COLLECTION "DOCUMENTS DU CREM"

No 2 AOÛT 1996

Devons-nous encore enseigner les fractions ?

Peter Hilton
Case Western University
Traduit par Marie-Françoise Van Troeye

CREM a.s.b.l.
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Emile Vandervelde B-1400 Nivelles, Belgique

Devons-nous encore enseigner les fractions ?

L'article ci-dessous est la traduction de : Peter J. Hilton, Do we still need to teach fractions ?, *Proccedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, 1983 ; 37-41. Il nous a semblé utile de le rendre accessible au public des enseignants francophones parce que d'une part les fractions demeurent l'une des pierres d'achoppement de l'enseignement élémentaire, et d'autre part, que Peter J. Hilton est un auteur dont les opinions, à coup sûr, comptent. Qu'il soit ici cordialement remercié pour avoir autorisé la diffusion de ctte traduction.*

1 Introduction

Bien sûr, la question ne doit pas être prise au pied de la lettre - certainement nous devons enseigner les fractions dans le cadre du programme de l'école élémentaire. Mais je soutiens que nous ne devrions plus les enseigner comme elles l'ont été (et comme elles le sont encore). En effet, si la question était : « devons-nous encore enseigner les fractions comme elles le sont dans la majorité des cours élémentaires ? », alors elle pourrait être prise au pied de la lettre et je pourrais répondre : « non ; en fait, nous n'aurions jamais dû enseigner les fractions de cette façon ».

Je vais souligner, dans la section suivante, cinq défauts fondamentaux de l'enseignement des fractions. Tous les cours ne montrent pas tous ces défauts, mais je peux attester, après un examen minutieux des textes couramment utilisés, qu'ils présentent tous certains de ces défauts et que certains les présentent tous. Je proposerai, à la section 3, une approche différente de l'enseignement des fractions. Naturellement, je ne prétends pas être original dans toutes mes suggestions - en particulier, je dois reconnaître que l'usage des concepts probabilistes pour motiver le calcul sur les fractions est maintenant recommandé presque universellement, bien que je trouve que certains textes n'appliquent cette recommandation que « du bout des lèvres ».

L'approche que je vais proposer peut, bien sûr, être dans une large mesure déduite de la description des défauts décrits à la section 2. Toutefois, je ferai, à la fin de cet article, quelques nouvelles suggestions pour enseigner les fractions comme une partie des *mathématiques* et ces suggestions ne sont pas directement déductibles du contenu de la section 2. J'affirme que par peur, aversion, ou peut-être à cause de principes mal orientés, nous avons tendance à enseigner l'arithmétique des fractions exclusivement comme un savoir-faire, en n'accordant aucune attention à son riche contenu mathématique. Un bon cours devrait mettre l'accent plus sur les mathématiques et l'utilité de l'arithmétique des fractions et moins sur un savoir-faire essentiellement technique.

2 Les défauts de l'enseignement actuel des fractions

2.1 Applications inadéquates

La multiplication des fractions conduit naturellement à des applications sensées. C'est plus difficile pour les autres opérations arithmétiques, mais la division n'étant pas beaucoup présente dans le programme, la prolifération des applications inadéquates est beaucoup plus visible du côté de l'addition et de la soustraction. « Tommy travaille $2\frac{7}{12}$ heures le matin et $\frac{2}{3}$ heures l'après-midi. Quel temps total travaille-t-il ? Une recette prévoit $\frac{7}{8}$ de tasse de sucre. Anita a déjà versé $\frac{1}{3}$ de tasse, combien de sucre doit-elle encore verser ? ». Il n'est pas nécessaire d'expliquer en quoi ces exemples, tirés de textes répandus, sont fallacieux. Mais il existe aussi une forme plus subtile d'«inadéquation» dans laquelle les applications, qui sont de vrais problèmes de vie courante, ne justifient nullement l'attention donnée aux opérations arithmétiques. Ainsi, dans un texte, on trouve quarante problèmes de « drill » sur la soustraction des nombres mixtes incluant la recherche du plus petit commun dénominateur, le regroupement et la simplification (exemple : $6\frac{1}{6} - 4\frac{2}{3} = 1\frac{1}{2}$). Probablement pour rendre cet épouvantable exercice plus digeste, les problèmes de drill sont suivis de problèmes énoncés en phrases [*wordproblems*] qui, soyons honnêtes, comprennent seulement la soustraction de fractions ayant 2, 4 ou 8 comme dénominateur.

