme des angles de n'importe quel triangle vaut 180° (figure 47 à la page 199) dans la synthèse.

Activité 3

Comparer les propriétés des médianes et des diagonales du rectangle avec celles du parallélogramme.

Commentaires

Les propriétés des médianes et des diagonales du rectangle sont celles du parallélogramme, puisque le rectangle est formé de triangles superposables par rotation de 180°.

Les propriétés spécifiques du rectangle apparaissent en examinant les effets sur l'angle droit de départ, de la rotation de 180°, puis d'une translation, .

Activité 4

Examiner les propriétés du triangle isocèle. Établir les énoncés correspondants.

Commentaires

Voir le triangle isocèle comme une façon d'assembler des triangles rectangles permet de saisir ses propriétés d'un seul coup. les propriétés de la symétrie orthogonale et celles du triangle isocèle se construisent ensemble autour d'une même figure. Les énoncés qui transposent cette analyse sont rassemblées dans la synthèse.

Synthèse

Du triangle rectangle au rectangle

28. *N'importe quel rectangle est décomposé par chacune de ses diagonales en deux triangles rectangles superposables.*

29. *Lorsqu'un quadrilatère est formé de deux triangles rectangles superposables et que l'un peut être envoyé sur l'autre par rotation de 180°, on obtient un rectangle*

30. *Si on sait qu'un parallélogramme a un angle droit, alors on peut dire que c'est un rectangle.*

Angles d'un triangle rectangle

31. *Les angles aigus d'un triangle rectangle forment un angle droit. On dit que ces angles sont complémentaires.*

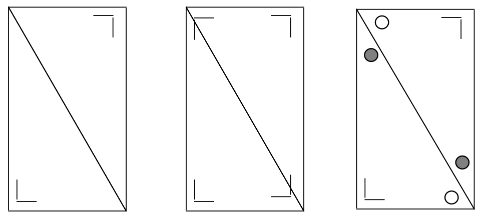


Fig. 45 (a,b,c)

(a) On part d'un rectangle formé de deux triangles rectangles superposables par une rotation de 180°.

(b) On indique tous les angles droits.

(c) On repère les angles superposables par rotation de 180°. À deux endroits, il apparaît qu'un angle droit est formé par deux angles du triangle rectangle de départ : les angles aigus sont donc complémentaires et on ne verra jamais d'angle obtus dans un triangle rectangle !

Somme des amplitudes des angles d'un triangle

32. *La somme des amplitudes des angles d'un triangle vaut 180°.*

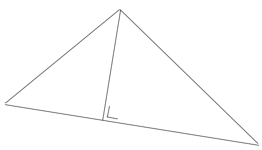


Fig. 46

Soit un triangle quelconque (figure 46). On peut toujours y tracer une hauteur intérieure : deux triangles rectangles apparaissent. En tout pour les deux triangles on a une somme de 360°. Il faut enlever les 180° qui ne correspondent pas aux angles du triangle de départ.

On trouvera donc toujours 180° pour somme des amplitudes des angles d'un triangle.

On peut aussi expliquer cette propriété en assemblant trois copies d'un même triangle.

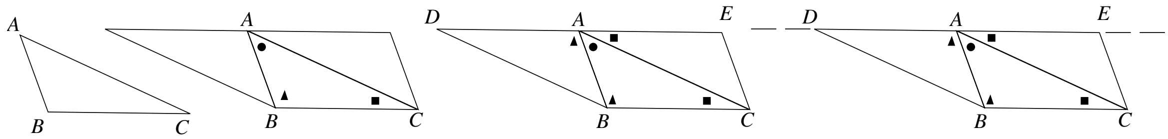


Fig. 47 (a,b,c,d)

(a) et *(b)* On dépose le triangle ABC sur la table et on place deux copies de ce triangle de manière à ce que chacune d'elles soit l'image du triangle ABC par une rotation de 180° autour du milieu d'un de ses côtés.

(c) On code les angles superposables.

(d) On se convainc que les côtés $[AD]$ et $[AE]$ sont placés dans le prolongement l'un de l'autre : on sait que chacun de ces côtés est parallèle à $[BC]$, on sait aussi qu'on ne peut construire qu'une seule parallèle à une droite donnée qui passe par un point donné. Les deux côtés sont donc sur une même droite.

Propriétés des diagonales et des médianes du rectangle

33. *Les médianes et les diagonales du rectangle ont aussi les propriétés des médianes et des diagonales du parallélogramme.*

En outre elles ont les propriétés suivantes (voir figure 48) :

34. *Les médianes du rectangle sont perpendiculaires entre elles.*

35. *Les diagonales du rectangle ont même longueur.*

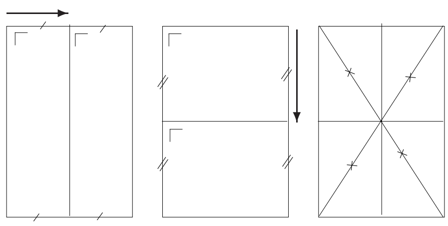


Fig. 48 (a,b,c)

Les deux translations qui, dans un parallélogramme, envoyaient chaque médiane sur un côté, sont ici perpendiculaires.

Chaque médiane est donc perpendiculaire à deux côtés en leurs milieux. Chacune est un axe de symétrie du rectangle.

Le codage qui s'ensuit montre que les diagonales du rectangle ont même longueur.

Du triangle rectangle au triangle isocèle

36. *Un angle droit est un demi angle plat (les deux parties se superposent par symétrie orthogonale).*

37. *Lorsqu'un triangle est formé de deux triangles rectangles superposables et que l'un peut être envoyé sur l'autre par symétrie orthogonale, on obtient un triangle isocèle.*

38. *N'importe quel triangle isocèle peut être décomposé en deux triangles rectangles superposables.*

Propriétés des côtés et des angles du triangle isocèle

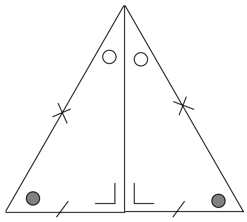


Fig. 49

39. *Dans un triangle isocèle, deux côtés ont même longueur.*

40. *Dans un triangle isocèle deux angles ont même amplitude.*

Propriétés de la hauteur relative à la base d'un triangle isocèle

41. *Dans un triangle isocèle, la hauteur principale partage le triangle en deux triangles rectangles superposables.*

42. *Dans un triangle isocèle, la hauteur principale partage la base en deux segments de même longueur.*

43. *Dans un triangle isocèle, la hauteur principale partage l'angle qu'elle coupe en deux angles de même amplitude.*

5 Assembler des triangles isocèles

Activité

Combien de quadrilatères distincts peut-on former en juxtaposant deux triangles isocèles superposables ?

Commentaires et synthèse

La figure 50 montre les six façons d'assembler les triangles. Parmi les quadrilatères obtenus, il n'y en a que trois distincts : un parallélogramme, un cerf-volant et un losange que l'on reconnaît à ses côtés de même longueur.

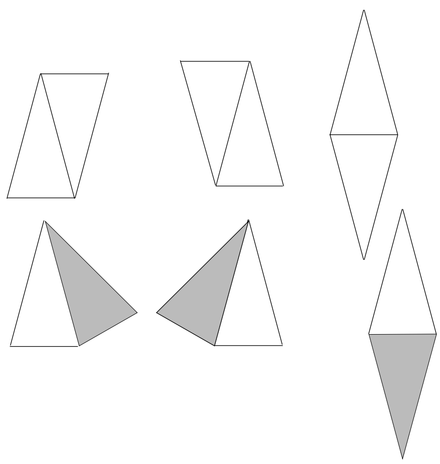


Fig. 50

Comme le losange est obtenu à partir d'une rotation de 180°, il a les mêmes propriétés que le parallélogramme.

44. *Le losange est un parallélogramme qui a ses côtés de même longueur.*

Comme le losange est aussi obtenu à partir d'une symétrie orthogonale, il a les mêmes propriétés que le cerf-volant.

45. *Le losange est un cerf-volant qui a ses côtés opposés de même longueur.*

Activité 2

Coder les éléments du losange qui sont superposables et relever les propriétés du losange qui apparaissent ainsi.

Commentaires et synthèse

Les égalités peuvent être repérées soit par symétrie orthogonale autour d'un côté, soit par rotation de 180° autour d'un milieu, soit à partir des propriétés des triangles isocèles qui ont été assemblés.

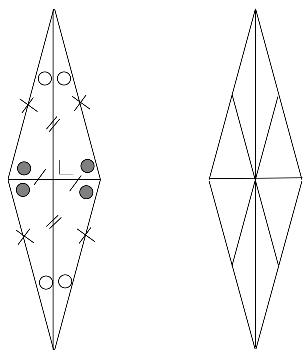


Fig. 51

Propriétés des côtés et des angles du losange

46. *Les angles opposés ont même amplitude.*

47. *Les quatre côtés ont même longueur.*

Propriétés des diagonales et des médianes du losange

Outre les propriétés des diagonales et des médianes du parallélogramme dont elles héritent, les diagonales et les médianes du losange ont les propriétés suivantes.

48. *Les diagonales du losange :*

- *sont perpendiculaires ;*
- *sont chacune un axe de symétrie de la figure ;*
- *partagent les angles qu'elles touchent en deux angles de même amplitude ;*
- *partagent le losange en quatre triangles rectangles superposables.*

49. *Les médianes du losange :*

– *ont même longueur ;*
– *partagent le losange en quatre losanges superposables.*

6 Assembler des triangles isocèles rectangles

Activité 1

Combien de quadrilatères distincts peut-on former en rapprochant deux triangles rectangles isocèles superposables ?

Commentaires

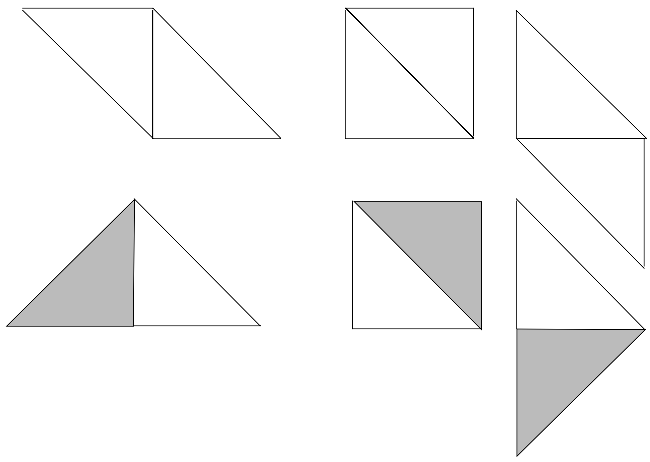


Fig. 52

On trouve deux parallélogrammes superposables, deux carrés superposables, deux triangles isocèles superposables. Finalement, deux quadrilatères distincts.

Activité 2

Coder les éléments du carré qui sont superposables et relever les propriétés du carré qui apparaissent ainsi.

Commentaires et synthèse

La démarche est la même que pour le rectangle et le losange.

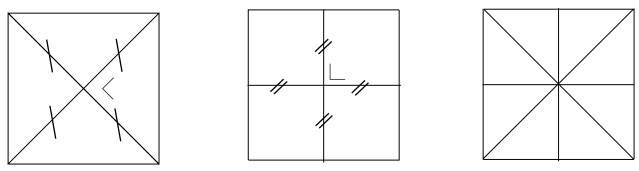
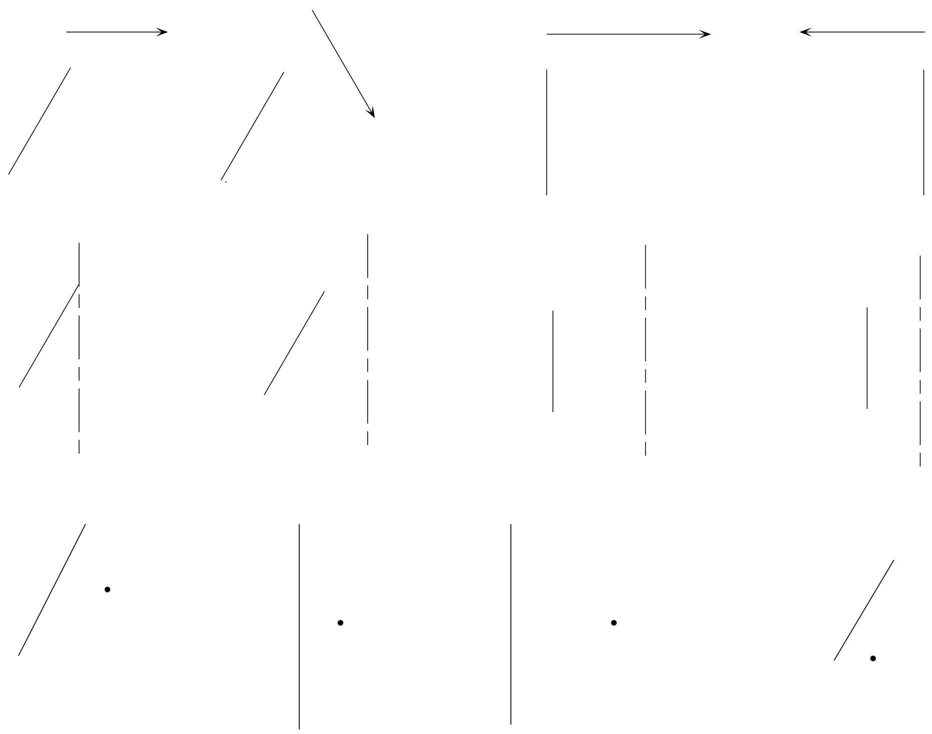


Fig. 53

Le carré apparaît comme un losange dont tous les angles sont droits ou comme un rectangle dont tous les côtés ont même longueur. C'est le moment d'élaborer un tableau récapitulatif des propriétés des côtés, des angles, des diagonales et des médianes des différents quadrilatères et de construire un diagramme des différents ensembles de quadrilatères.

Exercices

1. Construire l'image d'un segment par translation, par symétrie orthogonale, par rotation de 180°.



   Examiner chaque fois qu'il y a lieu le quadrilatère convexe déterminé par quatre points : ceux qui déterminent le segment de départ et ceux qui déterminent le segment à l'arrivée.

2. Fabriquer un pochoir pour construire un papier peint. Pour cela :

   – découper un triangle dans du carton ;

– dessiner puis découper un motif à l'intérieur du triangle ;
– déposer le pochoir sur une feuille, reproduire le motif et aussi le contour du triangle ;
– déplacer le pochoir de manière à ce que les deux triangles forment un quadrilatère et contourner à nouveau le motif et le triangle ;
– poursuivre ainsi de proche en proche, de façon à ce que les triangles couvrent la feuille sans laisser de trous et sans recouvrements.

Les régularités du papier peint dépendent du triangle choisi et aussi des régularités éventuelles du motif.

Quatrième partie

Représenter les objets

Introduction

Nous étudions dans cette partie les principales représentations d'objets géométriques. Il pourra s'agir de représentations planes d'objets plans, comme par exemple le plan d'un terrain de sport ou la carte d'une région de plaine, de représentations spatiales d'objets de l'espace, comme par exemple les maquettes de bâtiments ou les modèles de molécules en stéréochimie, ou encore des représentations planes d'objets de l'espace telles que les diverses formes de vues en perspective. Nous verrons que toutes ces représentations ont pour effet de rendre le monde plus intelligible, et nous essayerons de dégager leur rapport à la géométrie.

1 Pourquoi représenter certains objets ?

1.1 Objets trop grands ou trop petits

Comme nous l'avons vu dans la première partie, certains objets sont trop grands ou trop petits pour que nous puissions les voir convenablement. Nous pouvons alors les appréhender de deux façons : la première en nous appuyant sur des mesures et des raisonnements, et nous retrouvons ici l'idée de Mach que l'intellect permet de dépasser les limitations des sens ; la seconde en en construisant l'une ou l'autre représentation accessible à notre vue distincte, mais une telle construction s'appuie aussi sur des mesures et des raisonnements.

Si l'on accepte l'histoire qui fait remonter l'origine du terme *géométrie* à la mesure des terrains après chaque inondation dans la vallée du Nil, on peut même dire que la géométrie elle-même serait née de cette nécessité de saisir avec précision des objets qui échappent à la vue claire. Un plan cadastral donne de la forme et des dimensions d'un champ une idée bien plus précise que la vue qu'on peut en avoir du bord du chemin ou même en en faisant le tour. Et ce n'est certainement pas un hasard si Clairaut [1741] a choisi la mesure des terrains comme fil conducteur de ses *Éléments de géométrie.*

L'arpentage, la topographie et la géodésie[1] sont trois techniques géométriques développées par l'homme pour saisir des portions de plus en plus vastes de son environnement. Les cartes géographiques à courbes de niveau communiquent la forme d'une région. Le promeneur saisit la région par petits morceaux, la

[1] Science qui étudie la forme et les dimensions de la terre.

carte amène la région entière dans le champ de sa vision distincte.

La terre peut être prise comme emblème de ces choses tellement grandes qu'on a toutes les peines du monde – c'est le cas de le dire – à savoir quelle forme elles ont. Il a fallu des siècles d'efforts, d'observations, de débats y compris philosophiques et théologiques, avant que l'homme n'acquière la conviction que la terre est une boule.

Les objets trop grands pour être vus clairement sont amenés dans le champ d'une perception plus claire soit par des représentations planes, soit par des modèles réduits comme les globes terrestres, mais aussi toutes les maquettes de bâtiments, de meubles ou d'objets techniques. Un modèle peut être manié, tourné et retourné sous le regard, on peut faire le tour d'une maquette, la regarder de côté, du dessus, etc.

À l'opposé, certains objets sont trop petits pour être vus clairement, ou même pour être vus tout court. C'est le cas par exemple des grosses molécules de la stéréochimie ou des mailles des cristaux. On amène ces objets dans la zone de vision commode en les reproduisant à trois ou à deux dimensions. On construit ces modèles en coordonnant diverses mesures géométriques nécessairement très détournées et très techniques, très éloignées de la vue.

1.2 Objets mal ou incomplètement perçus

Nous le savons, la taille des objets – trop grande ou trop petite – n'est pas le seule difficulté que nous rencontrons pour les percevoir. En effet, comme nous l'avons vu dans la première partie, l'être humain perçoit assez clairement les objets plans en situation privilégiée. Par contre il ne perçoit jamais complètement ni fidèlement les objets à trois dimensions, ne serait-ce que parce que ceux-ci ont des faces mal disposées ou cachées. D'où la pratique universelle qui consiste à représenter à deux dimensions les objets qui en ont trois. L'avantage est que le dessin est regardé, lui, en position privilégiée, et est donc vu clairement. Le désavantage est que le passage de l'espace à la représentation plane entraîne de graves pertes d'information. C'est ce qui explique, et nous y reviendrons, l'existence de plusieurs types de représentations planes, chacun préservant et transmettant à l'observateur certaines informations au détriment des autres.

Il est utile de rappeler ici à nouveau le point de vue de Mach : au delà du domaine des perceptions claires, l'intellect prend le relais. Mais l'intellect ne s'appuie pas seulement sur des idées. Il provoque, par le biais de représentations, l'apparition dans le champ des perceptions claires d'éléments de connaissance qui ne s'y trouvent pas d'emblée, ce qui a pour effet de rendre possible ou de faciliter ses interventions. Bien entendu, ces transpositions de l'espace au plan sont toujours suivies de retours à l'espace, car sinon à quoi serviraient-elles ? Elles n'ont de sens que dans un va-et-vient entre l'espace et le plan.

1.3 Garder le souvenir des choses

Au contraire des autres représentations planes, la perspective à point de fuite et la photographie n'ont pas pour fonction d'amener dans le champ de la perception claire des objets qui ne s'y trouvent pas. Au contraire, elles ont pour fonction première, quoique bien entendu pas unique, d'imiter, de fixer le plus fidèlement possible la perception visuelle et ainsi d'en permettre la conservation.

L'écoulement du temps intervient ici comme obstacle à la connaissance. Certains objets disparaissent du champ de la perception, soit parce qu'ils changent, soit parce qu'on s'en éloigne. Les représentations, que l'on veut le plus fidèles possible, permettent dans une certaine mesure le retour à volonté à la perception. Et donc à la pensée que la perception sous-tend.

1.4 La normalisation, instrument de connaissance

Rassemblons nos idées. Qu'il s'agisse d'objets trop grands ou trop petits, d'objets vus de façon déformée ou partielle, ou d'objets fugitifs, les représentations servent à en amener ou à en conserver des éléments significatifs dans le champ de la perception claire. Selon le terme proposé par H. Freudenthal, il s'agit dans chaque cas d'une forme de *normalisation*. Nous le savons, la norme de perception commode pour l'être humain, ce sont les objets si possible plans, situés à portée de toucher, dans le cône de vision nette, orientés frontalement, avec leurs éléments de symétrie accordés à ceux des organes de perception. Les représentations amènent des images plus ou moins fidèles des objets dans cette zone normale.

En parlant de normalisation à propos des représentations, nous étendons en fait le sens donné à ce mot par Freudenthal. Celui-ci en effet l'utilise pour désigner des transformations de mesures ou de rapports qui amènent ceux-ci dans le champ de l'intuition immédiate. Par exemple, lorsqu'il y a dans une ville 34 718 chômeurs sur 273 480 personnes en âge de travailler, on dit qu'il y a 12,7 % de chômeurs. Ou encore lorsqu'en Belgique on transforme en francs belges le prix d'un objet payé dans une devise étrangère, on amène le prix sur une échelle familière à l'usager.

Dans cette acception élargie, le terme de *normalisation* désigne donc les manœuvres qui consistent à approprier des données de toutes sortes, et dans notre cas géométriques, à l'appréhension par l'homme. On peut voir dans la normalisation une extension consciente de ces manœuvres qu'exécutent automatiquement nos organes des sens pour amener les perceptions dans une zone distincte. Par exemple tourner le regard vers l'objet, ajuster la courbure du cristallin pour régler la profondeur de champ et le diamètre de la pupille pour régler l'éclairement. Toutes ces manœuvres inconscientes se prolongent donc par des manœuvres intelligentes.

Par ailleurs, les types de représentation sont multiples et chacun répond à des difficultés particulières de saisir l'environnement ou d'exprimer un projet de construction. Nous tentons plus loin dans ce chapitre de décrire la portée des principaux d'entre eux. Tous ensemble, ils constituent une panoplie d'instruments donnant accès à la réalité des formes et des grandeurs spatiales.

Étant donné la fonction irremplaçable des représentations comme outils de connaissance, ce n'est pas un hasard si elles se multiplient et si on les améliore sans cesse dans la civilisation d'aujourd'hui.

1.5 Des instruments de communication

On peut aussi voir les représentations autrement dans cette civilisation. Car du fait qu'elles sont des instruments de connaissance et que de plus elles s'inscrivent sur des supports aisément transportables tels que le papier ou les ondes électromagnétiques, elles sont aussi un moyen de communication, sorte de langue géométrique comportant divers dialectes. On les trouve dans les médias, dans la pratique et l'enseignement des sciences, dans le dessin technique. On les trouve aussi dans la peinture et dans son histoire, sous la forme de la perspective à point de fuite en Occident et de la perspective cavalière dans les estampes chinoises et japonaises. Les représentations ont avec l'art un lien essentiel, quoique de nature controversée.

2 Comment représenter les objets ?

2.1 Une panoplie de représentations

Un bref inventaire des types de représentation comporte les maquettes et les modèles, les trois types de projection (les projections orthogonales avec la variante des projections cotées, les projections parallèles et les projections centrales), puis les développements des surfaces développables et enfin les projections cartographiques.

Comment s'enchaînent ces différents sujets ? D'abord les maquettes et modèles reproduisent les originaux par similitude, ils conservent les trois dimensions et ne présentent pas d'ambiguïtés. Il existe une correspondance en principe parfaite, point par point, entre l'original et le modèle.

Les trois projections orthogonale, parallèle et centrale présentent elles des ambiguïtés, du fait même du passage de trois à deux dimensions. Voyons cela d'un peu plus près. Ces trois projections conservent les propriétés d'incidence : si un point est sur une droite dans la réalité, son image est sur l'image de la droite dans la représentation, et si deux droites se coupent dans la réalité, leurs images se coupent aussi. Les ambiguïtés des représentations tiennent au fait que les réciproques de ces propositions sont fausses. Autrement dit, si un point est sur une droite dans la représentation, il n'y est pas forcément dans la réalité, et si deux droites se coupent dans la représentation, elles ne se coupent pas nécessairement dans la réalité[2]. Qui plus est, certaines droites se projettent sur des points, et certains plans sur des droites.

Chacun des trois types de projection classiques a ses avantages et ses inconvénients, montre ou conserve plus ou moins bien certaines propriétés au détriment des autres. Nous en ferons le bilan.

Les développements n'ont pas pour fonction de ressembler aux objets originaux, mais bien d'en permettre la reconstitution par pliage ou enroulement. Ils ne s'appliquent qu'aux surfaces qui, telles les polyèdres, cônes et cylindres, s'appellent développables parce qu'elles sont applicables sur un plan, fût-ce après certaines incisions.

Certaines surfaces ne sont pas développables. La sphère en est le premier et le plus important exemple. On ne peut pas « dérouler », aplatir, une sphère sur un plan. Par contre on peut projeter une sphère, ou plus généralement un morceau de sphère sur un plan : il s'agit là des projections cartographiques. Il en existe de plusieurs sortes et chacune transfère de la sphère à sa représentation certaines propriétés, par exemple les mesures d'angles ou les rapports d'aires, au détriment d'autres propriétés.

2.2 Des représentations fidèles : la linéarité

Délaissant pour un moment les développements et les projections cartographiques, concentrons-nous sur les maquettes et projections classiques. Qui dit *représentation* implique recherche de la *fidélité* dans les représentations. Or il est remarquable que les modèles réduits ou agrandis sont le plus souvent des modèles semblables aux originaux. *Semblable* est pris ici au sens mathématique et la similitude est une transformation linéaire. De même les projections orthogonales ou simplement parallèles sont des fonctions linéaires. Autre exemple, les coupes de terrain utilisent souvent deux réductions proportionnelles, une pour les longueurs et une autre pour les altitudes. Au total, les représentations sont le plus souvent[3] obtenues par des transformations linéaires. Or celles-ci conservent les rapports de longueurs, et en

[2] Ces propriétés peuvent être resituées comme suit dans un cadre plus général : toute projection de l'espace sur un plan est une fonction et donc chaque point de l'espace possède une seule image. Mais cette fonction n'est pas injective : tout point image possède plusieurs originaux. Il possède même une droite entière de points originaux.

[3] La perspective centrale fait exception.

ce sens elles donnent des représentations fidèles. Les sens et l'esprit de l'homme perçoivent particulièrement bien les rapports. Quand les rapports sont conservés, on s'y retrouve bien[4].

Ce n'est d'ailleurs pas un hasard si dans les deux exemples de normalisation numérique évoqués ci-dessus – la réduction d'un rapport à un pourcentage et la transformation d'une monnaie en une autre – la transposition utilisée est linéaire et respecte donc les rapports. Qu'on imagine le désarroi d'un voyageur qui devrait appliquer une conversion non linéaire de monnaies !

Ainsi la linéarité est l'instrument le plus fréquent de la fidélité des représentations, ce qui montre un lien fort entre cette partie de notre étude et la suivante, consacrée à la linéarité.

2.3 Les représentations et la constitution de la géométrie

Les objets de l'espace soumis à représentation ont des propriétés géométriques dont beaucoup doivent être prises en compte dans les opérations de représentation. Ces opérations elles-mêmes, qu'elles soient des développements ou plus souvent des projections, ont des propriétés géométriques qu'il faut connaître pour les exécuter. Ainsi, pour réaliser, et ensuite pour interpréter, les représentations planes des objets de l'espace, faut-il disposer d'un capital de connaissances géométriques. Mais c'est là un paradoxe. Car comme nous l'avons dit, les représentations permettent à l'homme d'avancer dans la connaissance des choses de l'espace, c'est-à-dire d'apprendre la géométrie. Or voilà qu'il faut de sérieuses connaissances de géométrie pour accéder à ces moyens . . . d'apprendre la géométrie ! Cette difficulté est d'ordre pratique plutôt que logique. Elle conduit dans l'apprentissage, plutôt qu'à un discours d'emblée linéaire et univoque, à saisir par approximations successives les objets et leurs représentations, en un va-et-vient constant entre l'espace et le plan.

2.4 Des perceptions à la géométrie

Attardons-nous sur ce renversement de point de vue : les représentations, et en particulier les projections, *sont de la géométrie.* À ce titre, et par delà leurs réalisations matérielles, elles ont vocation de devenir des objets idéalisés, des matières à raisonner. Or cette mutation se heurte à une difficulté spécifique. En effet, et pour le dire en peu de mots, *les projections ressemblent à des perceptions visuelles,* et il n'est pas facile de les détacher mentalement de ce lien fort avec l'univers physique et physiologique. Regardons cela d'un peu plus près.

Les représentations planes sont des images plus ou moins fidèles du monde réel. La vue nous donne aussi des images de ce

[4] On se souviendra de notre observation de la section 1 du chapitre 3, selon laquelle les choses sont, en un certain sens, perçues à similitude près.

monde. Elle passe par la projection du paysage sur le support à deux dimensions, sphérique, que constitue la rétine. Les images visuelles se distinguent à beaucoup d'égards des représentations planes. D'abord, on vient de le voir, parce que la rétine n'est pas plane, ensuite parce que nous avons deux yeux et un mécanisme compliqué de coordination des deux sensations oculaires, mais également parce que les images rétiniennes sont soumises dans le cerveau à une réinterprétation conduisant de la sensation brute à la perception[5]. Cette réinterprétation fait intervenir de tout autres facteurs que les seules impressions rétiniennes, par exemple des données de la mémoire.

Mais en dépit de ces différences, les représentations planes ressemblent à des perceptions visuelles, et même elles ont pour principe à des degrés divers de les imiter. Ce n'est pas sans raison que l'on parle de *vue* en plan, de *vue* de profil, etc. Mais elles les imitent en les idéalisant, chacune à sa façon.

Souvent il n'est pas facile de passer d'une perception visuelle à une représentation plane qui lui correspond peu ou prou. Un exemple typique est celui d'un enfant qui, observant du dessus un carton carré dont une diagonale était verticale, le dessinait sous forme de deux segments faisant entre eux un angle obtus. Il paraît inopportun, dans un cas comme celui-là, d'expliquer à l'enfant qu'il ne voit pas bien, car il voit comme il voit. Par contre, on peut utiliser un fil à plomb pour objectiver la projection orthogonale du carton sur la table.

2.5 Des modèles réels pour les projections

Notons enfin que les représentations par projection possèdent des modèles dans la réalité. L'ombre au soleil est une projection parallèle, l'ombre à la lampe et la photographie sont des projections centrales. Mais ces modèles sont bien plus que des modèles : ce sont des phénomènes intéressants par eux-mêmes. Il serait impossible de les étudier sans étudier en même temps la projection correspondante. On prendra garde toutefois, et nous y reviendrons dans chaque cas ci-après, que ces phénomènes physiques ne sont qu'approximativement des projections : le soleil n'est ni ponctuel, ni situé à l'infini, il n'existe pas d'ampoules ponctuelles, ni d'appareil photographique sans aberrations.

3 Des questions pour apprendre

Comme les autres parties de notre étude, celle-ci n'est pas applicable immédiatement dans une classe. Nous avons seulement voulu brosser un tableau des représentations les plus communes et faire voir ce qui caractérise chacune, quel intérêt elle présente d'une part en elle-même, mais aussi pour ce qu'elle apporte à

[5] À ce sujet, voir par exemple P. Guillaume [1979].

la maîtrise de l'espace et à la connaissance de la géométrie. En poursuivant ces objectifs, nous avons peu évoqué les contextes problématiques qui permettent d'animer une classe, et qui sont, s'agissant des représentations, particulièrement nombreux.

C'est pour combler un peu cette lacune que nous donnons ici, à la fin de cette introduction, quelques suggestions d'activités susceptibles de jalonner cet apprentissage d'un bout à l'autre.

Les dessins des tout petits enfants sont des points de passage obligés et intéressants. En particulier ce que l'on appelle « le réalisme intellectuel » est un mode de représentation efficace des objets de l'espace. On appelle ainsi la manière de dessiner une maison avec ses pignons rabattus dans le plan de sa façade, ou une chaise avec dans un même plan ses pieds, la partie horizontale de la chaise et son dossier : on montre ainsi ce que l'on sait beaucoup plus que ce que l'on voit.

Des enfants de fin d'école maternelle arrivent à dessiner des cubes et des assemblages de cubes sur du papier pointé en triangle (papier muni d'un réseau régulier de points alignés suivant trois directions à soixante degrés les unes des autres). De tels dessins en perspective peuvent être exploités beaucoup plus tard dans l'enseignement, avec des questions plus difficiles : par exemple on dessine un ensemble de bâtiments dont chacun est un assemblage de cubes, et on demande si d'un point situé sur un bâtiment, on peut voir une deuxième point, situé sur un autre bâtiment. De telles questions peuvent conduire à la représentation de la situation par un plan coté. Sur ce même support de papier pointé, on peut aussi se poser des questions d'ombres propres et d'ombres portées. Voir ERMEL [1982] et A. Desmarets *et al.* [1997].

