Communauté française de Belgique

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

LE CONCEPT DE LINEARITE, UN FIL CONDUCTEUR DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Article publié dans
Le Point sur la Recherche en Education
N° 17
Octobre 2000

et diffusé sur
http://www.agers.cfwb.be/pedag/recheduc/point.asp

Service général des Affaires générales, de la Recherche en éducation et du Pilotage interréseaux
9-13, rue Belliard 1040 Bruxelles
Tél. +32 (2) 213 59 11
Fax +32 (2) 213 59 91

Le CREM est engagé depuis une année dans une recherche dont l'intitulé général est *Pratiquer la géométrie, développement d'outils pédagogiques pour un enseignement de la géométrie accessible à tous*. Cette recherche comportera deux volets : l'un est relatif à l'idée de linéarité dans l'enseignement de la géométrie, et l'autre, dont nous traiterons ultérieurement, s'intitulera *Vers une géométrie naturelle*. Notre recherche sur la linéarité est encore en cours, mais il nous est possible de donner déjà une idée de ses objectifs et de sa portée en offrant aux lecteurs de cette revue des éléments significatifs tirés de son introduction. On le verra, cette recherche confirme la tradition du CREM qui consiste à s'occuper de l'apprentissage des mathématiques dans sa continuité de la maternelle jusqu'à l'âge adulte.

Les auteurs de la recherche sont Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Luc Lismont, Nicolas Rouche, Thaïs Sander, Philippe Tilleuil, Éric Vanderaveroet, Françoise Van Dieren et Marie-Françoise Van Troeye.

Les mathématiques que l'on apprend de l'école maternelle jusqu'à 18 ans (et parfois au-delà) ne sont pas un amoncellement de résultats hétéroclites. Les diverses matières qui constituent la géométrie, l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse ainsi que la statistique et les probabilités se répondent entre elles, s'appuient souvent les unes sur les autres de diverses façons. Il est important que les enseignants connaissent ces liens, car ce sont eux qui assurent la mobilité de la pensée et la créativité, qui fournissent les principaux moyens de résolution des problèmes. Une pensée fragmentée et cloisonnée est au contraire condamnée à demeurer stérile.

L'objectif de cette étude est de mettre en évidence et d'expliquer un fil conducteur qui traverse toutes les mathématiques et que l'on peut désigner, quoiqu'ici de manière encore générale et vague, sous le nom de *linéarité*, ou par l'expression de *structure linéaire*. Toute notre étude consistera à développer ce thème et à montrer sa place dans l'apprentissage des mathématiques. Mais, pour que le lecteur voie dès maintenant à peu près où nous allons et par quelles étapes, essayons de dire simplement, sans entrer dans trop de détails, ce que nous entendons par *linéarité*.

1. Un exemple

Presque tous les matériaux dont sont faits les objets usuels peuvent nous aider à montrer, sans recourir à des mathématiques compliquées, un exemple de ce qu'est la *linéarité*. Pour fixer les idées, considérons l'aluminium.

(1) Une fonction. Chaque objet en aluminium, chaque morceau d'aluminium, possède un *volume* et un *poids*[1]. Et d'ailleurs, à un même volume correspond toujours le même poids. Le poids dépend du volume. On peut ainsi considérer la fonction qui à chaque volume d'aluminium fait correspondre son poids. Si on se donne un volume, il suffit de le peser pour avoir son poids. Réciproquement, à tout poids donné d'aluminium correspond son volume.

(2) Deux additions. On peut additionner les volumes : par exemple rassembler 2 dm^3 et 3 dm^3. On peut aussi additionner les poids : par exemple ajouter 4 kg à 10 kg. Ainsi la fonction en question fait correspondre une grandeur munie d'une somme (le volume) à une autre grandeur munie elle aussi d'une somme (le poids).