2.2 Confusion sur le rôle des décimaux

Cette confusion apparaît à deux niveaux. Il y a confusion entre fractions et décimaux comme entités mathématiques et confusion entre leurs rôles utilitaires dans les applications. Beaucoup de textes prétendent contenir des leçons destinées à montrer comment convertir des fractions en décimaux. En fait, bien sûr, une telle conversion est rarement possible, puisque cela impose que la fraction soit équivalente à une fraction dont le dénominateur soit factorisable en facteurs 2 ou 5. Ce fait mathématique fondamental est masqué par le fait qu'on se concentre (mais pas ouvertement) d'abord sur de telles fractions ; et puis en disant que dans certains cas, le résultat décimal ne se « termine pas ». Jusqu'à ce point, tous les décimaux étaient limités... et, bien sûr, c'est ainsi qu'ils doivent être en vertu de leur définition. Les décimaux - les élèves ont déjà étudié cela - peuvent s'additionner, se soustraire et se multiplier grâce à certains algorithmes finis. Les décimaux infinis, non. Donc les « décimaux » « finis » sont de tous nouveaux animaux, à condition qu'ils existent (la croyance que les décimaux infinis sont des décimaux est apparentée à la croyance qu'une hauteur moyenne est une hauteur ou qu'une famille moyenne est une famille). L'élève est, quoiqu'il en soit, encouragé à écrire $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ S'il ou elle demande ce que représentent les petits points, on lui répondra sans doute qu'ils représentent 333 et trois autres points.

Si on regarde les applications, on trouve une même confusion de rôles. C'est malheureusement vrai qu'en raison du maintien aux USA d'un système lunatique de poids et mesures, il arrive encore souvent que les mesures s'expriment en fractions d'unité. Toutefois il n'est pas du tout naturel de mesurer en fractions étant donné les degrés de précision demandés ($\frac{1}{2}$ inch, $\frac{1}{4}$ inch, $\frac{1}{8}$ inch, $\frac{1}{16}$ inch). Les mesures se font naturellement en décimaux ; et les mesures exprimées en fractions avec des dénominateurs tout à fait différents les uns des autres sont particulièrement absurdes. « Pour aller à l'école, Johnny marche $\frac{3}{10}$ de mile et prend le bus sur $2\frac{1}{3}$ mile. Quelle est la distance de l'école à la maison de Johnny ? ». Pas loin assez, répondrais-je, si on y enseigne de telles absurdités. Bien sûr, la disponibilité des calculatrices montre mieux l'intérêt de l'usage des décimaux dans les mesures et les calculs.

Il y aussi une tendance analogue, lorsqu'un problème implicitement décimal est posé sous la forme fractionnaire, parce que « nous sommes en train de voir les fractions ». « $4\frac{7}{10}+5\frac{3}{100}$ » est un problème trivial s'il est honnêtement présenté sous la forme « $4{,}70 + 5{,}03$ ».

Bien sûr, il y a un lien entre fractions et décimaux, un lien très important, mais il est largement ignoré à cause de l'absurde cloisonnement auquel est soumis l'enseignement des mathématiques. Nous ne faisons pas référence à une relation artificielle comme celle que l'on trouve souvent, comme dans des problèmes du style « complète par le signe correct ($<$, $>$, $=$) l'expression $\frac{1}{3}\cdots 0{,}3$ ». Mais il est parfaitement naturel d'être amené à prendre $\frac{1}{2}$ de 5,74 ou $\frac{3}{4}$ de 9,27 (la non-équivalence des fractions et des décimaux est mise en évidence de manière adéquate par le fait qu'il est hautement non naturel de prendre 0,5 de $5\frac{74}{100}$). De plus, beaucoup de problèmes de courses au magasin conduisent naturellement à la division de décimaux par des fractions. « Le prix de vente d'un article est constitué du prix d'achat plus une taxe de 7%. Si le prix de vente est de 13,27 $, quel était le prix d'achat ?