La construction d'objets dans l'espace avec du papier ou du carton, même si elle ne vise aucune forme géométrique précise, aboutit nécessairement, à cause des pliages et des enroulements, à diverses formes régulières telles que des faces planes, des angles dièdres, des cylindres et des cônes (voir C. Barnéda-Kaczka [1991] ; le même auteur [1993] propose d'intéressantes constructions dans l'espace avec des fils de fer ou d'autres matériaux filiformes.). Dans CREM [1995], on trouvera la mention de la construction par un groupe d'enfants de 5 à 8 ans d'une maquette d'un quartier de ville.

Les projections orthogonales peuvent être données à interpréter ou à élaborer (voir par exemple la lecture de plan proposée dans F. Van Dieren et al. [1993]. On peut en conjuguer l'étude avec celle de la perspective cavalière, en organisant des passages d'un type de représentation à l'autre, dans les deux sens. Elle est un instrument indispensable des cours de mécanique et construction (voir par exemple R. Adrait et D. Sommier [1991]). Les projections orthogonales sont aussi un moyen naturel d'engendrer l'ellipse comme projection d'un cercle, ou la sinusoïde comme projection d'une hélice circulaire (une projection orthogonale de la rampe d'un escalier en colimaçon est une sinusoïde).

La perspective cavalière, qui peut être étudiée comme un ensemble de règles de représentation ou comme une projection parallèle, se prête à des déterminations de sections de polyèdres ou de distances, et en particulier de plus courte distance entre deux droites. Vue comme projection parallèle, elle peut être abordée par des questions d'ombres portées par le soleil. Voir G. Audibert [1990], B. Parszyz [1989], M. Krysinska [1992] ainsi que D. Moinil et C. Goossens [1983]. Voir aussi le logiciel CDSMath-7 [1994].

La perspective à point de fuite de même que les ombres portées par une lampe ponctuelle offrent de nombreux sujets de situations problématiques. Voir Th. Gilbert [1987].

13

Les projections orthogonales

1 Que sont les projections orthogonales ?

La figure 1 montre une table, et la figure 2 en donne trois projections orthogonales.

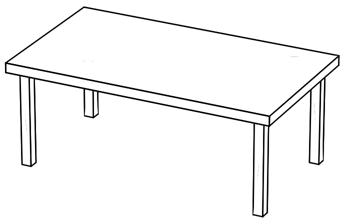


Fig. 1

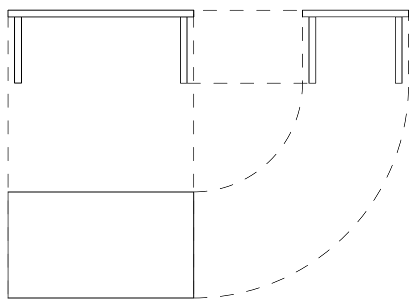


Fig. 2

Sur cette dernière, on voit respectivement une *vue du dessus* ou *en plan* (projection sur un plan horizontal), une *vue de face* ou *en élévation* (projection sur un plan frontal) et une *vue de côté* ou *de profil* (projection sur un plan vertical de bout). Bien qu'on utilise le terme *vue*, il ne s'agit pourtant pas de dessins de la table telle qu'on peut la voir, il s'agit de projections orthogonales sur chacun des trois plans en question. La table serait perçue autrement par le regard. Par exemple, si on l'aborde de face, on aperçoit – en tout ou en partie – chacun des quatre pieds, alors que dans la projection orthogonale les pieds de devant cachent ceux de derrière.

Une projection orthogonale d'un objet en donne souvent une vue pauvre, et même fréquemment méconnaissable. Comment par exemple reconnaître une table dans la vue en plan de la figure 2 ? Parfois même les trois vues d'un objet ne permettent pas de le reconnaître sans un grand effort d'imagination. À cet égard, une vue en perspective comme celle de la figure 1 est beaucoup plus parlante.

Par ailleurs, l'avantage d'une projection orthogonale est qu'elle reproduit en vraie grandeur tout ce qui se trouve dans des plans parallèles au plan de projection. Comme on réalise en général trois projections, cela fait beaucoup de parties vues en vraie grandeur. Cette remarque s'applique particulièrement aux objets qui, tels une chaise, une maison ou un cylindre, possèdent des arêtes, des faces, des axes ou plans de symétrie, orthogonaux entre eux, à condition toutefois que ces objets soient adéquatement orientés par rapport aux plans de projection.

Telles que nous venons de les présenter, les projections orthogonales se définissent par rapport aux directions physiques principales (la verticale et l'horizontale) et aux directions principales du corps humain (plan frontal, vue de côté, etc.) Ce n'est pas un hasard : nous retrouvons ici les *situations privilégiées* (voir première partie), l'idée que l'on voit ou imagine mieux certains objets lorsqu'ils sont bien placés par rapport aux organes de perception de l'être humain. Bien entendu, dans un cadre purement mathématique, projeter une figure orthogonalement sur un plan ne requiert aucune situation particulière ni de la figure ni du plan.

Les projections orthogonales d'un objet sur trois plans orthogonaux renvoient en géométrie analytique aux projections des points de l'espace sur trois axes et trois plans de coordonnées. Lorsqu'on s'est donné trois axes de coordonnées, on définit dans l'espace des surfaces et des courbes par des équations. La géométrie analytique étend l'efficacité des projections orthogonales à des objets de formes variées, qui n'ont plus besoin d'être triorthogonaux, comme une chaise ou une maison.

Il est toutefois intéressant de remarquer que lorsqu'on fait de la géométrie dans des axes orthogonaux, on représente et imagine presque toujours ceux-ci dans des positions privilégiées : deux d'entre eux horizontaux et le troisième vertical. Il serait beaucoup plus difficile de « voir ce qu'on fait » dans un système d'axes jeté n'importe comment dans l'espace. Cette observation montre à quel point la pensée mathématique s'appuie sur des images mentales liées à la constitution sensorielle et aux conditions d'existence de l'être humain.

Les projections cotées sont un type de projection orthogonale particulier, dont les cartes à courbes de niveau donnent un exemple. Au contraire des autres projections orthogonales, elles ne vont en général pas par trois. On produit une seule projection sur un plan donné, et on ajoute au dessin les cotes de certains points ou courbes privilégiés : les *cotes* sont des mesures de la distance de l'élément considéré au plan de projection. Ainsi, une projection cotée combine un dessin avec un codage numérique. Les ambiguïtés du dessin lui-même demeurent, mais elles sont en partie levées par les cotes. Avec un peu d'habitude, on arrive à se représenter assez fidèlement un paysage donné par ses courbes de niveau. Les courbes de niveau servent aussi en mathématiques, où on les utilise couramment pour représenter les surfaces définies par une fonction de deux variables. Le logiciel *Mathematica* suffit pour s'en convaincre.

2 Les projections orthogonales dans la civilisation

Les bâtisseurs et architectes utilisent les projections orthogonales depuis des temps immémoriaux. Or les monuments qu'ils représentent comportent souvent des plans et des axes de symétrie repérables sur les projections. Les figures 3(a) et 3(b) en témoignent. La première représente en coupe et en plan l'église Sainte Sophie à Constantinople (achevée en 537) et la seconde en plan l'église San Vitale (achevée en 547) à Ravenne.

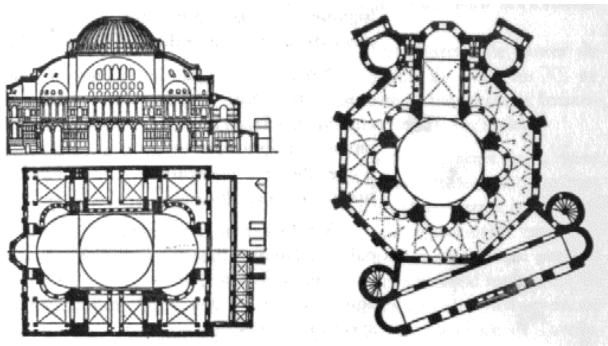


Fig. 3 (a,b)

Dans la civilisation technique qui est la nôtre, le système des trois projections orthogonales sert à représenter les objets à fabriquer, meubles, pièces de machines, etc. On ne peut imaginer comment l'industrie pourrait se passer du dessin technique comme moyen de communication.

La pratique de ce dessin a récemment subi une mutation. En effet, depuis quelques années, le dessin assisté par ordinateur a remplacé dans la plupart des cas le dessin aux instruments. Le dessinateur ne s'appuie donc plus sur son habileté à manier les instruments classiques. Ou bien il coordonne la vue à l'écran avec les mouvements de sa main pilotant la souris, ou bien il émet des commandes codées, via le clavier ou les menus.

Dans l'histoire des mathématiques, on a recouru habituellement aux projections orthogonales à partir du moment où la géométrie analytique est véritablement entrée dans la pratique, c'est-à-dire vers la fin du dix-septième siècle. Par ailleurs, dans le cadre de la géométrie synthétique, un système de deux projections orthogonales coordonnées a été conçu par G. Monge vers la fin du dix-huitième siècle. Il s'appelait la *géométrie descriptive*. Monge y voyait un instrument de la géométrie raisonnée. La géométrie descriptive est encore parfois enseignée aujourd'hui, surtout aux techniciens, mais seulement comme un moyen de représentation.

3 Les projections orthogonales dans la réalité

L'ombre au soleil étant le résultat d'une projection parallèle, on peut provoquer une projection orthogonale en tenant l'objet à représenter entre le soleil et un plan disposé perpendiculairement aux rayons.

De manière analogue, on peut obtenir une approximation raisonnable d'une projection orthogonale en tenant l'objet *tout près* d'un écran de projection éclairé par un projecteur de diapositives ou un rétroprojecteur. Il faut bien entendu pour cela que l'objet ne soit pas trop grand, de sorte que les rayons qui le touchent soient quasi parallèles. Par ailleurs, pour expliquer en quoi une projection orthogonale diffère d'une perception visuelle, on peut montrer que chaque point de la « vue » horizontale est obtenu en projetant le point correspondant de l'objet selon la ligne donnée par un fil à plomb. C'est une manière d'objectiver la projection, de la détacher de la personne.

4 Les projections orthogonales dans l'enseignement

Étant donné la variété de leurs usages comme moyens de représentation et de communication, les projections orthogonales doivent être enseignées pour elles-mêmes.

D'une part leur principe est assez facile à saisir, car il renvoie aux situations privilégiées par rapport à l'observateur humain : plans de projection horizontal, vertical ou de profil, directions de projection verticale ou de bout. D'autre part on les applique le plus souvent à des objets qui s'y prêtent, du fait qu'ils possèdent trois directions orthogonales privilégiées, ce qui facilite aussi les choses.

Par ailleurs, les trois projections orthogonales d'un objet sont souvent difficiles à lire : pour passer de ces trois projections à une image mentale – ou à un croquis en perspective cavalière – qui en donne une vue intégrée, il faut un effort de coordination souvent considérable. Mais cet effort est aussi extrêmement fructueux, au sens où il oblige à imaginer l'objet d'un point de vue où on ne se trouve pas. Cet effort de décentration de l'observateur est caractéristique de la capacité tellement utile qu'on appelle *voir dans l'espace.* Il est significatif à cet égard que le test *des trois montagnes* de Piaget [1947] ait tellement attiré l'attention et qu'il ait inspiré, dans des manuels de grande qualité, des activités géométriques pour l'école fondamentale. Le test des trois montagnes consiste à placer un enfant d'un côté d'une table carrée sur laquelle se trouvent les maquettes de trois montagnes de hauteurs et de couleurs différentes, marquées chacune par des signes particuliers tels qu'une route, un torrent, etc. L'enfant doit soit choisir parmi des vues préparées à l'avance celle qui correspond à l'un ou l'autre point de vue différent du sien, soit dessiner ce que verrait une personne ayant un autre point de vue qu'on lui désigne. Une des activités proposées dans le manuel de E.C. Wittmann [1997] est analogue, mais elle porte sur des buildings parallélipipédiques.

Regardons maintenant du côté de l'enseignement de matières mathématiques précises. Tout d'abord, en étudiant les projections orthogonales, on étudie en même temps la plupart des propriétés d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité qui forment la base de la géométrie de l'espace. Ces propriétés une fois acquises seront rencontrées à nouveau si l'on étudie les autres formes de projection.

Ensuite, une façon intéressante d'étudier les symétries des polyèdres est d'exhiber certaines d'entre elles en projetant le polyèdre orthogonalement selon une direction qui s'accorde avec la symétrie en question.

Rapporter l'espace à trois axes de coordonnées orthogonaux est un passage obligé de la géométrie analytique et de la mécanique, pour étudier les objets et mouvements à trois dimensions. Par ailleurs, l'espace rapporté à de tels axes constitue un contexte significatif pour étudier certains objets plans. Il est intéressant par exemple de construire effectivement des ellipses comme projections orthogonales de sections planes de cylindres circulaires, de construire les trois sections coniques comme projections orthogonales de sections planes d'un cône, ou encore de construire une sinusoïde par projection orthogonale d'une hélice circulaire.

La géographie et la géométrie des surfaces, nous l'avons dit, conduisent aux courbes de niveau. Il est essentiel et assez facile d'arriver à reconnaître la configuration des courbes de niveau autour d'un sommet, d'un fond, d'un col, ou aux environs d'une crête ou d'une vallée. Cette façon d'aborder les fonctions de deux variables est une source d'intuitions utiles.

Deux observations pour terminer. Le fait que le dessin technique se fasse dorénavant à l'ordinateur ne doit pas amener à oublier que l'apprentissage des instruments classiques demeure essentiel, car il provoque une indispensable maturation, au niveau sensori-moteur, de propriétés géométriques fondamentales. Par comparaison, le registre sensori-moteur est totalement différent dans le maniement de la souris, et dans celui du clavier, il est déconnecté de la géométrie.

Enfin, nous venons de voir que les projections orthogonales sont intéressantes pour tous les élèves. De les pratiquer dans toutes les orientations scolaires provoquerait un rapprochement entre les élèves de l'enseignement général et ceux du technique et du professionnel. Pour beaucoup de ceux-ci, ces projections sont un passage obligé.

14

Les perspectives parallèles

1 Diverses sortes de perspectives parallèles

Considérons d'abord ce que l'on appelle la *perspective cavalière*. Observons la représentation d'un cube des figures 1 et 2. Sur cette dernière, les arêtes cachées sont dessinées en trait interrompu. Les lignes du quadrillage aident à réaliser une telle représentation. Elles permettent aussi d'en dégager les caractéristiques principales. Les faces avant et arrière, qui sont carrées dans la réalité, le restent sur la représentation. Les arêtes parallèles restent parallèles sur la représentation. Par contre, alors que les arêtes sont toutes égales dans la réalité, elles ne le sont pas nécessairement sur la représentation. Toutefois certaines restent égales entre elles, à savoir celles qui sont parallèles dans la réalité.

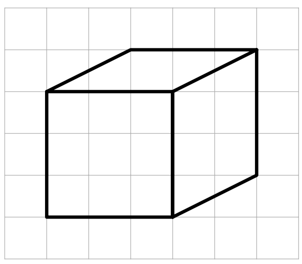


Fig. 1

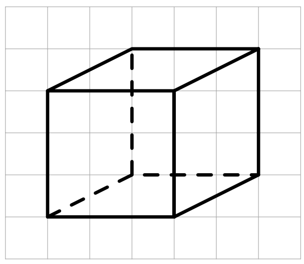


Fig. 2

Les représentations possédant les propriétés ci-dessus sont celles que les artistes et techniciens appellent *perspectives cavalières*. Il en existe divers types. L'un des plus communs présente les arêtes *fuyantes* à 45 degrés avec l'horizontale, et leur donne une longueur moitié moindre que celle des arêtes frontales (figure 3 à la page suivante). Un autre montre les arêtes fuyantes à 30 degrés avec l'horizontale (figure 4). Celle de la figure 3 a pour désavantage important qu'un des côtés, une des diagonales du cube et la diagonale de la face avant tombent sur une même droite, ce qui est source de confusion.

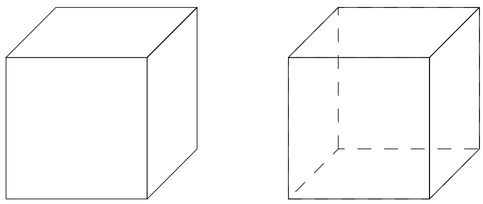


Fig. 3

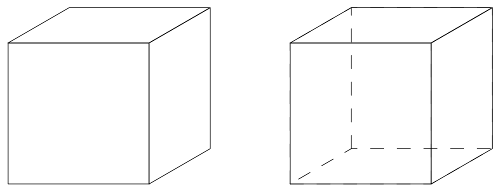


Fig. 4

La représentation de la figure 5, sur du papier pointé, est aussi une représentation en perspective d'un cube. Les architectes et techniciens l'appellent perspective *isométrique*, du fait que toutes les arêtes du cube y sont représentées avec la même longueur[1]. Parfois aussi on l'appelle perspective *axonométrique.* Ici, aucune des faces n'apparaît sous la forme d'un carré. Toutefois, nous retrouvons certaines des propriétés relevées ci-dessus.

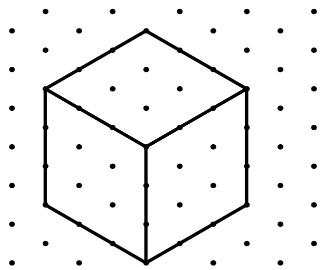


Fig. 5

De manière générale, les représentations que nous venons d'examiner ont, toutes, les propriétés suivantes :

– les segments parallèles entre eux sont représentés par des segments parallèles (ou alignés) ;

– les segments parallèles (ou alignés) égaux sont représentés par des segments parallèles (ou alignés) égaux.

Cette deuxième propriété peut aussi s'énoncer :

– le rapport entre des segments parallèles (ou alignés) est identique au rapport entre les segments représentés.

En fait, un point commun essentiel de toutes ces représentations est que chacune peut être obtenue par une projection parallèle appropriée du cube sur un plan. Nous ne montrerons pas cela en détail ici. Mais c'est la raison pour laquelle les ouvrages théoriques regroupent toutes ces perspectives sous le nom de *perspectives parallèles*[2].

[1] Cette dénomination de perspective *isométrique* s'avère trompeuse, car ce respect de l'égalité des longueurs ne concerne que les segments parallèles à l'une des arêtes. Par exemple, une des diagonales du cube est représentée par un point.

[2] Pour une vue d'ensemble sur les perspectives parallèles les plus communément utilisées, voir G. Audibert [1990] et R. Adrait et D. Sommier [1991].

Par ailleurs, les rayons du soleil étant à peu de chose près parallèles, ces représentations peuvent aussi être obtenues comme ombres portées par le soleil sur un plan (par exemple un plaque de polystyrène (frigolite)). Pour y voir clair, il est utile de prendre un cube construit uniquement avec des tiges. Nous avons représenté une telle situation à la figure 6.

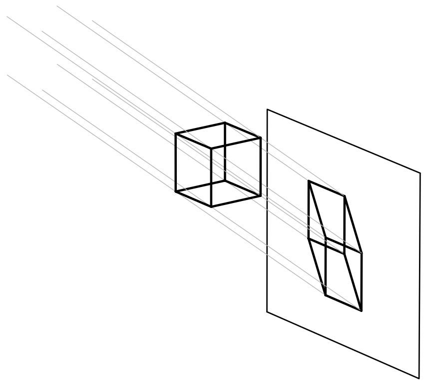


Fig. 6

Bien entendu, il arrive que l'ombre d'un cube au soleil soit extrêmement allongée : que l'on songe à un cube posé sur un sol horizontal et exposé au soleil couchant ! Les perspectives parallèles utilisées pratiquement sont celles qui donnent du cube ou d'autres objets une vue raisonnable, c'est-à-dire ni trop allongée, ni trop courte. Un cas particulier des projections parallèles est la projection orthogonale lorsque les rayons de projection sont perpendiculaires au plan de projection (voir le chapitre 13).

Les segments qui sont représentés en vraie grandeur dans une perspective parallèle sont ceux qui sont parallèles au plan de projection. Il n'est pas toujours facile de voir s'il y a des segments représentés en vraie grandeur. Par exemple, la figure 5 à la page précédente représente un cube dont on pourrait croire que les arêtes ressenties comme verticales sont représentées en vraie grandeur. Or il n'en est rien, comme nous allons le montrer. Cette figure est obtenue de la manière suivante. On dispose le cube devant le plan de projection de manière qu'une de ses diagonales soit perpendiculaire à ce plan. Ensuite on projette le cube parallèlement à la diagonale en question. Il s'agit donc d'une projection orthogonale. Aucune des arêtes du cube n'est parallèle au plan de projection. Aucune n'apparaît donc en vraie grandeur sur la représentation.

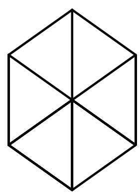


Fig. 7

Examinons par comparaison une autre représentation du cube, analogue mais non identique à la précédente (voir figure 7). Voici comment nous la construisons. Nous tenons le cube devant un plan vertical, avec deux de ses faces horizontales et avec un de ses plans diagonaux perpendiculaire au plan vertical. Projetons alors le cube sur le plan vertical parallèlement à une de ses diagonales, comme le montrent la figure 8(a) (qui est une vue de profil) et la figure 8(b) qui est une vue du dessus.

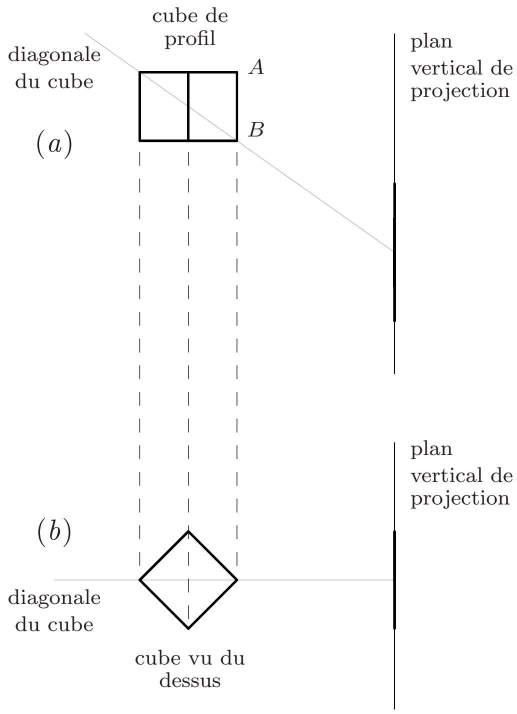


Fig. 8

On réalise qu'une arête verticale telle que $[AB]$ est projetée en vraie grandeur. Il en va de même des trois autres arêtes qui lui sont parallèles.

Les projections parallèles peuvent être regardées comme un cas limite des projections centrales (projections à partir d'un point, voir le chapitre 15), lorsque le centre s'éloigne vers l'infini (mais que le plan de projection reste lui à distance finie). La figure 9 montre comment une projection centrale se rapproche petit à petit d'une projection parallèle lorsque le centre de projection s'éloigne de plus en plus de l'objet (le centre de

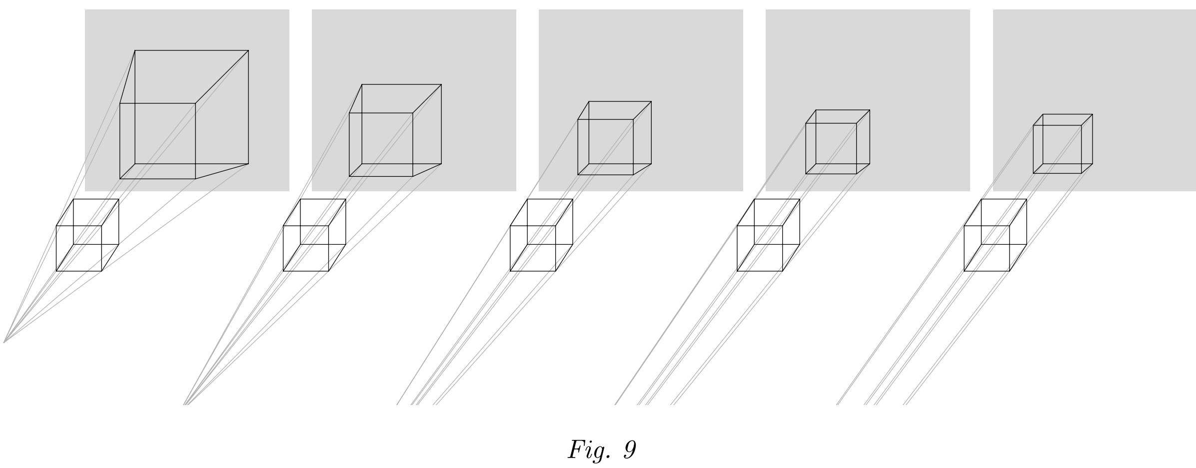


Fig. 9

la projection la plus à droite se trouve 16 fois plus loin du cube que celle de la projection la plus à gauche).

Remarquons pour finir qu'un cube en perspective parallèle comme celui de la figure 10 peut être perçu comme si sa face du dessus était visible et sa face du dessous invisible, ou l'inverse.

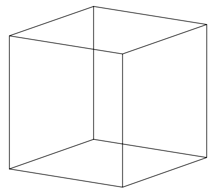


Fig. 10

Bien d'autres figures conduisent de même à deux (voire plus de deux) perceptions, avec mutation brusque et souvent involontaire de l'une à l'autre. On réduit l'ambiguïté des représentations en dessinant les arêtes cachées en trait interrompu comme nous l'avons d'ailleurs fait à la figure 2 à la page 221.

2 La perspective cavalière dans la civilisation

Des perspectives parallèles ont été pratiquées depuis l'antiquité. Elles sont traditionnellement utilisées par les Chinois et les Japonais pour représenter des meubles ou des bâtiments. Mais souvcent, ces objets font partie d'un environnement – un paysage par exemple – représenté selon d'autres conventions. En Occident la codification de ce mode de représentation est postérieure à celle de la perspective centrale. Elle aurait été utilisée particulièrement par les militaires pour dessiner des projets de fortifications ou de terrassements, d'où le nom qu'elle a également porté : perspective militaire.

L'intérêt de cette représentation, tant d'un point de vue stratégique qu'en architecture, est la conservation des parallèles et des rapports entre segments parallèles, quel que soit l'éloignement des objets représentés. Ce n'est toutefois qu'au début du XX^{e} siècle que la perspective parallèle prend sa place dans la peinture et l'architecture en Occident, notamment sous l'influence du peintre Lissitzky, de l'architecte Choisy, de l'école du Bauhaus en Allemagne ou du groupe de Stijl en Hollande (voir à ce sujet P. Comar[1996]).

Aujourd'hui, la perspective cavalière est un mode de représentation courant dans les ouvrages techniques ou scientifiques, notamment mathématiques.

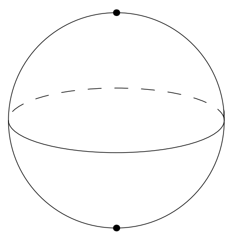


Fig. 11

Notons que certaines représentations usuelles de solides ne sont pas des projections parallèles, bien qu'elles y ressemblent. Tel est le cas de la sphère représentée à la figure 11 avec ses deux pôles et son équateur. En effet, pour qu'on voie son équateur sous forme d'une ellipse, il faut que la direction de projection ne soit pas parallèle au plan équatorial. Mais si tel est le cas, un des pôles est vu et tombe à l'intérieur du cercle, et l'autre pôle n'est pas vu. Bien que n'étant donc pas une projection parallèle, une telle représentation de la sphère est plus commode que celle qui résulterait d'une telle projection. Dessiner un pôle à l'intérieur du cercle rend difficile d'imaginer où il est dans la réalité.

Par ailleurs, comme l'a montré B. Parszyz [1989], certains traités de géométrie de l'espace contiennent des figures dont on penserait qu'elles sont des perspectives cavalières, et qui pourtant, si on les considère comme telles, sont fautives.

3 La perspective cavalière dans la réalité

Nous l'avons vu, un modèle naturel des projections parallèles est donné par les ombres au soleil. Elles soulèvent toutefois deux questions intéressantes, du fait qu'elles ne sont des projections parallèles qu'approximativement.

D'abord le soleil n'est pas situé à l'infini. Il est toutefois tellement loin de nous et des objets dont nous observons les ombres, que l'effet d'éloignement illustré par la figure 9 à la page 224 joue ici à plein. Certains soirs d'orage, on voit les rayons partir du soleil comme d'un point, et dans ces conditions ils n'ont pas l'air parallèles du tout. Mais il s'agit là d'un effet de perspective analogue à celui qui nous montre les bords d'une route converger vers un point de l'horizon. Ce n'est pas parce qu'on observe cette convergence qu'on va prétendre que les bords de la route ne sont pas parallèles !

L'autre question est que le soleil n'est pas un point, mais une énorme boule. Celle-ci est située si loin que nous l'apercevons sous un angle assez petit, mais non négligeable : un demi-degré. L'ombre projetée par le soleil ne vient donc pas d'un point, et c'est pourquoi elle a des contours pas tout-à-fait nets. On passe de l'ombre à la zone éclairée qui l'entoure en traversant une zone de pénombre d'autant plus large que l'objet est éloigné du plan où se trouve l'ombre. C'est là un fait que l'on peut vérifier simplement par une expérience.

On peut obtenir des rayons lumineux approximativement rectilignes en utilisant un projecteur de diapositive ou un rétroprojecteur. Dans les deux cas, les rayons forment un cône de lumière ; plus la source lumineuse est éloignée de l'écran, plus on s'approche de la projection parallèle (cf. la figure 9). L'ombre d'un objet pas trop grand placé près de l'écran de projection donne alors une bonne approximation d'une représentation en perspective parallèle. Il faut remarquer que si l'écran est placé perpendiculairement à l'axe du cône lumineux, ce qui est la situation habituelle, la projection est orthogonale. Pour obtenir d'autres projections, il faut varier les positions relatives du projecteur et de l'écran.

4 La perspective cavalière dans l'enseignement

Le papier quadrillé ou pointé permet de commencer à pratiquer la perspective cavalière sans en connaître explicitement les règles, ni a fortiori sans faire de lien avec une projection quelconque. L'aller-retour entre le plan et l'espace est guidé ici par le support sur lequel on dessine et par l'effort d'imagination pour retrouver dans ce que l'on dessine l'objet que l'on voit. C'est là une étape intéressante pour acquérir la faculté que l'on appelle la vision dans l'espace.

La pratique de la perspective cavalière permet d'en dégager les règles, dont la connaissance est nécessaire afin qu'elle devienne un moyen efficace de représentation.

L'apprentissage et l'utilisation de la perspective cavalière offrent des occasions naturelles de pratiquer la géométrie du plan et de l'espace, notamment les propriétés d'incidence et de parallélisme.

Parce qu'elle conserve le parallélisme et certains rapports, la perspective parallèle est un moyen commode pour faire certaines constructions de géométrie de l'espace, en tablant simultanément sur les propriétés des objets eux-mêmes et sur celles de la projection. On le fait couramment lorsqu'on cherche des sections de cubes ou d'autres polyèdres sur leurs représentations en perspective cavalière.

Une autre problématique intéressante est celle de la représentation en perspective d'objets, de polyèdres par exemple, dont les symétries ne s'accordent pas facilement avec la perspective cavalière. Il n'est pas si facile de représenter un dodécaèdre régulier en perspective... Inversement, on peut vouloir réaliser la maquette d'un objet dont on possède une ou plusieurs représentations[3]. La perspective parallèle offre aussi un moyen agréable de découvrir les ellipses comme projections parallèles d'un cercle ou comme sections de cylindres circulaires, et les ombres au soleil d'une sphère (cf. figure 12).

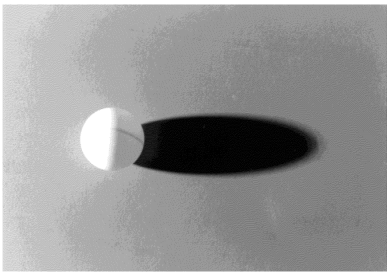


Fig. 12

Comme la perspective parallèle est un moyen particulièrement adapté à la représentation des cubes, elle est aussi un moyen efficace de représenter des objets que l'on peut « cadrer » dans un réseau de cubes. En ce sens, elle est directement en prise avec la géométrie analytique euclidienne, car au fond un repère orthonormé est équivalent à un réseau cubique que l'on peut affiner

[3] L'étude de la géométrie des cristaux offre par exemple la possibilité d'un aller retour entre de telles représentations et la construction de maquettes (voir par exemple F. Michel [1985]).

autant qu'on le souhaite. Ainsi, il paraît utile d'allier la géométrie analytique et les débuts de l'algèbre linéaire avec les représentations en perspective cavalière. Sur les réseaux cubiques, voir G. Noël[1997].