(3) L'image de la somme vaut la somme des images. Mettons en regard deux volumes et les poids correspondants, de la manière suivante :

2 dm^3	3 dm^3
5,4 kg	8,1 kg

La somme des volumes a pour poids la somme des poids, si bien que nous pouvons compléter notre tableau comme ceci :

2 dm^3	3 dm^3	5 dm^3
5,4 kg	8,1 kg	13,5 kg

(4) La proportionnalité. Deux volumes quelconques sont entre eux comme les poids correspondants. Par exemple 2 dm^3 est à 3 dm^3 comme 5,4 kg est à 8,1kg. On exprime souvent cela en abrégé sous la forme

$$\frac{2}{3} = \frac{5,4}{8,1}$$

(5) Égalité des rapports internes. On exprime aussi cette propriété autrement, à savoir en parlant de *rapports internes*. On passe de 2 à 3 dm^3 en multipliant 2 dm^3 par 1,5 ou 3/2. Le rapport est le même entre les poids correspondants : on passe de 5,4 kg à 8,1 kg en multipliant 5,4 kg par 1,5 ou 3/2.

(6) La règle de trois. La règle de trois est une expression calculatoire de la même situation. Si 2 dm^3 pèsent 5,4 kg, alors 1 dm^3 pèse 2 fois moins, c'est-à-dire 2,7 kg. Mais alors 3 dm^3 pèsent 3 fois plus, c'est-à-dire 8,1 kg.

[1] Nous ne distinguons pas ici le poids de la masse, car dans le présent exposé cette distinction n'a pas de raison d'être.

(7) Le rapport externe. Dans notre exemple, ce que l'on désigne du nom de *rapport externe* est le poids spécifique, qui est de 2,7 kg/dm^3. On passe d'un volume quelconque au poids correspondant en multipliant le volume par le poids spécifique. Par exemple :

$$3 \text{ dm}^3 \times 2{,}7 \text{ kg/dm}^3 = 8{,}1 \text{ kg.}$$

(8) Un graphique en ligne droite. Si on porte les poids en fonction des volumes dans un système d'axes gradués régulièrement, on obtient un graphique en ligne droite.

(9) Une pente constante. Ce graphique monte avec une pente constante. Cette pente peut être identifiée au poids spécifique.

(10) Une formule, une fonction du premier degré. Le poids p s'exprime en fonction du volume v par la formule $p = av$, dans laquelle a représente le poids spécifique. La fonction qui se trouve au second membre de cette égalité est du premier degré.

Ce sont là dix facettes de la linéarité, observées sur un exemple particulier et à un niveau d'abstraction modéré. Elles nous serviront de référence – par analogie et contraste – pour parler ci-après de la linéarité à d'autres niveaux, plus élémentaires ou plus avancés.

2 De 2 1/2 à 12 ans environ

Lorsqu'un enfant construit un train en mettant des bâtons bout à bout, on peut d'un certain point de vue dire qu'il additionne des longueurs. Tel n'est évidemment pas son premier objectif, qui est de faire un train, de faire voyager celui-ci, de l'amener en gare, d'embarquer des voyageurs, et bien d'autres choses encore que son imagination lui suggère. Il n'empêche que sans le savoir, il expérimente l'addition des longueurs. Un jour il apprend à reporter un étalon de longueur, c'est-à-dire à l'additionner à lui-même plusieurs fois, pour mesurer une longueur. En ce faisant, il construit une fonction qui à tout bâton, perche ou objet analogue fait correspondre la mesure de sa longueur, exprimée dans l'unité en question. Cette mesure est un nombre. Or les mesures (les nombres) peuvent aussi s'additionner. On est donc en présence d'un ensemble de longueurs (représentées par des objets allongés), qui peuvent être additionnées (on met les bâtons bout à bout), et de l'ensemble de leurs mesures dans une unité donnée. Et de plus, la mesure d'une somme de deux longueurs est la somme des mesures. Nous retrouvons donc bien ici les trois premières facettes de la linéarité, telles que nous les avons relevées ci-dessus.