2.3 Absence de précaution dans la définition et l'explication

Les fractions prennent toujours naissance comme parties d'un tout. A ce stade elles ne sont certainement pas des nombres, mais des choses - des moitiés de cake, des quarts de tarte. De plus, nécessairement, ce sont des parties propres (fractions inférieures à l'unité). A un certain stade nous passons des choses elles-mêmes aux *quantités*, ou aux *mesures* des choses. A ce moment-là nous sommes autorisés à dire que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ et à introduire les fractions plus grandes que l'unité. Toutefois, aucun texte standard ne rend cette transition explicite. Donnons un exemple. Un texte, dans son explication initiale des fractions, qui ne sera jamais contredite ni même modifiée par la suite, dit que l'affirmation « $\frac{3}{8}$ des pommes sont rouges » signifie que « il y a 8 pommes et trois d'entre elles sont rouges ». Donc si je dis « la moitié des pommes sont rouges » je veux dire que « il y a deux pommes dont une est rouge » ! Plus tard, sans aucun avertissement dans le livre du maître, on introduit la fraction $\frac{3}{2}$ comme si elle avait toujours été là. Qu'est-ce que l'élève peut bien en faire ?

La plupart des textes (dans mon expérience, tous sauf deux), démontre que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ en faisant voir la *même* partie de la *même* région. Mais ce que l'on affirme c'est l'égalité de certaines parties de régions égales, c'est en d'autres termes, une affirmation sur les quantités et pas sur les choses. Essayez de convaincre un hamster que $\frac{5}{5}$ de hamster c'est équivalent à un hamster ! La difficulté que tous ces textes rencontrent pour expliquer l'égalité des fractions réside dans le fait qu'aucun d'entre eux n'explique comment une fraction devient un nombre.

Pas un seul des textes que j'ai vu (sauf CSMP et Real Math, Open Court Publishing Co) n'introduit le terme « nombre rationnel ». Ce n'est pas une idée difficile – certainement plus facile que décimal périodique, qui est le plus répandu – et elle est fondamentale. Grâce à elle, nous pouvons dire que $\frac{1}{2},\frac{2}{4}$ représentent le même nombre mais sont des fractions différentes. Sans la notion de nombre rationnel, il me semble impossible d'expliquer correctement les rapports. En effet un texte standard dit qu'un rapport est « une paire de nombres ». Si 6 articles coûtent 89 $, alors « le rapport de 6 à 89 nous donne le prix ». Il y a discussion sur des rapports égaux – probablement, des paires égales de nombres. Nulle part dans le texte, on ne relie les rapports aux fractions et certainement pas bien sûr, aux nombres rationnels. Il ne peut donc pas y avoir de « simplification » de rapports.

Un gros avantage d'introduire les nombres rationnels explicitement et de les distinguer des fractions est qu'on peut alors examiner des opérations sur des fractions qui ne sont pas des opérations sur les nombres rationnels. Peut-être que l'exemple le plus important est l'opération

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Le traitement traditionnel de cette opération consiste simplement à montrer à l'élève que ce n'est pas la règle de l'addition. C'est pourtant une opération tout à fait valable et très importante sur les fractions, que quiconque ayant étudié les moyennes des joueurs de base-ball devrait connaître. Les moyennes sont traitées dans la plupart des textes, bien sûr, mais leur traitement est vicié par la pratique, à laquelle nous faisons allusion plus bas, de «choisir les nombres» pour que la moyenne d'un ensemble de nombres entiers soit toujours un nombre entier ! Ceci toutefois empiète sur le défaut suivant.