Parmi les diverses problématiques qui peuvent jalonner un enseignement où la perspective cavalière trouve sa place, signalons encore les *solides impossibles*. Ce sont des dessins d'allure polyédrale qui conduisent à des contradictions. Si on accepte qu'on a voulu les représenter en perspective cavalière, on s'aperçoit qu'ils violent des théorèmes de géométrie sur l'incidence ou le parallélisme. On obtient facilement de telles figures. Par exemple, la figure 13 ne peut pas représenter deux cubes se touchant le long d'une arête. Escher a exploité dans ses gravures ce thème des figures impossibles.

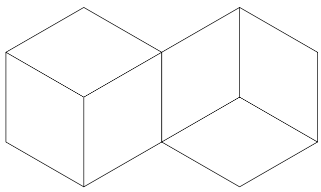


Fig. 13

Discerner ce qui fait qu'un solide est impossible – de même que déterminer ce qui fait qu'une représentation en perspective est fautive – amène à argumenter en géométrie de l'espace.

15

La perspective centrale

1 Qu'est ce que la perspective centrale ?

Comment reproduire sur un tableau ce que l'on aperçoit du paysage au travers d'une fenêtre ? On place une feuille transparente sur la fenêtre et on y dessine ce que l'on voit. Deux problèmes apparaissent tout de suite. D'abord, dès que l'on bouge un peu la tête, le paysage se déplace sur la fenêtre. Pour contourner cette difficulté, on peut choisir un repère fixe à partir duquel on regarde. Ensuite, pour pouvoir dessiner sur le papier collé à la fenêtre, il faut se placer assez près d'elle. Lorsqu'on regarde le paysage en direction de la pointe du crayon, on voit en réalité deux pointes de crayon, correspondant à deux endroits différents du paysage. Le réflexe vient tout seul : on ferme un œil. On peut alors dessiner sur la fenêtre les lignes du paysage.

La perspective centrale consiste à reproduire sur un tableau ce qu'un œil (immobile et ponctuel) verrait au travers d'une « fenêtre ». L'idée est que le tableau pourrait prendre la place de la fenêtre, l'œil n'y verrait que du feu... Ce type de représentation a les caractéristiques suivantes :

- on suppose que l'œil est un point ;
- chaque point de l'objet à représenter est relié à cet œil par un rayon visuel rectiligne ;
- chaque point de la représentation est l'intersection de ce rayon visuel avec le tableau (figure 1).

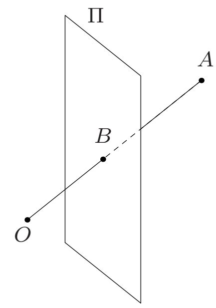


Fig. 1

Lorsqu'on dessine sur la fenêtre, on observe que certaines droites parallèles dans la réalité restent parallèles sur la représentation, et d'autres non. Dans le cas par exemple d'un carrelage à dalles carrées, on obtient souvent une représentation comme celle de la figure 2. D'une manière générale, les droites parallèles qui sont parallèles au plan de projection restent parallèles entre elles sur la représentation, et tel n'est pas le cas des autres.

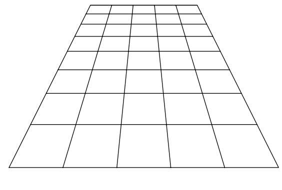


Fig. 2

Sur cette même figure, on observe également que des segments égaux ne sont pas toujours représentés par des segments égaux. Sur une même ligne horizontale, les côtés de tous les carrés sont égaux. Sur les lignes obliques qui représentent les droites perpendiculaires au plan de projection, les côtés des carrés sont tous différents. De plus, d'une ligne horizontale à l'autre, les côtés des carrés ne sont pas non plus égaux.

Ces deux propriétés – non conservation du parallélisme de certaines droites, et non conservation des égalités de longueurs, et donc des rapports, dans une même direction – distinguent ce type de représentation de la perspective cavalière.

Par contre la perspective centrale conserve l'alignement. Si des points sont en ligne droite dans l'espace, ils le restent sur la représentation. En effet, n'importe quelle droite[1] d détermine avec le centre O un plan α. La représentation de d est alors l'intersection d' de α avec le plan Π, et c'est donc une droite (figure 3). Ceci donne une manière de repérer de fausses perspectives centrales. Nous avons affirmé que la figure 2 à la page précédente est la représentation en perspective centrale d'un carrelage à base carrée. Si cela est vrai, les diagonales du carrelage qui sont alignées en réalité doivent encore l'être sur la représentation. Le lecteur peut donc vérifier notre affirmation.

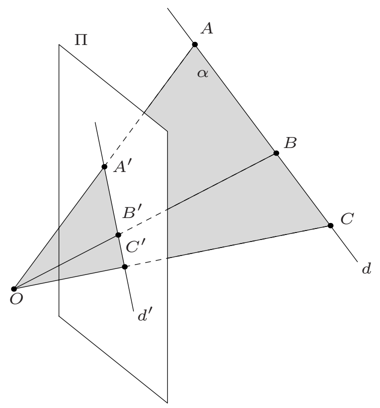


Fig. 3

Considérons un ensemble de droites parallèles qui ne restent pas parallèles sur la représentation. Si on prolonge suffisamment ces droites sur la représentation, on s'aperçoit qu'elles se coupent toutes en un même point. On peut en faire l'expérience en prolongeant côtés et diagonales des carreaux de la figure 2. Chaque point d'intersection ainsi obtenu est appelé *point de fuite*. Un tel point est l'intersection du plan Π avec la parallèle aux droites considérées, passant par le point O.

Un point de fuite est particulièrement important : c'est le *point de fuite principal*, qui correspond à la direction perpendiculaire au plan de projection. Il se trouve au pied de la perpendiculaire à ce plan menée à partir du centre O. C'est vers lui que convergent les obliques de la figure 2.

Jusqu'à présent nous avons parlé du dessin que l'on fait sur une fenêtre. Pour étudier de manière plus générale les propriétés de ce genre de projection, il est commode de remplacer la fenêtre par un plan, et de considérer les projections sur ce plan de tous les points de l'espace, à l'exception bien entendu du point O lui-même et des points du plan qui passe par O et est parallèle au plan de projection. On ne parle plus alors de perspective, mais bien de *projection centrale*. Et de fait, en généralisant ainsi la situation, on s'écarte beaucoup de ce que voit le peintre. Il n'y d'ailleurs plus de raison dans ces conditions de considérer que le plan est vertical et que le centre O est à distance de toucher du plan de projection. Néanmoins, lorsqu'on réfléchit aux projections centrales en général, autant continuer à imaginer le plan de projection vertical, car ainsi on y voit plus clair. C'est d'ailleurs ce que l'on fait spontanément.

Le passage d'un petit morceau de paysage à l'espace entier

[1] Sauf si cette droite contient le point O. Dans ce cas, les projections de tous les point de la droite se trouvent en un même point du tableau.

fait apparaître des phénomènes tout nouveaux. Regardons par exemple le parallélisme et la concourance[2], ainsi que les rapports. Le parallélisme n'est pas conservé par perspective centrale. Il ne l'est donc pas par projection centrale. Nous savons qu'un ensemble de droites parallèles – lorsqu'il n'est pas envoyé sur un ensemble de droites parallèles – est envoyé sur un ensemble de droites concourantes (c'est-à-dire qui se coupent toutes en un même point). À l'inverse, peut-on avoir un ensemble de droites concourantes de l'espace projeté sur un ensemble de droites parallèles ? Mais oui – et il faut sans doute un effort pour le voir – c'est le cas si le point de concourance des droites se trouve dans le plan contenant le point O et parallèle au plan de projection.

Ainsi, le parallélisme n'est pas conservé, mais la concourance ne l'est pas davantage. Par contre, la relation « être un ensemble de droites parallèles ou concourantes » est conservée. Pour exprimer simplement cette propriété, on décide « d'ajouter un point » à chaque droite, de telle manière que toutes les droites d'une direction aient un et un seul point en commun. Ces points sont appelés *points à l'infini*.

De la même façon, un ensemble de plans parallèles a une *droite à l'infini* en commun. Les points à l'infini d'un plan appartiennent à cette droite. La nouvelle relation d'incidence[3] ainsi définie est conservée par les projections centrales : si un ensemble de droites se coupent en un seul point (que ce soit un point « usuel » ou un point à l'infini), alors leurs projections se coupent aussi en un seul point (que ce soit un point « usuel » ou un point à l'infini).

Si les rapports ne sont en général pas conservés par les projections centrales, les *birapports* le sont. Soit quatre points alignés A, B, C et D. Choisissons un sens positif sur la droite qui les porte. Notons AB la longueur du segment $[AB]$ munie du signe $+$ si le sens de A vers B coïncide avec le sens positif sur la droite, et le signe $-$ au cas contraire.

Le birapport de ces quatre points est le quotient des rapports $\frac{DB}{DA}$ et $\frac{CB}{CA}$, ce que l'on peut écrire

$$\frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA}.$$

Si on projette ces quatre points sur un plan Π (figure 4), le birapport des quatre points A', B', C' et D' obtenus est le même :

$$\frac{D'B'}{D'A'} : \frac{C'B'}{C'A'} = \frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA}.$$

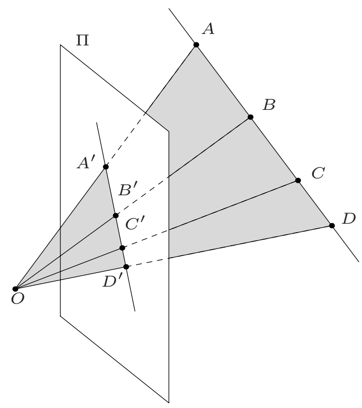


Fig. 4

[2] C'est-à-dire le fait pour des droites de passer par un même point.

[3] La relation d'incidence est celle qui détermine les positions relatives des points, droites et plans.

2 La perspective centrale dans la civilisation

Parallèlement au développement des sciences de la nature, aux efforts pour comprendre le monde et son « fonctionnement », l'approche géométrique de la perspective apparaît durant la Renaissance comme une réponse à la recherche de réalisme dans l'art de la peinture : « [...] et sache, dit Albert Dürer, que plus exactement tu approches de la nature par la voie de l'imitation, plus belle et plus artistique deviendra l'œuvre.[4] » Pour la première fois, les artistes peintres feront donc intervenir des règles techniques dans leur art. Écoutons encore Albrecht Dürer nous dire en 1525 : « [...] rien n'est plus désagréable à un esprit éclairé que la fausseté dans le tableau, même peint avec la plus grande application. Que ces peintres se complaisent dans l'erreur est l'unique raison qui les a empêchés d'apprendre l'art de la mesure, sans lequel il n'y a et il n'y aura pas de véritable artisan ». Attachés à la naissance de la perspective géométrique en peinture, on trouve entre autres les noms de Viator, Filippo Brunelleschi, Leo Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci et Albrecht Dürer.

Ainsi la perspective est née chez les peintres. Mais à partir du XVII^e siècle, elle est reprise par des mathématiciens comme Desargues et Pascal, et elle engendre alors par étapes en *géométrie projective*. Un nouveau chapitre de la géométrie, tout à fait différent de la géométrie d'Euclide, est ainsi ouvert. Le fait que l'initiative et les premières réalisations en soient venue des peintres et non des mathématiciens est un fait important pour qui s'intéresse à la relation entre les mathématiques et la réalité. Au XIX^e siècle Brianchon, Poncelet, Gergonne, Chasles, Möbius, Plücker, Steiner et von Staudt développent pleinement la géométrie projective et contribuent au mouvement de pensée qui aboutit au classement des géométries par Félix Klein (Le *programme d'Erlangen* de F. Klein [1872]).

Pendant des siècles, la perspective centrale était l'apanage des dessinateurs et des peintres. Grâce à la photographie, elles est aujourd'hui monnaie courante. Une photographie est en effet le résultat d'une double projection centrale. La première a lieu dans l'appareil photographique lui-même (lorsque l'angle de vue de l'objectif n'est pas trop grand), la deuxième dans le laboratoire où l'image sur la pellicule est agrandie pour donner l'image finale. Le cinéma est également un lieu privilégié de la perspective centrale. C'est d'ailleurs le cinéma qui a habitué l'œil contemporain aux points de vue les plus divers et aux plans de projection non verticaux (plongées, contre-plongées...).

La perspective centrale est également utilisée en informatique, où de plus en plus de programmes créent des mondes vir-

[4] A. Dürer, cité par A. Flocon et R. Taton[1990].

tuels grâce à des images de synthèse. La perspective y permet de vivre une illusion d'espace.

Outre les ambiguïtés usuelles des représentations planes, la perspective centrale offre – de par son caractère très réaliste – de grandes possibilités d'illusions. Illusions innocentes comme dans le cas de la figure 5[5] (les deux personnages ont la même taille !), ou moins innocentes lorsqu'il s'agit de tromper des clients potentiels, par exemple par une vue en perspective d'une maison, la laissant croire plus grande qu'elle ne l'est. Connaissant les règles de la perspective, on peut aussi créer des trompe-l'œil, utiles par exemple pour la réalisation de décors de théâtre. On en trouve de spectaculaires dès la renaissance.

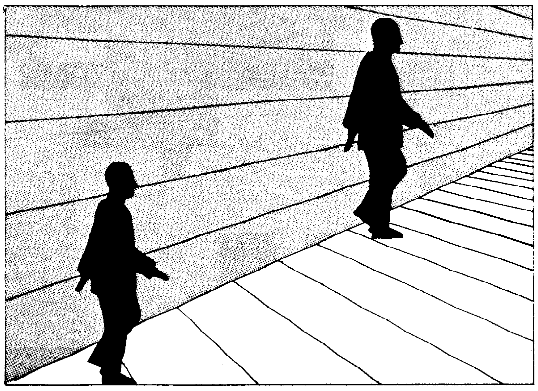


Fig. 5 : Lequel est le plus grand ?

3 La perspective centrale dans la réalité

La perspective centrale – même si c'est son objectif premier – ne reproduit pas tout à fait fidèlement la perception visuelle. Déjà la partie purement physique du processus de perception ne se base pas sur une projection centrale plane : la surface de la rétine est a peu près celle d'une calotte sphérique. De plus, les processus mentaux qui réinterprètent la sensation corrigent certains effets perspectivistes. Dans notre entourage immédiat, nous ne voyons pas la taille des objets ou des personnes se modifier lorsque nous nous en éloignons ou nous en rapprochons. Pourtant, d'un point de vue purement perspectif, les tailles perçues varient sensiblement. Cette correction n'a plus cours lorsque l'on regarde à une distance intermédiaire, ni trop proche ni trop lointaine. Il suffit de regarder une route en ligne droite pour constater que nous percevons les objets de plus en plus lointains, de plus en plus petits. Nous voyons les parallèles converger vers des points de fuite. Par contre, lorsque nous regardons dans le lointain, tout semble « s'écraser », et il ne semble plus y avoir là de perspective bien claire.

[5] Reprise de Th. Gilbert [1987].

On peut de diverses façons créer des modèles concrets de projection centrale. D'abord, nous l'avons vu, on peut dessiner sur une fenêtre. On peut aussi se passer d'une vitre en adaptant comme suit le portillon de Dürer : sur un cadre, on tend un quadrillage de fils. On regarde un objet a travers le cadre, à partir d'un œilleton. On reproduit ce que l'œil perçoit, sur un papier quadrillé.

Un autre modèle de la projection centrale est donné par l'ombre à la lampe d'un objet sur un plan. Les rayons lumineux étant rectilignes, il s'agirait bien d'une projection centrale si la lampe était ponctuelle. Mais aucune lampe ne l'est, ce qui occasionne des zones de pénombre autour des ombres. Un inconvénient de l'ombre à la lampe – mais c'était aussi le cas pour l'ombre au soleil – est que l'on n'obtient que les contours de l'objet. S'il s'agit d'un polyèdre, on peut faire disparaître l'inconvénient en choisissant le polyèdre réalisé uniquement avec des tiges.

Un dernier modèle de projection centrale est donné par la chambre noire, qui est à l'origine de la photographie. On dispose d'une boîte parallélépipédique. Au centre d'une de ses faces, on perce un petit trou, aussi appelé *sténopé*. On constitue la face opposée à l'aide d'un verre mat. On peint les autres faces intérieurement en noir mat. On voit alors se dessiner sur la face de verre une image inversée du paysage faisant face au trou. Ce modèle est toujours imparfait, car ou le trou est extrêmement petit, et il n'y pas assez de lumière, ou bien il est plus grand, mais alors la vue sur la vitre du fond se brouille. C'est pour remédier à ces deux inconvénients que les appareils photographiques sont munis d'une lentille appelée objectif. Les objectifs eux-mêmes sont d'ailleurs sources de déformations aussi. Ainsi certains objectifs dont l'angle de vue est trop grand ne donnent pas fidèlement une perspective centrale.

L'avantage de l'ombre et de la chambre noire est que, dans les deux cas, on regarde la « représentation » indépendamment de sa propre position, alors que si l'on dessine sur une vitre, seul l'œil derrière l'œilleton « voit ce qui se passe ».

4 La perspective centrale dans l'enseignement

Les ombres à la lampe et davantage encore la photographie sont des phénomènes assez importants pour que chacun en étudie au moins le principe. Il est instructif et amusant de faire pratiquer les ombres chinoises aux petits enfants. D'autre part, très jeunes ils regardent des photos, y reconnaissent les objets proches et lointains, s'habituent petit à petit, et sans bien entendu qu'il soit question d'une initiation systématique, à la convergence des parallèles et à l'existence d'une ligne d'horizon. La chambre noire est une expérience fascinante pour les enfants, et elle leur donne sans peine le premier principe de la photographie. De même, il est amusant et instructif de dessiner sur une vitre, en commençant par des objets très simples, et occupant des positions simples par rapport à l'observateur. Toutes ces expériences développent petit à petit une première base d'interprétation des images que les médias visuels apportent quotidiennement à chaque personne.

Ce n'est toutefois que durant le secondaire, et plus particulièrement dans sa deuxième partie, qu'il faut envisager d'aborder la technique de la perspective centrale de manière plus approfondie.

Un tel enseignement de la perspective centrale, et plus généralement des projections centrales, peut avoir plusieurs objectifs.

Comme pour le cas des projections orthogonales et parallèles, les projections centrales peuvent être l'occasion de pratiquer la géométrie dans l'espace et même d'en élaborer une première théorie axiomatique[6].

Même si ce type de démarche pour étudier la géométrie de l'espace est d'autant plus intéressant que les élèves pratiquent (dans des sections techniques ou artistiques) les représentations en perspective, l'étude de la perspective centrale n'est certainement pas à exclure des autres sections. Saisir l'espace, c'est aussi, nous l'avons dit, mieux comprendre les multiples représentations qui nous entourent quotidiennement. Dans un monde d'images, apprendre à les analyser – et le cas échéant à analyser des sources d'illusions – donne aux élèves une plus grande liberté de s'y mouvoir.

Saisir l'espace, c'est aussi pouvoir se poser et éventuellement répondre à des questions qui concernent directement notre perception de l'espace. En voici une, reprise de Th. Gilbert [1987] : peut-on déterminer à partir d'une photo ou d'une peinture si une place est bien rectangulaire, par exemple la place Saint-Marc à Venise ?

Les projections centrales offrent également des possibilités d'approche intuitive de phénomènes mathématiques qui peuvent paraître difficiles. Th. Gilbert [1987] pose par exemple la question de la vue en perspective d'une sinusoïde. Quelle est la représentation en perspective sur le plan Π d'une sinusoïde vue du point O (figure 6 à la page suivante) ? La réponse est visualisée à la figure 7. Il s'agit d'une courbe dont l'équation est $x = ay \sin \frac{b}{y}$ (a et b sont des paramètres qui dépendent des positions relatives de O et du plan de projection).

[6] Une telle démarche se retrouve dans la brochure de G. Cuisinier et al. [1995], à partir de l'étude des ombres à la lampe.

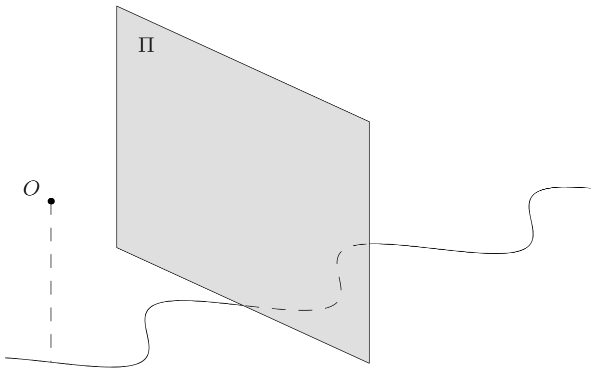


Fig. 6

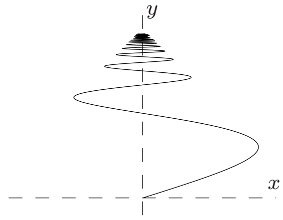


Fig. 7

Pour finir, l'étude de la perspective centrale ou des ombres à la lampe dans l'enseignement secondaire peut être – et c'est sans doute un passage quasiment obligé si l'on souhaite le faire – l'occasion d'aborder, ne fut-ce qu'un peu, la géométrie projective[7].

[7] On trouve par exemple une proposition pour une telle introduction chez I. Soleil [1991].

Cinquième partie

Grandeurs, repérages, linéarité

Introduction

Pour saisir l'espace, s'y déplacer et agir sur les objets, il faut bien s'intéresser à la grandeur et à la position de ceux-ci. Comment, à travers quelles actions et observations l'homme accède-t-il aux grandeurs et aux positions ? Comme nous allons le voir, il y accède à travers une opération de base qui est l'addition et en utilisant des fonctions « qui respectent l'addition ». Ces fonctions sont celles qu'on qualifie de *linéaires*. En fait, l'étude ci-après des grandeurs et des repérages a pour fil conducteur l'idée de *linéarité*. Nous allons construire cette idée par étapes bien progressives.

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

Tabl. 1

1 Un premier exemple de fonction linéaire

Pour donner une première idée de ce qu'est une fonction linéaire, considérons un exemple des plus familiers. Le tableau 1 donne les prix pour des achats de farine dans un magasin. Observons quelques propriétés de ce tableau.

La conservation de la somme. – On va au magasin acheter 2 kg de farine, puis on y retourne pour acheter encore 3 kg. On a payé en tout

$$30 \text{ F} + 45 \text{ F} = 75 \text{ F}.$$

Il aurait été plus simple d'acheter d'un coup 5 kg, et on aurait payé d'un coup 75 F. Le tableau 2 montre cela.

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

Tabl. 2

En général, si on rassemble deux quantités de farine, le prix total est la somme des prix de ces deux quantités prises séparément. À toute somme de deux termes pris dans la première colonne du tableau correspond la somme des deux termes correspondants de la colonne de droite.

La conservation des rapports internes. – La propriété la plus apparente du tableau 1 est sans doute celle qui concerne les rapports dans les deux colonnes. Si on achète 2 fois plus, on paie 2 fois plus. Si on achète seulement les 2/3 de ce qu'on pensait acheter d'abord, on paie les 2/3 de ce qu'on pensait payer. Le tableau 3 à la page suivante illustre cela.

En général, s'il existe un rapport entre deux quantités de farine, on trouve le même rapport entre les prix correspondants.

Nous appellerons *rapport interne* tout rapport entre deux quantités prises dans une même colonne (à l'intérieur d'une colonne). La propriété que nous venons d'observer est la *conservation des rapports internes*.

L'existence d'un rapport externe. – Si on regarde n'importe quelle ligne du tableau, on s'aperçoit qu'en divisant le nombre de droite par celui de gauche, on obtient toujours 15. Ou ce qui revient au même : en multipliant le nombre de gauche par 15, on obtient toujours le nombre de droite. On dit que 15 est le *rapport externe* associé à ce tableau. L'adjectif *externe* rappelle que l'on *sort* d'une colonne pour aller vers l'autre.

Dans notre exemple, le rapport externe n'est autre que le *prix à l'unité*, tel qu'il apparaît lorsqu'on écrit par exemple

$$\text{prix de 3 paquets} = (3 \text{ paquets}) \times (15 \text{ F/paquet}) = 45 \text{ F}.$$

Cette expression rend compte en détail de ce qui se passe. Dans la pratique, on calcule simplement 3×15. Le tableau 4 met en évidence le rapport externe.

Un graphique en ligne droite. – Choisissons un petit segment pour représenter 1 paquet de farine (une unité), et portons sur un axe horizontal les nombres de paquets (figure 1). Choisissons encore un petit segment, cette fois pour représenter 15 F, et portons perpendiculairement les prix des achats de farine. Les extrémités des segments représentant les prix sont alignées. Cette disposition est assez naturelle, puisque chaque fois qu'on ajoute 1 paquet, on augmente le prix de 15 F : c'est comme un escalier *qui monte régulièrement.*

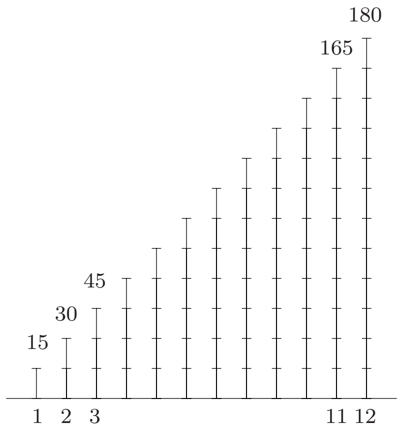


Fig. 1

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

$\times 2$ $\times 2$

$\times \frac{2}{3}$ $\times \frac{2}{3}$

Tabl. 3

1	paquet	15 F
2	paquets	30 F
3	paquets	45 F
4	paquets	60 F
5	paquets	75 F
6	paquets	90 F
7	paquets	105 F
8	paquets	120 F
9	paquets	135 F
10	paquets	150 F
11	paquets	165 F
12	paquets	180 F

$\times(15 \text{ F/kg})$

Tabl. 4

2 Qu'est-ce qu'une fonction linéaire ?

Notre exemple des achats de farine était destiné à montrer ce qu'est une *fonction linéaire.* Passons maintenant de cet exemple particulier à une expression générale de la notion de fonction linéaire. Pour cela nous nous appuierons sur certains symboles réutilisables dans tous les exemples ultérieurs.

Tout d'abord, à un nombre de paquets de farine correspond un prix, et réciproquement. Nous pouvons noter cette correspondance par une double flèche, comme ceci :

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ paquet} & \longleftrightarrow & 15 \text{ F} \\ 2 \text{ paquets} & \longleftrightarrow & 30 \text{ F} \\ 3 \text{ paquets} & \longleftrightarrow & 45 \text{ F} \end{array}$$

En général, nous écrirons

$$x \longleftrightarrow x',$$

formule dans laquelle x désigne un nombre de paquets (n'importe lequel) et x' le prix correspondant. Nous écrirons aussi $x' = f(x)$, pour rappeler que x' est fonction de x. Par conséquent nous pouvons écrire

$$x \longleftrightarrow x' = f(x). \tag{1}$$

Bien entendu, nous aurions pu regarder les choses dans l'autre sens, et considérer que x est fonction de x' (dans notre exemple, que le nombre de paquets que nous pouvons acheter est fonction de l'argent dont nous disposons).

Voyons comment s'expriment, dans ces notations, les trois propriétés relevées ci-dessus.

La conservation de la somme. – Pour notre exemple :

$$\begin{array}{rcl} \text{du fait que 5 paquets} & = & \text{2 paquets} \ + \ \text{3 paquets,} \\ \text{le prix de 5 paquets} & = & \text{le prix de 2 paquets} \\ & & \qquad + \ \text{le prix de 3 paquets.} \end{array}$$

De manière générale, x_1, x_2 et x_3 étant des valeurs prises dans la première colonne,

$$\textit{si} \quad x_3 = x_1 + x_2, \quad \textit{alors} \quad x'_3 = x'_1 + x'_2. \tag{2}$$

On peut dire aussi : quels que soient x_1 et x_2,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2). \tag{3}$$

La conservation des rapports internes. – Pour notre exemple :

$$\begin{array}{rcl} \text{du fait que 6 paquets} & = & \dfrac{2}{3} \text{ de 9 paquets,} \\ \text{le prix de 6 paquets} & = & \dfrac{2}{3} \text{ du prix de 9 paquets.} \end{array}$$

De manière générale, x_1 et x_2 étant des valeurs prises dans la première colonne,

$$\textit{si} \quad x_2 = \alpha x_1, \quad \textit{alors} \quad x'_2 = \alpha x'_1, \tag{4}$$

ou encore

$$\textit{si} \quad x_2 = \alpha x_1, \quad \textit{alors} \quad f(x_2) = \alpha f(x_1). \tag{5}$$

Dans un langage plus ancien, mais qui garde son sens et son utilité, on dit

$$x_1 \textit{ est } \textit{ à } x_2 \textit{ comme } x'_1 \textit{ est } \textit{ à } x'_2. \tag{6}$$

Dans le langage des fractions, on peut écrire aussi

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x'_1}{x'_2} \ (= \alpha). \tag{7}$$

On dit également que x_1, x_2, x'_1 et x'_2 forment une *proportion.* On peut dire aussi : quels que soient x et un nombre α,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{8}$$

L'existence du rapport externe. – Dans notre exemple de prix pour des paquets de farine, nous avons vu qu'il existait un rapport (le prix à l'unité) qui permet de passer de la première à la seconde colonne. Nous pouvons ainsi écrire que pour tout nombre x de paquets de farine, le prix est donné par

$$x' = (15 \text{ F/kg})x.$$

Ce prix à l'unité n'est pas un « simple nombre », puisqu'il comprend la mention d'une unité complexe, à savoir F/kg. Sans l'analyser davantage pour l'instant, ni préjuger de ce qu'il deviendra dans d'autres exemples, nous continuons à l'appeler le *rapport externe.*

Nous verrons dans la suite qu'il existe des fonctions linéaires dépourvues de rapport externe.

Observons simplement que dans notre problème de paquets de farine, si x est une valeur prise dans la première colonne, il existe un rapport externe, que nous noterons k, tel que

$$f(x) = kx. \tag{9}$$

3 Encore deux exemples.

Montrons maintenant comment on résout des problèmes dans des situations de linéarité. Une première méthode bien connue est celle de la *règle de trois*. Soit par exemple la question suivante :

Si 3 kg *de farine coûtent* 45 F, *combien coûteront* 7 kg ?

Souvent on passe par 1 kg – et c'est parfois une manœuvre trop compliquée – en disant

- puisque 3 kg coûtent 45 F,
- 1 kg coûte 3 fois moins (conservation du rapport interne), soit $\frac{45}{3} = 15$ F ;
- donc, 7 kg coûteront 7 fois plus (conservation du rapport interne), soit 15 F $\times 7 = 105$ F.

La règle de trois s'appuie donc essentiellement sur les rapports internes.

Voici maintenant une autre question, posée et résolue par Manuel, un paysan chilien de 59 ans n'ayant jamais fréquenté l'école (cf. I. Soto Cornejo [1993]).

Calculer la valeur de la récolte de 6 300 *carottes si la valeur de* 1 000 *carottes est de* \$ 150.

Le symbole \$ désigne ici l'unité monétaire chilienne, le *peso.* Manuel, qui ne sait pas écrire, a donc résolu le problème oralement. Sa démarche est représentée schématiquement à la figure 2 à la page suivante (schéma établi après coup par I. Soto).

Partant de 1 000 carottes, il reconstruit \$ 6 300 pas à pas, en s'appuyant sur des produits simples (choisis parmi ceux qu'il maîtrise dans la table de multiplication) et sur une somme. En parallèle, il applique aux \$ 150 de départ exactement les mêmes opérations pour arriver au prix demandé. La conservation des rapports internes et celle de la somme aboutit à ce que la colonne de droite reproduise exactement la structure de celle de gauche. Lorsqu'une application d'un domaine de grandeurs sur un autre est linéaire, tout enchaînement d'opérations dans le domaine de départ se reproduit fidèlement dans celui d'arrivée. Cette caractéristique suffirait à elle seule à faire comprendre l'importance des fonctions linéaires : on passe sans difficulté d'un côté à l'autre[1].

On remarque d'ailleurs sur la figure que le sens demeure présent à chaque étape : tout nombre et toute opération *avec des carottes* dans la colonne de gauche est immédiatement interprété par un nombre de *pesos* et une opération sur les *pesos* dans la colonne de droite. Le sens ne disparaît à aucun moment derrière un formalisme.

[1] Bien entendu, la justification première de la linéarité dans un problème de commerce comme celui-ci, c'est un principe d'équité : je te donne deux fois plus, tu me dois deux fois plus.