Lorsqu'un enfant va faire les courses avec sa mère, il apprend d'abord que tout a un prix et que certaines marchandises se mesurent. Prenons l'exemple d'une marchandise qui se vend au poids. Ici aussi nous sommes en présence de deux ensembles, un ensemble de poids de marchandises et l'ensemble des prix correspondants. Le prix à payer est fonction du poids que l'on achète. L'enfant apprend que plus on en achète, plus il faut payer. Et même plus précisément que si on en achète deux ou trois fois plus, il faut payer deux ou trois fois plus, sauf bien entendu si le magasin offre une réduction à partir d'une certaine quantité. Le rapport des prix est donc habituellement égal au rapport des poids. Nous retrouvons ici l'égalité des rapports internes (voir ci-dessus la cinquième facette de la linéarité). Mais nous découvrons aussi un rapport externe, à savoir le prix à l'unité de poids, qui s'exprime par exemple en francs par kilo.

Une situation analogue est celle des mouvements les plus simples, ceux que l'on fait à vitesse constante. Prenons l'exemple d'un marcheur qui avance d'un pas régulier. Nous pouvons considérer l'ensemble des temps pendant lesquels il marche, et l'ensemble des distances qu'il parcourt.

A chaque temps correspond une distance. Et dans un temps deux ou trois fois plus long, le marcheur couvre une distance deux ou trois fois plus longue. Les rapports internes sont présents ici aussi, et égaux de part et d'autre. Le rapport externe est la vitesse, par exemple dans le cas présent 4 km/h.

Très tôt les enfants jouent avec des objets ou des personnages en réduction. Prenons l'exemple d'un petit éléphant représentant fidèlement un éléphant vrai. Sur le modèle, on peut mesurer tout ce qu'on veut : la longueur totale de la bête, sa largeur, la hauteur de ses pattes, la longueur de ses défenses, etc. Et on peut aussi faire les mêmes mesures sur l'éléphant vivant. À chaque mesure sur le modèle correspond une mesure sur l'animal vrai. Et ici aussi, les rapports internes sont conservés. Par exemple, si la largeur du petit éléphant vaut la moitié de sa longueur, il en ira de même pour le grand. Si la queue du petit a pour longueur les deux tiers de la longueur d'une de ses pattes, il en ira de même pour le grand. On retrouve ici aussi le rapport externe. Si ce qui mesure 1 cm sur le petit mesure 100 cm sur le grand, ce rapport vaut 100. On considère souvent ce rapport en sens inverse et on l'appelle alors l'échelle : on dit que le petit éléphant représente le grand à l'échelle 1/100. Les plans d'architecte représentent en général la situation sur le terrain à l'échelle 1/50. Les cartes de géographie utilisent des échelles beaucoup plus petites.
Remarquons que dans l'exemple des prix de marchandises, les deux ensembles en présence étaient de natures différentes : d'une part les poids, et de l'autre les prix. Il en allait de même pour le marcheur : d'une part les temps de marche, et d'autre part les distances. Dans le cas de l'éléphant en réduction, il s'agissait de deux ensembles de longueurs[2] : celles mesurées sur le petit et celles mesurées sur le grand.

Toutes ces choses que nous venons d'évoquer n'ont à première vue rien de commun. On pourrait tirer de là une curieuse devinette : qu'est-ce qui fait la ressemblance entre un train formé de baguettes alignées, des achats dans un magasin, un homme qui se promène et un éléphant en miniature ? Rien pour un
enfant, et c'est très bien ainsi. Il ne faut surtout pas essayer de lui inculquer trop tôt des concepts abstraits. Mais toutes ces situations le mettent en contact avec des réalisations de la linéarité, et celle-ci, comme nous essayerons de le montrer dans ce travail, est un fil conducteur de l'apprentissage des mathématiques. Il nous semble important que les enfants vivent pleinement, dans le registre d'intérêt qui est le leur et avec les moyens d'expression dont ils disposent à chaque âge, des situations qui seront porteuses d'apprentissages majeurs dans la suite de leur parcours scolaire.