2.4 Malhonnêteté dans la présentation

Ce défaut doit être distingué des fausses applications, même s'il y a un certain recouvrement. Nous faisons référence ici à des pratiques telles que de pompeux énoncés d'objectifs. « Pour multiplier un nombre entier par une fraction de dénominateur 1 » – mais nous trouvons l'élève en train d'étudier ici comment prendre une fraction unitaire d'un nombre entier et qui ne peut prendre cette fraction que si le *résultat* est aussi un nombre entier – un cas assez rare en fait mais un énoncé commun dans les programmes. Nulle part ailleurs dans le texte on ne mentionne qu'on ne s'occupe que d'un cas très restreint d'un problème général. Plus loin dans le texte, l'objectif « d'écrire des fractions en % » s'avère en fait « renvoyer à des fractions dont le dénominateur vaut 100. »

Un autre exemple de malhonnêteté consiste à écrire « $\frac{1}{3} \times 12$ » en dessous de $\frac{1}{3}$ de 12 et donc de déclarer que nous apprenons à multiplier par des fractions. Il n'y a pas d'explication montrant pourquoi nous appelons multiplication le fait de prendre $\frac{1}{3}$ de 12. Un autre texte adopte une méthode différente, mais encore bien plus « clandestine » – ayant démontré que $12 \times \frac{1}{3} = 4$ par addition itérée, il produit à la ligne suivante « $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ » sans aucune explication.

On trouve aussi souvent la malhonnêteté complémentaire. Le texte démontre, en quadrillant un carré, que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Il écrit alors que « $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ », donc pour multiplier des fractions, nous multiplions simplement les numérateurs et les dénominateurs ». Il me paraît raisonnable de douter que l'élève, en observant $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, peut réaliser qu'il a multiplié 1 par 1 pour obtenir 1 !

Un dernier exemple de malhonnêteté doit suffire. Pour additionner deux fractions, on nous dit de chercher le plus petit dénominateur commun (une phrase idiote, puisque nous ne devons chercher le plus petit dénominateur commun que si les fractions n'ont pas un dénominateur commun). On présente généralement cet exercice en trois étapes. Premièrement, si les fractions ont le même dénominateur, celui-ci est le PPDC. Deuxièmement, si un dénominateur est multiple de l'autre, c'est lui qui est le PPDC. C'est la troisième étape qui est beaucoup moins explicite. Beaucoup de textes proposent immédiatement des exemples comme $\frac{2}{7}+\frac{5}{12}$ et disent de faire 7 × 12. D'autres donnent des exemples comme $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$ et disent d'essayer 12. Il n'y a toutefois aucune mention d'un procédé systématique, aucune allusion à la multiplication des dénominateurs. On laisse l'élève croire qu'on lui a enseigné une procédure, et qu'il l'a étudiée, alors qu'il n'en est rien.

2.5 La passion de l'orthodoxie

Ce malaise, qui affecte tout le programme mathématique traditionnel, est particulièrement fatal pour un enseignement efficace des fractions. Nous avons trouvé dans un texte que les fractions plus grandes que l'unité doivent être réécrites sous la forme de nombres mixtes. « Pourquoi ? » Si je dois calculer $\frac{3}{4}$ de $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)$, est-ce un progrès d'écrire $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{3}$ sous la forme $\frac{3}{4}$ de $1\frac{1}{3}$? Un autre texte insiste sur le fait que les fractions doivent être simplifiées. Bien sûr, il faut traduire par « réduites », étant donné que c'est un point de vue hautement subjectif de penser que $\frac{46}{100}$ est simplifié s'il est écrit sous la forme $\frac{23}{50}$. Mais est-il toujours sensé de réduire ? Il y a dans le même texte un exemple ridicule où on trouve une unité partagée en trois pourcentages, à savoir 45%, 40% et 15%. La consigne est d'exprimer ces pourcentages sous la forme de fractions (naturellement « simplifiées ») et ensuite d'additionner ces fractions. Il n'y a aucune mention qu'il s'agit d'un moyen tout à fait fou de vérifier que les pourcentages sont compatibles avec une partition ; et de la même façon, on ne dit pas, comme l'honnêteté l'exigerait, qu'il est beaucoup plus facile d'additionner les fractions non réduites.