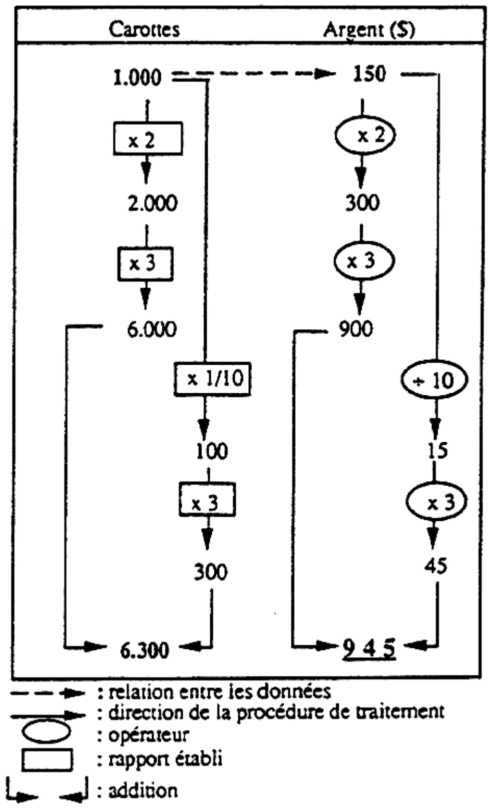


Fig. 2

Manuel ne s'est pas servi du rapport externe, qui est ici $\frac{150}{1000} = 0,15$ peso/carotte. Ce rapport s'écarte du sens concret, ne serait-ce que parce qu'on ne vend jamais une carotte à la fois, et qu'en outre le peso, monnaie de peu de valeur, ne comporte pas de subdivision décimale. Qui plus est, le rapport externe est fractionnaire et son maniement plus difficile que celui des rapports entiers utilisés par Manuel. Ainsi le rapport externe apparaît comme une construction assez abstraite. Toutefois, bien que d'usage facile quand les nombres en cause s'y prêtent, *le fond originaire de la linéarité, c'est la conservation des sommes et des rapports internes.*

4 Des problèmes pour enseigner

Comme le reste de notre étude, cette cinquième partie est de nature surtout théorique. Elle n'évoque de situations concrètes que pour illustrer le fil conducteur de la linéarité, tel qu'il existe, apparent ou caché, à travers toute la scolarité. Mais pour enseigner ces matières, on a besoin de contextes et de problèmes. Voici donc quelques références où le lecteur pourra en puiser.

Sur les rapports, la proportionnalité et les mesures, mentionnons surtout H. Freudenthal [1983], ainsi que les deux très riches séries des ERMEL ([1977] et [1991]). Voir aussi M.-N. Coméliau

[1988].

Sur l'introduction des vecteurs, voir la contribution récente de G. Noël, F. Pourbaix et Ph. Tilleuil [1997]. Voir aussi A. Chevalier et H. Masy [1981], ainsi que A. Goossens et A. Stragier [1983].

À propos des transformations du plan à l'école fondamentale, on se reportera aux travaux de M. Demal, et aussi qu'au mémoire de N. Étienne [1995]. Les transformations dans la première moitié du secondaire sont étudiées entre autres par B. Honclaire, F. Van Dieren et M.-F. Van Troeye (trois brochures éditées par le CREM [1998]). Voir aussi GEM [1982] ; pour la fin du secondaire, voir C. Cordaro [1978], M.-N. Minet [1984] ainsi que G. Noël, F. Pourbaix et Ph. Tilleuil [1997].

Un excellent exposé sur les transformations étudiées par voie analytique est E.A. Maxwell [1975]. Enfin, pour des applications plus poussées, voir le classique T.J. Fletcher [1972]. Et pour avoir une idée des applications de l'algèbre linéaire en économie, voir J. Bair [1990].

Notons enfin que les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, France) ont publié depuis plus de vingt ans beaucoup d'études[2] sur les sujets ci-dessus.

[2] Bon nombres d'entre elles sont disponibles au CREM.

16

Grandeurs, mesures et nombres positifs

Dans l'introduction, nous nous sommes familiarisés avec la notion de fonction linéaire en examinant des exemples pris dans l'environnement familier. Regardons maintenant comment naît et se développe cette notion. Et pour cela, pour retrouver les *défis primitifs,* supposons dans un premier temps que nous ne savons plus ce qu'est mesurer. Ensuite nous verrons que les mesures elles-mêmes sont des fonctions linéaires. Nous traiterons ensuite des grandeurs mesurées.

1 Grandeurs de même nature

1.1 Deux figures géométriques semblables

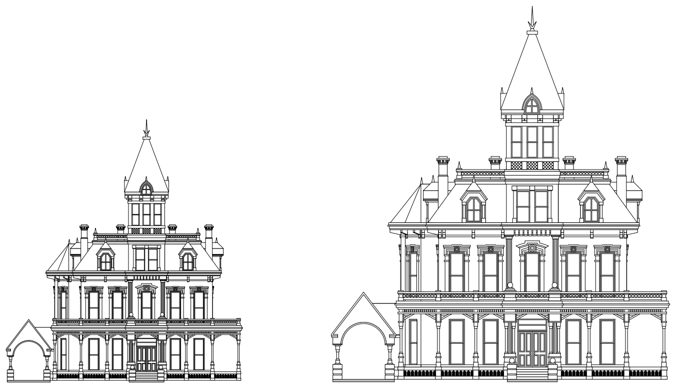


Fig. 1 (a,b)

Nous allons définir une fonction en nous servant de deux figures semblables. Les figures 1(a) et 1(b) sont un exemple de figures semblables : la deuxième est un agrandissement de la première. C'est aussi le cas des figures 2(a) et 2(b) à la page suivante. Ce que nous allons dire s'applique à tout couple de figures semblables. Choisissons le cas le plus simple, celui de la figure 2.

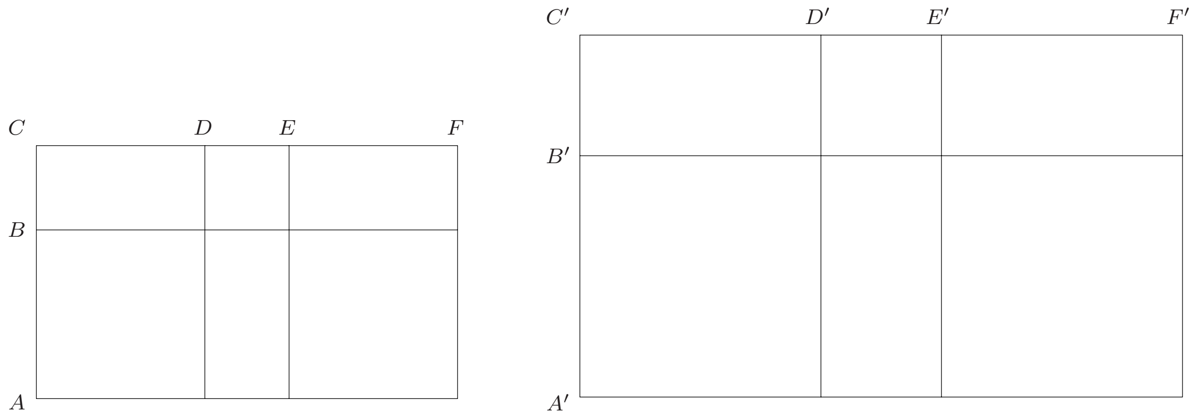


Fig. 2 (a,b)

$[AB]$	$[A'B']$
$[BC]$	$[B'C']$
$[AC]$	$[A'C']$
$[CD]$	$[C'D']$
$[DE]$	$[D'E']$
$[EF]$	$[E'F']$
$[CE]$	$[C'E']$
$[DF]$	$[D'F']$
$[CF]$	$[C'F']$

Tabl. 1

La fonction que nous allons définir ne fera plus correspondre des prix à des marchandises, mais bien des segments à des segments : simplement, à tout segment pris sur la figure 2(a), nous faisons correspondre le segment situé de manière analogue sur la figure 2(b). Le tableau 1 donne, à l'aide de quelques couples de segments, une idée de notre fonction. *Rappelons que nous travaillons avec des segments, et non avec des mesures de segments, puisque nous avons décidé d'ignorer les mesures.*

Bien entendu, pour pouvoir examiner si cette fonction conserve les sommes et les rapports internes, nous devons d'abord définir ce que nous entendrons par somme de deux segments et dire à quoi nous reconnaîtrons que deux rapports de segments sont égaux. Précisons que, dans tout ce que nous allons faire, nous pourrons toujours remplacer un segment par n'importe quel autre qui lui est exactement superposable[1].

Somme et rapport de deux segments. – Nous appellerons *somme* de deux segments le troisième segment obtenu en les mettant bout à bout, dans le prolongement l'un de l'autre. Par exemple, sur la figure 3, c est la somme de a et b. Notons au passage que rien ne nous empêche de faire la somme de deux segments initialement non alignés.

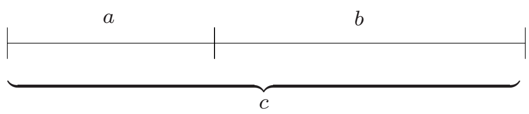


Fig. 3

Nous écrivons

$$a \oplus b = c,$$

en utilisant pour la somme des segments le symbole $\oplus$ et non $+$, pour éviter la confusion avec la somme des nombres.

[1] Pour une théorie plus complète des grandeurs, voir entre autres N. Rouche [1992].

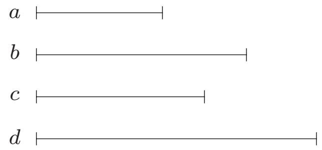


Fig. 4

Soient a, b, c et d quatre segments (figure 4). Formons un rectangle avec a et b, et un autre rectangle avec c et d. Traçons une diagonale dans chacun des deux (figure 5). Nous dirons que *le rapport de a à b est égal au rapport de c à d* si on peut porter les deux rectangles l'un sur l'autre de telle sorte que les deux diagonales se trouvent sur la même droite, comme le montre la figure 6. On pourrait dire aussi ceci : les deux rapports sont égaux si on peut poser les deux rectangles sur une même horizontale de sorte que les deux diagonales aient la même pente (ou soient parallèles, et on voit déjà le parallélisme sur la figure 5). Pour exprimer l'égalité des deux rapports, nous dirons aussi, comme ci-dessus, *a est à b comme c est d.*

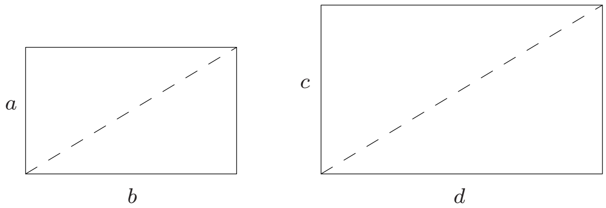


Fig. 5

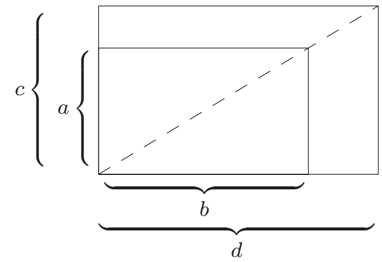


Fig. 6

Conservation de la somme. – La fonction donnée par le tableau 1 à la page précédente conserve les sommes. On peut le vérifier pour n'importe quel couple de segments. Par exemple $[AC]$ est la somme de $[AB]$ et $[BC]$; et $[A'C']$, correspondant à $[AC]$, est la somme de $[A'B']$ et $[B'C']$. Ceci se lit sur le tableau suivant.

$[AB]$ $[BC]$	$[A'B']$ $[B'C']$
$[AB] \oplus [BC]$	$[A'B'] \oplus [B'C']$

Un bel exemple de somme est le demi-périmètre. Pour les deux rectangles de la figure 2 à la page précédente, on a que

$$[A'C'] \oplus [C'F'] \quad \text{correspond à} \quad [AC] \oplus [CF].$$

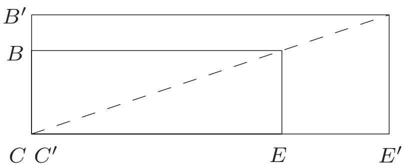


Fig. 7

Conservation des rapports internes. – Prenons deux segments quelconques dans la colonne de gauche, disons $[BC]$ et $[CE]$. Formons un rectangle avec ces deux segments et dessinons-en une diagonale. En superposant à ce rectangle celui formé avec $[B'C']$ et $[C'E']$ (figure 7), nous constatons que $[B'C']$ est à $[C'E']$ comme $[BC]$ est à $[CE]$. Ces deux rapports internes sont donc égaux. On peut vérifier la conservation des rapports internes partout ailleurs dans le tableau. C'est d'ailleurs cette conservation qui assure que les deux figures ont exactement *la même forme* : les rapports entre parties sont les mêmes partout.

Le rapport externe. – Chaque segment de gauche repris dans le tableau 1 à la page 247 a avec son correspondant de droite le même rapport que n'importe quel autre segment de gauche avec son correspondant. On le vérifie pour quelques couples de segments, par une superposition de rectangles comme le montre la figure 8. Celle-ci, comme la figure 1 à la page 240, montre un alignement de points caractéristique d'une fonction linéaire.

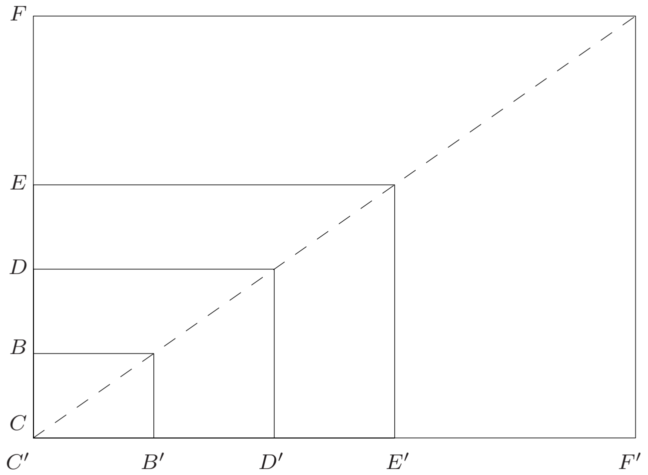


Fig. 8

En conclusion, la correspondance entre segments définie par deux figures semblables a bien les caractéristiques que nous attendons d'une fonction linéaire.

1.2 Fonction définie sur un ensemble de corps pesants

Donnons maintenant un deuxième exemple pour bien faire voir ce qu'est une fonction linéaire entre deux ensembles de grandeurs de même nature. Considérons l'ensemble des corps pesants, matérialisé par exemple par des boules de plasticine. Nous admettons que, dans tout le développement ci-après, nous pouvons à tout moment remplacer une boule de plasticine par une autre de même poids[2].

Somme et rapport de deux boules de plasticine. – Nous dirons que nous *additionnons* deux boules lorsque nous les mettons ensemble pour n'en faire qu'une. Comme ci-dessus, nous notons cette addition $\oplus$.

Nous dirons que deux boules A et B *sont dans le même rapport* que deux boules C et D si, les deux premières étant en équilibre sur une balance à bras éventuellement inégaux, les

[2] Explication plus technique, quoique non essentielle ici : ce que nous envisageons ce sont des grandeurs-poids, la grandeur (le poids) d'une boule de plasticine étant la classe des boules équivalentes à celle-là. Deux boules sont équivalentes si elles équilibrent une balance (cf. N. Rouche [1992]). Nous prenons la liberté de parler d'une *boule*, plutôt que de sa grandeur poids. Quant à la distinction entre poids et masse, elle n'est guère pertinente ici.

deux dernières sont aussi en équilibre sur cette balance. Cette situation est illustrée par la figure 9.

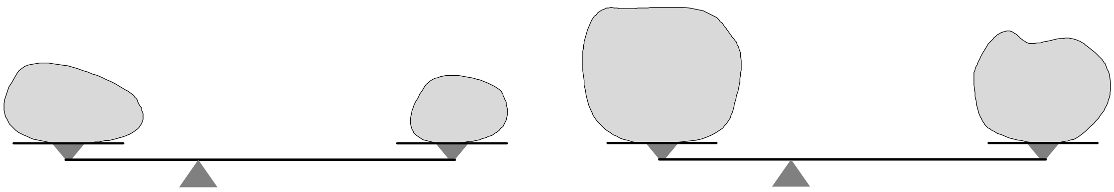


Fig. 9

Définition d'une fonction. – Ceci dit, choisissons une balance (à bras non nécessairement égaux) comme sur la figure 10. Définissons ensuite une fonction f en disant qu'elle envoie toute boule de plasticine A sur la boule A' qui l'équilibre sur cette balance. Notons cette fonction

$$A \longleftrightarrow A' = f(A).$$

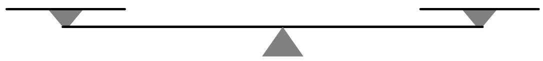


Fig. 10

En expérimentant avec la balance de la figure 10, on vérifie que la fonction conserve les sommes : si A équilibre A' et si B équilibre B', alors la somme de A et B équilibre la somme de A' et B'. Autrement dit, quels que soient les boules A et B, si A' et B' sont les boules qui leur correspondent par la fonction, on a

$$A \oplus B \longleftrightarrow A' \oplus B'.$$

On vérifie aussi que si A équilibre A', alors $2A$ équilibre $2A'$, $3A$ équilibre $3A'$, etc. Plus généralement, quelles que soient A et B prises dans le premier ensemble de boules, le rapport de A à B est égal à celui de A' à B', ce que l'on vérifie chaque fois avec une balance appropriée. Nous retrouvons là la *conservation des rapports internes.*

La manière même dont nous avons construit notre fonction montre qu'il existe le même rapport entre chaque boule A du premier ensemble et la boule correspondante A'. Ce rapport est celui qui est défini à l'aide de la balance de la figure 10, et c'est le *rapport externe* pour notre fonction.

2 Grandeurs de natures différentes

Dans cette section, nous allons examiner des fonctions qui envoient un ensemble de grandeurs d'un certain type sur un ensemble de grandeurs d'un autre type. Au départ, nous ne mesurons pas nos grandeurs. En cours de route, on le verra, nous recourrons quand même à l'idée de mesure.

Soit par exemple un marcheur qui avance tout le temps à la même allure. Ceci veut dire qu'il parcourt des distances égales en des temps égaux. Mais, objectera-t-on sans doute, comment juger de l'égalité des temps et des distances sans les mesurer ? La réponse est simple, quoiqu'un peu artificielle[3] : deux distances sont égales si, en faisant correspondre à chacune d'elles un fil tendu, on peut superposer exactement les deux fils ; deux temps sont égaux s'ils correspondent au même niveau de sable écoulé dans un sablier. Ci-après, nous nous donnerons la liberté de confondre *fil tendu* avec *segment*, ce qui nous permettra de recourir à ce que nous avons dit des segments à la section 1.

Le marcheur nous étant donné, faisons correspondre à chaque intervalle de temps la distance qu'il parcourt pendant ce temps. Nous définissons ainsi une fonction qui envoie les intervalles de temps sur les distances. Nous noterons cette fonction comme d'habitude : si T est un intervalle de temps et D la distance qui lui correspond, nous écrirons

$$T \longleftrightarrow D = f(T).$$

Pour étudier les propriétés de cette fonction, nous devrons savoir ce que nous entendons par la somme de deux intervalles de temps et par la somme de deux distances. Nous définissons la *somme de deux distances*, comme ci-dessus la somme de deux segments, en les mettant bout à bout. Et nous définissons la *somme de deux intervalles de temps* comme l'intervalle obtenu en faisant s'écouler dans le sablier la somme des deux quantités de sable.

Nous devrons aussi recourir à l'égalité de deux rapports dont l'un sera un rapport d'intervalles de temps, et l'autre un rapport de distances. Les choses se compliquent un peu ici et nous obligent à faire intervenir des opérations de mesure[4].

Soient T_1 et T_2 deux intervalles de temps. Nous définissons le rapport de T_2 à T_1 comme la mesure de T_2 lorsqu'on prend T_1 pour unité de mesure. Cette mesure est un nombre. Il n'est pas nécessaire que nous entrions ici dans le détail des opérations de mesure.

[3] Certains lecteurs trouveront peut-être ce caractère artificiel peu acceptable. Mais d'une part ce que nous proposons ici n'est pas une expérience à faire réellement, mais une *expérience de pensée*, comme on doit en faire de nombreuses si on veut comprendre un peu le monde réel. Galilée et Einstein nous ont montré la voie dans ce domaine. Qui plus est, en nous situant en imagination dans un univers sans mesures, nous nous mettons à la place des enfants qui ont encore à reconstruire l'idée de mesure, et pour lesquels l'égalité de deux grandeurs se vit un peu de la manière que nous proposons ici. Autrement dit, à bien y réfléchir, les procédés proposés ci-dessus pour vérifier des égalités pourraient suggérer des activités intéressantes pour les élèves de maternelle. Lorsqu'on part à la recherche des *défis primitifs*, on est bien obligé de se défaire provisoirement de ses connaissances acquises, ce qui ne va pas sans quelque artifice. Après tout, et même si la référence est un peu glorieuse, Descartes a montré dans le *Discours de la méthode* l'utilité de la table rase.

[4] Ce que nous ferons c'est, étant donné deux grandeurs, mesurer l'une en prenant l'autre pour unité. Nous ne mesurons donc pas les deux grandeurs en utilisant une unité conventionnelle (telle que la seconde ou le mètre).

Nous définissons de même le rapport d'une distance D_2 à une distance D_1 comme la mesure de D_2 obtenue en utilisant D_1 comme unité. C'est aussi un nombre.

Ainsi, puisque nous savons reconnaître si deux nombres sont égaux ou non, nous sommes capables de dire si un rapport d'intervalles de temps est ou non égal à un rapport de distances.

Conservation de la somme. – Si le marcheur avance pendant un certain intervalle de temps, puis pendant un autre, la distance parcourue pendant la somme de ces intervalles est la somme des distances parcourues pendant chacun des deux intervalles pris séparément. En d'autres termes, il y a *conservation de la somme* :

$$\textit{si} \quad T_1 \longleftrightarrow D_1 \quad \textit{et} \quad T_2 \longleftrightarrow D_2,$$

$$\textit{alors} \quad T_1 \oplus T_2 \longleftrightarrow D_1 \oplus D_2.$$

Ou encore, quels que soient T_1 et T_2,

$$f(T_1 \oplus T_2) = f(T_1) \oplus f(T_2).$$

Conservation des rapports internes. – Si le marcheur avance pendant un temps deux fois plus grand qu'un autre, il avance d'une distance double. Plus généralement, T_1 et T_2 étant dans un rapport donné, les distances parcourues sont dans ce même rapport : il y a *conservation des rapports internes.*

« Il n'y a pas de rapport externe ». – Dans le problème qui nous occupe, le rapport externe – s'il devait exister – serait un rapport entre une distance et un temps. Or un tel rapport n'existe pas. On n'imagine pas une expérience ou un mécanisme qui permettrait de dire qu'une distance est égale à un temps, ou qu'elle est plus grande ou plus petite, et encore moins de combien. Force est donc de constater que pour notre fonction définie à partir d'un mouvement, *il n'y a pas de rapport externe.* Cette observation s'étend à toutes les fonctions qui relient deux ensembles de grandeurs de natures différentes.

Par exemple, le lecteur pourrait, à titre d'exercice, construire une fonction qui, en s'appuyant sur un corps homogène, ferait correspondre des masses à des volumes. Un corps est dit homogène si chaque fois qu'on y prélève deux parties de même volume, on trouve que ces deux parties ont même masse. Il n'est pas difficile d'imaginer comment additionner des volumes et des masses, ni comment définir l'égalité de deux rapports de volumes et l'égalité de deux rapports de masses. Ceci fait, on découvre que la fonction ainsi construite conserve les sommes et les rapports internes. Mais on relève aussi qu'elle ne comporte pas de rapport externe, car on ne peut imaginer un rapport entre une masse et un volume[5].

Dans l'introduction à cette partie, nous avons déjà examiné une fonction qui envoyait un ensemble de grandeurs (des quantités de farine) sur un autre d'une autre nature (des prix). Or là nous avons parlé d'un rapport externe, qui s'exprimait en francs par paquet. Comment est-ce possible ? La raison est simple : c'est que, alors qu'il n'existe pas de rapport entre deux grandeurs de natures différentes, dès qu'on mesure ces grandeurs, on obtient pour mesures des nombres, or il existe toujours un rapport entre deux nombres. Nous reviendrons à la section 4 sur les rapports de mesures de grandeurs d'espèces différentes.

3 La mesure comme fonction linéaire

À la section précédente, nous avons recouru à des mesures pour définir l'égalité d'un rapport d'intervalles de temps et d'un rapport de distances. Examinons maintenant la notion de mesure elle-même, et pour fixer les idées, prenons comme premier exemple la mesure des segments.

On choisit un segment comme unité *pour mesurer tous les segments.* En reportant cette unité un nombre approprié de fois le long d'un segment quelconque, on obtient la mesure de celui-ci, qui est un nombre (la *longueur* du segment dans cette unité)[6]. Il arrive que l'unité ne soit pas contenue un nombre entier de fois dans un segment, et alors on recourt à des sous-unités pour découvrir sa longueur. Notre propos n'est pas ici d'expliquer ces opérations techniques. Ce que nous souhaitons retenir, c'est que la technique de la mesure permet, une fois l'unité choisie, d'associer une longueur à chaque segment. *On définit ainsi une fonction qui envoie l'ensemble des segments sur l'ensemble des nombres.*

Pour étudier les propriétés de cette fonction, nous devons recourir à la somme de deux segments, que nous connaissons, et à la somme de deux nombres, qui nous est familière aussi.

Nous devrons également pouvoir dire si un rapport de deux segments est égal à un rapport de deux nombres. Soient donc S_1 et S_2 deux segments. Soit

$$x_1 = \text{ mesure de } S_1$$

et

$$x_2 = \text{ mesure de } S_2,$$

[5] Il faut toutefois nuancer l'affirmation qu'il n'y a pas de rapport externe entre deux grandeurs de natures différentes. En effet, il y a par exemple tout de même, avant toute mesure, une appréhension de la vitesse d'un mobile, ou de la densité d'un corps. On pourrait dire qu'on saisit ainsi le rapport externe *qualitativement.* Comme nous allons le voir ci-après, pour le construire *quantitativement*, il faut mesurer les deux grandeurs, et l'expression du rapport ainsi construit variera avec les unités choisies. L'idée du rapport externe saisi qualitativement est due à B. Honclaire.

[6] Rappelons que nous nous occupons ici de grandeurs et non d'objets : dans tout ce qui suit, tout segment peut être remplacé par un segment équivalent (c'est-à-dire de même longueur).

où les mesures sont faites avec l'unité choisie pour mesurer tous les segments.

Mesurons S_2 avec cette fois S_1 pour unité. Cela nous donne un nombre que nous pouvons noter

$$S_2/S_1. \tag{1}$$

« Mesurons » ensuite x_2 avec x_1 pour unité, ce qui (en pensant à la division-contenance) revient à calculer

$$x_2/x_1. \tag{2}$$

Nous dirons que le rapport de S_2 à S_1 est égal au rapport de x_2 à x_1 si les deux nombres obtenus en (1) et (2) sont égaux.

Quelles sont alors les propriétés de notre fonction « mesure des segments » ?

D'abord elle conserve la somme : la mesure de la somme de deux segments est la somme des mesures de chacun d'eux.

Elle conserve aussi les rapports internes. Par exemple, si un segment est double d'un segment donné, sa mesure est aussi double de la mesure de celui-ci. Plus généralement, si deux segments sont dans un rapport quelconque, leurs mesures sont dans le même rapport.

Ce que nous venons de dire pour la mesure des segments se transpose à la mesure d'un domaine quelconque de grandeurs, qu'il s'agisse de masses, de surfaces, de solides, d'intervalles de temps, etc. Seule la technique des mesures varie d'un domaine de grandeurs à l'autre, mais les caractéristiques de la « fonction mesure », telles que nous les avons relevées ci-dessus, demeurent.

Le fait que les mesures soient des fonctions linéaires est une conclusion d'une portée considérable. On ne saurait en effet sous-estimer l'importance des mesures dans la vie quotidienne, les sciences de la nature et les techniques. On pourrait résumer la conservation de la somme et des rapports internes par les mesures en disant que celles-ci représentent fidèlement la réalité des grandeurs. C'est ce qui permet, dans la plupart de problèmes relatifs aux grandeurs, de remplacer celles-ci par leurs mesures. L'avantage est considérable, car il implique un transfert du monde matériel au monde mental, au monde des représentations symboliques. En particulier les grandeurs trop grandes ou trop petites pour être manipulées peuvent être étudiées par le biais des mesures, qui les représentent dans l'esprit.

4 Grandeurs mesurées

Revenons à notre fonction de la section 2, celle qui était définie par un mouvement uniforme et qui faisait correspondre des distances à des intervalles de temps. Nous avions constaté qu'une telle fonction, qui fait le pont entre des grandeurs d'espèces différentes, ne pouvait pas être représentée à l'aide d'un rapport externe.

Mais supposons maintenant qu'ayant choisi deux unités appropriées, nous mesurions les temps et les distances. Représentons la fonction « mesure des temps » (celle qui fait correspondre à chaque intervalle de temps T sa mesure t dans l'unité choisie) par

$$T \longleftrightarrow t,$$

Et de même pour la fonction « mesure des distances », nous écrirons

$$D \longleftrightarrow d.$$

Les trois fonctions en jeu dans cette situation peuvent se mettre en chaîne comme ceci :

$$t \longleftrightarrow T \longleftrightarrow D \longleftrightarrow d.$$

Au centre de la chaîne se trouvent les grandeurs, et aux extrémités leurs mesures respectives. Comme nous l'avons vu, il n'y de rapport externe ni entre t et T, ni entre T et D, ni entre D et d. Par contre, aux deux bouts de la chaîne se trouvent des mesures, et donc des nombres. Or nous savons bien ce que veut dire un rapport de deux nombres.

Décidons d'ignorer les deux maillons internes, et passons directement d'une mesure à l'autre comme ceci

$$t \longleftrightarrow d. \tag{3}$$

Cette fonction est donc représentable par un rapport externe. Ce rapport dépend des unités choisies. Pour s'en souvenir, il est utile de l'exprimer en rappelant celles-ci. Il s'exprimera par exemple en m/s ou en km/h. Ainsi, par le truchement des mesures, une fonction linéaire reliant des grandeurs de natures différentes et qui ne possédait pas de rapport externe, en retrouve un. L'inconvénient est qu'il change selon les unités de mesure choisies.

Il se fait que la fonction (3), en plus d'être représentable par un rapport externe comme on vient de le voir, conserve aussi les sommes et les rapports internes. Elle est une fonction linéaire.

Nous ne nous appesantirons pas ici sur les changements d'unités, qui en fait définissent de nouvelles fonctions linéaires, appliquant cette fois des mesures sur des mesures. Par exemple, si t représente une mesure du temps dans une certaine unité et t' dans une autre, on a une fonction linéaire du type

$$t \longleftrightarrow t'.$$

Et si on change aussi d'unité dans la mesure des distances, on est amené à considérer une chaîne de fonctions linéaires du type

$$t' \longleftrightarrow t \longleftrightarrow T \longleftrightarrow D \longleftrightarrow d \longleftrightarrow d'.$$

On trouve une chaîne analogue lorsque, au lieu de compléter la chaîne

$$t \longleftrightarrow T \longleftrightarrow D \longleftrightarrow d$$

en envisageant des changements d'unités, on songe à représenter graphiquement le mouvement, ce qui nécessite le choix d'une unité de longueur pour représenter l'unité de temps, et le choix aussi d'une unité de longueur pour représenter l'unité de longueur (sur le terrain).

5 Fonctions numériques

Si maintenant nous nous plaçons dans l'univers des nombres, sans plus regarder du côté des grandeurs, nous pouvons sans peine définir des fonctions qui appliquent des nombres sur des nombres. Ces fonctions seront linéaires si elles conservent la somme et les rapports internes, notions qui ne nous causent aucun problème lorsqu'il s'agit de nombres. Ces fonctions sont toutes représentables à l'aide d'un rapport externe et sont de la forme

$$x \longleftrightarrow ax,$$

où a est le rapport externe[7].

Pour conclure ce chapitre, récapitulons les types de fonctions que nous y avons étudiées. Dans les premiers exemples, nous avons appliqué un ensemble de grandeurs sur lui-même : c'étaient d'abord des segments, puis des corps pesants. Ensuite nous avons appliqué un ensemble de grandeurs sur un autre : des intervalles de temps sur des distances. Après, nous avons envisagé la mesure : elle applique un ensemble de grandeurs sur l'ensemble des nombres positifs. En arrivant aux grandeurs mesurées, nous avons appliqué des mesures sur des mesures, c'est-à-dire des nombres (positifs) sur des nombres (positifs), mais chaque nombre renvoyait à une grandeur. Enfin nous avons appliqué abstraitement des nombres sur des nombres, en oubliant les grandeurs.

[7] Si dans un enseignement de mathématiques on situe l'étude des fonctions dans le seul univers numérique, on passe sous silence toute la problématique des fonctions de grandeurs et des mesures. On laisse ainsi échapper tout un pan de la genèse des mathématiques et des relations de cette discipline avec le monde réel. On enferme l'esprit des élèves dans un univers clos, ce qui a pour effet d'éteindre leur curiosité et de brider leur imagination.