Revenons à notre dernier exemple, celui des modèles réduits. On sait que les enfants reconnaissent assez tôt les modèles fidèles, ceux qui reproduisent sans faute grossière la forme de l'original. Ils diront spontanément, devant des représentations infidèles, des choses comme : il a de trop grandes oreilles, ou il n'a pas une si longue queue. Ils perçoivent donc assez bien le respect de la forme. Or ce respect est un effet de la linéarité. La forme est respectée quand les rapports entre les parties sont respectés. Le concept de linéarité est donc saisi dans certains de ses effets familiers bien avant d'être analysé, bien avant qu'apparaisse une théorie expliquant ces effets.

[2] Même si nous avons parlé aussi de largeur et de hauteur : nous voulons dire qu'il s'agissait toujours de mesures faites avec un mètre.

3 De 12 à 15 ou 16 ans

Au début de l'école secondaire, les élèves approfondissent plusieurs des matières qu'ils ont rencontrées à l'école primaire. Tel est le cas entre autres pour les mesures, quelles qu'elles soient : longueurs, aires, volumes, masses, et bientôt pressions, courants électriques, tensions, etc. Une mesure est le rapport d'une grandeur donnée à un étalon de cette grandeur. À l'école primaire, on s'est contenté d'étudier des mesures simples. À l'école secondaire, on apprend à exprimer des mesures plus compliquées, fractionnaires et décimales, ainsi qu'à additionner et multiplier ces mesures plus précises. La mesure étant, comme nous l'avons vu, une des réalisations de la linéarité, on approfondit en ce faisant la connaissance de celle-ci.

Les élèves étendent aussi leur connaissance des isométries et des similitudes, essentiellement dans le plan. Ils en étudient des cas plus variés, et sont amenés à reconnaître et à utiliser, selon le cas, la conservation des rapports internes ou l'existence d'un rapport externe (une échelle), permettant de passer d'une figure à une autre.

Ils étudient aussi les ombres au soleil et les projections parallèles. Le théorème de Thalès leur montre pourquoi, lorsqu'on projette une droite sur une autre parallèlement à une direction donnée, les rapports de longueurs mesurées sur une des deux droites sont toujours égaux aux rapports des longueurs correspondantes mesurées sur l'autre. Un autre effet, peut-être plus facile à imaginer, de la projection parallèle, est que toute graduation régulière d'une des deux droites donne par projection une graduation régulière sur l'autre. Lorsqu'on projette un objet à trois dimensions sur un plan, comme on le fait pour obtenir une perspective cavalière, on observe que les rapports de longueurs ne sont plus conservés en général, mais qu'ils le sont lorsque les longueurs considérées sont mesurées dans une même direction. Ce sont là à nouveau des manifestations diverses de la linéarité.

Mais un changement bien plus radical apparaît à l'école secondaire, avec l'étude des nombres relatifs[3]. Les mesures de grandeurs (par exemple les mesures de longueurs représentées par des segments de droite) sont toujours des nombres positifs. Mais par delà les segments on introduit aussi les déplacements possibles d'un point sur une droite, que l'on classe parfois dans la catégorie des *grandeurs orientées*. On additionne de tels déplacements en les enchaînant. On les mesure à l'aide de nombres relatifs, positivement si le déplacement se fait dans un sens, et négativement s'il se fait dans l'autre. On apprend par ailleurs à additionner les nombres relatifs. Et il se fait qu'en ce qui concerne les déplacements d'un point sur une droite, la propriété que la mesure d'une somme de tels déplacements est la somme de leurs mesures reste vraie.

On définit ensuite la multiplication et la division des nombres relatifs, ce qui permet d'exprimer le rapport de deux déplacements sur une droite. Et ce rapport peut être négatif. Une nouvelle notion de rapport apparaît donc, entraînant une généralisation de la notion de proportionnalité.

Qui plus est, les nombres relatifs permettent de repérer les points d'abord sur une droite, et ensuite dans le plan et dans l'espace. Leur acquisition dans l'enseignement accompagne celle des premières notions d'algèbre. Et donc on voit apparaître, au début du secondaire, les premières représentations graphiques de fonctions. Les graphiques les plus communs et les plus simples expriment géométriquement les propriétés des fonctions les plus simples elles aussi, à savoir les fonctions linéaires et affines.

[3] Nous utilisons cette dénomination de *nombres relatifs* pour ne pas avoir à faire, à ce moment de notre exposé, la distinction entre entiers, rationnels et réels, qui n'a rien à voir avec notre propos.

Comme nous l'avons vu dans notre exemple des volumes et des poids d'aluminium à la section 1, la linéarité est une construction intellectuelle qui s'appuie sur les notions de somme et de rapport. Or la linéarité ne disparaît pas lorsqu'on passe des grandeurs et des nombre positifs aux grandeurs orientées et aux nombres relatifs. Mais, l'addition et les rapports ayant changé lors de cette transition, on ne s'étonnera pas que la linéarité prenne alors un nouveau visage.

4 De 15 à 18 ans

Les vecteurs apparaissent vers la fin du secondaire. Ils servent à étudier les déplacements d'un point, cette fois-ci non plus sur une droite, mais dans le plan ou l'espace. Ils représentent aussi les translations, les forces, les vitesses. Ils conduisent à une addition d'un nouveau type, plus générale que celles étudiées jusqu'alors.

Ils s'accompagnent en outre d'une mutation de l'idée de rapport. Regardons en effet ce qu'est un rapport dans l'univers des nombres. On peut dire, en s'exprimant sommairement, que deux nombres sont dans un rapport déterminé si, en multipliant le second par le rapport, on retrouve le premier. Deux nombres (supposés non nuls ici pour simplifier) ont toujours un rapport. Lorsqu'on en arrive aux vecteurs, on définit une nouvelle multiplication, à savoir celle d'un vecteur par un scalaire (ou autrement dit par un nombre). On peut dire, en gros, que deux vecteurs parallèles[4] (non nuls) ont un rapport, au sens où il existe toujours un scalaire tel que, si on multiplie le premier vecteur par ce scalaire, on retrouve le second. Mais si les deux vecteurs ne sont pas parallèles, ils n'ont pas de rapport au sens que nous venons d'évoquer. Inutile donc d'essayer de passer de l'un à l'autre par une multiplication par un scalaire. Par contre il arrivera que l'on puisse passer de *plusieurs* vecteurs à un autre vecteur donné par ce que l'on appelle une combinaison linéaire des premiers. Et en ce sens, on peut dire que la notion de combinaison linéaire généralise, dans l'univers des vecteurs, la notion de rapport née dans l'univers des grandeurs et des nombres.

La linéarité passe le cap de cette nouvelle transition, celle qui va des grandeurs et des nombres vers les vecteurs. On ne s'étonnera pas plus ici que ci-dessus que, la somme et le rapport ayant pris ce nouveau visage, la linéarité subisse la mutation correspondante, qui s'avère en fait être une généralisation.

Mais l'enseignement de l'analyse à la fin du secondaire fait voir une nouvelle facette importante de la linéarité. En effet, les élèves étudient d'année en année des fonctions de plus en plus variées, dont beaucoup ne sont plus ni linéaires, ni affines. Les graphiques courbes deviennent fréquents, et ils ne sont pas en général d'un abord facile. D'où cette idée, qui est à la base du calcul différentiel, d'étudier ces fonctions localement, c'est-à-dire sur de très petits intervalles, parce qu'alors elles ressemblent très fort à des fonctions linéaires ou affines. Les dérivées et les différentielles ne sont pas autre chose que des instruments qui permettent de ramener localement le non-linéaire au linéaire. Et comme les dérivées servent à étudier les tangentes, les taux de variation, les pentes, les vitesses, …, c'est aussi dans tous ces domaines que l'idée linéaire montre son pouvoir éclairant. En réalité, même si « le linéaire » n'est pas toujours facile, on peut dire qu'il est en général plus facile que « le non-linéaire ». La linéarité ainsi comprise est en quelque sorte une forme de pensée.

[4] Seules des droites peuvent être qualifiées de parallèles. On espère que le lecteur nous pardonnera cet abus de langage.

5 Le concret et l'abstrait

Nous l'avons vu au fil de l'analyse ci-dessus, la linéarité est une idée qui s'applique à des domaines extrêmement divers, allant des grandeurs de toutes sortes et de leur mesure vers les taux de croissance et les vitesses en passant par les matériaux homogènes, les achats de marchandises, les modèles réduits, les circuits électriques, la perspective cavalière, les combinaisons de forces et les centres d'inertie. Et cette liste n'est certainement pas exhaustive.

Nous avons esquissé aux sections 2 à 4 ci-dessus les caractères communs à tous ces domaines. Montrons maintenant de quelle façon, en recourant à quelques symboles mathématiques, il nous sera possible dans la suite d'exprimer précisément ces caractères communs.

Et tout d'abord revenons vers l'école maternelle. Désignons par a et b deux baguettes, et par $a + b$ les deux baguettes mises bout à bout par un enfant pour faire un train. Si l'enfant veut faire un train deux fois plus long, il peut aligner deux fois la baguette a, ce qui donne $2a$, et deux fois la baguette b, ce qui donne $2b$. Il obtient ainsi $2a + 2b$. Mais une autre façon d'obtenir un train deux fois plus long est de reproduire la configuration $a + b$, ce qui s'écrit $2(a + b)$. Ainsi, si on ne s'intéresse qu'à la longueur du train, ce qui – répétons-le – n'est pas souvent la seule préoccupation de l'enfant, on peut écrire

$$2a + 2b = 2(a + b). \tag{1}$$

Cette égalité exprime une propriété connue sous le nom de *distributivité*. Or, chose remarquable, la même égalité peut être appliquée au cas où, au lieu de représenter deux grandeurs, les lettres a et b représentent des mesures de grandeurs, ou des mesures de grandeurs orientées (des nombres relatifs), ou des vecteurs. Il faut aussi bien entendu interpréter le signe + de manière appropriée, c'est-à-dire comme représentant, selon le cas, la somme de deux grandeurs, ou celle de deux nombres positifs, ou celle de deux nombres relatifs, ou celle de deux vecteurs. Qui plus est, l'égalité demeure applicable si on y remplace le facteur 2 par un nombre réel quelconque. Une égalité telle que (1) exprime ce que l'on appelle une propriété de structure. Elle est abstraite au sens où on n'y voit plus apparaître les choses particulières qui lui ont donné naissance : grandeurs, nombres divers, vecteurs. Et donc, chaque fois que l'on veut s'en servir, il faut la réinterpréter.

Considérons un deuxième exemple, en repartant à nouveau de l'école maternelle. Si notre enfant de tout à l'heure fait maintenant un train de trois baguettes a, b et c, il obtient un train de même longueur s'il commence par aligner a et b pour constituer $a + b$ et qu'ensuite il ajoute c, ce qui au total donne $(a + b) + c$, ou si au contraire il commence par mettre b et c bout à bout et ensuite place a devant. Cette observation est résumée par l'égalité

$$(a + b) + c = a + (b + c), \tag{2}$$

qui exprime la propriété connue sous le nom d'*associativité* de l'addition. Ici comme ci-dessus, cette propriété de structure est partagée par les grandeurs, les nombres de différentes sortes et les vecteurs, à condition que l'on interprète le signe + dans chaque cas de manière appropriée.

Pour caractériser la linéarité, il faut faire appel à d'autres propriétés de structure, comme par exemple l'existence de certains éléments neutres, d'éléments symétriques, etc. Nous n'avons pas souhaité faire ici un exposé complet, mais seulement donner une idée de ce qu'est une propriété de structure.

Esquissons maintenant une nouvelle vue d'ensemble de l'enseignement des mathématiques. Nous sommes entourés de grandeurs de toutes sortes, longueurs, aires, volumes, poids, etc., dotées de propriétés communes. Celles-ci sont vécues par les petits enfants, sans que l'on s'efforce de les leur inculquer sous une forme abstraite, c'est-à-dire dissociées des contextes où elles apparaissent. Les mesures de grandeurs engendrent les nombres positifs, que l'on étudie aussi d'abord dans des contextes, et puis petit à petit, également pour eux-mêmes. Il en va de même ensuite pour les nombres relatifs, et ensuite vers la fin du secondaire pour les vecteurs. Les mathématiques en construction tout au long du parcours scolaire obéissent ainsi à une double tendance. D'une part, elles expriment les propriétés d'un nombre croissant d'objets et de situations les plus divers. Et d'autre part, du fait même de leur champ d'application de plus en plus étendu, elles sont obligées d'adopter des formes d'expression indépendantes de tous ces contextes. Le caractère abstrait des formulations n'est pas d'abord une triste fatalité de la pensée mathématique, il est avant tout la condition de son applicabilité très étendue.

Les structures tout à fait abstraites, c'est-à-dire celles qui ont rompu tout lien avec les contextes – mathématiques ou autres – où on peut les appliquer, et que pour cette raison on appelle souvent structures formelles, ne sont en général pas enseignées à l'école secondaire. Il s'agit principalement, dans le domaine qui nous occupe ici, des structures appelées *groupe*, *corps* et *espace vectoriel.* Elles jouent les rôles principaux dans la théorie mathématique appelée *algèbre linéaire.* Cette théorie est l'un des piliers de l'enseignement supérieur, que ce soit dans les études de mathématiques ou dans celles qui, telles les sciences de la nature et l'économie, prennent appui sur les mathématiques.

Le grand défi de l'enseignement mathématique de la maternelle jusqu'à 18 ans est que les théories émergent progressivement, pour des raisons plausibles et accessibles aux élèves, des multiples contextes qui ont vocation de leur donner naissance. C'est la condition pour que cet enseignement se pratique dans un univers de sens. Il est nécessaire que l'abstraction – l'opération d'abstraire – ait, chaque fois qu'on la pratique, une raison d'être et que les élèves apprennent à jouer cette sorte de contrepoint qui, faisant passer des contextes et des questions à la théorie et réciproquement, assure l'efficacité de la pensée. Qui plus est, tout qui a expérimenté ce mouvement de la pensée en recherche sait combien il est source de joies.

Revenons pour un moment à la pensée linéaire. Nous avons tenté de montrer comment elle se développe au fil de la scolarité, comment elle se généralise, se complexifie et étend le champ de ses applications. La linéarité constitue[5], comme nous l'avons dit, un fil conducteur qui montre la cohérence des mathématiques. L'enseignement de cette discipline ne va donc pas n'importe où par n'importe quel chemin, au gré des problèmes que l'on veut et peut résoudre à chaque âge. Les enseignants des petites classes se demandent souvent à quoi ils préparent leurs élèves et si ce qu'ils enseignent servira vraiment et comment cela servira. Nous souhaitons dans ce travail leur donner des éléments de réponse à ces interrogations importantes. D'un autre côté, les enseignants des classes plus avancées se demandent souvent quelles connaissances préalables, intuitives ou théoriques, leurs élèves ont ou devraient avoir assimilées pour construire de nouvelles connaissances sur un terrain de sens bien préparé. Nous espérons également que notre travail contribuera à éclairer ces enseignants. En bref, il est important, où que l'on soit, de savoir d'où on vient et vers où l'on va.

[5] Parmi d'autres certes, mais l'objet de notre étude se limite ici à la linéarité.