Pour terminer cette section, laissez-moi souligner certains points. Manifestement les défauts que j'ai soulignés trouvent leurs contreparties – et même sont directement illustrés – dans d'autres domaines des mathématiques élémentaires. Manifestement aussi, il y a dans le programme d'autres défauts que nous n'avons pas mentionnés, même s'ils causent grand tort à l'enseignement des fractions. Ces défauts ne nous ont pas semblé être aussi liés à l'enseignement des fractions que les cinq que nous avons discutés. Toutefois ils sont graves aussi – en particulier l'un d'eux auquel, autant que je sache, il n'est fait référence nulle part, je ne m'excuserai donc pas de le traiter maintenant. Toutefois je serai bref.

Une importante partie de l'enseignement élémentaire des mathématiques est consacré à « revoir » et il est normal qu'il en soit ainsi. Mes lecteurs sont certainement aussi sensibles que moi aux diverses raisons qui justifient ce fait. Mais, revoir semble toujours être une révision de *règles* et de *savoir-faire* et jamais une révision d'*explications*. Ainsi, insidieusement, on imprime dans l'esprit de l'enfant l'idée que la mémoire et l'exactitude sont les principales composantes du succès mathématique ; et ainsi, l'étude des mathématiques, et d'une partie subtile de celles-ci comme l'arithmétique des fractions, en pâtit, et la plupart du temps sans espoir de remède.

3. Matériaux pour un bon cours sur les fractions

Comme signalé dans l'introduction, beaucoup de ce que nous pourrions dire ici est facilement déduit de la section précédente. Nous répéterons simplement ici notre croyance qu'il faudrait introduire tout à fait explicitement les rationnels (nous faisons référence ici aux rationnels *positifs*; le champ entier des rationnels n'entre en jeu, bien sûr qu'une fois les négatifs introduits) – et il n'y a aucune difficulté à cela. Parlons donc de nombres rationnels quand cela s'indique (cela ne signifie pas que nous éviterons toute mention de fractions).

Nous devrions présenter la *multiplication* comme l'opération de base sur les rationnels. C'est *mathématiquement* correct puisque les nombres rationnels naissent du désir, ou du besoin, d'inverser la multiplication ; et c'est plus correct *en pratique* parce qu'il est très facile de trouver des applications courantes sur la multiplication des fractions. La division par des nombres rationnels ne présente pas de réel problème sur le plan mathématique, mais il est plus difficile de trouver des applications convaincantes. Il y a des questions du type « combien » qui appellent la division par des fractions, mais dans lesquelles la réponse est obtenue en arrondissant le quotient vers le haut ou le bas à un nombre entier. Il y a d'autres questions (comme le prix avant une taxe ou une réduction en %) qui appellent la division de décimaux par des fractions. Cependant nous admettrons honnêtement que la division précise des rationnels par des rationnels n'est pas un outil pratique très important, certainement pas comparé à la multiplication.

L'addition des nombres rationnels devrait être traitée après la multiplication, puisqu'elle est une opération bien moins importante sur les fractions. La meilleure illustration vient de la théorie élémentaire des probabilités, où la probabilité de deux événements totalement disjoints (c'est-à-dire qui s'excluent mutuellement) est la somme des probabilités des deux événements. Il faut noter toutefois que les deux probabilités tendent à être naturellement représentées par des fractions de même dénominateur. Ainsi, si je jette deux dés et que j'ajoute les nombres obtenus, la probabilité d'avoir 4 est de $\frac{3}{36}$ et la probabilité d'avoir 8 est de $\frac{5}{36}$, et donc la probabilité d'avoir 4 ou 8 est de $\frac{8}{36}$. Il serait pervers d'exprimer la première probabilité sous la forme $\frac{1}{12}$ et donc de compliquer l'addition des fractions – la simplicité ne réside pas dans la fraction mais dans le procédé arithmétique dans lequel la fraction intervient. Même présenter la réponse sous la forme $\frac{2}{9}$ est inutile et peut-être même inopportun, si on veut comparer la probabilité d'avoir 4 ou 8 à celle d'avoir 7, par exemple.