17

Repérages

Être à l'aise dans l'espace, c'est entre autres savoir reconnaître et communiquer où est un point. Par exemple dans une maison, un jardin, dans une pièce, une armoire, sur une étagère. Aussi dans une ville ou un pays, et alors en se servant d'un plan, d'une carte. Quand on n'a pas besoin d'une grande précision, on utilise un quadrillage avec quelques chiffres et lettres. Ceci est déjà vrai pour le combat naval, les mots croisés, le jeu d'échec,... et l'est encore pour les plans de villes.

Se repérer dans la vie quotidienne, c'est pouvoir retrouver et exprimer la position d'un endroit connu. C'est aussi pouvoir trouver la position d'un endroit qui n'est pas encore connu. Pour cela, on se sert d'un itinéraire qui indique comment l'atteindre à partir d'un endroit connu.

Les problèmes de repérage sont variés, selon qu'ils font intervenir des points, des distances, des angles, des itinéraires. Dans les sections 1 et 2, nous donnons une idée de cette variété, qu'un enseignement de géométrie doit prendre en compte. Dans le reste du chapitre, nous fixerons notre attention sur les problèmes de repérage d'un point sur une droite, puis dans le plan et l'espace, problèmes qui nous rapprocherons de la notion d'espace vectoriel.

1 Exprimer une position

Sur un plan ou une carte géographique, qui sont toujours bornés, on peut se tirer d'affaire avec deux demi-axes positifs. Ou alors on utilise des coordonnées polaires (r, θ) avec $r \geq 0$ et $0° \leq \theta \leq 90°$. On repère un point sur une carte d'une manière ou d'une autre selon le problème posé. Dans l'artillerie anglaise, on repère l'objectif sur une carte munie d'une grille carrée dont chaque carré a un km de côté (et qui n'est qu'approximativement raccordée aux méridiens et parallèles), et on repère l'angle et la distance du tir en coordonnées polaires. Les deux systèmes font bon ménage.

Dans certains cas, il y a un zéro naturel qui fait apparaître des nombres négatifs. Par exemple, le zéro des températures, le niveau du sol, celui de la mer... Il y aussi des zéros d'origine culturelle : la naissance du Christ. Personne n'imaginerait reculer l'origine des temps avant la formation de la terre pour n'avoir que des dates positives. De plus, si l'axe des temps historiques est borné, il est infini en puissance. L'éternité a toujours hanté l'imagination des hommes. Comme on le voit, les notions de repérage et de position dépassent le cadre purement géométrique !

On est aussi amené à repérer un point sur une sphère : par exemple sur la sphère terrestre à l'aide des coordonnées géographiques. Et revoici les *relatifs* désignés cette fois selon le cas par O et E pour les longitudes, et par N et S pour les latitudes.

Par rapport à la sphère terrestre ou à un globe qui la représente, on est *à l'extérieur.* Mais on est *à l'intérieur* de la sphère céleste, et à l'extérieur d'un globe qui la représente (sauf si on va au Planétarium). Repérer un astre sur la demi-sphère céleste que l'on voit à un moment donné se fait par l'*azimut* (de 0° à 360° en partant du nord vers l'est), et par la *hauteur* (de 0° à 90° en partant de l'horizon). Sur un globe qui représente le ciel tout entier, les coordonnées sont comptées plus naturellement en se basant sur l'équateur céleste (qui est déterminé par celui de la terre) ou sur l'écliptique (qui est déterminée par le mouvement de la terre autour du soleil).

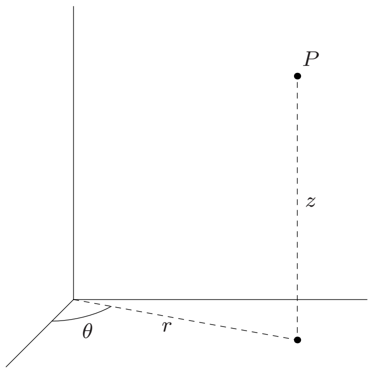


Fig. 1

On peut aussi repérer un point sur un tore (un anneau), sur un ruban de Möbius, sur d'autres surfaces,...

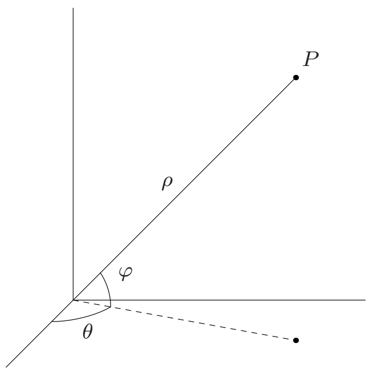


Fig. 2

Quand on passe du plan de la ville, de la carte géographique au plan de la géométrie, on passe du fini à l'infini. Alors on ne peut plus se passer de discerner les positifs et les négatifs, ou si on veut les rouges et les noirs. Déjà sur une droite, si on veut localiser *tous* les points, on doit mettre une origine quelque part. Et comme la droite n'a pas de bouts, on ne peut pas dire qu'on va mettre l'origine à un bout ! C'est une expérience frappante. Dans le plan, on aura le choix entre les deux coordonnées cartésiennes et les deux coordonnées polaires. Dans l'espace, on peut repérer avec trois coordonnées cartésiennes, mais aussi avec trois coordonnées cylindriques (figure 1) ou avec trois coordonnées sphériques (figure 2). Dans les coordonnées cylindriques, on projette le point sur un plan (dit horizontal) et sur un axe (vertical). La projection dans le plan est repérée par des coordonnées polaires. Pour repérer le point en coordonnées sphériques, on fait se succéder deux « changements de cap » : le premier part d'un axe horizontal et se fait dans un plan horizontal (angle θ), le second se fait dans un plan vertical (angle φ). En un point de la terre, on compte l'azimut à partir du nord et en allant vers l'est dans le plan horizontal, et la hauteur en montant à partir de l'horizontale.

Maintenant pourquoi repérer *tous* les points d'une droite, d'un plan, de l'espace ? *Pratiquement,* il n'y a aucune raison. Théoriquement, dès que l'on veut écrire l'équation d'une droite ou d'une parabole, il faut passer par là. La géométrie analytique se pointe. . .

Il n'y a pas non plus de raison *immédiate* pour calculer avec les nombres qui repèrent un point. Par contre calculer sera nécessaire quand on s'intéressera aux changements de position. Vouloir changer de repère est une autre raison majeure de calculer. Mais cela également s'apparente aux changements de position.

2 Dicter un itinéraire

Les itinéraires comportent deux types de mouvements : suivre une direction et changer de direction. Une première observation s'impose. En effet on peut suivre ou communiquer un itinéraire en le rapportant soit à la personne , soit à l'environnement. Dans le premier cas, on dira « avance de tant, puis tourne à gauche d'un quart de tour, etc. », et dans le second « dirige-toi vers ce clocher, et quand tu arrives à telle maison, prends le sentier qui va vers le bois, etc. » Souvent d'ailleurs, on mélange les deux types de description. Mais la distinction entre les deux est significative, et selon le destinataire, un message sera mieux compris que l'autre. Certaines personnes circulant carte en main, éprouvent le besoin d'orienter la carte comme le terrain qu'elles parcourent, tandis que d'autres rétablissent mentalement l'orientation.

La technique pour dicter un itinéraire varie selon les circonstances. En navigation (ou quand on marche à la boussole) il y le *cap* (de 0 à 360 degrés à partir du nord dans le sens horlogique), et le *changement de cap.* Dicter un itinéraire dans une ville américaine revient à dire : tant de blocs à gauche, à droite. Tous les changements de cap sont de 90 degrés.

Par ailleurs, dicter un itinéraire en ne donnant que des distances alternant avec des changements de cap de 90° – ce qui revient à donner des composantes (de vecteur) dans un repère orthogonal – n'est en général pas naturel : cela détourne l'attention du chemin le plus court (la droite, quoique pas dans un ville !) et fait intervenir un élément arbitraire : le repère. C'est pourtant cette manière de faire qui est à la base du calcul sur les coordonnées cartésiennes.

On peut encore dicter un itinéraire dans le ciel, pour trouver une étoile en partant d'une constellation connue ; ou sur la terre (on découvre alors le problème du plus court chemin sur la sphère) . On peut dicter un itinéraire sur un anneau ; aussi sur un cube, un autre polyèdre. Communiquer un itinéraire commence très tôt dans la vie. Et cela va au moins, pour ceux qui étudient la géométrie différentielle, jusqu'à trouver l'équation d'une géodésique sur une surface.

En passant de la géographie à la géométrie, on laissera tomber beaucoup d'éléments utiles à la description concrète d'un itinéraire. Les éléments du paysage géographique ou historique (« rappelle-toi… nous sommes passés par là l'an dernier ») cèdent la place aux modifications des coordonnées.

Changer de position fait donc apparaître le calcul. Les coordonnées de la nouvelle position peuvent être calculées à partir de celles de l'ancienne et de l'itinéraire. On peut aussi enchaîner deux ou plusieurs itinéraires. Dans le premier cas, on combine deux choses différentes : une position et un changement de position. Dans le deuxième cas, on combine deux changements de position. On peut ramener – de manière plus ou moins naturelle – le premier cas au deuxième en remarquant que la position peut toujours être spécifiée par un itinéraire : celui qui amène de l'origine à cette position.

Les manières de repérer une position et de décrire un itinéraire conduisent à des calculs plus ou moins faciles pour repérer la nouvelle position. Un bateau se trouve à 20° de longitude ouest et 30° de latitude nord. Il suit un cap de 35° est durant 200 milles. Trouver sa nouvelle position n'est pas si facile… Par contre si quelqu'un est au coin de la 17e rue et de la 8e avenue à New-York et qu'il se déplace de 3 blocs vers le nord et de 5 blocs vers l'est, il est facile de déterminer sa destination, pour peu que l'on connaisse le sens des numérotations. Il s'agit ici d'additions (ou de soustractions).

3 Repérer sur une droite

Passons maintenant à la question du repérage sur cet objet infini qu'est la droite de la géométrie.

Pour repérer un point P sur une droite, trois éléments sont nécessaires :

1. Il faut d'abord se choisir sur la droite un point O, qu'on appelle *l'origine*, à partir duquel on indique la position du point.
2. L'origine sépare la droite en deux demi-droites qu'il faut distinguer pour pouvoir indiquer dans laquelle se trouve le point P. C'est ce qu'on appelle *orienter la droite* (cf. le chapitre 20 à la page 282). Dans le cas particulier où la droite est horizontale et située dans un plan frontal devant l'observateur, on distingue la partie gauche de la partie droite. Si elle est verticale, on parle de la partie du dessus et de celle du dessous. Dans la cas général, on peut choisir un point dans une des deux parties. Il y a alors la partie où se trouve ce point, et l'autre.
3. On choisit ensuite une unité de mesure des longueurs et on indique l'éloignement du point P par rapport à l'origine O au moyen de la mesure du segment $[OP]$. On peut combiner ceci avec le point précédent en choisissant un point U qui

détermine à la fois l'orientation de la droite et l'unité de mesure. L'*abscisse* du point P est alors la mesure, munie d'un signe, de $[OP]$ avec $[OU]$ comme unité. On met le signe $+$ si P et U sont sur la même demi-droite, et le signe $-$ dans le cas contraire. On parle alors des parties *positive* et *négative* de la droite.

Caractériser le passage d'un point de la droite à un autre revient alors à caractériser la modification d'abscisse. Le changement de position est donné par la *différence entre l'abscisse du point d'arrivée et celle du point de départ.* Pour faciliter l'expression, supposons la droite horizontale et appelons positif le côté droit. Si l'on se déplace vers la droite, l'abscisse augmente ; la différence des abscisses est positive. Dans le cas contraire l'abscisse diminue ; la différence des abscisses est négative.

Le repérage des positions a déjà fait apparaître les relatifs ; les changements de position les font apparaître à nouveau, mais sans origine (on reconnaît des vecteurs libres à une dimension[1]).

L'arrivée du signe a donc deux origines bien distinctes : la première est l'impossibilité de situer un point sur une droite sans avoir choisi une origine, qui détermine *deux* demi-droites ; la seconde est le fait qu'on peut faire se mouvoir un point donné (éventuellement à vue, sans usage d'une abscisse) dans un sens ou dans l'autre. Même si ces deux choses sont liées, elles sont différentes . Pour nous en rendre compte, revenons pour un moment aux grandeurs et aux variations de grandeurs, analogues aux positions et aux variations de position. On y trouve la seconde modalité du signe en l'absence de la première : les grandeurs sont toutes positives par nature, mais les variations de grandeur, elles, ont un signe. Nous y reviendrons dans la suite.

On ne voit pas de motif pour combiner deux positions, mais par contre combiner deux changements de position est naturel : si combiner deux abscisses n'a pas de sens, enchaîner deux changements de position en a un. On reconnaît déjà le doublet *vecteur libre, vecteur lié,* qu'on va retrouver dans le plan et dans l'espace. On découvre une nouvelle somme, celle des changements de position. Mais pourquoi parler de *somme* lorsqu'il s'agit d'enchaîner des changements de position ? Parce que, lorsque les deux changements se font dans le même sens, il s'agit d'une somme au sens ordinaire (au sens habituel dans les grandeurs et les nombres positifs).

L'abscisse apparaît comme un objet ; le nombre qui dicte le changement de position apparaît comme un opérateur additif sur cet objet : il ajoute un relatif à une abscisse. La locution changement de position renvoie elle-même à cette situation mixte : il y a position, puis changement.

On peut aussi envoyer un point tant de fois plus loin ou plus

[1] Les allusions aux vecteurs, ici et plus loin dans cette section, ne sont certainement pas faciles à saisir. Cette difficulté est commentée à la fin de la section.

près de l'origine, dans un sens ou l'autre. Pour cela, on multiplie son abscisse par un nombre (relatif). Voilà un nouveau type d'opérateur, multiplicatif, sur cet objet qu'est l'abscisse. En fait il opère des homothéties dont le centre est à l'origine.

On peut aussi multiplier un changement de position par un relatif pour l'amplifier, le diminuer, en le retournant ou non. Et si on continue à voir le changement de position comme un opérateur, voici donc un opérateur qui opère sur un opérateur. C'est un opérateur multiplicatif qui opère sur un opérateur additif.

Cet opérateur multiplicatif respecte les additions de changements de position. Soient a et b deux changements de position et α un nombre . On a :

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$$

La fonction qui, à un changement de position a, fait correspondre le changement de position αa est donc une fonction linéaire.

En résumé, en repérant des points sur la droite et en effectuant des changements de position, nous avons rencontré des nombres positifs et négatifs. Ces nombres ont des rôles divers :

– ce sont des objets (abscisses) ;
– ce sont des opérateurs additifs (changements de position) qui opèrent sur des objets (ils changent les abscisses de tant ou tant) ;
– ce sont des opérateurs multiplicatifs (homothéties) qui agissent sur des objets (ils multiplient les abscisses par tant ou tant) ;
– ce sont des opérateurs multiplicatifs qui agissent sur des opérateurs additifs (ils multiplient les changements de position par tant ou tant).

Pour faire un espace vectoriel, il faudra mettre bon ordre à tout cela. Il faudra, d'une manière ou l'autre, identifier les objets et les opérateurs additifs : ce seront les vecteurs. Les opérateurs multiplicatifs s'identifieront alors automatiquement aux scalaires. Ceci ne signifie pas que pour voir la droite comme un espace vectoriel, il faudrait supprimer toutes les facettes de ces objets et opérateurs, et n'en garder qu'une au mépris des autres. Ce n'est que la *théorie* de la droite comme espace vectoriel qui aurait une fâcheuse tendance à tuer ces nuances.

Il faut relever une réelle difficulté à concevoir la droite des nombres comme un espace vectoriel sur le corps des réels : en effet, par opposition à ce qui se passe dans le plan ou l'espace (voir section 4), les scalaires et les vecteurs se ressemblent ici beaucoup : tous sont des nombres. D'où la difficulté de les discerner. La seule différence entre eux est que les premiers sont des opérateurs qui agissent sur les seconds[2].

[2] Cette discussion sur la droite comme espace vectoriel éclaire les embarras bien connus que rencontrent les élèves

4 Repérer dans le plan et l'espace

Passons maintenant de la droite au plan et à l'espace, en nous concentrant sur les repérages cartésiens (par opposition à ceux de type polaire). Pour repérer la position d'un point, on projette celui-ci sur deux ou trois axes de directions distinctes. Les coordonnées sont alors données par un couple ou un triple de nombres. Ce sont les abscisses des projections du point sur les axes. L'origine est à l'intersection des axes, qui doivent bien entendu être orientés. On adopte souvent des axes perpendiculaires, orientés horizontalement et verticalement, avec les positifs vers la droite sur l'axe horizontal et vers le haut sur l'axe vertical.

Les changements de position se codent de la même manière que les positions. Il leur correspond donc également deux ou trois nombres. Chacun d'eux mesure la variation de position des projections sur un des axes.

Comme dans le cas de la droite, combiner des positions n'a pas de sens. Par contre appliquer des changements de position à des positions ou enchaîner des changements de position sont des actions qui ont du sens.

L'opération qui consiste à enchaîner plusieurs changements de position s'appelle ici aussi *addition*. On peut justifier (rendre plausible) cette utilisation du signe + de deux manières. D'abord, si les changements de position sont alignés, on retrouve l'addition telle qu'elle a été définie sur la droite. Ensuite, on peut travailler composante par composante. Les composantes sont des projections sur une droite. Si on enchaîne deux changements de position, les projections s'enchaînent ; la projection de l'enchaînement des deux changements de position, c'est la somme de leurs projections. Par exemple, pour deux changements de positions $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_1, b_3)$ dans l'espace, on a

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_1, a_3 + b_3).$$

Autrement dit, les projections conservent la somme (c'est-à-dire les enchaînements) : ce sont des fonctions linéaires. D'ailleurs, la conservation de la somme s'applique aussi à la projection d'une somme non pas sur une droite mais sur un plan.

On peut aussi appliquer un opérateur multiplicatif aux coordonnées ou aux changements de position. Comme dans le cas de la droite, ils opèrent des homothéties sur les points, et amplifient ou diminuent en les retournant éventuellement les changements de position. Ici la distinction entre opérateurs (scalaires) et changements de position (vecteurs) est claire. Les premiers sont des nombres, les deuxièmes sont des couples ou des triples de nombres.

---

lorsqu'ils doivent s'habituer aux divers statuts des nombres. Ceux-ci sont en effet, selon les circonstances où on les rencontre, des mesures ou des opérateurs additifs ou multiplicatifs. On se souviendra ici des controverses sur le statut des deux facteurs d'un produit : le multiplicande et le multiplicateur, et l'ordre dans lequel on les énonce.

Les projections préservent ces opérateurs : la projection sur un axe de α fois a est α fois la projection de a. Par conséquent, on peut faire agir les opérateurs multiplicatifs composante par composante :

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Ici aussi les opérateurs multiplicatifs préservent la somme (enchaînement) des changements de position :

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$$

5 Généraliser les rapports

Au chapitre 16, nous avons parlé des grandeurs et des fonctions linéaires définies sur un domaine de grandeurs. Ces fonctions étaient celles qui conservaient les rapports internes et étaient caractérisées par un rapports externe. Dans ce chapitre, nous avons examiné les repérages de points et les changements de position, mais nous n'avons pas encore introduit les fonctions linéaires appliquées à ces nouveaux objets. Nous nous occuperons de cela un peu plus tard (voir chapitre 18). Mais pour y arriver, un préalable est nécessaire : que devient la notion de rapport lorsqu'on passe des grandeurs aux positions et changements de position, sur une droite d'abord, et ensuite dans le plan et l'espace ?

Regardons d'abord la droite. Le rapport entre deux abscisses sur une droite n'a guère de sens. Par contre, il est raisonnable de se poser la question du rapport entre deux changements de position. On dira assez naturellement que ce changement-ci est le double de celui-là, que tel autre est l'opposé du premier... Le rapport entre deux changements de position peut donc s'exprimer au moyen d'un nombre positif ou négatif ; positif si les deux changements de position ont même sens, négatif sinon. Comme dans le cas des grandeurs, les rapports sont intiment liés aux opérateurs multiplicatifs : dire que le rapport entre a et b vaut -2, c'est dire que a vaut -2 fois b, c'est-à-dire que a est opposé à b et a une « amplitude » double de celle de b. De manière générale,

$$\text{dire que } \frac{a}{b} = \alpha \text{ revient à dire que } a = \alpha b.$$

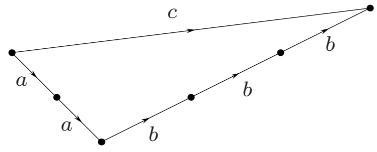


Fig. 3

Lorsque l'on se trouve dans le plan ou l'espace, il se peut que deux variations de position soient parallèles. Elles ont alors un rapport comme dans le cas de la droite. On peut dire que l'une est multiple de l'autre, ou encore que l'une peut s'exprimer en fonction de l'autre. Lorsque les deux variations ne sont pas parallèles, rien ne permet d'exprimer l'une en fonction de l'autre, de trouver un rapport entre les deux. Par contre, lorsque l'on en a trois, il est éventuellement possible d'en exprimer une en fonction des deux autres. La figure 3 montre par exemple une façon naturelle de représenter c en fonction de a et de b : on a $c = 2a + 3b$. On dit alors que c est *combinaison linéaire* de a et de b. *Ainsi la notion de rapport ne se généralise pas telle qu'elle à tous les changements de position dans le plan ou l'espace, mais celle de multiple se généralise par les combinaisons linéaires.*

Revenons aux grandeurs. Dans chaque domaine de grandeurs, le choix d'une unité U, c'est-à-dire d'une grandeur particulière, suffit pour exprimer toutes les autres. La mesure α d'une grandeur A avec l'unité U est le rapport entre A et U. On écrit alors $A = \alpha U$. Pour les changements de position sur une droite, le choix d'une unité est à nouveau suffisant pour exprimer toutes les variations de position (comme multiples de l'unité). Dans le plan, il faut – et c'est d'ailleurs suffisant – avoir au moins deux changements de position a et b non parallèles pour pouvoir retrouver n'importe quel changement de position comme combinaison linéaire de a et b. Choisir une « unité » dans le plan, c'est donc choisir deux changements de position non parallèles. C'est ce qu'on appelle une *base*. Dans l'espace, pour avoir une base, il en faut trois qui ne se trouvent pas dans le même plan et dont deux ne sont pas parallèles.

Nous avons vu que les fonctions linéaires entre domaines de grandeurs sont des fonctions qui préservent la somme des grandeurs et les rapports internes. Poursuivant la généralisation qui vient d'être faite, nous verrons dans le chapitre 19 à la page 274 que les fonctions linéaires sont celles qui préservent les combinaisons linéaires (et en particulier les sommes puisque celles-ci sont des combinaisons linéaires particulières).

18

Vecteurs

D'assez nombreuses entités géométriques ou physiques ont une grandeur, une direction et un sens sur cette direction. Tel est le cas des déplacements rectilignes d'un point, des translations, des forces, des vitesses. La notion mathématique de vecteur sert communément à représenter ces entités.

Mais les vecteurs[1] ne sont pas seulement des objets mathématiques ayant eux aussi une grandeur, une direction et un sens. Ils obéissent en plus à des règles précises concernant la façon de les additionner et de les multiplier par un nombre. Nous ne rappellerons pas ces règles ici.

Par ailleurs, les déplacements rectilignes d'un point, les translations, les forces et les vitesses peuvent aussi être combinées pour former des « sommes » et être multipliées par un nombre. Le tout est de savoir si ces opérations sont fidèlement représentées par les opérations conventionnelles sur les vecteurs.

Nous consacrons ce chapitre à montrer que les vecteurs représentent fidèlement certaines notions géométriques et physiques, et moins fidèlement certaines autres.

Nous partirons en considérant des *flèches* (ou segments orientés) parce qu'une flèche est la représentation familière la plus banale de toute entité qui possède grandeur, direction et sens. Au cours de l'exposé, nos flèches n'auront pas un statut mathématique stable. Dans certains cas, une flèche sera attachée à un point fixe (son origine). Dans d'autres, elle sera attachée à un point mobile (par exemple lorsqu'elle représentera une vitesse). Dans d'autres cas encore, la flèche sera considérée comme un objet librement transportable d'un lieu à un autre, à la seule condition de ne changer dans le transport ni sa grandeur, ni sa direction, ni son sens. Nous préciserons chaque fois l'acception que nous donnerons au mot flèche. Étant donné qu'il s'agit d'un mot à acception variable, nous ne proposons nullement d'en faire, entre autres pour l'enseignement, un terme consacré.

[1] Nous parlons ici des vecteurs géométriques élémentaires, et non des éléments d'espaces vectoriels plus généraux (les espaces de fonctions par exemple).

1 Variations de position ou translations

Considérons une flèche (un segment orienté) sur une droite. Nous pouvons l'utiliser pour commander une variation de position d'un point. Montrons la manœuvre. Soit un point ; nous faisons glisser la flèche sur la droite de sorte que son origine coïncide avec le point, puis nous envoyons celui-ci à l'extrémité de la flèche. Dans cette perspective, une flèche est considérée comme capable de commander un changement de position d'un point quelconque[2].

Voyons maintenant ce qui arrive si on passe de la droite au plan. Dans le plan aussi, une flèche peut représenter la commande d'une variation de position applicable à un point quelconque. Quel que soit le point de départ choisi, on glisse la flèche de sorte que son origine vienne sur le point, puis on envoie le point sur son extrémité. Bien entendu, lorsqu'on déplace la flèche, on ne change ni sa direction, ni son sens, ni sa longueur.

Un variation de position dans un plan a pour effet une translation de celui-ci : dans une translation, *tous les points* avancent dans telle direction, de telle longueur, dans tel sens.

On compose deux variations de position (ou deux translations) en les enchaînant et on dit que la variation de position résultante est *la somme* des deux autres. Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux variations de position (figure 1(a)). La somme $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ s'obtient en mettant les deux flèches bout à bout et en considérant la flèche qui va de l'origine de $\overrightarrow{a}$ à l'extrémité de $\overrightarrow{b}$ (figure 1(b)).

Fig. 1 (a,b)

On définit aussi la multiplication d'une variation de position (d'une translation) par un nombre réel : on multiplie la longueur de la flèche par la valeur absolue de ce nombre et, si le nombre est négatif, on inverse le sens de la flèche. Si $\overrightarrow{a}$ est la variation de position et si α est le nombre, le résultat de cette opération se note $\alpha\overrightarrow{a}$.

Ces deux opérations munissent l'ensemble des variations de position dans un plan d'une structure d'espace vectoriel. Nous ne rappelons pas ici la démonstration de ce fait.

Notons toutefois qu'une des propriétés de l'espace vectoriel est que, pour toutes les variations de position $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et tout

[2] Au lieu de considérer une flèche capable d'agir sur un point quelconque de la droite, on pourrait évidemment *attacher une flèche à un point déterminé* et considérer qu'elle commande un changement de position de ce seul point. Nous examinerons cette possibilité à la section 3.

nombre α, on a

$$\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}. \tag{1}$$

La multiplication par α de toutes les variations de position envoie l'ensemble de ces variations sur lui-même ou si on veut l'ensemble des translations sur lui-même. L'équation (1) montre que cette application est linéaire, puisque l'image d'une somme est la somme des images. Nous verrons à la section 5 qu'il existe des applications linéaires de l'ensemble des variations de position sur lui-même, bien différentes de celle-là.

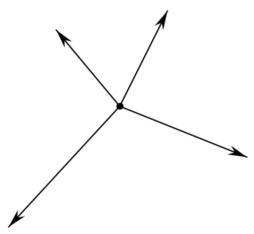


Fig. 2

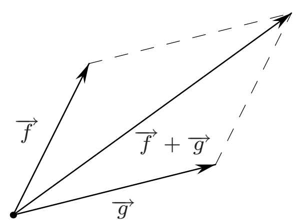


Fig. 3

2 Forces appliquées en un point

Considérons un point soumis à diverses forces : par exemple, on noue des ficelles en un point, et on tire plus ou moins fort sur chacune. La figure 2 représente cette situation par des flèches : chaque flèche a la direction d'une ficelle, et sa longueur est proportionnelle à l'intensité de la force mesurée dans une unité donnée (par exemple le newton ou le kilo-force).

On dit d'un point qui demeure immobile qu'il est *en équilibre*[3]. Une question qui vient naturellement à l'esprit à propos de notre nœud, est de savoir à quelles conditions, s'il est en équilibre avant l'application des forces, il demeure en équilibre après.

Pour exprimer la condition d'équilibre, il faut définir la somme des forces. La somme $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ de deux forces correspond à la flèche diagonale du parallélogramme défini par $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ (figure 3). C'est la loi dite *du parallélogramme des forces*[4].

L'expérience montre que le nœud demeure en équilibre si la somme de toutes les forces appliquées est nulle.

Une variation de position, au sens où nous l'avons entendu, pouvait être représentée par une flèche située n'importe où dans le plan. Nous n'accordons pas une telle liberté à la flèche représentant une force : dans le problème d'équilibre que nous considérons, la force n'a de sens qu'attachée au point. Et heureusement la somme de deux forces, telle que nous l'avons définie, est encore attachée au point.

Nous pouvons bien entendu définir la produit d'une force par un nombre réel α : cela revient à multiplier l'intensité de la force par la valeur absolue de α et, si α est négatif, à tirer avec le fil dans la même direction, mais dans le sens opposé.

L'ensemble des forces que l'on peut appliquer sur un point, avec la somme et le produit par un nombre que nous venons de définir, constitue aussi un espace vectoriel. À nouveau, nous ne donnons pas ici la démonstration de ce fait.

[3] Dans un exposé élémentaire comme celui-ci, nous ne jugeons pas utile de préciser qu'un équilibre ne peut se définir que par rapport à un repère.

[4] Nous passons sous silence ici les cas particuliers où certaines des forces sont soit nulles, soit de même direction.

Les deux espaces vectoriels présentés jusqu'ici, celui des variations de position et celui des forces appliquées en un point, peuvent être mis en correspondance fidèle l'un avec l'autre. Ils sont des modèles de la même structure.

Comme nous allons le voir maintenant, tout ce qui est représentable par des flèches, c'est-à-dire tout ce qui possède direction, sens et grandeur, n'est pas *naturellement* (c'est-à-dire en respectant la nature des choses) doté d'une addition et d'un produit par un nombre conduisant à une structure d'espace vectoriel. Donnons-en maintenant quelques exemples.

3 Déplacement d'un point

Ci-dessus, nous avons défini la variation de position comme applicable à *un point quelconque du plan*, ce qui nous donnait la liberté de le représenter par une flèche dessinée n'importe où.

Supposons maintenant que nous considérions le déplacement d'*un* point. Pour caractériser ce déplacement, nous faisons partir une flèche du point en question, et faisons aboutir l'extrémité de la flèche à l'endroit où il doit arriver. Nous refusons cette fois de déplacer la flèche, car *elle concerne ce seul point.*

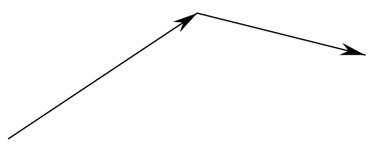


Fig. 4

Dans l'idée de créer une somme de deux changements de position (d'un seul point), enchaînons maintenant deux mouvements de ce type. Il faut que l'origine de la deuxième flèche coïncide avec l'extrémité de la première, comme le montre la figure 4. Il serait en effet absurde d'enchaîner deux déplacements comme ceux que montre la figure 5, car quel que soit l'ordre dans lequel on les considère, le point de départ du second ne coïncide pas avec le point d'arrivée du premier.

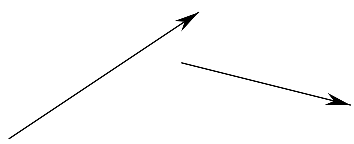


Fig. 5

Donc si nous cherchons à faire correspondre une somme à l'enchaînement de deux déplacements de ce type, nous devons bien reconnaître que cette somme ne sera pas définie pour deux flèches quelconques. Qui plus est, lorsque la somme est définie, comme sur la figure 4, elle ne commute pas. Pour ces raisons et pour quelques autres[5], les flèches liées à leur origine sont impropres à la constitution d'un espace vectoriel.

4 Équilibre d'un corps solide

Considérons maintenant un corps solide sur lequel on tire avec des ficelles. La figure 6 à la page suivante en montre deux exemples : le premier a la forme d'une tige, et le second est de forme quelconque. Chaque ficelle est attachée en un point et la longueur de la flèche correspondante est proportionnelle à l'intensité de la force appliquée. Il serait assez difficile d'imaginer

[5] Le lecteur est invité à identifier les autres propriétés de base d'un espace vectoriel qui ne sont pas satisfaites par des déplacements liés à un point.

que l'on déplace la flèche, car la ficelle tire sur un point déterminé du solide.

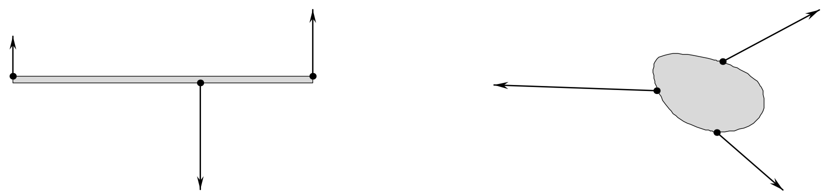


Fig. 6

Supposons le solide initialement au repos, ou comme on dit encore, en équilibre. À quelles conditions doivent satisfaire les forces pour qu'il demeure en équilibre ?

Première condition d'équilibre. – La première condition est que la « somme des forces » soit nulle. Mais qu'entendons-nous ici par la somme des forces ? Nous savons additionner des forces lorsque celles-ci sont toutes appliquées en un point. Tel n'est pas le cas ici. Pourtant, comme le prouve l'expérience, la première condition d'équilibre fait bien intervenir la somme au sens où nous l'avons définie : nous déplaçons *mentalement* toutes les flèches pour rassembler leurs origines en un seul point, et nous faisons la somme *comme si* toutes les forces étaient appliquées en ce point. Pour que le solide soit en équilibre, il faut (mais il ne suffit pas) que nous trouvions une somme nulle. Bien que la position des forces pose problème, on écrit cependant la première condition d'équilibre sous la forme[6]

$$\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{0}.$$

Deuxième condition d'équilibre. – La deuxième condition d'équilibre s'énonce comme ceci : la somme des moments, calculée en un point quelconque, des forces appliquées, est nulle. Que le lecteur qui n'a pas étudié la mécanique nous pardonne le caractère un peu technique de l'explication qui suit[7].

Le *moment* par rapport à un point 0 d'une force $\overrightarrow{f}$ appliquée en un point P est le produit vectoriel[8]

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f}.$$

La deuxième condition d'équilibre des solides de la figure 6 est donc

$$\overrightarrow{OP_1} \wedge \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{OP_3} \wedge \overrightarrow{f_3} = 0.$$

[6] Nous n'insistons pas sur le fait que l'associativité de la somme des forces appliquées en un point est requise ici.

[7] Rappelons que dans cette partie de notre étude, nous cherchons à cerner les avatars de la structure linéaire à travers l'apprentissage des mathématiques. Pour situer et orienter cet apprentissage vers la fin du secondaire, il faut bien regarder vers quoi il tend, ne serait-ce que pour certains étudiants, dans l'enseignement supérieur.

[8] On trouve des éclaircissements sur la notion de moment d'une force dans tous les cours de mécanique.

On le voit, les moments dépendent des points d'application des forces, ce qui renforce notre idée que celles-ci sont indéplaçables (sauf mentalement...) Si on change les points d'application des forces, on rompt en général l'équilibre du solide.

Notons toutefois que certains déplacements des forces ne rompent pas l'équilibre. Pour expliquer cela, supposons dans un premier temps que nous tirions directement sur certains points du solide (figure 7(a)). L'équilibre n'est pas rompu si nous tirons avec les mêmes forces, sur les mêmes points, mais en utilisant des ficelles de longueurs quelconques (figure 7(b)).

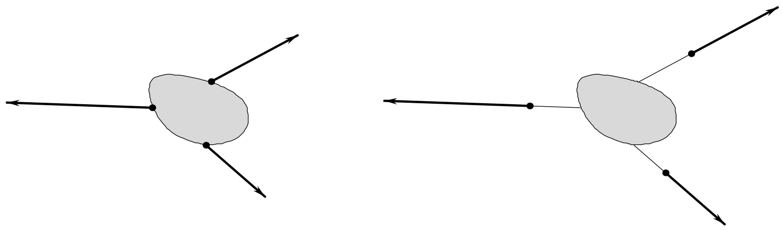


Fig. 7 (a,b)

La ficelle matérialise ce que l'on appelle la *ligne d'action* de la force. L'équilibre d'un solide n'est pas rompu si, comme on dit, on déplace les forces le long de leur ligne d'action.

Des flèches qui peuvent ainsi glisser le long d'une droite définissent ce que l'on appelle des *vecteurs glissants*. Un système de vecteurs glissants est appelé *torseur.*

Nous voici donc en présence de grandeurs orientées, représentées par des flèches, mais qui ne sont ni déplaçables en un point quelconque du plan, ni non plus toutes attachées en un point. L'ensemble de tous les vecteurs glissants possibles ne constitue pas un espace vectoriel. En effet, premier obstacle, on peut parfois, *mais non toujours*, définir la somme de deux vecteurs glissants. On peut les combiner selon la loi du parallélogramme, à condition que leurs lignes d'action se croisent. Pour ce faire, on tire les flèches jusqu'au point de croisement, et on fait la somme. Lorsqu'on fait cela, on ne rompt pas l'équilibre du solide. Mais si les lignes d'action ne se croisent pas, on ne sait même pas comment combiner les deux flèches, ni sur quelle ligne d'action on mettrait la somme.

Nous voilà donc une fois de plus avec des grandeurs orientées rebelles : elles refusent de se constituer en espace vectoriel.

Pourtant, nous l'avons vu, pour appliquer la première condition d'équilibre, *on fait comme si* les forces étaient des ... vecteurs libres. La structure d'espace vectoriel ressemble ici à un outil universel à tête multiple : il ne convient pas globalement aux systèmes de forces. Mais on peut se servir de la tête « addition » pour exprimer les conditions d'équilibre d'un solide. C'est une expérience de pensée, mais elle exprime aussi une loi physique.

5 Vitesses

Considérons un fleuve qui coule uniformément en ligne droite. Toutes les molécules d'eau sont animées de la même[9] vitesse $\overrightarrow{v_e}$. Le figure 8 représente le fleuve à un instant donné. Chaque flèche parallèle aux rives part d'une molécule et représente sa vitesse.

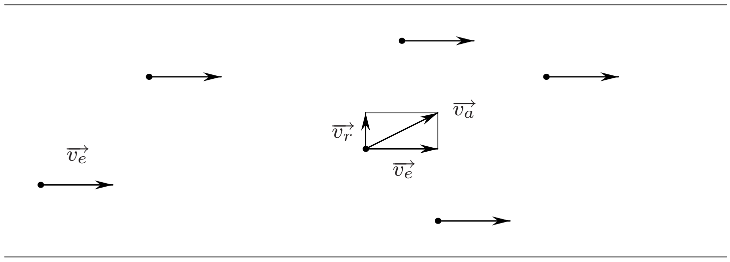


Fig. 8

Considérons un nageur N traversant le fleuve, et supposons qu'il maintienne, *par rapport à l'eau qui s'écoule*, une vitesse $\overrightarrow{v_r}$ constante et perpendiculaire au courant. Insistons sur le fait qu'il s'agit bien de la vitesse par rapport à la masse d'eau en mouvement. La flèche qui représente cette vitesse du nageur est donc aussi perpendiculaire aux rives du fleuve. Mais ce n'est pas la vitesse telle qu'un observateur à l'arrêt sur la rive peut la voir. En effet, le nageur est entraîné par le mouvement de l'eau. Sa vitesse par rapport à la rive est donnée par la loi du parallélogramme appliquée à $\overrightarrow{v_r}$ et $\overrightarrow{v_e}$. Désignons-la par $\overrightarrow{v_a}$. Nous avons donc

$$\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a}.$$

La vitesse $\overrightarrow{v_r}$ s'appelle *vitesse relative* du nageur (il faut entendre : relative au fleuve en mouvement), tandis que $\overrightarrow{v_e}$ est la *vitesse d'entraînement,* qui porte bien son nom. Quant à la vitesse $\overrightarrow{v_a}$, on l'appelle la *vitesse absolue.*

Quel est le statut des différentes flèches que nous venons de considérer ? Les flèches représentant $\overrightarrow{v_e}$ sont les mêmes partout : elles sont donc comparables aux flèches d'une translation. Toutefois, ceci cesserait d'être vrai si on considérait le fleuve non plus en ligne droite, mais en courbe.

La flèche représentant la vitesse du nageur est accrochée à un point, tout comme la force sur un point en équilibre. Mais ici le point est mobile !

Ainsi, les flèches représentant les vitesses ne renvoient fidèlement à aucun de nos deux modèles d'espace vectoriel, à savoir l'espace des translations et celui des forces appliquées en un point. Qui plus est la vitesse relative et la vitesse d'entraînement ne sont pas deux grandeurs homogènes : on ne peut donc pas définir une addition sur un ensemble qui contiendrait toutes les

[9] Nous négligeons ce qui se passe à proximité immédiate des rives.

vitesses que nous avons identifiées. Par exemple, cela n'a pas de sens d'additionner deux vitesses relatives, ou encore une vitesse relative et une vitesse absolue. Néanmoins, la loi du parallélogramme s'applique. À nouveau, la notion d'espace vectoriel apparaît comme cet outil à têtes multiples dont on utilise ici « la tête addition ».

19

Transformations linéaires

1 Des équations

Tant que l'on s'occupe de grandeurs ou de nombres, la notion de fonction linéaire est associée à celle de proportionnalité, et elle est assez simple. Lorsqu'on passe aux fonctions linéaires définies sur un espace à deux dimensions ou plus, la situation se complique et l'on assiste, en quelque sorte, à une explosion de phénomènes nouveaux. Essayons de voir d'où sortent ceux-ci, en comparant pas à pas ce qui se passe à une dimension avec ce qui se passe à deux[1].

D'abord, dans un espace à une dimension, il y a un vecteur de base $\overrightarrow{e}$. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque de l'espace. On aura

$$\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{e}, \tag{1}$$

où x est l'abscisse de $\overrightarrow{x}$. Soit $\overrightarrow{f}$ une fonction

$$\overrightarrow{f}\ : \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}). \tag{2}$$

Supposons que cette fonction soit linéaire. Cela signifie que quel que soit le nombre α et le vecteur $\overrightarrow{x}$,

$$\overrightarrow{f}(\alpha\,\overrightarrow{x}) = \alpha f(\overrightarrow{x}). \tag{3}$$

Ceci nous permet d'écrire en particulier que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(x\,\overrightarrow{e}) = x f(\overrightarrow{e}). \tag{4}$$

Les égalités (1) et (4) expriment la propriété familière : entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{e}$, il y a le même rapport qu'entre $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})$.

Pour caractériser la fonction, écrivons

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) = a\,\overrightarrow{e}, \tag{5}$$

où a est l'abscisse de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})$ dans la base $\overrightarrow{e}$. En nous servant de (5) pour transformer (4), nous obtenons

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = xa\,\overrightarrow{e}. \tag{6}$$

[1] Ce qui suit suppose une certaine familiarité dans le maniement des vecteurs et des fonctions.

Posons

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \tag{7}$$

et

$$\overrightarrow{y} = y\,\overrightarrow{e}. \tag{8}$$

L'égalité (6) devient

$$y\,\overrightarrow{e} = xa\,\overrightarrow{e}, \tag{9}$$

d'où nous tirons

$$y = ax. \tag{10}$$

Ainsi, dans la base $\overrightarrow{e}$, l'abscisse de $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ vaut a fois l'abscisse de x.

Ce développement un peu long – pour ce qu'il prouve – nous permet une comparaison point par point avec ce qui se passe à deux dimensions. Soit donc un espace à deux dimensions muni d'une base $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque de cet espace. On aura

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}, \tag{1'}$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées de $\overrightarrow{x}$.

Soit $\overrightarrow{f}$ une fonction

$$\overrightarrow{f}\ :\ \overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}). \tag{2'}$$

Supposons que cette fonction soit linéaire. Cela veut dire que, quel que soit les nombre α et β et les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$,

$$\overrightarrow{f}(\alpha\,\overrightarrow{x} + \beta\,\overrightarrow{y}) = \alpha\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \beta\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}). \tag{3'}$$

Ceci nous permet d'écrire en particulier que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}) = x_1\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_1}) + x_2\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_2}). \tag{4'}$$

Pour caractériser la fonction, écrivons

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_1}) & = & a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_2}) & = & a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}. \end{array} \tag{5'}$$

En nous servant de (5′) pour transformer (4′), nous obtenons

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = x_1(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2}) + x_2(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}). \tag{6'}$$

Posons

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \tag{7'}$$

et

$$\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}. \tag{8'}$$

L'égalité (6′) devient

$$y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overrightarrow{e_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overrightarrow{e_2}, \tag{9'}$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{10'}$$

Cette équation peut encore s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{11'}$$

Ainsi, dans la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, la fonction (ou l'application, ou la transformation) linéaire $\overrightarrow{f}$ est représentée par la matrice carrée ci-dessus. En passant de l'égalité (10) aux égalités (10′) et (11′), on commence à voir – quoique seulement au niveau de l'expression symbolique – la différence entre une fonction linéaire dans un espace à une dimension et une fonction linéaire dans un espace à deux dimensions.

2 Des phénomènes nouveaux

Essayons maintenant de cerner géométriquement la différence que nous venons de découvrir entre une et deux dimensions. Nous savons représenter la fonction donnée par (10), celle qui envoie x sur y, dans un système de deux axes orthogonaux. Le graphe de cette fonction est dans tous les cas une droite.

Comment représenter la fonction donnée par (11′) ? Elle envoie un point quelconque d'un espace à deux dimensions sur un point d'un espace à deux dimensions. Ainsi son graphe se situe dans un espace à quatre dimensions. L'infirmité de la nature humaine nous empêche de représenter quoi que ce soit à quatre dimensions. Il faut pourtant faire quelque chose pour ouvrir la forteresse (11′) et voir ce qu'il y a dedans.

Nous pouvons pour commencer dessiner un plan des x_1, x_2 et à côté un plan des y_1, y_2 (figure 1). Mais il se fait que *dans la plupart des cas*[2], chaque point du premier plan est envoyé sur un point du second, et que tout point du second est l'image d'un point du premier. Nous ne pouvons tout de même pas noircir complètement le premier plan et aussi le second, dans l'idée de montrer chaque point au départ et à l'arrivée.

Fig. 1

[2] Il s'agit des cas où la transformation n'est pas dégénérée, c'est-à-dire ne se ramène pas à une projection.

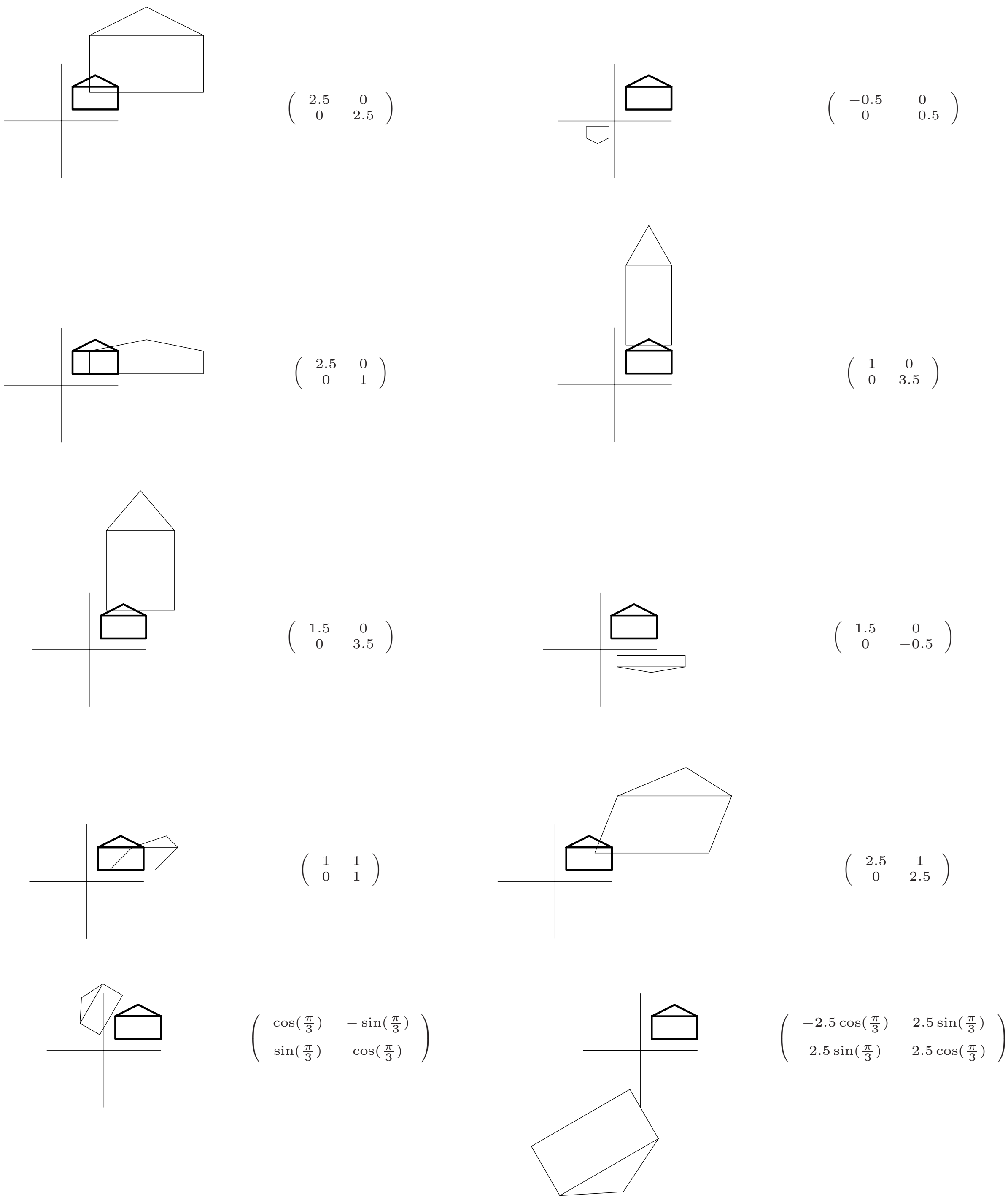
Puisqu'il est difficile de montrer ce que deviennent tous les points du plan, intéressons-nous à quelques-uns seulement. Plus précisément, dessinons d'abord un motif simple dans le plan. Et puisque la fonction $\overrightarrow{f}$ envoie le plan sur lui-même, dessinons sur la même figure le motif et son image. Bien entendu, nous obtiendrons un résultat différent selon les valeurs que nous choisirons pour les coefficients a_{ij}. La figure 2 à la page suivante illustre ainsi divers cas particuliers de la fonction $\overrightarrow{f}$. Le motif simple de départ est celui qui est dessiné en trait épais.

Cette figure suffit à montrer ce que nous avons annoncé : le passage de une à deux dimensions s'accompagne d'une explosion de phénomènes nouveaux.

Ce n'est pas ici le lieu d'en faire la théorie détaillée[3]. Cette théorie comporte la recherche des sous-espaces à une dimension qui, pour une transformation déterminée, sont appliqués sur eux-mêmes. On y définit les notions de vecteur propre et de valeur propre de la transformation.

Il s'agit-là de la partie centrale de l'algèbre linéaire à un nombre fini de dimensions. Par delà son intérêt intrinsèque, cette théorie débouche sur des applications nombreuses et variées. Elle sert de base dans l'étude des équations différentielles ordinaires (voir N. Rouche, J. Mawhin [1973]). On la retrouve dans la théorie des petites oscillations d'un système mécanique ainsi que dans la théorie des circuits électriques. On la retrouve aussi dans de multiples applications aux sciences économiques et sociales (la théorie des graphes, les chaînes de Markov, la programmation linéaire, la théorie des jeux,...). Voir à cet égard l'un ou l'autre manuel de mathématiques pour les sciences humaines, comme par exemple J. Bair [1990].

[3] On trouve cette théorie dans de nombreux ouvrages. Voir par exemple T.J. Fletcher [1972] ou E.A. Maxwell [1975]. La théorie générale pour des espaces vectoriels à n dimensions se trouve aussi dans N. Rouche et J. Mawhin [1973].



$$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2.5 & 1 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2.5\cos(\frac{\pi}{3}) & 2.5\sin(\frac{\pi}{3}) \\ 2.5\sin(\frac{\pi}{3}) & 2.5\cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Fig. 2

Sixième partie

L'orientation

Introduction

Nous exposons ci-après les questions d'orientation de droites, de plans et de l'espace telles qu'elles se posent d'une part en géométrie, et d'autre part dans la vie pratique. Ces questions sont pour l'essentiel bien connues, même si le fait de *vivre le nez dessus* empêche beaucoup de personnes de les discerner clairement. Il nous a paru nécessaire d'en proposer un exposé systématique, pour pouvoir expliquer ultérieurement comment elles sont rencontrées depuis que le jeune enfant apprend à se tenir debout et à avancer vers sa mère, jusqu'à ce que, ayant grandi, il étudie éventuellement les bases des espaces vectoriels.

L'exposé ci-après étant assez théorique, voici quelques indications sur des situations et problèmes susceptibles de soutenir l'apprentissage de l'orientation aux divers âges. Tout d'abord, les tout petits enfants n'ont guère besoin d'autres sollicitations que celles de leurs environnement immédiat pour découvrir le haut et le bas, ainsi que l'avant et l'arrière de leur propre personne. Les ouvrages de psychomotricité abondent en situations et en jeux les amenant à découvrir les autres problèmes d'orientation solubles à leur âge, au premier rang desquels se trouvent bien entendu la gauche et la droite : voir B. De Lièvre et L. Staes [1993] et L. Lurçat [1982]. Sur la psychomotricité en général, voir surtout J. Le Boulch [1976].

L'étude des transformations et des figures s'accompagne naturellement de l'étude de leur orientation. Le miroir intervient comme l'un des objets les plus communs qui provoquent des changements d'orientation. Nous renvoyons ici aux autres parties de cette étude où ces matières sont exposées (voir surtout les troisième et cinquième parties).

Un ouvrage stimulant sur les problèmes d'orientation en général est M. Gardner [1964].

20

Orienter les droites

1 Éléments de théorie

Considérons sur une droite (figure 1) un segment a et l'ensemble de tous les segments de même longueur que a. Sur la figure, nous n'en n'avons dessiné que quelques-uns. Considérons aussi un segment b marqué d'un point à une de ses extrémités. Considérons de plus tous les segments de même longueur que b et aussi marqués à une extrémité[1].

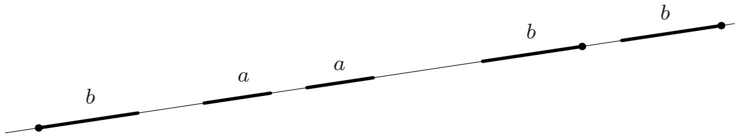


Fig. 1

Tous les segments du type a peuvent être amenés l'un sur l'autre *par glissement le long de la droite*. Tel n'est pas le cas des segments du type b qui sont de deux sortes : ceux marqués d'un côté, et ceux marqués de l'autre. Les segments d'une sorte peuvent être amenés l'un sur l'autre par glissement le long de la droite, et il en va de même des segments de l'autre sorte. Par contre, il est impossible d'amener un segment d'une sorte sur un segment de l'autre par un tel glissement.

Ainsi nous avons découvert sur la droite des objets isométriques (c'est-à-dire de même forme et même mesure) qu'on ne peut pas amener l'un sur l'autre par glissement le long de la droite.

On exprime cela en disant que la droite est *orientable*.

On dit qu'on *oriente* la droite quand on privilégie une des deux classes de segments marqués, ce qui peut se faire en leur donnant un nom. On dira par exemple que cette classe privilégiée définit le *sens positif* sur la droite. L'autre classe définit alors le *sens négatif*. Un tel choix est absolument arbitraire. En dépit de leur acception commune, les termes *positif* et *négatif* ne portent *a priori* en eux aucune connotation de valeur.

[1] Nous considérons des segments « pointés » plutôt que des flèches, de manière à ne pas évoquer un type d'objet qui déborde de la droite.

Pour superposer un segment pointé avec un autre d'orientation opposée, on peut recourir à une symétrie orthogonale autour d'un point (un centre), comme le montre la figure 2. Par contre, le symétrique orthogonal d'un segment non pointé peut être envoyé par glissement sur son original. Et si le centre de la symétrie est le milieu du segment donné, on n'a même pas besoin d'un glissement, car le segment retombe alors sur lui-même. Un segment non pointé est symétrique, un segment pointé à un bout ne l'est pas.

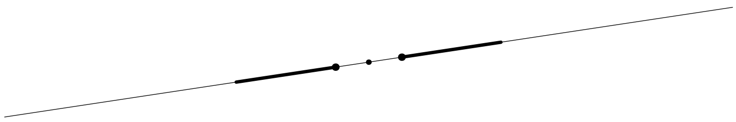


Fig. 2

En dehors des segments pointés à un bout, une infinité d'autres figures asymétriques peuvent servir à orienter la droite. Deux figures isométriques non superposables par glissement, par exemple celles de la figure 3, sont appelées figures *énantiomorphes.*

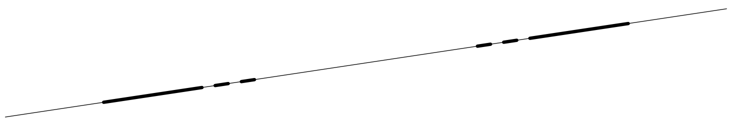


Fig. 3

On peut associer *conventionnellement* les deux classes de segments pointés avec deux classes quelconques de figures énantiomorphes. Il y a deux conventions possibles, et arbitraires.

Dans la pratique ordinaire des mathématiques, lorsqu'on veut représenter une droite orientée, on dessine un segment et on le munit d'une pointe de flèche[2].

2 La droite plongée dans l'espace

Les seules opérations que nous ayons faites jusqu'ici étaient de glisser des figures (rectilignes) le long de la droite, et d'envoyer une figure sur sa symétrique par rapport à un point de la droite. Pour réaliser cette dernière opération, on envoie chaque point de la figure le long de la droite, de l'autre côté du centre de symétrie et à la même distance de celui-ci que le point de départ. Certes, on ne pourrait pas réaliser physiquement une telle opération si le segment était un bâtonnet. Car il faudrait que les molécules du bois voyagent indépendamment les unes des autres, et se dépassent l'une l'autre sur une route de largeur nulle ! Il s'agit donc d'une opération purement mentale, mais dont la description ne

[2] Pour ne pas surcharger l'exposé, nous n'introduisons pas ici le problème de l'ordre pour les points d'une droite.

fait rien intervenir en dehors de la droite. Donc, jusqu'à présent, *nous ne sommes pas sortis de la droite*[3].

Pratiquement toutefois, l'être humain vit dans l'espace, et les droites sont des traits de crayon, des fils tendus ou d'autres objets de ce genre. On peut représenter un segment d'une droite par un bâtonnet tenu le long de la droite, et si on veut passer à son symétrique orthogonal par rapport à un centre, on peut le sortir de la droite, le retourner et le ramener ensuite sur la droite à l'endroit souhaité[4]. C'est ce que le suggère la figure 4.

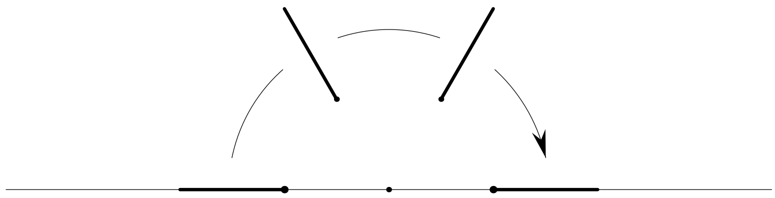


Fig. 4

On appelle *direction de droites*, dans un plan ou dans l'espace l'ensemble de toutes les droites parallèles à une droite donnée. Si une droite d'une direction de droites est orientée, on peut transporter naturellement son orientation à toute autre droite de la direction. Il suffit pour cela de translater la droite orientée pour l'amener sur une autre quelconque. Si on a ainsi organisé de manière concordante l'orientation de toutes les droites de la direction, on dit que celle-ci est *orientée*.

Ces quelques considérations rassemblent l'essentiel de ce que l'on peut dire en général sur l'orientation d'une droite. Venons-en maintenant aux droites et aux directions particulières que nous offrent l'univers physique ainsi que le monde des êtres vivants et celui des objets fabriqués.

3 Le haut et le bas

Les corps lourds abandonnés à eux-mêmes sans vitesse initiale tombent verticalement. L'homme se tient naturellement debout, c'est-à-dire en position verticale, les pieds par terre et la tête en haut. Les bébés doivent apprendre à se tenir debout. En cherchant l'équilibre dans le champ de la pesanteur, ils découvrent la verticale sur leur propre corps, grâce aux organes (l'oreille interne et le cervelet) qui permettent de maintenir l'équilibre[5]. Sans ces réactions automatisées du système sensori-

[3] Pour construire une géométrie de la droite, on se donne la droite et rien d'autre, et en particulier on ne se permet pas des excursions en dehors de la droite. Car si on se donnait une telle permission, on utiliserait des propriétés d'un espace plus grand que la droite, et donc on ne ferait pas une géométrie de la droite pure et simple.

[4] La possibilité d'une telle manœuvre vient de ce que, paradoxalement, le segment orienté n'est pas un objet orienté de l'espace. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 22 à la page 295.

[5] Au rebours des mammifères à quatre pattes, qui ont pourtant aussi un haut et un bas, l'homme debout offre une approximation raisonnable de la ligne droite (verticale). On dit d'ailleurs à un enfant « tiens-toi droit ». Et le

moteur, le corps serait naturellement en position instable, comme une baguette que l'on tenterait de déposer verticalement sur le sol.

La direction verticale est naturellement orientée. Cela permet de spécifier le sens d'un objet vertical asymétrique : on tient un crayon pointe en haut, un pendule avec sa masse en bas, un homme debout a la tête en haut, mais s'il fait le poirier, il a la tête en bas, etc.

Une ambiguïté de langage provient du fait que la position naturelle et l'une des plus communes de l'homme est la verticale tête en haut. De ce fait, les mots qui désignent le côté de sa tête et le côté de ses pieds sont souvent empruntés à la verticale physique. Lorsqu'on dit par exemple *bras vers le haut*, on se réfère à la station debout. Il arrive que les professeurs de gymnastique emploient la même expression pour signifier *bras dans le prolongement du corps* (et non *bras effectivement verticaux*, ce qui les mettrait perpendiculaires au corps).

Les verticales que nous avons évoquées – un crayon, un pendule, un homme debout – ne sont pas vraiment des droites géométriques. Ces objets physiques ne s'identifient pas aux objets idéalisés des mathématiques. Cela ne nous a pas empêchés de parler clairement de leur orientation. Nous ne ferons cette remarque qu'une seule fois : elle vaut pour tous les objets réels que nous aurons à évoquer dans la suite.

4 L'avant et l'arrière

Après avoir examiné la direction verticale, qui est unique et imposée par l'univers physique[6], considérons les directions horizontales. Le fait que l'homme avance naturellement droit devant lui a déterminé pour lui un *avant* et un *arrière*. La direction avant-arrière n'est donc nullement une direction de l'univers physique, elle est fixée par rapport au corps lui-même et change lorsque celui-ci tourne. Il y a autant de directions de ce type que de points de l'horizon vers lesquels l'homme peut se diriger. Lorsque des personnes regardent dans la même direction, et qu'on leur commande un pas en avant, leurs mouvements sont cohérents. Si au contraire elles regardent dans des directions variées, et qu'on leur commande le même mouvement d'un pas en avant, elles partent chacune devant soi. Par contraste, si dans un gymnase on dit à quelques personnes de monter à la corde, elles partent en parallèle.

Quasiment tous les être vivants qui se déplacent (mammifères, poissons, reptiles, etc.) ont aussi un avant (du côté où va le mouvement) et un arrière. Par comparaison, les êtres vivants

fait que le corps de l'homme soit ainsi en quelque sorte massé, ou rassemblé autour d'une droite verticale a pour effet de minimiser l'effort qu'il doit fournir pour se maintenir en équilibre. Les animaux à quatre pattes ont un problème d'équilibre moins aigu.

[6] Nous ne considérons pas ici les variations de la verticale selon l'endroit du globe terrestre où l'on se trouve.

qui ne se meuvent pas, comme la plupart des végétaux, ont un dessus et un dessous, mais pas un avant et un arrière : ils se disposent de manière équilibrée et quasi symétrique autour d'un axe vertical. L'homme a transmis la propriété d'avoir un avant et un arrière à beaucoup d'objets fabriqués, non seulement ceux qui se meuvent tels que les autos, les vélos, les traîneaux, les flèches, etc. mais aussi les chaises, les manteaux, les lunettes et les longues-vues, les fusils, etc.

Si un objet est situé *devant* une personne, c'est-à-dire du côté de son avant, celle-ci parlera d'autres objets situés *devant* ou *derrière* l'objet en question. On dit aussi *à l'avant* et *à l'arrière*. Le sens qui va de *derrière* l'objet vers *devant* celui-ci est paradoxalement opposé au sens qui va de l'arrière vers l'avant de la personne.

Lorsqu'un objet placé devant la personne est lui-même naturellement orienté, il hérite d'un avant et d'un arrière imposé par sa position habituelle : on parle de l'avant et de l'arrière d'un poste de télévision en position quelconque. Par contre quelqu'un ne situe des choses devant ou derrière un ballon que si celui-ci se trouve devant lui.