Un grand avantage des calculs propres aux probabilités est qu'ils comprennent souvent, simultanément, l'addition et la multiplication des nombres rationnels. Toutefois, nous ne voudrions pas donner l'impression (fausse) que nous devrions enseigner la théorie des probabilités pour trouver un terrain d'étude des fractions. Nous devons enseigner la théorie des probabilités parce qu'elle est utile et importante pour le citoyen d'aujourd'hui. Et nous avons besoin du calcul sur les fractions pour faire des probabilités. (Nous savons d'expérience que des adultes qui, enfants, ont lutté désespérément et sans succès contre les fractions, ont retrouvé compétence, confiance et intérêt en réétudiant les fractions dans le contexte de la théorie des probabilités.)[1]

La soustraction des fractions est de loin moins importante en pratique que l'addition et ceci doit aussi être admis honnêtement. Il y a des applications naturelles de la soustraction des fractions simples, mais la principale justification du temps passé sur ce sujet est son importance mathématique. Je crois qu'une telle justification est valide – mais elle n'excuse pas la trop grande importance accordée au sujet, ni la pénible inculcation de la sûreté d'exécution d'un algorithme non excitant.

Je devrais ici me débarrasser d'un argument en faveur du calcul sur les fractions – à savoir qu'il constitue le prototype de l'algèbre des fonctions rationnelles. Si cet argument (avancé, par exemple, par Morris Kline dans son livre, *Pourquoi le professeur n'est pas capable d'enseigner?)* signifie seulement que maîtriser le calcul des fractions sera très utile à l'étudiant si jamais il (ou elle) atteint le niveau auquel on enseigne l'algèbre des fonctions rationnelles, il ne peut pas être contredit. Mais s'il signifie, soit (a) que cela devrait constituer une motivation explicite pour l'étude du calcul sur les fractions, soit (b) que l'étude préliminaire du calcul sur les fractions est essentielle pour l'étude ultérieure des fractions rationnelles, alors je ne peux pas être d'accord. (Morris Kline semble défendre l'argument dans les deux sens (a) et (b)). En ce qui concerne le (a), je ne crois pas du tout à une approche « promesses en l'air » de la motivation. Demander à un élève d'étudier patiemment une technique ennuyeuse

---

[1] Peter Hilton and Jean Pedersen, *Fear No More, An Adult Approach to Mathematics*, Addison-Wesley (1981)

et dépourvue de sens dans l'attente d'une certaine récompense dans un futur indéterminé, c'est adopter une pédagogie pour le moins immorale et inefficace. Pour ce qui est du (b), il ne me semble pas qu'une étude longue, détaillée et pénible de l'addition et de la soustraction des fractions soit nécessaire pour préparer l'étude des fonctions rationnelles quelques années plus tard. Tout ce qui est nécessaire, c'est la découverte des idées ; les techniques, aussi bien que l'explication de leur validité, peuvent être discutées lors d'une révision précédant l'introduction des opérations correspondantes dans le champ des fonctions rationnelles.

Il y a deux points supplémentaires que je voudrais traiter à ce sujet. D'abord, l'intuition devrait jouer un rôle bien plus important dans le calcul sur les fractions que dans l'algèbre des fonctions rationnelles. On ne souhaite pas qu'un élève fasse appel à la règle de calcul $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ pour calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$. Donc, dans les cas les plus importants, on n'a pas besoin de l'algorithme. Deuxièmement, il y a d'importantes différences entre les deux sujets. Un aspect très important de l'algèbre des fonctions rationnelles est le développement en une somme de fractions partielles. Le procédé analogue pour les nombres rationnels est beaucoup moins important et n'est même pas unique. Ainsi $\frac{1}{6}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$. Bien sûr, le moment convenable pour appréhender cette question et réfléchir au pourquoi de ces deux comportements distincts c'est le moment où on étudie les fonctions rationnelles.

Il existe un caractère supplémentaire de l'ensemble des rationnels qui est communément traité dans les manuels – et qui doit l'être d'ailleurs. Je fais allusion au fait que les rationnels sont ordonnés selon leur grandeur. Toutefois, la notation décimale convient bien mieux à des comparaisons de ce type que la notation fractionnaire. Il est évident que 26,524 est plus grand que 26,518, mais beaucoup moins évident que $\frac{60}{19}$ est plus grand que $\frac{22}{7}$.

Ici nous remarquons une chose étrange. Il y a une méthode, appelée multiplication en croix, qui est une méthode tout à fait digne de confiance pour déterminer le plus grand de deux nombres rationnels. Elle est basée sur le principe que

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \quad \text{si et seulement si} \quad a\times d>b\times c. \qquad (3.1)$$

Ce principe n'est jamais utilisé dans les manuels. Par contre, le principe

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{si et seulement si} \quad a\times d=b\times c \qquad (3.2)$$

est utilisé pour tester si deux fractions sont égales. (En fait la situation est pire. Habituellement nous lisons « si deux fractions sont égales, leurs produits croisés sont égaux » et nous trouvons que c'est la réciproque sous-entendue qui est utilisée. La phrase citée est aussi blâmable, car elle semble tout à fait dire qu'une fraction a un produit croisé.) Maintenant, il n'arrive pratiquement jamais que la méthode la plus simple et la plus facile pour voir si deux fractions sont égales soit la méthode 3.1; en effet, deux fractions égales ont des chances d'avoir des dénominateurs « intimement liés »multiplicativement (c'est-à-dire qu'ils sont loin d'être premiers entre eux) et donc il est relativement facile de les réduire à la même fraction. D'un autre côté, il arrive très souvent que (3.1) soit la méthode la plus rapide pour voir si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, surtout si on dispose d'une calculatrice.

Il y aurait beaucoup à dire mais, pour garder à cet article une longueur raisonnable, et pour donner à mes auditeurs matière à grande controverse, laissez-moi finir en rappelant qu'il y a des caractéristiques *mathématiques* de l'ensemble des rationnels qui devraient être montrées, discutées et exploitées dans les programmes. Je n'affirme pas, bien sûr, que ce sont des matières qui conviennent dans les six premières années, et de fait je commencerai ma propre discussion en supposant que tous les élèves sont familiers des nombres négatifs. Je fais cela pour simplifier mon exposé et le lecteur voit facilement, j'espère, que certaines de mes remarques seraient toujours pleines de sens si les élèves n'étaient pas familiarisés avec les nombres négatifs.

D'abord, je pense qu'il est important de mettre en évidence que l'ensemble Q des nombres rationnels est stable pour les quatre opérations de base (addition, soustraction, multiplication et division par un nombre normal) et que c'est le plus petit ensemble jouissant de cette propriété et contenant Z. Il représente donc une espèce de perfection mathématique - mais une perfection rudement secouée par la découverte pythagoricienne des nombres irrationnels (bien sûr la géométrie *doit* apparaître dans *toutes* les mathématiques). Il est important de faire ici la distinction entre le *fait* que nous pouvons réaliser n'importe quelle opération sur des éléments de Q et à l'intérieur de Q, et une quelconque *technique* pour calculer et exprimer le résultat d'une telle opération.

Deuxièmement, je suggère que nous examinions certains sous-anneaux de Q , en particulier, les sous-anneaux $\mathbf{Z}_P$, si P est une famille de nombres premiers et $\mathbf{Z}_P$ est l'ensemble des nombres rationnels que l'on peut mettre sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec b premier avec P. Il est intéressant de factoriser en facteurs premiers dans $\mathbf{Z}_P$, plutôt que seulement dans l'anneau des entiers Z. De plus, il y a une extension de la fameuse « preuve par neuf » qui est alors possible. Cette méthode s'appuie sur l'homomorphisme d'anneau Θ: $Z_P \to Z/9$ où $Z/9$ est l'anneau des entiers modulo 9. Nous utilisons $Z/9$ car notre système de numération décimale le rend particulièrement aisé pour calculer en « ajoutant les chiffres ». Si F est une formule dans Z, alors $\Theta(F)$ est une formule dans $Z/9$ et $\Theta(F)$ est vraie si F est vraie. D'un autre côté, les formules dans $Z/9$ sont beaucoup plus faciles à vérifier que les formules dans Z, donc les facilités de calcul et la facilité à vérifier des formules dans $Z/9$ font de la preuve par neuf un outil très valable pour vérifier les calculs : si la formule $\Theta(F)$ est fausse, la formule F est fausse aussi.