Dans certaines circonstances, on est amené à comparer deux déterminations naturelles du sens sur une droite. Par exemple, quand deux personnes se font face, leurs sens avant-arrière sont opposés. Par exemple encore, un voyageur dans un train peut souhaiter s'asseoir dans le sens de la marche ou à l'opposé. Une personne peut marcher normalement ou à reculons.

5 La gauche et la droite

Fig. 5

Les bras étendus latéralement à l'horizontale définissent, par rapport au corps humain, une direction habituellement orientée par la *droite* et la *gauche*. Imaginons une personne qui, comme le dieu Janus, posséderait un visage d'un côté de sa tête et un autre visage symétrique de l'autre côté (figure 5). Supposons aussi que le reste de son corps soit *le même à l'avant et à l'arrière*, ou qu'en d'autres termes on n'arrive plus à lui attribuer un avant et un arrière. Comment désignerions-nous sa gauche et sa droite ? Tout ce que nous pourrions faire serait de fixer un sens conventionnel sur la direction de ses bras étendus, par exemple en lui peignant une main en rouge.

Ainsi la détermination de la droite et de la gauche dépend de l'avant et de l'arrière. Mais les deux directions avant-arrière et bras étendus latéralement déterminent un plan. C'est pourquoi nous traiterons de l'orientation droite-gauche au chapitre 21 consacrée à l'orientation des plans.

6 Orientation de directions quelconques

Venons-en maintenant aux droites de direction quelconque. Certaines sont parcourues par un mouvement de sens constant. Un cours d'eau possède un *amont* et un *aval*. Si un mobile parcourt une droite, on parlera des points situés à l'avant ou à l'arrière du mobile. Une fourchette possède des dents d'un côté et un manche de l'autre. Les balais, les pelles, etc. sont orientés de manière analogue.

Les directions qui, dans l'univers physique, ne sont ni verticales ni horizontales, sont parfois orientées par référence à la direction verticale. On parle souvent d'un chemin parcouru dans le sens de la montée, ou de la descente. Ainsi, un sens est parfois déterminé sur une droite à partir d'un sens connu sur une autre direction que celle de la droite (autre direction qui ne peut être orthogonale à celle de la droite).

21

Orienter les plans

1 Éléments de théorie

Considérons dans un plan un rectangle particulier, par exemple celui marqué a sur la figure 1, et l'ensemble de tous les rectangles isométriques à a. Sur la figure, nous n'en avons dessiné que quelques-uns. Dans ce même plan, considérons un parallélogramme particulier, par exemple celui marqué b. Considérons de plus tous les parallélogrammes isométriques à b. Nous n'en avons à nouveau dessiné que quelques-uns.

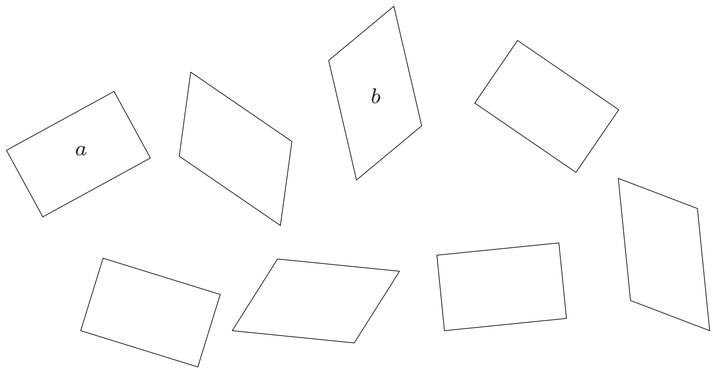


Fig. 1

Tous les rectangles peuvent être amenés l'un sur l'autre par glissement dans le plan. Par contre certains parallélogrammes ne peuvent pas être amenés l'un sur l'autre de cette manière. On peut en fait les répartir en deux classes. On reconnaît ceux d'une même classe au fait précisément qu'on peut les amener l'un sur l'autre. Mais on ne peut pas, par glissement dans le plan, amener un parallélogramme d'une classe sur un parallélogramme de l'autre. De tels parallélogrammes sont dits *énantiomorphes*.

Ainsi il y a des objets qui, quoique isométriques, ne peuvent pas être amenés en coïncidence par glissement dans le plan.

On exprime cela en disant que le plan est *orientable*.

On dit qu'on oriente le plan quand on privilégie une des deux classes de parallélogrammes et on peut, si besoin en est, donner un nom à cette classe. Un tel choix est absolument arbitraire.

Pour superposer un parallélogramme à un autre isométrique mais d'orientation opposée, on peut recourir à une symétrie orthogonale comme le montre la figure 2.

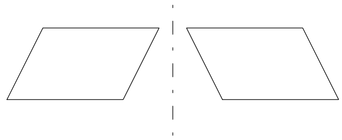


Fig. 2

Par contre, le symétrique orthogonal d'un rectangle est un rectangle qu'on peut faire coïncider par glissement dans le plan avec le premier (voir figure 3). Et si l'axe de symétrie choisi est l'un des deux axes de symétrie du rectangle lui-même, on n'a même pas besoin d'un glissement, car le rectangle retombe alors sur lui-même. On exprime cela en disant que le rectangle possède une *symétrie bilatérale.* Un parallélogramme non rectangle par contre ne possède pas ce genre de symétrie.

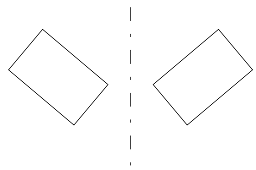


Fig. 3

D'autres figures peuvent servir à orienter le plan. Par exemple tout triangle non isocèle possède un énantiomorphe, ce qu'illustre la figure 4.

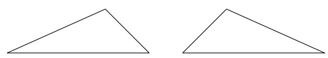


Fig. 4

Pratiquement, on ne se sert quasiment jamais des parallélogrammes ou des triangles pour orienter le plan.

Assez souvent on choisit un cercle marqué d'une flèche (un sens de parcours). La figure 5 montre deux cercles isométriques énantiomorphes. Nous verrons à la section 2 pourquoi, *si on refuse de sortir du plan,* on ne peut pas désigner un de ces deux cercles comme correspondant au sens des aiguilles d'une montre, et l'autre au sens opposé.

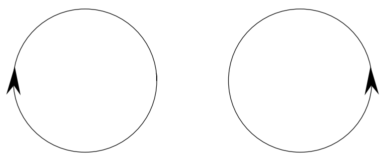


Fig. 5

Une autre façon habituelle d'orienter le plan consiste à se servir d'un système d'axes. La figure 6 montre plusieurs systèmes d'axes qui se répartissent en deux classes énantiomorphes.

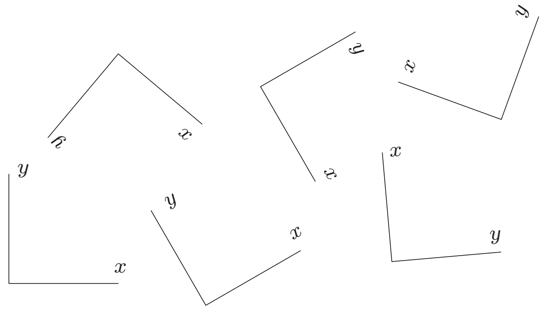


Fig. 6

On peut mettre en correspondance les cercles orientés et les systèmes d'axes. On dira par exemple qu'un système d'axes et un cercle orienté ont *la même orientation* si, lorsqu'on tourne l'axe des x *d'un angle droit* pour l'amener sur l'axe des y, le mouvement se fait dans le même sens que sur le cercle. Cette situation est illustrée à la figure 7.

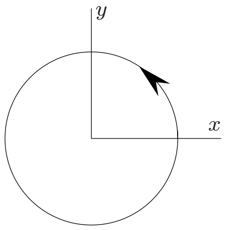


Fig. 7

En dehors des rectangles et des cercles non munis d'une flèche, une infinité d'autres figures planes, parce qu'elles possèdent une symétrie bilatérale, ne peuvent pas servir à orienter le plan. La figure 8 en montre quelques-unes. Et de même, en dehors des parallélogrammes non rectangles, des cercles orientés et des systèmes d'axes, une infinité de figures planes dépourvues de symétrie bilatérale peuvent servir à orienter le plan. La figure 9 en montre quelques-unes.

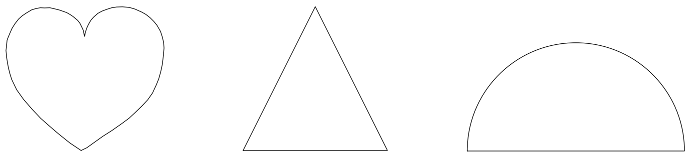


Fig. 8

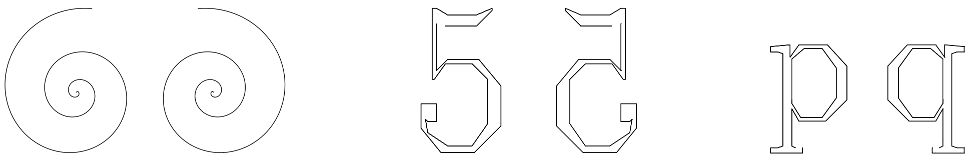


Fig. 9

Parmi ces figures extrêmement variées, celles dont on reconnaît le plus facilement l'appartenance à une classe ou à l'autre sont celles dont le dessin n'est pas trop compliqué et qui, telles que les chiffres, les lettres ou les cadrans d'horloge, ne sont présentes autour de nous que dans une seule de leurs deux variétés.

2 Le plan plongé dans l'espace

Les seules opérations que nous ayons faites jusqu'ici dans ce chapitre étaient de glisser des figures dans le plan, et d'envoyer une figure sur sa symétrique orthogonale par rapport à un axe du plan. Pour réaliser cette dernière opération, on envoie chaque point perpendiculairement au delà de l'axe, à la même distance de celui-ci que le point de départ[1]. Certes, on ne pourrait pas réaliser physiquement une telle opération (toujours sans sortir du plan) si la figure était par exemple découpée dans du carton. Il s'agit donc d'une opération purement mentale, mais dont la description ne fait rien intervenir en dehors du plan. Donc jusqu'à présent, *nous ne sommes pas sortis du plan*[2].

[1] Les points de l'axe demeurent en place.

[2] Pour construire une géométrie du plan, on se donne le plan et rien d'autre, et en particulier on ne se permet pas des excursions en dehors du plan. Car si on se donnait une telle permission, on recourrait à la théorie de l'espace à trois dimensions. Cette remarque concerne la géométrie constituée, et non l'apprentissage de la géométrie plane.

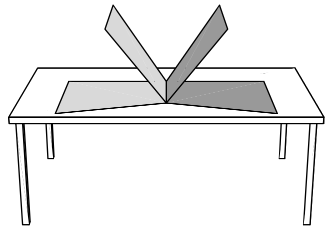


Fig. 10

Pratiquement toutefois, l'être humain vit dans l'espace[3], et les plans sont réalisés concrètement par des tables, tableaux, murs, feuilles de papier, etc. On peut représenter un rectangle, un parallélogramme, un cercle, un système d'axes sur un plan physique en découpant la figure dans du carton et en la déposant sur la plan. Si on veut dans ces conditions passer à son symétrique orthogonal par rapport à un axe du plan, rien n'empêche de le sortir du plan et de le retourner pour le redéposer ensuite sur le plan à l'endroit souhaité[4]. C'est ce que suggère la figure 10 pour un trapèze en carton dont les deux faces sont colorées différemment.

Lorsqu'on veut orienter un plan de l'espace physique, on peut par exemple décider de choisir comme sens privilégié celui qui correspond au sens de rotation des aiguilles d'une montre. Toutefois, c'est là un choix déterminé par quelqu'un qui est extérieur au plan et qui le regarde d'un côté déterminé. Car si l'on va voir les cercles munis d'une flèche à partir d'un point situé de l'autre côté du plan, on s'aperçoit que celui qui tournait au départ dans le sens des aiguilles d'une montre tourne dans le sens opposé dès qu'on est passé de l'autre côté. Cette façon d'orienter le plan n'est donc pas intrinsèque à la géométrie plane. En demeurant dans le plan, tout ce qu'on peut faire est de désigner une des deux classes de cercles comme privilégiée, et puis c'est tout. Des êtres absolument plats qu'on imaginerait vivant dans le plan (sans jamais faire d'excursion dans l'espace extérieur au plan) sont libres de faire tourner leurs montres dans le sens qu'ils veulent.

Dans l'espace, on appelle *direction de plans* l'ensemble des plans parallèles à un plan donné. Si un plan d'une direction de plans est orienté, on peut transporter naturellement son orientation sur tout autre plan de la direction. Il suffit pour cela de translater le plan orienté pour l'amener sur l'autre. Si on a ainsi organisé de manière concordante l'orientation de tous les plans de la direction, on dit que celle-ci est *orientée*.

Ces quelques considérations rassemblent l'essentiel de ce que l'on peut dire en général sur l'orientation d'un plan. Venons-en maintenant aux plans et aux directions de plans particuliers que nous offrent l'univers physique ainsi que le monde des êtres vivants et celui des objets fabriqués[5].

---

[3] Et les élèves qui apprennent la géométrie aussi !

[4] La possibilité d'une telle manœuvre est liée au fait que le parallélogramme non rectangle, le cercle muni d'une flèche, le système d'axes plan ne sont pas des objets orientés *de l'espace*. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 22.

[5] Le lecteur aura remarqué que le plan des sections 1 et 2 relatives aux plans est copié des sections 1 et 2 relatives aux droites. Les sections 1 et 2 relatives à l'espace reproduiront ce même schéma. Ceci montre la constance des questions qui se posent quant à l'orientation, quelle que soit la dimension de l'espace considéré.

3 L'avant-arrière et les bras étendus

Considérons une personne debout, tête droite et les bras étendus latéralement. Ses bras appartiennent à une droite horizontale et son regard à une autre droite horizontale, perpendiculaire à la première. Les deux ensemble déterminent un plan horizontal, qui n'est pas *a priori* orienté. On l'oriente en désignant un des deux bras comme le bras gauche, et l'autre comme le bras droit. La demi-droite du regard jointe à la demi-droite du bras gauche donnent l'équivalent d'un système d'axes, dont l'orientation est opposée à celui correspondant à la demi-droite du regard jointe à la demi-droite du bras droit.

À l'image de l'homme, les êtres et les objets pourvus d'un avant et d'un arrière sont aussi munis d'une gauche et d'une droite. Il en va de même pour les mouvements de sens constant qui se passent sur une droite horizontale ou à peu près : par exemple, on parle de la rive gauche et de la rive droite d'un cours d'eau en faisant correspondre le sens de l'écoulement au sens avant-arrière d'une personne qui descend le courant en regardant devant elle. On réalise bien que la gauche et la droite sont liés à la direction avant-arrière

Le plan ainsi orienté est lié au corps de la personne. Ce simple fait provoque des difficultés de communication lorsqu'on s'en sert pour orienter des directions horizontales non liées à son propre corps. Ainsi, deux personnes qui se font face ont leur gauche et leur droite opposées. Et si elles regardent dans des directions orthogonales, la gauche et la droite de l'une n'ont plus rien à voir avec la gauche et la droite de l'autre, mais correspondent respectivement soit à l'avant et l'arrière de l'autre, soit l'inverse. Il est possible pour une personne de désigner la gauche et la droite d'une autre personne, même si celle-ci se trouve par rapport à elle dans une position *discordante*. Pour ce faire, la première personne se transporte *en imagination* dans la position de l'autre, ce qui est une opération mentale difficile pour certaines positions relatives inhabituelles des deux personnes.

Considérons maintenant un objet sans orientation particulière, par exemple un ballon, situé devant une personne. Celle-ci parle de la droite et de la gauche du ballon. Elle dit par exemple : *je vais passer à droite du ballon.* Cette gauche et cette droite sont celles de la personne regardant le ballon ou se dirigeant vers lui.

Si deux personnes se font face, l'une peut dire à l'autre : *je vais passer à ta droite*, l'adjectif possessif *ta* montrant à nouveau que la gauche et la droite *appartiennent* à une personne, ou à un objet. Si la personne fait face à un *objet* orienté, l'usage du possessif semble moins bien fixé. Supposons qu'une voiture soit arrêtée face à une personne, son capot du côté de la personne. Celle-ci peut dire : *je vais passer à droite de la voiture*, ce qui est clair. Si elle dit *je vais passer à* la *droite de la voiture*, l'interlocuteur pourra hésiter sur sa manœuvre. On vit quotidiennement ce type d'ambiguïté lorsqu'on cherche à communiquer la position d'une personne ou d'un objet sur une photographie.

Notons que le choix de la droite et de la gauche pour orienter le plan dont nous parlons est totalement arbitraire. Lorsqu'on s'en sert pour fixer certaines habitudes de civilisation, comme par exemple le côté de la route où roulent les automobiles, on constate des discordances entre les nations. (Heureusement que ce ne sont pas les individus qui décident !) Les Anglais roulent à gauche et nous roulons à droite, ce qui cause certaines difficultés. Par comparaison, la direction des pieds à la tête s'impose naturellement. Heureusement, car sinon, les Anglais auraient sans doute décidé de marcher les pieds en l'air[6]. Mais au moins sur ce point-là la nature est bien faite.

Une remarque enfin. Le plan déterminé par le regard horizontal et les bras étendus est un plan que nous considérons à peu près toujours du même côté. Autrement dit, il est exceptionnel que nous ayons à faire à ce plan relativement à une personne qui a la tête en bas. Et il en va de même du plan du sol. Il est exceptionnel aussi que nous envisagions un sol horizontal situé au dessus de nous, comme par exemple si nous nous trouvons dans une pièce dont le plafond est vitré et que nous voyons des personnes à l'étage au-dessus. Le fait de considérer un plan toujours du même côté facilite les choses. Comme nous le verrons, la situation est plus compliquée pour certains plans verticaux que nous fréquentons naturellement des deux côtés.

4 Le plan de symétrie du corps humain

Nous avons vu que le corps humain, comme celui de beaucoup d'animaux, possède deux directions privilégiées, à savoir la verticale imposée par la pesanteur, et la direction avant-arrière imposée par le fait que l'homme se déplace. Indépendamment du fait que ces deux directions sont naturellement orientées, leur existence même détermine le plan de symétrie du corps humain. Bien entendu, il s'agit d'une symétrie approximative, puisque le cœur est à droite et le foie à gauche, mais cette observation ne nous concerne pas ici. Parmi les activités de l'être humain, on n'en discerne pas qui auraient pu déterminer une asymétrie importante de son corps. Par comparaison, on sait que les crabes n'avancent pas droit devant eux. Comme le montre la figure 11, certains crabes n'ont pas de plan de symétrie.

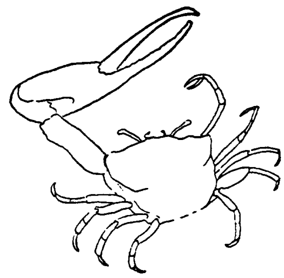


Fig. 11

Les animaux et les objets qui se meuvent, ou ceux qui, tels que les chaises, ont une forme adaptée à leur usage par l'homme, ont eux aussi un plan de symétrie avec un haut et un bas, un avant et un arrière.

À cause de leur orientation naturelle, ces plans de symétrie

[6] En quoi ce trait d'humour est-il absurde ? Réponse : c'est que si la direction haut-bas des personnes n'était pas orientée, c'est que les hommes auraient une tête en haut et une en bas, ou alors des pieds en haut et des pieds en bas.

sont le siège de phénomènes assez simples. Personne n'hésite pour exécuter la consigne de *passer par dessous ou par dessus* un obstacle, puisque le dessus et le dessous relèvent d'une détermination physique constante. Il peut y avoir hésitation lorsqu'il s'agit de grimper sur un tas de sable en y allant par derrière ou par devant, car l'arrière et l'avant dépendent de la situation de la personne qui parle et qui est en position concordante ou discordante avec la personne qui exécute.

5 Les plans frontaux

Un exemple d'un tel plan est un mur regardé de face. Certains plans frontaux sont naturellement abordés des deux côtés. Par exemple, lorsqu'on veut ouvrir une porte, on tourne la clé dans des sens opposés par rapport à soi selon qu'on aborde la porte d'un côté ou de l'autre.

On peut assimiler aux plans frontaux les plans des documents qu'on lit en les tenant perpendiculairement à son regard. Les documents sur papier calque et les négatifs photographiques sont vus lorsqu'on les retourne comme si on allait les voir de l'autre côté. Les cachets, tampons et caractères d'imprimerie nous offrent la vue *de l'autre côté* avant la vue attendue, celle qui a un sens et est immédiatement reconnue dans le quotidien.

L'explication des phénomènes provoqués par ces objets relève de la géométrie de l'espace. Pour s'approcher davantage d'un plan fonctionnant comme celui de la géométrie plane théorique, on peut considérer le dessus d'une table et des figures en carton colorées d'un côté et blanches de l'autre, et posées avec le côté blanc sur la table.

22

Orienter l'espace

1 Éléments de théorie

Le premier chapitre de cette partie s'intitulait *orienter les droites*, et le deuxième *orienter les plans*. C'est que l'espace contient beaucoup de droites et beaucoup de plans. Ici, nous parlons d'orienter l'espace, au singulier. C'est que l'espace *ne contient qu'un espace !* Notre analyse s'en trouvera simplifiée.

Considérons un parallélipipède rectangle particulier, par exemple celui marqué a sur la figure 1, et l'ensemble de tous les parallélépipèdes rectangles isométriques à a. Sur la figure, nous n'en avons dessiné que quelques-uns. Dans ce même plan, considérons un parallélipipède non rectangle particulier. Il doit s'agir d'un parallélipipède qui ne possède pas de plan de symétrie[1]. Sur la figure nous l'avons noté b. Considérons de plus tous les parallélépipèdes isométriques à b. Nous n'en avons non plus dessiné que quelques-uns.

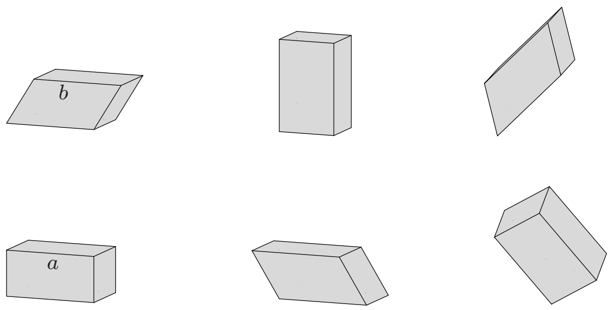


Fig. 1

Tous les parallélépipèdes rectangles peuvent être amenés l'un sur l'autre par déplacement (ce qui implique de ne pas recourir à une symétrie orthogonale). Nous supposons ici que ces objets peuvent se pénétrer l'un l'autre jusqu'à coïncidence. Par contre certains des parallélépipèdes non rectangles ne peuvent pas être amenés l'un sur l'autre de cette manière. On peut en fait les

[1] Un parallélipipède à quatre faces rectangulaires et deux faces non rectangulaires possède un plan de symétrie. Nous l'excluons donc en l'occurrence.

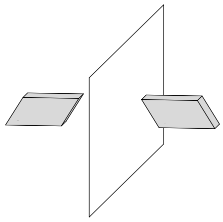


Fig. 2

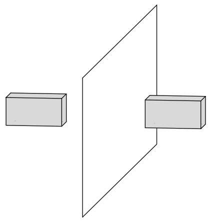


Fig. 3

Fig. 4

répartir en deux classes. On reconnaît ceux d'une même classe au fait précisément qu'on peut les amener l'un sur l'autre. Mais on ne peut pas, par déplacement, amener un parallélipipède non rectangle d'une classe sur un parallélogramme de l'autre. De tels parallélépipèdes sont dits *énantiomorphes*.

Ainsi il y a des objets qui, quoique isométriques, ne peuvent pas être amenés en coïncidence par déplacement.

On exprime cela en disant que l'espace est *orientable*.

On dit qu'on oriente l'espace quand on privilégie une des deux classes de parallélépipèdes non rectangles, et on peut, si besoin en est, donner un nom à cette classe. Un tel choix est absolument arbitraire.

Pour superposer un parallélipipède non rectangle à un autre isométrique mais d'orientation opposée, on peut recourir à une symétrie orthogonale comme le montre la figure 2.

Par contre, le symétrique orthogonal d'un parallélipipède rectangle est un parallélipipède rectangle qu'on peut faire coïncider par déplacement avec le premier (voir figure 3). Et si le plan de symétrie choisi est l'un des trois plans de symétrie du parallélipipède lui-même, on n'a même pas besoin d'un déplacement, car le parallélipipède retombe alors sur lui-même. On exprime cela en disant que le parallélipipède rectangle possède une *symétrie bilatérale*.

D'autres figures ou objets peuvent servir à orienter l'espace, à savoir tous ceux qui existent sous deux variétés énantiomorphes. Par exemple, les vis, les tire-bouchons, les cercles orientés marqués d'une flèche selon leur axe se symétrie orthogonale, les montres (qui ont un sens de rotation ainsi qu'un dessus et un dessous), les mains, le corps humain tout entier avec ses trois directions avant-arrière, dessus-dessous et gauche-droite, etc.

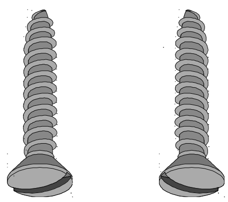


Fig. 5

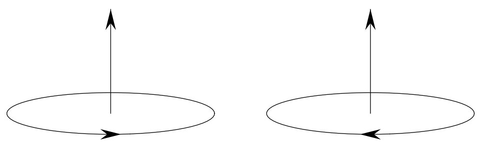


Fig. 6

Bien entendu, on se sert souvent aussi souvent pour orienter l'espace d'un système d'axes orthogonaux. La figure 7 à la page suivante montre plusieurs systèmes d'axes qui se répartissent en deux classes énantiomorphes.

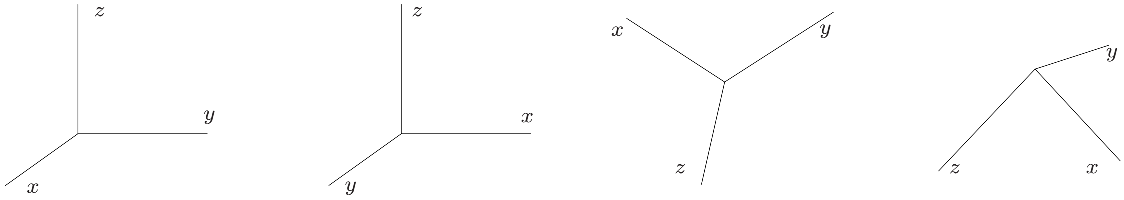


Fig. 7

Il existe une foule de règles pratiques pour mettre en correspondance l'orientation obtenue à partir d'un type d'objets énantiomorphes avec l'orientation obtenue à partir d'autres objets. En voici l'une ou l'autre.

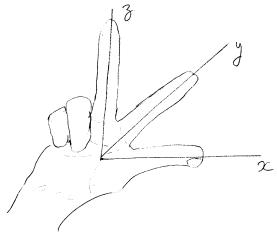


Fig. 8

On dit qu'un système d'axes est *orienté à droite* (voir figure 8) si on peut mettre le pouce, l'index et le majeur de la main droite respectivement dans le sens de l'axe des x, de l'axe des y et de l'axe des z.

Soit maintenant (figure 9) un trièdre sur les axes duquel on a marqué trois points de coordonnées positives. Ces trois points déterminent un triangle. Si une personne ayant la tête du côté positif des axes et qui suit ce triangle dans le sens x, y, z, le voit constamment sur sa gauche, alors le système d'axes est de même orienté à droite.

Si on adosse un bonhomme à l'axe des z, et que son regard est dirigé du côté positif des axes des x et des y, et s'il voit l'axe des x sur sa droite et donc l'axe des y sur sa gauche, alors le systèmes d'axes est à nouveau orienté à droite (figure 10). La personne en question s'appelle *le bonhomme d'Ampère*, du nom de son inventeur.

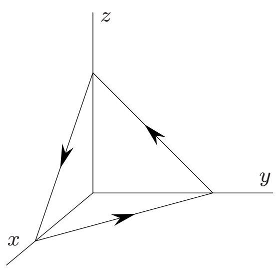


Fig. 9

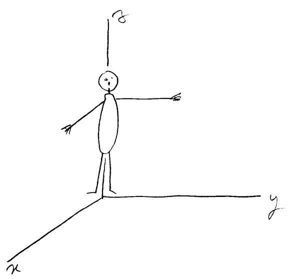


Fig. 10

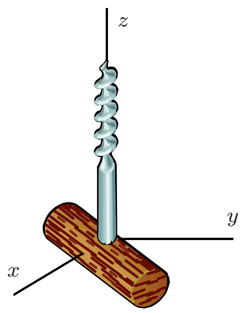


Fig. 11

Une des conventions les plus commodes est celle-ci. Soit (figure 11) un tire-bouchon du type ordinaire, pointé dans la direction positive des z et qu'on fait tourner dans le sens qui amène l'axe des x sur l'axe des y par une rotation d'un angle droit. Si ce tire-bouchon s'enfonce dans la direction positive de l'axe des z, alors le système d'axes est à nouveau orienté à droite.

2 L'espace ordinaire plongé dans un espace à quatre dimensions

Nous avons noté au chapitre 20 que deux objets énantiomorphes sur une droite ne sont pas énantiomorphes dans l'espace. On peut les amener à coïncider par déplacement, à condition de les sortir de la droite. De même au chapitre 21, nous avons noté que deux objets énantiomorphes du plan ne sont pas énantiomorphes dans l'espace. On peut aussi les amener à coïncider par déplacement, à condition de recourir à un déplacement qui les sorte du plan.

La situation n'est plus la même dans l'espace, puisque nous l'avons dit, l'espace dans lequel nous vivons n'est pas plongé dans un espace possédant davantage de dimensions. Par conséquent nous sommes incapables de faire coïncider par déplacement deux objets énantiomorphes de l'espace. Cette observation appelle trois remarques.

D'abord il n'est pas interdit de rêver : on peut imaginer, comme on peut, un espace à quatre dimensions qui rendrait la manœuvre possible.

Ensuite, si on regarde du côté des versions algébrisées de la géométrie, on s'aperçoit qu'il est formellement possible de définir un tel espace à quatre dimensions, et d'y déplacer isométriquement des objets à trois dimensions.

Enfin, si on accepte des transformations autres que des déplacements, on peut très bien parfois passer dans l'espace à trois dimensions d'un objet à son énantiomorphe : c'est par exemple ce que l'on fait quand on retourne un gant.

3 D'autres problèmes d'orientation

Nous venons d'évoquer un espace à quatre dimensions. Mais pourquoi s'arrêter là? Tout espace vectoriel à n dimensions possède des bases constituées de n vecteurs linéairement indépendants. Ces bases se divisent en deux classes de la manière suivante. On passe d'une base à l'autre par une matrice de changement de base. On dit que deux bases sont dans la même classe si le déterminant de la matrice qui fait passer de l'une à l'autre est positif. Elles sont dans des classes opposées au cas contraire. On oriente un espace vectoriel à n dimensions en privilégiant une des deux classes de base (par exemple en disant qu'elle regroupe les bases *orientées à droite*). À ce stade évidemment, il n'y a plus ni tire-bouchon, ni bonhomme d'Ampère. La définition est abstraite.

Pour en finir avec les problèmes d'orientation, mentionnons enfin qu'on peut essayer d'orienter d'autres objets que des droites, plans et espaces vectoriels. Par exemple, on peut chercher à orienter des surfaces dans l'espace à trois dimensions.

Considérons d'abord la sphère, sur laquelle on dessine sans peine des cercles munis d'une flèche, avec deux sens de rotation possibles. Ceci permet de dire que sur la sphère terrestre, les cyclones et les courants marins tournent dans un sens dans l'hémisphère nord, et dans l'autre dans l'hémisphère sud.

Par contre on n'arrive pas à orienter un ruban de Möbius, cette surface que l'on obtient en collant les deux petits bords d'une bande après avoir retourné l'un des deux. On a l'impression qu'on peut dessiner, l'une à côté de l'autre sur ce ruban, deux petites boucles munies de flèches qui les font tourner dans des sens opposés. Mais si on fait glisser l'une de ces boucles de manière qu'elle fasse le tour du ruban, elle revient à sa position initiale avec le sens opposé. Le ruban de Möbius est un exemple de surface non orientable.

Appendice :
Du pareil au même ? Pas vraiment !

Vaut-il mieux dire *égal*, ou *isométrique*, ou *congruent*, ou *superposable* ...ou quoi encore ? La notion qu'évoquent tous ces termes est à l'origine même de la géométrie, et donc elle est fondamentale. Elle ne pose guère de problèmes dans le quotidien, où le contexte suffit dans la plupart des cas à prévenir les ambiguïtés.

Il n'en va pas de même en géométrie, comme en témoignent les controverses sur le choix du terme le plus approprié. C'est qu'en géométrie le contexte est plus pauvre, et l'univocité de l'expression s'appuie plus sur la logique que sur le contexte.

Le glossaire qui suit devrait servir à ceux qui, ayant pour mission d'enseigner la géométrie à partir du quotidien, cherchent à argumenter leurs choix[1].

Congruent. – 1. A l'avantage (et le désavantage) d'être un terme d'origine savante. L'avantage parce qu'on lui a donné le sens qu'on a voulu et qu'il ne renvoie à rien d'autre, le désavantage parce que c'est un mot de plus à apprendre.

2. Il n'y a plus grand monde aujourd'hui qui sait ce qu'il veut dire. Donc on peut le redéfinir à l'intention des débutants : deux figures seront dites *congruentes* si on peut les amener à coïncider parfaitement, fut-ce en pensée, et surtout fut-ce après transformation par un miroir.

De même mesure ou, en particularisant pour les segments : de même longueur, et pour les angles : de même amplitude.

1. La première objection est la même que pour *isométrique* (voir ci-dessous) : ces expressions supposent la mesure et par conséquent les nombres réels.
2. Par ailleurs, elles ne s'étendent pas à la plupart des objets qui ne sont ni des segments, ni des angles. Par exemple, deux polygones de même aire ne sont pas forcément isométriques (deux carrés oui), deux solides de même volume ne sont pas nécessairement isométriques (deux sphères ou deux cubes oui).
3. Or on aimerait conserver un terme *unique*, qui montre bien le fond des choses. Par exemple, des deux énoncés suivants, le second est plus parlant :

   (a) *Si un angle d'un triangle est de même amplitude qu'un angle d'un autre, et si les côtés adjacents à cet angle sont respectivement de même longueur que les côtés adjacents à l'autre, les deux triangles sont isométriques.*

   (b) *Si un angle d'un triangle est congruent à une angle d'un autre et si les côtés adjacents à cet angle sont respectivement congruents aux côtés adjacents à l'autre, les deux triangles sont congruents.*

   Dans le premier énoncé, deux propriétés de parties de triangle sont évoquées par deux mots différents, et la propriété des deux triangles complets est évoquée encore par un autre mot. Dans le second énoncé par contre, un seul mot est utilisé : la congruence des deux triangles

[1] Toutes les définitions apparaissant ci-dessous entre guillemets sont tirées du Robert [1967].

complets découle de la congruence de certaines parties, ce qui exprime assez bien le fond de l'affaire.

Égal. – 1. « Qui est de même quantité, dimension, nature, qualité ou valeur. »
2. « Qui est toujours le même, qui ne varie pas. »

Identique. – 1. « Se dit d'objets ou d'êtres parfaitement semblables, tout en restant distincts. »
2. « Qui est unique, quoique perçu, conçu ou nommé de manière différente. »
3. « Qui reste le même individu en dépit des changements survenus. »

Isométrique. – 1. Terme savant (même commentaire que pour congruent).
2. Étymologiquement, signifie *de même mesure* ou *de mêmes mesures*. Au sens mathématique (et au pluriel), se dit de deux objets tels que la distance entre deux points quelconques de l'un soit égale à la distance entre deux points « homologues » de l'autre.
3. Donc *isométrique* suppose connue la mesure des distances, et par conséquent les nombres réels. Or la mesure d'une distance (en ligne droite) est une notion qui se construit par report (isométrique..., congruent...) d'une unité de mesure (puis d'une sous-unité, etc.) La construction conceptuelle se mord ici la queue : pour définir *isométrique*, on a besoin de la distance, et pour définir la *distance* on a besoin d'objets isométriques.
4. À cette objection logique, on peut en ajouter une autre : pratiquement, la congruence des objets simples (baguettes, segments, polygones en papier) se vérifie par superposition, opération première par rapport à la mesure. Cette opération se pratique à l'école maternelle, pas la mesure. La superposition vient « génétiquement » avant la mesure (même si très tôt les enfants mesurent, et qui voudrait les en empêcher ?)

Le même. – 1. « Marque l'identité absolue. »
2. « Marque la similitude. »
3. « Marque l'égalité. »

Pareil. – « Semblable par l'aspect, la grandeur, la nature. »

Superposable. – 1. A l'avantage (et le désavantage, voir ci-dessous) d'être un terme familier.
2. Superposer deux figures découpées dans du papier ne fait guère problème, bien que l'une des deux vienne au-dessus de l'autre, ce qui est non pertinent en géométrie.
3. Mais cette connotation joue fort dans l'espace : superposer deux cubes n'a rien à voir avec les amener mentalement en coïncidence. Par ailleurs amener deux cubes matériels en coïncidence est impossible, vu l'impénétrabilité de la matière.
4. Qui plus est, il est impossible d'amener mentalement à coïncider deux solides congruents et d'orientations opposées, tout en les respectant. Pour réaliser cela, il faut mentalement démolir et recomposer l'un des deux objets.
5. Superposable se comprend sans peine lorsqu'il s'agit de deux objets distincts, mais moins bien s'il s'agit de deux parties d'un même objet, car alors, pour superposer les deux parties, il faut *démonter* l'objet. Ou alors remplacer la superposition par l'action transitive d'un troisième objet. Par exemple, pour superposer les deux côtés congruents d'un triangle isocèle, il faut démonter celui-ci.

Conclusion : sans doute le mieux est-il de choisir le terme le plus approprié au sujet dont on traite et aux interlocuteurs que l'on a. Dans cette étude, nous avons parfois changé de vocabulaire d'une partie à l'autre. Mais nous avons tâché d'expliquer ces divers choix.

Résumé et conclusions

1 Percevoir les formes et les grandeurs

L'être humain acquiert par le toucher et la vue une première idée de la forme et de la grandeur des objets. Ceux-ci sont des choses qui bougent, ou qu'on peut bouger, ou par rapport auxquelles on peut bouger : ils ne sont pas d'abord des sous-ensembles immobiles d'un espace de points. On les perçoit, on les tourne pour les voir sous toutes leurs faces, on les amène par rapport à soi dans des positions privilégiées. On saisit leur symétrie orthogonale éventuelle par la concordance de cette symétrie avec celle des organes du toucher et de la vue, on saisit leurs autres symétries par des mouvements réguliers du regard. Ces observations s'appliquent aussi aux objets plans, parce qu'ils nous apparaissent dans toutes les positions possibles et que nous les amenons en position privilégiée. La géométrie plane est d'abord une géométrie de l'espace.

Par ailleurs, les connaissances sur les formes et les grandeurs acquises en position privilégiée s'exportent vers des situations quelconques, c'est-à-dire hors de l'emprise des perceptions claires, grâce au sentiment de conservation des objets rigides.

Ce premier registre de la connaissance géométrique n'est pas propre à l'enfance. Tous les êtres humains l'exercent sans cesse. Mais c'est sur lui que s'appuient les activités géométriques des tout petits enfants, lorsqu'ils manient des objets divers et les ajustent les uns aux autres. C'est aussi sur lui que s'appuient les élèves plus âgés (et même les adultes), lorsqu'ils cherchent à construire, à comprendre ou à représenter des situations planes ou spatiales qui posent question. C'est assez dire que la manipulation, l'observation et la construction d'objets sont des modalités normales et bien souvent incontournables de la pensée géométrique. Il serait malsain d'imaginer que la géométrie, à partir d'un certain stade, soit nécessairement une activité purement théorique. Quel dommage si un enseignant ou un élève n'arrive pas à tirer profit d'un modèle de polyèdre ou de surface !

Sur ces questions de perception, de positions privilégiées des objets par rapport à l'observateur, d'intervention des isométries simples dans la perception, voir le chapitre 1.

2 Deux raisons d'être de la géométrie élémentaire

Certains se demandent si la géométrie a bien sa place dans l'enseignement des mathématiques élémentaires. Il n'est même pas rare de voir des enseignants bâcler la partie géométrique du programme.

Or la géométrie, comme l'a dit Hans Freudenthal, c'est d'abord *saisir l'espace*. Mais que cela veut dire ?

Comme nous venons de le rappeler, le toucher et la vue apportent une première connaissance des formes et des grandeurs. Mais le pouvoir des sens est limité. Par exemple, personne n'a jamais saisi par la vue la forme et la grandeur objectives d'un lac, ou de la pyramide de Khéops. Par la force de son esprit, Thalès a ramené la mesure de cette dernière à des opérations accessibles : mesurer un chemin sur le sol horizontal, mesurer un bâton et son ombre. Qu'elle soit historique ou légendaire, cette découverte symbolise la fonction première de la géométrie : saisir l'espace par des opérations de pensée. La géométrie donne une maîtrise de l'espace, un pouvoir sur l'espace, qui dépasse les capacités des sens.

Mais par delà les choses qui échappent à notre perception claire, il y a les phénomènes qui échappent, dans un premier temps tout au moins, à notre entendement. Comment se fait-il par exemple que par trois points passe un cercle et un seul ? Que faut-il pour qu'un cercle passe par quatre points ? Que faut-il pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un angle droit ? Pourquoi y a-t-il trois pavages réguliers ? Et cinq polyèdres réguliers ? Il ne servirait à rien d'allonger cette liste. Les objets qui peuplent l'espace provoquent une multitude d'étonnements, de curiosités. Arriver à comprendre ces phénomènes, c'est aussi saisir l'espace, appendre comment il fonctionne.

Ces deux observations ont des conséquences pour l'enseignement. Tout d'abord, chaque enfant doit recevoir une formation qui lui permette de dominer des situations géométriques élémentaires : on voit trop d'adultes incapables de penser au delà des données de leurs perceptions immédiates. Ceci est un véritable *must*. Ensuite, la profusion des situations qui posent problème offre aux enseignants des possibilités multiples de stimuler leurs élèves et de jalonner les matières du programme par des défis intéressants. La deuxième partie de cette étude développe explicitement des exemples de situations-problèmes pour les classes. Les parties 4, 5 et 6 évoquent brièvement les situations relatives aux représentations planes, à la linéarité et à l'orientation, et fournissent des références à leur sujet.

3 Des objets mentaux

S'il est vrai que la géométrie sert à dépasser par la pensée les limitations des sens, il est vrai aussi qu'elle se constitue dans la pensée par l'exercice même des sens, dans les perceptions et l'action. Les objets mentaux, proches des notions quotidiennes et qui n'ont donc pas la forme technique précise des concepts mathématiques axiomatisés, se forment par l'observation, les manipulations, les déplacements et déformations continus d'objets, les constructions de maquettes et de figures. Les objets mentaux trouvent leur identité en se contrastant les uns par rapport aux autres. Ceci implique qu'on les étudie habituellement non pas de manière monographique – un chapitre sur les rectangles, suivi d'un autre sur les triangles isocèles, d'un autre sur les parallélogrammes, etc. – mais bien par familles qui en font voir de plusieurs sortes apparentées.

La deuxième partie montre des exemples d'activités conduisant à des familles d'objets, figures et mouvements. Sur ces familles, on consultera aussi *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* (CREM [1995]).

4 Des inférences évidentes et d'autres moins évidentes

Les premières évidences, celles qui permettent de démarrer la géométrie raisonnée, trouvent leur origine dans la causalité physique : certaines manipulations, déformations, constructions donnent toujours le même résultat. Ces évidences portent sur des implications, souvent du type : si je fais ceci, j'obtiens cela. Elles varient quelque peu d'une personne à l'autre, mais des discussions permettent d'aboutir à un certain fond commun d'évidences, sur lequel on peut bâtir une première théorie.

Ces évidences sont assez nombreuses. Mais elles présentent des parentés, elles se regroupent autour de ce que nous avons appelé des structures de base. Par exemple, la médiatrice, le triangle isocèle, le losange, un cercle muni d'une corde, relèvent de la même structure. On peut donc regrouper la foule des évidences de départ et des phénomènes voisins en quelques chapitres cohérents.

Les implications de départ les plus utiles portent sur des figures à un ou deux degrés de liberté : chaque famille est assez nombreuse pour qu'on retrouve souvent certains de ses membres dans les situations géométriques que l'on veut étudier, elle est assez peu nombreuse pour pouvoir être sans peine parcourue en imagination, tous ses membres ayant l'air de la famille.

Dans la deuxième partie, nous essayons, en développant quelques chapitres de géométrie plane, de montrer comment on peut construire « une géométrie naturelle », s'appuyant sur les instruments de pensée spontanés des élèves. Ces instruments prennent en compte, outre les déductions de type ordinaire, certains mouvements des objets, des déformations continues, des perceptions de symétries, etc. S'il est vrai que l'enseignement mathématique se doit de partir sur le terrain des élèves, il faut s'appuyer sur ces moyens initiaux de la pensée et rejoindre ultérieurement, quand on en ressent le besoin ou qu'on en a le projet, les modalités plus classiques du raisonnement mathématique. En expliquant les principaux phénomènes de la géométrie plane élémentaire, y compris certains théorèmes non évidents, à partir d'intuitions familières, nous espérons donner aux enseignants des clefs d'interprétation des difficultés qu'éprouvent leurs élèves à construire une première pensée géométrique structurée.

5 Objets et mouvements, figures ou transformations ?

On peut se demander si dans l'apprentissage de la géométrie il faut donner la priorité aux objets par rapport aux mouvements, aux transformations, ou bien l'inverse. Mais les isométries et similitudes sont constitutives de la notion d'objet, les objets sont structurés par des symétries (voir chapitre 2). Ces symétries sont perçues grâce aux mouvements correspondants des mains et des yeux. Le parallélisme et l'orthogonalité, les médianes, médiatrices et bissectrices sont des éléments de symétrie ; les représentations planes sont des transformations d'objets ; les frises, les pavages et les réseaux sont des objets symétriques interprétés dans le cadre des groupes de transformations. Au total, les figures et les transformations nous semblent être, d'un bout à l'autre de l'enseignement, et dans le fond de la géométrie elle-même, les deux faces indissociables de la géométrie. La pensée saisit et interprète les unes en s'appuyant sur les autres et réciproquement. La géométrie est un dialogue ininterrompu entre les figures et les transformations.

6 Représenter les objets

Les maquettes et diverses sortes de projections amènent dans le champ des perceptions claires des représentations des objets qui nous échappent parce qu'ils sont trop grands, trop petits, mal situés, indéplaçables.

La plupart des représentations ressemblent aux originaux du fait qu'elles sont linéaires. Mais lorsque, telles les projections, elles enlèvent une dimension aux objets, elles provoquent des ambiguïtés, des pertes d'information. Il faut donc apprendre à les interpréter.

L'apprentissage de la géométrie de l'espace provoque un paradoxe : d'une part on ne peut apprendre cette géométrie sans s'appuyer sur des représentations, et d'autre part il faut connaître assez de géométrie pour interpréter ces représentations, et davantage pour en produire. Apprendre à les interpréter, c'est aussi apprendre à « voir dans l'espace ».

Les représentations ressemblent aux images visuelles, mais s'en distinguent du fait qu'elles obéissent à des règles précises. Il faut apprendre à les discerner.

D'autre part, les diverses projections sont des clefs d'interprétation de phénomènes réels tels que les ombres au soleil et à la lampe, et la photographie.

La perspective, outre son importance culturelle dans l'histoire de la peinture, conduit par extension aux projections centrales de tout l'espace et à la géométrie projective. Sur le terrain de cette dernière, on peut apprendre ce que sont les mathématiques formalisées : il suffit de penser à la banalisation des points et droites à l'infini et à la théorie de la dualité.

Les projections cartographiques, outre leur utilité pratique, sont des exemples bienvenus de transformations non linéaires.

Ces considérations suffisent à montrer que les représentations sont d'une importance pratique, théorique et culturelle considérable. Non seulement, comme nous l'avons dit, elles sont indispensables pour apprendre la géométrie de l'espace, mais même on exagérerait peu en les proposant comme thème unique de cet apprentissage. Elles sont porteuses de tous les éléments essentiels de cette géométrie.

Elles peuvent être pratiquées à tous les âges, depuis les dessins représentatifs des tout petits enfants, en passant par les projections orthogonales et parallèles, jusqu'à la perspective centrale. Nous espérons que la description succincte que nous en donnons à la quatrième partie aidera les commissions de programme et les enseignants à dépasser la difficulté chronique que beaucoup de personnes éprouvent à cet égard.

7 La linéarité comme fil conducteur

Un enseignement « en spirale » s'étend par nature à l'ensemble de la scolarité. Mais pour le concevoir, il faut saisir l'enchaînement des matières d'un bout à l'autre. Nous avons essayé de montrer que la linéarité, sans cesse contrastée à la non-linéarité, est un fil conducteur fort, sinon très apparent. La linéarité, c'est avant tout la conservation de la somme, qui est la première et la plus naturelle des opérations.

On trouve la linéarité dans les grandeurs, avant toute mesure, ne serait-ce que lorsqu'on reproduit un dessin en plus petit ou en plus grand. La mesure des grandeurs est linéaire : la mesure de la somme de deux grandeurs est la somme des mesures. La proportionnalité est l'expression de la linéarité à une dimension. En tant que fonction, elle se représente par un graphique en ligne droite.

Les transformations usuelles du plan font voir la linéarité à deux dimensions, avec une explosion de phénomènes nouveaux. Le calcul vectoriel et matriciel exprime cette forme plus riche de la linéarité, dans laquelle la conservation des rapports (qui, en gros, découle de celle de la somme) est remplacée par la conservation des combinaisons linéaires.

La recherche des sous-espaces invariants et des valeurs propres des transformations linéaires sous-tend un grand nombre d'applications de l'algèbre linéaire en mécanique, électricité, statistique, programmation, théorie des jeux. Ainsi, en apprenant les transformations linéaires du plan vers 13 ou 14 ans, les élèves se forgent des intuitions qui peuvent leur venir à point dans la majorité des filières de l'enseignement supérieur.

Dans notre cinquième partie, nous avons tenté d'expliquer, en le clarifiant, l'engendrement de la structure linéaire d'un bout à l'autre de la scolarité. Nous avons cherché à montrer des parentés significatives.

Il ne faudrait pas tirer de notre exposé la conclusion que toute cette matière devrait être enseignée dans l'ordre que nous avons adopté, qui est en gros l'ordre de son engendrement épistémologique. Une progression convenable de l'apprentissage se doit de respecter l'environnement et la démarche des enfants, plutôt qu'une théorie écrite pour des adultes. Voici deux exemples de cela. D'abord il faut laisser les enfants s'intéresser à toutes les mesures de grandeurs que la vie quotidienne leur offre, même avant qu'ils aient appris systématiquement à mesurer. Ensuite, il ne faut pas, parce que le non-linéaire est plus difficile que le linéaire, en reporter la rencontre. Le linéaire se comprend d'emblée par confrontation au non-linéaire. Lorsqu'on rencontre un phénomène modélisable par une fonction, il faut se demander tout de suite s'il est ou non linéaire.

8 L'orientation

L'orientation est un domaine qui nous a semblé mériter un traitement à part. Dans le plus jeune âge, elle est liée à la psychomotricité. Les premières découvertes sont celles du dessus et du dessous, puis de l'avant et de l'arrière, par rapport à soi, puis par rapport à des « objets » déjà orientés, tels qu'une autre personne, un vélo,... La gauche et la droite sont plus difficiles, vu la symétrie du corps humain.

Le plan conduit à l'orientation des triangles et polygones, des cercles, des horloges, des systèmes de deux axes. Un plan plongé dans l'espace pose le problème des changements liés au passage de l'observateur d'un côté à l'autre du plan.

Dans l'espace, on découvre l'orientation des parallélipipèdes, des tire-bouchons, des systèmes de trois axes, et les diverses règles d'orientation qu'utilisent les physiciens. On découvre aussi les surfaces non orientables comme le ruban de Möbius. Et enfin vient l'orientation d'un espace à n dimensions.

Il est significatif de trouver ainsi une chaîne quasi ininterrompue de phénomènes depuis le moment où un enfant se met debout – avec la tête en haut – jusqu'aux changements de base dans un espace vectoriel.

Ajoutons enfin à ces conclusions une remarque sur la portée du travail. Quel peut être le rôle d'une étude de synthèse sur un problème aussi vaste ? Certainement pas de creuser aussi profondément que possible aucun sujet particulier. Mais peut-être de poser ou de préciser des questions à la lumière de la vue d'ensemble. Nous pensons qu'un regard global sur l'enseignement – en l'occurrence de la géométrie – est indispensable : il faut bien tâcher de savoir, en dépassant toutes les divisions horizontales du système d'enseignement, d'où on vient, où on va et comment on y va.

Bibliographie

Buekenhout F. [1982], Goals of geometry teaching based on the spiral principle, *in Colloque International sur l'Enseignement de la Géométrie*, p. 7–21, Sous-Comission Belge de la CIEM (Commission Internationale sur l'Éducation Mathématique), Mons.

Cellule de Pilotage [1996], *Mathématiques de 10 à 14 ans. Continuité et compétences*, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles.

CREM [1995], *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

Danblon P. (coordinateur) [1990], *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles.

Demal M. [1998], *Géométrie des transformations à l'école primaire.* Crem, Nivelles et Groupe d'Étude des Premiers Éléments de Mathématiques, Université de Mons-Hainaut.

Klein F. [1872], *Le programme d'Erlangen*, Éditions Jacques Gabay, 1991.

Robert P. [1967], *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*, Société du Nouveau Littré.

1 Les origines de la géométrie

Arnauld A. [1667], *Nouveaux élémens de géométrie*, Charles Savreux, Paris. Rééd. IREM de Dijon.

Arnheim R. [1976], *La pensée visuelle*, Flammarion. Traduction C. Noël et M. Le Cannu.

Ascher M. [1991], *Ethnomathematics, a multicultural view of mathematical ideas*, Brooks/Cole, Pacific Grove, California.

Berté A. [1993], *Mathématique dynamique*, Nathan pédagogie, Paris.

Bkouche R. [1995], L'achèvement de l'enseignement des mathématiques, *Repères*, 21, p. 79–89.

Bkouche R., B. Charlot et N. Rouche [1991], *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris.

Braudel F. [1969], *Écrits sur l'histoire*, Flammarion, Paris.

Clairaut A.-C. [1741], *Éléments de Géométrie*, Paris. Rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

Coste-Roy M., P. Knerr, J. Martzloff et R. Tran-Dang [1980], *Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le théorème de Pythagore sans jamais oser le demander*, IREM de Paris-Nord, Paris.

Descartes R. [1637], *Discours de la méthode*, Paris. Rééd. Garnier, Paris, 1942.

Euclide [1990], *Les éléments, volume 1, Introduction générale et Livres I à IV*, Presses Universitaires de France. Introduction générale par Maurice Caveing et traduction et commentaires du texte de Heiberg par Bernard Vitrac.

Freudenthal H. [1973], *Mathematics as an educational task*, Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Freudenthal H. [1983], *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Gonseth F. [1936], *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique*, A. Blanchart, Paris.

Husserl E. [1962], *L'origine de la géométrie*, Presses Universitaires de France, Paris. Trad. J. Derrida. 3e éd. 1990.

Mach E. [1922], *L'analyse des sensations, le rapport du physique au psychique*, Éditions Jacqueline Chambon, Nîmes, 1996. Traduit de l'édition originale allemande *Analyse der Empfindungen* par F. Eggers et J.-M. Monnoyer.

Martzloff J.-C. [1990], Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises, *in Actes du 7e colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques*, p. 131–153, IREM de Lyon, Lyon.

Merleau-Ponty M. [1945], *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris.

Ninio J. [1989], *L'empreinte des sens, perception, mémoire, langage*, Odile Jacob, Paris.

Pascal B. [1657-58], De l'esprit géométrique et de l'art de persuader, *in Oeuvres complètes*, Seuil, Paris, 1963.

Piaget J. [1967], *La construction du réel chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

Piaget J. et B. Inhelder [1947], *La représentation de l'espace chez l'enfant*, deuxième édition, Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

Piaget J., B. Inhelder et A. Szeminska [1948], *La géométrie spontanée de l'enfant*, deuxième édition, Presses Universitaires de France, Paris, 1973.

Poincaré H. [1927], *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris.

Rouche N. [1990], Prouver : amener à l'évidence ou contrôler les implications ?, *in La démonstration mathématique dans l'histoire*, p. 8–38, IREM de Besançon et IREM de Lyon.

Vygotski L. [1978], *Mind in Society. The development of higher psychological processes*, Harvard University Press.

Vygotski L. [1997], *Pensée et langage*, La Dispute, Paris. Trad. F. Sève.

Wallon H. [1970], *De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée*, Flammarion, Paris.

Weber M. [1992], *Essai sur la théorie de la science*, Pocket, Paris.

2 Une géométrie naturelle

Artin E. [1957], *Geometric algebra*, Interscience, New York.

Bachmann F. [1973], *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, Berlin.

Birkhoff G. D. et R. Beatley [1959], *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company.

Choquet G. [1964], *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris.

Clairaut A.-C. [1741], *Éléments de Géométrie*, Paris. Rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

Dieudonné J. [1968], *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann.

FESEC [1996], *Document d'accompagnement du programme de mathématiques, deuxième degré de transition, troisième année.*

Freudenthal H. [1973], *Mathematics as an educational task*, Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

GEM [1982], *L'archipel des isométries. Essai de redécouverte*, Dossier GEM n°3, Louvain-la-Neuve.

Halmos R. [1960], *Naive set theory*, D. Van Nostrand, Princeton.

Hilbert D. [1899], *Foundations of geometry*, Open Court, La Salle, 1971.

Kline M. [1997], *Calculus, an intuitive and physical approach*, John Wiley, New York.

Papy G. [1970], *Mathématique moderne (1 et 2)*, Didier, Bruxelles.

3 La géométrie en classe à douze ans

Baron L. [1995], *De la construction mathématique à sa représentation en grande section*, Les guides Magnard, Paris.

Baron L. [1996], *Du jeu à la construction mathématique en moyenne section*, Les guides Magnard, Paris.

Bertotto A. et J. Hélayel [1996], *Enseigner la géométrie, Cycle des apprentissages fondamentaux, GS, CP, CE1*, Bordas, PAris.

Boursin D. [1997], *Pliages, premier pas*, Dessain et Tobra.

CREM [1998], *Des images aux transformations géométriques. Transformer une image*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

De Block-Docq C. et N. Rouche [1996], Couper en deux, c'est bête comme chou ! Voire, *in Mathématiques de 10 à 14 ans. Continuité et compétences*, Cellule de pilotage du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles.

De Lièvre B. et L. Staes [1993], *La psychomotricité au service de l'enfant*, Belin, Paris.

Demal M. [1998], *Géométrie des transformations à l'école primaire.* Crem, Nivelles et Groupe d'Étude des Premiers Éléments de Mathématiques, Université de Mons-Hainaut.

Hameau C. [1996], *La géométrie par le dessin au cycle* iii, Nathan, Paris.

Jeu du Miroir (sans nom d'auteur), [sans date], Gonge, Braband (Danemark).

Jullemier G. [1989], *Jouer c'est très sérieux, Activités pratiques à l'école maternelle*, Hachette Écoles, Paris.

Mitsumasa A. [1994], *Jeux mathématiques, Vol. 1-13*, Père Castor Flammarion, Paris.

Müller G. et E. Wittmann [1997], *Spiegeln mit dem Spiegelbuch*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Leipzig.

Sénéchal B. [1979], *Groupes et géométries*, Hermann, Paris.

Van Dieren-Thomas F., N. Rouche, J. Ottevaere et M. Vilanoy-Schul [1993], *De question en question 1*, Didier Hatier, Bruxelles.

4 Représenter les objets

Adrait R. et D. Sommier [1991], *Guide du constructeur en bâtiment*, Hachette technique.

Audibert G. [1990], *La perspective cavalière*, Publication de l'APMEP n° 75.

Barneda-Kaczka C. [1991], *Papier et volumes avec les 5/6 ans*, Nathan, Paris.

Barneda-Kaczka C. [1993], *Objets géants, structures mouvantes avec les 2/6 ans*, Nathan P, Paris.

CDSMath-7 [1994], *Géométrie de l'espace 1*, Centre de Didactique des Sciences, Mons.

Clairaut A.-C. [1741], *Éléments de Géométrie*, Paris. Rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

Comar P. [1996], *La perspective en jeu ; les dessous de l'image*, Gallimard.

CREM [1995], *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

Cuisinier G., D. Legrand et J. Vanhamme [1995], *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe*, Proposition GEM N° 18, Academia-Érasme.

Desmarets A., B. Jadin, N. Rouche et P. Sartiaux [1997], *Oh, moi les math...*, Talus d'Approche, Mons.

Dürer A. [1525], *Underweysung der Messung.* Traduction française par Jeanne Peiffer sous le titre *Géométrie*, Éditions du Seuil, 1995.

ERMEL [1982], *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 3*, SERMAP-Hatier, Paris.

Flocon A. et R. Taton [1990], *La perspective*, P.U.F., coll. « Que sais-je ? ».

Gilbert T. [1987], *La perspective en questions*, Proposition Gem n° 12, Ciaco, Louvain-la-Neuve.

Guillaume P. [1979], *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris.

Klein F. [1872], *Le programme d'Erlangen*, Éditions Jacques Gabay, 1991.

Krysinska M. [1992], *Géométrie dans l'espace, géométrie de l'espace*, Academia-Érasme, Louvain-la-Neuve.

Michel F. [1985], La géométrie des cristaux, *Mathématique et Pédagogie*, 53, p. 29–46.

Müller G., M. Röhr et E. Wittmann [1997], *Schauen und Bauen, Geometrische Spiele mit Quadern*, Klett, Leipzig.

Moinil D. et C. Goossens [1983], *La perspective cavalière, une projection de tous les jours*, Mémoire de licence sous la direction de N. Rouche, GEM-UCL, Louvain-la-Neuve.

Noël G., F. Pourbaix et P. Tilleuil [1997], *L'algèbre linéaire au troisème degré du secondaire*, Université de Mons-Hainaut.

Parszyz B. [1989], *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*, Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

Piaget J. et B. Inhelder [1947], *La représentation de l'espace chez l'enfant*, deuxième édition, Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

Soleil I. [1991], *De la perspective à la projective*, Mémoire de licence sous la direction de N. Rouche, GEM-UCL, Louvain-la-Neuve.

Van Dieren-Thomas F., N. Rouche, J. Ottevaere et M. Vilanoy-Schul [1993], *De question en question 1*, Didier Hatier, Bruxelles.

5 Grandeurs, repérages, linéarité

Bair J. [1990], *Algèbre linéaire pour l'économie et les sciences sociales*, De Boeck, Bruxelles.

Chevalier A. et H. Masy [1981], *L'outil vectoriel.* Mémoire de licence sous la direction de N. Rouche, GEM-UCL, Louvain-la-Neuve.

Coméliau M.-N. [1988], *La naissance de la linéarité, l'apprentissage des fractions et proportions d'après Hans Freudenthal*, Mémoire de licence, Louvain-la-Neuve.

Cordaro C. [1978], *L'algèbre linéaire et la géométrie plane en quatrième année d'enseignement secondaire.* Mémoire de licence, Louvain-la-Neuve.

CREM [1998], *Des images aux transformations géométriques (trois brochures)*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

ERMEL [1977], *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, 6 vol.*, SERMAP-OCDL, puis SERMAP-Hatier, Paris, à partir de 1977.

ERMEL [1991], *Apprentissages numériques, 5 vol.*, Hatier, Paris, à partir de 1991.

Étienne N. [1995], *La géométrie des transformations à l'école*, Mémoire de licence sous la direction de F. Buekenhout, Université Libre de Bruxelle.

Fletcher T. [1972], *L'algèbre linéaire par ses applications*, CEDIC, Paris-Lyon. Adapté de l'anglais par M. et V. Glaymann.

Freudenthal H. [1983], *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

GEM [1982], *L'archipel des isométries. Essai de redécouverte*, Dossier GEM n°3, Louvain-la-Neuve.

Goossens A. et A. Stragier [1983], *Le vecteur, outil de démonstration.* Mémoire de licence, Louvain-la-Neuve.

Maxwell E. [1975], *Geometry by transformations*, Cambridge University Press.

Minet M.-N. [1984], *Des transformations au carrefour de trois géométries : synthétique, analytique, vectorielle.* Mémoire de licence sous la direction de N. Rouche, GEM-UCL, Louvain-la-Neuve.

Noël G., F. Pourbaix et P. Tilleuil [1997], *L'algèbre linéaire au troisème degré du secondaire*, Université de Mons-Hainaut.

Rouche N. [1992], *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier, Bruxelles.

Rouche N. et J. Mawhin [1973], *Équations différentielles ordinaires (1er volume)*, Masson, Paris.

Soto Cornejo I. [1993], *Les mathématiques dans la vie quotidienne des paysans chiliens*, Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.

6 L'orientation

De Lièvre B. et L. Staes [1993], *La psychomotricité au service de l'enfant*, Belin, Paris.

Gardner M. [1964], *L'univers ambidextre, les symétries de la nature*, Seuil, Paris. Traduction par C Roux et A. Laverne, 362 pages.

Le Boulch J. [1976], *Vers une science du mouvement humain, introduction à la phychocinétique*, E.S.F., Paris.

Lurçat L. [1982], *Espace vécu et espace connu à l'école maternelle*, Éditions ESF, Paris.

Index

Table des matières

L'orientation