Ce que je veux montrer c'est que Θ s'étend naturellement à un homomorphisme d'anneau $\Theta : \mathbf{Z}_3 \to Z/9$; ici (si P contient un seul nombre premier, nous écrirons $\mathbf{Z}_p$

pour $\mathbf{Z}_P$) $\mathbf{Z}_3$ est l'anneau des nombres rationnels exprimables sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où b n'est pas divisible par 3. Cela signifie que nous pouvons appliquer la preuve par neuf pour vérifier tout calcul comprenant des additions, des soustractions, des multiplications de fractions, pourvu que les fractions utilisées n'aient pas de dénominateur divisible par 3. Donnons un exemple.

EXEMPLE 1.

Vérifions que : $5\frac{13}{28}+14\frac{71}{220}=19\frac{303}{385}$.

Appliquons la preuve par neuf :

$5\frac{13}{28}\equiv 5+\frac{4}{1}\equiv 9\equiv 0$;

$14\frac{71}{220}\equiv 14+\frac{8}{4}\equiv 16\equiv 7$;

$19\frac{303}{385}\equiv 19+\frac{6}{7}\equiv 1+\frac{6}{7}\equiv 1+(6\times 4)\equiv 7$.

Nous avons donc bien 0 + 7 = 7. Notons que nous avons utilisé le fait que $4\times 7\equiv 1$ pour en déduire que $\frac{1}{4}\equiv 7$ et $\frac{1}{7}\equiv 4$.

A peu près aussi simple que la preuve par neuf[2], nous avons la preuve par 11. Nous avons dans ce cas un homomorphisme $\Theta:\mathbf{Z}_{11}\to \mathbf{Z}/11$. Nous perdons en simplicité avec la preuve par 11 plutôt que par 9, mais nous y gagnons quand même car nous rencontrons plus de fractions dont le dénominateur est divisible par trois que des fractions dont le dénominateur est divisible par 11. Donnons un exemple.

EXEMPLE 2

Vérifions que : $6\frac{12}{29}\times 2\frac{3}{71}=13\frac{7}{71}$.

Appliquons la preuve par 11 :

$6\frac{12}{29}\equiv 6+\frac{1}{7}\equiv 6+8\equiv 3$;

$2\frac{3}{71}\equiv 2+\frac{3}{5}\equiv 2-\frac{1}{2}\equiv 2-6\equiv 7$;

$13\frac{7}{71}\equiv 2-\frac{7}{6}\equiv 2-(7\times 2)\equiv 10$;

et $3\times 7=10$.

[2] Peter Hilton et Jean Pedersen, *Casting out 9's revisited*, (à paraître).

Notons que l'on applique la preuve par 11 en prenant la somme alternée des chiffres (en partant de la droite) ; et que nous avons utilisé le fait que $2 \times 6 \equiv 1$ pour déduire que $\frac{1}{2} \equiv 6$ et $\frac{1}{6} \equiv 2$.

On peut nous reprocher qu'après avoir fulminé contre les calculs inutiles comprenant des fractions, nous prenons maintenant des calculs comme prétexte pour discuter de la preuve par 9 ou par 11. Notre réponse, c'est que nous donnons ici un exemple d'une règle pratique de grande importance en mathématiques : *essayer de résoudre le problème en simplifiant la situation.* (Nous pourrions aussi répondre qu'on prend beaucoup de plaisir à ces calculs ; et le plaisir est un élément essentiel dans un cours de mathématiques couronné de succès.) Ceci, après tout, revient au fond à faire des mathématiques appliquées efficaces et nous voyons ici – et nos élèves aussi – ce principe en action à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes.