DES GRANDEURS AUX ESPACES VECTORIELS

La linéarité comme fil conducteur

Le dessin de couverture est de Rembrandt,
il suggère que, comme on apprend très tôt la marche en marchant,
c'est en faisant des mathématiques qu'on apprend à en faire,
et cela commence très tôt.

La Trame circulaire est de Starline (freepik.com), le fond bleu de Garry Killian (freepik.com), la photo de Christian Perner (Fulton Center, New-York).

La composition a été réalisée par Samuël Di Emidio du CREM asbl.

Cet ouvrage est vendu par le CREM au prix coûtant. S'il doit être expédié par la poste, les frais d'expédition et de port sont facturés en supplément.

Il est aussi disponible sur Internet, où elle peut être téléchargée gratuitement, en tout ou en partie, à l'adresse `http://www.crem.be`

CREM a.s.b.l., décembre 2017 (2e impression corrigée)
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Rue Émile Vandervelde 5
1400 Nivelles (Belgique)
Tél/Fax : 00 32 (0)67 21 25 27
info@crem.be

Imprimé en Belgique

Dépôt Légal : D/2017/7359/2 ISBN 978-2-930161-04-4



Cette publication est mise à disposition sous licence Creative Commons BY-NC-SA (Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions) 4.0 International. Pour voir une copie de cette licence, visitez `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/` ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

MATHÉMATIQUES DE LA PRIME ENFANCE À L'ÂGE ADULTE

DES GRANDEURS AUX ESPACES VECTORIELS

La linéarité comme fil conducteur

Nicolas Rouche, coordinateur

Cet ouvrage a été conçu
comme source d'idées et base de discussions.
Souhaitons que personne n'en fasse un dogme !

Ouvrage publié avec le soutien de la Fédération Wallonie-Bruxelles

PRÉLIMINAIRES

Auteurs

Cet ouvrage n'aurait pas vu le jour sans la collaboration active et attentive de toute une équipe constituée de Michel Ballieu, licencié en mathématiques, Marie-France Guissard, licenciée en mathématiques, Patricia Laurent, institutrice primaire, Christine Lemaître, diplomée en logopédie, Luc Lismont, docteur en mathématiques, Nicolas Rouche, agrégé de l'enseignement supérieur, Thaïs Sander, institutrice primaire, Philippe Tilleuil, licencié en mathématiques, Françoise Van Dieren, régente, Marie-Françoise Van Troeye, régente, Éric Vanderaveroet, régent, Jacques Van Santvoort, docteur en mathématiques, Patricia Wantiez, docteur en mathématiques.

Chaque chapitre a été particulièrement pris en charge par une ou deux personnes : Thaïs Sander pour les chapitres 1 et 2 ; Thaïs Sander avec la collaboration de Françoise Van Dieren pour le chapitre 3 ; Thaïs Sander pour le chapitre 4 ; Françoise Van Dieren pour les sections 1, 3 et 4 du chapitre 5 ; Marie-Françoise Van Troeye pour la section 2 du même chapitre ; Marie-Françoise Van Troeye et Éric Vanderaveroet pour les sections 1, 2 et 3 du chapitre 6 ; Françoise Van Dieren pour la section 4 du même chapitre ; Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour les chapitres 7, 8, 9, et 10 ; Luc Lismont pour le chapitre 11 ; Luc Lismont et Nicolas Rouche pour le chapitre 12 ; Philippe Tilleuil pour le chapitre 13 ; Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour le chapitre 14 ; Nicolas Rouche pour le chapitre 15.

La mise au point informatique de l'ensemble du texte a été réalisée par Michel Ballieu et Marie-France Guissard. Patricia Wantiez a réalisé en PostScript la plupart des figures du chapitre 13.

Remerciements

Nous remercions vivement toutes les personnes qui ont lu et commenté diverses versions provisoires de cet ouvrage. Il s'agit tout d'abord des membres du Comité d'Accompagnement de notre recherche au Ministère de l'Éducation. Nous remercions aussi les membres du Comité d'Accompagnement interne au CREM, en particulier Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Ginette Cuisinier, Michel Demal, Mady Frémal, Thérèse Gilbert, Louis Habran, Christiane Hauchart, Jean-Paul Houben, Maria-Isabela Krysinska, Francis Michel, Jacques Navez, Guy Noël, Maggy Schneider, Christian Vandercammen et Paul van Praag. Nous remercions également les participants de nos formations dans le cadre de l'ASBL Formation en Cours de Carrière et de l'ICAFOC. Nous avons largement profité des critiques et recommandations de toutes ces personnes. Il va de soi cependant que la responsabilité finale de cet ouvrage incombe à ses seuls auteurs.

Commanditaires

Cet ouvrage a été réalisé dans le cadre des conventions de recherche N°s 72/99, 72/00 et 72/01 financées par le Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère non confessionnel.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère confessionnel.

Avant-propos

1 La linéarité, une idée de base

Dans les années 60 et 70 du XXe siècle, les promoteurs des « mathématiques modernes » avaient proposé un fil conducteur unique et clair pour l'enseignement des mathématiques. Pour le dire sommairement, ils privilégiaient les structures et l'enchaînement déductif qui va des ensembles et relations aux systèmes de nombres et aux espaces vectoriels. Cette conception exhibait l'unité de *la mathématique*, que ces promoteurs défendaient si éloquemment.

À partir de la fin des années 70, ce fil conducteur a été délaissé pour l'essentiel, et l'enseignement, comme les programmes en font foi, est revenu aux divisions traditionnelles des mathématiques, celles que nous avons héritées de l'histoire plus ancienne. Il s'agit en gros de l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, l'analyse et les probabilités. Or ces divisions de la matière mathématique ont un sens. Dans une étude antérieure[1], le CREM a montré que chacune d'elles est associée certes à l'étude d'une certaine classe d'objets, mais aussi et peut-être surtout à *un mode de pensée.* C'est bien d'ailleurs pour cela qu'elles ont émergé au cours des siècles.

Quoiqu'il en soit, et peut-être précisément parce qu'ils correspondent à *des modes de pensée spécifiques*, ces chapitres ont tendance à se refermer chacun sur lui-même. Et l'enseignement mathématique, considéré dans son ensemble, se constitue alors en compartiments plus ou moins étanches. Les enseignants connaissent bien les difficultés, pour les élèves, des transferts de méthodes et d'intuitions d'une matière à une autre. Dans cette perspective, il manque des fils conducteurs, des liens de parenté visibles qui favorisent la mobilité de la pensée.

Comme nous l'avons remarqué déjà ci-dessus, le point de vue des structures a été dans une assez large mesure occulté à partir des années 80. Or les structures peuvent être considérées, en raison même de leur abstraction, comme *un mode de pensée non spécifique,* en ce sens qu'elles transcendent les divisions traditionnelles des mathématiques et de ce fait favorisent les transferts. Elles transcendent ces divisions, parce qu'elles sont au cœur, au principe même de la pensée mathématique.

D'où la question : n'avons nous pas assisté, autour des années 80, à un retour trop ample du balancier de l'histoire ? N'aurait-il pas mieux valu, plutôt que d'abandonner les structures, penser à les enseigner autrement ? Telle est la question à laquelle le présent ouvrage propose des éléments de réponse.

On a compris aujourd'hui que les structures ne peuvent pas être au début de l'enseignement. Ce qui vient d'abord, ce sont les grandeurs, les nombres, les formes, des questions à leur sujet, des symboles qui soutiennent la pensée mathématique commençante. Les parentés de structure se découvrent petit à petit. Et d'ailleurs, certaines structures sont plus prégnantes que d'autres.

Dans cet ouvrage, nous montrons le pouvoir éclairant de la *structure linéaire.* C'est celle qui sous-tend les grandeurs et leur mesure, les rapports et les proportions, la similitude, l'algèbre du premier

[1] Voir *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM [1995], dans les chapitres 4 à 9, les sections intitulées « Les nombres comme forme de pensée », « La géométrie comme forme de pensée », etc.

degré, les combinaisons linéaires et les espaces vectoriels. L'idée de linéarité, qui apparaît modestement à l'école maternelle, se construit par généralisations successives tout au long de la scolarité. Elle est de celles – la principale peut-être ? – qui peuvent soutenir la conception d'un enseignement en spirale, puisque de classe en classe, elle revient dans des contextes divers et éclaire des questions de plus en plus vastes. L'idée de structure linéaire n'est pas donnée au départ, elle s'élabore en même temps que s'approfondit l'expérience mathématique des élèves.

2 De la prime enfance à l'âge adulte

Une fois de plus[2], le CREM propose ici un ouvrage qui traite de l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte. L'idée est qu'il est intéressant – voire nécessaire –, pour chaque enseignant d'explorer non seulement les matières au programme de sa classe, mais encore celles d'avant et celles d'après, puisque l'éducation mathématique forme un tout.

Le risque d'une étude adressée à des lecteurs aussi nombreux et divers est que beaucoup d'entre eux ne la liront qu'en partie. Mais au moins prendront-ils conscience que leur travail quotidien a des tenants et des aboutissants importants, et seront-ils tentés d'y aller voir. Qui plus est, les lecteurs moins nombreux qui s'intéresseront à l'ensemble sont sans doute ceux qui sont le plus susceptibles de faire évoluer l'enseignement.

3 Creuser profond mais aussi servir en classe

Cette étude regroupe des contributions de deux sortes. D'une part des chapitres de nature épistémologique et historique sur la structure linéaire. L'idée est de creuser profond, sur un plan théorique. Ensuite des chapitres de situations-problèmes adaptées à tous les âges de l'école, montrant pratiquement la structure linéaire en construction dans diverses matières. Cette double face de notre travail entraîne un autre risque : c'est que le lecteur théoricien ne lise que ce qui l'intéresse immédiatement, et que le praticien fasse de même. Notre espoir est que certains, les plus nombreux possibles, cèdent à la tentation d'éclairer un point de vue par l'autre, ce qui est – nous semble-t-il – la meilleure façon de saisir véritablement l'ensemble du problème de l'éducation mathématique.

4 Contenu de l'ouvrage

L'*introduction* reprend et détaille l'intérêt de dégager un (voire plusieurs) fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques.

La *première partie,* qui comporte quatre chapitres, concerne les élèves de deux ans et demi à douze ans. Elle propose d'abord des situations-problèmes sur les balances et les poids à l'école maternelle. Elle se poursuit par diverses activités destinées à l'école primaire et utilisant le tangram. Viennent ensuite un chapitre sur les comparaisons et mesures de capacités, et un autre, destiné à la fin du primaire, sur les grandeurs, les pourcentages et leurs représentations graphiques.

La *deuxième partie* vise les élèves de douze à quinze ans. et comprend deux chapitres, numérotés 5 et 6. Le chapitre 5 prend la suite du dernier chapitre de la première partie. Il traite d'abord des pourcentages et de divers supports géométriques qui permettent de les visualiser, puis du thème

[2] Voir les trois publications antérieures les plus importantes du CREM, à savoir : *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* [1995], *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie* [2001] et *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans* [2001].

général de la proportionnalité, dans ses expressions numérique (les tableaux de proportionnalité), graphique et algébrique (les formules). Les contextes des questions posées sont divers : problèmes de troc, d'épargne, remplissage d'un réservoir d'essence. Le même chapitre se termine par une question de patterns de cubes et par une introduction des nombres entiers liée à des questions d'alignement de points dans un système d'axes. Le chapitre 6 traite de la proportionnalité et de la non-proportionnalité en géométrie, avec des questions de périmètres et d'aires et enfin une introduction au théorème de Thalès conjointement avec des notions de perspective cavalière.

La *troisième partie* concerne les élèves de quinze à dix-huit ans. Elle comprend sept chapitres, qui portent les numéros 7 à 13. Elle s'ouvre par une introduction historique consacrée aux méthodes de fausse position et de double fausse position, permettant de montrer aux élèves que les pratiques aujourd'hui communes sont apparues au terme d'une difficile maturation. Le chapitre 8 est une introduction progressive au calcul vectoriel géométrique, partant de la notion de changement de position. Le chapitre 9 complète le précédent par une initiation au produit scalaire et donc à l'idée de bilinéarité. Les nombres complexes, considérés comme des vecteurs munis d'un produit particulier, permettent d'aborder efficacement des questions de géométrie euclidienne : ils sont la matière du chapitre 10. Le chapitre 11 propose une initiation simultanée à la réalisation de dessins en Postscript et à la géométrie analytique. Les deux derniers chapitres de cette troisième partie rattachent l'idée de vecteur à celle de *grandeur vectorielle* en physique. Le chapitre 12 traite d'abord de problèmes simples d'équilibre de solides dans un champ de pesanteur uniforme, ce qui mobilise les centres de gravité. Il étudie ensuite les conditions d'équilibre d'un point soumis à des forces, matière qui permet d'introduire la règle du parallélogramme. Enfin le chapitre 13 introduit à la même loi du parallélogramme, mais dans le contexte de la composition des vitesses pour des mouvements uniformes et uniformément accélérés.

La *quatrième partie* est entièrement orientée vers l'histoire et l'épistémologie des vecteurs. Elle comprend les chapitres 14 et 15. Le premier des deux explique la genèse des vecteurs dans le contexte des nombres complexes, chez Tait, disciple de Hamilton, et Bellavitis. Le chapitre 15 tente une construction de l'idée de vecteur en partant de la géométrie analytique ordinaire et en cherchant à dégager les expressions algébriques qui ont un sens géométrique indépendant du repère choisi : ce sont les expressions que pour cela on qualifie d'intrinsèques.

La *cinquième partie* enfin ne comporte qu'un seul chapitre, ce qui peut paraître assez singulier. Cela se justifie par le fait qu'elle propose une synthèse de tout l'ouvrage : en renvoyant systématiquement à tous les autres chapitres, elle dégage la notion de structure linéaire dans ses divers avatars de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. C'est donc à ce chapitre que le lecteur est invité à se reporter chaque fois qu'il éprouve le besoin de savoir *où il en est.*

Notons que nous n'avons pas couvert toutes les matières qui relèvent de l'idée linéaire. Et certaines de celles qui manquent au tableau peuvent même être considérées comme particulièrement importantes. Pour n'en citer que trois : les équations et les systèmes algébriques linéaires, ainsi que le calcul matriciel, la différentielle, qui est l'application linéaire tangente à une fonction, et les équations différentielles linéaires. Mais ce qui relève de la structure linéaire dans le corpus entier des mathématiques est gigantesque, et nous ne pouvions tout traiter. Nous espérons, quoiqu'il en soit, avoir au moins montré une certaine direction de pensée.

Ajoutons enfin que ce travail résulte de la collaboration de toute une équipe dans laquelle chacun a pu exprimer sa sensibilité. Nous avons cherché davantage la qualité dans la diversité, que l'expression d'une pensée par trop monolithique.

5 Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes rassemblées dans les trois premières parties de ce rapport ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

Ces situations sont présentées selon un plan uniforme[3] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description, en une ligne ou deux, de l'activité proposée aux élèves.

Enjeux – Matières couvertes et compétences visées.

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de la théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Échos d'une ou plusieurs classes – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

Prolongements possibles – Nouvelles situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour les élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place la situation occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

[3] Ce plan est inspiré par E. C. Wittmann et G. Müller [1990] et [1994]. Nous l'avons mis au point à l'occasion d'une recherche précédente (voir CREM [2001b]).

Introduction : vers un fil conducteur ?

Pourquoi est-il important de dégager un ou des fils conducteurs pour l'enseignement des mathématiques, et comment y arriver ? C'est le sujet de cette introduction, que l'on s'est efforcé de présenter de la manière la moins technique possible, de sorte qu'elle soit accessible à toute personne cultivée, même brouillée avec les mathématiques. Il a fallu pour cela tenter une gageure : sans faire de mathématiques, donner de cette discipline une idée raisonnablement fidèle. Cette dernière entreprise est de celles qu'il ne faut jamais abandonner, tant sont énormes les malentendus à propos des mathématiques, même chez beaucoup de personnes abondamment diplômées.

> On n'a pas tardé à s'apercevoir que la rigueur
> ne pourrait pas s'établir dans les raisonnements,
> si on ne la faisait pas entrer d'abord dans les définitions.
> H. Poincaré

L'objectif de cette étude est de dégager, parmi d'autres sans doute, un fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte. Pour mener à bien une telle entreprise, il faut – cela va de soi –, prendre deux choses en compte : d'une part les mathématiques et d'autre part les élèves. Commençons par les mathématiques qui sont à la fois une forme de pensée et un ensemble structuré de connaissances, c'est-à-dire une science. Nous commençons par là non pas parce que les mathématiques seraient, lorsqu'il est question de concevoir leur enseignement, plus importantes que les élèves, mais seulement pour assurer la clarté de l'exposé.

1 Logique et rigueur : le sens étroit

Essayons tout d'abord de dégager un caractère qui distingue assez clairement les mathématiques des autres sciences dites exactes, des sciences humaines, de la philosophie et de la pensée commune. Pour cela, analysons la portée et l'usage, dans ces différents domaines, des mots et des symboles comme moyens d'expression de la pensée.

En mathématiques, chaque mot (chaque symbole aussi) est défini de manière univoque par quelques propriétés complètement intelligibles, et renvoie de ce fait à une classe de choses connue sans ambiguïté. Grâce à cela, ces mots et symboles peuvent être engagés dans des raisonnements déductifs de longue haleine[1]. Ce qui est démontré est sûr et peut servir de point de départ à de nouvelles déductions. La pensée mathématique n'appuie ses certitudes sur aucun soutien extérieur.

Dans les sciences dites exactes, comme par exemple la physique et la chimie, on se donne des modèles mathématiques des phénomènes que l'on étudie. Si ces modèles sont assez précisément décrits pour participer de l'univocité des mathématiques, alors travailler dans un modèle, c'est

[1] Dans le *Discours de la méthode*, Descartes parlait de « ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations ».

faire des mathématiques. Et rien n'empêche dans ces conditions de construire des démonstrations aussi longues que nécessaire. Mais les modèles représentent des situations ou des phénomènes réels, et la question se pose toujours de l'adéquation du modèle à la réalité, de la conformité des déductions aux données expérimentales. En ce sens, les sciences exactes fondent leurs énoncés pour la forme sur les démonstrations mathématiques, et pour le fond sur la conformité à l'expérience.

Les mots utilisés dans les autres domaines de la connaissance sont aussi, comme les mots et symboles mathématiques, cernés par des définitions, les dictionnaires en font foi. Mais ces définitions n'ont pas la même univocité logique, et de ce fait elles ne peuvent pas être engagées dans des déductions de quelque ampleur. On les précise souvent par des exemples. Des mots tels que *maison, cheval, révolution, liberté,* et même *mathématiques,* sont définis d'une façon qui parle à l'intuition et renvoie à un ensemble de choses cerné approximativement. Tout essai de déduction stricte qui les utilise s'enlise au bout de quelques pas.

Ceci ne veut pas dire, loin de là, que ces notions seraient inutilisables et donc inutiles. Mais on ne peut les appliquer à des objets particuliers qu'à coup de commentaires, de correctifs et de nuances. La rigueur mathématique n'est autre que le respect de la logique. La rigueur dans les sciences humaines et bien souvent dans la pensée commune, s'appuie certes aussi sur la logique, mais tout autant sur le soin avec lequel on introduit les correctifs et les nuances qui assurent la fidélité à un certain objet[2].

Ce caractère des sciences humaines est compatible avec la production d'études longues et pertinentes, mais qui par delà l'argumentation s'appuient aussi sur des observations, des expériences, des enquêtes.

Le cas de la philosophie est plus subtil. Les philosophes sont coutumiers de développements de longue haleine. Dans la mesure où ceux-ci sont purement spéculatifs, et où par nature ils ne se fondent pas seulement sur la déduction pure, ils ne peuvent conclure de façon totalement convaincante et demeurent donc des objets de débats. Ceci ne leur enlève ni leur pertinence, ni leur intérêt, en tant que matières à réflexion et sources d'orientations intellectuelles et morales.

Nous appellerons ci-après *sens étroit* – sans connotation péjorative pour l'adjectif *étroit* –, le sens des mots et des symboles tel qu'il est codifié, dans n'importe quelle discipline intellectuelle, pour assurer ou favoriser la solidité des raisonnements et des arguments. Le sens étroit est associé à l'univocité, à la rigueur de la pensée.

2 Intuition et créativité : le sens large

Mais un mot (ou un symbole) n'est jamais entièrement cerné par sa définition. Chacun renvoie dans la mémoire aux questions et contextes où il a été rencontré et a joué un rôle, aux exemples dans lesquels il s'est incarné, aux choses qui lui ressemblent et à celles qui s'opposent à lui. Ces liens sont rationnels ou non, nécessaires ou fortuits, forts ou ténus. C'est parce que les mots et les concepts ont beaucoup de référents, beaucoup de liens entre eux qui forment comme un tissu mental, que la pensée est mobile et peut être créative, que l'imagination peut soupçonner (deviner) des propriétés. Bien entendu, ces choses que l'on soupçonne, il faut ensuite les infirmer ou confirmer

[2] Pour répondre à cette difficulté, le sociologue allemand Max Weber (cf. M. Weber [1965]) a proposé la notion d'*idéal type*. Un idéal type est un concept répondant à une définition la plus claire possible. Il est doté d'une netteté logique qui en fait un bon instrument d'argumentation, mais cette netteté n'est souvent obtenue qu'au prix d'une schématisation, une stylisation de la réalité. Ce qui ne va toutefois jamais jusqu'à permettre de longues déductions. Le fait qu'un idéal type s'écarte ainsi de la réalité par raison de clarté implique ce que nous disions ci-dessus, à savoir qu'on ne peut l'utiliser pour étudier adéquatement des cas particuliers qu'en l'entourant de commentaires et de correctifs.

en les ramenant dans le champ du sens étroit. Nous appellerons ci-après *sens large* d'un mot (ou d'un symbole) l'ensemble, l'essaim des référents auxquels il renvoie – rationnellement ou non –, dans la mémoire et l'imagination.

Toute pensée en recherche, toute pensée mathématique créative en particulier, est une sorte de contrepoint entre le sens large et le sens étroit, entre l'imagination et l'intuition d'une part, et la rigueur de l'autre. Comme l'a dit Poincaré [1908], « c'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. Savoir critiquer est bien, savoir créer est mieux. » Une pensée réduite au sens large, à l'imagination débridée, s'agiterait beaucoup et n'aboutirait nulle part. Une pensée réduite au sens étroit serait immobile, car elle ne saurait où aller.

Le sens large est variable d'une personne à l'autre. Un enfant a dans sa mémoire une foule de choses qui relèvent de l'expérience commune, de ce qu'on lui a enseigné à l'école et de tout ce qu'il a brodé de raisonnable ou même d'un peu fou autour de cela au fil de sa pensée libre et de ses rêves. Une personne qui a fait beaucoup de mathématiques a accumulé en outre dans sa mémoire, non seulement des théories bien en forme, mais encore une énorme quantité d'images, d'analogies, de perspectives, étranges ou non, d'intuitions, qui mélangent souvent mathématiques et pensée commune, et constituent le terreau de sa créativité.

3 La déduction comme fil conducteur

Après ces considérations sur les deux registres indissociables de la *pensée mathématique,* examinons la forme générale de la science mathématique comme ensemble structuré de connaissances. Un survol historique s'avérera utile en l'occurrence.

Nous avons vu que la pensée mathématique est capable de produire de longues chaînes de déductions. Le premier exemple majeur que l'histoire nous en ait légué est constitué par les *Éléments* d'Euclide au IIIe siècle av. J.-C.[3] C'est un vaste traité de géométrie et d'arithmétique dans lequel tous les théorèmes sont tirés par déduction d'un petit nombre d'axiomes. Les *Éléments* sont demeurés en occident, quasiment jusqu'au XIXe siècle, le modèle de la rigueur mathématique.

Toutefois, on s'est aperçu au XIXe siècle qu'Euclide utilisait certains axiomes non explicités, qu'il s'appuyait sur l'une ou l'autre proposition intuitive, non rattachée déductivement aux axiomes. En d'autres termes, il ne satisfaisait pas entièrement à ce qu'étaient devenus les critères de rigueur à la fin du XIXe siècle. Mais en 1899, David Hilbert a donné une version nouvelle de la géométrie d'Euclide, entièrement conforme à ces critères.

À cette même époque, bien d'autres théories mathématiques avaient été développées, *la plupart en dehors du cadre euclidien.* Elles concernaient de nouvelles formes de la géométrie, les nombres, l'algèbre, l'analyse, etc. Ces théories avaient chacune la forme dont nous avons parlé, à savoir celle d'un système déductif long et rigoureux, accroché à quelques axiomes. Toutefois, elles coexistaient dans un certain désordre, et leur foisonnement faisait désirer non seulement une organisation d'ensemble, mais encore et surtout un fondement unique.

Et c'est là ce qu'a réalisé le XXe siècle. Ces longs enchaînements déductifs coexistants ont été organisés en une architecture d'un seul tenant, tout entière déduite des quelques axiomes de la théorie des ensembles. Ce résultat spectaculaire, sans doute peu connu du grand public, a frappé les imaginations des mathématiciens. Il constitue une preuve de fait de l'autonomie des mathématiques, de leur capacité d'avancer sans dérailler sur de très longues distances – peut-être indéfiniment ? –, en s'appuyant sur l'univocité de leurs concepts. Le premier traité qui ait matérialisé cet effort de

[3] Les mathématiques antérieures n'ont pas produit de monument déductif comparable.

synthèse a été publié en de nombreux volumes à partir de 1939 par un groupe de mathématiciens français rassemblés sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki.

Pour arriver à cette organisation axiomatique globale, il a fallu concentrer l'attention sur les enchaînements logiques, ce qui ne peut se faire avec toute la rigueur et la sûreté de pensée requise qu'au détriment des autres registres de la pensée mathématique. La question qui s'impose à tout moment dans ce genre d'entreprise est, pour le dire familièrement : *qu'est-ce qui dépend de quoi ?* Et pour y répondre, il faut écarter de la réflexion les perceptions, les mouvements, les intuitions, les conjectures. Il faut écarter les questions du type : d'où cela vient-il ? pour résoudre quels problèmes a-t-on inventé cela ? y a-t-il d'autres applications possibles ? y a-t-il des images ou des analogies qui aident à saisir telle ou telle partie ? Bref il faut, *par raison de méthode* et de façon radicale, réduire la pensée au sens étroit. Ce qui n'a – soulignons-le – jamais empêché les mathématiciens qui l'ont fait de naviguer par ailleurs avec bonheur dans le sens large. Mais il reste que le produit fini est là, sous forme de traité austère, séparant soigneusement et à juste titre les parties strictement déductives d'éventuelles allusions à l'histoire et aux contextes. Dans l'histoire, il y a d'abord des questions, des problèmes, et on construit des théories pour y répondre. Dans les mathématiques réécrites déductivement, il y a d'abord les théories, et ensuite les problèmes passés au rang d'applications. Et dans beaucoup de traités, il n'y a pas d'applications.

Il importe d'ailleurs d'observer ici *un paradoxe du sens large*. On pourrait dire sans trop déformer la vérité que les mathématiques présentées déductivement comme dans le traité de Bourbaki ne sont rien d'autre que *les mathématiques réduites au sens étroit*. Mais il faut tout de suite nuancer cette vue des choses. Comment procède en effet celui qui aborde un traité déductif et s'y enfonce ? Il commence par déchiffrer le texte pas à pas, en vérifiant chaque implication. Mais il ne peut pas poursuivre longtemps ce travail ingrat. Il l'interrompt fréquemment pour se donner des exemples, il s'interroge sur la marche générale de la pensée, sur ses motivations et ses moyens, il repère les passages cruciaux et les distingue des points techniques mineurs, il circule intuitivement avec de plus en plus d'aisance à travers la théorie. On peut dire en bref qu'il se construit un nouveau sens large. Et si on continue à penser que l'exposé déductif pur renvoie au sens étroit, alors le lecteur développe en quelque sorte un *sens large du sens étroit*, nourri par une *intuition des formes abstraites*. Le sens étroit, les implications considérées une à la fois, fut-ce dans le bon ordre, sont imbuvables. Tout le monde, tout mathématicien a besoin de relever la tête et de regarder en arrière et en avant, et même jusqu'à l'horizon.

Ce qui par contre s'avérera éclairant pour nous est de réaliser que les mathématiques ainsi reconstruites à partir de la théorie des ensembles *vont des structures pauvres vers les plus riches*. Qu'est-ce que cela veut dire ? Cette question mérite un développement assez long.

4 Les structures pauvres et les structures riches

Qu'est-ce qu'une structure pauvre ? Qu'est-ce qu'une structure riche ? Pour comprendre cela, regardons d'abord du côté de la géométrie, et pour la facilité, bornons-nous à la géométrie plane. Cette géométrie a pour vocation d'étudier *toutes* les figures planes, et il y en a vraiment beaucoup, d'une infinité de formes et de tailles. Il y en a tellement que l'on n'arrive à se faire une idée que d'une toute petite partie d'entre elles.

On dit d'une géométrie qu'elle est riche lorsqu'elle distingue et décrit beaucoup de types de figures différents. Et pour faire cela, elle doit bien entendu s'appuyer sur un nombre suffisant de propriétés. La géométrie habituelle, qui est aussi la *géométrie d'*Euclide , est une géométrie riche. On y étudie les propriétés d'alignement, les intersections, le parallélisme, les longueurs, les angles et leurs

mesures. On y distingue les polygones des cercles, les carrés des rectangles, ceux-ci des parallélogrammes, ces derniers des trapèzes, etc. Ou plus exactement, parmi les trapèzes on distingue les parallélogrammes, parmi ceux-ci les rectangles, et parmi ces derniers les carrés.

Une géométrie un peu moins riche que celle-là porte le nom de *géométrie affine*. On y distingue moins de types de figures que dans la géométrie euclidienne, ce qui va de pair avec le fait qu'on y considère moins de propriétés. En géométrie affine, on étudie les propriétés d'alignement, d'intersection et de parallélisme, mais on ne s'intéresse pas de manière générale aux longueurs, et on ne mesure pas les angles. À cause de cela, on ne distingue plus par exemple les carrés des rectangles, ni ceux-ci des parallélogrammes : il s'agit dans tous les cas de quadrilatères possédant deux paires de côtés parallèles. Mais on distingue les parallélogrammes des trapèzes, car ces derniers peuvent n'avoir qu'une paire de côtés parallèles.

Une géométrie encore moins riche – on peut aussi dire *plus pauvre* –, que la géométrie affine est la *géométrie projective.* Dans celle-ci, on distingue encore moins de types de figures, parce que l'on s'intéresse à moins de propriétés. On ne retient plus que les propriétés d'alignement et d'intersection, et on exclut le parallélisme et a fortiori la mesure des longueurs et des angles. Dans ce cadre-là, un quadrilatère en vaut un autre, puisque la seule chose que l'on considère est le fait qu'il y ait quatre côtés qui se coupent deux à deux en quatre sommets. Par contre, on distingue bien les quadrilatères des triangles et des pentagones.

Une géométrie encore plus pauvre que ces trois premières est celle qui porte le nom de *topologie*. On ne s'y intéresse plus quasiment à aucune des propriétés que nous avons évoquées jusqu'à présent. Tout ce qui demeure est une propriété qui se trouve dans les autres géométries, mais que nous n'avons pas mentionnée encore, à savoir la continuité. En topologie, on distingue les figures *d'un seul tenant*, que l'on qualifie de connexes, et les autres. On distingue aussi les figures en boucle fermée et les autres : les carrés, triangles, rectangles, cercles, ellipses sont des boucles fermées et sont donc équivalents en topologie ; les angles, les lignes brisées ouvertes sont des figures d'un autre type. Parmi les figures en boucle fermée, on distingue aussi celles qui ne se recoupent pas de celles qui se recoupent une fois comme le chiffre 8, et de celles qui se recoupent deux fois, trois fois, etc.

Résumons-nous : de deux structures qui étudient un même ensemble d'objets, on dit que l'une est pauvre si elle s'intéresse à peu de propriétés et qu'en conséquence elle discerne peu de catégories d'objets, et on dit qu'une autre est plus riche lorsqu'au contraire elle étudie davantage de propriétés et discerne dans l'ensemble davantage de catégories d'objets[4].

5 Voir et concevoir

Les conséquences de cette distinction entre structures plus ou moins riches ou pauvres sont considérables quant à la manière d'imaginer – de « voir dans sa tête » –, et de concevoir les catégories d'objets. Si une catégorie est peu nombreuse (parce qu'elle possède de nombreuses propriétés), on y accède sans trop de peine en imagination. On se représente assez facilement tous les carrés, et même tous les rectangles possibles : l'intuition joue à plein. Par contre, si une catégorie est immensément nombreuse et ne possède qu'un tout petit nombre de propriétés, il devient impossible de la parcourir en imagination et donc, pour l'étudier de manière quelque peu sûre, on est bien forcé de se concentrer davantage sur ces propriétés et leurs conséquences logiques. Les intuitions

[4] C'est un peu comme en biologie, où tous les objets que l'on étudie sont des êtres vivants. Il faut donner davantage de caractères pour discerner les règnes végétal et animal, davantage encore pour arriver dans le règne animal aux vertébrés et invertébrés, et ainsi de suite pour décrire les reptiles, les mammifères, etc., puis les ruminants, puis les bovidés. Et donc en biologie aussi, moins il y de caractères imposés, plus la classe des êtres visés est vaste, diverse, difficile à imaginer.

globalisantes échappent et la déduction en devient plus nécessaire. Pour conclure sûrement, il faut faire plus grande la part de l'intellect, concevoir à défaut de voir. Il est par exemple beaucoup plus difficile d'imaginer l'ensemble des quadrilatères que celui des rectangles. On voit des choses sur les rectangles sans trop de risques de se tromper, alors que les quadrilatères quelconques relèvent avant tout du raisonnement.

Il faut se méfier d'une confusion possible. On pourrait croire par exemple que la topologie est une discipline simple parce qu'on y étudie peu de propriétés, et que, pour le bon sens, étudier peu de propriétés semble bien plus facile que d'en étudier beaucoup. Mais c'est là *une illusion de simplicité*. Car on ne fait pas si facilement l'impasse sur l'intuition. Celui qui, en topologie, connaît les axiomes et quelques exemples n'ira pas bien loin. Par contre celui qui a exploré longuement ces immenses catégories d'objets ayant peu de propriétés, qui dans le cours de ses réflexions peut en évoquer de toutes sortes à titre d'exemples et de contre-exemples, celui-là aura en topologie une démarche créative et critique. Nous retrouvons ici, et ce n'est pas un hasard, le sens large et le sens étroit, ainsi que l'appui qu'ils prennent l'un sur l'autre.

À la lumière de la distinction entre structures pauvres et riches, reprenons nos considérations sur les mathématiques reconstruites au XXe siècle. La théorie des ensembles est la plus pauvre de toutes. Elle s'occupe de peu de propriétés, la première d'entre elles étant l'appartenance d'un objet à un ensemble. Elle ne discerne que des catégories d'objets en petit nombre et chacune immense : les intersections, les réunions, les relations, les fonctions, ... Le reste des mathématiques passe – pour le dire très schématiquement –, par la construction de trois types de structures, qualifiées de *structures mères* par Bourbaki : ce sont les structures algébriques et topologiques et les structures d'ordre. Ce n'est pas ici le lieu de les présenter en détail. Chaque structure de l'un de ces types est définie par très peu de propriétés et couvre un champ d'objets immense, extrêmement varié, impossible à imaginer globalement, où les intuitions apportent par conséquent plus de conjectures que de convictions fortes, et où, par conséquent encore, le dernier mot revient au seul raisonnement.

Il faut ensuite avancer encore longuement dans les chaînes et les enchevêtrements de déductions pour aboutir à ces objets plus familiers, plus riches de propriétés que sont les nombres, les figures et les fonctions particulières étudiés dans l'enseignement élémentaire.

Étant donné la difficulté d'accès de l'intuition aux structures pauvres, on comprend que dans l'histoire des mathématiques, les structures riches soient apparues avant les pauvres. Celles-ci ont été le produit d'un très lent processus de clarification des dépendances logiques qui traversent les matières étudiées. Les géométries sont exemplaires à cet égard. Celle d'Euclide date d'environ 300 ans avant J.-C. La projective est née au XVIIe siècle des travaux des peintres de la renaissance sur les représentations fidèles des objets de l'espace. La topologie s'est constituée vers le début du XXe siècle pour résoudre des questions liées autant à l'analyse qu'à la géométrie.

Une observation capitale s'impose ici. On pourrait croire que l'organisation déductive globale des mathématiques n'a d'autre intérêt que d'unifier la discipline et d'assurer son fondement. Il n'en est rien. L'identification, aux XIXe et XXe siècles, de structures abstraites entretenant entre elles des liens fermement établis, a fourni à la pensée mathématique des outils d'une efficacité inégalée jusque-là. Dès qu'un mathématicien travaillant dans un contexte problématique donné y découvre l'existence d'une structure qui lui est familière par ailleurs, il dispose, pour avancer dans son travail de compréhension, de toutes les propriétés de cette structure.

6 Les fils conducteurs de l'enseignement jusqu'en 1980

Jusqu'ici, nous avons longuement parlé de la science mathématique. Comme on s'en rendra compte dans la suite, il fallait passer par là pour comprendre ce qu'ont été les fils conducteurs de l'en-

seignement des mathématiques depuis le milieu du XXe siècle, et ce qu'ils pourraient être de nos jours.

Jusqu'aux années 60, sauf exception, on enseignait à l'école primaire l'arithmétique élémentaire et un peu – très peu –, de géométrie intuitive. On enseignait ensuite à l'école secondaire encore un peu de géométrie intuitive, puis vers 14 ans la géométrie d'Euclide plus ou moins réaménagée, l'algèbre héritée du XVIIIe siècle et quelques éléments d'analyse hérités du XIXe. À cette époque, il n'existait pas pour l'enseignement des mathématiques de fil conducteur traversant la discipline entière. Les chapitres enseignés étaient ceux qui étaient successivement montés du fond des siècles.

Dans les années 60 et 70, la réforme dite des « mathématiques modernes » a tenté une mise à jour de l'enseignement. Le fil conducteur était alors celui de la déduction qui va des ensembles, relations et fonctions aux diverses catégories de nombres, aux structures algébriques, à une géométrie algébrisée et aux débuts de l'analyse. Ce fil conducteur, proclamé par les promoteurs de la réforme, était donc celui qui va des structures pauvres vers les plus riches. Le modèle à suivre était celui du traité de Bourbaki. L'unité de *la mathématique* devait inspirer et imprégner l'enseignement[5]. Il importait d'enseigner dès le départ *des concepts définitifs*, ceux qui appartiennent aux mathématiques d'aujourd'hui. Certes, il fallait les rendre assimilables par les enfants en en cherchant les expressions les plus simples et surtout en les illustrant de quelques exemples familiers. On considérait en tout cas comme une source de difficultés pour les élèves le fait d'ajuster un concept en cours de route pour l'adapter à de nouveaux contextes.

Ce fil conducteur était clair pour les mathématiciens qui le promouvaient, mais beaucoup moins pour une partie importante des enseignants et pour la majorité des élèves. Ainsi par exemple, du champ immense couvert par la théorie des ensembles, les élèves n'avaient accès *au départ* qu'à quelques exemples relativement insignifiants. Le sens – la foule des référents de cette théorie –, se construisait pour eux trop lentement, et donc ils ne pouvaient pas voir vers quelles applications on les menait.

D'autre part, la réforme des « mathématiques modernes » a suscité d'emblée une controverse majeure. Pour certains[6] cet enseignement devait commencer vers quatorze ans, voire plus tard. Pour d'autres, tels que Papy et Revuz, il pouvait commencer au début du secondaire[7]. Et même l'idée d'enseigner, dès l'école élémentaire, en allant des structures pauvres vers les plus riches, a été défendue avec force par Piaget[8] et très largement appliquée, entre autres aux États-Unis, en Belgique et en France.

Dans les faits, la réforme des « mathématiques modernes » a été élaborée d'abord pour les classes supérieures du secondaire[9], ensuite pour le secondaire inférieur et après seulement pour l'école élémentaire. Ainsi le fil conducteur qui l'inspirait n'a pas été conçu dans l'ordre naturel des apprentissages, qui est l'ordre chronologique. Cela pose question et nous y reviendrons. On se rend compte en outre aujourd'hui que l'adaptation des « mathématiques modernes » à l'enseignement élémentaire s'est appuyée sur une collaboration insuffisante entre spécialistes des mathématiques et de l'épistémologie génétique, entre autres Piaget[10].

[5] J. Dieudonné, membre du groupe Bourbaki, était un promoteur éloquent de la réforme. L'un des manifestes les plus clairs de celle-ci est la préface de son ouvrage : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, [1963]. Pour plus de développements sur les « mathématiques modernes », voir entre autres R. Bkouche et al. [1991] et S.M.B. [1984].

[6] Voir surtout J. Dieudonné [1963] et G. Choquet [1963].

[7] Voir par exemple G. Papy [1963].

[8] Voir J. Piaget [1947].

[9] Cf. O.E.C.E. [1961].

[10] Celui-ci n'a cessé de proclamer que les enfants acquièrent spontanément les notions de géométrie et d'arithmétique en allant des structures pauvres vers les plus riches, c'est-à-dire dans l'ordre inverse de leur découverte historique. Cette affirmation est loin d'être claire, tant est grande la distance entre les concepts mathématiques du XXe siècle et les notions acquises par les enfants, et elle a fait l'objet d'interprétations quasi littérales.

Quoiqu'il en soit de ces difficultés d'application, l'enseignement des mathématiques suivait à l'époque un fil conducteur unique, clair et cohérent, celui de la structure déductive de la science mathématique elle-même.

7 La situation actuelle

Qu'en est-il actuellement ? Les « mathématiques modernes » n'ayant pas donné les résultats escomptés, d'autres réformes ont suivi, inspirées par d'autres idées. Aujourd'hui, et en s'en tenant aux grandes lignes, on observe du côté des matières traitées : une insistance beaucoup moindre sur les fondements (ensembles, relations, construction des systèmes de nombres) et sur les structures présentées axiomatiquement, un recentrage de l'algèbre sur les polynômes, les fonctions rationnelles et les équations des premier et deuxième degrés, un retour à la géométrie des figures accompagné d'une initiation aux vecteurs et à la géométrie analytique, un recours aux transformations, principalement planes et appliquées à l'étude des figures (plus guère de transformations étudiées pour elles-mêmes), un développement du traitement de données, en y comprenant les statistiques et probabilités, et enfin l'usage des calculatrices et, dans une mesure croissante, des ordinateurs.

Les « mathématiques modernes » ont laissé des traces dans cet enseignement. On ne retrouve plus dans celui-ci la construction d'Euclide, *qui était un fil conducteur majeur* pour la géométrie dans la première moitié du XXe siècle. On y découvre non pas un exposé ordonné des géométries projective, affine et euclidienne, mais une conscience plus claire de la hiérarchie logique des géométries. On observe aussi un usage plus général et plus précoce des fonctions, des graphiques de fonctions et de leur interprétation, et de la géométrie analytique élémentaire. On s'accordera à reconnaître qu'il y a, dans cette évolution, beaucoup de points positifs.

Quels sont d'autre part *les principes* qui inspirent aujourd'hui la conception de l'enseignement des mathématiques et en particulier des programmes ? D'abord on essaie de cerner des « mathématiques du citoyen », ou encore une culture mathématique de base. Le danger est que cette culture soit identifiée à des mathématiques du pur quotidien. On y fait une part trop étroite aux probabilités et statistiques.

D'autre part, l'insistance se porte davantage sur des compétences que sur des connaissances, sans pour autant que ces deux notions soient conçues comme indépendantes l'une de l'autre[11]. Les compétences, entre autres pour ce qui concerne les mathématiques, sont le plus souvent la capacité de mobiliser ses connaissances à bon escient. Un effort est fait pour promouvoir cette vue équilibrée des choses. Toutefois, un effet pervers de cette « pédagogie des compétences » est qu'une partie des enseignants pensent encore développer les compétences en elles-mêmes, et parfois même une à la fois.

Enfin un vaste mouvement milite en faveur d'un enseignement par situations-problèmes, qui met en avant autant l'intuition et la créativité que la logique et la rigueur, c'est-à-dire les deux pôles de l'*activité mathématique*. Il y a d'ailleurs un lien naturel entre les compétences et les situations-problèmes, puisque les compétences fondamentales – celles qui sont constitutives de la maturité intellectuelle –, sont aussi celles qui sous-tendent la résolution de problèmes. Par ailleurs on souligne qu'on ne peut enseigner uniquement par problèmes, car il faut organiser des moments de mise en ordre et de synthèse. L'enseignement par problèmes s'avère plus difficile que les autres formes d'enseignement. Il requiert des enseignants un niveau de formation qui est loin d'être toujours atteint actuellement[12].

[11] Cf. J.-P. Cazzaro et al. [2001] et CREM [1995].

[12] Nous ne saurions trop souligner les dangers de cette situation. Sur la notion de compétence, les situations-problèmes et les mathématiques du citoyen, voir entre autres CREM [1995].

Une autre tendance de l'enseignement d'aujourd'hui est la volonté de promouvoir l'usage des moyens informatiques. L'intention est double : d'une part les machines apportent la possibilité de nouvelles explorations (par exemple des fluctuations d'échantillonnage), et d'autre part, en effectuant les tâches de routine (les calculs numériques ou formels), elles libèrent du temps pour les questions de fond.

La référence aux trois éléments clés que sont les mathématiques du citoyen, les compétences, les problèmes, montre que l'intérêt se porte aujourd'hui autant sinon davantage vers la personne de l'élève, ses capacités et son insertion sociale que vers la science mathématique comme corpus de connaissances. On dit, et c'est bien raisonnable, qu'il faut partir de l'élève et de ses connaissances, souvent plus proches du savoir commun que des mathématiques. On dit que l'élève doit *construire son savoir*, bien entendu avec toute l'aide nécessaire du professeur, et sans oublier que les mathématiques constituées, ou certains de ses chapitres, sont le terme de cette construction.

8 Que faire maintenant ?

Revenons à cette idée de partir de l'élève pour aller vers les mathématiques. C'est une idée simple et saine. Mais c'est en même temps une gageure. Car la question n'est plus, comme à l'époque des « mathématiques modernes », d'inculquer une science bien connue, mais plutôt de partir d'un savoir pour en construire un autre. Pour concevoir une ligne directrice de l'enseignement des mathématiques, il ne suffit plus de connaître les mathématiques et de s'appliquer à les exposer clairement depuis le début. Il faut d'abord être familier du savoir de l'élève et chercher par quels aménagements successifs et motivés on pourra en tirer le savoir mathématique souhaité. Dans cette optique, il n'est plus guère question d'inculquer des concepts définitifs.

Comment les choses se présentent-elles ? Le fait le plus important est que la partie du savoir de l'élève qui a vocation de donner naissance au savoir mathématique, cette partie est déjà structurée. Par exemple, lorsqu'un petit enfant réalise qu'un objet solide déplacé peut être ramené à sa position de départ, il rencontre une opération inversible, comme celles dont il est question dans la théorie des groupes. Piaget [1937] a longuement expliqué cela. Lorsque l'enfant met deux bâtonnets bout à bout, il réalise, avant toute mesure et dans le champ des seules grandeurs, une addition de deux longueurs, et cette addition est entre autres commutative. On pourrait multiplier les exemples.

Bien entendu, l'enfant ne théorise pas ces propriétés de structure. Il les vit au niveau purement sensori-moteur. Mais ces structures vécues sont néanmoins les germes d'où sortiront les mathématiques devenues plus tard conscientes et opératoires.

Un deuxième fait important est que ces structures qui sous-tendent les activités psycho-motrices des enfants ne sont que de petits morceaux, des germes des structures évoluées vers lesquelles tend l'enseignement. Mais elles préfigurent celles-ci.

La question centrale qui se pose est donc d'élaborer un fil conducteur qui parte de ces structures embryonnaires pour aboutir aux structures classiques. Pour ce faire, nous proposons dans cette étude de partir des deux opérations que les enfants acquièrent le plus spontanément : d'une part l'addition des grandeurs, première opération binaire interne, et ensuite, grâce à l'itération de la somme, la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel, qui est une première opération binaire externe. On a là, dès les premières années de la vie, une préfiguration de la structure linéaire, celle qui exprime la proportionnalité et les phénomènes apparentés.

Partant de là, on suit, pour le dire rapidement, le chemin qui passe par les grandeurs avant toute mesure, par la mesure des grandeurs (les nombres réels positifs), puis par la mesure des grandeurs orientées (les nombres relatifs), et qui aboutit aux vecteurs et aux nombres complexes. Ce parcours

n'est pas continu et ne peut pas l'être. En effet, chaque état du savoir, à un moment de la jeunesse, répond à une structure déterminée par un ensemble d'axiomes, et pour passer d'une structure à la suivante, il faut modifier cet ensemble. Or modifier un groupe d'axiomes, c'est changer ou ajouter un axiome, ce qui change brusquement le paysage. Qui plus est, au fil de la construction de ce savoir, des objets ontologiquement nouveaux apparaissent : après les grandeurs, successivement les réels positifs, les relatifs, les vecteurs. En outre, les notions de somme et de produit par un nombre mutent aussi dans le passage d'un type d'objets à un autre. Il est ainsi assez clair que l'idée d'enseigner d'emblée aux enfants des concepts définitifs est impraticable[13].

9 Pourquoi un fil conducteur ?

Nous sommes à pied d'œuvre maintenant pour répondre à la question : *pourquoi a-t-on besoin d'un fil conducteur – ou plutôt de fils conducteurs –, à travers toutes ces matières mathématiques que l'on apprend de la prime enfance à l'âge adulte ?* Les arguments nous paraissent ici simples et forts.

Après tout, et quelle que soit l'importance que l'on accorde à l'acquisition de compétences, on enseigne en classe des matières qui s'enchaînent. Ces matières s'appuient à chaque âge sur un ensemble de structures qui sont des outils de la pensée, des conditions de la compétence. La construction du savoir mathématique forme un tout que l'on souhaite, selon une heureuse expression, parcourir en suivant des spirales. Mais pour réaliser cela, il faut voir comment chaque spire s'articule à la précédente et à la suivante, et aussi d'où viennent et vers où vont ces spirales. C'est pourquoi on a besoin d'études de synthèse qui parcourent tous les niveaux scolaires.

De telles études sont difficiles et demandent des collaborations inhabituelles. Le plus souvent en effet, les recherches sur l'apprentissage des mathématiques élémentaires sont réalisées par des psychopédagogues qui ne connaissent pas bien le dessus de la spirale, et les recherches sur l'enseignement plus avancé sont réalisées par des mathématiciens qui en ignorent le dessous.

Qui plus est, les stratifications du système scolaire ne favorisent pas l'émergence d'une conception globale de l'enseignement. En effet, et malgré d'heureuses initiatives récentes[14], les programmes sont toujours élaborés par des commissions distinctes pour les enseignements élémentaire et secondaire, avec des coordinations insuffisantes. En outre, les enseignants des niveaux maternel, primaire, secondaire inférieur et secondaire supérieur sont toujours formés à peu près séparément. Le résultat est que bien souvent un enseignant d'un niveau donné situe difficilement son action dans l'ensemble, ignorant pour l'essentiel comment les élèves qui lui arrivent ont été formés, et ce que ceux qui le quittent vont devoir affronter.

Une vue d'ensemble de la construction mathématique telle qu'elle s'articule au savoir commun et aux autres disciplines intellectuelles est enfin un objectif proprement culturel dont on souhaiterait voir s'approcher tout enseignant, tout étudiant, tout citoyen.

[13] On objectera peut-être que les axiomes ne mutent pas dans leur expression formelle. Par exemple, l'égalité $a + b = b + a$ exprime la commutativité de la somme quels que soient a et b, grandeurs, naturels, réels positifs ou négatifs, vecteurs. Mais l'enseignement ne confine heureusement pas les esprits des élèves au champ des expressions formelles, et celles-ci ne contiennent pas tout le sens des concepts.

[14] Spécialement la promulgation, en Communauté française de Belgique, des *Socles de compétences à 14 ans*.

Première partie

Un aspect de la linéarité
de 2 et demi à 12 ans

Remerciements

Nous remercions les instituteurs et institutrices de l'école « Les Tournesols » à Anderlecht, qui nous ont accueillis une période par semaine pendant trois mois. Plus particulièrement : Belinda Aguilera (1ère maternelle), Muriel Thirisayt (2e maternelle), Evelyne Pouillard (3e maternelle), Michaël Chevalet (1ère primaire), Michelle Wright (2e primaire), Sabrina Scattone (3e et 4e primaires), Frédéric Gérard (5e et 6e primaires), et Nancy Rooselear, directrice de l'établissement.
Nous remercions également Bénédicte Franssen et Véronique Liesens, institutrices maternelles, pour leur collaboration au chapitre 1.
Merci encore à Mesdames Annie Vanpeteghem, Chantal Colard, Danielle Delwasse et Isabelle Hernu (institutrices primaires) qui ont collaboré, dans le cadre d'une formation FOCEF-2000, à l'élaboration de l'activité *Comparer des Récipients* et l'ont expérimentée dans leurs classes (première à quatrième primaires).

1

Familiarisation avec les poids à l'école maternelle

1 Introduction

Les activités proposées ci-dessous sont conçues de manière à ce que les notions abordées s'élaborent progressivement au fil de l'exécution des tâches proposées aux enfants. On débute par des manipulations de base, importantes pour aborder la notion ciblée. Celles-ci sont accessibles à tous, y compris aux plus jeunes. On poursuit par des actions plus élaborées, faisant intervenir le langage oral, et aussi un langage écrit par le biais de symboles. Parfois, l'enfant travaille en toute liberté et parfois il reçoit une consigne précise. Enfin, il y a des jeux structurés à jouer seul ou à plusieurs, qui réinvestissent les découvertes faites au cours des autres activités.

Les activités sont présentées ici sous forme d'ateliers, chacun accessible à quelques enfants[1]. L'enseignant les introduit dans l'ordre, séance après séance. Une nouvelle activité vient s'ajouter aux autres, mais celles-ci restent accessibles dans la classe. Pas d'obligation de passer par toutes les activités, ni de consacrer un temps défini par l'enseignant à une tâche déterminée. Quel que soit le type d'activité choisi par les enfants, qu'ils y restent longtemps ou au contraire passent d'une activité à l'autre, ils sont confrontés à la notion de poids et développent à ce propos des compétences à des degrés divers.

Compétences. – Tout au long des séquences, certaines compétences sont déjà présentes dans nos objectifs même si elles ne seront certifiées qu'à l'école primaire.

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la mesurer.

Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et en exprimer le résultat.

Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels.

[1] Ce dispositif permet aux enfants d'âges et de niveaux différents de trouver leur place. La méthodologie se rapportant au travail en ateliers est décrite dans les ouvrages de A. Godenir et P. Descy [1998] et N. du Saussois [1991].

Établir des relations dans un système (le système décimal) pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

2 Manipulations libres des balances

De quoi s'agit-il ?

Donner à manipuler différents types de balances et divers objets à poser sur les plateaux.

Enjeux

Commencer à identifier le poids comme une grandeur, les grandeurs étant un préalable à la proportionnalité.

Manier des instruments en vue de comparer des objets selon leurs poids.

Découvrir un lien de causalité entre l'inclinaison de la balance et les poids des objets.

Comparer les poids d'objets en apparence semblables ou au contraire très différents : confronter ses perceptions à la réaction d'une balance.

Sur l'identification des grandeurs associées à un objet (poids, hauteur, ...) et sur les égalités et inégalités de grandeurs, voir[2] chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ?

Une balance à plateaux suspendus.

Une balance de Roberval (ancienne balance de ménage à poids, figure 1).



Fig. 1

Divers objets : blocs de construction, petites voitures, cailloux, fruits, ... Ce matériel peut être renouvelé à chaque séance et enrichi avec les objets apportés par les enfants.

Comment s'y prendre ?

On dispose le matériel sur une table et on propose aux enfants de faire des expériences avec les objets et les balances. On les laisse prendre librement connaissance du matériel. L'enseignant ne parle ni de graduations, ni d'unités de poids, il n'utilise pas encore les termes « plus lourd ou plus léger que », ni « moins lourd ou moins léger que », ceci pour que les enfants découvrent eux-mêmes qu'un objet plus lourd fait pencher la balance de son côté. Après la séance, on discute en groupe des expériences de chacun.

[2] Dans la rubrique *Enjeux* de chaque section, nous renvoyons au dernier chapitre (chapitre 16), qui expose en détails le fil conducteur de la proportionnalité - linéarité depuis les grandeurs jusqu'aux espaces vectoriels.

3 Soupeser des objets

3.1 Léger ou lourd ?

De quoi s'agit-il ?

On donne aux enfants un ensemble d'objets, certains légers et tous sensiblement de même poids, d'autres plus lourds et également tous sensiblement de même poids. On leur demande de les trier en les soupesant.

Enjeux

Continuer à se familiariser avec les poids, soupeser.

Dissocier mentalement l'aspect visuel et la sensation de poids.

Classer en fonction d'un critère. Chaque objet ayant plusieurs grandeurs (hauteur, volume, poids, ...), sélectionner une grandeur particulière, ici le poids, et ordonner selon celle-là. Voir chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ?

Une série d'objets que l'enseignant aura préalablement choisis pour former deux groupes de poids bien distincts et quasi égaux dans chaque groupe. Par exemple, des objets de plus ou moins 30 à 50 grammes pour former le groupe des objets « légers » et d'autres objets d'environ 150 grammes pour le groupe des objets « lourds ». Il faut veiller à ce que certains des objets légers soient volumineux et que certains des objets lourds soient peu volumineux, pour que le classement ne se fasse pas selon le volume de l'objet, mais bien selon la sensation de poids.

Comment s'y prendre ?

Placer sur une table tous les objets et deux boîtes pour les classer en deux groupes. Sur chaque boîte, un symbole permet d'identifier le type d'objet qu'il faut y mettre : les objets qui paraissent lourds dans l'une et les objets qui semblent légers dans l'autre. Les deux symboles choisis sont, par exemple, deux personnes qui portent des objets comme à la figure 2.

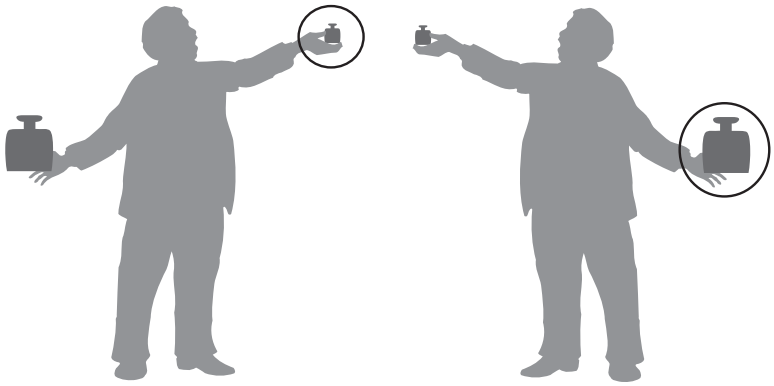


Fig. 2

L'enseignant illustre cela avec deux objets réels et des mouvements de son corps : l'objet léger (entouré sur le premier dessin) peut être soulevé facilement, tandis que l'objet lourd (entouré sur le second dessin) fait pencher le bras du personnage vers le sol. La consigne est : « Prenez un objet dans

chaque main et essayez de dire lequel est le plus lourd et lequel est le plus léger. Placez-les chacun dans la boîte correspondante. Si vous hésitez choisissez d'autres objets. »

3.2 Du plus léger au plus lourd

De quoi s'agit-il ?

Ranger des pots du plus léger au plus lourd.

Enjeux

Exercer la perception du poids.

Ordonner des objets en fonction de leurs poids, ce que Piaget appelle *sérier les poids*. Voir chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ?

Quatre séries de trois pots (par exemple d'une boisson lactée) opaques, fermés et identiques. La première série est remplie de sable à trois niveaux différents de sorte qu'en les soupesant, on sente des poids de plus en plus grands. De la même manière, la deuxième série est remplie de gravier à trois niveaux, la troisième série d'eau à trois niveaux et la quatrième d'écrous à trois niveaux.

Comment s'y prendre ?

Les pots sont déposés sur une table. Chaque série de trois pots est identifiable par une couleur : trois pots bleus pour ceux contenant de l'eau, trois pots jaunes pour le sable, trois pots verts pour les écrous et trois pots rouges pour le gravier.

Dans chaque cas, l'enfant doit ranger les pots du plus léger au plus lourd (ou inversement).

Prolongements possibles

Aux enfants plus âgés, on présente des séries de 4 ou 5 pots. Ainsi, les différences de poids sont plus difficiles à percevoir, les comparaisons plus nombreuses et l'ordre croissant plus complexe à établir.

Comparer les poids de deux pots complètement remplis de deux couleurs différentes.

4 Comparer avec les balances

De quoi s'agit-il ?

Les enfants pèsent des fruits et légumes à l'aide d'une balance à plateaux et/ou d'une balance de ménage, afin de comparer leurs poids (plus lourd, égal ou plus léger que...). Ils symbolisent leurs résultats à l'aide de cartons représentant les fruits et légumes et les positions des balances.

Enjeux

Comparer les poids de deux éléments à l'aide d'une balance à plateaux ou d'une balance de ménage.

Garder une trace de la comparaison au moyen de symboles.

Voir chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ?

Une balance à plateaux suspendus et une balance de ménage.

Trois panneaux pour attacher les cartons au moyen de velcro (figure 3 et fiche 1 à la page 75).

Les 24 cartons à découper représentant les balances à plateaux suspendus (figure 4) et les balances de ménage (figure 5) (fiches 2 et 3 aux pages 76 et 77). Ils sont destinés à être fixés aux panneaux à l'aide de velcro.

Les 15 cartons de fruits et légumes à découper (fiche 4 à la page 78). Ils sont destinés à être fixés aux panneaux à l'aide de velcro.

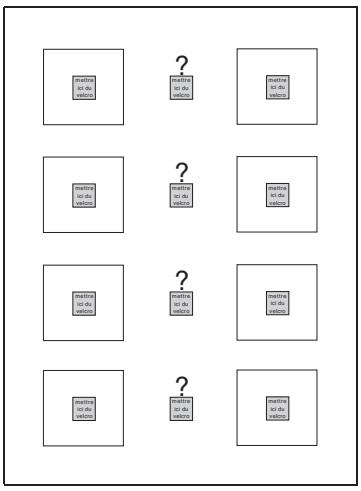


Fig. 3

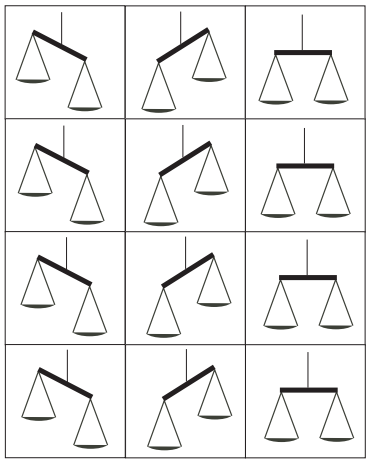


Fig. 4

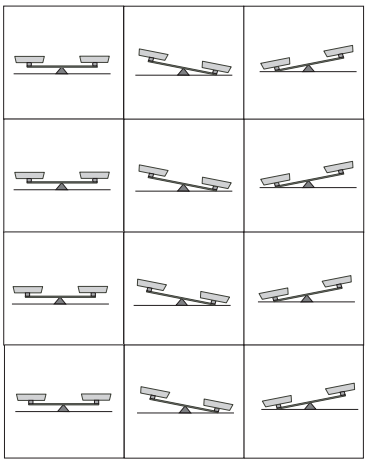
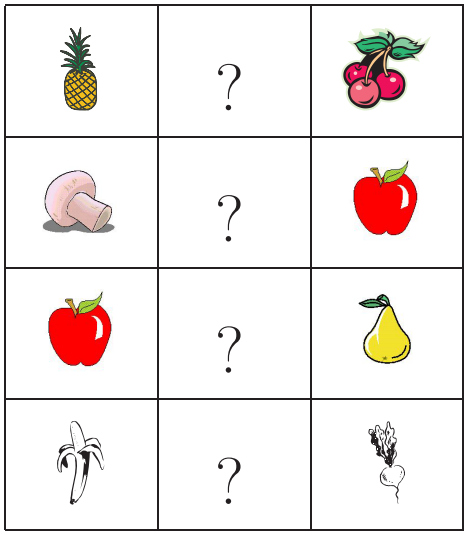


Fig. 5

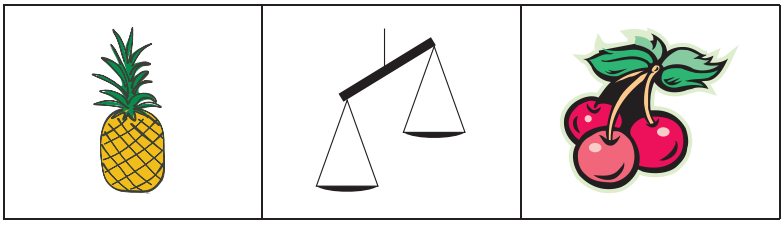
Les 15 vrais fruits et légumes représentés sur les cartons. Il est évident que le choix des fruits et légumes est arbitraire et peut être adapté en fonction des saisons par exemple.

Comment s'y prendre ?

Le panneau s'organise en trois colonnes et se lit par lignes horizontales. La première et la troisième colonnes présentent chacune quatre fruits ou légumes. La colonne du centre est aussi munie de velcro et de points d'interrogations, mais elle ne comporte pas de carton au début de l'activité.

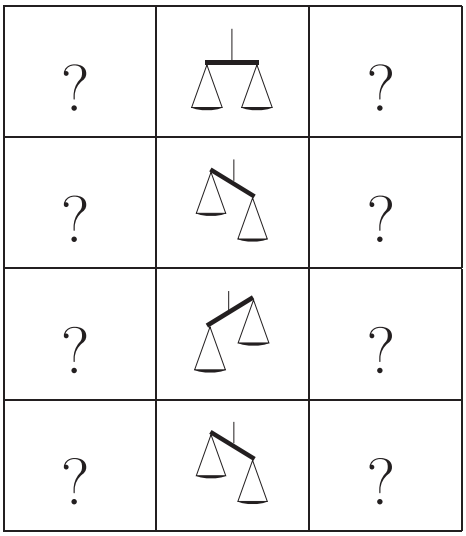


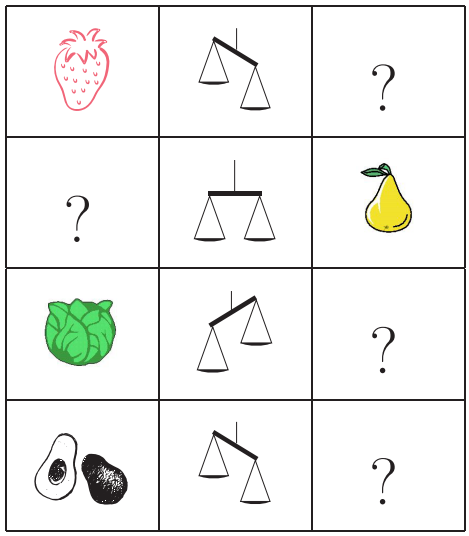
Dans cette colonne, l'enfant doit placer les dessins de balance correspondant aux situations rencontrées. Par exemple, la première ligne du panneau présente un ananas à gauche et une cerise à droite. L'enfant choisit parmi les fruits et légumes à sa disposition un ananas et une cerise qu'il place chacun sur un des plateaux de la balance. Il observe le résultat ; ici la balance penche du côté de l'ananas. Il choisit alors, parmi les dessins de balances, le carton qui symbolise cette situation et le place sur le panneau à l'endroit du point d'interrogation entre les deux dessins. Le panneau complété est une trace des résultats des manipulations.



Attardons-nous sur ce point pour relever une difficulté qui pourrait se présenter et qui peut être résolue justement par la lecture du panneau. Il peut y avoir contradiction entre l'inclinaison de la balance et celle du dessin qui la représente. Par exemple, l'enfant aurait posé l'ananas (lourd) à droite et la cerise (moins lourde) à gauche, alors que sur le panneau ces deux éléments seraient présentés dans la situation opposée. L'enfant devra dans ce cas comprendre le passage de la comparaison réelle à sa représentation. Pour qu'il y arrive, l'enseignant peut lui demander de faire une lecture commentée de la ligne du panneau qui présente la situation (le plateau le plus bas du côté du plus lourd et le plateau relevé du côté du plus léger).

Ensuite, on présente le panneau différemment en plaçant à l'avance les dessins de balances et en demandant à l'élève de le compléter par les dessins de fruits et légumes de son choix qui respectent la situation. Plus difficile encore, on propose un dessin de fruits et légumes et un dessin de balance : à l'enfant de trouver ce qui complète cette situation en réalisant la pesée.





5 Équilibrer une balance

De quoi s'agit-il ?

Placer un objet sur un plateau d'une balance, puis équilibrer celle-ci.

Prélever de la plasticine pour réaliser une boule de même poids qu'un objet donné.

Enjeux

La notion de poids égaux et le vocabulaire « être aussi lourd que », « avoir le même poids que », « peser autant que ». Voir l'activité précédente.

Travailler l'invariance de la masse (forme différente et pourtant même poids).

Accumuler des objets identiques qui servent d'unité pour parvenir au même poids qu'un objet quelconque.

Mesurer par encadrement. Voir chapitre 16, section 4.2.

Une règle de la proportionnalité : quand on double ou triple le poids d'un côté, il faut doubler ou tripler le poids de l'autre côté de la balance pour conserver l'équilibre. Voir chapitre 16, page 573.

De quoi a-t-on besoin ?

Une balance à plateaux suspendus ou une balance de Roberval.

De la plasticine.

Un lot d'objets de même type (Lego, gros écrous, ...).

Des lots de 2, 3 et 4 objets identiques.

Des cartons représentant les objets à peser.

Des cartons représentant les objets servant d'unité de poids (Lego, gros écrous, ...).

Un panneau en deux colonnes pour afficher les cartons.

Comment s'y prendre ?

Avec la plasticine
L'enfant place sur un plateau de la balance un objet de son choix et forme par tâtonnement une boule de plasticine qu'il place sur l'autre plateau pour équilibrer la balance. Pour constater l'équilibre, il faut attendre que le fléau de la balance s'immobilise à l'horizontale.

Avec des objets identiques comme unités
L'enfant place un objet sur un plateau de la balance et place sur l'autre le nombre nécessaire d'unités (Lego, écrous, ...) pour arriver à l'équilibre. Par exemple, pour une figurine sur un plateau, il faut quatre briques Lego sur l'autre, ou encore pour une pomme sur un plateau, il faut neuf gros écrous sur l'autre.

Parfois, l'enfant ne parvient pas exactement à l'équilibre : « Trois briques c'est trop et deux ce n'est pas assez ». Soit il retire la dernière brique qu'il a posée et la remplace par une ou plusieurs briques plus petites, soit il enlève les grosses briques et les remplace par des plus petites. On aborde ici la notion d'encadrement. L'enfant affine le choix des unités pour être plus précis dans ses mesures.

Avec plusieurs objets identiques
L'enseignant propose à l'enfant quelques objets identiques pouvant chacun être équilibré par un nombre entier de briques. Un de ces objets ayant été pesé, l'enfant en dépose un second à côté du premier. Combien doit-il ajouter d'unités (Lego, écrous, ...) sur le second plateau pour rétablir l'équilibre ?

Par exemple, l'enfant place une figurine sur le premier plateau et deux écrous sur le second pour arriver à l'équilibre, soit « une figurine pour deux écrous ». S'il ajoute une figurine identique à la première, il doit ajouter deux écrous sur le second plateau pour rétablir l'équilibre, soit « deux figurines pour quatre écrous ». S'il place trois figurines identiques, il doit encore ajouter deux écrous, soit « trois figurines pour six écrous »...

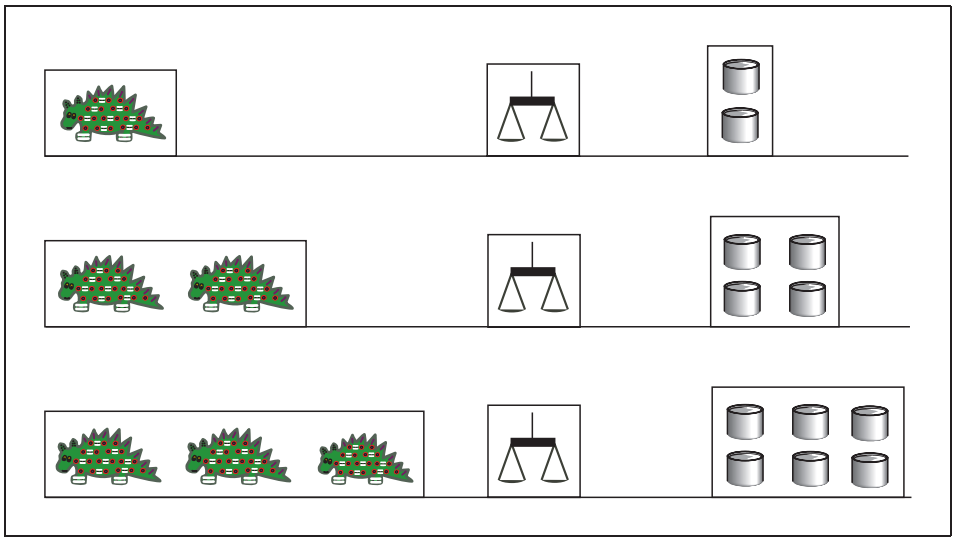


Fig. 6

Ceci est une étape importante dans l'acquisition du concept de linéarité. C'est pourquoi, on veillera à garder une trace en reportant les résultats obtenus sur un panneau : dans une première colonne, on présente les objets à peser dessinés sur des cartons et dans la seconde colonne, les unités placées sur l'autre plateau. Entre les deux colonnes, on place un dessin de balance équilibrée qui symbolise la notion « a le même poids que », « est aussi lourd que » (figure 6).

6 Jeux pour deux joueurs

Ces activités de jeux fixeront les acquis des situations précédentes.

6.1 Bataille : un grand classique

De quoi s'agit-il ?

Remporter le plus possible d'objets à partir d'un jeu de cartes représentant des objets à peser sur une balance à plateaux.

Enjeux

Comparer les poids de deux objets à l'aide d'une balance à plateaux.

Comprendre qu'un objet plus lourd qu'un autre peut se révéler plus léger qu'un troisième.

Voir chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ?

Dans une boîte ouverte, un lot de 10 objets différents dont deux seulement de même poids.

Des cartes représentant les objets, une carte par objet sauf pour les deux objets de même poids, chacun représenté par deux cartes. Donc, en tout douze cartes.

Une balance à plateaux.

Comment s'y prendre ?

Le principe est celui, classique, de la bataille. Les 12 cartes sont mélangées et distribuées également aux deux joueurs, qui les placent en pile devant eux, faces cachées. Les deux joueurs retournent en même temps leur première carte. Ils choisissent chacun dans la boîte l'objet représenté sur leur carte et le posent sur un plateau de la balance pour déterminer le plus lourd. Celui qui possède la carte représentant l'objet le plus lourd ramasse les deux cartes et les place sous sa pile. L'autre enfant replace les objets dans la boîte.

Le jeu continue ainsi. Il y a bataille lorsque les deux cartes retournées sont identiques, mais également lorsque deux objets pesés équilibrent la balance. Dans ce cas, chaque joueur place sur la carte qu'il a jouée une deuxième carte face cachée, puis une troisième face visible. Chacun pèse les deux nouveaux objets et le gagnant remporte les six cartes. Lorsqu'un joueur ne possède plus de carte, il est déclaré perdant.

Une variante du jeu consiste à tenir ses cartes en mains (et non face cachée sur la table). Ainsi chaque joueur peut choisir la carte qu'il va mettre en

jeu. Cela révèle des surprises, car une carte qui vient de gagner peut être perdante au tour suivant ; tout dépend de l'objet choisi par l'autre enfant. Les joueurs découvrent de cette manière qu'un objet plus lourd qu'un autre peut se révéler plus léger qu'un troisième.

6.2 Que le plus lourd gagne

De quoi s'agit-il ? Peser des objets tirés au sort pour déterminer le plus lourd.

Enjeux Exercer la perception du poids (soupeser des objets).

Comparer les poids de deux objets à l'aide d'une balance. Voir chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ? Une balance.

Un grand sac contenant 20 objets divers.

Deux boîtes pour placer les objets gagnés.

Comment s'y prendre ? Les deux joueurs placent la balance entre eux. Il ont chacun une boîte vide pour placer les objets gagnés au cours de la partie. Le premier prend sans regarder un objet dans le sac, le second fait de même. Chacun place son objet sur un plateau de la balance et le joueur qui avait choisi l'objet le plus lourd remporte la manche. Autrement dit, celui en faveur de qui penche la balance reçoit les deux objets qu'il place dans sa boîte. C'est alors au tour de l'enfant qui a perdu son objet de choisir dans le sac. Les joueurs recommencent ainsi jusqu'à ce que le sac soit vide. Chacun compte les objets de sa boîte pour déterminer le gagnant. La stratégie consiste à soupeser les objets dans le sac, ce qui est permis tant qu'on ne regarde pas le contenu, et à choisir celui qui semble le plus lourd et non pas le plus volumineux, ce qui engendre bien des surprises !

6.3 Memory des sacs

De quoi s'agit-il ? Retrouver les sacs qui ont le même poids en les soupesant (estimation).

Enjeux Exercer la perception du poids (soupeser des objets).

Associer des objets de poids égaux sans avoir recours à la vue. Voir chapitre 16, section 3.1.

De quoi a-t-on besoin ? Dix sacs en tissu opaque de couleur identique (par exemple des gants de toilette) fermés par des élastiques.

Du sable ou un autre matériau assez lourd pour lester les sacs.

Un plateau de jeu comportant dix grandes cases de couleurs différentes pour y placer les dix sacs.

Une balance pour les cas de litige.

Comment s'y prendre ?

Au préalable, l'enseignant leste les sacs par paires de même poids. Il les ferme à l'aide d'un élastique.

Deux enfants placent le plateau de jeu entre eux. Chacun dispose cinq sacs au hasard sur les cases du plateau. Ils déterminent celui qui commence. À chaque tour, l'enfant a le droit de soulever deux sacs et d'estimer s'ils ont le même poids. S'il estime que les deux sacs sont de poids différents, il les repose sur les cases où il les a pris. S'il pense que les deux sacs sont aussi lourds l'un que l'autre, il l'annonce et fait estimer à l'autre enfant. En cas de contestation, les enfants ont recours à la balance. Le joueur qui a trouvé deux sacs identiques les garde et c'est au suivant d'essayer. Celui qui a le plus de sacs a gagné.

Le principe du memory s'applique à ce jeu dans la mesure où l'enfant essaie de se souvenir sur quelle case (importance de la couleur) se trouve tel sac qu'il aurait déjà soupesé. On peut même convenir d'annoncer à haute voix si les sacs soulevés sont plus ou moins lourds ou légers.

Une variante plus facile du jeu consiste à présenter deux séries de sacs de couleurs différentes en répartissant les poids identiques entre les deux couleurs. Par exemple, une série de 5 sacs verts de poids différents qui correspond à une série de cinq sacs jaunes comportant les mêmes poids. Ainsi l'enfant sait qu'il doit associer à chaque tour un sac vert à un sac jaune et les possibilités sont moins nombreuses.

Une variante plus difficile est de proposer un plus grand nombre de sacs remplis de matériaux divers. Ainsi s'ajoute à l'estimation de poids, une reconnaissance tactile du contenu.

2

Polygones superposables, polygones de même forme : le Tangram à l'école primaire

1 Introduction

Le Tangram nous vient de Chine, il est vieux d'environ 2 500 ans et s'utilise comme un puzzle. Il se compose de sept pièces, à savoir un carré, un parallélogramme, et cinq triangles rectangles, deux grands, un moyen et deux petits. En assemblant ces sept pièces de diverses façons, on peut obtenir des centaines de configurations différentes[1]. Un assemblage particulier est celui du carré (figure 1).

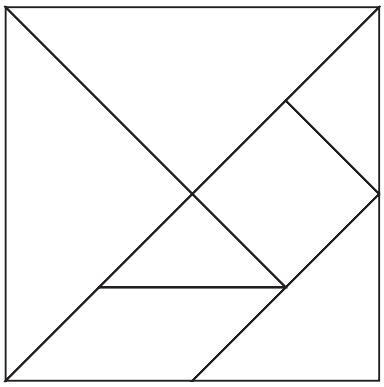


Fig. 1

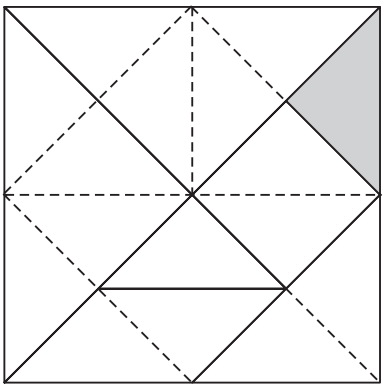


Fig. 2

Les sept polygones ont entre eux des rapports de grandeurs simples[2]. En pavant le carré formé des sept pièces avec le petit triangle (figure 2), on voit apparaître certaines propriétés, à savoir :

certains côtés de polygones ont même longueur ;

[1] D. Picon [1997] présente plus de mille configurations. Nous en avons utilisé quelques-unes.

[2] La description des propriétés du Tangram est destinée dans un premier temps à l'enseignant exclusivement. C'est l'objectif des activités qui suivent de faire découvrir ces propriétés aux élèves.

les aires de chacun des deux grands triangles valent quatre fois l'aire d'un petit ;

les aires du carré, du parallélogramme et du moyen triangle valent deux fois l'aire d'un petit triangle ;

la construction de la figure fait jouer un rôle aux diagonales et aux points milieux de certains segments ;

le parallélogramme a deux orientations possibles dans le plan : il est orienté différemment selon la face sur laquelle il est posé. La figure 3 montre que lors d'une rotation dans le plan, par exemple un demi-tour sur la table, le parallélogramme garde son orientation. Tandis que la figure 4 illustre le retournement du parallélogramme obtenu en sortant du plan : on passe de la face A à la face B, qui est orientée différemment.

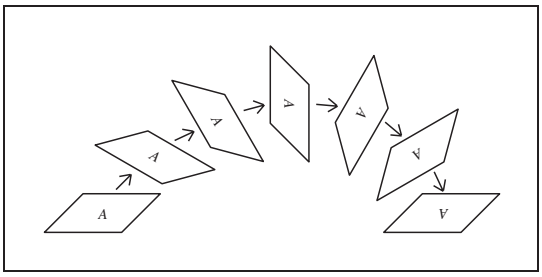


Fig. 3

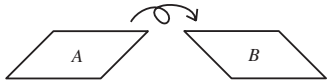


Fig. 4

En règle générale, l'exploitation des figures du Tangram fait appel aux notions de famille de figures, parallélisme, perpendicularité, amplitude d'angle, symétries, pavages, conservation de l'aire indépendamment de la forme, etc. Ces notions sont des enjeux pour chacune des activités.

On trouve des Tangram plastifiés dans le commerce. On peut aussi en faire soi-même dans du carton, en étant très soigneux quant aux dimensions des pièces[3] (ceci a beaucoup d'importance pour réussir certaines manipulations).

Les activités ci-après peuvent être proposées de la première à la sixième primaires. Certaines sont aménagées différemment pour les petits et les grands, nous le mentionnons explicitement au moment venu. De plus, nous suggérons que chaque activité fasse l'objet d'une séance commune à la classe, puis soit reprise à d'autres moments sous forme d'ateliers ou de prolongements visant à améliorer les compétences visées.

2 Découverte des pièces du Tangram

De quoi s'agit-il ? Explorer les possibilités du Tangram en formant librement des configurations, en superposant des pièces, en reproduisant un modèle.

[3] Le côté du carré composé des sept pièces doit mesurer au moins 10 cm pour que les pièces soient faciles à manipuler.

Enjeux

Se familiariser avec des polygones simples.

Explorer des égalités et inégalités d'aires et de côtés. Découvrir des formes identiques (en passant d'un Tangram à un autre). Voir chapitre 16, section 3.1.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des figures, les différencier. Construire des figures avec du matériel varié.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram[4] par enfant.

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, on donne les pièces aux enfants et on les laisse manipuler librement, créer des configurations, échanger des propos.

Ensuite, on leur demande de travailler par deux : un enfant crée un assemblage (figure 5 par exemple) et l'autre s'en sert comme modèle pour le reproduire avec ses pièces. Puis, on échange les rôles.

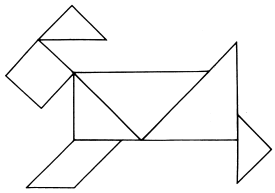


Fig. 5

Par le va-et-vient entre le modèle et la reproduction, les élèves approfondissent les possibilités du Tangram et les différences entre les pièces. L'enfant qui reproduit le modèle, analyse sa composition, les positions relatives des pièces, leur orientation (important pour le parallélogramme). Il est amené à distinguer le petit, le moyen et le grand triangle, à juxtaposer des côtés de même longueur, etc. Les deux élèves discutent de ce qui est réalisé avec un vocabulaire plus ou moins précis, mais néanmoins efficace dans l'action. Ils peuvent superposer les triangles pour vérifier leur conformité au modèle.

Échos des classes

Les enfants ne se lassent pas d'imaginer des assemblages. Les manipulations libres ont été proposées au début de chaque séance dans toutes les classes et les élèves ont été créatifs. Au fil du temps, ils ont enrichi leur pratique de ce qu'ils avaient découvert précédemment : ils refaisaient spontanément une partie d'activité qui leur avait particulièrement plu. Lors de ces manipulations libres, les échanges oraux entre enfants ont été nombreux : ils ont expliqué ce que représentait leur dessin, se sont mutuellement lancé des défis, etc.

En outre, les réalisations libres n'ont pas toutes été planes : certains ont empilé les pièces, les ont dressées en les faisant tenir en équilibre ou en les calant avec d'autres pièces. L'enseignant les a laissé faire.

En première et deuxième primaires en particulier, l'enseignant a proposé la même activité en ajoutant une limite de temps. Il a donné le signal du départ pour que le premier enfant de chaque équipe de deux crée son modèle et il a compté jusqu'à 20. Au bout du compte, le modèle devait être terminé. L'enseignant a compté à nouveau jusqu'à 20 pour fixer le temps de reproduction du modèle par le deuxième enfant de chaque équipe. La limitation du temps a été particulièrement stimulante pour les enfants. En effet, à défaut de cette limitation, certains passaient trop de temps à créer

[4] Dans la section *De quoi a-t-on besoin ?* de toutes les activités, nous entendons par Tangram les sept pièces en vrac.

leur modèle et l'autre enfant de l'équipe s'impatientait ou se désintéressait. De plus, ce fut un bon exercice pour ceux qui ne maîtrisaient pas bien la comptine orale des nombres et qui anticipaient difficilement la limite du temps imparti. On aurait également pu proposer à l'un des enfants de compter jusqu'à 20 en gardant un certain rythme ou encore de compter à rebours.

3 Reproduction d'un modèle

Après avoir découvert le Tangram et travaillé uniquement des modèles de même grandeur, on propose à présent des modèles plus grands ou plus petits (plus de superposition possible). On va également introduire un vocabulaire spécifique au travers d'explications orales.

3.1 Repérage visuel

De quoi s'agit-il ?

Reproduire avec son Tangram un assemblage des sept pièces placé au tableau.

Enjeux

Reconnaître des polygones de même forme et de grandeurs différentes. Créer une configuration semblable à un modèle plus grand. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des figures, les différencier. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram qui adhère au tableau et dont les pièces sont facilement déplaçables[5].

Des fiches portant chacune un modèle d'assemblage - à une échelle différente des pièces que manipulent les enfants - (voir en annexe les fiches 5 et 6 aux pages 79 et 80).

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, l'enseignant prépare un assemblage au tableau. Chaque enfant doit reproduire ce dessin sur son bureau avec ses pièces.

Puis, c'est au tour d'un enfant de créer le modèle au tableau, si possible hors de la vue des élèves pour qu'ils ne soient pas guidés par les étapes de la construction, mais bien par le dessin achevé.

Ensuite, l'enseignant place au tableau une fiche avec un assemblage (fiches 5 et 6) : un élève compose ce modèle au tableau avec le grand Tangram

[5] On peut utiliser un matériel magnétique qui adhère aux surfaces métalliques de certaines armoires ou tableaux. On peut aussi placer du velcro au dos des pièces et couvrir le tableau d'un drap de feutrine qui permet de les y accrocher. On peut tout simplement mettre du papier collant double face sur les pièces, mais cette solution est moins pratique car le papier collant tend à se détacher au fur et à mesure des manipulations.

pendant que les autres réalisent la même chose sur leur bureau. Puis, on vérifie collectivement si la composition de la fiche et celle du tableau sont semblables. La comparaison porte sur les positions relatives des pièces, les écarts angulaires entre elles (dont il faut estimer à vue l'amplitude), les côtés adjacents, etc. Les enfants essaient de verbaliser les différences pour que celui qui est au tableau corrige. Si les remarques ne sont pas assez précises, ils viennent montrer au tableau les différences entre la fiche et le Tangram. Ce faisant, chacun vérifie ce qu'il a composé sur son bureau.

Enfin, chacun travaille individuellement avec ses pièces sur son bureau. Pour cela, les enfants reçoivent une série de fiches qui leur servent de modèles.

Échos des classes

La reproduction du modèle passe d'abord par une reconnaissance globale de la forme : « Ça ressemble à un bonhomme (figure 6), c'est un grand rectangle (figure 7), on dirait un carré avec des trous dedans (figure 8)... »

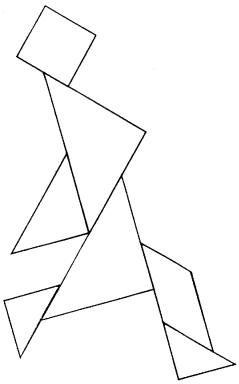


Fig. 6

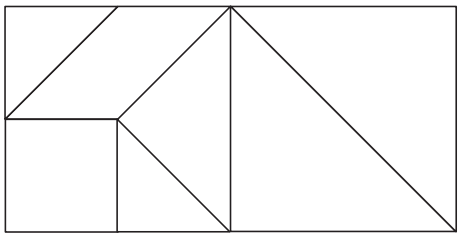


Fig. 7

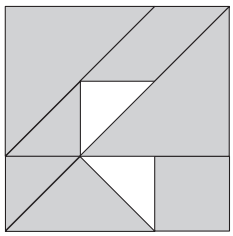


Fig. 8

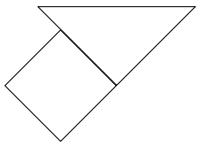


Fig. 9

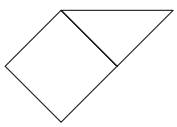


Fig. 10

Ils ont repéré chaque pièce au tableau et ont placé la leur sur le bureau dans une position similaire. Ce faisant, ils ont transposé l'orientation du tableau à la surface de leur bureau, ils ont pris comme repères le haut, le bas, la gauche et la droite.

Des confusions sont parfois apparues entre les petits, les moyens et les grands triangles. Par exemple, un enfant a comparé deux pièces voisines : le côté du triangle choisi était plus grand que celui du carré auquel il se juxtaposait (figure 9) tandis qu'au tableau les deux côtés s'ajustaient parfaitement (figure 10). Un autre élève a réalisé tout l'assemblage, puis en comparant sa production à celle du tableau, il a remarqué que la forme globale qu'il avait obtenue était différente.

Un autre problème fréquent et déjà rencontré dans les manipulations libres a concerné l'orientation du parallélogramme (voir la section 1 à la page 28). Un élève a observé que sur l'assemblage du tableau (figure 11) le parallélogramme « penchait » vers la gauche et l'a disposé sur son bureau pour qu'il « penche » également vers la gauche, mais sans tenir compte des positions des grands et des petits côtés, ce qui a donné le résultat de la figure 12.

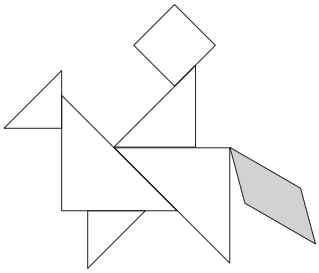


Fig. 11

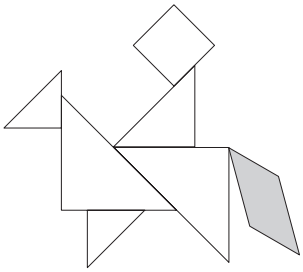


Fig. 12

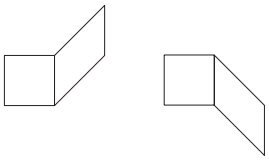


Fig. 13

Cette situation a posé problème à beaucoup d'enfants qui, même s'ils voyaient une différence avec le modèle, ne parvenaient pas à la corriger immédiatement. Ils ont fait pivoter le parallélogramme sur le bureau et ont cherché la bonne orientation sans penser tout de suite à le retourner. Par ailleurs, s'ils étaient attentifs à la longueur des côtés, par exemple en juxtaposant le carré au parallélogramme, ils en oubliaient l'orientation du parallélogramme (figure 13).

Remarquons que le matériel magnétique n'adhère au tableau que d'un seul côté[6]. Ce fait a mis le problème en lumière, car lorsque l'élève retournait la pièce, elle n'adhérait plus au tableau. Il fallait donc deux pièces magnétiques pour présenter le parallélogramme sur ses deux faces (figure 14). La présence de ces deux pièces distinctes a permis d'illustrer dans plusieurs activités les deux orientations possibles du parallélogramme : lors des reproductions de modèles au tableau, il a fallu choisir la pièce illustrant l'orientation voulue. Néanmoins, le problème s'est présenté différemment pour les élèves travaillant sur leur bureau : les deux faces de leur parallélogramme n'avaient aucun signe distinctif. La référence aux deux pièces magnétiques a levé les hésitations à certains moments.

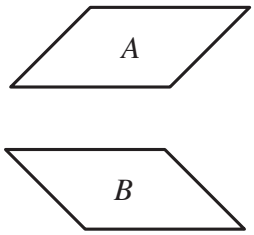


Fig. 14

Enfin, les jeunes élèves se sont montrés vite satisfaits d'une reproduction qui respectait globalement le modèle. Les détails de positions relatives des pièces n'ont pas toujours attiré leur attention. C'est en faisant le rapprochement avec le « jeu des sept erreurs » qu'ils ont observé plus minutieusement la configuration. Il n'a pas été facile d'expliquer les différences entre le modèle et la reproduction. Les élèves ont volontiers utilisé des termes imagés ainsi qu'un vocabulaire spatial et géométrique minimal. Pour des échos relatifs au vocabulaire, voir la section suivante.

3.2 Description orale

De quoi s'agit-il ? Expliquer oralement la disposition des pièces pour reproduire un modèle.

Enjeux Utiliser un vocabulaire géométrique et spatial approprié à l'expression des similitudes. Voir chapitre 16, section 3.3.

[6] La situation est la même si l'on utilise des pièces de Tangram coloriées différemment sur chaque face. Selon la face choisie, le parallélogramme a ou non la même couleur que les autres pièces.

Comprendre et interpréter des instructions pour effectuer une construction précise.

Compétences. – *Décrire les différentes étapes d'une contruction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations. Comprendre et utiliser, dans leur contexte les termes usuels propres à la géométrie.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram pour le tableau.

Des modèles dessinés sur fiches (voir en annexe les fiches 5 à 7 aux pages 79 à 81).

Comment s'y prendre ?

Dans un premier temps, on travaille collectivement. L'enseignant choisit un modèle où les pièces du Tangram se succèdent dans un ordre simple à décrire (par exemple la figure 15). Il fait venir un enfant devant la classe pour décrire ce modèle aux autres élèves, qui doivent le composer sur leur bureau sans le voir. En première et deuxième années, pour ne pas imposer une description trop longue à un seul élève, l'enseignant demande à plusieurs d'entre eux de venir tour à tour décrire une seule pièce du Tangram (dans l'ordre de la construction, par exemple de haut en bas) et sa position par rapport aux autres. L'enseignant met en évidence, éventuellement en les écrivant au tableau, les types d'informations qu'il faut donner pour pouvoir construire l'assemblage, à savoir le nom de la forme à prendre, sa taille s'il s'agit d'un triangle, son orientation dans le plan et enfin sa position par rapport aux autres pièces.

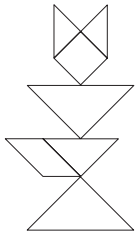


Fig. 15

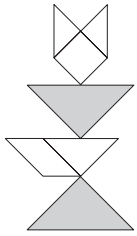


Fig. 16

Ensuite, en guise de synthèse, un enfant vient répéter la description complète pendant qu'un autre construit l'assemblage au tableau. Ceci permet à l'enfant qui décrit d'avoir un retour direct de ce qu'il dit. S'il n'est pas assez clair ou précis dans ses explications, la réalisation au tableau ne correspond pas à son modèle et il peut rectifier ses propos. Les autres élèves interviennent également. Mieux encore, si deux enfants construisent chacun au tableau un assemblage conforme à la description, alors des différences d'interprétation apparaissent au vu des constructions. Par exemple, en disant de mettre le grand côté du triangle à l'horizontale, on peut obtenir les deux positions de la figure 16.

Dans un deuxième temps, les enfants travaillent par deux en plaçant un écran entre eux. L'un invente avec ses pièces un modèle sur le bureau et explique la disposition des pièces à l'autre, qui doit à son tour le reproduire. Pour vérifier, ils enlèvent l'écran. Puis ils échangent les rôles.

Échos des classes

Lors de la description collective, la richesse du vocabulaire varie en fonction de l'âge et du niveau des enfants. Néanmoins, on a constaté que tant que les enfants se comprennent avec un vocabulaire sommaire et non spécifiquement géométrique, ils continuent à l'employer. De plus, ils font beaucoup de gestes qui éclairent souvent leurs paroles. Pourtant, l'introduction de mots précis par l'enseignant a permis à certains moments d'améliorer la

compréhension, car un mot pouvait alors remplacer une phrase entière et la description était plus aisée. Les enfants ne se sont pas toujours souvenus de la signification de mots employés par certains ; il y a eu des confusions. Cette activité a été l'occasion de rappeler ou clarifier certaines notions et surtout de composer une liste de mots communs à la classe. Les élèves n'ont pas intégré tout de suite des mots parfois nouveaux pour eux, mais ils les ont compris dans certains contextes et à force de les utiliser dans les diverses activités proposées plus loin, ils se les sont appropriés peu à peu.

Par ailleurs, pour faciliter l'explication du dessin à la classe, l'enseignant a noté au tableau un schéma à suivre pour la description :

1. NOM de la forme,
2. TAILLE (pour les triangles seulement),
3. SENS[7] de la forme,
4. POSITION de la forme dans le dessin.

Si l'on regarde en détail le vocabulaire utilisé, on peut faire quelques constatations. Tout d'abord, le nom des formes était familier à part celui du parallélogramme, qui était inconnu des plus jeunes – ils l'ont appelé « la forme longue » – et souvent oublié par les plus âgés. Le mot exact a été vite adopté. La taille des pièces n'a pas posé de problèmes : petit, moyen et grand font partie du vocabulaire courant.

Ensuite, l'orientation d'une forme a été choisie en fonction de ses caractéristiques morphologiques. Pour le carré, les enfants ont parlé de « droit » et « penché », « pointe vers le haut/le bas », « mettre le carré comme un losange », « mettre le bord du dessus horizontal ». Pour le triangle, outre la grandeur de la forme, ils ont souvent évoqué le grand côté en disant « le grand bord couché/debout/penché », « le grand bord droit », « le grand côté vers le haut/le bas », « le grand côté horizontal/vertical/oblique » ; ils ont aussi parlé de « la grande pointe en haut/en bas/à gauche/à droite », « l'angle droit au-dessus/en dessous/à gauche/à droite ». Pour le parallélogramme, ils distinguaient « les grands et les petits bords/côtés », « les grands côtés horizontalement/verticalement », et, pour distinguer ses deux orientations, ils ont ajouté à ces termes « le parallélogramme penche vers la gauche/la droite ».

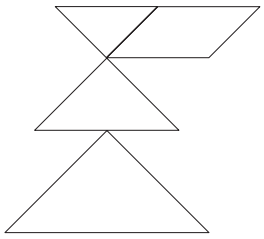


Fig. 17

Enfin, la position d'une pièce par rapport aux autres a fait appel soit au sens figuratif du dessin, par exemple « le carré pour faire la tête et le triangle pour le ventre », soit aux notions spatiales s'appliquant au plan : « à gauche/droite de », « au-dessus/en dessous », « en haut/en bas », « au milieu de », « entre », « à côté de », « contre », etc.

Un enfant de deuxième primaire, après plusieurs essais, a fait la description suivante (en se référant à la figure 17) :

« On prend le grand triangle, on met son grand côté horizontalement vers le bas et on le met en bas du bureau. On prend le triangle moyen, on le met comme l'autre et on le place au-dessus du grand triangle au milieu. On prend le petit triangle avec son grand côté horizontalement vers le haut,

[7] Terme plus simple à comprendre à cet égard que *orientation.*

on le met au-dessus du moyen triangle, pointe contre pointe. On prend le parallélogramme (intervention de l'enseignant), on le met penché à droite avec son grand côté horizontal, à droite du petit triangle, avec son bord tout contre, ça fait une grande ligne horizontale toute droite en haut. »

4 Mémorisation d'une configuration

La difficulté supplémentaire dans les deux activités qui suivent est que les enfants n'ont plus le modèle sous les yeux. D'abord, ils doivent faire appel uniquement à leur mémoire. Ensuite, ils doivent expliquer oralement la configuration soit avec l'aide d'un schéma, soit avec leur mémoire pour seul support.

4.1 Recomposer un dessin caché (de 6 à 9 ans)

De quoi s'agit-il ?

Observer, pendant un temps limité, une configuration puis un dessin du Tangram afin de mémoriser l'emplacement des pièces. Reconstruire l'assemblage sans avoir le modèle sous les yeux.

Enjeux

Exercer le sens de l'observation (deux objets identiques).

Mémoriser une configuration complexe en se donnant des repères. Voir chapitre 16, section 3.3.

Reconstituer un modèle en faisant appel à sa mémoire.

Compétences. *– Reconnaître, comparer des figures, les différencier, les classer. Construire des figures avec du matériel varié. Dans un contexte de [. . .] reproduction de dessins, relever la présence de régularités.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des modèles dessinés chacun sur une fiche séparée (voir en annexe les fiches 5 et 6, aux pages 79 et 80).

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, chaque enfant fait une composition avec ses pièces sur son bureau. Il doit la regarder attentivement en vue de la mémoriser puis, au signal de l'enseignant, il mélange les pièces et essaie de reconstituer sa configuration initiale. Après quelques tentatives, on s'aperçoit qu'il est difficile d'être sûr que l'on a bien refait un assemblage identique. C'est pour cette raison que l'on va proposer des modèles sur fiches, afin de garder une trace de ce que l'on compose et pouvoir vérifier.

Ensuite, les élèves sont par deux (chacun a son Tangram) et l'enseignant place entre eux une fiche face cachée et donne la consigne suivante : « Au signal, vous retournerez le modèle, vous le regarderez attentivement pour retenir l'emplacement de chaque pièce et après pouvoir refaire l'assemblage avec vos pièces. Attention, il est interdit de toucher aux pièces du Tangram pendant que vous regardez le modèle. Lorsque je vous dirai de

cacher le modèle, vous devrez le reconstituer sur le bureau. Vous aurez droit à plusieurs essais si nécessaire. »

L'enseignant donne alors le signal de regarder le modèle et veille à ce que les enfants ne commencent pas l'assemblage à ce moment. Après une dizaine de secondes, il demande de cacher le modèle et de reproduire le dessin avec les pièces. Si les élèves ne parviennent pas à faire l'assemblage au premier coup, ils doivent au moins placer l'une ou l'autre pièce. Ensuite, l'enseignant donne un nouveau signal : retour à l'observation sans toucher aux pièces, et ainsi de suite autant de fois que nécessaire.

L'enseignant souligne l'importance de se donner des repères lors de l'observation du modèle. Afin de mieux mémoriser celui-ci, chacun choisit une technique qui l'aide à retenir l'emplacement des pièces les unes par rapport aux autres, à repérer dans le modèle les pièces qu'il a déjà bien placées et ce qui manque encore ou ce qui n'est pas correct. L'enseignant estime le nombre d'essais nécessaires pour que la majorité des enfants aient terminé leur reconstitution. Il explique éventuellement aux plus rapides qu'ils pourraient tout de même s'être trompés, ceci afin qu'ils prêtent attention au modèle lorsque celui-ci est visible. Finalement, il autorise à retourner définitivement le modèle pour corriger.

Échos des classes

Lorsque les enfants ont créé leur propre composition puis mélangé leurs pièces, ils l'ont recomposée assez facilement. Leurs assemblages possédaient très souvent une structure presque symétrique. Grâce à cela, les enfants les mémorisaient plus facilement, que ce soit visuellement ou par les gestes qui ont permis de le composer.

Par ailleurs, lorsque le modèle leur était étranger, ils ont eu l'impression, une fois la fiche retournée, de ne se souvenir de rien. Dès la deuxième observation, ils ont appliqué une technique de mémorisation. Certains ont utilisé leur mémoire visuelle et ont dit : « C'est comme si on dessinait les formes dans notre tête. » D'autres ont utilisé un moyen verbal : ils ont récité l'emplacement des pièces dans un ordre donné. Par exemple, en haut le petit triangle, puis le carré et à droite le moyen triangle. Chez certains, cette technique s'est accompagnée de gestes dans l'espace déterminant l'emplacement des pièces de haut en bas ou de gauche à droite. Ce moyen verbal a demandé plusieurs retours au modèle, alors qu'un enfant ayant vraiment une image mentale de celui-ci pouvait le reproduire en deux fois, voire, plus rarement, en une. Les techniques étaient variées et difficiles à analyser par l'enseignant.

Les élèves qui ont dû, en cours de route, corriger des erreurs ont affronté une situation beaucoup plus complexe que les autres. Leur esprit était sans doute encombré d'informations trop nombreuses.

4.2 Expliquer une configuration cachée (de 9 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Reproduire un modèle placé dans la classe, hors de la vue.

Enjeux

Mémoriser une configuration.

En dessiner un schéma.

Expliquer oralement une configuration à reproduire. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – Voir compétences à la page 36. En outre : *Tracer des figures simples. Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram pour deux enfants.

Quatre Tangram à placer chacun dans une boîte.

Des feuilles et des crayons.

Comment s'y prendre ?

La première étape est de passer par l'intermédiaire d'un dessin pour reconstituer le modèle caché.

L'enseignant dispose les boîtes aux quatre coins de la classe avec un assemblage des pièces du Tangram au fond de chaque boîte. La présence des pièces est importante et ne peut être remplacée par un dessin, car l'activité consiste en partie à dessiner l'assemblage.

Les enfants sont par équipes de deux. Le premier muni d'un papier et d'un crayon se rend en silence vers une des boîtes et fait un schéma du modèle. Il rejoint son coéquipier et lui explique oralement l'emplacement de chaque pièce, en s'appuyant sur son schéma, mais sans le lui montrer. Le coéquipier recompose l'assemblage sur son bureau. Ceci fait, il va voir l'assemblage dans la boîte et revient corriger éventuellement son travail. Ensuite, les enfants échangent leurs rôles et choisissent une autre boîte.

La seconde étape consiste à mémoriser le modèle et à l'expliquer à l'autre, sans le soutien d'un schéma. Le défi est alors de faire le moins de trajets possibles entre la boîte et le bureau. Une étape intermédaire peut être, pour l'enfant qui va voir le modèle, de le refaire lui-même sur le bureau hors de la vue de son coéquipier, puis de lui expliquer la configuration. Mais le but est bien de faire le trajet, de mémoriser le modèle placé dans la boîte et de l'expliquer à l'autre enfant pour qu'il puisse le recomposer le plus vite possible. Après quoi, on échange les rôles.

Échos des classes

Les schémas des enfants ont été faits rapidement, à main levée. Ils rendaient assez bien le modèle. Certains ont écrit les noms des pièces et ont donné une indication à propos de leur grandeur, parfois en abrégé. Ceci a permis d'éviter les confusions lorsque le dessin n'était pas précis ou lorsque les différences de grandeur des pièces n'étaient pas assez contrastées. Les élèves ont eu l'attention attirée par la disposition des pièces dans le plan : le haut, le bas, la gauche et la droite, les alignements des côtés des pièces adjacentes. Les figures 18 à 20 montrent les dessins que des élèves ont faits d'un même modèle non figuratif. Les figures 21 à 23 présentent les schémas d'un modèle figuratif.

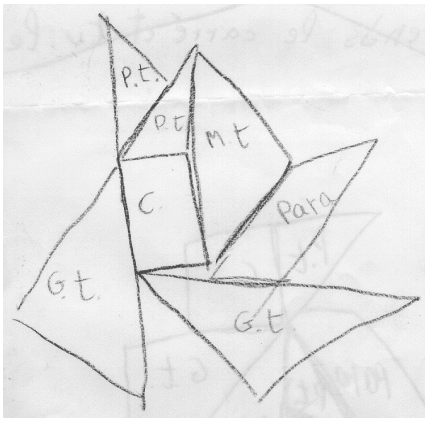


Fig. 18

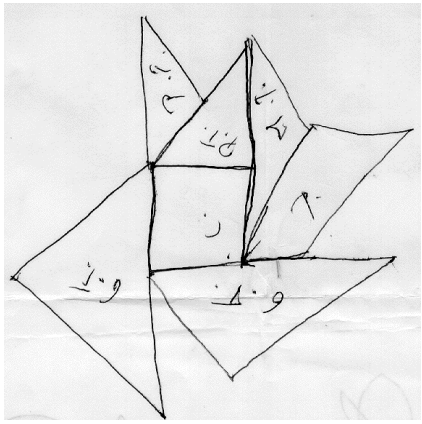


Fig. 19

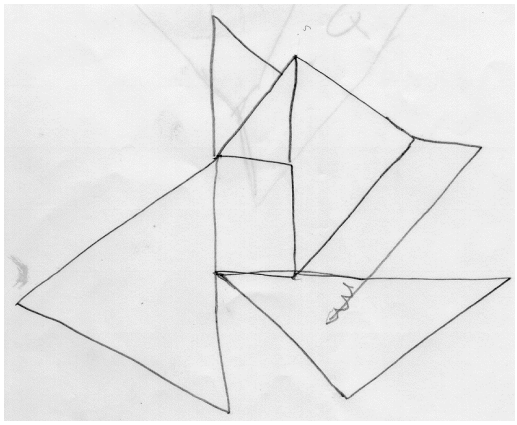


Fig. 20

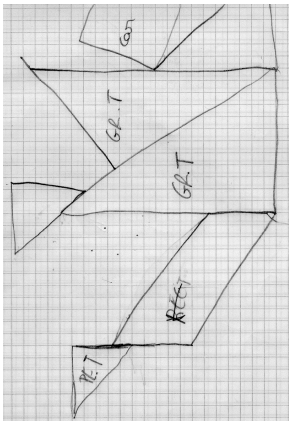


Fig. 21

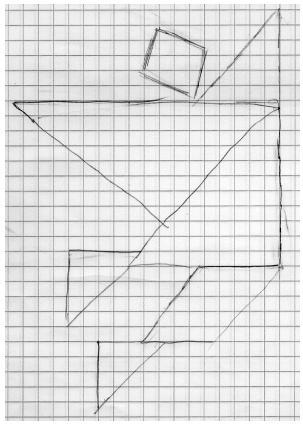


Fig. 22

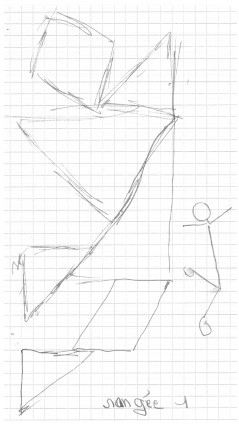


Fig. 23

Pour certains, le dessin n'a pas forcément facilité les explications. Les remarques à faire ici sur le vocabulaire employé par les élèves rejoignent celles de la section 3.2 à la page 34. Le nombre moyen de trajets a été de trois, jamais plus de cinq et souvent même un seul après un peu d'entraînement.

5 Silhouettes de Tangram

À présent, nous proposons des assemblages présentés seulement par leur contour et donc sans dessin des pièces individuelles. Nous les appelons des *silhouettes*.

5.1 Modèles superposables (de 6 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Avec les sept pièces du Tangram, recouvrir parfaitement une surface donnée par son contour.

Enjeux

Égalité d'aires et de longueurs. Voir chapitre 16, sections 3.1 et 3.3.

Notion de frontière.

Observer pour anticiper : émettre des hypothèses quant au choix des pièces à placer à certains endroits.

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des fiches avec, sur chacune, une silhouette de Tangram (voir en annexe les fiches 8 à 10, aux pages 82 à 84, à agrandir à la taille des Tangram de la classe).

Comment s'y prendre ?

Chaque enfant reçoit une fiche sur laquelle figure une silhouette qu'il doit recouvrir avec toutes ses pièces sans lacune ni chevauchement. Les fiches sont de difficulté croissante. Lorsque des pièces se détachent nettement du contour, le modèle est plus facile à reproduire (figure 24). Lorsque le modèle est plus compact, il est par contre plus difficile car il ne permet pas de deviner au préalable l'emplacement des pièces (figure 25). La consigne est de procéder comme avec un puzzle en superposant ses pièces au modèle pour trouver la façon dont le dessin est construit. Dès que deux élèves ont terminé, l'enseignant contrôle et échange les modèles.

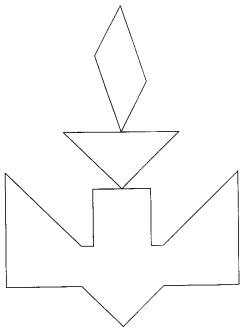


Fig. 24

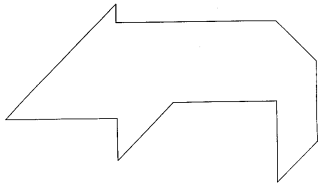


Fig. 25

Lorsque les élèves ont travaillé sur plusieurs modèles, on propose à la classe de composer un carré avec les sept pièces. Aux plus jeunes, il est nécessaire de donner un dessin de carré comme base pour disposer leurs pièces.

L'enseignant laisse les enfants chercher la solution aussi longtemps que nécessaire. Après un certain temps, il peut les encourager en désignant à chacun les pièces qui sont correctement placées et celles qui ne le sont pas.

Échos des classes

À tout âge, cette activité a suscité beaucoup d'intérêt. Les élèves ont été fiers de pouvoir résoudre le problème, surtout après beaucoup d'essais et parfois un peu de découragement. En comparant leurs solutions pour un même dessin, ils ont constaté avec étonnement qu'une silhouette n'accepte souvent qu'une seule solution. Ils ont d'abord pensé pouvoir disposer les pièces au hasard et parvenir à recouvrir la silhouette. Bien souvent, ils ont cru être proches de la solution, mais un petit espace restait libre qui ne correspondait à aucune pièce du Tangram. Il fallait alors enlever presque toutes les pièces pour recommencer autrement. Les jeunes enfants n'ont pas accepté facilement de retirer ce qu'ils avaient déjà placé.

Certains ont trouvé préférable de placer d'abord les grandes pièces et le parallélogramme. D'autres ont raisonné sur les équivalences entre figures. Par exemple, il leur restait à placer un grand triangle et sur la silhouette se présentaient deux espaces valant chacun un petit triangle. « Il faudrait couper ce grand triangle en deux », a dit un enfant, mais ce n'était pas possible, alors il a remplacé sa grande pièce par deux plus petites et a pu terminer son puzzle.

Les interactions entre élèves ont été nombreuses. Après être passée entre les mains de plusieurs élèves, une silhouette avait la réputation d'être facile ou difficile. Si un enfant ne parvenait pas à la solution, ceux qui avaient réussi la fiche ont essayé de lui donner des conseils : ils avaient l'intention de montrer la solution, mais ils ne s'en souvenaient plus. Une silhouette pouvait passer plusieurs fois entre les mains d'un même élève qui la reconnaissait, mais ne se rappelait pas la façon de la recouvrir. Pourtant, à force de résoudre ces puzzles, la plupart des élèves sont devenus plus efficaces, ils ont anticipé la place de certaines pièces et ont vu clairement quand ils étaient engagés dans une mauvaise solution.

Il en est de même pour la composition du carré avec les sept pièces. Cette activité, proposée à plusieurs reprises, a demandé chaque fois un temps de réflexion. Tous les élèves sont arrivés à la solution après cinq à vingt minutes. La figure 26 montre les deux solutions possibles en fonction de l'orientation du parallélogramme.

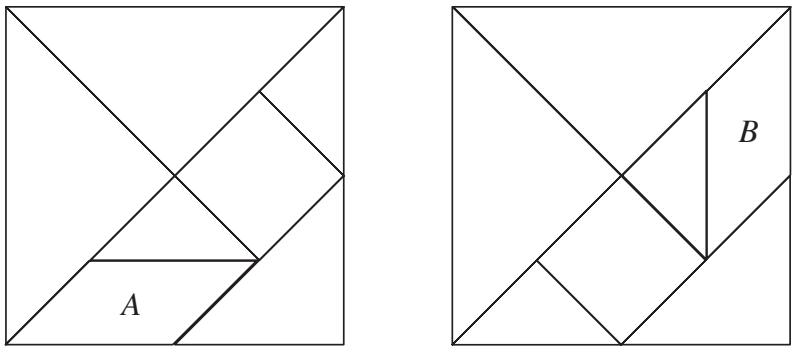


Fig. 26

5.2 Modèles à l'échelle (de 8 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Assembler les sept pièces pour former une configuration semblable à une silhouette plus grande ou plus petite qui sert de modèle.

Enjeux

Affiner la perception des polygones semblables.

Notion de rapport interne[8]. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – Voir compétences à la page 36. En outre : *Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram pour le tableau.

Des fiches avec, sur chacune, une petite silhouette de Tangram (voir en annexe les fiches 8 à 10, aux pages 82 à 84).

Comment s'y prendre ?

Au préalable, l'enseignant compose un assemblage au tableau avec les grandes pièces, il en trace le contour puis retire les formes. Il présente cette silhouette aux enfants en leur demandant de retrouver l'emplacement des pièces. Ceux-ci cherchent la solution avec leurs petites pièces. Puis le résultat des recherches est présenté au tableau.

Ensuite, chacun reçoit une fiche avec de petites silhouettes qu'il faut recomposer avec les pièces. L'enseignant organise une manière de corriger collectivement ou avec des fiches d'auto-correction.

Échos des classes

L'exercice est surprenant, car on peut arriver à composer un dessin dont l'allure générale ressemble au modèle, mais dont le contour est pourtant différent. Cela a été le cas lorsqu'un bateau a été proposé comme modèle au tableau (figure 27). Les élèves ont fait des essais qui représentaient bien des bateaux, mais avec des proportions différentes (figures 28 et29).

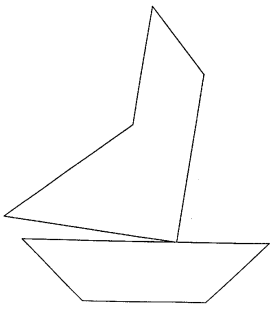


Fig. 27

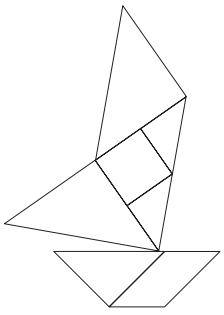


Fig. 28

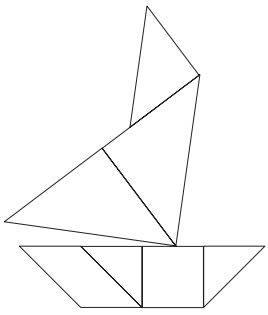


Fig. 29

Ils parvenaient à composer la voile du bateau et les dimensions semblaient

[8] Un rapport entre deux longueurs est appelé ici *rapport interne* si les deux longueurs sont observées dans le même dessin.

être à l'échelle du modèle, mais avec les pièces restantes ils n'ont pu faire qu'une petite coque qui ne correspondait pas au reste. Les élèves plus âgés ont reporté les distances d'un côté du dessin sur l'autre. Par exemple, la « hauteur » de la coque allant à vue deux fois dans la longueur à la base, ils ont essayé une composition qui respectait cette observation.

6 Dessin à l'échelle d'un modèle simple

6.1 Dessin sur quadrillage d'un carré formé des sept pièces (de 6 à 8 ans)

De quoi s'agit-il ?

Dessiner sur quadrillage un carré formé des sept pièces du Tangram.

Enjeux

Établir des rapports de longueurs ($\times 2$ et $\times 1/2$) dans une configuration (rapports internes) et les transposer sur un modèle à l'échelle. Voir chapitre 16, section 3.3.

Se repérer sur un quadrillage.

Utiliser les instruments de dessin : règle et crayon.

Compétences. *– Tracer des figures simples. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des feuilles quadrillées.

Des règles et des crayons de couleurs.

Comment s'y prendre ?

Chaque enfant compose le carré avec ses pièces et reçoit une feuille quadrillée pour le dessiner. La consigne est de dessiner le contour du carré le plus grand possible (insister), puis de dessiner les différentes pièces. Il est interdit de contourner les pièces. L'enseignant laisse les élèves faire un premier essai seuls, puis reprend collectivement les suggestions de chacun pour faire le dessin définitif sur une autre feuille. Il procède par étapes en demandant à la classe ce qu'il faut faire et en réalisant le dessin en grand au tableau. Selon son choix, il reproduit ou non le quadrillage au tableau. Pour de jeunes enfants, cette reproduction du quadrillage est indispensable pour se repérer, mais il est souhaitable de s'en passer dès que possible. L'idée n'est pas que chaque enfant ait le même dessin, mais, pour des raisons de clarté, on peut décider de fixer les dimensions du contour, par exemple autant de centimètres de côté, ou autant de carrés du quadrillage en fonction de la taille du papier.

Le tracé fait appel aux propriétés de la figure (voir la section 1 à la page 28), l'enseignant les explique selon les nécessités. Il s'exprime dans un langage spécifiquement géométrique et, avec de jeunes enfants, utilise des couleurs pour clarifier le tracé.

Lorsque le dessin est terminé, les élèves colorient les polygones qui composent le carré avec des couleurs différentes, pour les faire ressortir et atténuer les traits apparaissant par erreur.

Échos des classes

Nous avons réalisé cette activité en deux étapes d'environ quarante minutes chacune.

En première année, les enfants sont arrivés à dessiner sommairement l'emplacement de chaque pièce dans le carré sans tenir compte des dimensions. Parfois, le contour était rectangulaire au lieu d'être carré. Lors de la mise en commun, le dessin s'est fait pas à pas au tableau et simultanément sur les feuilles. Les enfants ont exprimé ce qu'ils voulaient dessiner, l'ont montré au tableau sur un grand quadrillage et l'enseignant a dessiné en expliquant comment il procédait.

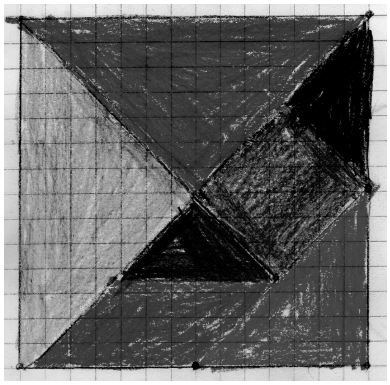


Fig. 30

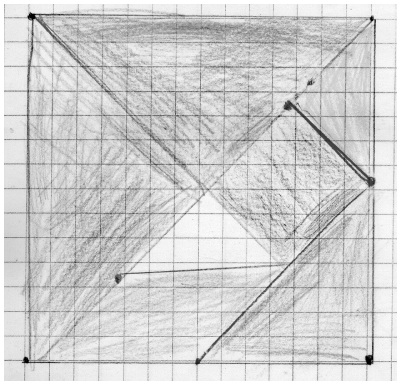


Fig. 31

L'utilisation de couleurs a permis de simplifier les consignes du tracé et le quadrillage a beaucoup servi pour fixer les longueurs. Au passage, les élèves ont appris à mieux manier la règle pour tracer des lignes droites. L'enseignant a vérifié chaque dessin au fur et à mesure. Si une imprécision passait inaperçue, après quelques tracés, le dessin se déformait et ne correspondait plus à la description faite au tableau. Alors, certains enfants trouvaient à leur dessin une allure bizarre : « Mon dessin ne ressemble pas à mes pièces. » Les figures 30 et 31 présentent deux réalisations d'enfants de première primaire.

En deuxième primaire, les élèves ont utilisé la règle comme instrument de mesure[9]. Certains ont choisi la dimension du premier côté et l'ont reportée pour tracer le carré. Ils n'avaient pas retenu la consigne de faire le carré le plus grand possible. Comme l'enseignant le faisait remarquer, un enfant a allongé ses traits sur toute la hauteur de la feuille : le carré était devenu rectangle. Ce fut un véritable défi de ne pas travailler avec des dimensions fixées à l'avance, mais de chercher comment tracer un côté le plus long possible qui puisse être reporté des quatre côtés sans sortir de la page. Un enfant a fait remarquer qu'on ne pouvait pas aller contre le bord de la feuille, car les carrés du quadrillage à cet endroit n'apparaissaient pas en

[9] Les mesures ont parfois entraîné des erreurs de calcul.

entier. Un autre a ajouté que c'était plus facile de suivre les lignes du quadrillage, ce que tous n'avaient pas fait. Une fois le contour du carré tracé, l'enseignant a procédé au tableau comme en première année, sauf qu'il n'a pas reproduit le quadrillage. Il a travaillé sans ce support et les élèves divisaient les distances mentalement après les avoir mesurées. Comme ils arrondissaient au centimètre près, des erreurs sont apparues lors de la division en deux des diagonales. Ils se sont alors servis du quadrillage. Les figures 32 et 33 montrent deux réalisations d'enfants de deuxième primaire.

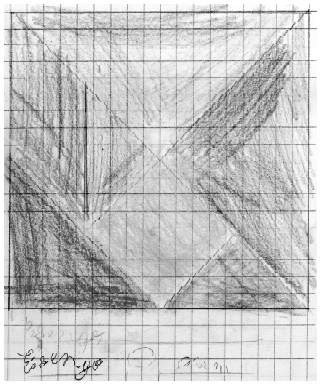


Fig. 32

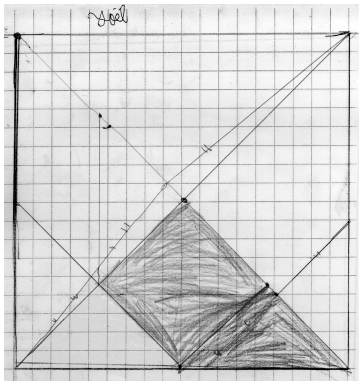


Fig. 33

Prolongements possibles

Découper le Tangram fait par les élèves pour s'en servir. Les élèves sont groupés par deux, l'un avec des petites pièces de Tangram et l'autre avec les grandes pièces qu'il a dessinées. L'un réalise une configuration sur le bureau, l'autre le reproduit avec ses grandes pièces et inversement. L'objectif est de travailler avec un modèle qui n'est pas superposable à l'original et de faire se correspondre, d'un Tangram à l'autre, les petits triangles, le moyen et les grands.

6.2 Dessin sur grande feuille d'un carré formé des sept pièces (de 8 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Dessiner sur une grande feuille le carré formé des sept pièces du Tangram.

Enjeux

Établir des rapports de longueurs ($\times 2$ et $\times 1/2$) dans une configuration (rapports internes) et les transposer sur un modèle à l'échelle. Voir chapitre 16, section 3.3.

Utiliser les instruments de dessin : règle et équerre.

Calculer mentalement avec des nombres décimaux. Voir section 4.5.

Compétences. – Voir compétences à la page 43. En outre : *Effectuer le mesurage en utilisant des étalons conventionnels et en exprimer le résultat. Mesurer des angles. Déterminer le rapport entre deux grandeurs. Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées. Connaître et*

énoncer des propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Une grande feuille vierge (format A1) pour quatre enfants.

Une feuille A4 par enfant.

Des règles, des équerres, des crayons et des gommes.

Comment s'y prendre ?

Au départ, chaque enfant compose un carré avec ses pièces. Ensuite, chaque équipe de quatre reçoit une feuille sur laquelle elle doit reproduire le modèle du carré le plus grand possible. Il s'agit donc bien d'un carré qui a pour côté la largeur de la feuille (laisser les élèves le découvrir). Ils se mettent d'accord sur la manière de procéder et chacun fait une part du travail en coordination avec les autres. Certaines lignes sont très longues et comme aucune règle n'est adéquate, il faut se mettre à plusieurs pour y arriver. Les feuilles font rarement apparaître des nombres entiers dans les mesures des côtés. Les enfants sont donc amenés à faire usage de nombres décimaux, tout d'abord pour mesurer des longueurs, ensuite pour les partager en deux, enfin pour les additionner en vue de vérifier leur dessin.

Dans un deuxième temps, les enfants font individuellement, sur une feuille A4, le dessin le plus grand possible.

Échos des classes

Certains élèves ont éprouvé des difficultés à choisir comme mesure la plus grande possible, la largeur totale de la grande feuille. Ils n'ont pas accepté facilement de prendre le bord de la feuille comme côté du carré et, par conséquent, de ne pas le tracer. D'autres, par contre, y ont pensé tout de suite. Beaucoup d'enfants n'ont pas bien utilisé leur règle, ils ont été imprécis. Ils ont travaillé en marquant les points de division sur les côtés des polygones déjà faits. Après avoir exécuté les tracés, ils ont vérifié les angles droits avec leur équerre (souvent à la demande de l'enseignant). Ils ont rapidement constaté qu'un écart de quelques millimètres au départ pouvait engendrer de grandes déformations comme, par exemple, une figure qui aurait dû être carrée et qui n'avait qu'un angle droit.

Les calculs avec des nombres décimaux ont posé des problèmes à certains, bien qu'en équipe les ressources soient plus nombreuses. La collaboration a été nécessaire pour tracer de grandes droites : les enfants ont aligné leurs règles l'une derrière l'autre et l'un d'entre eux a été chargé de tracer. Beaucoup ont pensé à utiliser la règle d'un mètre du tableau, mais elle était trop imprécise pour faire des mesures. Les enfants ont mesuré alors des segments inférieurs à la longueur de leur règle et les ont additionnés.

Le travail individuel a permis à chacun de refaire l'ensemble de la démarche, ce qui était bien nécessaire dans certains groupes où un seul enfant avait pris la tête des opérations.

Les figures 34 et 35 montrent les grandes feuilles de quatre groupes d'élèves de troisième et quatrième primaires.

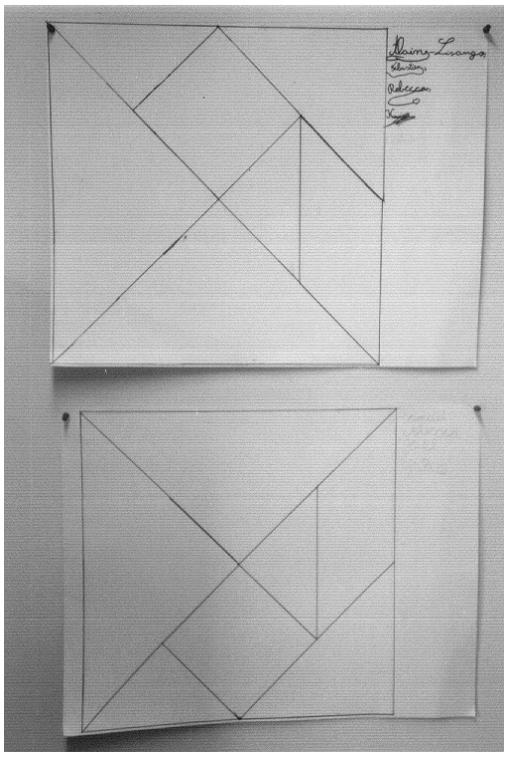


Fig. 34

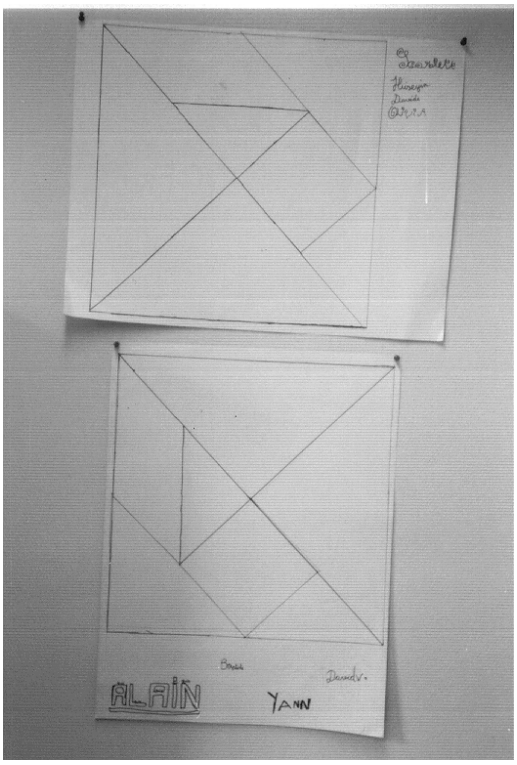


Fig. 35

Prolongements possibles

Parvenir au partage du carré en sept pièces uniquement par pliage de la feuille pour faire apparaître les traits de séparation[10].

7 Dessin à l'échelle de modèles plus compliqués

7.1 Agrandissement d'une figure (de 8 à 10 ans)

De quoi s'agit-il ?

Créer un dessin avec les pièces du Tangram et le reproduire quatre fois plus grand.

Enjeux

Reproduire un dessin à une échelle plus grande.

Notion de rapport externe[11]. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – *Tracer des figures simples. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.*

[10] Cette activité est décrite dans ERMEL [1982].

[11] Un rapport de deux longueurs est appelé ici *rapport externe* si les deux longueurs sont observées sur deux figures semblables (à l'échelle).

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Une grande feuille vierge pour quatre enfants.

Des crayons ordinaires.

Comment s'y prendre ?

Les enfants sont par équipes de quatre. Ils mettent leurs pièces en commun et doivent recréer les pièces d'un Tangram quatre fois plus grand en assemblant chaque fois quatre pièces identiques. Ainsi avec les quatre carrés, ils forment un carré quatre fois plus grand. Ils procèdent de la même manière pour le parallélogramme en assemblant les quatre parallélogrammes de l'équipe. Et ainsi de suite pour le moyen triangle, les deux petits et les deux grands triangles (figures 36).

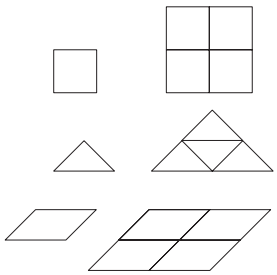


Fig. 36

Ensuite, les quatre enfants de chaque groupe redistribuent les pièces et chacun imagine un assemblage. Ils en choisissent un parmi les quatre. Dans un coin de la feuille, ils disposent cet assemblage et contournent chaque pièce pour former un dessin. Ils doivent alors composer le même dessin quatre fois plus grand en assemblant, comme au début, les pièces identiques pour obtenir une pièce quatre fois plus grande. Lorsque les pièces sont posées correctement sur la feuille, ils contournent les « grandes » pièces, c'est-à-dire celles formées des quatre petites pièces.

Échos des classes

Voici, aux figures 37 et 38, la réalisation d'un groupe d'élèves.

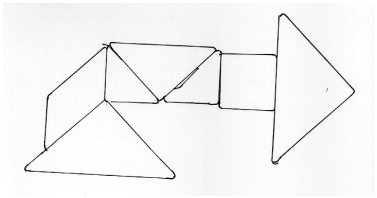


Fig. 37

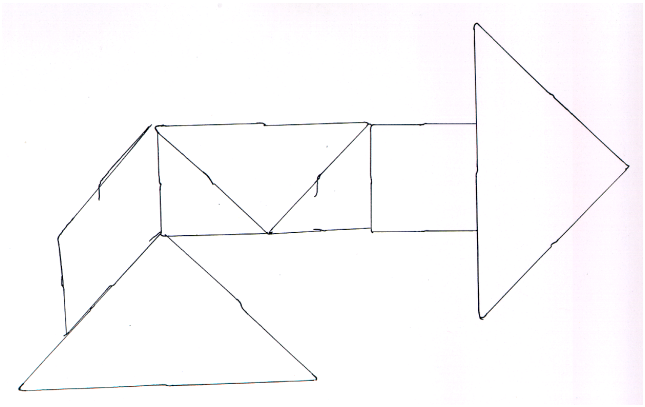


Fig. 38

Pour les enfants, le plus difficile a été de composer un grand triangle avec quatre petits.

Lors du dessin, certains ont contourné toutes les pièces du grand modèle comme le montre les figures 39 et 40, au lieu de faire apparaître juste le contour des pièces quatre fois plus grandes.

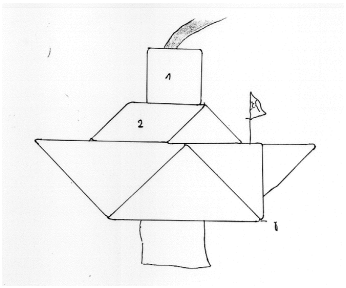


Fig. 39

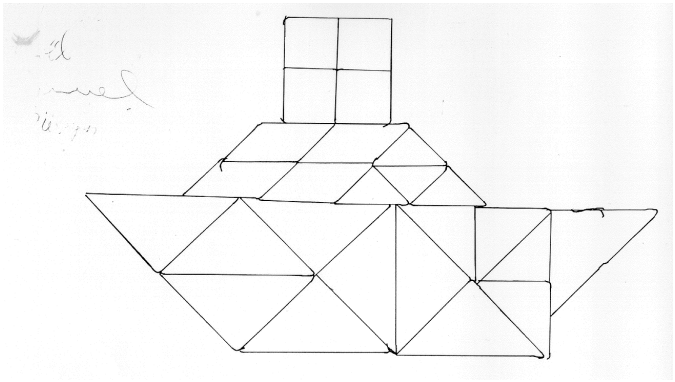


Fig. 40

7.2 Réduction et agrandissement de figures (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Dessiner, d'après un modèle, un assemblage à une échelle plus petite. Exprimer l'échelle d'une silhouette par rapport à un modèle. À partir d'un dessin à l'échelle 1/2 ou 1/4, dessiner l'original.

Enjeux

Pratiquer les rapports internes et le rapport externe. Voir chapitre 16, section 3.3.

Relever des dimensions et les exprimer à l'échelle voulue. Voir section 4.

Exprimer une échelle par une fraction. Voir section 4.4.

Dessiner avec une règle, une équerre et un rapporteur.

Calculer mentalement, par écrit ou à la calculatrice.

Compétences. – *Tracer des figures simples. Mesurer des angles. Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles. Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram pour le tableau.

Des feuilles A4 vierges.

Des règles, équerres, rapporteurs, crayons et gommes.

La fiche 11 (voir en annexe à la page 85).

Comment s'y prendre ?

La première étape consiste à réaliser un assemblage au tableau avec les grandes pièces du Tangram, dans le but de le dessiner sur une feuille A4. Les dimensions du dessin sont au choix, du moment que le dessin apparaisse entièrement sur la feuille. Avant de commencer, l'enseignant interroge les élèves sur la façon de procéder. Il faut connaître les dimensions des pièces

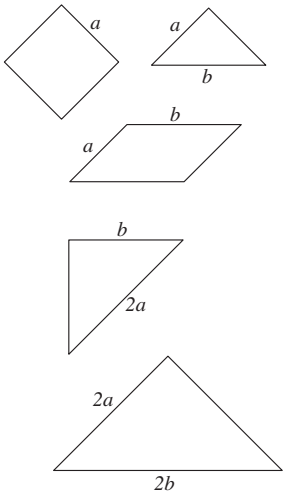


Fig. 41

du tableau pour les réduire à l'échelle de la feuille. Mais faut-il mesurer tous les côtés de toutes les pièces ? Si on connaît la mesure du côté du carré, par exemple 25 cm, quelles mesures peut-on en déduire pour les autres pièces ? Les élèves doivent imaginer ce cas avec leur Tangram et noter au brouillon les dimensions des autres pièces en les comparant les unes aux autres. En superposant les figures, on trouve deux sortes de côtés : ceux qui valent le côté du carré ou le double, soit les longueurs notées a et $2a$ sur la figure 41, et ceux qui valent b et $2b$ dont on ne connaît pas la mesure. Les élèves s'expriment en termes de longueurs, soit $a = 25$ centimètres et $b = 35{,}3$ centimètres (mesures prises, dans ce cas-ci, sur la figure au tableau[12]).

À la suite de ce raisonnement, l'enseignant indique les mesures sur le dessin du tableau. Les élèves doivent reproduire le dessin à l'échelle sur leur feuille A4. Chacun choisit comme il l'entend le nombre par lequel il va diviser les mesures relevées au tableau, pourvu que son dessin soit entièrement sur sa feuille. Vient alors la phase de dessin : il faut utiliser les instruments pour tracer les figures, les parallèles, les angles droits, le plus soigneusement possible. Les enfants remarqueront en dessinant que, lors de la mise à l'échelle des figures, les côtés changent de mesure mais les angles restent identiques. Ils devront peut-être relever au tableau des angles entre des côtés de pièces non jointives ou estimer à vue l'amplitude de ces angles, marqués en gris sur la figure 42.

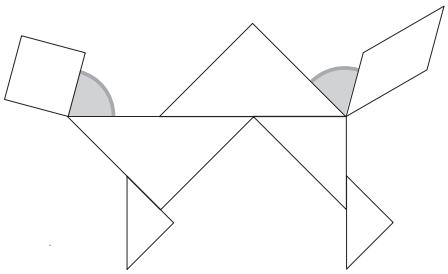


Fig. 42

Enfin, l'enseignant demande à chacun d'exprimer l'échelle de son dessin sous forme d'une fraction. Il fait allusion aux mesures : si un centimètre sur le dessin vaut cinq centimètres au tableau, on parle d'un dessin à l'échelle 1/5.

On fait la synthèse suivante, illustrée par les cas rencontrés dans la classe. *On exprime l'échelle par un rapport qui nous parle de longueurs. Il s'agit des longueurs des côtés d'une figure comparées aux longueurs des côtés d'un modèle plus grand. Un centimètre sur un dessin à l'échelle correspond à x centimètres sur le modèle : on parle dans ce cas de l'échelle 1/x.*

À l'étape suivante, l'enseignant donne à la moitié des élèves le premier dessin de la fiche 8 à la page 82 et aux autres le deuxième dessin de cette même fiche. Il leur est dit que le premier dessin est la reproduction d'un autre à

[12] On peut décider de travailler sans mesurer b, au quel cas on contruit les figures en reportant au compas la mesure prise sur la diagonale du carré.

l'échelle 1/4 et que le deuxième est la reproduction du même modèle de départ à l'échelle 1/2. On demande alors à chacun des élèves de retrouver l'original. Ainsi, au bout du compte, tous devront arriver au même modèle de départ par des calculs différents, les uns multipliant les longueurs par 2 et les autres par 4. La phase de dessin demande l'utilisation des instruments.

Échos des classes

Lorsque l'enseignant a demandé quelles étaient les mesures nécessaires pour reproduire le dessin du tableau sur une feuille, les élèves ont rapidement répondu qu'il ne fallait pas mesurer tous les côtés, puisque plusieurs figures avaient des côtés de même longueur. Ils sont arrivés à cette conclusion suite aux nombreuses manipulations où ils avaient remplacé une pièce par une autre, expliqué la manière dont deux pièces se joignaient, dessiné un schéma, etc.

Les figures 43 à 46 présentent les dessins des élèves d'après un grand modèle au tableau : le premier était à l'échelle 1/5, les deux suivants à l'échelle 1/4 et le dernier à l'échelle 1/3.

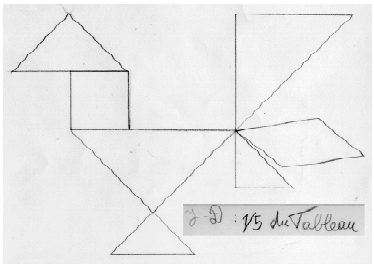


Fig. 43

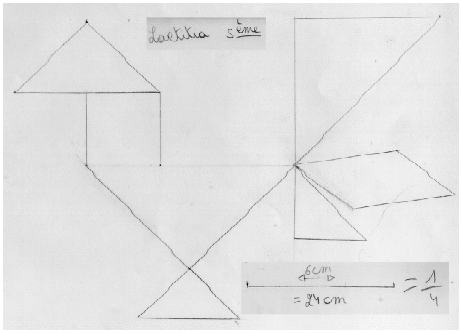


Fig. 44

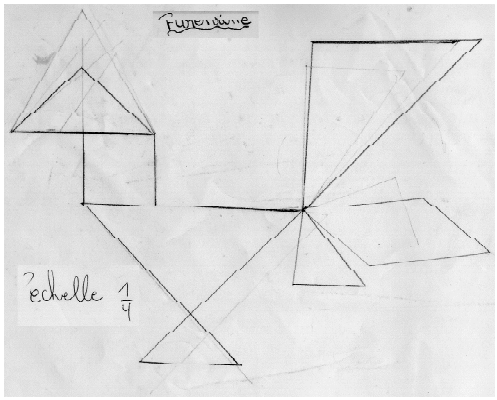


Fig. 45

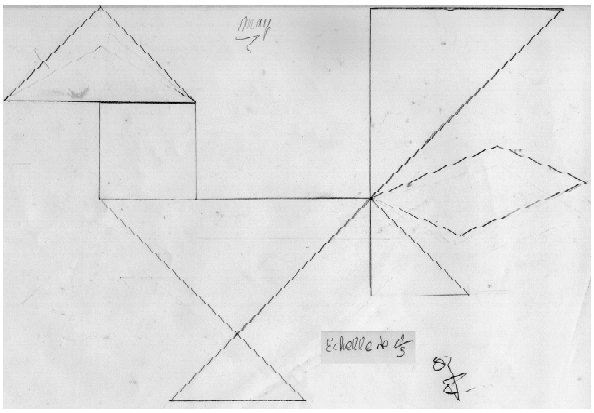


Fig. 46

Les élèves avaient déjà rencontré des échelles sur des cartes géographiques, mais certains ont fait la confusion avec le rapport des aires en disant qu'un dessin à l'échelle 1/2 allait deux fois dans le modèle.

Le maniement des instruments, et particulièrement celui du rapporteur, a posé quelques problèmes. L'enseignant a beaucoup insisté sur la précision des mesures lors des relevés et du tracé. Certains n'étaient pas à l'aise avec les calculs de décimaux et ont été autorisés à utiliser leur calculatrice, ceci afin de ne pas alourdir l'activité.

Les figures 47 à 50 montrent les réalisations de quatre élèves. Chaque figure présente le petit modèle à l'échelle 1/2 ou 1/4 (donné par l'enseignant) sur lequel ils ont travaillé et l'agrandissement qu'ils ont eux-mêmes dessiné.

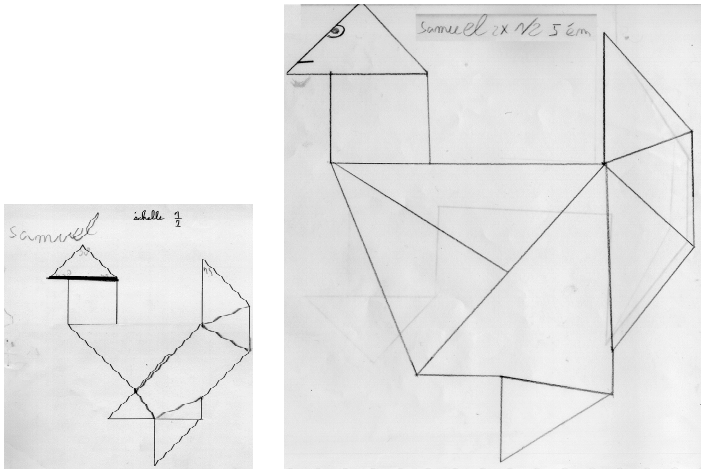


Fig. 47

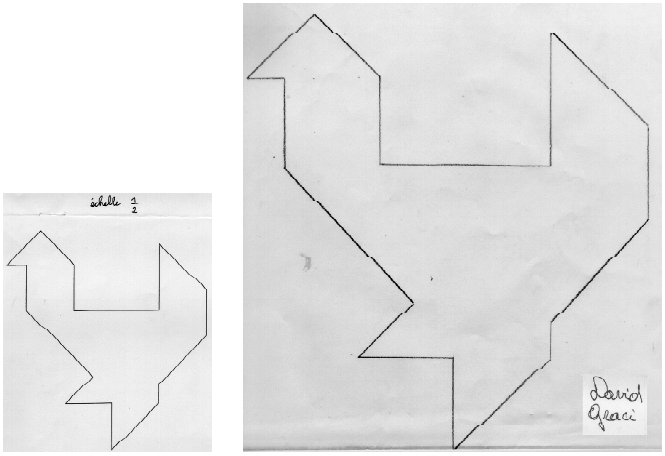


Fig. 48

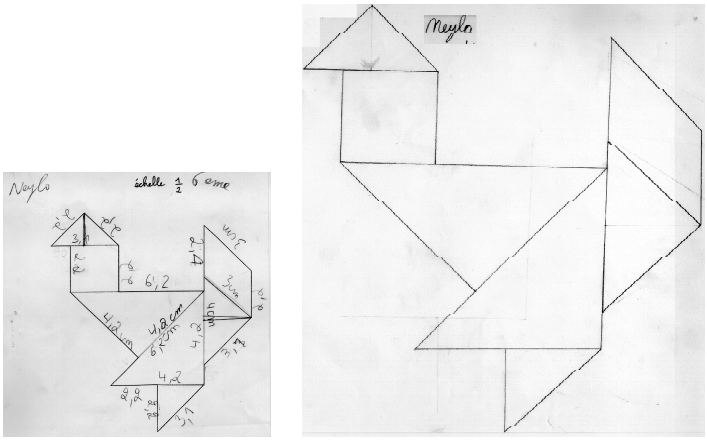


Fig. 49

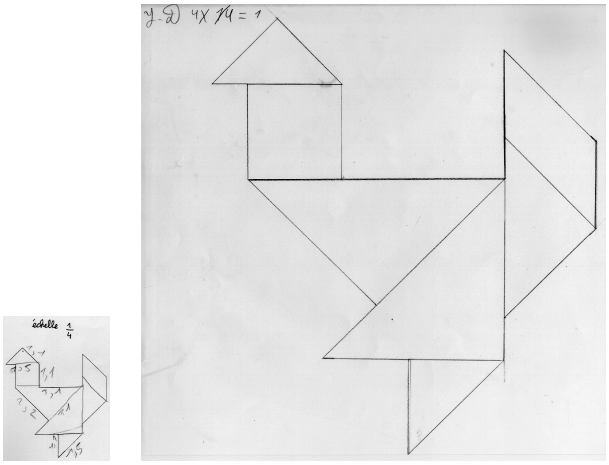


Fig. 50

8 Fractions et aires

8.1 Trouver des fractions (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Trouver la fraction que représente chaque pièce par rapport au Tangram complet.

Enjeux

Notions de fraction et d'équivalence par superposition de figures. Voir chapitre 16, section 4.4.

Compétences. – *Fractionner des objets en vue de les comparer.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des feuilles et des crayons.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève forme le carré avec les sept pièces du Tangram. Il le dessine sur un papier en contournant les pièces ou utilise le dessin réalisé à la section 6.2 à la page 45.

La consigne est : « Imaginons que le carré ainsi formé soit une tarte, quelle part de cette tarte représente chaque morceau ? Ecrivez la fraction qui correspond à chaque pièce du Tangram. » Si les élèves démarrent difficilement, on prend l'exemple du grand triangle : « Combien de parts comme celle-ci peut contenir la tarte carrée ? Le grand triangle va quatre fois dans la tarte, donc il vaut 1/4 de la tarte carrée. » Les enfants essaient d'appliquer le même raisonnement aux autres pièces du Tangram pour obtenir la figure 51.

Seul le petit triangle va exactement seize fois dans la tarte carrée. Pour les autres pièces, il faut recourir au pavage complet du grand carré à l'aide du petit triangle (voir figure 52). Ils en arrivent à la conclusion que le carré, le parallélogramme et le triangle moyen contiennent chacun deux petits triangles, c'est-à-dire valent chacun 2/16 de la tarte carrée. À ce stade, si les élèves ont déjà manipulé des fractions équivalentes, on peut remplacer 2/16 par 1/8. Sinon, pour y arriver, on pourra tenir un des deux raisonnements suivants.

Si le petit triangle va seize fois dans la tarte carrée, chacune des pièces qui comprend deux petits triangles (le parallélogramme, le triangle moyen et le carré) ira huit fois dans la tarte carrée.

Le découpage de la figure 53 montre que le carré va huit fois dans la tarte carrée. Il suffit, ensuite, de montrer l'équivalence des aires du carré, du parallélogramme et du triangle moyen en recourant au petit triangle comme pièce de référence.

Ces trois pièces valent donc 1/8 de la tarte carrée.

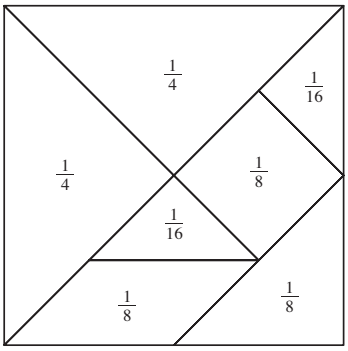


Fig. 51

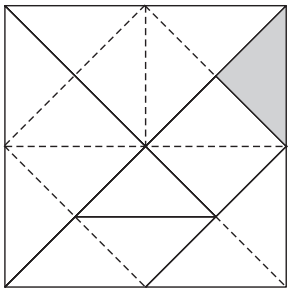


Fig. 52

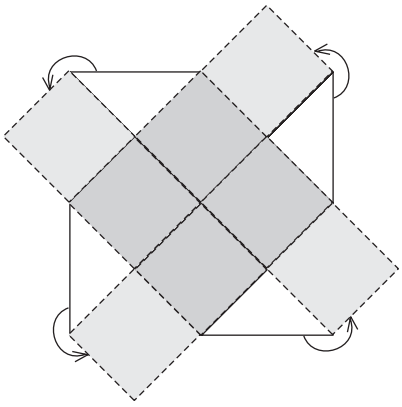


Fig. 53

Échos des classes

Pour trouver les différentes fractions, les élèves ont eu recours au pavage complet du grand carré. Pour cela, ils ont reporté une pièce sur le dessin et l'ont contournée pour faire apparaître le pavage. La figure 52 montre un exemple de pavage avec le petit triangle et la figure 53, le pavage avec le carré.

Certains enfants ont été surpris dans un premier temps par l'équivalence des aires du carré, du parallélogramme et du triangle moyen : le recours au petit triangle comme pièce de référence les a convaincus (figure 54).

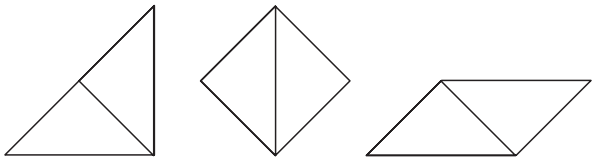


Fig. 54

8.2 Évaluer des aires (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Exprimer l'aire d'un dessin au moyen d'une unité non conventionnelle, puis en centimètres carrés.

Enjeux

Notions d'aire par pavage et recouvrement[13]. Voir chapitre 16, section 4 et en particulier 4.1 et 4.5.

Compétences. – *Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat. Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.*

[13] On peut trouver d'autres activités relatives au Tangram dans ERMEL [1982].

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Par enfant, une fiche avec une silhouette (voir en annexe les fiches 8 à 10, aux pages 82 à 84).

Des feuilles et des crayons.

Comment s'y prendre ?

Chaque enfant reçoit une silhouette et doit chercher son aire. Après un moment de reflexion individuelle, l'enseignant demande si une des pièces du Tangram ne pourrait par servir d'unité de mesure. Le carré est commode car son aire est facile à trouver. Il rappelle la notion de centimètre carré, mais ne permet pas de paver les silhouettes reçues. Le choix du petit triangle est plus judicieux, puisqu'il permet de recouvrir entièrement chaque silhouette par pavage. On laisse alors de côté la notion de centimètre carré et on se donne comme unité le petit triangle. Chaque enfant doit exprimer l'aire de sa silhouette en « unité-triangle ». Il indique son résultat sur son dessin. La mise en commun révèle que toutes les silhouettes ont la même aire, quelle que soit leur forme, puisqu'elles se composent du même nombre d'unités.

On passe alors à l'unité conventionnelle du centimètre carré : comment transformer en centimètres carrés l'aire exprimée en « unité-triangle » ? Les élèves font une recherche individuelle, puis on partage les idées. La solution est de transformer les 16 « unités-triangle » en centimètres carrés en passant par l'aire d'un seul triangle. Plus facile encore : on évoque ce qui a été découvert à l'activité précédente, à savoir que la pièce carrée du Tangram vaut deux triangles. Ceci amène à dire que les 16 « unités-triangle » sont égales à 8 « unités-carré ». On calcule l'aire du petit carré, par exemple 4 centimètres carrés, et on multiplie le résultat par huit pour obtenir l'aire totale de la silhouette, 32 centimètres carrés dans ce cas-ci.

Enfin, les enfants recherchent l'aire de chaque pièce du Tangram en passant par les équivalences avec le petit triangle. Si par exemple le carré a une aire de 4 centimètres carrés, le parallélogramme et le triangle moyen aussi. Le grand triangle a une aire de 8 centimètres carrés et le petit triangle de 2 centimètres carrés.

Prolongements possibles

Trouver l'aire d'une autre surface que le Tangram en choisissant une pièce que nous appellerons « figure-unité » qui permet de la paver entièrement.

Échos des classes

Les élèves ont vite fait le rapport entre cette activité et celle sur les fractions. Le pavage de la silhouette par le petit triangle a été assez naturel, ainsi que le rapport avec le carré. Ils ont trouvé l'aire de toutes les pièces, bien que, contrairement à notre exemple ci-dessus, les nombres qu'ils ont eu à utiliser comportaient une virgule (le carré avait 3,4 centimètres de côté).

3

Les mesures de capacité

1 Comparer des récipients (de 6 à 10 ans)

De quoi s'agit-il ?

Comparer la capacité de récipients, les sérier en fonction de leur capacité.

Mesurer un récipient avec un autre qui sert d'étalon.

Enjeux

Discerner la capacité comme grandeur.

Comparaison et sériation des capacités. Voir chapitre 16, section 3.1.

Mesure en nombres entiers. Voir section 4.2.

Compétences. – *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des récipients pouvant contenir de l'eau, de formes les plus variées possibles, par exemple : vase, cube, boîte à conserve, flacon à parfum, petit seau, boîte à biscuits, bouteille opaque, bouteille transparente, bocal, assiette creuse, boîte à glace, ...

Des bassines pour protéger les tables.

Comment s'y prendre ?

Les élèves doivent apporter des récipients pouvant contenir de l'eau, les plus spéciaux possibles (l'enseignant en prévoit aussi).

Première activité

Par groupes de deux, les élèves décrivent deux récipients et les comparent. Si c'est possible, ils prennent note des caractéristiques relevées. Dans tous les cas, l'enseignant fait une mise en commun orale des observations. La question est « que peut-on dire d'un récipient ? » Au fur et à mesure l'enseignant écrit au tableau les caractéristiques données par les élèves et les organise en deux colonnes sans annoncer le principe de répartition. La première colonne contient les caractéristiques qualitatives des objets (matière, usages, provenance, ...) et la seconde, les informations du type quantitatif (grandeur, hauteur, éventuellement contenance, ...). L'enseignant fait préciser le vocabulaire, notamment les adjectifs. Par exemple « le vase est grand » ne veut rien dire en soi, l'élève doit préciser « le vase est plus grand que le flacon », et encore faut-il savoir ce qu'il entend par « grand ».

Finalement, l'enseignant demande pourquoi les informations sont en deux colonnes. Il s'attend à ce que les élèves fassent la différence – même si c'est dans leur langage – entre la description qualitative du récipient et sa capacité, la quantité d'eau qu'il peut contenir. L'activité se poursuit sur ce dernier point.

Synthèse

À la fin de la séance, l'enseignant met en évidence la distinction entre la matière et la forme du récipient et la quantité de liquide qu'il peut contenir. Cette idée doit sortir de l'expérience des enfants et les guider vers les manipulations suivantes.

Deuxième activité

On propose de s'intéresser à la capacité des récipients. Les élèves se mettent par groupes de trois ou quatre avec quelques récipients (quatre ou cinq), choisis par l'enseignant pour que le classement des capacités ne se calque pas sur celui de la hauteur des récipients[1].

La première consigne est de comparer les capacités deux à deux. Exprimer les comparaisons en termes de « dans tel ou tel, on peut mettre plus/moins/autant d'eau que dans tel autre ». Les élèves disposent d'eau et organisent les comparaisons à leur guise.

La deuxième consigne est de mettre tous les récipients dans l'ordre (les sérier), en partant de celui où on peut mettre le moins d'eau jusqu'à celui où on peut en mettre le plus. Faire un premier classement à l'œil, puis vérifier au-dessus d'une bassine. Les procédures sont laissées aux élèves (ils n'ont pas de récipients intermédiaires autres que ceux à classer).

Nous montrons ci-après un exemple de méthode pour déterminer le récipient qui contient le moins d'eau et deux exemples de méthode pour classer les récipients en fonction de leur capacité[2].

[1] Si les élèves lisent des capacités sur des étiquettes, on remet la question à plus tard, car elle mérite une activité à part entière (voir activité 4 à la page 67).

[2] Pour la clarté des photos, nous avons coloré l'eau.

TROUVER LE RECIPIENT QUI CONTIENT LE MOINS D'EAU



A *B* *C* *D*

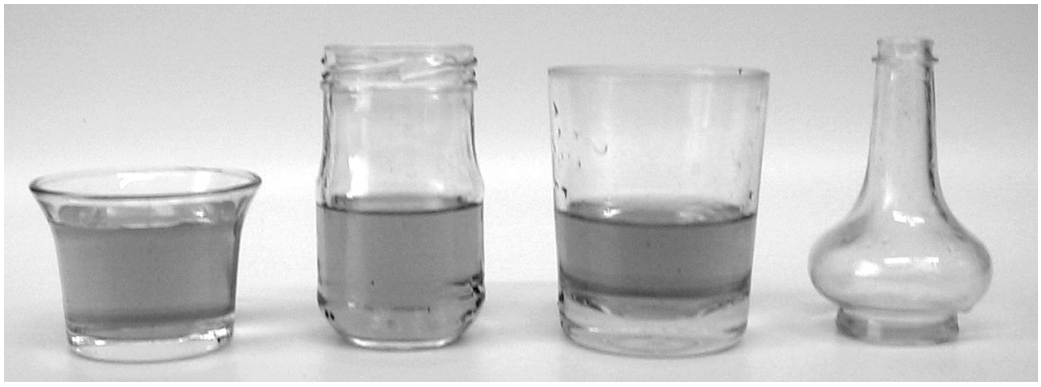
a) On choisit celui qui a l'air le plus petit, par exemple le récipient *A*.
On le remplit d'eau et on verse le contenu de *A* dans chacun des autres.



A *B* *C* *D*

b) On voit que le récipient *D* déborde, donc il contient moins d'eau que *A* et que les deux autres.

Vérification : on vide tous les récipients et on recommence à remplir chacun avec *D*.



A *B* *C* *D*

CLASSER DES RECIPIENTS (I)



D *E* *F* *G*

a) Avec le récipient qui contient le moins d'eau (à vérifier), ici *D*, on remplit complètement les autres, un par un. On note combien de fois on a versé *D* dans chaque récipient.



D *E* *F* *G*

b) On classe les récipients en commençant par celui qui peut contenir le moins d'eau jusqu'à celui qui peut contenir le plus d'eau :

1. le récipient D ;
2. le récipient $E = 3 \times D$;
3. le récipient $F =$ entre 4 et $5 \times D$;
4. le récipient $G = 5 \times D$.

CLASSER DES RECIPIENTS (II)

a) On prend le récipient qui contient le moins d'eau, ici le D, pour remplir les autres.

b) On verse le contenu de D **une fois** dans chaque récipient.



D *H* *B* *I*

c) Puis, on rajoute une deuxième fois de l'eau avec D dans chaque récipient.



D *H* *B* *I*

Le récipient B est rempli, donc c'est le deuxième récipient du classement.

d) On rajoute à nouveau la même quantité d'eau dans les récipients restants.



D *H* *I*

Le récipient I est rempli, donc c'est le troisième récipient du classement.

e) On peut alors classer les récipients dans l'ordre : D, B, I, H.



D *B* *I* *H*

Synthèse

Il est important de relever en fin de séance « qui sait quoi » et comment les acquis s'installent pour chaque enfant. En fonction de l'âge, on attendra des résultats différents et plusieurs séances seront sans doute nécessaires pour mettre au point une stratégie efficace.

L'objectif à terme est de faire une synthèse collective où chaque groupe s'explique sur ses difficultés et sur les méthodes efficaces. Les enfants doivent expliquer leurs manipulations et l'enseignant les amène à utiliser un vocabulaire adéquat. La description complète d'une résolution du problème peut donner des idées à certains enfants et lors d'un autre essai, chacun devrait être capable d'y arriver le plus « économiquement » possible. Ceci permettrait à l'enseignant de voir ceux pour qui un problème de compréhension persiste. Il ne s'agit pas d'une évaluation notée, mais d'une observation attentive des moyens que se donne chaque enfant pour résoudre le problème qu'on lui a soumis.

On peut faire une synthèse reprenant en bref les procédures efficaces accompagnées d'illustrations schématiques des situations, en adaptant ce qui a été présenté ci-dessus en fonction de l'expérience de la classe.

Échos des classes

En première et deuxième primaires, les enfants ne se sont pas préoccupés d'éventuelles étiquettes, ni des indications de contenance. Ils ont décrit les récipients en termes très généraux « gros, petit, ... » Ils en sont restés à de tels adjectifs et n'ont pas exprimé clairement des comparaisons sans l'intervention de l'enseignant. La mise en commun s'est faite oralement sans note au tableau. La consigne suivante (*mettre tous les récipients dans l'ordre en partant de celui où on peut mettre le moins d'eau jusqu'à celui où on peut en mettre le plus*) a été donnée par l'enseignant sans beaucoup d'explications, pour voir les réactions des élèves.

Concernant la comparaison des capacités, les élèves se sont tout d'abord fixés sur la hauteur des récipients : « Le récipient le plus haut pourra contenir le plus d'eau. » Les manipulations avec l'eau leur ont permis d'infirmer ce classement.

En troisième et quatrième primaires, les comportements ont été plus variés. Les élèves ont été très inventifs dans le choix des récipients et stimulés à travailler avec le matériel qu'ils avaient eux-mêmes apporté. C'est l'enseignant qui a sélectionné les deux récipients à comparer en fonction des ressemblances et différences susceptibles de provoquer un apprentissage. La description qualitative a été très riche, les élèves ont relevé des données sur les étiquettes (nom du produit, provenance, contenance, ...). Pourtant la comparaison des capacités n'a pas surgi tout de suite. Les enfants formulaient les comparaisons quantitatives en disant : « C'est plus petit/grand/haut/gros que..., la bouteille mesure 13 cm, c'est plus haut que ma latte... » Néanmoins, en quatrième année, les élèves ne s'attachaient plus à la hauteur du récipient pour en caractériser la capacité.

En ce qui concerne les sériations, chaque groupe a travaillé différemment. L'un est parti du récipient qui paraissait le plus petit et s'en est servi pour

remplir les autres et les classer en fonction du nombre de transvasements nécessaires pour remplir entièrement chaque récipient.

Un autre groupe a fait de même, mais à partir du récipient le plus grand et de l'importance du débordement : ils ont estimé à vue si ça débordait beaucoup ou un peu.

Un groupe a tenu compte de quelques indications données par les étiquettes.

Dans un des groupes, les élèves ont choisi un récipient au hasard, avec lequel ils ont versé le contenu une seule fois dans chacun des autres récipients et ils en sont restés là. Ils ne savaient que faire et ont fait appel à l'enseignant. L'intervention d'un autre groupe qui avait réussi à résoudre la question les a éclairés dans la manière de procéder.

Certains sont repassés par une comparaison des récipients deux par deux pour arriver au classement général.

Un seul groupe n'est pas parvenu au bout de la tâche dans le temps imparti, en raison d'une mauvaise organisation entre les élèves.

Dans une classe, après avoir sérié les récipients, chaque groupe a remis ses bouteilles en désordre et tous les élèves sont passés de table en table. Ils devaient proposer un classement en jugeant à l'œil (sans transvasement) de la capacité des récipients. Le groupe qui avait effectué le classement par transvasement faisait les corrections et justifiait ses choix en les expliquant.

2 Mesurer des capacités (de 8 à 10 ans)

De quoi s'agit-il ?

Comparer des récipients gradués selon des étalons différents.

Enjeux

Mesurer une capacité avec un étalon de rencontre imposé. Voir chapitre 16, section 4.2.

Rencontre, dans un cas extrêmement simple, avec un changement d'unité (section 4.8 pour le cas général). La mesure avec un étalon deux fois plus petit s'exprime par un nombre deux fois plus grand (c'est une application de ce que l'on appelle le *principe de compensation*).

Compétences. – *Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des récipients différents pour chaque groupe de quatre élèves.

Deux étalons dans le rapport 1/2 (ce seront les mêmes pour chaque groupe), du genre louche, petit verre, etc.

Les fiches 12 à 15 (en annexe aux pages 86 à 89).

Comment s'y prendre ?

L'enseignant forme des groupes de quatre élèves maximum[3]. Chaque groupe doit mesurer le contenu d'un récipient à l'aide de deux étalons donnés (dans notre exemple, un petit vase à long col et un pot). Il procède aux transvasements et les résultats sont inscrits sur une fiche prévue à cet effet[4].

Fiche 12 (page 86)

GROUPE 1

a) Voici le récipient à mesurer avec le petit étalon :



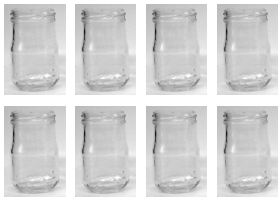
Chaque fois que tu as versé le petit étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



b) Voici le même récipient à mesurer avec le grand étalon :



Chaque fois que tu as versé le grand étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



Fiche 13 (page 87)

GROUPE 2

a) Voici le récipient à mesurer avec le petit étalon :



Chaque fois que tu as versé le petit étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



b) Voici le même récipient à mesurer avec le grand étalon :



Chaque fois que tu as versé le grand étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.

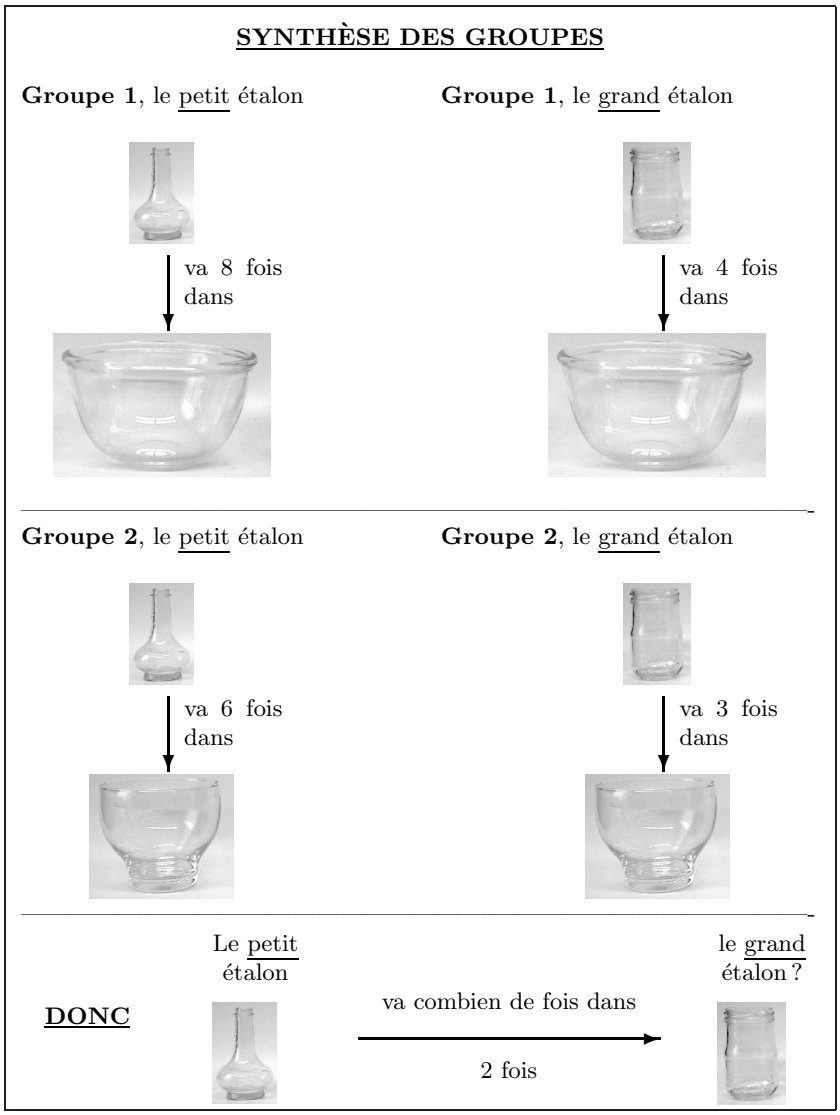


Lorsque tous les groupes ont effectué les mesures, on fait une synthèse collective dans le but de comparer les résultats. Tout d'abord, on place au tableau les résultats obtenus par chaque équipe pour les deux étalons. Ensuite, on se questionne sur le lien entre la mesure obtenue avec le premier étalon et la mesure obtenue avec le deuxième, c'est-à-dire le passage du simple au double (relation « fois 2 »). Enfin, on essaie d'en tirer comme conclusion que le petit étalon « va deux fois » dans le grand ou autrement dit, que « le grand étalon contient deux fois le petit ». Voici un exemple de fiche de synthèse :

[3] Pour ne pas multiplier le matériel, on peut faire travailler les groupes à tour de rôle.

[4] Nous proposons des exemples de fiches que l'enseignant peut adapter à la classe, l'idée étant d'être le plus concret possible dans les représentations proposées (photos de récipients).

Fiche 14 (page 88)



Pour terminer, on propose l'exercice individuel de la fiche 15, où il s'agit de mettre les découvertes en application sans passer par le transvasement réel.

La consigne est de découper les images de récipients, de les classer en deux groupes en fonction de l'étalon choisi pour les mesurer, puis, de faire un classement général en collant les images de récipients depuis celui qui contient le moins jusqu'à celui qui contient le plus. Pour connaître la capacité de chaque récipient, il faut se référer à la règle encadrée dans le haut de la page, qui indique que le grand étalon vaut deux fois le petit étalon.

3 Vers le système décimal : comparer deux étalons (de 8 à 10 ans)

De quoi s'agit-il ?

Utiliser deux étalons différents pour mesurer un même contenu, ces étalons ayant entre eux un rapport de 1/10.

Enjeux

Une première approche du système décimal de mesures, par l'utilisation du litre et du décilitre. Voir chapitre 16, section 4.5.

Le *principe de compensation* est en jeu ici comme à l'activité précédente, avec en l'occurrence un rapport de 1 à 10 entre les étalons (cf. section 4.8 pour le cas général).

Compétences. – *Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat. Connaître le sens du préfixe* déci.

De quoi a-t-on besoin ?

Deux étalons : l'un d'un litre et l'autre d'un décilitre.

Plusieurs récipients de 2, 3, 4 et 5 litres (nombres entiers de litres[5]) tels que saladier, boîte à glace, petit seau, arrosoir, etc.

Les fiches 16 et 17 (en annexe aux pages 90 et 91).

Comment s'y prendre ?

Les élèves travaillent par petits groupes. Chaque groupe doit avoir deux étalons (1 l et 1 dl) et deux récipients à mesurer. Tout d'abord, ils doivent comparer les deux étalons par transvasements et arriver à la conclusion que le grand contient dix fois le petit et donc que le petit vaut le dixième du grand. Sachant que le grand vaut un litre, on nomme le petit *décilitre*.

Ensuite, il s'agit de mesurer un des récipients reçus en utilisant pour commencer le litre, puis de prévoir la mesure en décilitres et finalement de la vérifier. Pour le second récipient, on mesure d'abord avec l'étalon d'un décilitre, puis on prévoit la mesure en litres avant de la vérifier par transvasements (chaque fois aussi soigneusement que possible). Chaque groupe complète la fiche 16.

Enfin, l'enseignant récolte les résultats pour une synthèse, par exemple le tableau ci-après.

Pour terminer, on propose l'exercice individuel de la fiche 17 où il s'agit de mettre les découvertes en application sans passer par le transvasement réel.

La consigne est de classer les images de récipients depuis celui qui contient le moins jusqu'à celui qui contient le plus. Pour connaître la capacité de chaque récipient, il faut se référer à la règle encadrée dans le haut de la page qui indique que le grand étalon vaut 10 fois le petit étalon.

[5] On peut déterminer un nombre entier de litres en faisant une marque sur le récipient et en prévenant les élèves de s'y arrêter lors du remplissage.

Expérience	mesure en litres	mesure en décilitres
groupe 1 : saladier	2 litres	20 décilitres
groupe 2 : caisse	3 litres	30 décilitres
groupe 3 : seau	4 litres	40 décilitres
groupe 4 : arrosoir	5 litres	50 décilitres

CONCLUSION
Pour un litre, on a dix fois un décilitre. On écrit 1 l = 10 dl.
Un décilitre est le dixième d'un litre. On écrit 1 dl = $\frac{1}{10}$ l ou encore 1 dl = 0,1 l.

4 Lecture d'étiquettes de récipients (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Expérimenter les rapports entre litre, décilitre, centilitre et millilitre. Attribuer à des récipients des étiquettes indiquant leur capacité. Classer des récipients en fonction de leurs étiquettes.

Enjeux

Quatre unités décimales de capacité : le litre, le décilitre, le centilitre et le millilitre. Voir chapitre 16, section 4.5.

Sériations de capacités basées non plus sur une comparaison directe des capacités (par transvasements), mais bien sur des mesures. Voir section 5.

Changements d'unités dans le système décimal. Voir section 4.8.

Compétences. – *Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat. Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure. Connaître le sens des préfixes* déci, centi, milli.

De quoi a-t-on besoin ?

Des récipients gradués qui permettent d'établir les relations entre un litre, un décilitre, un centilitre et un millilitre.

Des récipients de la vie courante étiquetés dans des unités différentes (par exemple des berlingots avec mention en ml, cl, dl, l pour une même capacité).

Diverses bouteilles et boîtes avec indication de la capacité.

La fiche 18 à la page 92 à découper.

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, les élèves établissent les relations entre les différentes unités (le litre, le décilitre, le centilitre et le millilitre).

Ensuite, on présente aux élèves des récipients de la vie courante (bouteille, flacon, boîte, etc.) avec mention de la capacité sur l'étiquette. Les enfants doivent grouper les récipients qui ont la même capacité en fonction de la

lecture des étiquettes. On souligne à nouveau les rapports entre unités et sous-unités. Voici un exemple de récipients :

	un flacon de shampooing avec la mention **250 ml** une bouteille avec la mention **25 cl** une canette avec la mention **0,25 l**
	une bouteille de grenadine avec la mention **0,75 l** une bouteille d'huile avec la mention **75 cl**
	un bocal de mayonnaise avec la mention **1000 ml** une bouteille d'eau avec la mention **1 l** une boîte de lait avec la mention **1 l**

Puis, on donne à des groupes d'élèves des récipients étiquetés et une série de mesures (en l, dl, cl, ml) à attribuer à chaque récipient. On place également des intrus dans les étiquettes, pour que les élèves ne se réfèrent pas uniquement aux chiffres qui composent le nombre (exemple, fiche 18).

Enfin, les élèves doivent classer par ordre croissant de capacités des récipients étiquetés dans des unités différentes. Ils notent les méthodes qu'ils utilisent pour y parvenir. L'enseignant rassemble les données pour une synthèse collective portant principalement sur le principe de compensation et l'écriture décimale.

4

Grandeurs, pourcentages et représentations graphiques

Dans le cadre d'un travail sur le thème de l'eau, on se propose de traiter certaines questions concernant les pourcentages et les conversions d'unités de grandeurs. Au préalable, on aura suscité chez les élèves des questions d'ordre général et fait avec eux des recherches documentaires très larges sur le sujet. De nombreuses données à l'usage des classes peuvent être recueillies auprès des compagnies de distribution d'eau[1].

1 Quelle part d'eau dans nos organes ? (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Compléter un graphique en bâtonnets pour représenter des pourcentages d'eau dans divers organes du corps humain.

Enjeux

Familiarisation avec des données en pourcents. Représenter des données chiffrées graphiquement, l'échelle à utiliser pour le graphique étant donnée. Voir chapitre 16, section 4.9.

De quoi a-t-on besoin ?

Fiche 19 à la page 93 : graphique sur papier millimétré à compléter par l'élève.

Comment s'y prendre ?

On présente des données concernant le pourcentage d'eau dans divers organes du corps humain (dents, os, ...) : voir fiche 19. On donne un modèle de graphique en bâtonnets que l'élève doit compléter en fonction de ces données avec le plus de précision possible. Il doit tracer un trait à l'endroit du pourcentage à représenter, puis colorier la zone qui illustre la part d'eau dans l'organe considéré.

L'idée est d'obtenir une image qui permette de se représenter facilement la situation en pourcentages et de comparer les données entre elles.

[1] Une documentation pédagogique peut être demandée auprès de la Société Wallonne des Distributions d'Eau (SWDE : 065/385211).

2 Quelle consommation d'eau par famille ? (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Lire des factures et en extraire des données, rechercher des données chiffrées et les traiter graphiquement.

Enjeux

Analyser des documents réels et en extraire des données concernant des unités de mesure, des prix.

Représentation graphique de mesures (en l'occurrence des volumes) par des rectangles de même base, reconnaissance de l'échelle, confection d'une sous-graduation. Voir chapitre 16, section 5.3.

Ramener des mesures que l'on veut comparer à une base de comparaison unique. Il s'agit d'abord de ramener des consommations d'une famille à une personne. Il s'agit ensuite de pourcentages à calculer à partir de données brutes, puis à mettre en correspondance avec des secteurs circulaires d'un disque gradué en cent parties égales.

De quoi a-t-on besoin ?

Des calculatrices.

Fiche 20 à la page 94 : un exemple de facture d'eau.

Fiche 21 à la page 95 : graphique en bâtonnets de la consommation moyenne par famille et par an[2].

Fiche 22 à la page 96 : graphique circulaire de consommation moyenne par personne et par jour[3].

Fiche 23 à la page 97 : enquête sur la consommation.

Fiches 24 et 25 aux pages 98 et 99 : transformer les données et représenter.

Fiche 27 à la page 182 : cercles transparents prégradués en pourcentages[4].

Comment s'y prendre ?

Première activité

Tout d'abord, analysons des factures d'eau reçues dans les familles (exemple à la fiche 20). Les élèves travaillent par groupes et doivent répertorier sur une feuille toutes les informations qui figurent sur une facture d'eau et essayer de comprendre les façons de calculer les prix (avec l'aide de calculatrices si nécessaire). Lors de la mise en commun, l'enseignant note au tableau les informations principales et questionne les élèves sur le m^3 : que vaut-il en litres ? Pourquoi l'utilise-t-on dans les factures ? Voici, à titre d'exemple, les données que l'on peut obtenir :

– nom et adresse de la société de distribution ;

– nom et adresse du consommateur ;

– numéro et date de la facture ;

[2] Société Wallonne des Distributions d'Eau [2000]

[3] R. Depamelaere [sans date]

[4] L'idée vient de l'ouvrage de School Mathematics Project [1997]

– relevé de l'index en m^3 : on trouve la consommation en faisant la différence entre le nouveau relevé et le précédent ;
– consommation facturée en francs : plusieurs tarifs en fonction des tranches de consommation ;
– redevance annuelle d'abonnement : frais fixes ;
– TVA sur le total de la consommation et de l'abonnement : 6 % du total en francs ;
– taxe régionale (pas de TVA) : autant de francs par m^3 ;
– montant total à payer avant une certaine date.

On peut proposer une facture où l'on a introduit une erreur, pour que les élèves refassent tous les calculs nécessaires.

Deuxième activité

Ensuite, on s'intéresse à la consommation moyenne[5] des familles à partir du document de la fiche 21. Sur base de ce document, que peut-on dire de la consommation de 1999 ? Calculer la différence de consommation entre l'année où l'on a consommé le moins et l'année où l'on a consommé le plus[6].

Pour lire le graphique, les élèves doivent reporter le sommet des bâtonnets coloriés vers l'axe des m^3. Celui-ci comporte peu de divisions. Il y a 1,5 cm entre deux graduations successives. Donc 1,5 cm sur l'axe vertical représentent 5 m^3 et les élèves doivent tracer une sous-graduation à chaque mètre cube. Ils utilisent les sous-graduations de l'axe vertical pour déterminer la quantité d'eau à laquelle correspond chaque bâtonnet.

D'après ce graphique, peut-on savoir combien d'eau consomme chaque famille ? Non, parce qu'il s'agit d'une valeur moyenne qui ne montre pas les différences individuelles.

Troisième activité

Quel est la consommation d'eau des familles de la classe pour les catégories suivantes d'utilisation ?

– boisson et alimentation ;
– vaisselle ;
– lessive ;
– entretien ;
– bain ou douche ;
– toilettes.

[5] Expliquer ce qu'est une consommation moyenne.

[6] Il est intéressant de se poser avec les élèves des questions complémentaires sur les informations que nous apportent ce graphique (voir commentaires à la page 72).

Il serait bien de mettre à la disposition des élèves des publicités sur les machines à laver, les lave-vaisselle, ... afin qu'ils puissent déterminer les quantités d'eau utilisées. Les élèves doivent faire quelques recherches et questionner leur entourage sur les consommations d'eau par jour et compléter chacun la fiche 23. Ils inscrivent soit les données par jour, soit les données par semaine en fonction des catégories et complètent ensuite le tableau par calculs.

Puis, on compare les données, on se questionne sur les raisons des différences et sur les consommations exagérées.

Ensuite, chaque élève recherche les données de chaque catégorie pour une seule personne. Il s'agit d'une consommation moyenne, car les membres de la famille ne consomment pas tous des quantités égales. De plus, certaines catégories ne correspondent pas à des consommations individuelles (par exemple l'entretien et la lessive). Par ailleurs, ramener les consommations à une seule personne permet de comparer les familles, qui n'ont pas toutes le même nombre de membres. Les élèves complètent la fiche 24 en repartant des données de la première fiche (concernant seulement la deuxième colonne).

Enfin, les élèves doivent faire un graphique circulaire tel que celui de la fiche 22 qui présente un exemple[7].

Pour cela, les élèves vont tout d'abord trouver quel pourcentage représente chaque catégorie par rapport à la quantité totale d'eau utilisée : ils complètent la fiche 25. Ils font leur graphique à l'aide du cercle prégradué transparent (fiche 27) qu'ils appliquent sur leur feuille comme une sorte de rapporteur.

Commentaires

Le graphique de la fiche 21 appelle deux réflexions.

Premièrement, pourquoi la consommation a-t-elle diminué depuis 1990 ? C'est sans doute d'abord parce que le prix de l'eau en nette augmentation incite à réduire la consommation. D'autre part, les aménagements domestiques tels que les toilettes à réservoir économique, les douches, les machines à laver, les lave-vaisselle demandent de moins en moins d'eau. Les appareils ménagers utilisent souvent moins d'eau que si l'on effectue les mêmes tâches à la main. Enfin les installations de distribution d'eau à domicile se modernisent et les pertes d'eau principalement aux robinets sont moins grandes (par exemple, un robinet qui goutte pourra consommer 35 m^3 par an et une toilette qui fonctionne mal 220 m^3 par an[8] !). Ce sont là quelques raisons possibles de la diminution de la consommation des ménages.

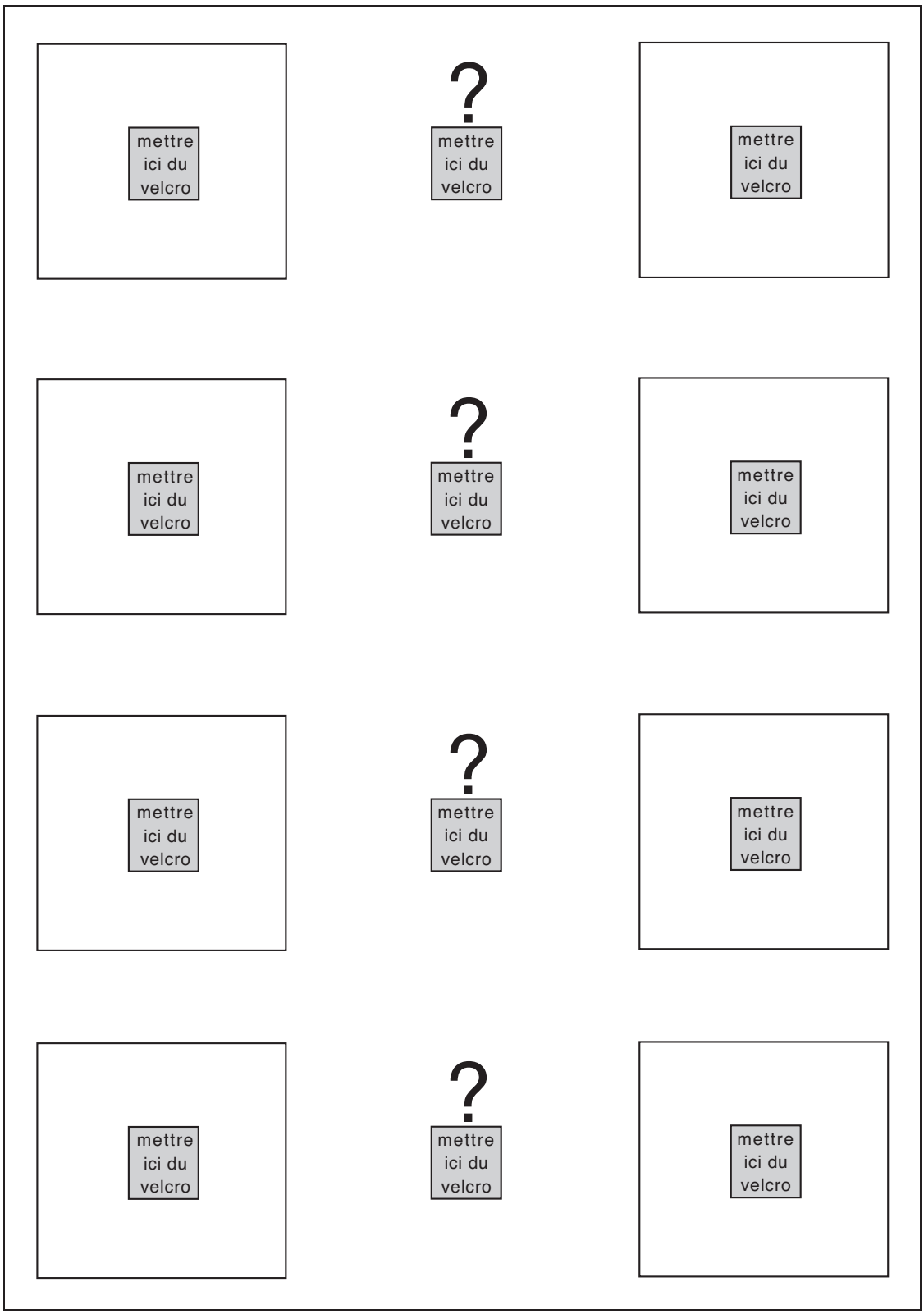
La seconde réflexion concerne l'aspect visuel trompeur du graphique. Sans y regarder de près, on a l'impression que la consommation d'eau a chuté de moitié entre 1990 et 1999, car la hauteur des rectangles diminue de moitié sur cette période. Or, si l'on regarde l'axe vertical, on constate qu'il ne démarre pas à 0 m^3 mais à 100 m^3, ce qui laisse la majeure partie du graphique invisible. Donc une diminution de moitié de la consommation concernant la tranche allant de 100 m^3 à 130 m^3 n'est en fait qu'une diminution d'environ 12% sur la consommation totale.

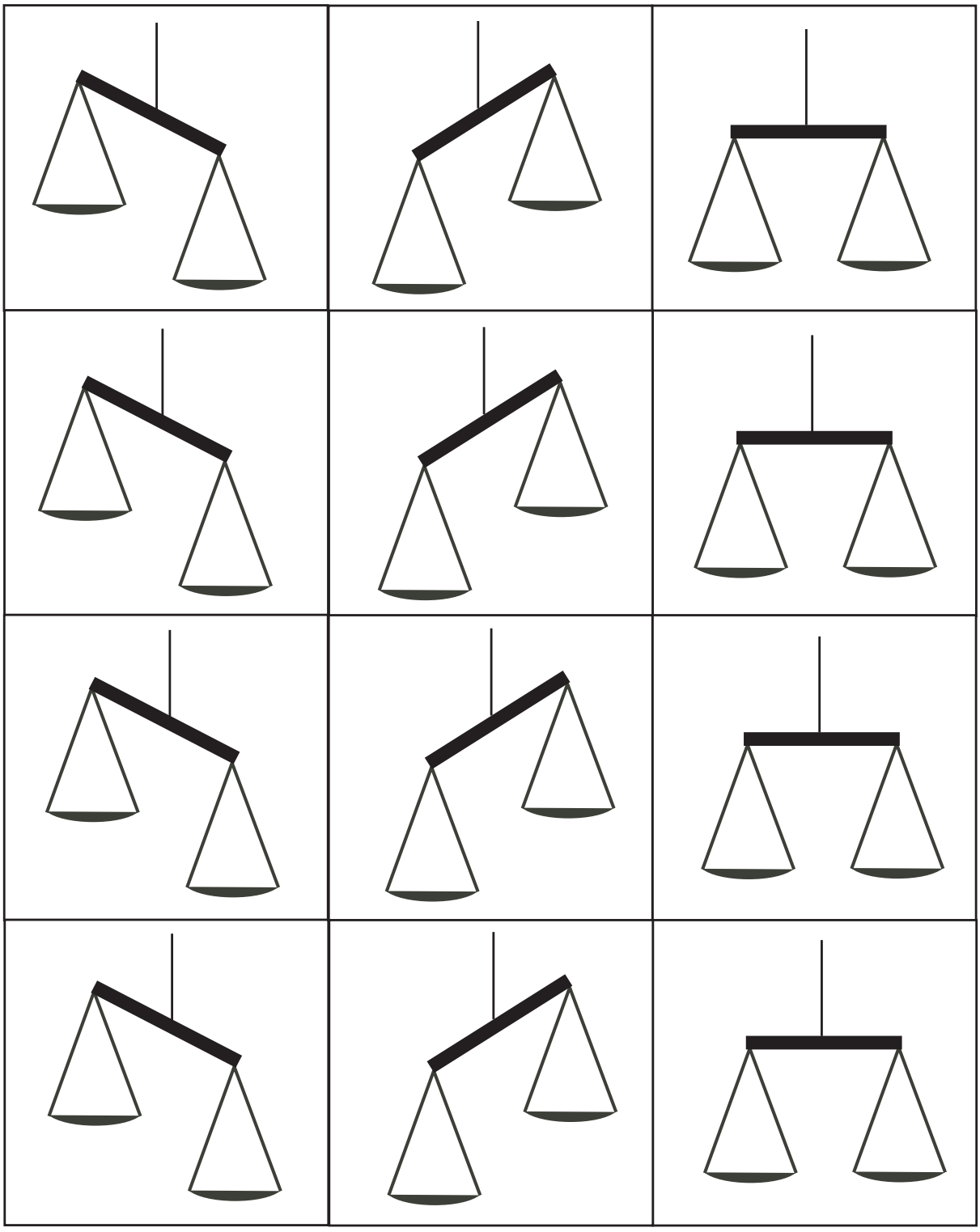
[7] Extrait de R. Depamelaere [sans date]

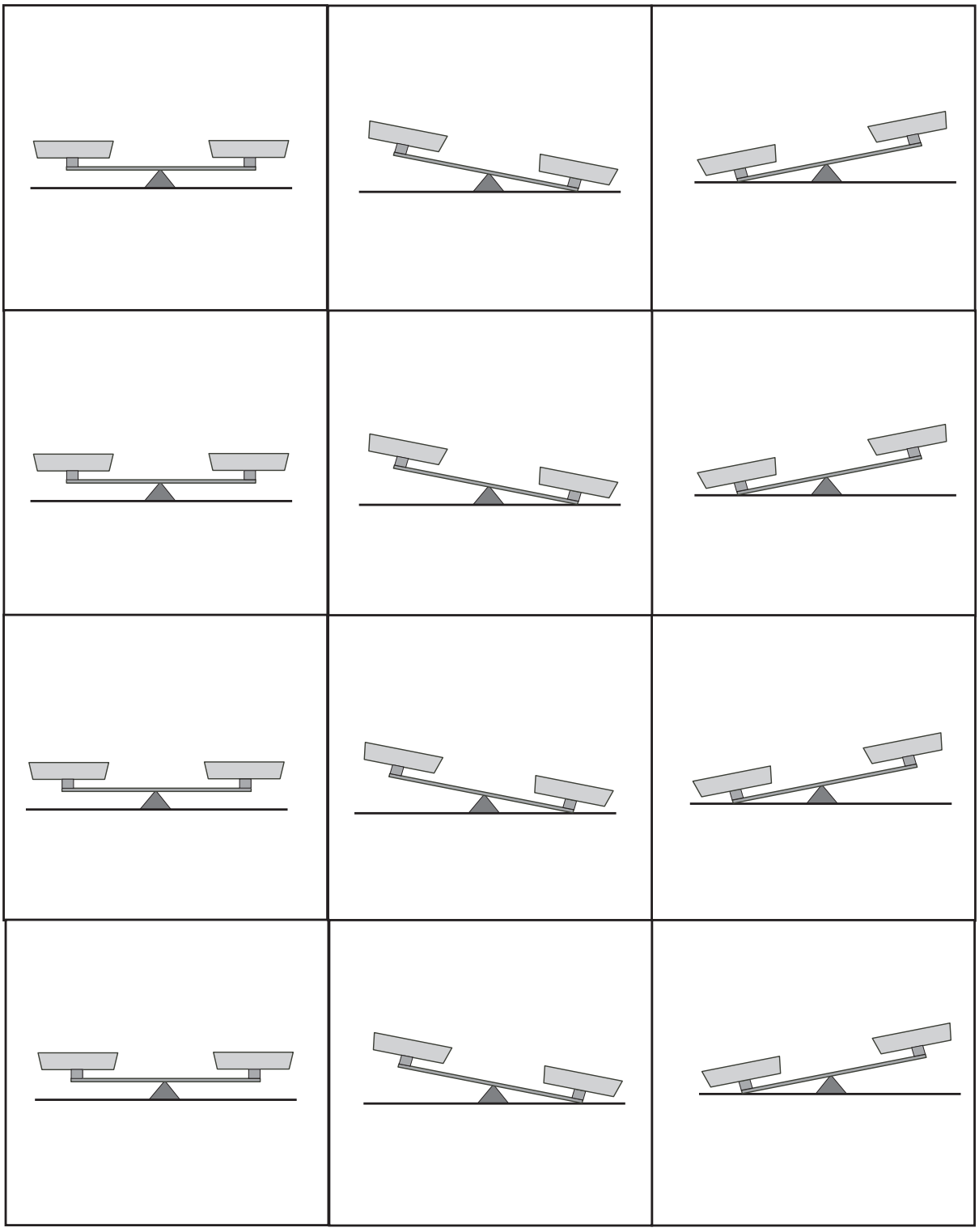
[8] Données recueillies dans l'ouvrage R. Depamelaere [sans date].

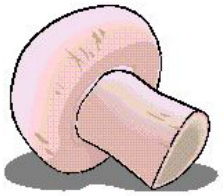
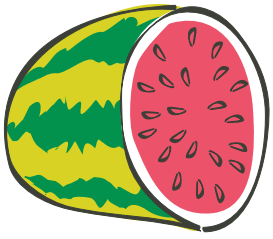
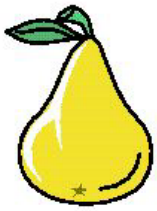
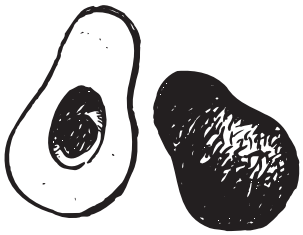
Annexe I

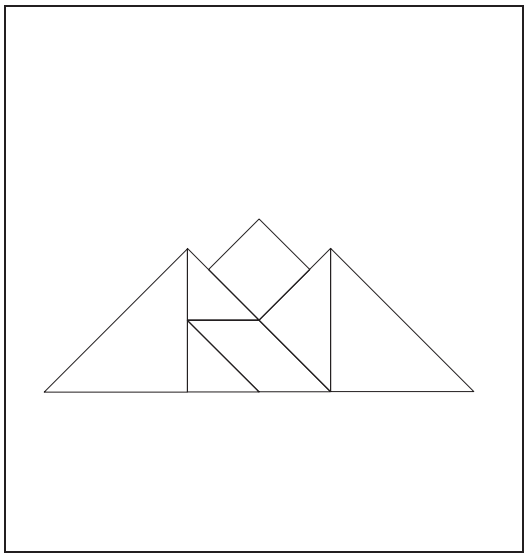
Fiches à photocopier

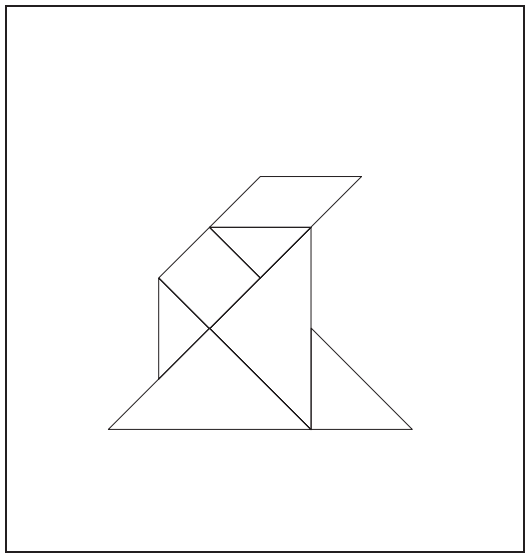

mettre ici du velcro
?
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro
?
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro
?
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro
?
mettre ici du velcro
mettre ici du velcro

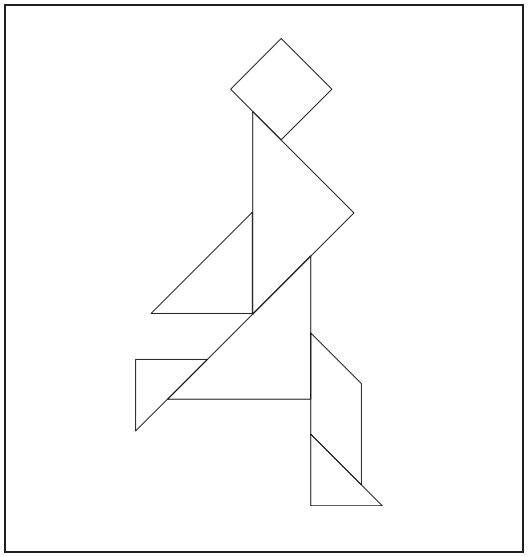


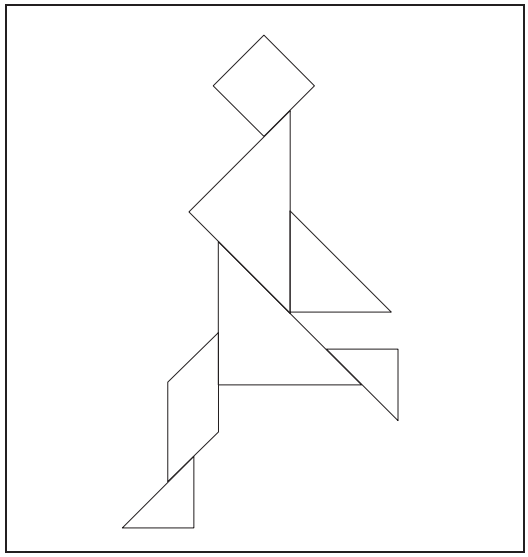


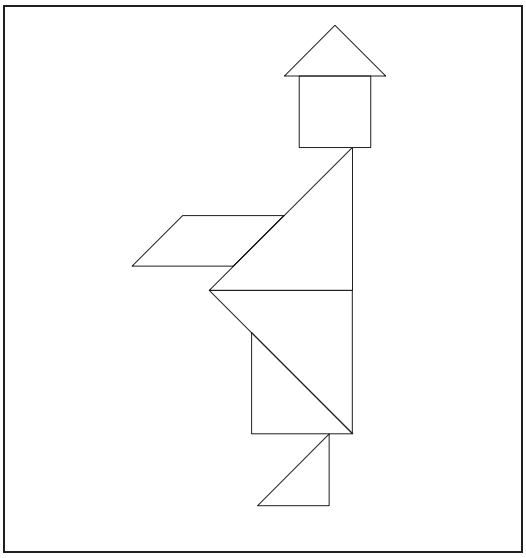
		
		
		
		
		

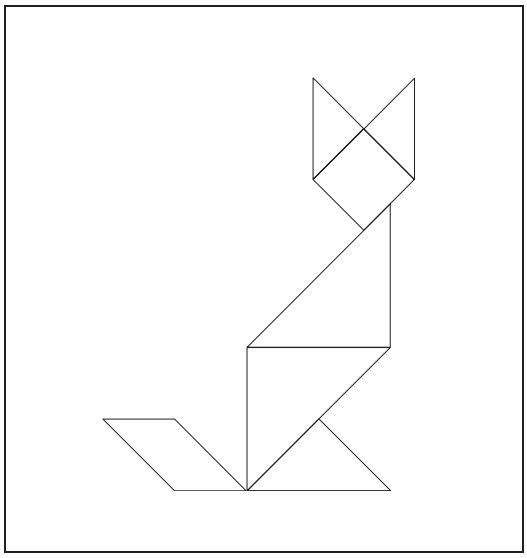


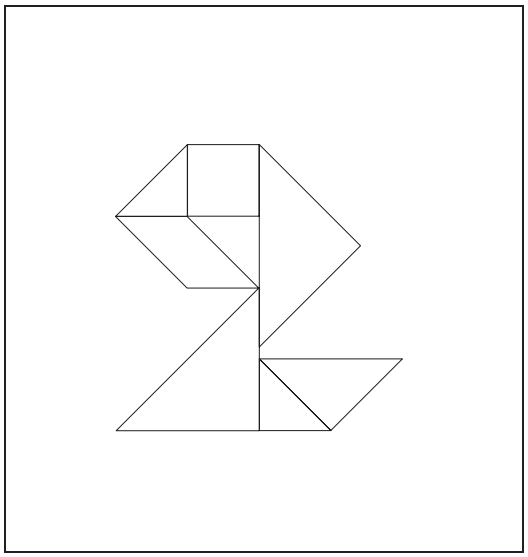


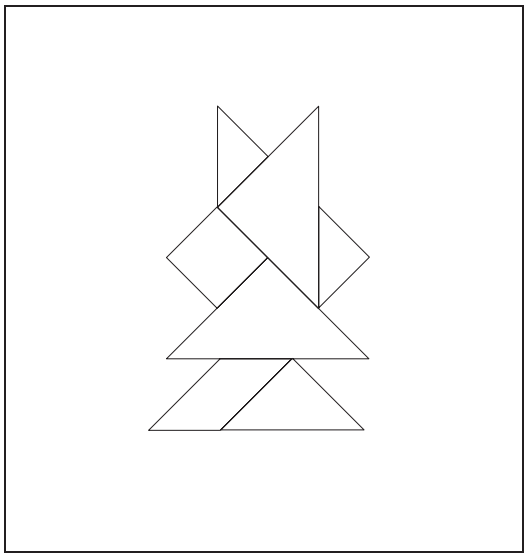


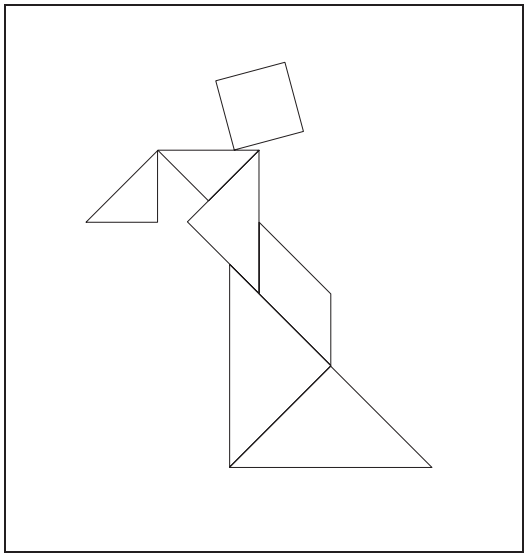


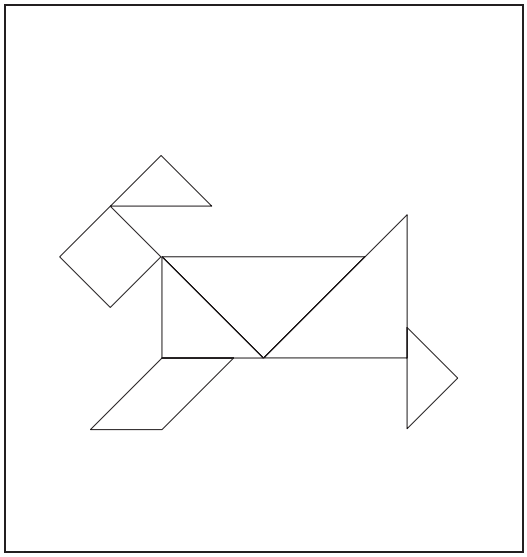


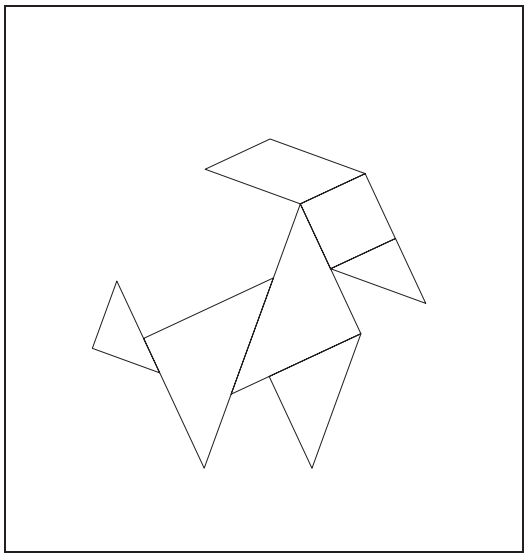


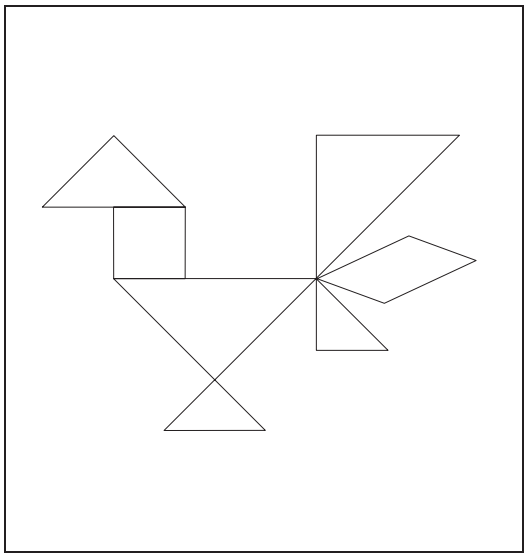


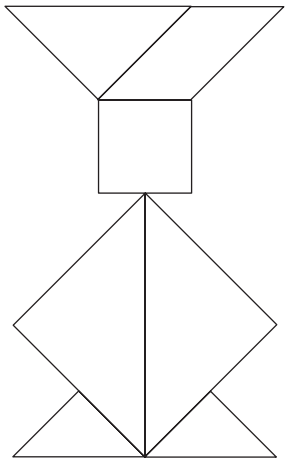


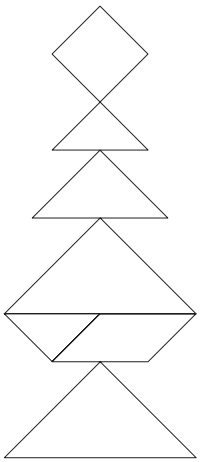


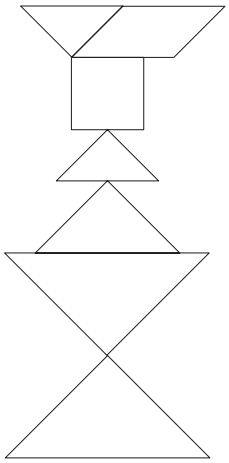


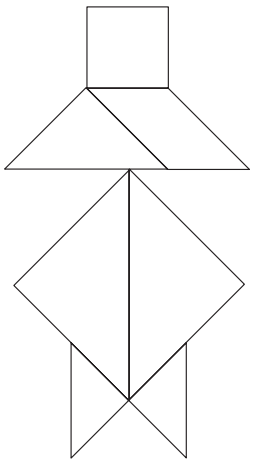


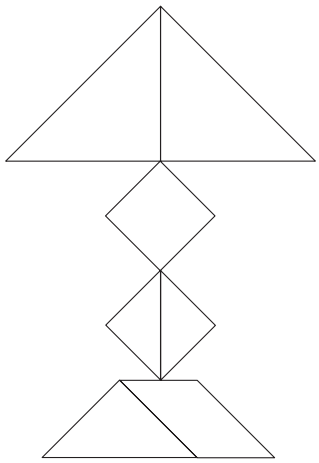


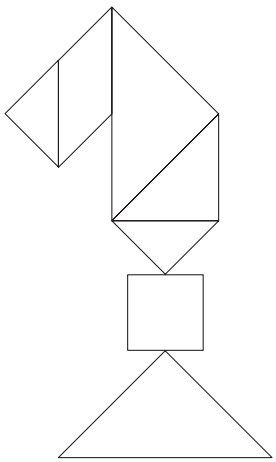


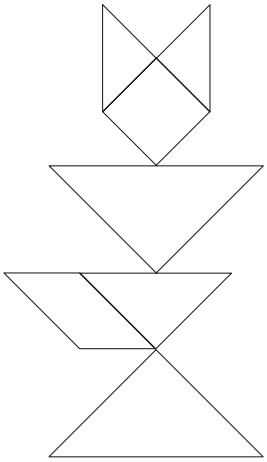


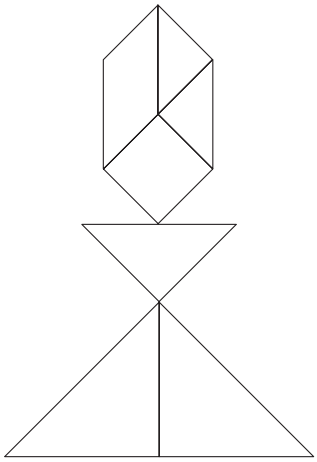


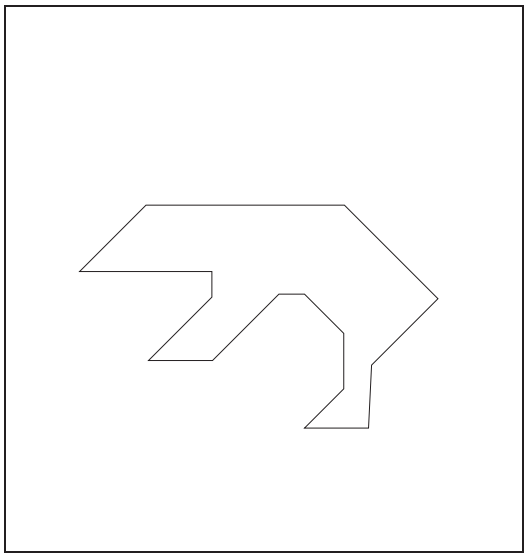


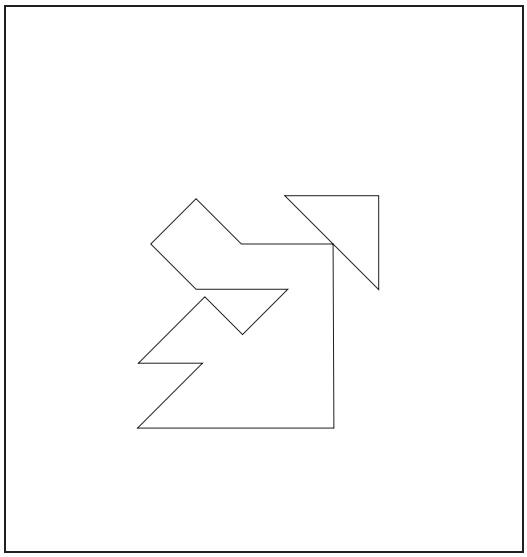


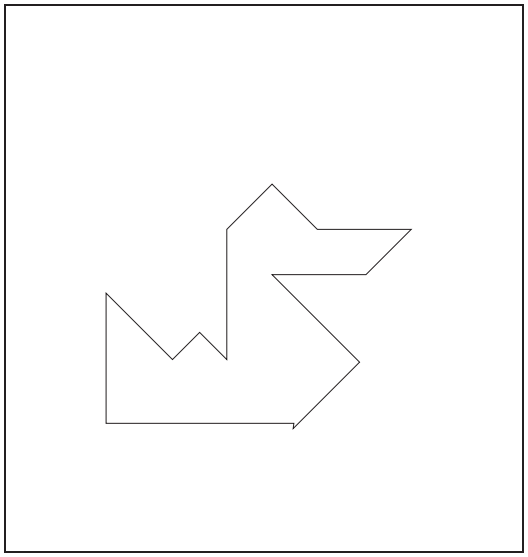


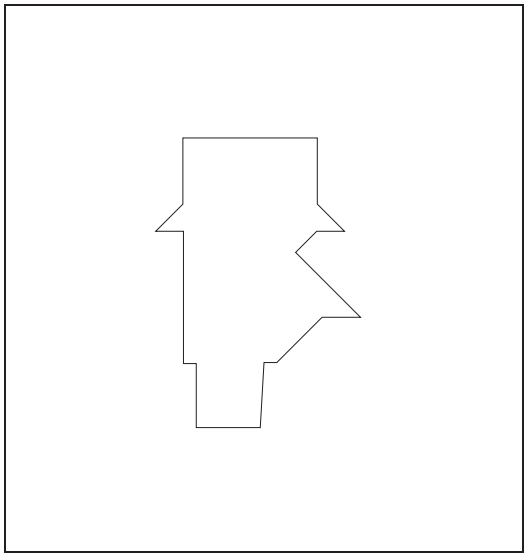


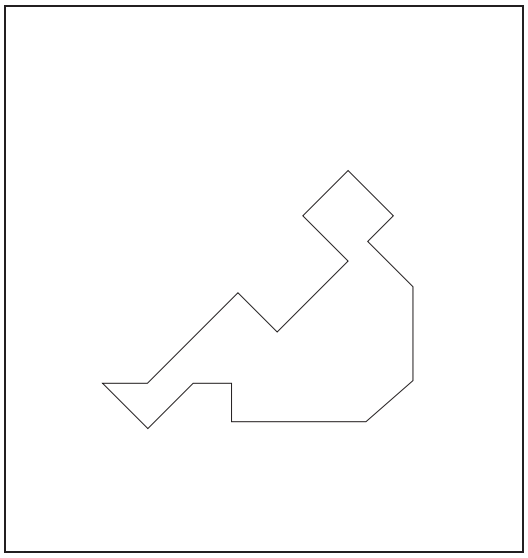


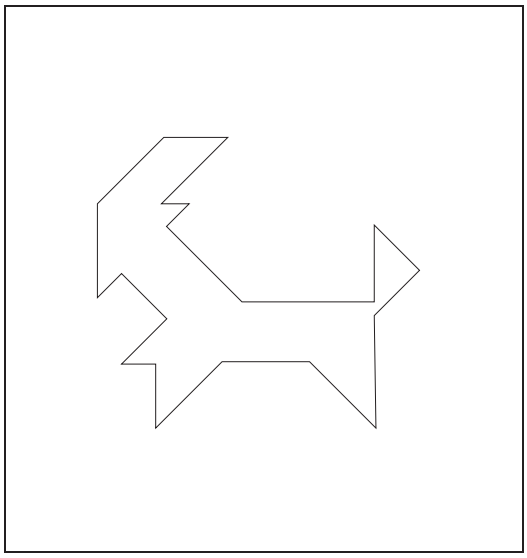


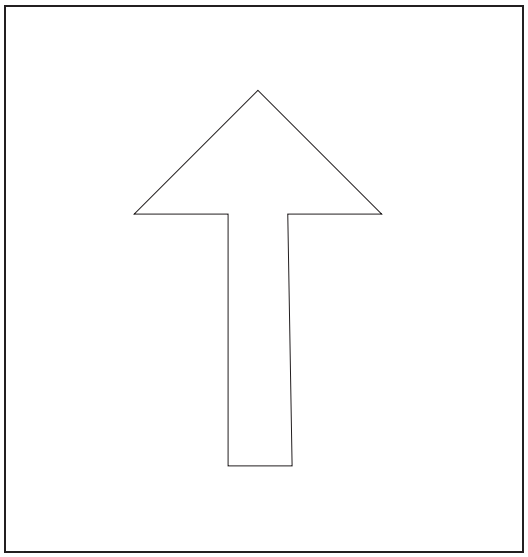


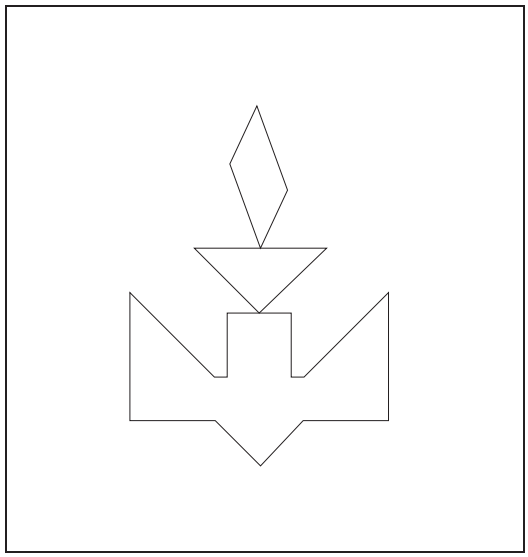


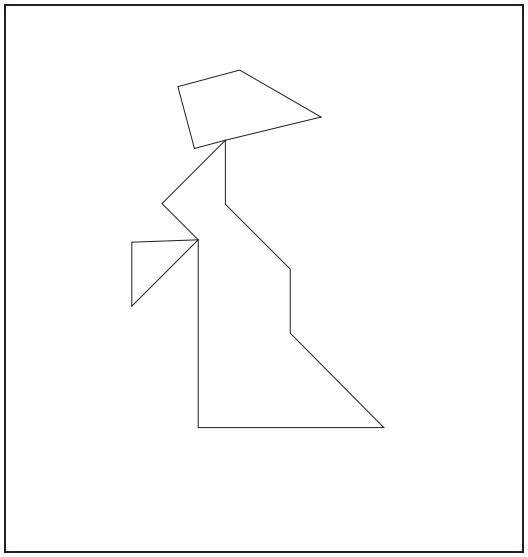


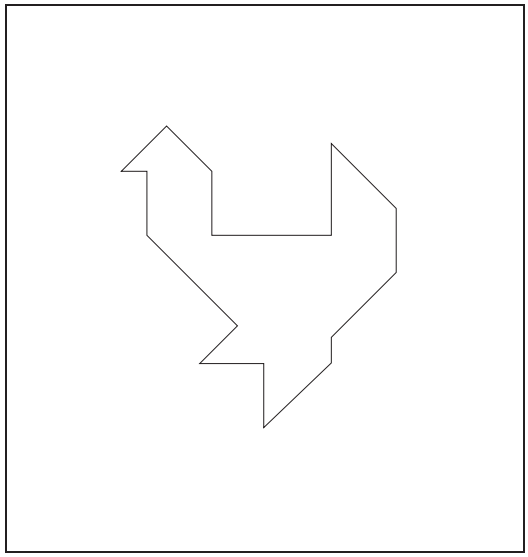


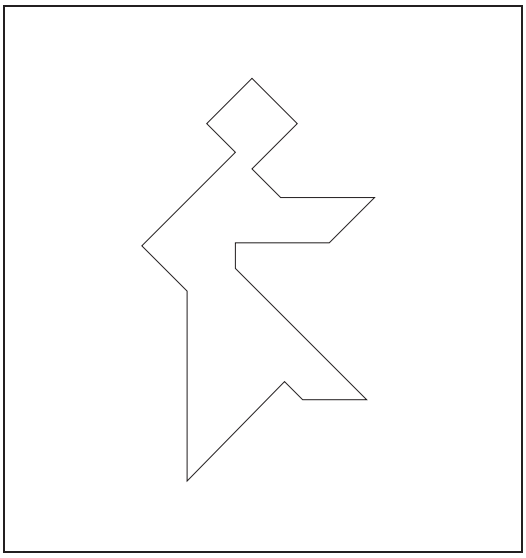


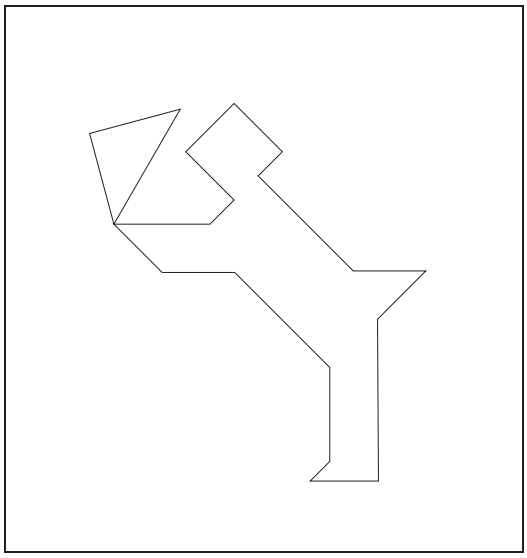


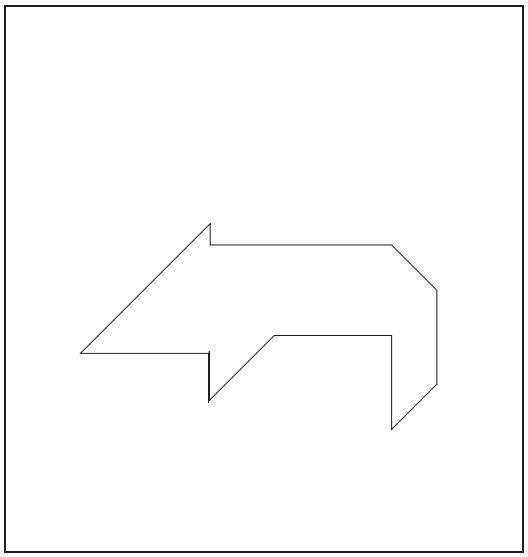


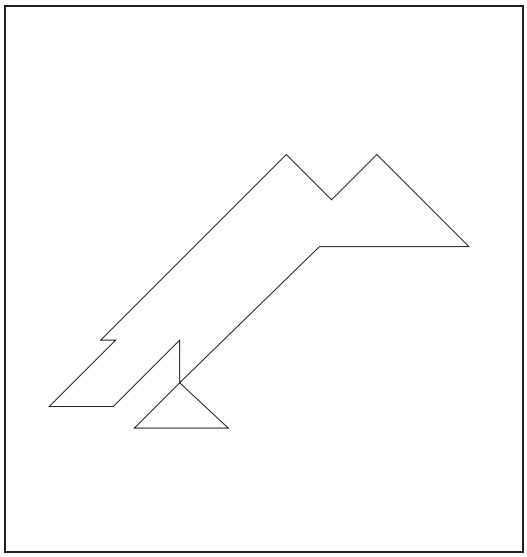


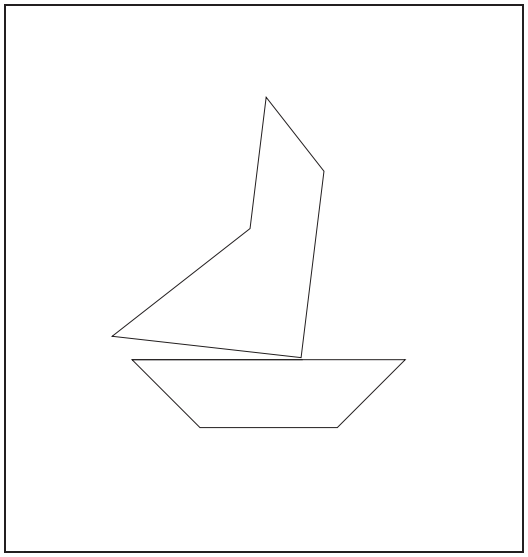


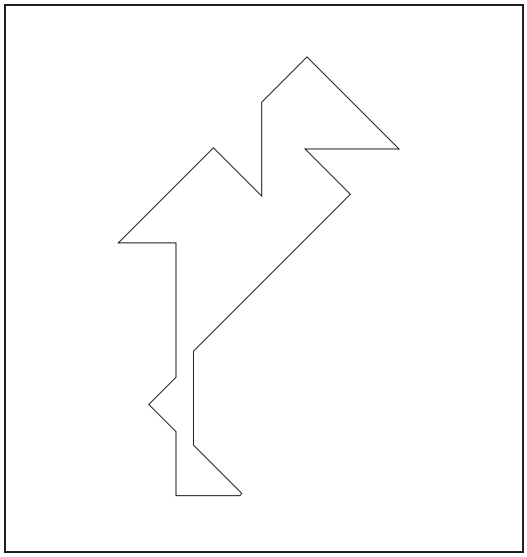


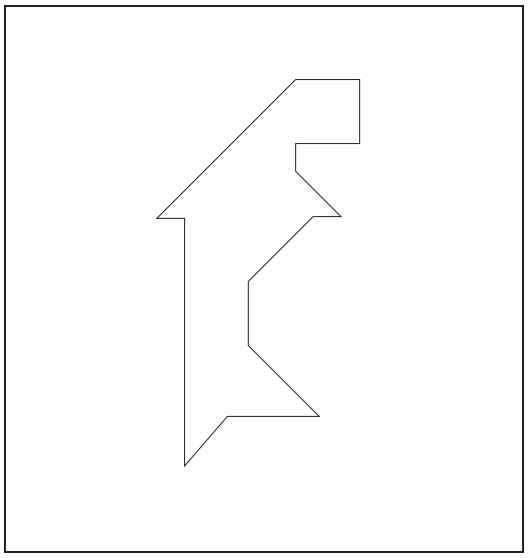


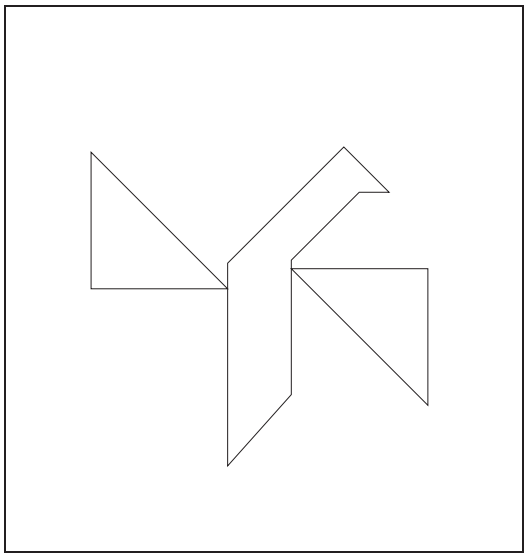


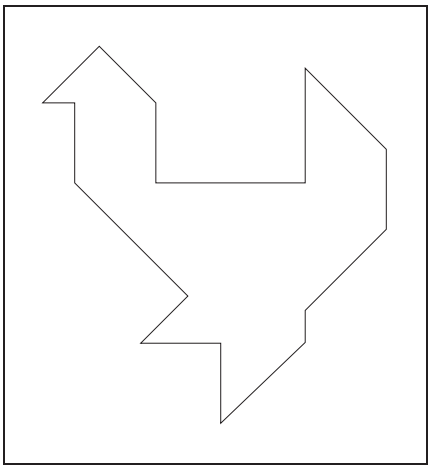




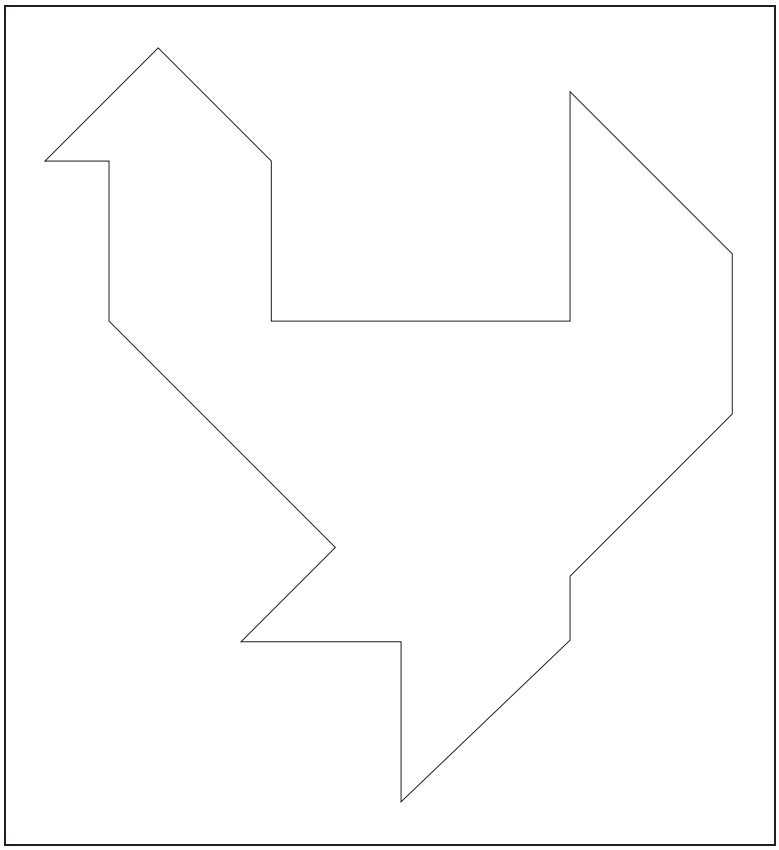








Échelle 1/4



Échelle 1/2

GROUPE 1

a) Voici le récipient à mesurer avec le petit étalon :



Chaque fois que tu as versé le petit étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



b) Voici le même récipient à mesurer avec le grand étalon :



Chaque fois que tu as versé le grand étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



GROUPE 2

a) Voici le récipient à mesurer avec le petit étalon :



Chaque fois que tu as versé le petit étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



b) Voici le même récipient à mesurer avec le grand étalon :



Chaque fois que tu as versé le grand étalon dans ce récipient, tu colories un petit dessin.



SYNTHÈSE DES GROUPES

Groupe 1, le petit étalon



va 8 fois dans



Groupe 1, le grand étalon



va 4 fois dans



Groupe 2, le petit étalon



va 6 fois dans



Groupe 2, le grand étalon



va 3 fois dans



Le petit étalon

le grand étalon ?

DONC



va combien de fois dans

2 fois

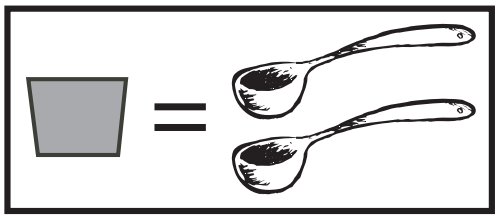


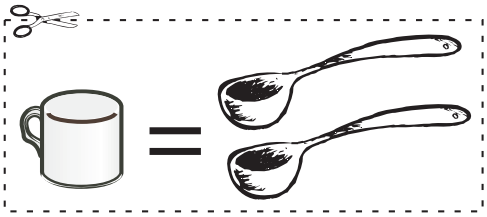
CLASSER DES RÉCIPIENTS (I)

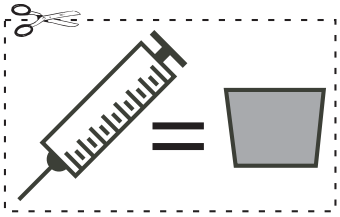
Le premier cadre nous montre que **1 bol vaut 2 petites louches** .

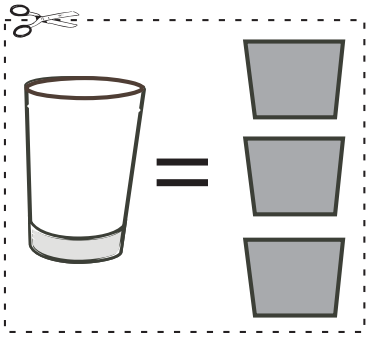
Les récipients en dessous ont été mesurés soit avec les bols, soit avec les louches. À toi de retrouver ceux qui peuvent contenir le moins et ceux qui peuvent contenir le plus. Attention, il est possible que plusieurs récipients puissent contenir autant d'eau.

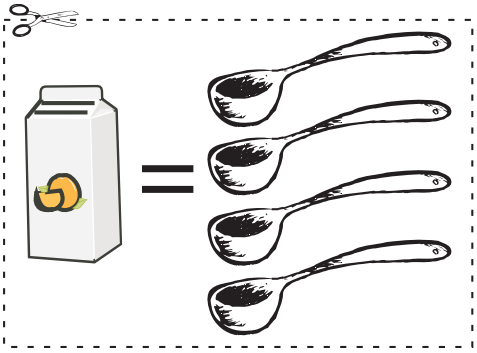
Découpe ces images de récipients et colle-les sur la fiche suivante dans l'ordre croissant.

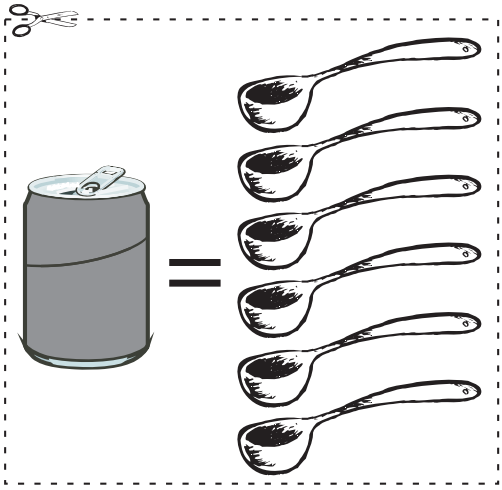


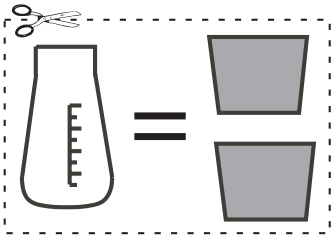












MESURER EN LITRES ET EN DÉCILITRES

Mesure la capacité du récipient avec le **litre**, puis devine la mesure en décilitres.

ESSAIE :



1 l

va combien de fois dans ⟶ ...



DEVINE :



1 dl

va combien de fois dans ⟶ ...



Mesure la capacité du récipient avec le **décilitre**, puis devine la mesure en litres.

ESSAIE :



1 dl

va combien de fois dans ⟶ ...



DEVINE :



1 l

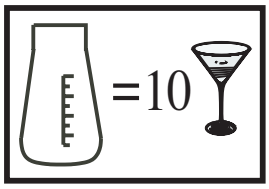
va combien de fois dans ⟶ ...

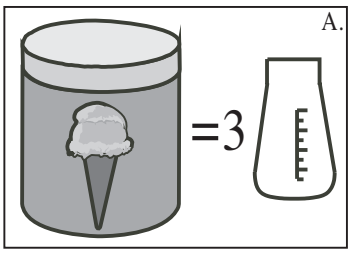


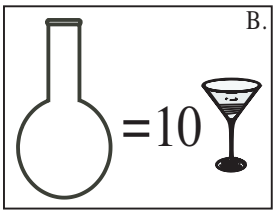
CLASSER DES RÉCIPIENTS (II)

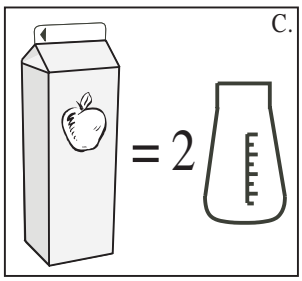
Le cadre noir nous montre que **1 bocal gradué vaut 10 verres à apéritif** .

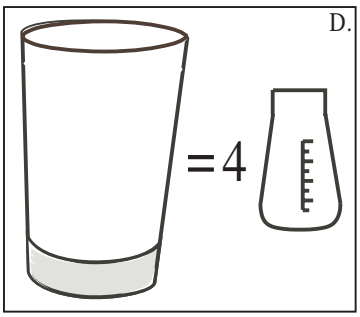
Les récipients en dessous ont été mesurés soit avec les bocaux gradués, soit avec les verres à apéritif. À toi de retrouver ceux qui peuvent contenir le moins et ceux qui peuvent contenir le plus. Attention, il est possible que plusieurs récipients puissent contenir autant d'eau.

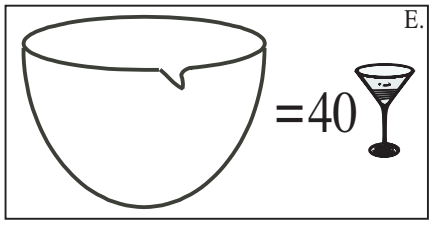




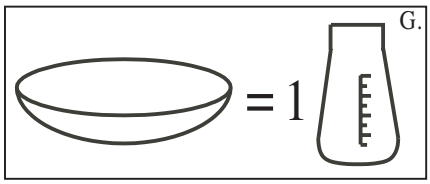


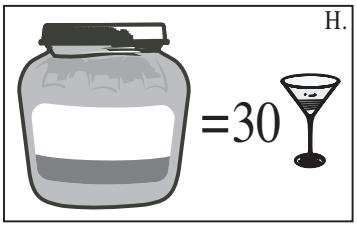










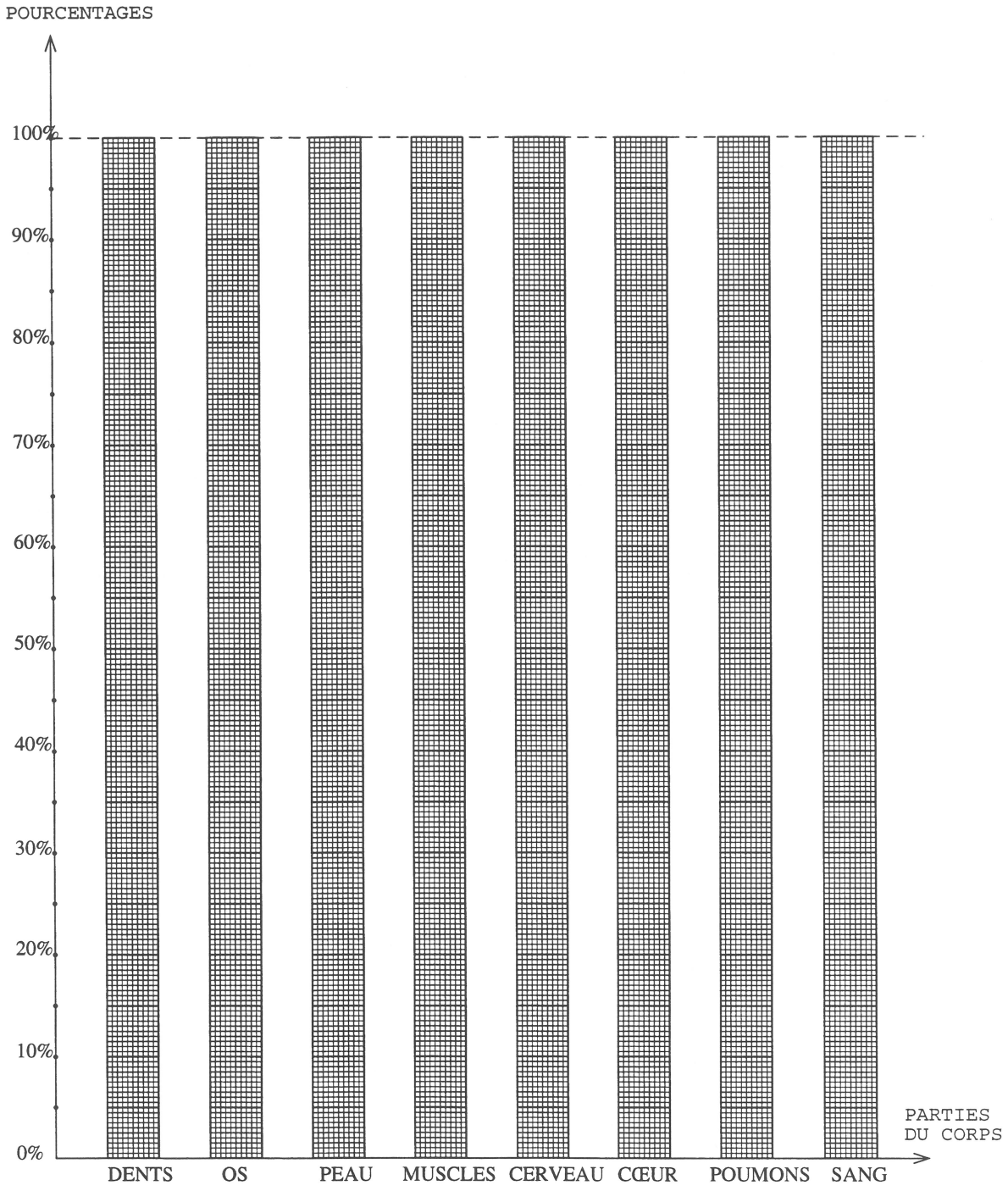


Note ici l'ordre des images A, B, C, D, E, F, G, H : . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . .

1,75 l	0,75 l	0,5 l	0,25 l
0,025 l	7,5 l	2,5 l	0,33 l
1 dl	0,75 dl	5 dl	2,5 dl
7,5 dl	0,5 dl	0,25 dl	3 dl
10 cl	0,75 cl	7,5 cl	50 cl
25 cl	20 cl	3 cl	0,5 cl
200 ml	0,2 ml	75 ml	1000 ml
0,75 ml	500 ml	50 ml	330 ml

Représenter ces données en pourcentages sur le graphique

- Dents : 10% d'eau
- Os : 22% d'eau
- Peau : 72% d'eau
- Muscles : 73% d'eau
- Sang : 83% d'eau
- Cœur : 79% d'eau
- Poumons : 80% d'eau
- Cerveau : 75% d'eau



IBDE

INTERCOMMUNALE BRUXELLOISE DE DISTRIBUTION D'EAU

Société civile ayant emprunté la forme d'une société coopérative à responsabilité limitée
Services administratif et technique : c/o CIBE, rue aux Laines 70 - 1000 Bruxelles - Fax (02) 518.81.52 - TVA BE.237.679.494

Les Nations Unies ont décrété le 22 mars 'Journée Mondiale de l'Eau'.
Votre intercommunale de distribution d'eau y participe

M FREDERIC

R , 42
1082 BRUXELLES

Téléphones utiles, informations et communications : voir verso S.V.P.

FACTURE N° 03.01708.009.82 du 01/03/1999

DWJ / 03
Concerne : **BERCHEM-STE-AGATHE, R , 42**

Consommation à facturer	152 m3		
	65 m3 à	53,00 BEF	3.445 BEF
	63 m3 à	55,00 BEF	3.465 BEF
	24 m3 à	56,00 BEF	1.344 BEF
Redevance annuelle d'abonnement (1 X 720 BEF)			720 BEF
T.V.A. 6,00 % (base d'imposition 8.974 BEF)			538 BEF
Taxe régionale sur le déversement des eaux usées (TVA non applicable) Ordonnance du 29/03/1996. Application à partir du 01/04/1996.	152 m3 à 14,00 BEF		2.128 BEF

MONTANT A PAYER AVANT LE 16/03/1999 **11.640 BEF**
ou 288,55 EUR

Compteur	N° 0070527	Index releveur	le 03/03/1998	612 m3	consommation
		Index abonné	le 27/02/1999	764 m3	252 m3

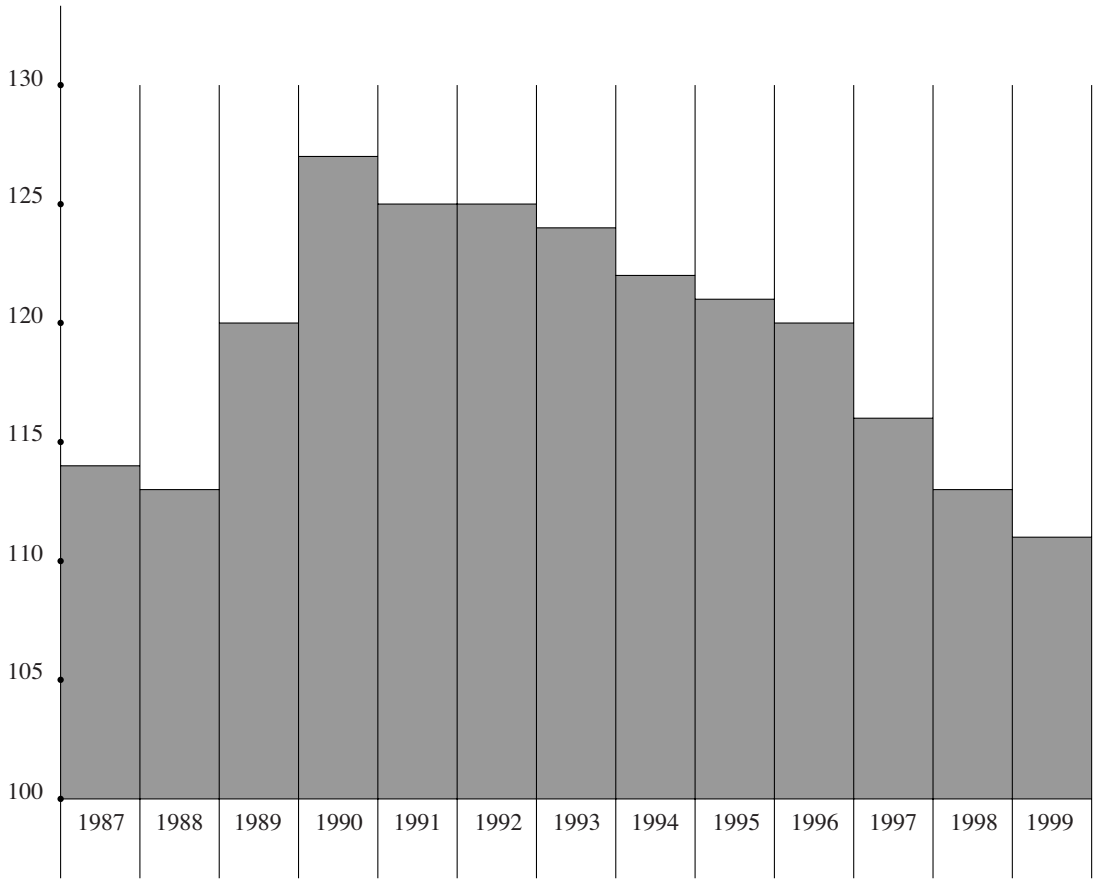
Nous vous prions instamment d'utiliser le bulletin de paiement ci-dessous.

L'intercommunale contribue à la préservation de l'environnement. Le présent document est établi sur papier blanchi sans chlore.

Extrait du rapport annuel 1999 de la SWDE[9]

« *La consommation moyenne en eau traitée, rapportée par raccordement et sur base d'un cycle de 12 mois, est de 111 m*^{3}*, soit 2 m*^{3} *de moins qu'en 1998. La diminution de la consommation observée depuis plusieurs années se confirme.* »

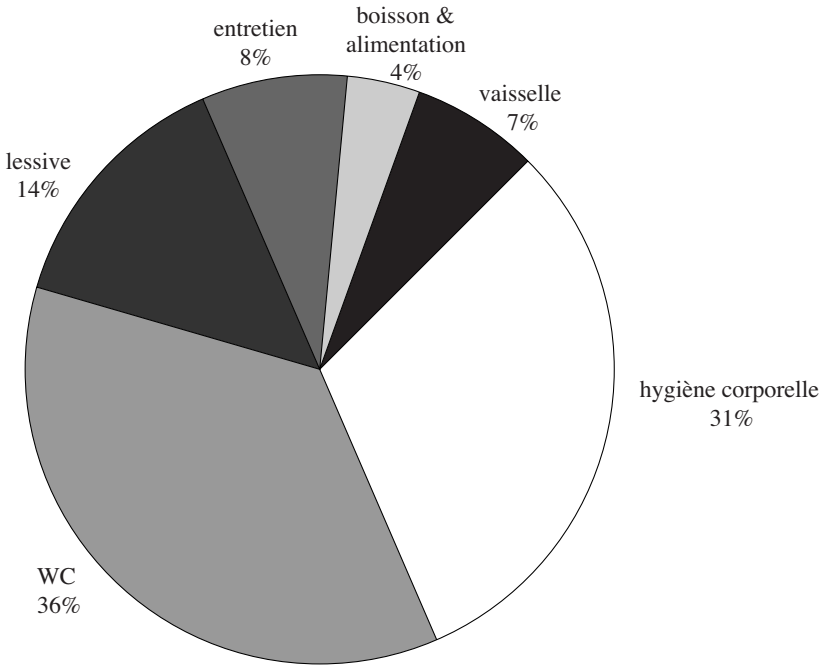
Voici le graphique de l'évolution de la consommation d'eau moyenne par raccordement :



[9] Voir Société Wallonne des Distributions d'Eau [2000]

La consommation moyenne d'eau par les ménages en Belgique s'élève à environ 120 litres par personne et par jour[10] :

pour la boisson et l'alimentation :	5 litres	4 %
pour la vaisselle :	8 litres	7 %
pour l'hygiène corporelle :	38 litres	31 %
pour le WC :	43 litres	36 %
pour la lessive :	16 litres	14 %
pour l'entretien :	10 litres	8 %



[10] Extrait de R. Depamelaere [sans date]

ENQUÊTE SUR LA CONSOMMATION D'EAU PAR FAMILLE

Nom et prénom :

La famille est composée de ... personnes.

1) Recherche : Combien d'eau pour... ?

TOUTE LA FAMILLE UTILISE L'EAU POUR ...	LITRES PAR JOUR	LITRES PAR SEMAINE
1. Boisson, alimentation	.....	.....
2. Vaisselle	.....	.....
3. Lessive	.....	.....
4. Entretien, nettoyage	.....	.....
5. Bain, douche, évier	.....	.....
6. Toilettes	.....	.....
TOTAUX	.....	.....

2) Consommation d'eau PAR PERSONNE, PAR JOUR

Reporter les données du tableau 1 et calculer.

: ... personnes

L'EAU POUR ...	LITRES PAR JOUR **PAR FAMILLE**	LITRES PAR JOUR **PAR PERSONNE**
1. Boisson, alimentation	...	= .....
2. Vaisselle	...	= .....
3. Lessive	...	= .....
4. Entretien, nettoyage	...	= .....
5. Bain, douche, évier	...	= .....
6. Toilettes	...	= .....
TOTAUX	...	= .....

: ... personnes

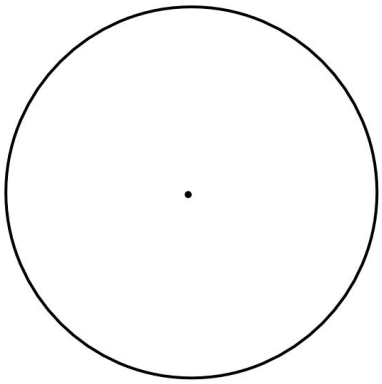
3) Transformer les données PAR JOUR/PAR PERSONNE en POURCENTAGES

Reporter les données du tableau 2 et calculer.

	POURCENTAGES	LITRES PAR JOUR /PAR PERSONNE
TOTAL 1. Boisson, alimentation	… { 100 % … %	… { … … } …
TOTAL 2. Vaisselle	… { 100 % … %	… { … … } …
TOTAL 3. Lessive	… { 100 % … %	… { … … } …
TOTAL 4. Entretien, nettoyage	… { 100 % … %	… { … … } …
TOTAL 5. Bain, douche, évier	… { 100 % … %	… { … … } …
TOTAL 6. Toilettes	… { 100 % … %	… { … … } …

4) Dessiner le graphique circulaire à l'aide du « rapporteur en pourcents »

1. Boisson, alimentation : … %
2. Vaisselle : … %
3. Lessive : … %
4. Entretien, nettoyage : … %
5. Bain, douche, évier : … %
6. Toilettes : … %



Deuxième partie

Un aspect de la linéarité
de 12 à 15 ans

5

Tableaux, graphiques, formules

1 Des abaques et des graphiques pour calculer

De quoi s'agit-il ?

Les élèves recueillent des données, ils élaborent des diagrammes en bandes et des diagrammes circulaires à l'aide d'abaques ; ils calculent des pourcentages. Le terme « abaque » est employé ici dans le premier sens donné par le Larousse : graphique permettant de résoudre de nombreux calculs.

Enjeux

Représentation de données par des grandeurs géométriques (segments et angles) et conversion des données en pourcentages, par voie graphique et par calcul. Les instruments graphiques en question permettent d'appréhender les rapports et proportions de manière très visuelle.

Voir chapitre 16, sections 4.9 et 5.3.

Compétences

Représenter des données par un graphique, un diagramme. Dans une situation simple et concrète, estimer la fréquence d'un événement sous forme de rapport.

Calculer des pourcentages.

Interpréter un graphique, un tableau, un diagramme.

De quoi a-t-on besoin ?

Pour les diagrammes circulaires : des maquettes de « bracelets de conversion » (voir la fiche 26 à la page 181), une paire de ciseaux, un bâton de colle ou quelques trombones par groupe de trois ou quatre élèves.

Pour les pourcentages : le cercle gradué en centièmes (voir la fiche 27 à la page 182) et les abaques de conversion de rapports de longueurs en pourcentages (voir les fiches 28, 29 et 30 aux pages 183 à 185).

Comment s'y prendre ?

L'activité commence par une question qui se rapporte à des données recueillies par les élèves.

On dispose, pour plusieurs classes d'une même école, des nombres d'élèves pour les catégories suivantes : ceux qui rentrent à la maison à midi, ceux qui mangent des sandwiches à l'école et ceux qui y prennent un repas chaud. On demande de construire des diagrammes circulaires afin de comparer rapidement les proportions d'élèves dans chaque catégorie pour les différentes classes.
Pour chaque classe, déterminer le pourcentage que représente chacune des catégories.

Le déroulement décrit ci-après part de données fictives à propos des repas de midi. Les élèves peuvent recueillir des informations réelles en enquêtant dans différentes classes ou en s'adressant à l'économat de l'école. Le professeur répartit le travail entre les groupes de façon à ce que l'on puisse dégager des méthodes et des propriétés à partir d'exemples qui comportent des effectifs différents. Traitons par exemple deux relevés, l'un qui correspond à une classe de 29 élèves et l'autre à une classe de 26 élèves.

	Classe 1	Classe 2
Rentrent à la maison	11	5
Sandwiches	3	12
Dîner chaud	15	9
Nombre total d'élèves de la classe	29	26

Avec un bracelet

Le support des bandelettes aide l'élève à construire un diagramme circulaire sans qu'il soit nécessaire de fournir au préalable une définition de rapport ou une procédure. Pour faire apparaître un partage du disque en 29 parties égales, le professeur propose donc aux élèves de découper une des bandelettes de la fiche 26 à la page 181 et de l'enrouler pour former un cercle. En observant comment les élèves se débrouillent avec ce matériel, le professeur veille à ce qu'ils traitent correctement les aspects suivants :

- l'ensemble de tous les élèves d'une classe est représenté par un disque complet et chaque catégorie est représentée par une partie du disque proportionnelle au nombre d'élèves,
- partager le disque revient à partager son contour et à relier les points de partage au centre du disque.

Moyennant quelques indications (que le professeur dispensera de manière parcimonieuse pour bien localiser les points de blocage et laisser aux élèves le plaisir de la découverte), on élabore un mode d'emploi. On choisit une bandelette qui comporte plus de 29 unités et l'on repère les longueurs qui correspondent aux différentes catégories.

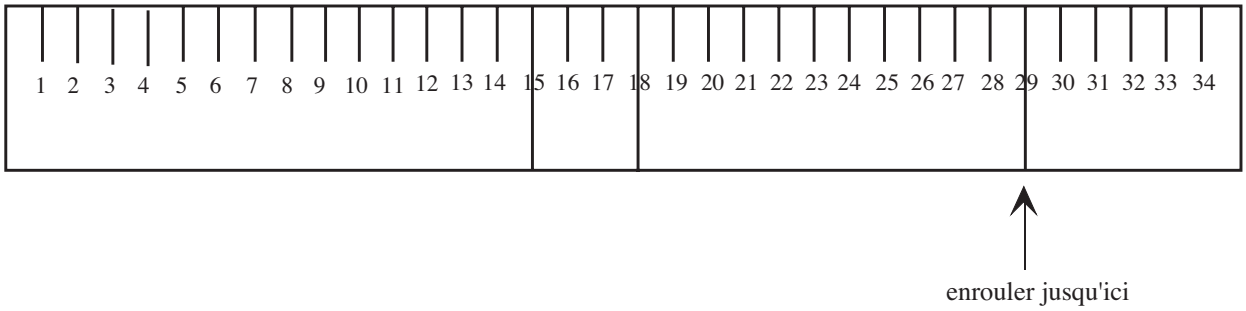


Fig. 1

On ferme, puis on colle ou on place un trombone pour obtenir un « bracelet ». On trace un cercle plus grand que le bracelet et on indique le centre du cercle de manière très visible. Ceci permet de centrer le bracelet à vue et de reporter les traits qui correspondent aux différentes catégories.

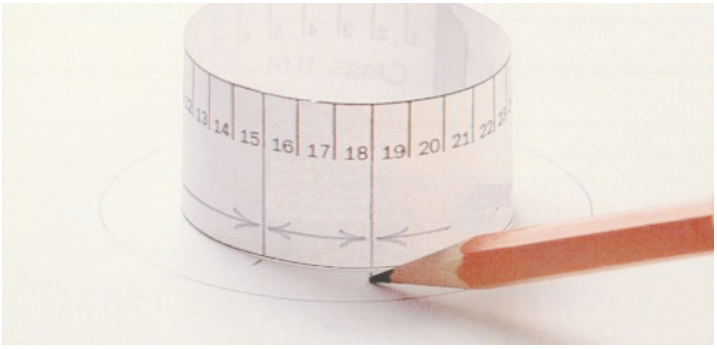


Fig. 2

On obtient un diagramme circulaire qui permet de visualiser la part de chaque catégorie. Pour la classe 2, en utilisant une autre bandelette, on obtient le deuxième diagramme de la figure 3. La comparaison des proportions dans les différentes classes est plus aisée lorsque les cercles ont même rayon. Dans le cas présent, on voit tout de suite que les proportions d'élèves pour chaque catégorie sont très différentes d'une classe à l'autre.

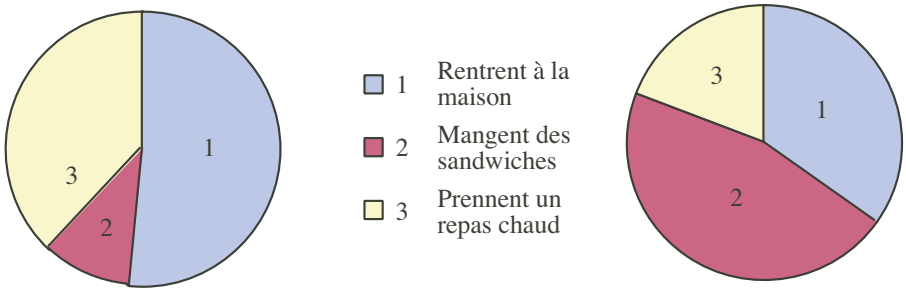


Fig. 3

Pour convertir les données en pourcentages, les élèves disposent de quatre outils : un disque transparent gradué en centièmes (fiche 27 à la page 182), les abaques de conversion de rapports de longueurs en pourcentages (voir fiches 28, 29 et 30 aux pages 183 à 185).

Tout en évitant les calculs, ces outils conduisent à percevoir cette conversion comme un changement de graduation d'un cercle ou d'un segment : un partage du tout en parties égales (ici en 29 ou en 26 parties) est remplacé par un partage en 100. Le professeur choisit les outils qu'il exploitera pour traiter les données recueillies. Il organise la classe de façon à ce que chaque élève n'utilise qu'un abaque, mais qu'il bénéficie des travaux des autres élèves.

Avec le cercle gradué en centièmes

En déposant un cercle gradué transparent sur le disque comme indiqué par la figure 4, on « lit » qu'à la fraction $\frac{15}{29}$ correspond à peu près 52%.

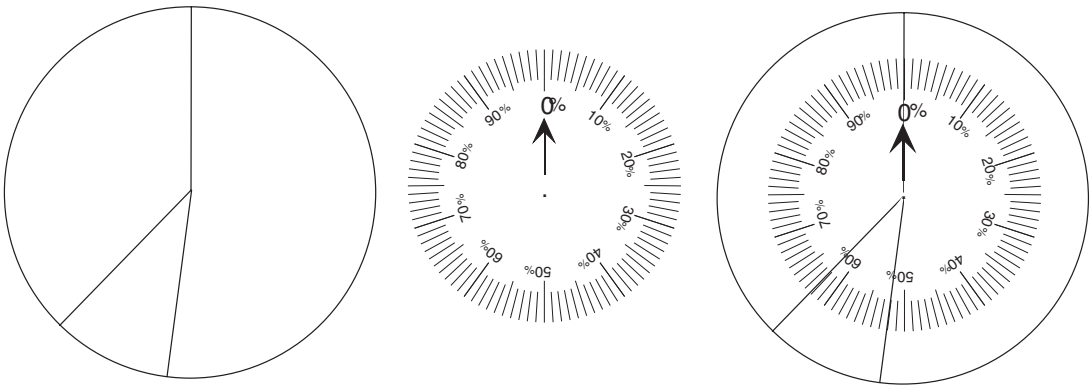


Fig. 4

Il faut ensuite tourner le rapporteur de manière à ajuster la flèche qui pointe 0 sur le premier côté du secteur représentant la catégorie de 3 élèves et de même pour le troisième secteur.

Avec l'abaque de conversion des longueurs en pourcentages

Cet abaque (voir figure 5) ressemble au faisceau lumineux d'un projecteur de diapositives ou d'un agrandisseur. Les segments parallèles à la ligne graduée sont partagés par le faisceau en 10 (ou 100) parties égales.

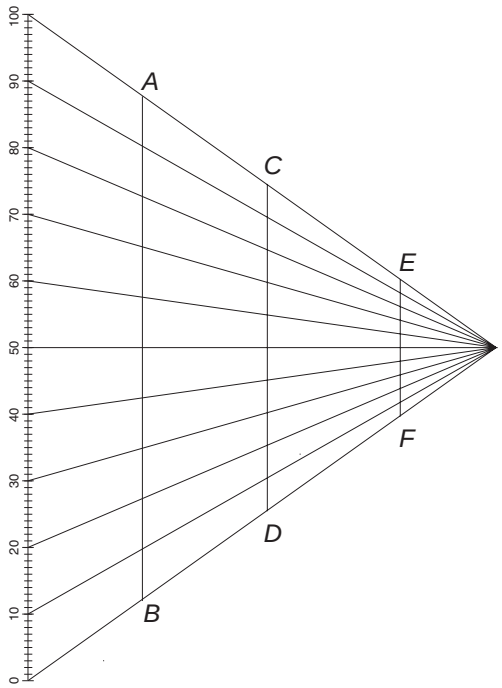


Fig. 5

Si la perception de ce phénomène géométrique n'est pas immédiate pour les élèves, on procèdera à des expériences pour des partages plus simples : observer par exemple où se trouve le milieu d'un segment que l'on place tantôt dans une position parallèle à la ligne graduée, tantôt dans une autre position (voir figures 6 et 7).

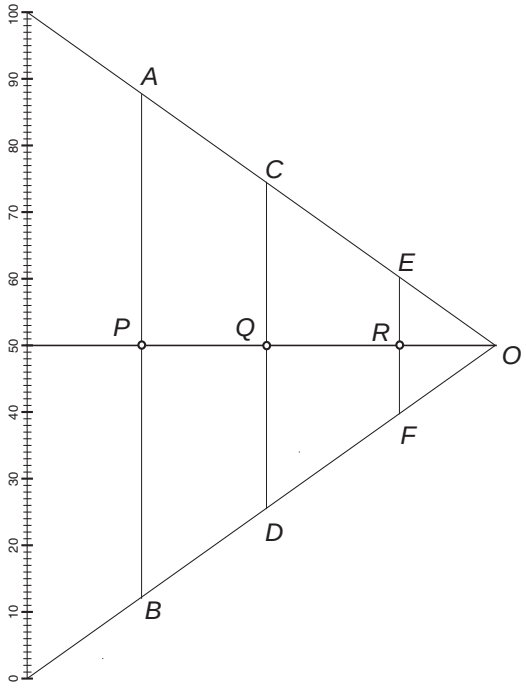


Fig. 6

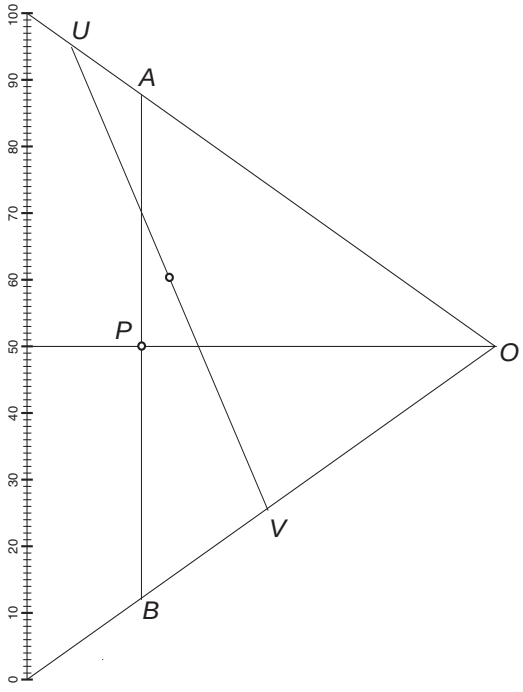


Fig. 7

La figure 8 montre comment disposer la bandelette sur l'abaque pour graduer un segment de 29 unités en centièmes.

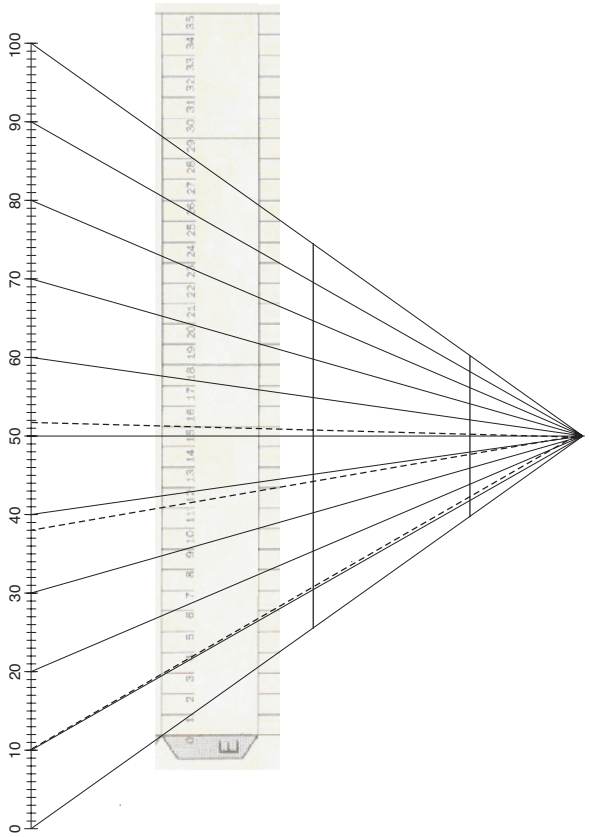


Fig. 8

On y « lit » :

- qu'à la graduation 3 sur la bandelette de 29 unités, correspond à peu près la graduation 10 sur le segment de 100 unités,
- qu'à la graduation 11 sur la bandelette de 29 unités, correspond à peu près la graduation 38 sur le segment de 100 unités,
- qu'à la graduation 15 sur la bandelette de 29 unités, correspond à peu près la graduation 52 sur le segment de 100 unités.

Avec le guide ligné

Pour que les élèves découvrent comment utiliser ce réseau de lignes, on peut d'abord leur montrer comment partager une bandelette en deux, trois ou quatre parties égales en la déposant sur une feuille lignée (voir figure 9).

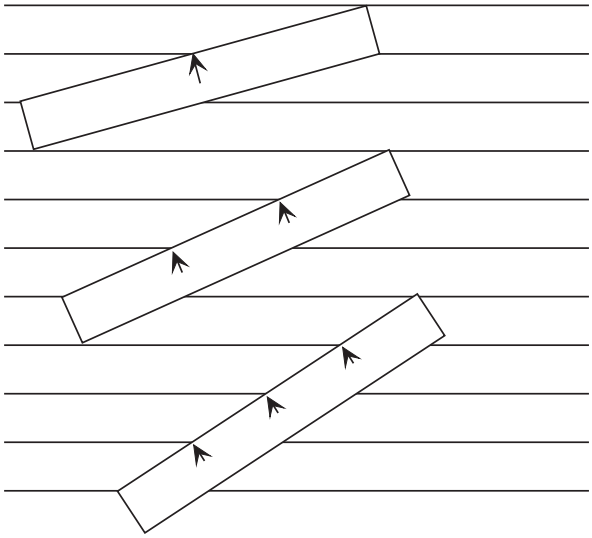


Fig. 9

La figure 10 montre comment déterminer le pourcentage qui correspond à 3 élèves sur 29 ; 11 élèves sur 29 et 15 élèves sur 29.

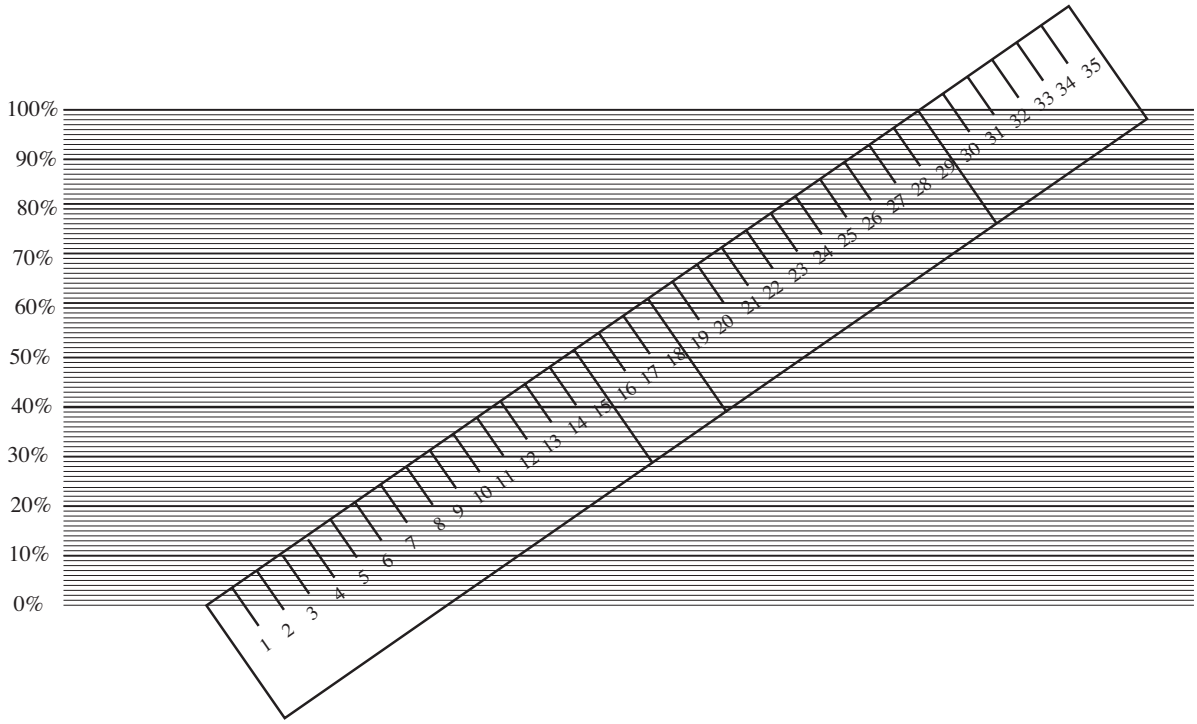


Fig. 10

Avec le repère rectangulaire

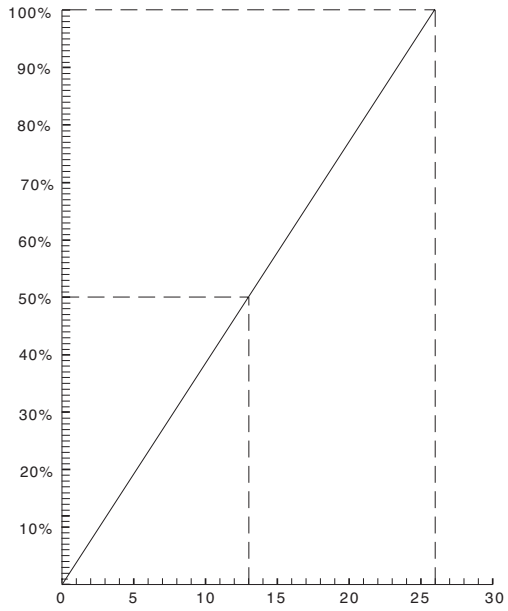


Fig. 11

Le repère fourni aux élèves (figure 11) est prévu pour opérer les conversions relatives à un groupe de 26 élèves. Il montre comment indiquer qu'à 26 sur 26 correspond le rapport 100% et qu'à 13 sur 26 correspond le rapport 50%. Les élèves ont à découvrir comment convertir les autres rapports (5 sur 26, 12 sur 26 et 9 sur 26) en pourcents de la grandeur de référence choisie. L'image du partage en deux qui s'effectue dans trois directions, celles des côtés du rectangle et celle de sa diagonale, donne l'idée de la construction : pour convertir 5 sur 26, on part de la graduation 5 (voir figure 12), on trace un segment vertical, on repère l'intersection de cette verticale avec la diagonale du rectangle, on trace un segment horizontal et on lit le nombre de pourcents correspondant. La figure 13 montre les conversions pour la classe de 29 élèves.

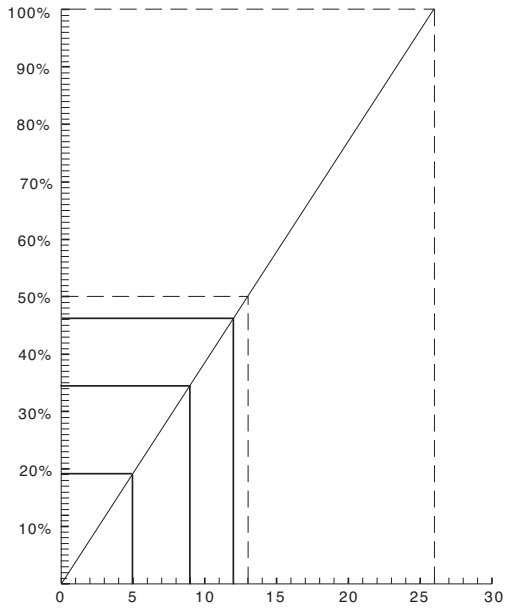


Fig. 12

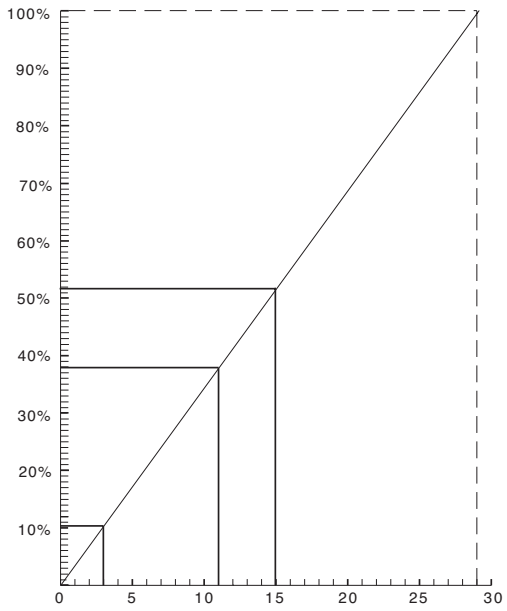


Fig. 13

Ces deux graphiques peuvent servir de supports pour réaliser des diagrammes en bâtons. Il suffit pour chaque donnée, de prendre comme hauteur du bâton, la longueur du segment correspondant sur le graphique. On obtient ainsi le diagramme de la figure 14.

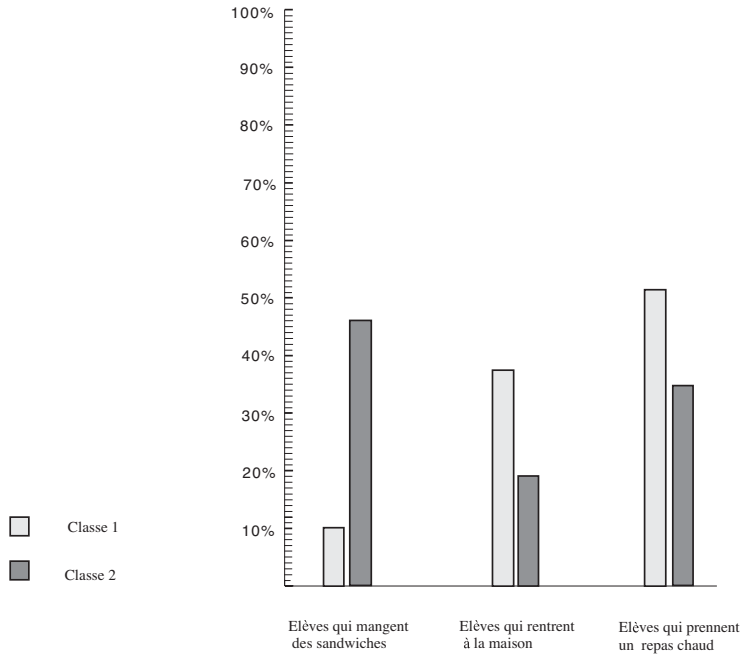


Fig. 14

Les abaques de conversion fournissent des pourcentages approximatifs qui bien souvent suffisent pour construire des diagrammes. On réalise cependant que si l'on veut traiter les données avec plus de précision, on ne peut pas recourir à de tels supports. Le professeur peut tabler sur les images visuelles suscitées par l'activité pour mettre en place une méthode de calcul des pourcentages.

Calculons d'abord le pourcentage exact que représentent 3 élèves d'une classe de 29. Pour ce faire, on remplace les correspondances lues sur les abaques par un tableau de proportionnalité dans lequel 29 correspond à 100.

Nombre d'élèves	Pourcentage
29	100
3	?

Chaque élève est 1/29 de ce tout, trois élèves en constituent trois fois plus c'est à dire 3/29. C'est ce que montre le tableau

Nombre d'élèves	Pourcentage
29	100
1	$\frac{100}{29}$
3	$\frac{100\times 3}{29}$

(: 29 entre 29 et 1 ; ×3 entre 1 et 3 ; : 29 entre 100 et $\frac{100}{29}$; ×3 entre $\frac{100}{29}$ et $\frac{100\times 3}{29}$)

On procède de manière analogue pour calculer quel pourcentage de la classe représentent 11 élèves sur 29 puis 15 élèves sur 29.

Nombre d'élèves	Pourcentage	
29	100	
1	3,448...	
3	10,344...	soit 10,3%
11	37,931...	soit 37,9%
15	51,724...	soit 51,7%

À ce stade, le professeur pose une nouvelle question.

> Déterminer l'opération qui permet de passer d'un nombre de la première colonne du tableau au nombre correspondant de la seconde. Écrire une formule qui généralise cette relation entre le « nombre d'élèves » et le « pourcentage ».

On retourne au tableau pour y déceler par quelles opérations (toujours les mêmes) on passe de la première à la deuxième colonne. Il s'agit d'une division par 29 et d'une multiplication par 100. Les élèves utilisent ensuite un aspect de la notion de fraction : elle remplace la succession de deux opérations par une seule opération : une multiplication par la fraction $\frac{100}{29}$.

Nombre d'élèves	Pourcentage	Opérations
29	100	
1	3,448...	$1 \times \frac{100}{29}$
3	10,344...	$3 \times \frac{100}{29}$
11	37,931...	$11 \times \frac{100}{29}$
15	51,724...	$15 \times \frac{100}{29}$

Il faut ensuite traduire ce calcul par une formule. Si on appelle x le nombre d'élèves de la catégorie, et si y est le pourcentage qui exprime le rapport entre ce nombre et le nombre total d'élèves de la classe, on a

$$y = x \times \frac{100}{29} \quad \text{ou} \quad y = \frac{100}{29}x.$$

2 Proportionnalité : divers contextes

Nous présentons ici une suite de situations qui éclairent les différentes propriétés d'un tableau de proportionnalité et du graphique qui lui correspond.

La richesse d'un tableau de proportionnalité est telle que les élèves ne peuvent en apercevoir toutes les propriétés sur un seul exemple : le choix

de chaque situation est donc particulièrement important pour favoriser l'émergence de telle ou telle propriété. Nous essayons pour chaque activité de bien préciser quelle facette de la proportionnalité est visée afin de permettre aux enseignants de modifier le contexte de l'activité, s'ils le souhaitent, tout en conservant les objectifs précis qu'elle doit atteindre. Les contextes choisis ici nous permettent simplement de réactiver des notions acquises à l'école primaire, telles que multiples, échelles, conversions d'unités, ...

De quoi s'agit-il ?

Les élèves créent des tableaux de nombres, étudient des régularités dans ces tableaux, étendent des tableaux de proportionnalité, établissent les graphiques ou les formules qui leur correspondent, explorent des graphiques. On les confronte également à des situations de non-proportionnalité.

Enjeux

Mettre en évidence les différentes facettes de la proportionnalité.
Identifier, à partir d'un tableau de nombres, d'un graphique ou d'une formule, une situation de proportionnalité parmi d'autres.
Pour une situation donnée, faire le va-et-vient entre le tableau de nombres, le graphique et la formule. Voir à ce sujet le chapitre 16, sections 2 et 5.3.

Compétences

Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.

Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.

Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.

Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Des feuilles de papier, des crayons, des feuilles préparées pour la réalisation des graphiques, éventuellement une calculatrice.

2.1 Un problème de troc

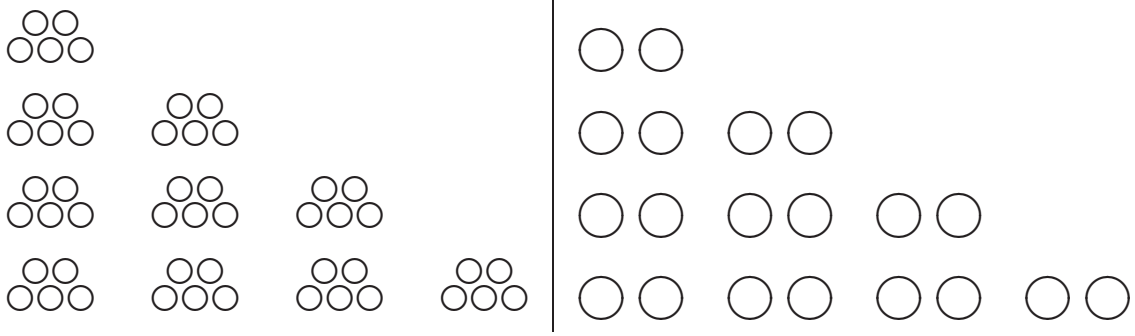
Comment s'y prendre ?

> Dans la cour de récréation, les enfants font du troc : cinq petites billes s'échangent contre deux grosses. Représenter les échanges possibles dans un tableau.

Après un temps de recherche libre, le professeur examine les résultats des élèves. Il nous semble qu'une première étape dans l'apprentissage de la proportionnalité consiste à repérer dans un tableau figuratif (sans nombres) les premières propriétés de proportionnalité. C'est la raison pour laquelle l'analyse d'un tableau comme celui présenté ci-dessous est importante, même s'il semble un peu simpliste pour des élèves de 12 ans[1].

[1] On peut susciter la réalisation de ce type de tableau en distribuant aux élèves des petits cartons sur lesquels seront dessinés des paquets de deux billes et des paquets de cinq billes qu'ils n'ont plus qu'à placer dans les colonnes du tableau.

Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes



Dans ce type de représentation, visuellement plus parlant, certaines propriétés apparaissent de façon plus évidente que dans un tableau de nombres. Chaque fois qu'on ajoute cinq billes dans la colonne de gauche, on ajoute deux billes dans la colonne de droite. Si on double le nombre de billes dans la colonne de gauche, on le double aussi dans la colonne de droite, etc. Il est ensuite plus simple de retrouver ces propriétés dans les tableaux de nombres réalisés dans un deuxième temps.

On arrive à l'élaboration d'un tableau de nombres dans lequel les élèves reportent les observations faites précédemment.

Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes
5	2
10	4
15	6
20	8
25	10
⋮	⋮

(+5 entre 5 et 10, 10 et 15, 15 et 20, 20 et 25 ; +2 entre 2 et 4, 4 et 6, 6 et 8, 8 et 10)

Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes
5	2
10	4
15	6
20	8
25	10
⋮	⋮

(×2 entre 10 et 15 ; ×2 entre 4 et 6)

On poursuit l'activité en posant les questions suivantes.

> Combien de petites billes faut-il donner pour en recevoir 24 grosses, 35 grosses, ... ? Combien de grosses billes recevra-t-on si on dispose de 15 petites billes, de 24 petites billes, ... ?

Après un temps de recherche libre, les élèves comparent leurs résultats et leurs démarches. Il est important de les laisser expliquer ces démarches, en espérant évidemment que celles-ci seront suffisamment variées pour permettre de dégager plusieurs propriétés de la proportionnalité. Le choix des nombres dans l'énoncé induit ici la découverte des propriétés liées aux

facteurs[2] internes à une colonne. Par contre, le facteur externe, qui permettrait de passer directement de la première à la deuxième colonne du tableau ($\times\frac{2}{5}$), ne viendra pas spontanément à l'esprit des élèves de cet âge. Voici quelques exemples de calculs que l'on peut voir surgir dans une classe en réponse à la question « combien de petites billes faut-il donner pour en recevoir 24 grosses ? »

- Continuer de 2 en 2, dans la deuxième colonne, de 10 jusqu'à 24, et donc de 5 en 5 dans la première colonne, de 25 jusqu'à 60.
- Accélérer en allant de 4 en 4 dans la deuxième colonne et donc de 10 en 10 dans la première.
- Remarquer que pour 10 grosses billes, il en faut 25 petites, en conclure que pour 20 grosses, il en faudra 50 petites et enfin aller jusqu'à 24 en ajoutant 4 d'un côté et donc 10 de l'autre.
- Remarquer que pour 12 grosses billes, il en faut 30 petites, en conclure que pour 24 grosses, il en faudrait deux fois plus, c'est-à-dire 60 petites.
- Remarquer que pour 14 grosses billes, il en faut 35 petites, que pour 10 grosses il en faut 25 petites, en conclure que pour 24 grosses il en faudra $35 + 25 = 60$ petites.

L'examen de chacune des méthodes de calcul permet de découvrir les différentes propriétés liées aux rapports internes du tableau de proportionnalité.

Dans deux des exercices proposés, le nombre de billes dont on dispose ou dont on souhaite disposer ne correspond pas exactement à un échange possible : combien de grosses billes peut-on obtenir si on dispose de 24 petites billes ? Combien de petites billes faut-il pour en obtenir 35 grosses ? C'est le moment, si ce n'est déjà fait, d'analyser les propriétés arithmétiques des nombres contenus dans les deux colonnes du tableau : on trouve les multiples de 5 dans la première et les multiples de 2 dans la deuxième. Répondre aux deux questions précédentes revient donc à situer un nombre entre deux multiples consécutifs, par exemple ici, 24 est compris entre 20 et 25 dans la liste des multiples de 5.

La découverte des multiples de 5 dans une colonne et des multiples de 2 dans l'autre permet d'établir le tableau suivant :

	Nombre de petites billes	Nombre de grosses billes	
	5	2	
$2 \times \mathbf{5}$	10	4	$2 \times \mathbf{2}$
$3 \times \mathbf{5}$	15	6	$3 \times \mathbf{2}$
$4 \times \mathbf{5}$	20	8	$4 \times \mathbf{2}$
$5 \times \mathbf{5}$	25	10	$5 \times \mathbf{2}$
...	...	...	...

[2] Nous préférons parler ici de « facteur » interne ou externe et non de « rapport », car il s'agit ici de trouver le nombre par lequel on multiplie un résultat pour en obtenir un autre (que ce soit au sein d'une même colonne ou d'une colonne à l'autre).

C'est une étape importante qui fournit une méthode générale pour compléter n'importe quelle ligne du tableau en posant simplement une division et une multiplication. Les élèves vérifieront son efficacité sur des exercices où la grandeur des nombres ne permet plus de travailler de proche en proche.

On peut ensuite passer à la réalisation du graphique associé à ce tableau de nombres. On donne aux élèves une feuille de papier munie d'un système d'axes prégradués, on leur demande de placer les points correspondant aux nombres repris dans le tableau. Une simple observation du graphique permet de voir que les points s'alignent avec l'origine des axes et que chaque fois que l'on augmente de 5 sur l'axe horizontal, on augmente de 2 sur l'axe vertical, ce qui traduit bien les conclusions tirées des tableaux de la page précédente. L'activité se termine par la recherche sur le graphique de quelques valeurs non encore calculées.

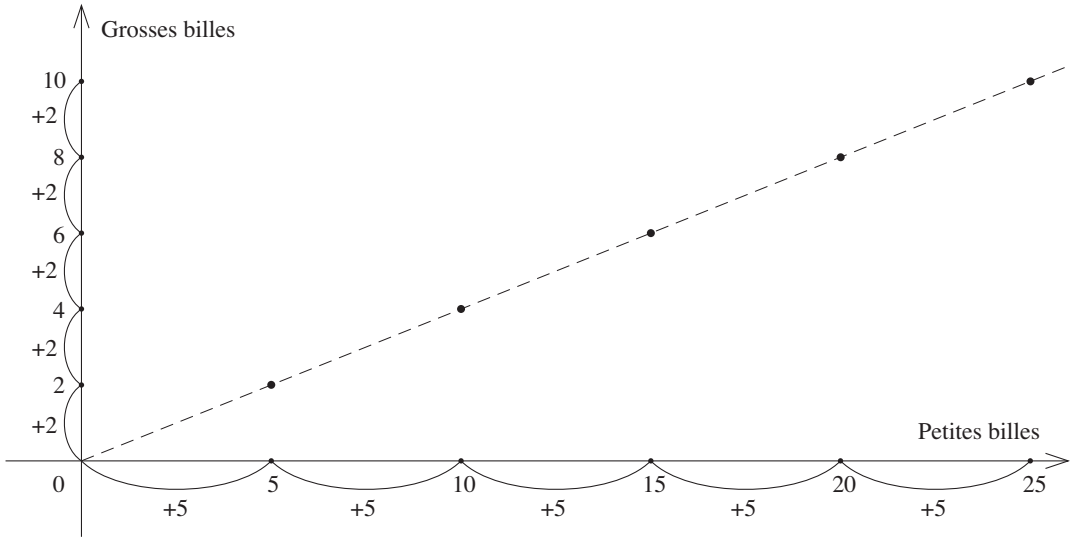


Fig. 15

2.2 Une épargne intéressante

Cette activité permet de fixer les acquis de la précédente, tout en faisant découvrir de nouvelles propriétés. Elle peut paraître plus simple à certains et il est tout à fait possible d'intervertir ces deux activités à condition de bien garder à l'esprit les objectifs précis de chacune d'elles.

Comment s'y prendre ?

À l'école, on organise une épargne pour financer le départ en classes de neige. Chaque fois qu'un élève a apporté 400 francs, la caisse de l'amicale de l'école en ajoute 80. Établir un tableau qui montre l'évolution de l'épargne de l'élève, la participation correspondante de l'amicale et l'épargne totale de l'élève.

Après un temps de recherche libre, le professeur regroupe les résultats des élèves dans un tableau comme ci-dessous.

Épargne de l'élève en BEF	Bonus de l'amicale en BEF	Épargne totale en BEF
400	80	480
800	160	960
1 200	240	1 440
1 600	320	1 920
2 000	400	2 400
...	...	...

Les objectifs de cette activité sont doubles : susciter l'apparition du facteur externe et montrer que les méthodes de calcul mises en évidence dans la première situation sont encore efficaces.

Le facteur externe, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité, lié à cette activité est donc volontairement plus simple que dans la situation précédente : il suffit de diviser les nombres de la première colonne par 5 pour obtenir ceux de la deuxième. Il sera intéressant de voir comment les élèves réagiront à cette situation après avoir résolu la première. Vont-ils reproduire les mêmes automatismes et calculer avec les facteurs internes ou vont-ils directement recourir au facteur externe ? Il faut espérer que les deux méthodes apparaissent dans la classe et permettent de découvrir une nouvelle propriété qui vienne s'ajouter à celles déjà dégagées. Si les élèves n'évoquent pas spontanément le facteur externe, il appartiendra au professeur de le faire émerger.

De même, au niveau du graphique, il convient de faire remarquer que les points sont toujours alignés avec l'origine et que chaque fois que l'on avance de 400 horizontalement, on monte de 80 verticalement.

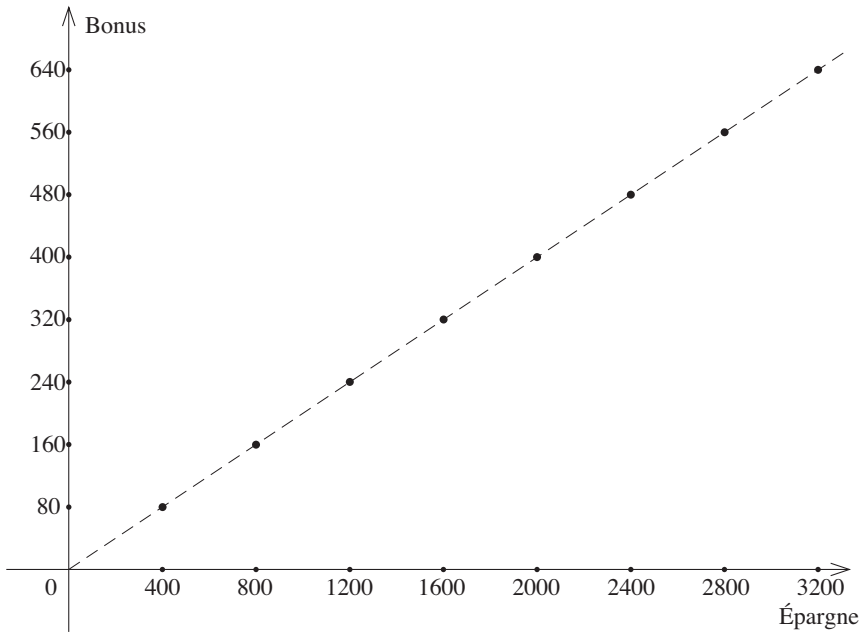


Fig. 16

Les similitudes évidentes entre les deux situations imposent un bref retour à la première. N'existe-t-il pas aussi dans le premier cas une opération qui permette de passer directement d'une colonne à l'autre ? Les élèves feront sans doute une première proposition sous la forme d'une composée d'opérateurs, comme par exemple : on divise par 5 et puis on multiplie par 2. Il appartiendra au professeur de juger du moment où il convient de rapprocher les deux situations en passant aux facteurs multiplicatifs $\times\frac{1}{5}$ et $\times\frac{2}{5}$. Cette étape représente un véritable seuil épistémologique pour les élèves de cet âge. Peut-être faudra-t-il attendre la synthèse finale pour le franchir.

2.3 Une situation non proportionnelle

Cette question amène une situation de non-proportionnalité qui permet de contraster les propriétés du tableau de nombres et du graphique avec celles des deux situations précédentes.

Comment s'y prendre ?

Sur une feuille quadrillée, tracer des carrés de 1, 2, 3, 4, 5, ...unités[3] de côté. Calculer le nombre total de petits carrés de chaque figure. Compléter le tableau ci-dessous. Faire la représentation graphique. Que remarque-t-on ?

Les élèves travaillent d'abord sur du papier quadrillé pour dessiner les carrés successifs et déterminer le nombre de petits carrés des figures, ensuite ils établissent le tableau de nombres suivant.

Nombre d'unités du côté	Nombre de petits carrés de la figure
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
...	...

L'analyse du tableau fait ressortir l'absence d'un facteur commun qui permettrait de passer d'une colonne à l'autre et la difficulté de prévoir un résultat en se référant à d'autres lignes du tableau, puisque les méthodes de calcul mises en évidence lors des situations précédentes se révèlent ici inefficaces. Par exemple,

si le côté vaut 2 unités, le carré compte 4 petits carrés,
si le côté vaut 3 unités, le carré compte 9 petits carrés,
si le côté vaut 5 unités, le carré compte 25 petits carrés.

Or, si $2 + 3 = 5$, il est clair que $4 + 9 \neq 25$.

[3] L'unité de longueur du côté est celle induite par le quadrillage du papier.

De même, si on multiple par 2 un nombre de la première colonne, on ne multiplie pas par 2, mais par 4, le résultat correspondant de la deuxième colonne.

Nombre d'unités du côté	Nombre de petits carrés de la figure
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
⋮	⋮

×2 (2 → 3) ; ×4 (4 → 9)

Il est aussi intéressant d'étudier les écarts entre deux lignes successives du tableau et de voir que, contrairement aux situations précédentes, si l'écart est toujours constant dans la colonne de gauche, il ne l'est pas dans la colonne de droite. On peut se demander si cela va influencer l'allure du graphique. Certains émettront l'idée que les points ne sont sans doute plus alignés.

Nombre d'unités du côté	Nombre de petits carrés de la figure
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
⋮	⋮

+1 (1 → 2) ; +1 (2 → 3) ; +1 (3 → 4) ; +1 (4 → 5)

+3 (1 → 4) ; +5 (4 → 9) ; +7 (9 → 16) ; +9 (16 → 25)

Les élèves élaborent ensuite, sur une feuille quadrillée, le graphique qui correspond à la situation.

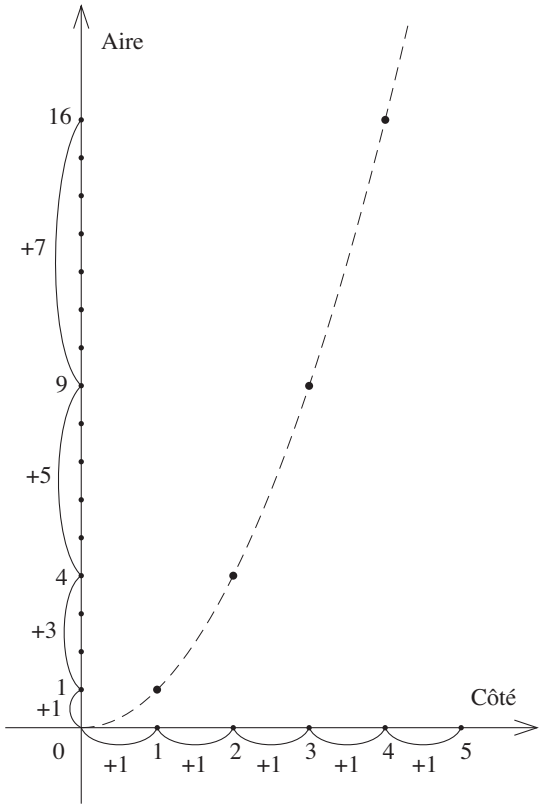


Fig. 17

Dans ce cas-ci, on peut les laisser se débrouiller seuls pour placer et graduer le système d'axes. Une fois les points dessinés sur le graphique, ils vérifient leur conjecture, à savoir que les points ne s'alignent pas. Ce n'est pas pour autant que les élèves pourront tracer seuls la courbe qui relient les différents points du graphique. En effet, si on les laisse faire, la plupart d'entre eux relient, deux par deux, les différents points du graphique par un segment de droite. Dans ce cas, on peut choisir une valeur intermédiaire calculée entre deux points présents sur le graphique et montrer que le point correspondant ne se trouve pas sur le segment qu'ils ont tracé et donc que leur graphique n'est pas correct.

2.4 Le plan de la classe

Cette situation introduit deux sous-unités d'une même grandeur et de ce fait, entraîne à l'utilisation de nombres décimaux. Elle permet également d'apprendre à écrire une formule à partir d'un tableau de proportionnalité.

Comment s'y prendre ?

On veut faire le plan de la classe. Pour cela, on décide de représenter une longueur de 1 m dans la classe par 4 cm sur la feuille. Voici des mesures relevées dans la classe : 8 m ; 6,4 m ; 1,2 m ; 3 m. Quelles sont les mesures correspondantes sur le plan ? Si on trouvait sur le plan les dimensions 5 cm ; 6,8 cm ; 25 cm ; 40 cm, à quoi correspondraient-elles dans la réalité ?

On laisse les élèves chercher librement. Dans un premier temps, ils négligent les unités de mesure et construisent spontanément leur tableau en multipliant par 4 les nombres de la colonne de gauche pour obtenir ceux de la colonne de droite, comme ci-dessous.

Longueurs en m dans la classe	Longueurs en cm sur le plan
1	4
8	32
6,4	25,6
1,2	4,8
3	12
1,25	5
1,7	6,8
6,25	25
10	40

Il est indispensable d'attirer l'attention des élèves sur le problème que pose le rapport externe. En effet, si on considère le tableau de nombres sans se préoccuper des mesures (reprises seulement dans les titres de colonnes), on peut dire que le facteur externe est 4. Par contre, si on tient compte des unités de mesure, les nombres de la première colonne représentent des mètres et ceux de la deuxième colonne des centimètres. Dans ce cas, 4 ne peut être considéré comme le facteur externe du tableau, car en multipliant 1 mètre par 4, on n'obtient pas 4 centimètres. Il faut donc travailler avec des longueurs exprimées dans la même unité dans les deux colonnes et élaborer un autre tableau qui tienne compte de l'échelle : à 1 m dans la classe correspond 4 cm, c'est-à-dire 0,04 m. L'échelle du plan est donc de $\frac{1}{25}$.

$\times\frac{1}{25}$

Longueurs en m dans la classe	Longueurs en m sur le plan
1	0,04
8	0,32
6,4	0,256
1,2	0,048
3	0,12
1,25	0,05
1,7	0,068
6,25	0,25
10	0,4

On demande ensuite aux élèves d'écrire les opérations qui permettent de passer d'un nombre de la première colonne au nombre correspondant de la deuxième. Par exemple

$$6,4 : 25 = 0,256 \quad \text{ou} \quad 6,4 \times \frac{1}{25} = 0,256.$$

On les encourage ensuite à généraliser ces calculs pour obtenir les formules suivantes ; si x représente la longueur en mètres dans la réalité, y la longueur en mètres sur le plan, il vient

$$y = x : 25 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{25} \times x.$$

L'échelle d'une carte est donc le rapport externe d'un tableau de proportionnalité. Ainsi, ce tableau permet-il de répondre aussi bien à une question relative à une mesure réelle, à une mesure sur le plan ou à l'échelle de ce plan.

2.5 Remplir un réservoir d'essence

Les objectifs de cette activité sont doubles. Premièrement, elle introduit des grandeurs de types différents (masse et capacité) et donc une grandeur composée comme facteur externe (kg/l). Deuxièmement, elle débouche sur l'étude de deux fonctions, l'une linéaire, l'autre affine. Cette dernière permet de mettre en évidence le fait qu'un tableau de nombres non proportionnels peut donner un graphique dont les points sont alignés entre eux, mais pas avec l'origine des axes.

Comment s'y prendre ?

Un réservoir d'essence a une masse à vide de 8 kg. On le remplit d'essence. La masse volumique de l'essence est de 0,75 kg/l. Calcule la masse du réservoir au fur et à mesure du remplissage.

Il est probable que certains élèves aient besoin d'éclaircissements sur la notion de masse volumique. Le professeur veillera donc à donner les explications indispensables à la bonne compréhension de l'énoncé.

Il invitera ensuite les élèves à calculer la masse d'essence correspondant à 4, 8, 12, 14, 36, 50 litres et la masse totale du réservoir à chaque étape. Après un temps de recherche libre, on regroupe les résultats des élèves dans le tableau suivant.

Nombre de litres V en l	Masse du contenu M en kg	Masse totale T en kg
4	3	11
8	6	14
12	9	17
14	10,5	18,5
36	27	35
50	37,5	45,5

L'analyse du tableau se fait en deux temps. On se concentre d'abord sur les deux premières colonnes, ce qui permet de mettre en évidence la proportionnalité des grandeurs V et M. Les différents volumes n'ont pas été choisis au hasard, ils permettent d'insister une nouvelle fois sur quelques propriétés d'un tableau de proportionnalité.

Nombre de litres V en l	Masse du contenu M en kg
4	3
8	6
12	9
14	10,5
36	27
50	37,5

Le professeur demande alors aux élèves d'élaborer la formule qui lie les deux grandeurs, à savoir $M = 0,75 \times V$, et de réaliser le graphique correspondant à cette fonction (le choix de l'échelle est laissé à l'initiative des élèves). Ils constatent une fois de plus que le graphique de la figure 18 est une droite passant par l'origine des axes.

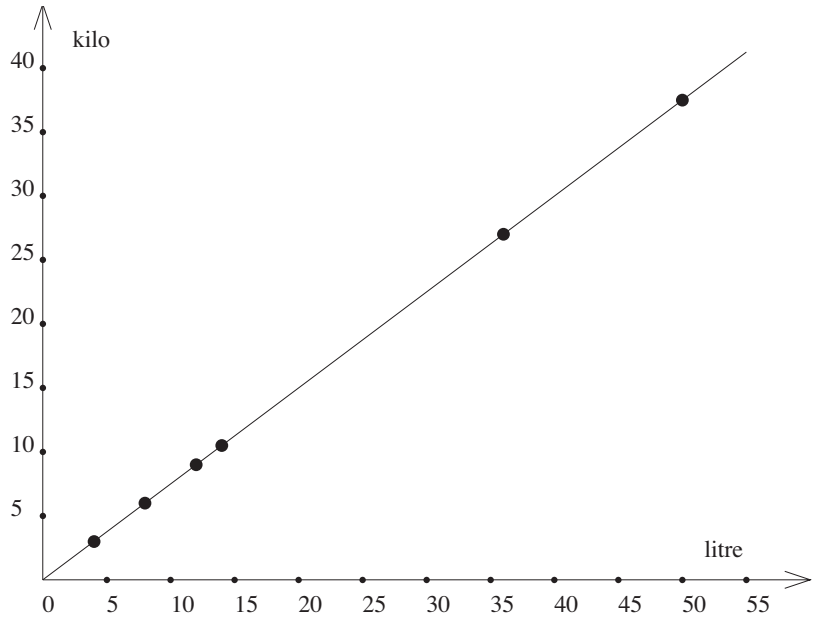


Fig. 18

On examine dans un deuxième temps la relation qui lie le volume d'essence et la masse totale du réservoir. L'analyse du tableau de nombres permet de constater rapidement que ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Nombre de litres V en l	Masse totale T en kg
4	11
8	14
12	17
14	18,5
36	35
50	45,5

Peut-on néanmoins trouver une formule qui permette de calculer la masse totale du réservoir en fonction du nombre de litres d'essence ? Si les élèves ne proposent pas spontanément la formule, le professeur les aidera en mettant en évidence les opérateurs qui permettent de passer d'une colonne à l'autre du tableau.

Nombre de litres V en l	Masse du contenu M en kg	Masse totale T en kg
4	3	11
8	6	14
V	$0,75 \times V$	$0,75 \times V + 8$

Les élèves réalisent ensuite le graphique correspondant à cette situation. Ils constatent que, même si la masse totale n'est pas proportionnelle au volume d'essence, les points du graphique de la figure 19 sont alignés. Néanmoins, la droite qui joint ces points ne passe pas par l'origine des axes.

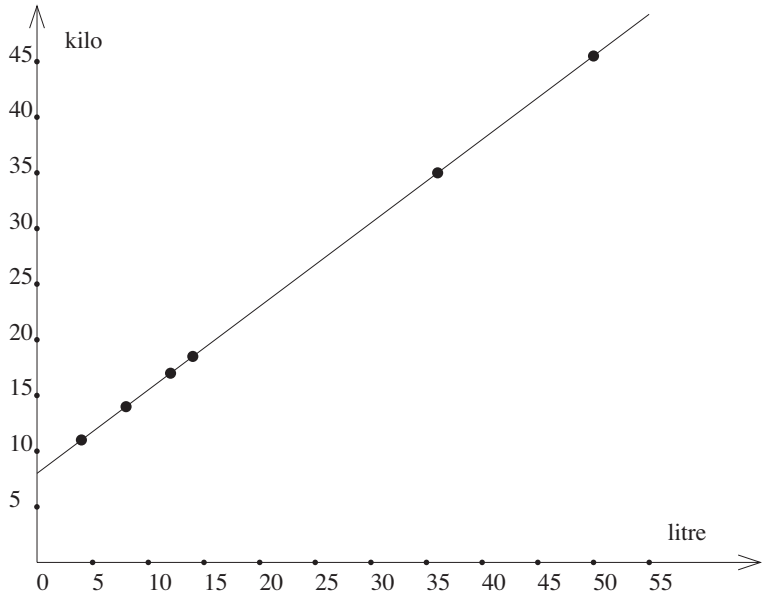


Fig. 19

Ces deux caractéristiques de la fonction affine méritent d'être analysées un peu plus profondément. Pourquoi les points du graphique s'alignent-ils ? Pour répondre à cette question, on demande aux élèves de compléter le tableau suivant en calculant systématiquement litre après litre les masses totales du réservoir, puis de relever, dans chaque colonne, les écarts entre deux lignes successives du tableau.

Nombre de litres V en l	Masse totale T en kg
1	8,75
2	9,5
3	10,25
4	11
5	11,75
6	12,5

Chaque fois que l'on augmente de 1 dans la colonne de gauche, on augmente de 0,75 dans la colonne de droite. C'est normal puisque chaque litre d'essence ajouté dans le réservoir a une masse de 0,75 kg. Comment cela se traduit-il graphiquement ? Si on reprend le graphique 19 en graduant les axes en unités, la densité des points obtenus ne permet pas d'analyser clairement la situation. Pour mieux voir, on effectue un zoom sur la partie du grahique concernée par les nombres repris dans le tableau ci-dessus.

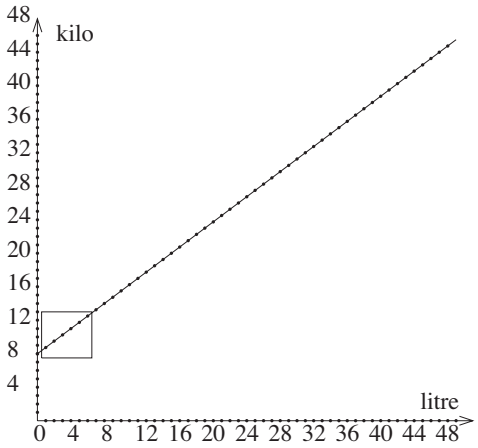


Fig. 20

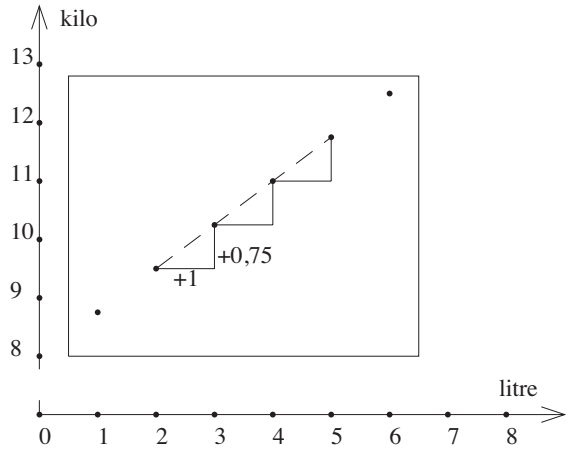


Fig. 21

On se place alors en un point du graphique, on avance de 1 cm horizontalement, puis de 0,75 cm verticalement, et on arrive bien au point suivant du graphique. En répétant cette opération de proche en proche, on construit ce que les élèves appellent un « escalier ». L'image d'une planche posée sur cet escalier suffit à les convaincre de l'alignement des points du graphique. Il reste à régler le problème de l'ordonnée à l'origine. Pour ce faire, on pose deux questions : quelle est l'ordonnée du point d'intersection du graphique avec l'axe des y ? Quel rapport a l'ordonnée de ce point avec l'énoncé du problème ?

On peut d'ailleurs envisager la question de manière plus générale en comparant toutes les ordonnées des points du graphique de la figure 19 aux ordonnées des points d'abscisses correspondantes sur le graphique de la figure 18. On en conclut rapidement que la différence des ordonnées est constante et vaut 8. Si on superpose les deux graphiques, on s'aperçoit que le graphique de la figure 19 est l'image de celui de la figure 18 par une

translation verticale de huit unités.

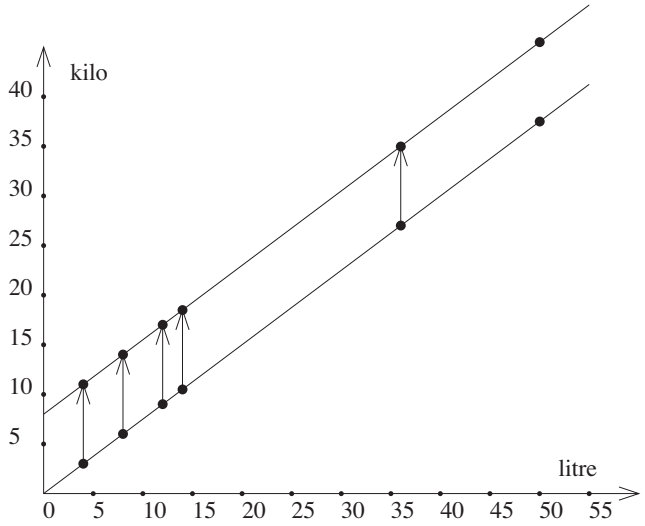


Fig. 22

Toute fonction dont le graphique est constitué de points alignés est dite *affine* ; si de plus les points sont alignés avec l'origine, elle est dite *linéaire*.

Prolongements possibles

On peut introduire quelques transformations de formules en posant, par exemple, les questions suivantes.

- Quel est le volume d'essence qui correspond à une masse d'essence de 40,5 kg ?
- Quel est le volume d'essence qui correspond à une masse totale du réservoir de 38 kg ?

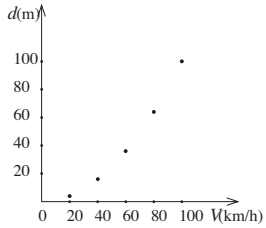
2.6 Proportionnel ou non proportionnel ?

Cette dernière activité a pour objectif de faire le point sur les différentes images mentales que les élèves se sont forgées tout au long des activités précédentes. Nous leur présentons donc volontairement divers types de représentation : textes, tableaux, graphiques, photos, dessins. Nous avons également pris soin de varier les contextes.

Comment s'y prendre ?

Observe attentivement les différents textes, tableaux et graphiques qui suivent. Classe chacune des situations ainsi décrites dans le tableau vierge de la page 128. Indique dans la colonne de gauche les situations proportionnelles, et dans la colonne de droite celles qui ne le sont pas. Justifie soigneusement ton choix dans chacun des cas.

Situation 1
Distance de freinage d'un véhicule



Situation 2

Prix en EUR	Prix en BEF
10	403.399
50	2016.995
100	4033.99
200	8067.98
500	20169.95
1000	40339.9

Situation 3
Agrandissements photos

10 × 15 cm	0,20 EUR
13 × 18 cm	0,71 EUR
20 × 23 cm	2,45 EUR
30 × 45 cm	4,93 EUR
40 × 60 cm	6,17 EUR

Situation 4

Longueur du pied en cm	Pointure de la chaussure
18	27
22	33
26	39
28	42

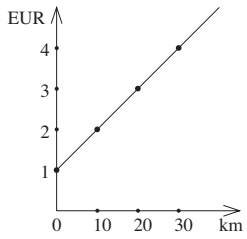
Situation 5
Jean court le 100 m en 13 secondes et le 200 m en 29 secondes.

Situation 6
Pour la rentrée scolaire, un supermarché annonce des prix sacrifiés sur les fournitures scolaires :
1 bloc de feuilles pour 1,50 EUR
5 blocs de feuilles pour 6 EUR
10 blocs de feuilles pour 12 EUR

Situation 7
Pierre et Marc sont deux frères ; on a indiqué dans le tableau ci-dessous leurs âges respectifs à différentes dates

âge de Pierre	1	3	8	15
âge de Marc	4	6	11	18

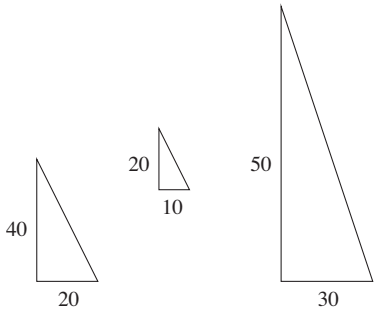
Situation 8
Course en taxi



Situation 9
On roule à bicyclette. Notons N le nombre de tours de roue et d la distance parcourue en mètres,

N	5	10	23	30
d	11	22	50,6	66

Situation 10
Triangles rectangles



Situations proportionnelles	Situations non proportionnelles

À ce stade, les élèves reconnaissent pratiquement une situation de proportionalité lorsque

- dans un tableau présenté en colonnes, les nombres de la deuxième colonne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre,
- sur un graphique, les points sont tous alignés avec l'origine des axes.

Si la situation de départ ne présente ni tableau de nombres, ni graphique de fonctions, les élèves élaborent spontanément leur propre tableau de nombres, ils recourent très rarement au graphique.
Au terme de cette activité, une petite synthèse reprendra donc ces deux propriétés essentielles qui devraient faire partie du bagage minimum d'un élève à l'issue du premier degré du secondaire.

3 Patterns de cubes et proportionnalité

Nous avons emprunté le terme « pattern » à la langue anglaise, faute de lui avoir trouvé un équivalent français qui exprime la même chose de façon aussi brève. On appelle « pattern », toute régularité, tout rythme que l'on découvre dans des formes diverses, qu'elles soient numériques ou géométriques et qui invitent l'esprit à conjecturer des propriétés mathématiques, des lois.

Les propriétés que l'on découvre dans cette section se rapportent à des tableaux de nombres et à des graphiques. Les lois d'engendrement des différents patterns sont écrites sous la forme d'expressions algébriques.

De quoi s'agit-il ?

Les élèves sont mis en présence de patterns faits d'assemblages de cubes qui s'enchaînent selon une loi de progression qui n'est pas énoncée. Ils doivent imaginer les solides qui suivent « logiquement » ceux qui sont donnés et déterminer le nombre de cubes d'un tel solide en fonction de sa position dans la suite.

Ils examinent ensuite les propriétés des tableaux de nombres et des graphiques qui correspondent à chacune des suites.

Enjeux

L'enjeu de cette activité est la capacité de circuler, selon les besoins, entre les représentations imagées des objets, les graphiques et les formules.

La construction de formules est au centre de l'activité : c'est ainsi que les élèves expriment la loi d'engendrement d'un pattern.

Les graphiques qui représentent les lois d'engendrement des différents patterns sont des ensembles de points alignés. Un des enjeux de cette activité réside dans la façon dont on explique l'alignement des points du graphique, au départ de propriétés du rectangle, sans faire appel au théorème de Thalès, ni aux similitudes.

Sur les diverses opérations qui sont nécessaires pour construire un graphique, voir chapitre 16, section 5.3.

Compétences. – *Représenter des données par un graphique, un diagramme.*

Interpréter un graphique, un tableau, un diagramme.

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Calculer les valeurs numériques d'expressions littérales.

De quoi a-t-on besoin ?

Des fiches de travail 31, 32 et 33, proposées en annexe (voir pages 186 à 188).

Pour la troisième activité, il est utile de disposer en classe, d'au moins vingt cubes de même dimension.

Prérequis. – Les élèves doivent savoir construire un tableau de nombres qui met en relation deux grandeurs et être capables de réaliser un graphique qui correspond au tableau.

3.1 Des cubes et une table

Comment s'y prendre ?

Chacun des solides de la figure 23 est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ?
Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec le numéro d'ordre du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.

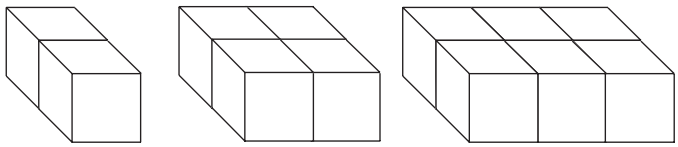


Fig. 23

Cette première situation est simple. Lors de la résolution, le professeur met en place une méthode de travail et un langage utiles pour traiter les questions suivantes.

Huit cubes sont nécessaires pour construire le quatrième solide, vingt pour le dixième, deux cents pour le centième. Les élèves associent rapidement à cette suite de solides, une table de multiplication par 2. La formule qui traduit le calcul est donc

$$c = 2n,$$

dans laquelle n est le numéro d'ordre et c le nombre de cubes.

Les propriétés d'une table de multiplication sont familières, ce sont celles-là mêmes qui ont servi à mémoriser les tables et qui sont utiles en calcul mental. Il se fait que ce sont aussi des propriétés d'un tableau de proportionnalité. Ainsi par exemple, si on sait que $3 \times 75 = 225$, alors on sait que 6×75, c'est 450, le double de 225 ; on peut aussi calculer 9×75 en calculant $225 + 450$. Ces propriétés seront mises en évidence dans l'activité suivante, lorsqu'il s'agira de comparer ce tableau à un autre.

Pour faire un graphique, les élèves doivent réaliser que les abscisses sont des numéros d'ordre et les ordonnées des nombres de cubes, que chaque point du graphe condense les deux informations.

La figure 24 montre les premiers points du graphe. On constate qu'ils s'alignent. On peut expliquer cet alignement en examinant les points trois par trois et en se référant aux propriétés géométriques du graphique. C'est ce que montre la figure 25.

Dans le rectangle $ECFA$, les segments $[HG]$ et $[KJ]$ sont des médianes. Le point d'intersection de ces médianes est aussi l'intersection des diagonales du rectangle. Le point B appartient donc au segment $[AC]$. Ceci explique pourquoi les points A, B et C sont alignés.

On explique de la même façon pourquoi les points B, C et D sont alignés. De même pour tout autre ensemble de trois points consécutifs du graphe.

On attire ensuite l'attention des élèves sur le fait que la droite qui passe par tous ces points, passe aussi par l'origine du repère (voir figure 26). Pour expliquer ceci, on considère le rectangle $EBFO$ dans lequel le point A, intersection des médianes, est aussi l'intersection des diagonales.

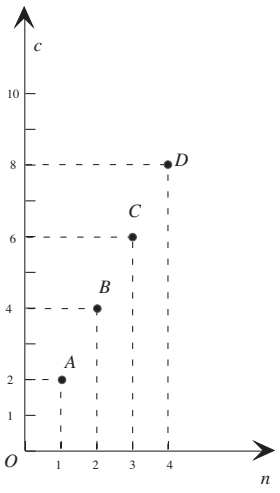


Fig. 24

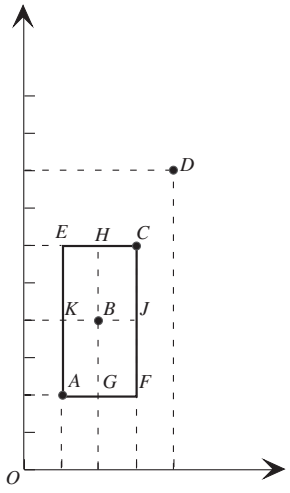


Fig. 25

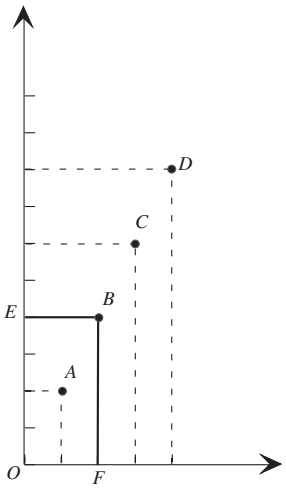


Fig. 26

3.2 Une table décalée

Comment s'y prendre ?

Chacun des solides de la figure 27 est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec le numéro d'ordre du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide. Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos de la première question.

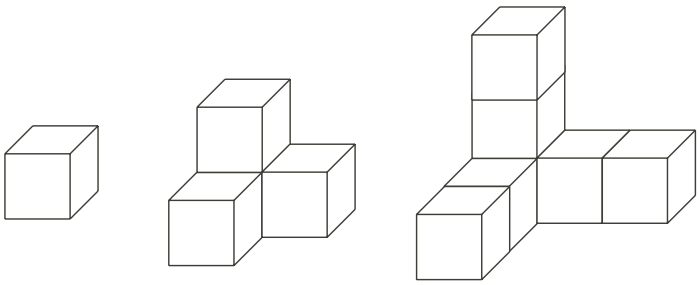


Fig. 27

Les élèves réalisent que pour passer d'un solide au suivant, il faut ajouter trois cubes. Cela permet de calculer de proche en proche le nombre d'éléments de chacun des solides suivants. Par contre, pour prévoir le nombre de cubes du centième solide, il faut aborder les choses autrement. Cette recherche est plus aisée au départ du tableau.

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes	Accroissements
1	1	
2	4	3
3	7	3
4	10	3
5	13	3
n		

Pour établir une loi de calcul qui permettrait de prévoir le nombre de cubes de n'importe quel solide dont on connaîtrait le numéro d'ordre, plusieurs démarches sont possibles. Nous en proposons deux.

1. Chercher quels sont les calculs (toujours les mêmes) qui permettent de passer de la première à la deuxième colonne de calcul. On y arrive en triplant le numéro d'ordre, puis en retranchant 2. Ce que l'on traduit dans le langage de l'algèbre en écrivant la formule

$$c = 3n - 2,$$

où c est le nombre de cubes et n le numéro d'ordre.

2. Partir du premier terme et ajouter l'accroissement un « certain » nombre de fois : une fois de moins que le numéro d'ordre. Ce qu'on traduit par la formule

$$c = 1 + 3(n - 1).$$

C'est l'occasion d'attirer l'attention des élèves sur le sens de l'égalité pour des expressions algébriques. Les expressions établies sont égales pour deux raisons.

1. Elles prennent les mêmes valeurs pour chaque nombre n.
2. On peut passer d'une expression à l'autre en appliquant une propriété de calcul. Ici, on passe de la seconde à la première par la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Le tableau et la formule expriment, dans des langages différents, le mode d'engendrement du pattern. Comme dans la table de multiplication par 3, à chaque étape, il y a trois unités de plus, mais cette table est « décalée » de deux unités.

Pour étudier les propriétés de ce tableau, on le compare au tableau de l'activité précédente.

n	$2n$	Accroissements
1	2	
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2

n	$3n - 2$	Accroissements
1	1	
2	4	3
3	7	3
4	10	3
5	13	3

Dans la table de multiplication, on dégage les propriétés suivantes.

1. Chaque fois qu'une multiplication (ou une division) envoie un nombre d'une colonne sur un autre de la même colonne, la même multiplication (ou division) envoie l'une sur l'autre les valeurs correspondantes de l'autre colonne.
2. Une même multiplication (ici par 2) envoie un nombre quelconque de la première colonne sur son correspondant dans la deuxième colonne.
3. À la somme de deux valeurs de la première colonne, correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre colonne.
4. Lorsqu'un nombre de la première colonne augmente de 1, l'accroissement correspondant dans la deuxième colonne est toujours le même.

Les trois premières propriétés ne peuvent pas s'appliquer au deuxième tableau, seule la quatrième propriété est commune.

Il reste à construire le graphique (voir figure 28 à la page suivante) et à le comparer à un graphique qui représente une proportionnalité, par exemple celui de la figure 24 à la page 130.

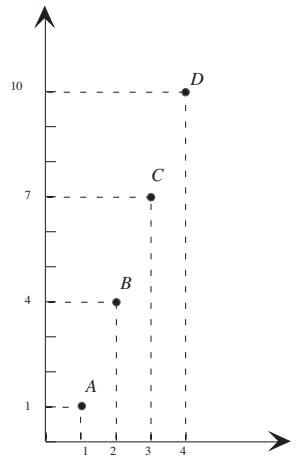


Fig. 28

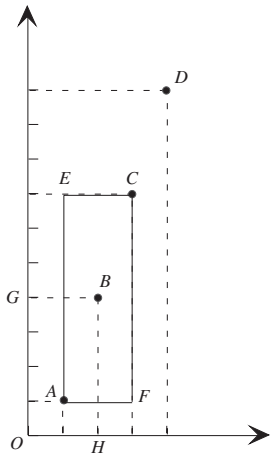


Fig. 29

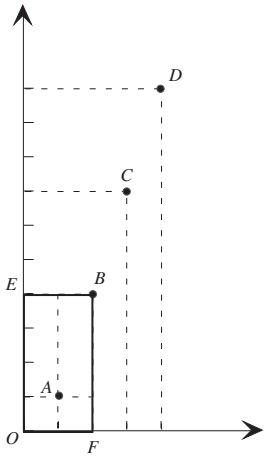


Fig. 30

La figure 28 montre que les points sont alignés, mais que la droite qui passe par ces points ne passe pas par l'origine du repère.

La figure 29 montre pourquoi les points A, B et C sont alignés.

La figure 30 montre pourquoi les points O, A et B ne sont pas alignés : le point A appartient à une médiane du rectangle $EBHO$ mais pas à l'autre, il n'appartient donc pas à la diagonale du rectangle.

3.3 Un escalier de cubes

Comment s'y prendre ?

Chacun des solides de la figure 31 est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec le numéro du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide. Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos des questions précédentes.

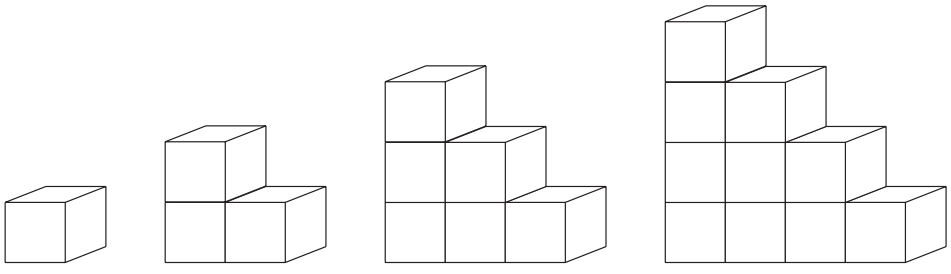


Fig. 31

Une première impression : d'étape en étape, pour passer d'un solide au suivant, on ajoute de plus en plus de cubes. On sait déjà qu'on ne pourra pas tabler sur des accroissements constants pour établir une formule.

Pour y voir clair, la construction d'un tableau s'impose.

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes	Accroissements
1	1	
2	3	2
3	6	3
4	10	4
5	15	5
n		

Si l'on veut élaborer une formule au départ des accroissements, il faut partir du nombre 1 et ajouter successivement 2, 3, 4, ... Le dernier terme de cette somme correspond chaque fois au numéro d'ordre du solide. On a donc la formule

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n.$$

Il existe une formule classique pour calculer rapidement une telle somme. Elle peut être découverte par des élèves de 12-13 ans pour peu qu'on leur suggère l'une ou l'autre méthode. Celle qui suit est très visuelle, et peut être proposée aux élèves à partir d'une question.

Compléter chaque solide de la figure 31 pour former un parallélépipède qui a un volume double. Trouver une relation entre le numéro d'ordre du solide et le nombre de cubes du parallélépipède.

Les élèves réalisent d'abord l'un des parallélépipède demandé avec les cubes dont ils diposent, ils complètent ensuite le dessin correspondant. La figure 32 montre trois parallélépipèdes construits de cette façon.

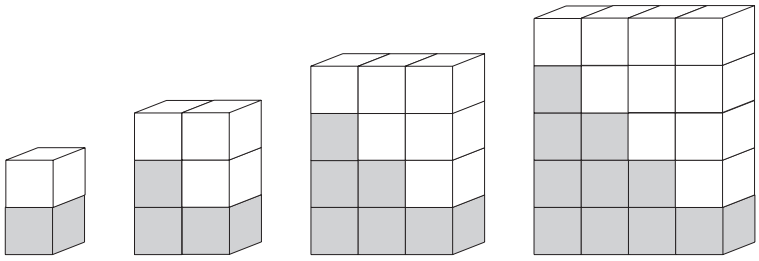


Fig. 32

Chaque solide repose sur une base qui comporte n cubes et a une hauteur de $(n + 1)$ cubes. Ce qui conduit à la formule

$$2c = n(n + 1).$$

On a donc

$$c = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (n est le numéro d'ordre et c le nombre de cubes).}$$

Il s'agit à présent de construire le graphique, puis de le comparer aux graphiques précédents.

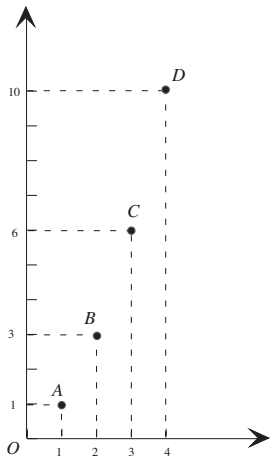


Fig. 33

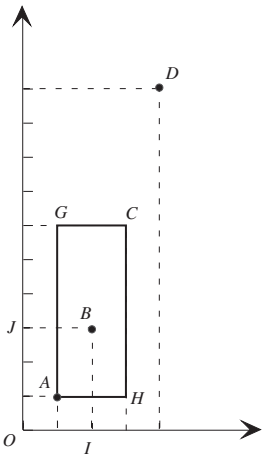


Fig. 34

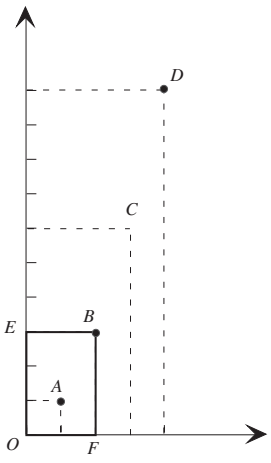


Fig. 35

Si l'on place une règle sur graphique de la figure 33, on constate qu'on ne trouve jamais trois points sur une même droite.

La figure 34 montre pourquoi les points A, B et C ne sont pas alignés.

La figure 35 montre pourquoi les points O, A et B ne sont pas alignés.

Synthèse

Ces trois questions font progresser les élèves dans la maîtrise du tryptique tableau-graphique-formule. Lors de la synthèse, avec l'aide du professeur, ils dégagent les méthodes qui ont été élaborées sur le tas et formulent les propriétés établies de façon à ce qu'elles soient disponibles pour d'autres situations.

Tableau de proportionnalité

Pour préparer cette partie de la synthèse, les élèves rassemblent les différents tableaux réalisés sur une même feuille. Trois propriétés caractérisent un tableau de proportionalité, il s'agit de les dégager.

Le professeur peut s'inspirer des énoncés ci-dessous[4] pour examiner les différents tableaux réalisés en classe : il demande aux élèves de représenter par une flèche, dans chaque tableau qui s'y prête, l'un ou l'autre opérateur qui correspond à la propriété.

S'il n'est pas utile de faire mémoriser ces énoncés, il importe par contre que les élèves en saisissent la portée.

1. *Chaque fois qu'une multiplication (ou une division) envoie un nombre d'une colonne sur un autre de la même colonne, la même multiplication (ou division) envoie l'une sur l'autre les valeurs correspondantes de l'autre colonne.*

[4] Ce sont les formulations utilisées dans F. Van Dieren-Thomas *et al.* [1993]

2. *À la somme de deux valeurs de la première colonne, correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre colonne.*

3. *Une même multiplication (ou une division) envoie un nombre quelconque de la première colonne sur son correspondant dans la deuxième colonne.*

Dès qu'on reconnaît une de ces propriétés, on sait qu'on trouvera les deux autres dans le tableau.

Par ailleurs,

lorsque dans un tableau de proportionnalité, on passe d'un terme au suivant dans la première colonne en ajoutant toujours le même nombre, par exemple 1, les accroissements correspondants dans la deuxième colonne sont constants.

Cette dernière propriété apparaît dans d'autres tableaux, elle ne permet donc pas à elle seule de reconnaître un tableau de proportionnalité.

Formules

La formule $c = 3n$ exprime qu'on calcule c en fonction de n. Pour établir le tableau correspondant, on place dans la colonne de gauche, les valeurs de n que l'on choisit de calculer et on place le résultat de chaque calcul dans la colonne de droite. On exprime cela en disant que, dans cette formule, n est la *variable* et que c est *fonction* de cette variable.

La suite engendrée par cette formule est une table de multiplication par 3. Cette table commence par 0 ou par 3, selon que les valeurs de n commencent à 0 ou à 1.

Voici deux tableaux qui correspondent, l'un à la formule $c = 3n$ (n est un naturel) et l'autre à la formule $y = 5x - 3$ (x est un naturel).

n	$3n$
0	0
1	3
2	6
10	30

x	$5x - 3$
0	-3
1	2
2	7
3	12

Le premier tableau est un tableau de proportionnalité, le second n'en est pas un.

Traitons à présent la situation inverse : écrire une formule à partir d'un tableau de nombres. Nous nous limitons ici aux tableaux qui correspondent à des fonctions affines et qui se présentent comme ceux qui ont été élaborés en cours d'activité : ils présentent une liste de valeurs de la variable qui commence par le nombre 1 et qui croît à chaque étape d'une unité.

Deux méthodes ont été dégagées. Rappelons-les au départ du tableau ci-dessous. On calcule d'abord les accroissements et on vérifie qu'ils sont constants.

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11

x	y	Accroissements
1	5	
2	7	2
3	9	2
4	11	2
5	13	2

Première méthode : partir de la première valeur de la fonction et ajouter $(x-1)$ fois l'accroissement. On trouve la formule

$$y = 5 + 2(x-1) \text{ (x est un naturel non nul).}$$

Deuxième méthode : comparer la liste des valeurs de y à la table de multiplication par 2 (parce que 2 est l'accroissement).

x	$2x$	y
1	2	5
2	4	7
3	6	9
4	8	11

On constate que y vaut chaque fois 3 unités de plus que $2x$. D'où la formule :

$$y = 2x + 3 \text{ (x est un naturel non nul).}$$

Un simple calcul algébrique montre l'équivalence de ces deux formules.

Graphiques

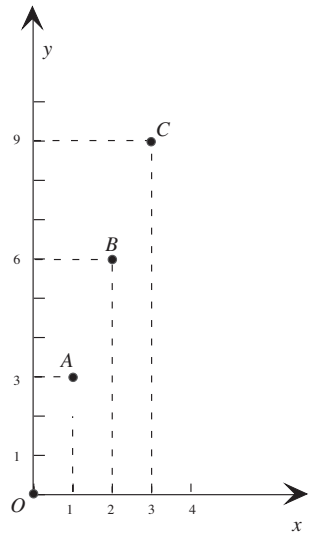


Fig. 36

Pour construire le graphique, on place dans un repère les points dont l'abscisse est une valeur de la variable et dont l'ordonnée est la valeur correspondante de la fonction. Voici le graphique qui correpond à la formule $y = 3x$ (x est un naturel).
Tous les points d'un graphique qui correspond à un tableau de proportionnalité appartiennent à une même droite qui passe par l'origine du repère.

Prolongements possibles

Le pattern qui est proposé dans la première question se prête à un prolongement intéressant lorsqu'on considère la suite des aires totales des différents solides.

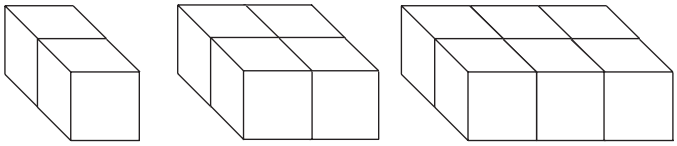


Fig. 37

Un tableau, établi en observant l'aire totale de chacun des solides, met en évidence les accroissements constants.

Numéro d'ordre dans la suite	Aire totale en cm^2	Accroissements
1	10	
2	16	6
3	22	6
4	28	6
n		

L'accroissement constant apparaît aussi dans la figure 37 comme ceci : lorsqu'on accole un nouveau module de deux cubes au solide précédent, on perd 2 faces externes du solide et on ajoute 8 nouvelles faces externes. l'aire est donc augmentée de 6 cm^2. En appliquant la première méthode indiquée dans la synthèse, on arrive à la formule

$$a = 10 + 6(n - 1) \text{ (n est un naturel non nul),}$$

dans laquelle a représente l'aire et n le numéro d'ordre. La deuxième méthode conduit plus directement à la formule

$$a = 6n + 4 \text{ (n est un naturel non nul).}$$

Échos des classes

Ces activités ont été expérimentées de nombreuses fois dans différentes classes de première et de deuxième années du secondaire. Pour les élèves de première, la construction de tableaux ne soulève aucune difficulté et la plupart du temps, ils arrivent d'eux-mêmes à déterminer le nombre de cubes d'un rang quelconque. Ce qui fait problème, c'est la transposition de ces calculs dans le symbolisme algébrique. Ils n'y arrivent seuls que s'ils ont déjà été confrontés à des situations dans lesquelles ils ont manipulé de telles expressions. On ne s'attendra donc pas à ce qu'ils maîtrisent tout à fait cette compétence après cette seule activité.

La construction de graphiques de cette sorte fait franchir une étape : les graphiques demandés ne montrent pas une relation entre deux grandeurs, mais une relation entre un numéro d'ordre et une grandeur (un nombre de cubes, c'est un volume). Les élèves ont de la peine à considérer le numéro d'ordre comme une variable.

Les élèves de deuxième année résolvent les mêmes questions avec plus d'autonomie.

4 Points alignés et calcul avec les entiers

Préambule

Cette section parcourt toutes les règles de calcul avec des entiers dans un même contexte : celui d'ensembles de points alignés, situés dans un repère cartésien. À chaque étape, nous montrons en quoi les règles de calcul sont nécessaires pour assurer que des points qui vérifient une formule du premier degré, demeurent alignés lorsque leurs abscisses deviennent négatives. Ces activités peuvent être proposées à des élèves de niveaux différents.

Une grande partie des activités s'adresse aux élèves de première année qui découvrent le calcul avec des entiers. Le contexte est certes assez abstrait (il est constitué de points dans un repère), mais les élèves sont mis devant des configurations simples et les tâches sont agencées dans une progression assez lente.

Dans ce cas le professeur doit orienter les élèves dans l'observation de régularités numériques et géométriques ainsi que sur la mise en relation de ces deux types de régularités. Vers 13 ans, les élèves sont capables de *décrire* ce type de phénomème, ils peuvent en tirer des *trucs* qui leur permettent de s'en tirer dans des situations analogues. Mais le plus souvent, ils ne savent pas formuler les raisons qui lient leurs observations et leurs *trucs*. Cette phase du travail est prise en charge par le professeur. Il s'agit alors, pour les élèves d'une *initiation* à un mode de pensée et d'expression.

Chaque section doit être complétée par des exercices qui intègrent l'opération nouvellement apprise dans d'autres contextes et qui illustrent les règles au départ d'autres images mentales. La dernière section peut se situer bien plus loin dans l'année scolaire, voire l'année suivante.

Toutes les sections de ce chapitre ne doivent pas être enseignées d'une traite, le calcul avec des entiers est un seuil dans la formation, qui mérite qu'on veille soigneusement à ce que chaque étape soit significative pour les élèves et que ceux-ci dépassent la seule pratique du calcul pour s'approprier les *raisons* de ces règles.

Pour faciliter la distinction entre nombre négatif et nombre soustrait, distinction essentielle pour saisir la construction des opérations avec les entiers, nous avons adopté la notation qui consiste à placer le signe moins au-dessus du nombre lorsqu'il est négatif. Il ne faut y voir qu'une facilité d'écriture pour les plus jeunes. Cette distinction peut aussi bien être signifiée par des parenthèses qui encadrent le nombre négatif.

Dans cette approche, le calcul avec des entiers est introduit dans un contexte où il sert : celui de la géométrie analytique qui exhibe la cohérence globale de toutes les règles. C'est pourquoi, ces activités peuvent s'adresser, moyennant quelque adaptations et des raccourcis, à des élèves de troisième année. Ceux-ci découvriront, en même temps que les premières équations de droites, des liens entre les raisons qui font que des points s'alignent sur un graphique et les règles de signes qu'ils ont apprises précédemment.

De quoi s'agit-il ?

Les élèves caractérisent des ensembles de points alignés situés dans un repère, en termes de relations entre abscisses et ordonnées. Ils écrivent ces relations sous forme algébrique et ce faisant, ils construisent les lois de calcul dans l'ensemble des entiers.

Enjeux

Les lois de calcul dans l'ensemble des entiers et le lien entre ces lois et l'alignement pour des points qui vérifent $y = ax + b$. L'extension des tableaux de proportionnalité aux nombres négatifs. Voir aussi le chapitre 16 section 6.

Compétences

Les compétences socles visées par ces activités sont :

Interpréter un graphique, un tableau, un diagramme.

Classer, situer, ordonner, comparer des entiers.

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Construire des expressions littérales dans lesquelles les lettres ont le statut de variables.

Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

Utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.

Les activités et les questions s'enchaînent de façon à développer des compétences transversales, notamment celles qui suivent.

Reconnaître des situations comme semblables ou dissemblables.

Se poser des questions pour étendre une propriété, une règle, une démarche.

Se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes.

Procéder à des variations pour en analyser les effets sur le résultat et dégager la permanence de liens logiques.

De quoi a-t-on besoin ?

Les fiches de travail 34 à 41 proposées en annexe aux pages 189 à 196.

Prérequis

Situer un point de coordonnées positives dans un repère orthonormé.

Représenter graphiquement des fonctions de proportionnalité et des fonctions du premier degré dans lesquelles variable et fonction ne prennent que des valeurs positives.

Repérer un entier sur une droite munie d'un repère.

Repérer et écrire l'opposé d'un entier (un nombre et son opposé sont situés à même distance de l'origine choisie sur la droite, de part et d'autre de cette origine). Ordre dans l'ensemble des entiers.

4.1 Ensembles de points, couples de nombres

Comment s'y prendre ?

Fiche 34
Les questions ci-dessous se rapportent aux ensembles montrés par les figures 38 et 39. Ces ensembles s'étendent implicitement au-delà de ce que montrent les dessins.

1. Les points donnés par les couples

   (8,9) ; (25,15) ; (13,36) ; (27,37) ;
   (10,10) ; (100,13) ; (120,19) ; (119,73) ;
   (45,20) ; (45,62) ; (17,105) ; (17,106) ;

   sont-ils représentés dans la figure 38 par une croix, un point noir ou un point blanc ?
2. Même question pour les mêmes couples, à propos cette fois de la figure 39.

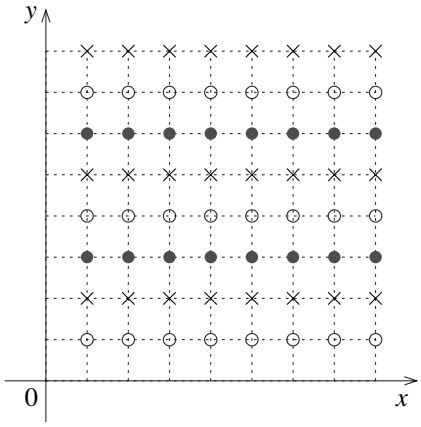


Fig. 38

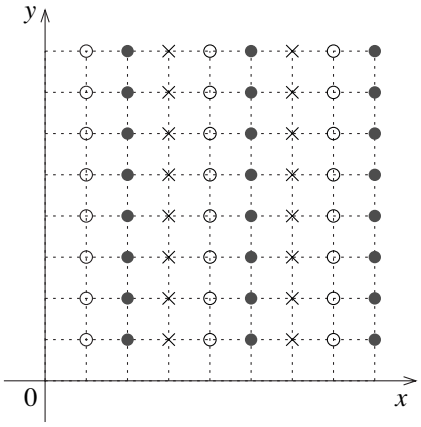


Fig. 39

Les élèves écrivent une liste de couples pour chaque ensemble de points de la figure 38. Ils constatent alors que ceux qui sont alignés ont la même ordonnée, elle suffit donc pour caractériser chaque ensemble de points.

Ensuite, comme les coordonnées sont trop grandes et qu'ils ne peuvent situer les points sur la figure elle-même, ils réalisent qu'il suffit de savoir si l'ordonnée est un multiple de 3, un multiple de 3 plus 1 ou un multiple de 3 moins 1 (ou plus 2).

Dans la deuxième figure, les rôles respectifs de l'abscisse et de l'ordonnée sont échangés.

Fiche 35

Les questions ci-dessous se rapportent aux ensembles montrés par les figures 40 et 41. Chacun de ces ensembles s'étendent seulement dans une seule direction, celle de la droite qui porte les points.

1. Les points donnés par les couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs de la figure 40 ?

   (7,8) ; (8,8) ; (8,7) ; (9,8) ; (9,10) ;
   (25,24) ; (30,30) ; (30,29) ; (41,40) ; (40,40).

   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

2. Même question à propos des couples ci-dessous, qui se rapportent à la figure 41.

   (7,14) ; (7,15) ; (7,13) ; (8,17) ; (8,15) ;
   (20,50) ; (25,49) ; (30,61) ; (29,60) ; (29,59).

   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

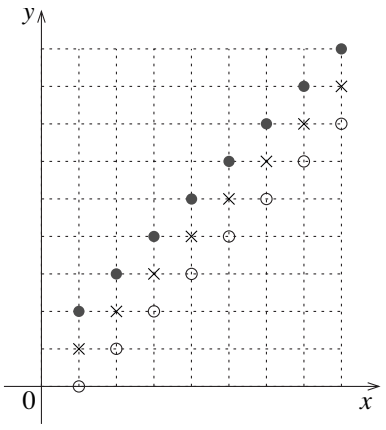


Fig. 40

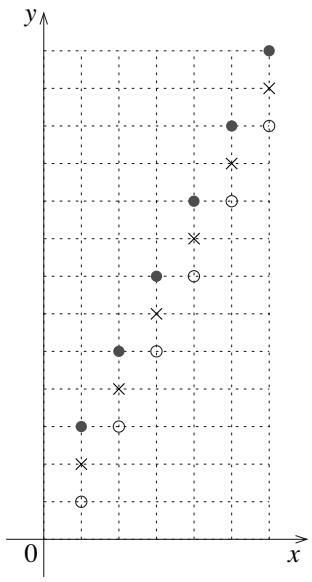


Fig. 41

Une relation entre abscisse et ordonnée caractérise chaque fois des points alignés. Après que les élèves aient énoncé cette relation dans le langage courant, le professeur introduit la notation algébrique.

Les points alignés avec les croix de la question 1 ont leur abscisse égale à leur ordonnée. À cet ensemble de points correspond la formule

$$y = x.$$

Ensuite, l'ordonnée de chaque point noir vaut chaque fois une unité de plus que son abscisse ; on écrit la formule

$$y = x + 1.$$

Enfin, l'ordonnée de chaque point blanc vaut chaque fois une unité de moins que l'abscisse ; on écrit la formule

$$y = x - 1.$$

Dans ces trois formules, x et y sont des nombres naturels non nuls.

Trois autres formules caractérisent respectivement les ensembles de la figure 41, à savoir

$$y = 2x\,, \quad y = 2x + 1\,, \quad y = 2x - 1,$$

les lettres x et y représentant des nombres naturels non nuls.

4.2 Points à coordonnées entières

Comment s'y prendre ?

Fiche 36
Les points qui correspondent aux coordonnées ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ? Envisager successivement les figures 42, 43 et 44.

$$(\overline{3}, 2)\ ;\ (2, \overline{3})\ ;\ (\overline{3}, \overline{3})\ ;\ (\overline{3}, 3)\ ;$$

$$(3, \overline{3})\ ;\ (3, \overline{2})\ ;\ (\overline{3}, \overline{4});\ (\overline{3}, \overline{2}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

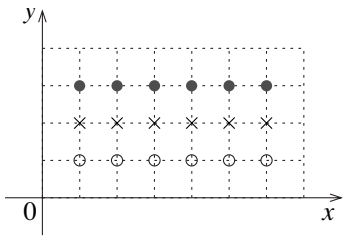


Fig. 42

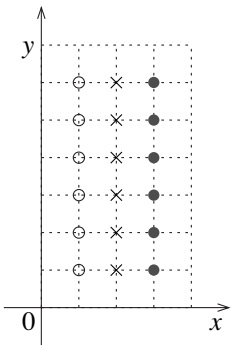


Fig. 43

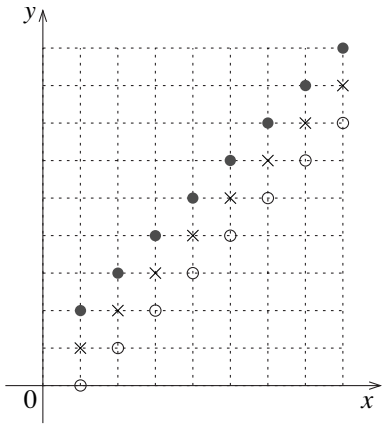


Fig. 44

Comme les coordonnées proposées sont des nombres petits, les élèves vérifient l'alignement en plaçant les points sur le graphique. Ils s'entraînent ainsi à situer des points dans les quatre quadrants.

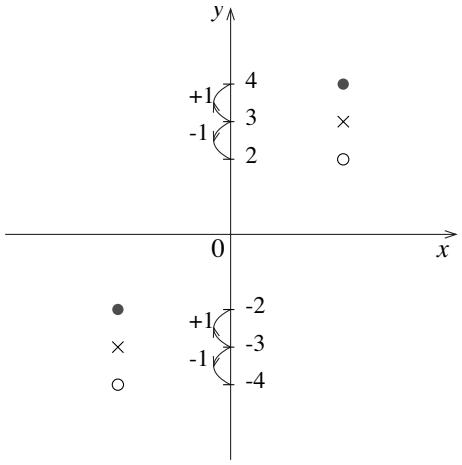
La caractérisation des points alignés dans les figures 42 et 43 se présente de la même façon pour les points à coordonnées négatives que pour les autres : elle n'engage à chaque fois qu'une seule coordonnée. Les élèves écrivent les six équations

$$y = 1\,; \quad y = 2\,; \quad y = 3\,; \quad x = 1\,; \quad x = 3\,; \quad x = 1.$$

Dans ces six équations x et y sont des nombres entiers.

Lorsqu'ils situent des points qui se rapportent à la figure 44, ils réalisent que les nouveaux points qui s'alignent avec les croix ont toujours la même caractéristique : l'abscisse et l'ordonnée sont égales.

En caractérisant les points noirs et les points blancs qui appartiennent à la figure 44, les élèves les situent par rapport aux croix. Ceci conduit le professeur à leur montrer à partir de *mouvements* sur un axe orienté, comment ajouter ou retrancher 1 à un entier.



À ces mouvements correspondent les calculs

$$\begin{aligned} 3+1 &= 4,\\ 3-1 &= 2,\\ \overline{3}+1 &= \overline{2},\\ \overline{3}-1 &= \overline{4}. \end{aligned}$$

Fig. 45

Nous retiendrons que

sur l'axe vertical, lorsqu'on ajoute 1, on monte et lorsqu'on retranche 1, on descend.

On écrit ensuite les trois équations qui caractérisent ces ensembles de points, à savoir

$$y = x\,; \qquad y = x + 1\,; \qquad y = x - 1.$$

Lorsqu'on attire l'attention des élèves sur les nombres que les lettres représentent, il faut envisager les points d'abscisse nulle. Ils noteront ensuite que les lettres x et y représentent des entiers.

Le professeur propose alors une série d'exercices qui fixent, puis étendent ces premiers acquis. Par exemple, repérer la température indiquée par un thermomètre, imaginer qu'elle monte d'un degré, puis de deux, de trois degrés ; repartir de la même valeur et imaginer qu'elle descende, écrire les additions et les soustractions correspondantes. Partir ensuite d'une température négative. On pratique des exercices analogues de mouvements en avant et en arrière, sur un axe horizontal.

Premier bilan de ce que les élèves savent faire : ajouter et retrancher un nombre *positif* à un entier quelconque.

Cela introduit la suite : il faut apprendre à ajouter, puis à retrancher, un *entier quelconque* à un entier quelconque.

4.3 Alignement et addition d'entiers

Comment s'y prendre ?

Fiche 37
Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = 3 + x.$$

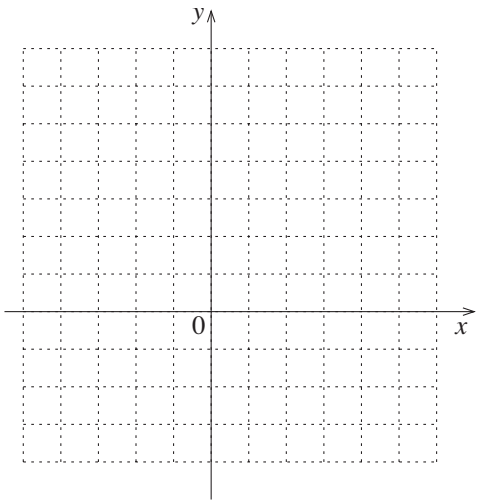


Fig. 46

Les élèves commencent par les additions qui leur sont familières ; ils complètent donc le tableau en partant de valeurs positives de x.

Comme il s'agit ensuite de situer des points d'abscisse négative, le professeur suggère de placer les couples dans un tableau ordonné par valeurs décroissantes de x. C'est le tableau montré dans la marge. Les élèves placent les points correspondants sur le graphique.

x	y
3	6
2	5
1	4
0	3

Le professeur demande alors de *lire* l'ordonnée du point d'abscisse $\overline{1}$ qui s'aligne avec les autres points, puis l'ordonnée du point d'abscisse $\overline{2}$ et ainsi de suite. On complète ainsi le tableau sans faire aucun calcul. Le professeur pose alors la question suivante.

Quelle est la règle d'addition qui fournit de tels résultats ?

Pour aider les élèves à y voir clair, le professeur place en regard du tableau, la colonne d'additions suivante.

x	y	$3+x=y$
3	6	$3+3=6$
2	5	$3+2=5$
1	4	$3+1=4$
0	3	$3+0=3$
$\overline{1}$	2	$3+\overline{1}=2$
$\overline{2}$	1	$3+\overline{2}=1$
$\overline{3}$	0	$3+\overline{3}=0$
$\overline{4}$	$\overline{1}$	$3+\overline{4}=\overline{1}$
$\overline{5}$	$\overline{2}$	$3+\overline{5}=\overline{2}$

Observons ce tableau : dans la première colonne les nombres se succèdent comme sur un thermomètre, ils diminuent chaque fois d'une unité. En parallèle, dans les autres colonnes, la somme $3+x$ diminue aussi. On note que ce principe persiste lorsque x est négatif.

Attardons-nous à la deuxième partie de la troisième colonne, qui montre ce que nous cherchions : une série d'additions dans lesquelles il s'agit d'ajouter un nombre négatif.
Les résultats de ces additions indiquent que cela revient à retrancher un positif, ce que nous savions déjà faire. Ceci est illustré par les exemples ci-contre.

$$\begin{aligned} 3+\overline{1} &= 2, \\ 3-1 &= 2, \\ 3+\overline{2} &= 1, \\ 3-2 &= 1, \\ \overline{3}+\overline{1} &= \overline{4}, \\ \overline{3}-1 &= \overline{4}. \end{aligned}$$

Le bilan est complété par l'énoncé qui suit.

Ajouter un négatif et retrancher le positif opposé, cela revient au même.

4.4 Alignement et soustraction d'entiers

Comment s'y prendre ?

Fiche 38
Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = 6 - x.$$

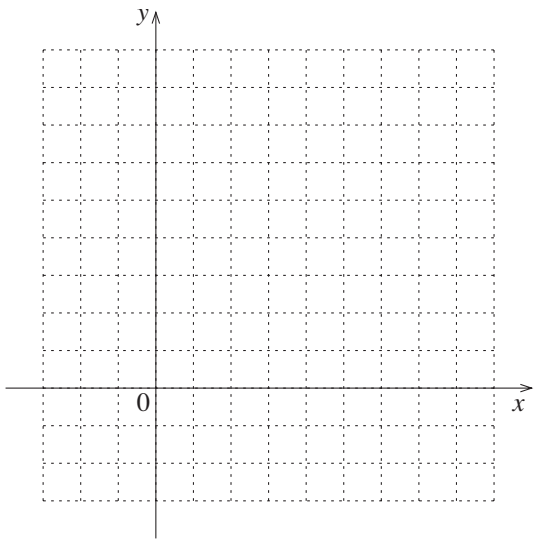


Fig. 47

x	y
5	1
4	2
3	3
2	4
1	5
0	6

Les élèves commencent par les soustractions qui leur sont familières : celles dans lesquelles le nombre à retrancher est un positif, plus petit que le premier terme. Au fur et à mesure qu'ils découvrent des points par calcul, ils les placent sur le graphique et le professeur complète un tableau ordonné par valeurs décroissantes de x.

Le professeur demande ensuite de repérer sur le graphique, le point d'abscisse $\overline{1}$ qui s'aligne avec les autres ; puis les points d'abscisse $\overline{2}$, $\overline{3}$, ... Les couples correspondants sont reportés dans le tableau.

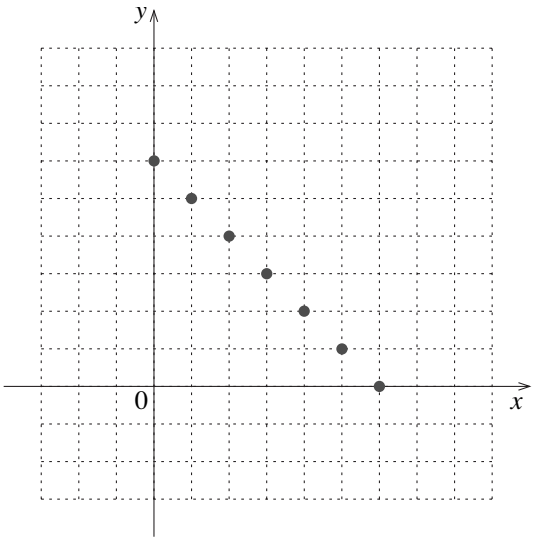


Fig. 48

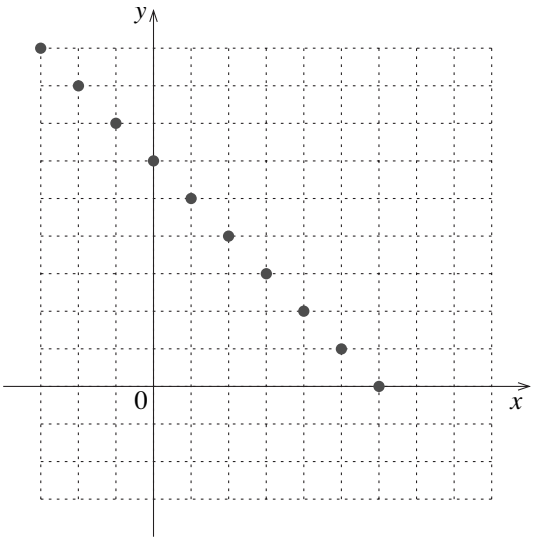


Fig. 49

On enchaîne avec la question :

> Quelle est la règle de soustraction qui correspond à ce graphique et à ce tableau de nombres ?

Voici les soustractions qui montrent la correspondance entre la formule et les couples de nombres.

x	$6 - x = y$
5	$6 - 5 = 1$
4	$6 - 4 = 2$
3	$6 - 3 = 3$
2	$6 - 2 = 4$
1	$6 - 1 = 5$
0	$6 - 0 = 6$
$\overline{1}$	$6 - \overline{1} = 7$
$\overline{2}$	$6 - \overline{2} = 8$
$\overline{3}$	$6 - \overline{3} = 9$

L'analyse de la colonne de soustractions montre la permanence d'un principe : *plus le nombre que l'on enlève diminue, plus le résultat devient grand.*
Les résultats des trois dernières soustractions montrent que *retrancher un négatif revient à ajouter un positif* ! Ainsi,

$$\begin{aligned} 6 - \overline{1} &= 7 \\ 6 + 1 &= 7, \\ 6 - \overline{3} &= 9, \\ 6 + 3 &= 9. \end{aligned}$$

On conclut avec l'énoncé qui suit.

Retrancher un nombre revient à ajouter l'opposé de ce nombre.

Fiche 39

1. Qu'est-ce qui caractérise chacun des trois ensembles de points alignés de la figure 50 ?
2. Quel est le point d'abscisse 1 qui est aligné avec les croix, avec les points blancs, avec les points noirs ?
3. Même question pour les points d'abscisse 3 et d'abscisse 7.
4. Dresser les tableaux de nombres qui correspondent au graphique tel qu'il a été complété.

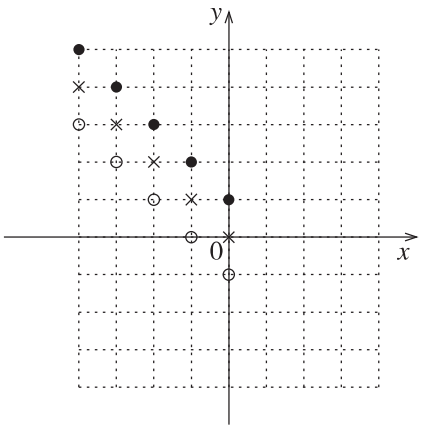


Fig. 50

1. Chacune des croix de la figure 50 est située à égale distance de l'axe des x et de l'axe des y. Les abscisses de tous ces points sont négatives, les ordonnées sont positives. Déterminer l'ordonnée d'une croix revient donc à prendre l'opposé de son abscisse.

   Pour trouver l'ordonnée d'un point noir, il faut ajouter 1 après avoir pris l'opposé de l'abscisse.

   Pour trouver l'ordonnée d'un point blanc, il faut retrancher 1 après avoir pris l'opposé de l'abscisse.

   Avant d'écrire les équations qui caractérisent ces ensembles de points, le professeur explique comment noter l'opération qui consiste à prendre l'opposé d'un nombre : puisque retrancher un nombre revient à ajouter son opposé, on considère que prendre l'opposé d'un nombre c'est comme *soustraire* ce nombre. Ainsi, l'opération « prendre l'opposé » se traduit-elle par le symbole « $-$ », placé devant le nombre.

   Par exemple, l'opposé de 3 est noté -3, l'opposé de $\overline{3}$ est noté $-\overline{3}$ et l'opposé de x, qui peut être aussi bien négatif que positif, est noté $-x$. Les trois ensembles de points sont décrits par les équations

   $$y = -x\,, \qquad y = -x + 1\,, \qquad y = -x - 1.$$

2. Le point d'abscisse 1 aligné avec les croix a comme ordonnée $\overline{1}$ (voir figure 51). Ici aussi, il suffit de changer le signe de l'abscisse pour déterminer l'ordonnée.

Le point d'abscisse 1 aligné avec les points noirs a comme ordonnée 0. La règle de calcul est la même que celle utilisée avec les autres points noirs.

Le point d'abscisse 1 aligné avec les points blancs a comme ordonnée $\overline{2}$. La règle de calcul est la même que celle des autres points blancs.

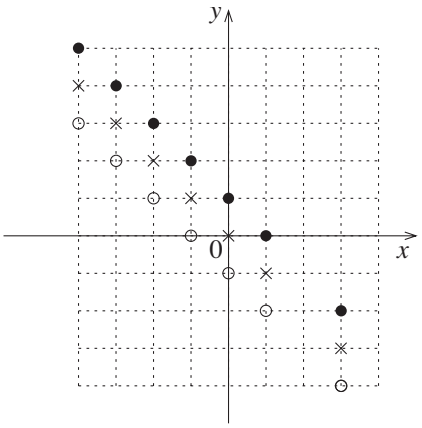


Fig. 51

3. On tire des conclusions analogues après avoir repéré les trois points dont l'abscisse est 3, puis ceux dont l'abscisse est 7.
4. Les tableaux mettent en relation le graphique et les équations. Le professeur incite les élèves à écrire dans la troisième colonne, les opérations qui montrent ces relations. Les réponses confirment ce qui a été abordé à partir de mouvements à la fiche 36.

x	y	$y=-x$
$\overline{4}$	4	$-\overline{4}$
$\overline{3}$	3	$-\overline{3}$
$\overline{2}$	2	$-\overline{2}$
$\overline{1}$	1	$-\overline{1}$
0	0	0
1	$\overline{1}$	-1
3	$\overline{3}$	-3
7	$\overline{7}$	-7

x	y	$y=-x+1$
$\overline{4}$	5	$-\overline{4}+1=4+1$
$\overline{3}$	4	$-\overline{3}+1=3+1$
$\overline{2}$	3	$-\overline{2}+1=2+1$
$\overline{1}$	2	$-\overline{1}+1=1+1$
0	1	$0+1$
1	0	$-1+1=\overline{1}+1$
3	$\overline{2}$	$-3+1=\overline{3}+1$
7	$\overline{6}$	$-7+1=\overline{7}+1$

x	y	$y=-x-1$
$\overline{4}$	3	$-\overline{4}-1=4-1$
$\overline{3}$	2	$-\overline{3}-1=3-1$
$\overline{2}$	1	$-\overline{2}-1=2-1$
$\overline{1}$	0	$-\overline{1}-1=1-1$
0	$\overline{1}$	$0-1$
1	$\overline{2}$	$-1-1=\overline{1}+\overline{1}$
3	$\overline{2}$	$-3-1=\overline{3}+\overline{1}$
7	$\overline{8}$	$-7-1=\overline{7}+\overline{1}$

Le professeur rassemble à présent les différentes significations du signe « $-$ » et introduit les simplifications d'écriture habituelles. Ainsi « -3 » peut représenter le nombre négatif « -3 » ou signifier dans d'autres contextes

- retrancher 3,
- prendre l'opposé de 3.

Les simplifications d'écriture consistent à remplacer les soustractions par des additions, à supprimer les signes d'addition et à placer le signe du

nombre devant. L'expression obtenue est souvent appelée « somme algébrique ». On l'effectue en considérant le signe qui précède chaque nombre comme étant le signe du nombre et en appliquant les règles d'addition. Exemple :

$$7 - \overline{5} + \overline{3} - 4 = 7 + 5 + \overline{3} + \overline{4} = 7 + 5 - 3 - 4$$

4.5 Alignement et multiplication par un entier

Comment s'y prendre ?

Fiche 40
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?

$$(0,0)\ ;\ (0,\overline{2})\ ;\ (\overline{1},2)\ ;\ (\overline{1},\overline{2})\ ;$$
$$(\overline{2},4)\ ;\ (\overline{2},\overline{4})\ ;\ (\overline{3},6)\ ;\ (\overline{3},\overline{6})\ ;$$
$$(3,7)\ ;\ (\overline{3},\overline{7})\ ;\ (\overline{3},7)\ ;\ (3,\overline{7}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

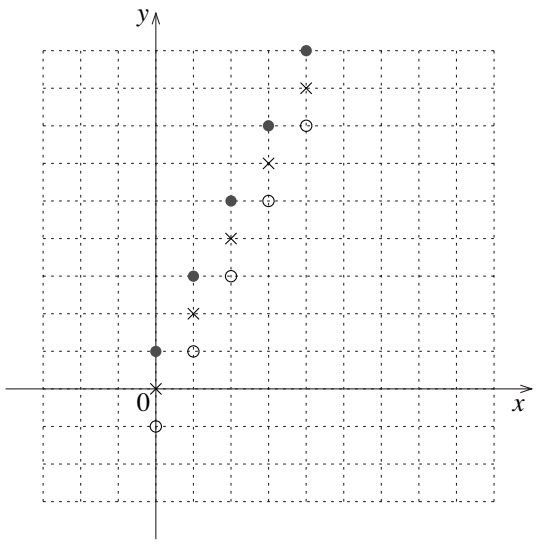


Fig. 52

x	y
4	8
3	6
2	4
1	2
0	0
$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{6}$

Les élèves vérifient l'alignement en plaçant, un à un, les points sur le graphique. Pour écrire la formule, ils cherchent une relation entre abscisse et ordonnée. Cette recherche est plus facile lorsqu'on rassemble dans un tableau ordonné, tous les couples visibles sur le graphique.

Les quatre premiers couples évoquent la table de multiplication par 2, mais est-ce la même opération qui envoie $\overline{1}$ sur $\overline{2}$, $\overline{2}$ sur $\overline{4}$ et $\overline{3}$ sur $\overline{6}$?

Oui, si l'on considère la multiplication par un entier positif comme une addition itérée et qu'on calcule :

$$\overline{1} + \overline{1},$$

$$\overline{2} + \overline{2},$$

$$\overline{3} + \overline{3}.$$

On retrouve les résultats du tableau.

L'équation est donc

$$y = 2x.$$

La règle de la multiplication par un entier positif s'ensuit très naturellement :

Lorsqu'on multiplie un nombre par un entier positif, le produit a le même signe que ce nombre.

La recherche des équations relatives aux deux autres ensembles de points consiste à traduire dans une même expression algébrique l'enchaînement de deux opérations : doubler puis ajouter 1, ou doubler puis retrancher 1.

Fiche 41
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils alignés avec une suite de points noirs ?

$$(1, 2)\ ;\ (1, \overline{2})\ ;\ (\overline{1}, \overline{2})\ ;\ (\overline{5}, 10)$$

$$(3, 6)\ ;\ (3, \overline{6})\ ;\ (\overline{3}, \overline{6})\ ;\ (\overline{7}, 14)$$

$$(100, 200)\ ;\ (100, \overline{200})\ ;\ (\overline{100}, \overline{200})\ ;\ (\overline{100}, 200).$$

Comment caractériser les points alignés ?

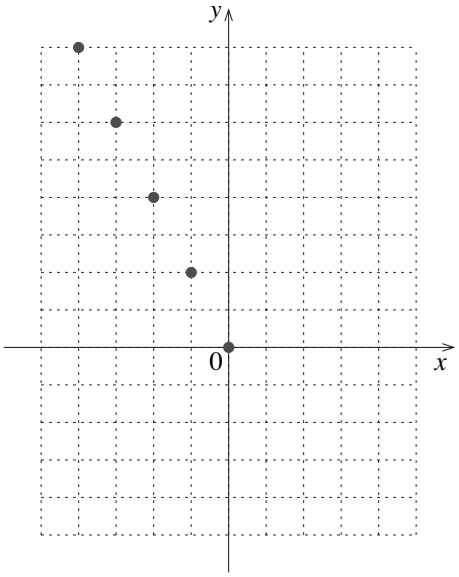


Fig. 53

Les couples représentés sur le graphique ont cette fois une abscisse négative. Ainsi, la fiche n'induit-t-elle pas la construction d'un tableau partant d'opérations sur des positifs qui conduisent, via les régularités de calcul, à des abscisses négatives. Ici, ce qui est mis en avant, c'est l'alignement des points. Le travail est donc amorcé par l'observation du graphique. Pour des élèves plus jeunes, il est évidemment plus facile d'aborder la question au départ d'un graphique qui montre des points d'abscisse positive et qui

x	y
3	$\overline{6}$
2	$\overline{4}$
1	$\overline{2}$
0	0
$\overline{1}$	2
$\overline{2}$	4
$\overline{3}$	6

conduit à un tableau dont on observe les régularités (voir le tableau situé dans la marge) .

Les élèves plus âgés recourent donc au graphique pour traiter les sept ou huit premiers couples. Ils observent que seuls ceux dont l'abscisse et l'ordonnée sont de signes différents s'alignent avec les autres. Ils en concluent que pour déterminer l'ordonnée, il faut doubler l'abscisse, puis prendre l'opposé de ce produit. Ils font parfois ces deux opérations dans l'ordre inverse et s'aperçoivent que cela revient au même. Ceci leur permet de répondre à la question pour les derniers couples qu'ils n'ont pu situer dans le repère.

Le professeur intervient ici pour introduire une définition de la multiplication par $\overline{2}$: elle combine ces deux opérations.

L'équation est donc

$$y = \overline{2}x.$$

Pour mieux réaliser les effets de cette opération, on construit en parallèle un tableau de nombres, une liste d'opérations et un graphique. Les couples sont ordonnés par valeurs croissantes de x.

x	y	$\overline{2}x = y$
$\overline{3}$	6	$\overline{2} \times \overline{3} = 6$
$\overline{2}$	4	$\overline{2} \times \overline{2} = 4$
$\overline{1}$	2	$\overline{2} \times \overline{1} = 2$
0	0	$\overline{2} \times 0 = 0$
1	$\overline{1}$	$\overline{2} \times 1 = \overline{2}$
2	$\overline{2}$	$\overline{2} \times 2 = \overline{4}$
3	$\overline{3}$	$\overline{2} \times 3 = \overline{6}$

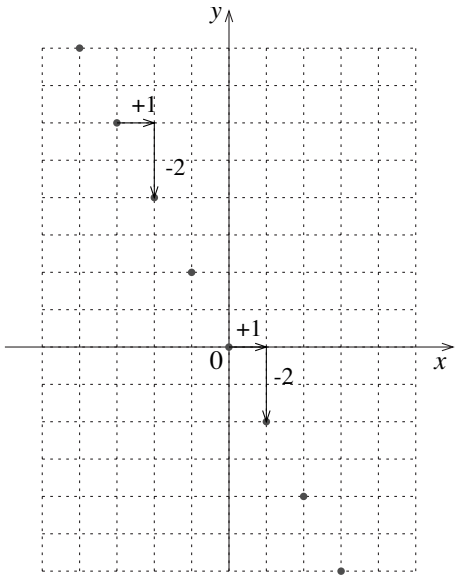


Fig. 54

Les flèches qui figurent sur ce graphique attirent l'attention sur les variations : chaque fois que le multiplicateur augmente d'une unité, le produit diminue de deux unités.

Synthèse

La synthèse est réalisée par les élèves avec l'aide du professeur qui donne la consigne qui suit.

Parmi les multiplications qui ont été amenées par les fiches 40 et 41, constituer un échantillon qui comporte tous les cas qui peuvent se présenter lorsqu'on multiplie deux entiers.
Conjecturer les règles de multiplication et vérifier si elles s'appliquent aux autres produits que l'on peut « voir » sur les différents graphiques.

Voici quatre multiplications :

$$2 \times 3 = 6\,, \quad \overline{2} \times \overline{3} = 6\,, \quad \overline{2} \times 3 = \overline{6}\,, \quad 2 \times \overline{3} = \overline{6}.$$

Les élèves distinguent assez facilement deux cas : soit les deux nombres ont même signe, soit ils ont des signes différents.

Dans le premier cas, le produit est positif ; dans le second, il est négatif. Toutes les vérifications graphiques confirment ces règles.

4.6 Règle des signes et proportionnalité

Comment s'y prendre ?

Cette activité suppose que les élèves connaissent les propriétés d'un tableau de proportionnalité et savent que dans toute proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

x	y
$\overline{3}$	6
$\overline{2}$	4
$\overline{1}$	2
0	0
1	$\overline{2}$
2	$\overline{4}$
3	$\overline{6}$

Le tableau qui correspond à $y = \overline{2}x$ est-il un tableau de proportionnalité ?

On part du tableau situé dans la marge. Pour vérifier l'égalité entre rapports internes, les élèves écrivent un rapport entre deux nombres de la première colonne et le rapport entre les nombres correspondants de la deuxième, par exemple

$$\frac{\overline{2}}{\overline{1}} \text{ et } \frac{4}{2}.$$

Pour obtenir que ces rapports soient égaux, il faut étendre aux entiers la propriété qui dit que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entraîne } ad = bc.$$

Après avoir vérifié de cette façon plusieurs égalités, on dispose de tous les éléments nécessaires pour conjecturer la règle des signes d'un quotient de deux entiers.

Pour déceler l'existence d'un rapport externe, il faut considérer les rapports entre un nombre d'une colonne et son correspondant dans l'autre et vérifier si ces rapports sont égaux. On vérifie par exemple que

$$\frac{\overline{1}}{2} = \frac{2}{\overline{4}}.$$

Examinons à présent la propriété de la somme en partant des couples $(\overline{2}, 4)$ et $(1, \overline{2})$. À la somme de deux termes de la première colonne, correspond bien la somme des termes correspondants. En effet, le couple $(\overline{2} + 1, 4 + \overline{2})$ est bien un couple du tableau.

6

Proportionnalité et non-proportionnalité en géométrie

1 Quand un triangle rencontre un carré

De quoi s'agit-il ?

Étudier des tableaux de nombres et les graphiques associés à ces tableaux à partir de situations simples basées sur les périmètres de polygones. Établir les formules associées aux tableaux de nombres. Établir les graphiques correspondants.

Enjeux

Étudier, à partir des tableaux de nombres, la proportionnalité des coordonnées et celle des accroissements et la linéarité du graphique associé.

Contraster une fonction linéaire et une fonction affine. Voir le chapitre 16, section 6.4.

Associer proportionnalité des accroissements et alignement du graphique.

Prouver l'alignement des points du graphique d'une fonction linéaire ou d'une fonction affine. Voir le chapitre 16, section 5.3.

Déterminer l'intersection de deux graphiques de fonctions.

Compétences

Savoir, connaître et définir les expressions relatives aux fonctions.

Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Calculer l'ensemble des solutions d'une équation, d'un système d'équations linéaires.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Du papier, un crayon et une calculatrice.

Prérequis

Les cas de similitude des triangles.

Les propriétés des tableaux de proportionnalité.

Comment s'y prendre ?

Dessine un segment $[AB]$ de 10 cm de long. Sur ce segment, place un point X à 3 cm de A. Sur $[AX]$, construis un triangle équilatéral, sur $[BX]$ un carré. Calcule les périmètres de ces deux figures.

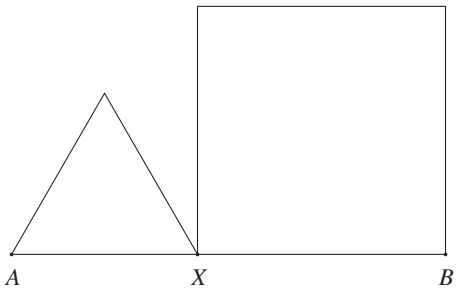


Fig. 1

Lorsque les élèves ont terminé pour $|AX| = 3$, on leur demande de faire varier la position du point X sur le segment $[AB]$ et de calculer les périmètres pour toutes les valeurs entières de $|AX|$ (de 0 à 10). On en arrive à élaborer le tableau suivant :

$\|AX\|$	$\|XB\|$	Périmètre triangle	Périmètre carré
0	10	0	40
1	9	3	36
2	8	6	32
3	7	9	28
4	6	12	24
5	5	15	20
6	4	18	16
7	3	21	12
8	2	24	8
9	1	27	4
10	0	30	0

Lorsque tous les calculs sont terminés pour des valeurs entières de $|AX|$, on observe les différents résultats. En comparant les deux colonnes de périmètres, on s'aperçoit que les valeurs du périmètre du triangle vont en croissant de 0 à 30 et que celles du carré vont en décroissant de 40 à 0. On peut alors poser la question qui suit.

Existe-t-il une valeur de $|AX|$ pour laquelle les périmètres du triangle et du carré sont égaux ?

L'intuition de continuité amènera sans doute les élèves à dire qu'il existe nécessairement une valeur pour laquelle ces deux résultats sont égaux et que cette égalité a lieu pour une valeur de $|AX|$ comprise entre 5 et 6. Pour la déterminer, certains proposent d'affiner les calculs au dixième, puis au centième près. Si l'estimation devient de plus en plus précise, le

résultat n'est toujours pas exact. Les calculs devenant fastidieux, certains élèves demandent s'il n'est pas possible de trouver ce résultat autrement. C'est le moment de les amener à mettre la situation en équation. S'ils ont été habitués à élaborer des formules à partir de tableaux de nombres, ils proposeront sans doute immédiatement d'appeler x le côté du triangle et une brève analyse de la deuxième colonne du tableau devrait amener $10-x$ pour le côté du carré. L'égalité des périmètres des deux figures se traduit finalement par l'équation

$$3x = 4(10 - x),$$

ce qui donne après résolution

$$x = \frac{40}{7}.$$

Le professeur pose ensuite cette question.

> Pourrait-on visualiser les résultats obtenus en représentant dans un repère les périmètres des deux figures en fonction de la longueur $|AX|$?

Les élèves commencent par placer les points correspondant au périmètre du triangle. À première vue, ils sont alignés. Comment cela se fait-il ? Pour répondre à cette question, on analyse le tableau de nombres correspondant.

accroissements des x	x côté du triangle	y périmètre	accroissements des y
	0	0	
+1			+3
	1	3	
+1			+3
	2	6	
+1			+3
	3	9	
+1			+3
	4	12	
...	...	...	...

On observe tout d'abord que l'on peut obtenir la colonne des y en multipliant la colonne des x par 3. Les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x. On peut donc associer à ce tableau de nombres la formule $y = 3x$. On remarque ensuite que chaque fois que x augmente de 1 unité, y augmente de 3 unités. Les accroissements des y sont proportionnels aux accroissements des x. On traduit alors cette dernière constatation sur le graphique : on se place en un point du graphique, on avance de 1 cm horizontalement et puis de 3 cm verticalement, on arrive bien ainsi au point suivant du graphique. On poursuit de proche en proche et on construit de cette façon ce que les élèves appellent spontanément un « escalier ». On retrouve une situation analogue à celle déjà traitée à la page 125.

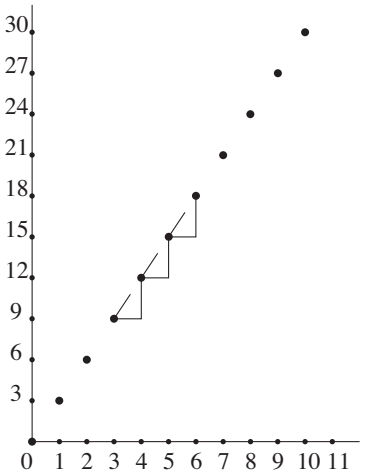


Fig. 2

L'image d'une « planche » posée sur un escalier suffira sans doute dans un premier temps pour convaincre les élèves que les points du graphique sont bien alignés comme le montre la figure 2. On peut dans un deuxième temps, si le niveau de la classe le permet, proposer une démonstration de cette propriété.

Comment justifier que les points du graphique sont alignés ?

Afin de rendre cette démonstration plus éclairante, nous raisonnerons sur un graphique légèrement faux au départ (voir figure 3).

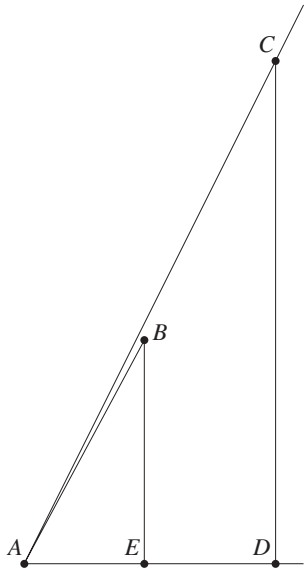


Fig. 3

Soient A, B et C trois points quelconques du graphique. Par B et C, menons les parallèles à l'axe OY. Par A, menons la parallèle à l'axe OX. Soient E et D les points d'intersection de cette droite avec les deux précédentes. Montrons que les triangles ABE et ACD sont semblables. Les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{AEB}$ ont la même amplitude car ce sont des angles droits. Si $(x_A, 3x_A)$, $(x_B, 3x_B)$, $(x_C, 3x_C)$ sont les coordonnées des points A, B, C, les segments $[CD]$, $[BE]$, $[AD]$ et $[AE]$ mesurent respectivement

$3(x_C - x_A)$, $3(x_B - x_A)$, $x_C - x_A$, $x_B - x_A$ unités de longueur.

On obtient ainsi

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A}.$$

Les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ADC}$ sont adjacents à des côtés correspondants proportionnels ; nous sommes donc en présence du cas de similitude : « deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. » Les triangles ABE et ACD sont donc semblables. Par conséquent, les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BAE}$ ont la même amplitude et les points A, B, C sont alignés. On fera alors remarquer que la figure sur la-

quelle on a raisonné n'est pas correcte. Un travail analogue se fait pour le périmètre du carré, ce qui nous donne le tableau suivant.

Accroissements des x	x côté	y périmètre	Accroissements des y
	0	40	
+1			-4
	1	36	
+1			-4
	2	32	
+1			-4
	3	28	
+1			-4
	4	24	
...	...	...	...

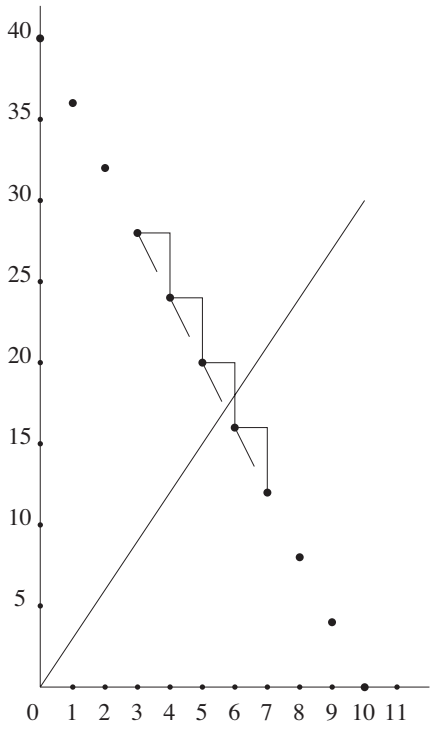


Fig. 4

Cette fois il n'est pas possible de trouver un facteur multiplicatif pour passer de la colonne des x à la colonne des y du tableau. On voit de cette façon que y n'est pas proportionnel à x. Mais les accroissements des y sont encore proportionnels aux accroissements des x et on obtient donc de nouveau un escalier régulier pour passer d'un point à l'autre du graphique. On fera toutefois remarquer que, dans ce cas, chaque fois que l'on avance de 1 unité horizontalement, on descend de 4 unités verticalement et que l'escalier est incliné dans l'autre sens. Il reste à noter que le graphique de cette fonction ne comprend pas le point (0,0). On peut de nouveau bien entendu démontrer l'alignement des points du graphique en recourant au même cas de similitude.

À partir de ces constatations, on peut élaborer une première synthèse.

Synthèse

Fonction	Tableau de nombres	Graphique
$y = 3x$	Les ordonnées sont proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
$y = 40 - 4x$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

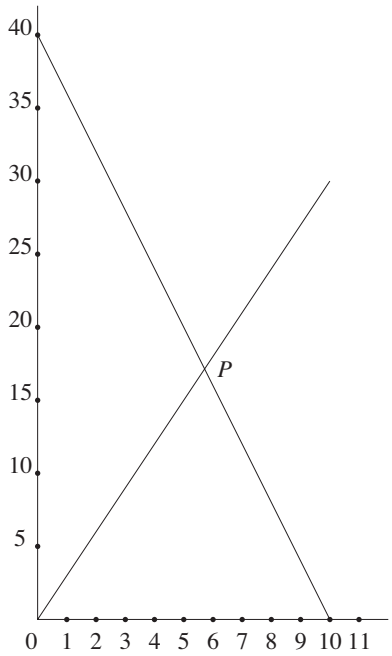


Fig. 5

Les deux fonctions sont donc représentées par deux droites. En affirmant cela, on conjecture que tous les nouveaux points qu'on pourrait calculer seraient eux aussi chaque fois sur la même droite. Il ne nous paraît pas nécessaire de nous appesantir sur ce fait, qui va de soi pour les élèves à ce niveau. Les deux droites se coupent en un point P. Il convient alors de faire réfléchir les élèves sur la signification de ce point d'intersection et de faire le lien avec l'équation $3x = 4(10 - x)$.

Échos des classes

Cette situation a été expérimentée dans deux classes de troisième technique de transition à option scientifique. Le niveau des élèves était faible dans la première classe et moyen dans la deuxième. Dans les deux classes, les élèves se sont pris au jeu de la recherche d'une valeur exacte pour l'égalité des périmètres. Certains ont poursuivi leur recherche jusqu'au dix-millième. Dans la première classe, le professeur a dû interrompre ces recherches et proposer lui-même d'algébriser ; dans la deuxième, les élèves ont demandé si le professeur n'avait pas un truc pour aller plus vite. Par contre, dans les deux classes, l'élaboration des formules a posé le problème du choix des inconnues. Si tous les élèves ont immédiatement posé $|AX| = x$, peu ont pensé à exprimer la longueur $|BX|$ en fonction de x. Comme un des

objectifs du professeur était l'élaboration d'équations à une inconnue, il a incité les élèves à exprimer les deux longueurs en fonction de la même variable. On pourrait envisager de les laisser introduire une deuxième variable y pour la longueur $|BX|$ et on obtiendrait alors un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x + y &= 10, \\ 3x &= 4y. \end{cases}$$

Il nous semble cependant que ce type de mise en équation est plus difficile conceptuellement. En effet, la première traduit non pas une question mais une donnée du problème et les élèves n'auront pas tendance à l'énoncer spontanément. De plus, ces situations-problèmes ont été testées en début d'année scolaire et il est difficile de confronter à ce moment les élèves à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Prolongements possibles

On peut envisager une activité dont le déroulement serait semblable à l'activité précédente, mais qui étudierait les aires des deux figures. On obtient alors deux équations du deuxième degré

$$A = (10 - x)^2,$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2.$$

L'élaboration du graphique de ces deux fonctions amène naturellement l'analyse du tableau de nombres associé à chacune d'elles et la découverte de leur caractère non linéaire. Nous avons choisi ici d'expliquer la propriété de non-linéarité à partir d'une autre situation.

2 Des rectangles de même périmètre

De quoi s'agit-il ?

Étudier des tableaux de nombres et les graphiques associés à ces tableaux à partir d'une situation faisant intervenir la base, la hauteur et l'aire de rectangles isopérimétriques[1]. Établir les formules correspondant aux tableaux de nombres. Établir les graphiques correspondants.

Enjeux

Contraster les tableaux de nombres et les graphiques associés à une fonction affine et une à fonction du deuxième degré. Associer proportionnalité des accroissements et alignement du graphique. Voir le chapitre 16, section 5.

Compétences

Savoir, connaître et définir les expressions relatives aux fonctions.

Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence.

[1] Pour plus de détails J. Bretton et al. [1991].

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Calculer la solution d'une équation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Du papier non tramé, un crayon, une calculatrice.

Comment s'y prendre ?

Dessiner quelques rectangles dont le périmètre mesure 30 cm.
Dans un repère orthonormé, dessiner les points qui ont pour abscisse la base des rectangles et pour ordonnée leur hauteur.
Comment ces points se disposent-ils les uns par rapport aux autres ?

Les élèves commencent par rechercher les dimensions des rectangles. Ils doivent pour cela répondre à la question « Comment calculer la hauteur d'un rectangle quand on connaît sa base ? ». Une simple transformation de la formule du périmètre du rectangle permet de répondre à cette question. On obtient successivement les équations

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot (x + y), \\ 30 &= 2x + 2y, \\ 2y &= 30 - 2x, \\ y &= \frac{30 - 2x}{2}, \\ y &= 15 - x. \end{aligned}$$

On aboutit à la construction du tableau suivant, où x désigne la base du rectangle et y sa hauteur.

x base du rectangle	y hauteur du rectangle
1	14
2	13
3	12
...	...
4,5	10,5
5	10
5,5	9,5
...	...
7,2	7,8
7,3	7,7
...	...
14	1
14,9	0,1

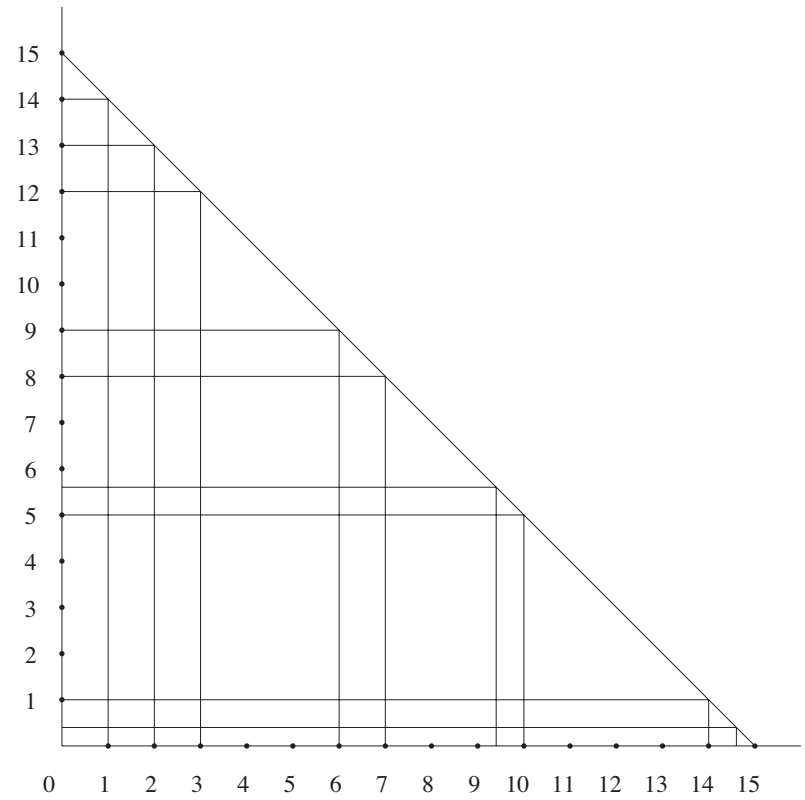


Fig. 6

Dans un repère orthonormé, le fait de dessiner les rectangles en portant en abscisse les bases et en ordonnée les hauteurs fait clairement apparaître l'alignement des sommets supérieurs droits. Cet alignement est-il lié au périmètre choisi ? Si nous modifions celui-ci, la conclusion sera-t-elle la même ? L'activité se poursuit en répétant la même procédure pour d'autres données et, force est de constater que les sommets supérieurs droits des rectangles s'alignent de nouveau. Pourquoi ?

Comment justifier que ces points sont alignés ?

L'analyse du tableau montre que la base et la hauteur ne sont pas proportionnelles. Pour conserver un périmètre constant, il faut ajouter à la hauteur ce que l'on enlève à la base ou réciproquement. On ne peut donc passer de l'une à l'autre grâce à un facteur multiplicatif. Par contre, les accroissements en x et en y sont proportionnels : on peut passer des premiers aux seconds en les multipliant par -1. Ceci est confirmé par le graphique : lorsqu'on se déplace d'une unité vers la droite sur l'axe des abscisses, on se déplace d'une unité vers le bas sur l'axe des ordonnées.

Accroissements des x	x Base	y Hauteur	Accroissements des y
	1	14	
+1			−1
	2	13	
+1			−1
	3	12	
	...	...	
	4,5	10,5	
+0,5			$-0,5$
	5	10	
+0,5			$-0,5$
	5,5	9,5	
	...	...	
	7,2	7,8	
+0,1			$-0,1$
	7,3	7,7	
	...	...	
	14	1	
+0,9			$-0,9$
	14,9	0,1	

En retournant à la synthèse de l'activité précédente, on peut conclure que cette fonction est du même type que $y = 40 - 4x$. Il est donc normal d'obtenir une droite qui ne passe pas par l'origine du repère ; en effet quand $x = 0$, $y \neq 0$.

On peut maintenant poser les questions suivantes.

Tous les rectangles ont-ils la même aire ?
Dans le cas contraire, comment peut-on décrire la situation ?
Quelles sont les dimensions du rectangle de 30 cm de périmètre ayant la plus grande aire possible ?

Les élèves ont manipulé beaucoup de tableaux de nombres au cours du premier degré de l'enseignement secondaire. Il est naturel d'y recourir encore et de compléter celui ci-dessous. Manifestement, les rectangles n'ont pas la même aire. Le tableau semble indiquer un effet de symétrie. On passe d'aires petites à des aires plus grandes pour revenir ensuite à des aires petites. Conjecturer qu'il existe un rectangle présentant une aire maximale est raisonnable et on peut même penser qu'il s'agit d'un carré dont le côté mesure entre 7 et 8 cm (les élèves annonceront probablement 7,5 cm spontanément). Dessiner la situation dans un repère orthonormé conduira à confirmer la conjecture.

On constate que le graphique prend cette fois l'allure d'une courbe (parabole) présentant un sommet correspondant à l'aire maximale, celle d'un carré de 7,5 cm de côté.

x Base	y Hauteur	$x \cdot y$ Aire
1	14	14
2	13	26
3	12	36
...	...	...
4,5	10,5	47,25
5	10	50
5,5	9,5	52,25
...	...	...
7,2	7,8	56,16
7,3	7,7	56,21
...	...	...
12	3	36
13	2	26
14	1	14
...	...	...
14,9	0,1	1,49

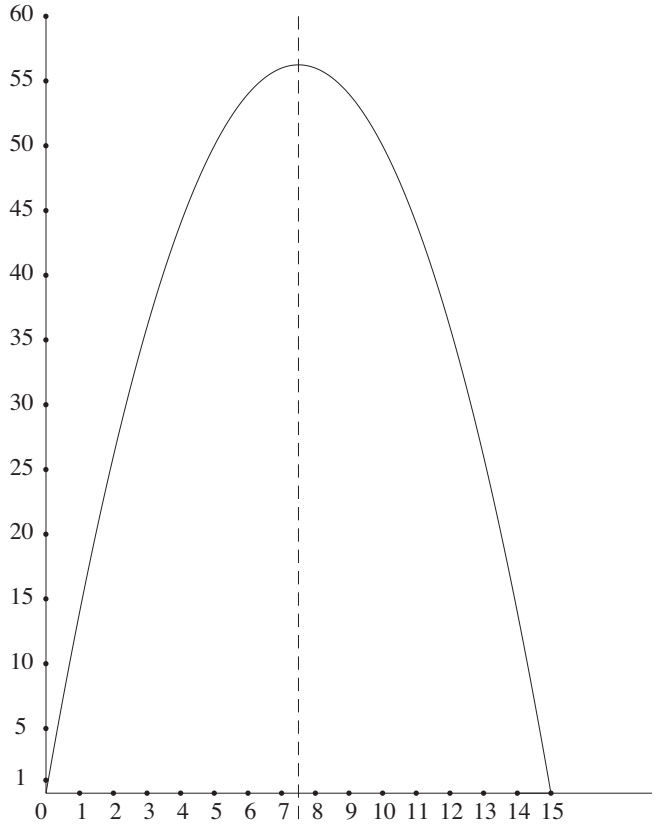


Fig. 7

Le graphique confirme l'effet de symétrie (deux points symétriques du graphique correspondent d'ailleurs à deux rectangles identiques, l'un « posé » sur sa longueur, l'autre sur sa largeur) ; il est d'ailleurs facile de dessiner l'axe de cette symétrie. Il comprend évidemment le point milieu du segment déterminé par les points (0 , 0) et (15 , 0) – extrémités de l'intervalle sur lequel le problème à un sens – c'est-à-dire le point (7,5 ; 0) où 7,5 est la mesure de la base et de la hauteur du rectangle (et c'est un carré !) de 30 cm de périmètre et de plus grande aire.

Quelle est l'équation de cette courbe ?

Chacun de ses points a pour abscisse la base d'un rectangle et pour ordonnée l'aire du même rectangle, donnée par l'équation $A = x \cdot (15 - x)$ ou $A = 15x - x^2$. Nous sommes maintenant en présence d'une fonction du deuxième degré.

Le tableau de nombres montre que les accroissements en x et les accroissements d'aire ne sont pas proportionnels. De même, la base et l'aire des rectangles ne le sont pas non plus.

Accroissements des x	x Base	$x \cdot y$ Aire	Accroissements des $x \cdot y$
	1	14	
+1			+12
	2	26	
+1			+10
	3	36	
	...	...	
	4,5	47,25	
+0,5			+2,75
	5	50	
+0,5			+2,25
	5,5	52,25	
	...	...	
	7,2	56,16	
+0,1			+0,05
	7,3	56,21	
	...	...	
	12	36	
+1			-10
	13	26	
+1			-12
	14	14	
+0,9			-12,51
	14,9	1,49	

Prolongements possibles

On peut démontrer assez facilement que l'aire du carré est bien l'aire maximale d'une famille de rectangles isopérimétriques. Si on appelle p le demi-périmètre du carré, $\frac{p}{2}$ est la mesure du côté du carré. Tout autre rectangle a comme dimensions $\frac{p}{2} - \alpha$ et $\frac{p}{2} + \alpha$ avec $\alpha > 0$. L'aire du rectangle devient donc

$$\left(\frac{p}{2} - \alpha\right)\left(\frac{p}{2} + \alpha\right),$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \alpha^2,$$

ce qui est toujours strictement inférieur à $(\frac{p}{2})^2$ qui représente l'aire du carré.

3 Des rectangles de même aire

De quoi s'agit-il ?

Étudier le tableau de nombres et le graphique associé à ce tableau à partir d'une situation basée sur les rectangles de même aire.

Enjeux

Établir le tableau de nombres, la formule et le graphique associés à la fonction $x \cdot y = k$ à partir de la situation géométrique des rectangles de même aire. Comparer avec les fonctions découvertes lors des activités précédentes.

Compétences

Savoir, connaître et définir les expressions relatives aux fonctions.

Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence.

Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité.

Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Calculer la solution d'une équation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Du papier, un crayon et une calculatrice.

Comment s'y prendre ?

Rechercher tous les rectangles dont l'aire vaut 24 cm^2. Dans un repère orthonormé, dessiner les points qui ont pour abscisse la mesure de la base des rectangles et pour ordonnée celle de leur hauteur. Comment ces points se disposent-ils les uns par rapport aux autres ?

Dans un premier temps, les élèves proposeront sans doute les rectangles dont les dimensions sont des nombres entiers. En suggérant certaines valeurs particulières pour la base, on les amènera à proposer des valeurs décimales ou fractionnaires et à élaborer la formule qui permet de calculer la hauteur en fonction de la base. On aboutit finalement à la construction d'un tableau du type suivant, où x désigne la base et y la hauteur. L'analyse du tableau permet de voir rapidement que la hauteur des rectangles n'est pas proportionnelle à leur base. Pour les accroissements, une brève observation du tableau reprenant les premières dimensions entières permet de conclure qu'il n'y a pas non plus proportionnalité.

x	y
1	24
2	12
3	8
4	6
5	4,8
6	4
7	$\frac{24}{7}$
...	...
10	2,4
11	$\frac{24}{11}$
...	...
24	1

Accroissements des x	x Base	y Hauteur	Accroissements des y
	1	24	
+1			−12
	2	12	
+1			−4
	3	8	
+1			−2
	4	6	
	...	...	

On peut maintenant demander aux élèves s'ils pensent que les points du graphique de cette fonction seront ou non alignés. La réalisation concrète du graphique dans un repère permettra de vérifier leurs conjectures. Pour donner une allure convenable à la courbe, il sera indispensable d'augmenter le nombre de valeurs pour x dans le tableau de nombres. Le professeur proposera éventuellement d'étendre le domaine de la fonction aux nombres négatifs afin d'obtenir le graphique complet de la fonction $y = \frac{24}{x}$. Il choisira également, en fonction du niveau de sa classe, de parler ou non d'hyperbole, d'asymptote, de domaine de définition, ...

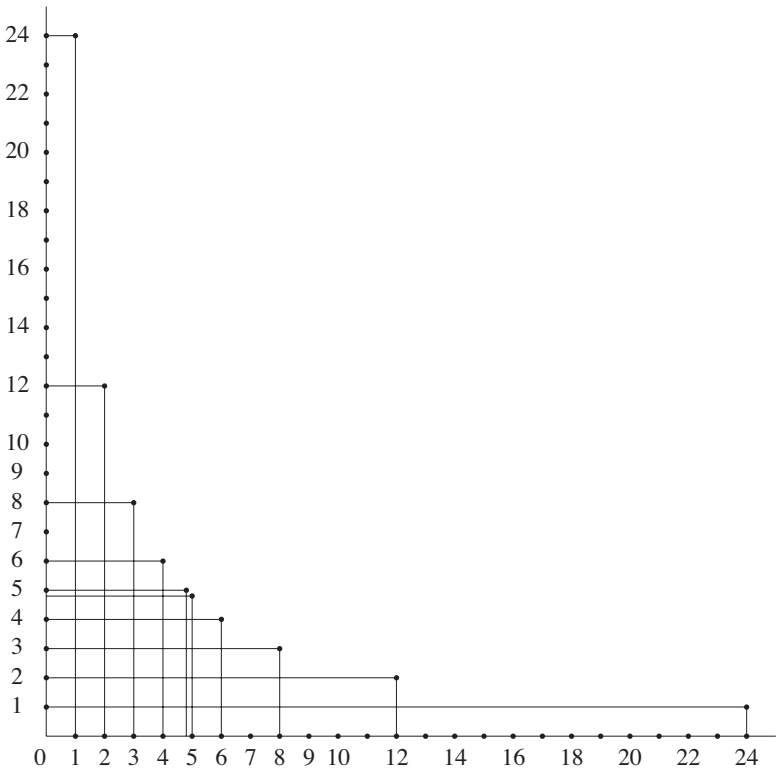


Fig. 8

Synthèse. – On peut proposer à ce moment de rassembler les différentes observations des trois activités afin de compléter le tableau de synthèse ébauché à la page 159.

Fonction	Tableau de nombres	Graphique
$y = 3x$	Les ordonnées sont proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.
$y = 40 - 4x$ $y = 15 - x$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements sont proportionnels.	Le graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.
$y = 15x - x^2$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements ne sont pas proportionnels.	Le graphique n'est pas une droite Il s'agit ici d'une parabole.
$y = \frac{k}{x}$	Les ordonnées ne sont pas proportionnelles aux abscisses. Les accroissements ne sont pas proportionnels.	Le graphique n'est pas une droite. Il s'agit ici d'une hyperbole.

4 De la perspective au théorème de Thalès

De quoi s'agit-il ?

Dessiner, en perspective parallèle, un cube dont les faces sont munies d'un quadrillage régulier.

Enjeux

Découvrir le théorème de Thalès par le biais du partage d'un segment par un réseau de parallèles équidistantes, dans le contexte du dessin en perspective.

Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences

Savoir, connaître, définir les théorèmes de la géométrie classique relatifs aux rapports de longueurs.

Choisir des propriétés, organiser une démarche en vue de déterminer des éléments d'une figure, dégager de nouvelles propriétés géométriques, résoudre des problèmes de construction.

Effectuer et interpréter des représentations planes de figures de l'espace en se fondant sur les propriétés de telles représentations.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Une copie par élève des fiches 42 à 44. Règle et équerre pour chacun.

Prérequis. – La perspective parallèle conserve le parallélisme, l'incidence et le milieu (cf. par exemple les six premières activités du chapitre 7 de CREM [2001b] qui sont centrées sur le dessin de cubes et d'assemblages de cubes en perspective parallèle).

4.1 Dessiner un cube de Rubik

Le *cube de Rubik* est un casse-tête en trois dimensions. Il est formé de 27 petites cubes colorés, articulés de manière astucieuse pour se prêter à des mouvements de rotation. Le jeu consiste à faire pivoter ces cubes de façon à ce que chacune des 6 faces du cube 3×3 qu'ils forment, soit d'une même couleur. Le cube de Rubik porte le nom de son inventeur *Erno Rubik*, un architecte hongrois, passionné de géométrie. Créé en 1974, ce jeu a rencontré très rapidement un vif succès dans de nombreux pays.

Nous ne nous intéressons pas ici au jeu lui-même mais seulement aux questions que soulève le dessin d'un tel cube.

Comment s'y prendre ?

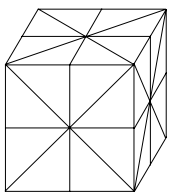


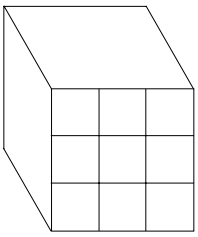
Fig. 9

La figure 9 constitue une figure de référence pour passer du partage en deux à un partage en n parties égales : elle rappelle l'ensemble des propriétés des médianes et des diagonales des parallélogrammes qui apparaissent dans la perspective parallèle d'un cube.

Les élèves reçoivent la fiche 42.

Fiche 42 (page 197)

Un dessin d'un cube de Rubik est ébauché ci-dessous ; achever ce dessin sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires. Décrire les différentes étapes de la construction.



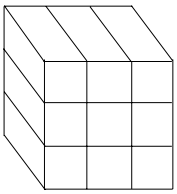


Fig. 10

En un premier temps, les élèves travaillent seuls, ils tracent les parallèles aux fuyantes comme le montre la figure 10. Mais comment partager ces fuyantes sans recourir à des mesures ?

La difficulté vient de ce que le milieu des diagonales n'est pas un élément de la figure. Mais dès qu'une diagonale de la face frontale est tracée (avec ou sans l'aide du professeur), la situation s'éclaire : cette diagonale passe par les nœuds du quadrillage et est partagée ainsi en trois parties égales (figure 11*a*). La familiarité des élèves avec les tracés sur papier quadrillé est telle qu'il n'est pas opportun de soulever, pour le carré, la question de l'alignement des nœuds, ni celle du partage en trois de la diagonale. On y reviendra à propos des autres faces.

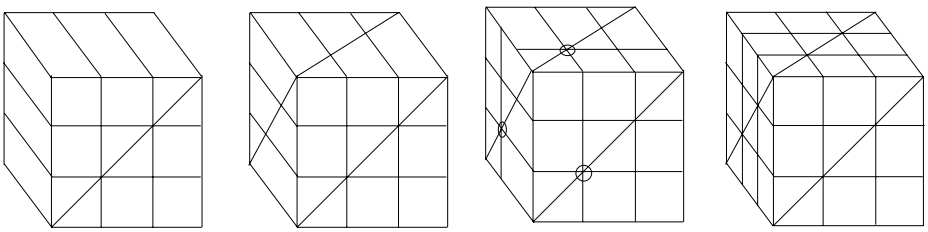


Fig. 11 (a,b,c,d)

Comme les autres faces sont des images de carrés, l'idée vient de tracer la diagonale de la face supérieure et celle de la face de gauche (figure 11*b*), ensuite, de transposer sur ces faces les propriétés d'incidence. La figure 11 montre une correspondance entre ce qui se passe sur la face frontale et les autres faces. On poursuit en traçant les parallèles aux arêtes (figures 11*c* et *d*).

À l'issue de cette construction, une question théorique peut être soulevée.

Les arêtes fuyantes sont-elles partagées par ces parallèles en trois segments de même longueur ?

Il arrive en effet souvent que les mesures que l'on prend pour vérifier révèlent des différences de longueurs entre les trois parties déterminées sur l'arête fuyante. Sont-elles dues à des imprécisions dans le tracé ou faut-il incriminer le procédé ?

Pour amorcer une réponse à la question, le professeur attire l'attention des élèves sur le fait que, s'ils ne disposent d'aucune propriété sur le partage en trois, ils en connaissent par contre à propos du milieu de segments dans les parallélogrammes. Il rappelle aussi qu'ils disposent d'une figure de référence (figure 9 à la page 168). Les propriétés utiles ici sont :

– dans un parallélogramme, diagonales et médianes se coupent en un même point, milieu de chacune d'elles ;
– dans un parallélogramme, chaque médiane est parallèle à une paire de côtés.

On revient au dessin du cube, on observe d'abord les carrés de la face frontale qui sont ombrés sur les figures 12 *a* et *b*.

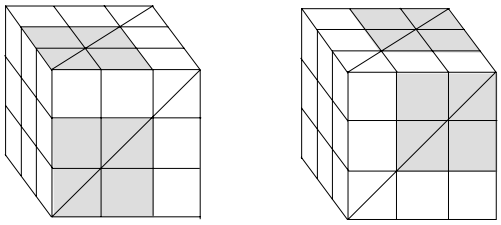


Fig. 12 (a,b)

Bien sûr, les élèves savent que la diagonale de la face frontale passe par deux nœuds du quadrillage et est partagée en trois parties égales, néanmoins en conjuguant les figures 12 *a* et *b*, ils comprennent pourquoi les égalités sur une arête de la face frontale se propagent sur la diagonale de cette face. Par ailleurs, cette première étape met en évidence les sous-figures qui seront en jeu pour aborder les égalités sur les fuyantes.

Considérons à présent les parallélogrammes ombrés des figures 13.

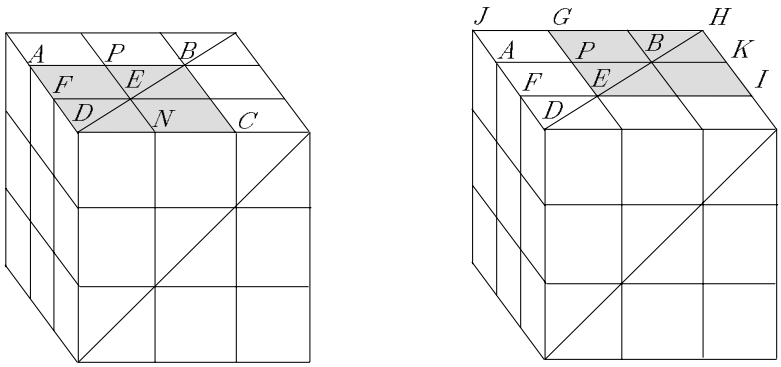


Fig. 13 (a,b)

– Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (puisque ses côtés sont deux à deux parallèles par construction) ;

– le segment $[DB]$ est une diagonale de ce parallélogramme et le segment $[NP]$ est une médiane (par construction N est le milieu de $[DC]$ et NP est parallèle à AD, ainsi donc cette médiane est déterminée par un de ses points et sa direction) ;

– le point E, intersection de cette diagonale et de cette médiane est donc le milieu de la diagonale, c'est à dire :

$$|DE| = |EB| ;$$

– le même point E appartient à l'autre médiane FE, par conséquent F partage $[AD]$ en deux segments de même longueur. On a donc :

$$|FD| = |FA|.$$

On montre de même que dans le parallélogramme $GHIE$,

$$|EB| = |BH|,$$

que le segment $[PK]$ est une médiane et que

$$|GP| = |PE|.$$

Comme

$$|GP| = |JA| \text{ et } |PE| = |AF|,$$

on a aussi

$$|JA| = |AF|.$$

Ceci achève la démonstration.

La construction terminée, il importe de sortir du contexte du dessin en perspective et de mettre en évidence un procédé plus général. La figure 14 et son commentaire montrent comment partager le segment $[AC]$ en trois parties égales, sans mesurer.

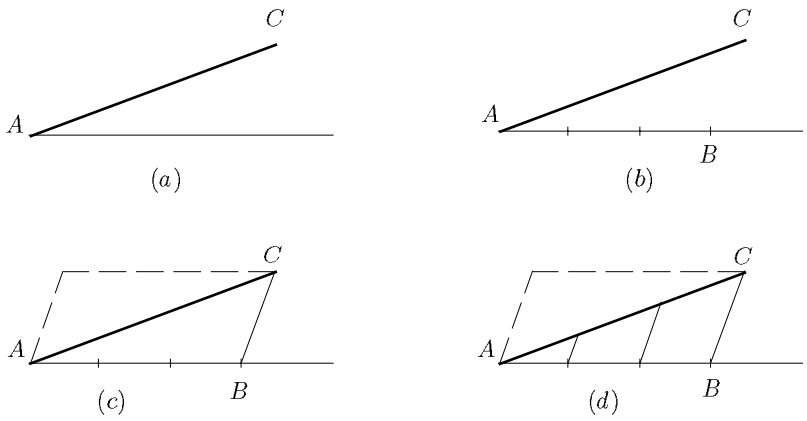


Fig. 14

Pour partager un segment $[AC]$ en trois, on peut le considérer comme une diagonale d'un parallélogramme :

(a) on trace à partir de A, une demi-droite non alignée avec $[AC]$;

(b) à partir du point A, on gradue la demi-droite en y portant trois segments de même longueur, on détermine ainsi $[AB]$, premier côté d'un parallélogramme ;

(c) on joint les points B et C, on détermine ainsi le second côté du parallélogramme ;

(d) par chacun des points de graduation du premier côté, on mène une parallèle au second côté ;

chaque point d'intersection d'une de ces parallèles avec la diagonale est un point de division de celle-ci.

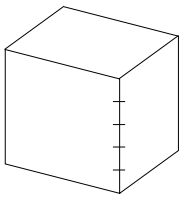
4.2 Partager les arêtes d'un cube

Comment s'y prendre ?

Dans cette deuxième activité, il s'agit d'adapter le procédé mis au point à propos du partage en trois, au partage en cinq, et ensuite au partage en n parties égales. Les élèves reçoivent la fiche 43.

Fiche 43 (page 198)

L'arête verticale de ce cube est partagée en cinq parties de même longueur ; partager les autres arêtes en cinq, sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires, décrire les différentes étapes de la construction.



Dans cette activité comme dans la précédente, trois réseaux de parallèles sont implicitement présents : les parallèles aux arêtes du cube. On s'attend à ce que les élèves aient recours aux diagonales des faces.

La figure 15 montre une façon de procéder.

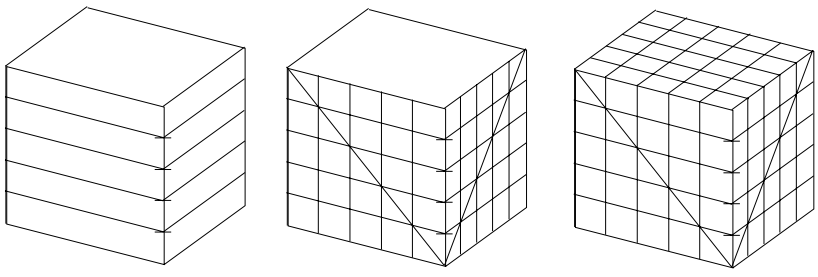


Fig. 15

Le professeur pose à présent une nouvelle question.

> Décrire comment partager un segment en n parties égales en utilisant un réseau de parallèles. Énoncer les propriétés utilisées.

Le professeur veille à ce que chaque élève se donne un segment à partager et prenne conscience des choix à faire, à savoir

– la direction de la demi-droite qui servira d'intermédiaire ;

– l'unité sur cette demi-droite.

Il s'ensuit un travail collectif pour dégager une méthode de partage et pour la rattacher aux propriétés du parallélogramme. La figure 16 montre les étapes d'une telle construction. La figure 17 avec ses commentaires en donne une démonstration.

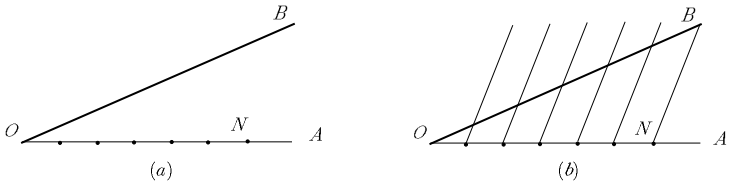


Fig. 16

Supposons qu'il s'agisse de partager le segment $[OB]$ en six parties égales.

(a) Par O menons la demi-droite $[OA$ et portons, à partir de O six segments de longueur égale ;

(b) joignons le point N (extrémité du dernier segment sur $[OA)$ et le point B. Par chacun des points de graduation, faisons passer la parallèle à BN.

Montrons à présent que par ce procédé, le segment $[OB]$ est bien partagé en six parties égales.

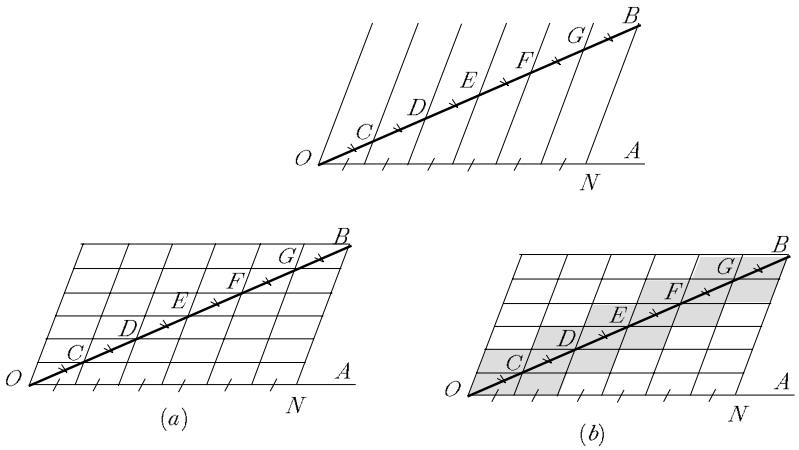


Fig. 17

(*a*) Par chaque point C, D, E, ...déterminé sur $[OB]$ par le premier réseau de parallèles, menons la parallèle à $[OA$. Nous obtenons un réseau de parallélogrammes.

(*b*) Sélectionnons les parallélogrammes ombrés. Une configuration apparaît. Elle rappelle la figure 13 à la page 170 ; on applique donc de proche en proche le raisonnement qui mobilise les propriétés des diagonales et des médianes de ces parallélogrammes et on montre ainsi l'égalité des segments déterminés sur $[OB]$.

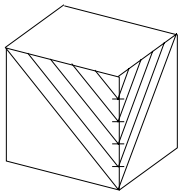


Fig. 18

Après cette mise au point, on peut revenir à la fiche de travail et chercher un moyen de partager les arêtes sans passer par le partage des diagonales. La construction est illustrée par la figure 18.

Tout en exerçant le procédé mis au point, cette construction constitue une bonne préparation à l'activité suivante.

À présent, les élèves sont prêts à utiliser la conservation des rapports par une projection parallèle. Notons au passage que, dans le contexte d'une étude des propriétés de la projection parallèle (ce qui n'est pas le cas ici), on montrerait que cette propriété assure le caractère linéaire de cette transformation.

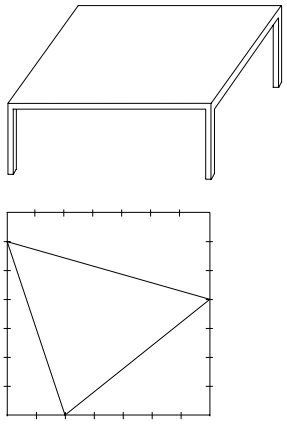
4.3 Dessiner sur une table

Comment s'y prendre ?

Dans cette activité, on introduit la conservation des rapports rationnels.

Fiche 44 (page 199)

Voici une table sur laquelle on veut dessiner un triangle dont le modèle, vu en vraie grandeur, est placé juste en-dessous. Dessiner le même triangle, dans la même position, sur la table représentée en perspective parallèle. Décrire les étapes de la construction. Utiliser une équerre et une règle non graduée, ne rien mesurer.



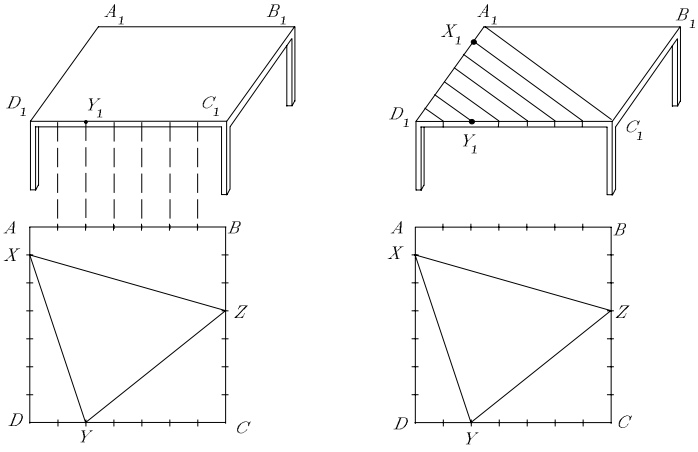


Fig. 19 (a,b)

Les bords de la table sont divisés en parties égales sur le modèle. Commençons par reporter ces graduations sur $[D_1C_1]$ qui est vu en vraie grandeur. Le point Y_1 est situé aux deux septièmes de $[D_1C_1]$ à partir de D_1.

Le point X (voir figure 19 *b*) est situé aux six septièmes du segment $[DA]$ à partir de D. Il s'agit donc de partager le segment $[D_1A_1]$ en sept. On se sert évidemment des graduations de $[D_1C_1]$.

On joint C_1 et A_1, et on mène les parallèles à C_1A_1 qui passent par les graduations de $[D_1C_1]$. On trouve X_1. Les élèves réalisent *a posteriori* que seule la parallèle qui passe par la sixième graduation (à partir de D_1) est utile !

Le point Z (voir figure 20*a*) est situé aux quatre septièmes du segment $[CB]$ à partir de C. Il s'agit donc de déterminer le point aux quatre septièmes de $[C_1B_1]$. On se sert à nouveau des graduations de D_1C_1.

On joint D_1 et B_1 et on mène la parallèle à D_1B_1 qui passe par la quatrième graduation de $[D_1C_1]$ à partir C_1. On trouve Z_1 et on trace le triangle $Y_1X_1Z_1$ (figure 20 *b*).

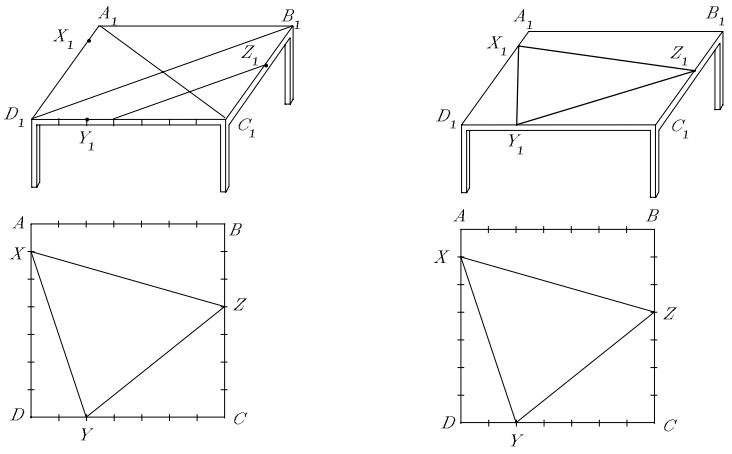


Fig. 20 (a,b)

À l'issue de cette activité, le professeur met en évidence quelques expressions et notations relatives aux rapports et proportions. Par exemple, l'égalité $|DY| = \frac{2}{7}|DC|$,

signifie que le segment $[DY]$ vaut les deux septièmes du segment $[DC]$. Cette égalité est équivalente à $\dfrac{|DY|}{|DC|} = \dfrac{2}{7}$, qu'on traduit souvent par l'expression : $|DY|$ est à $|DC|$ comme 2 est à 7.

À partir des égalités

$$\frac{|DX|}{|DA|} = \frac{6}{7} \quad \text{et} \quad \frac{|D_1X_1|}{|D_1A_1|} = \frac{6}{7},$$

on en écrit une autre :

$$\frac{|DX|}{|DA|} = \frac{|D_1X_1|}{|D_1A_1|}.$$

Une telle égalité entre deux rapports est appelée *proportion*. On dit que les segments $[DX], [DA], [D_1X_1]$ et $[D_1A_1]$ sont proportionnels ou encore que $|DX|$ est à $|DA|$ comme $|D_1X_1|$ est à $|D_1A_1|$.

Prolongements possibles

L'exploration du théorème de Thalès et de sa réciproque se poursuit pour des rapports de longueurs à propos desquels il faut imaginer des graduations de plus en plus fines. Le lecteur trouvera dans FESeC [1996b], sous le titre *Une toile d'araignée autour de Thalès*, une suite d'activités qui poursuivent cet objectif.

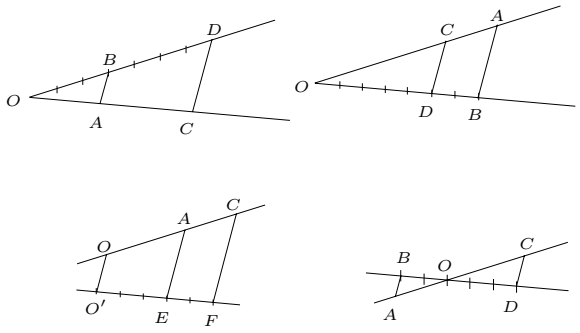
4.4 Synthèse

Comment s'y prendre ?

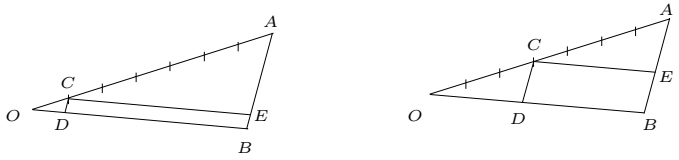
La synthèse est préparée par une fiche qui apprend aux élèves à traduire les propriétés de différentes configurations de Thalès par des égalités de rapports.

Fiche 45 (page 200)

Pour chaque figure, écrire l'une ou l'autre proportion qui fait intervenir le rapport $\frac{|OC|}{|OA|}$.



Même question à propos des rapports $\frac{|OD|}{|OB|}$; $\frac{|EB|}{|BA|}$; $\frac{|EB|}{|EA|}$.



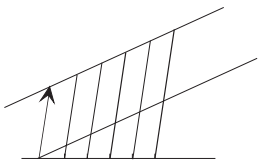


Fig. 21

La figure 21 sert de référence lorsque les élèves n'arrivent pas à imaginer le réseau de parallèles équidistantes. On y revient aussi pour réaliser la translation qui permet d'analyser la troisième figure, ou encore la rotation de 180° qui permet d'analyser la quatrième.

Ensuite, on rédige des énoncés qui couvrent l'ensemble de ces situations. Voici des *exemples* de tels énoncés. Leur formulation peut varier selon les classes et selon la culture mathématique des élèves (s'ils sont familiers des projections parallèles, la formulation sera plus concise).

Énoncé 1. – Dessinons une graduation régulière sur une droite. Traçons des parallèles par les points de cette graduation. Dans ces conditions, toute droite qui coupe les parallèles est partagée en parties égales.

Énoncé 2. – Si dans un triangle on mène une parallèle à un côté, cette parallèle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels. De plus, dans les notations de la figure 22, on peut aussi écrire que

$$\frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|OY|}{|OB|} = \frac{|XY|}{|AB|}.$$

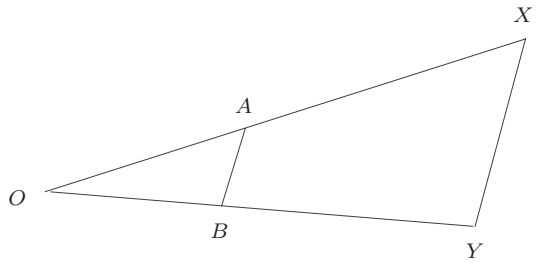
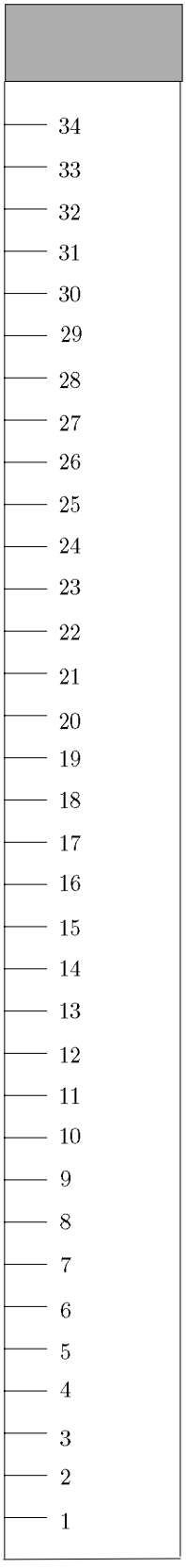
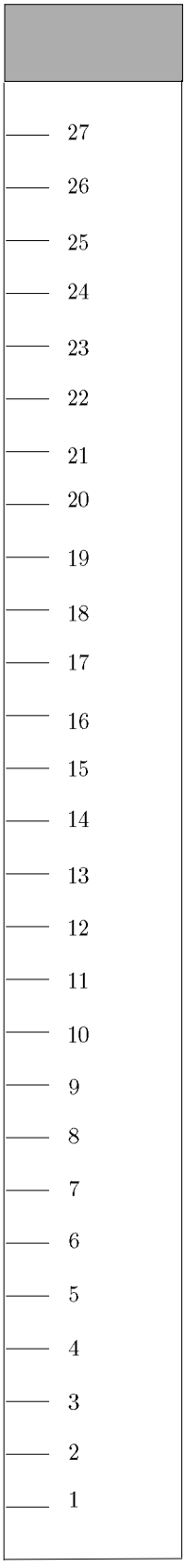


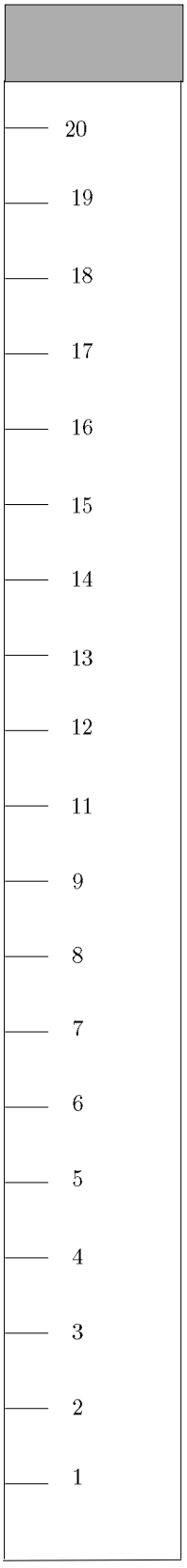
Fig. 22

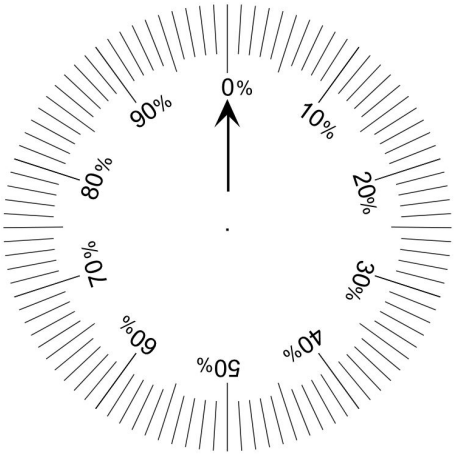
Annexe II

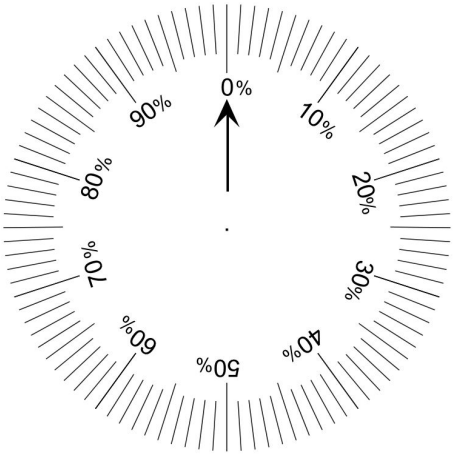
Documents à photocopier

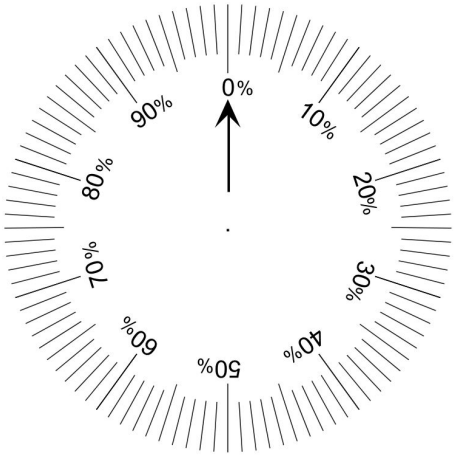

34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

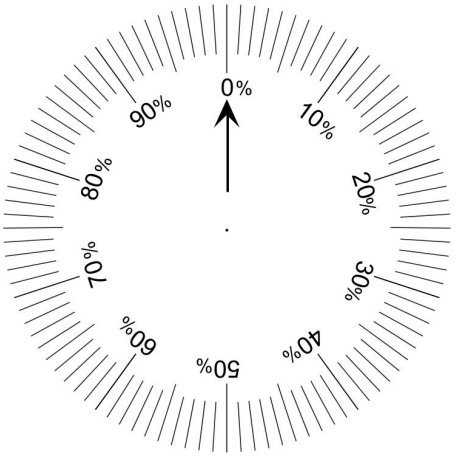

27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

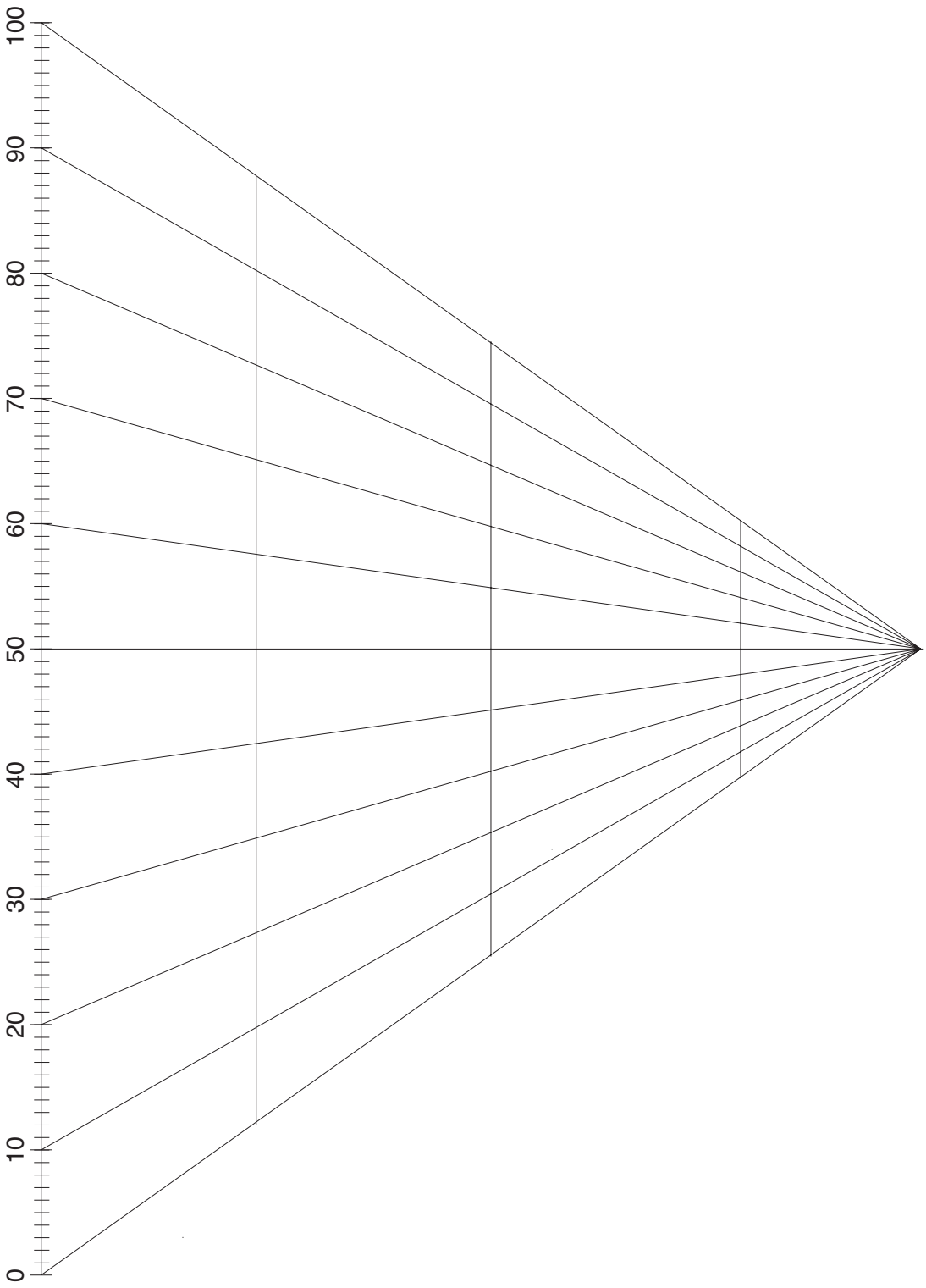

20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
9
8
7
6
5
4
3
2
1

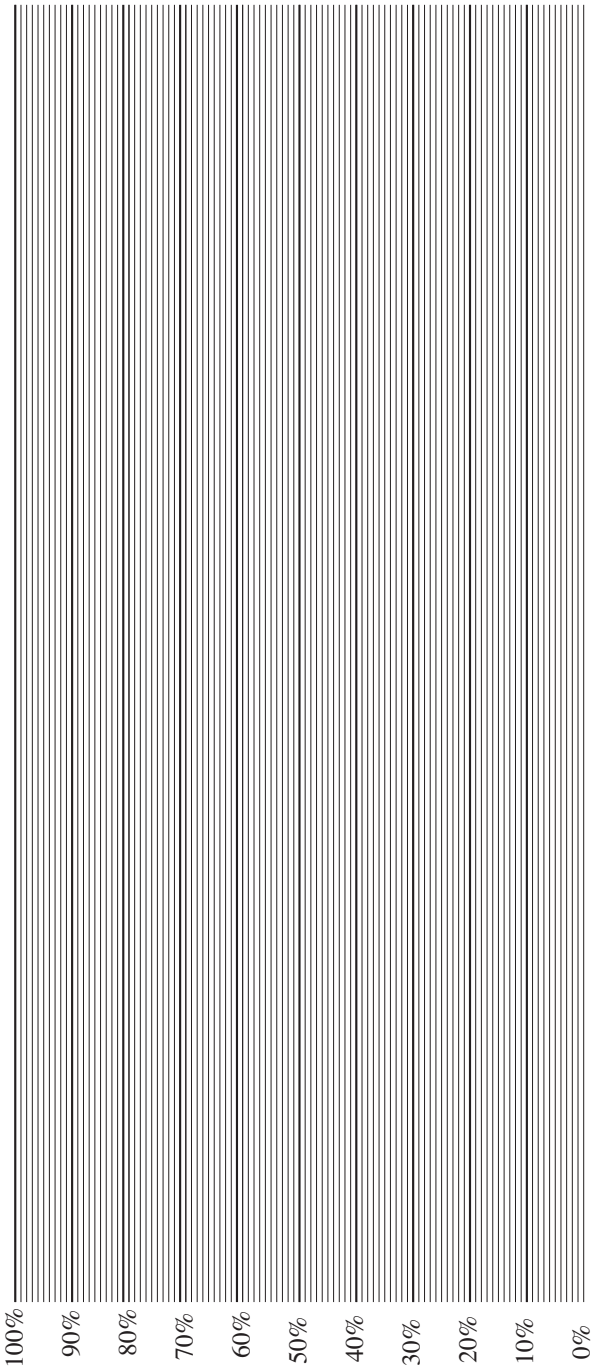

0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%

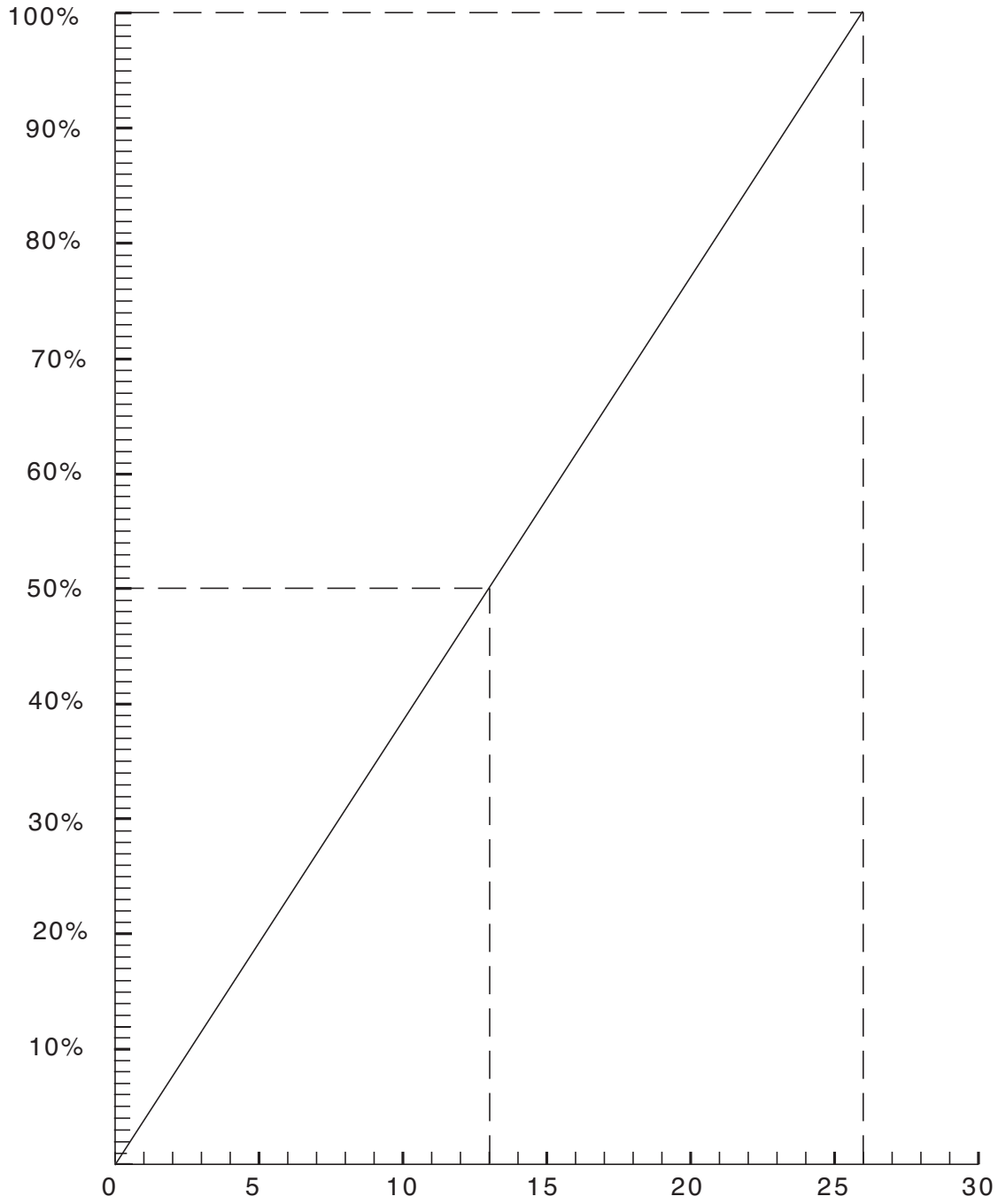

0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%


0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%


0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0


100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%


100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0
5
10
15
20
25
30

Chacun des solides de la figure est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ?
Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec la position du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.

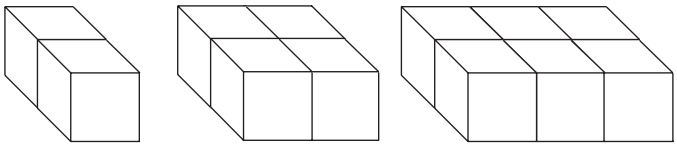
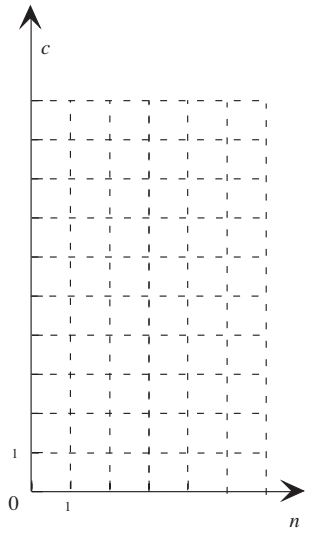


Tableau et graphique

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes



Formule

Chacun des solides de la figure est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec la position du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.
Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos de la première question.

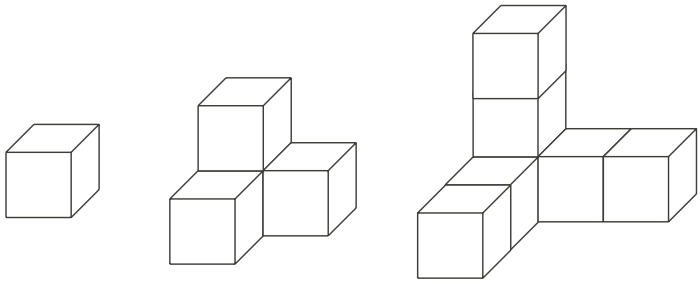
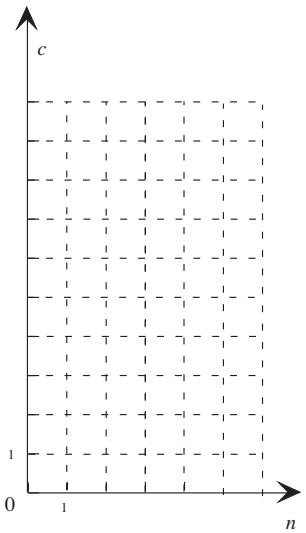


Tableau et graphique

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes



Formule

Chacun des solides de la figure est formé de cubes identiques. Combien faudrait-il de cubes pour construire le quatrième solide, le dixième, le centième ? Réaliser un tableau qui mette en relation le nombre de cubes avec la position du solide dans la suite, puis le graphique qui montre le nombre de cubes en fonction du numéro d'ordre du solide.
Comparer le tableau et le graphique à ceux qui ont été réalisés à propos de la première question.

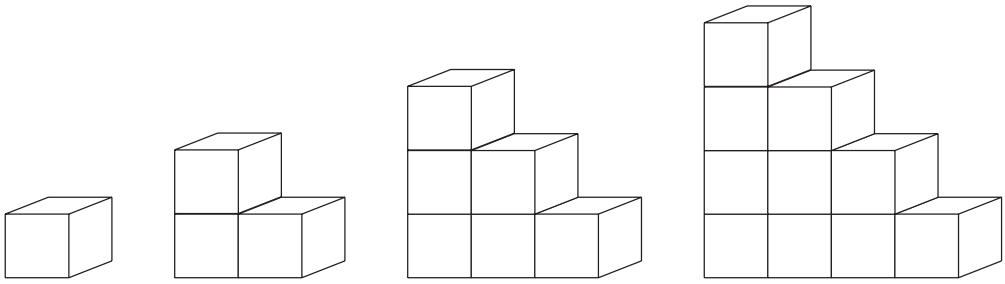
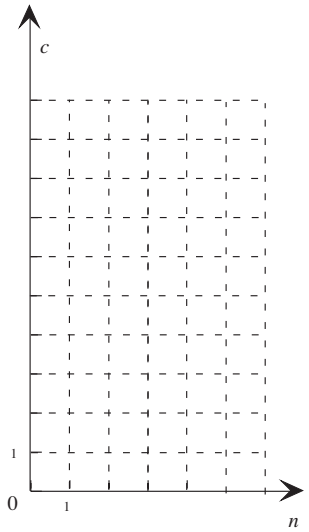


Tableau et graphique

Numéro d'ordre dans la suite	Nombre de cubes



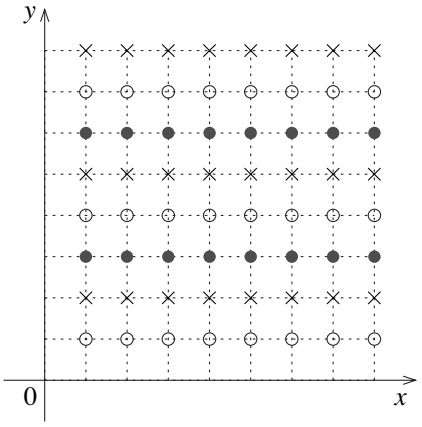
Formule

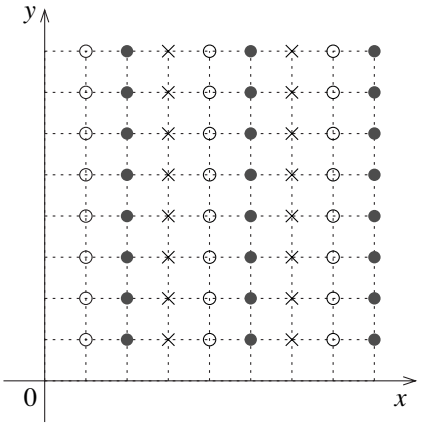
Les questions ci-dessous se rapportent aux ensembles montrés par les figures 38 et 39. Ces ensembles s'étendent implicitement au-delà de ce que montrent les dessins.

1. Les points donnés par les couples

$$(8,9)\ ;\ (25,15)\ ;\ (13,36)\ ;\ (27,37)\ ;$$
$$(10,10)\ ;\ (100,13)\ ;\ (120,19)\ ;\ (119,73)\ ;$$
$$(45,20)\ ;\ (45,62)\ ;\ (17,105)\ ;\ (17,106);$$

   sont-ils représentés dans la première figure par une croix, un point noir ou un point blanc ?
2. Même question pour les mêmes couples, à propos cette fois de la deuxième figure.





Les ensembles montrés par les figures ci-dessous s'étendent seulement dans une seule direction : celle de la droite qui porte les points.

1. Les points donnés par les couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs de la première figure ?

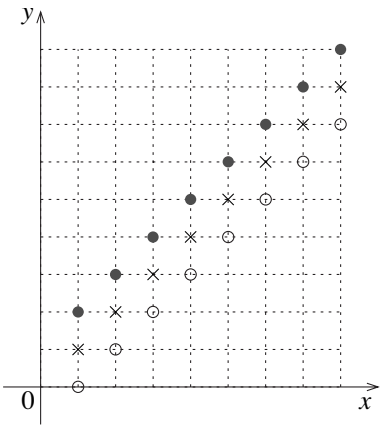
   $$(7,8)\ ;\ (8,8)\ ;\ (8,7)\ ;\ (9,8)\ ;\ (9,10)$$
   $$(25,24)\ ;\ (30,30)\ ;\ (30,29)\ ;\ (41,40)\ ;\ (40,40).$$

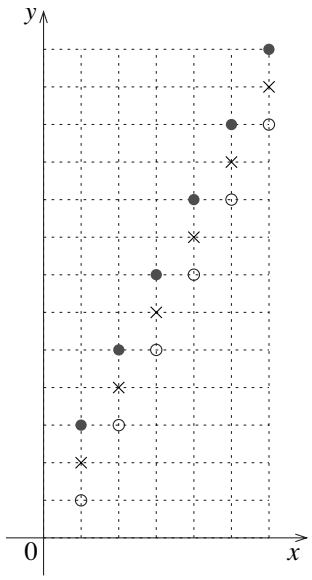
   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

2. Même question à propos des couples ci-dessous, qui se rapportent à la deuxième figure.

   $$(7,14)\ ;\ (7,15)\ ;\ (7,13)\ ;\ (8,17)\ ;\ (8,15)\ ;$$
   $$(20,50)\ ;\ (25,49)\ ;\ (30,61)\ ;\ (29,60)\ ;\ (29,59).$$

   Comment caractériser les ensembles de points alignés ?



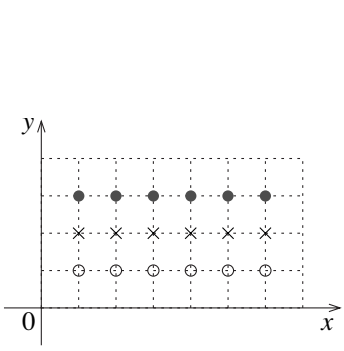


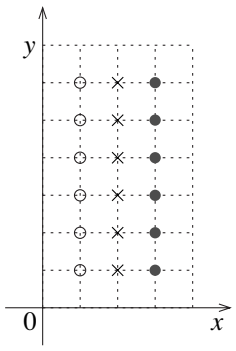
Les points qui correspondent aux coordonnées ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?
Envisager successivement les trois figures ci-dessous.

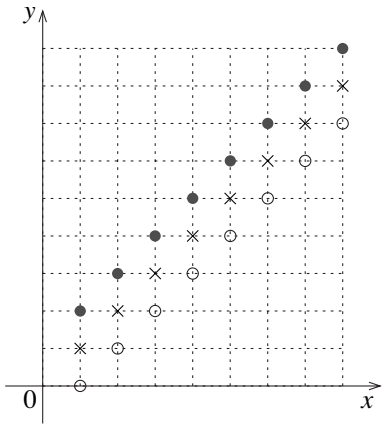
$$(\overline{3},2)\ ;\ (2,\overline{3})\ ;\ (\overline{3},\overline{3})\ ;\ (\overline{3},3)\ ;$$

$$(3,\overline{3})\ ;\ (3,\overline{2})\ ;\ (\overline{3},\overline{4});\ (\overline{3},\overline{2}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?

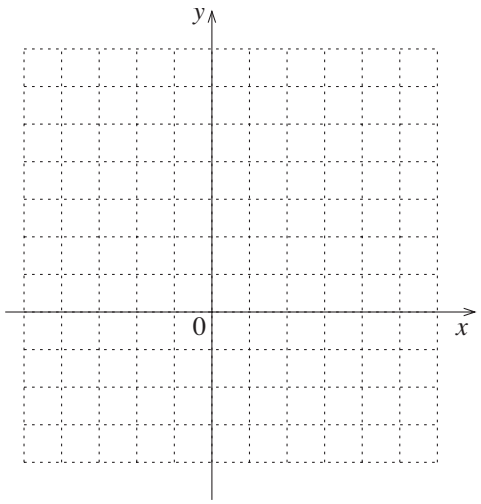






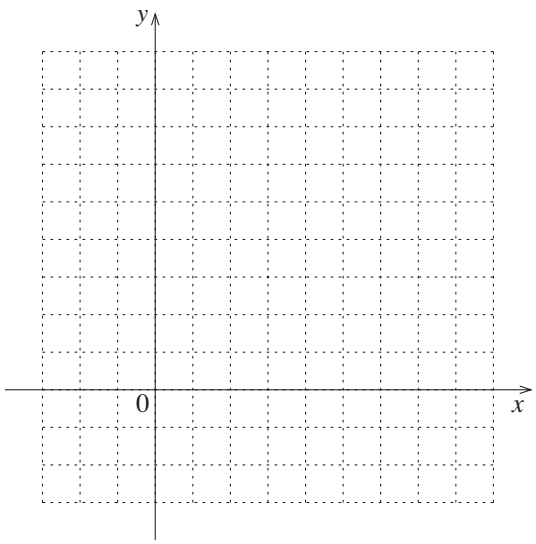
Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = 3 + x.$$

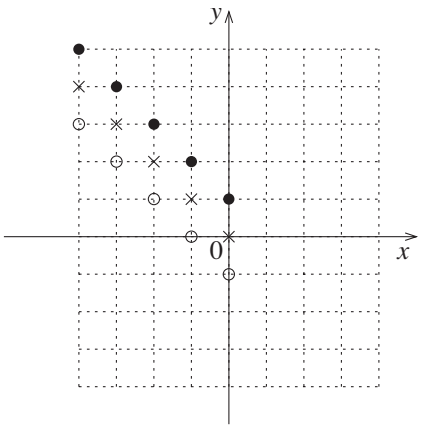


Représenter sur le graphique quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = 6 - x.$$



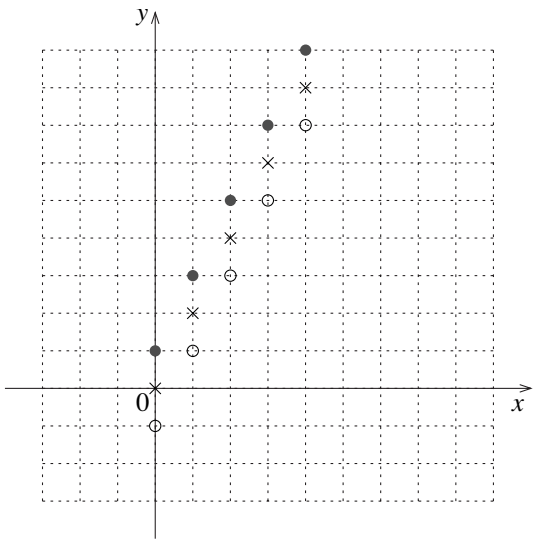
1. Qu'est-ce qui caractérise chacun des trois ensembles de points alignés de la figure ci-dessous ?
2. Quel est le point d'abscisse 1 qui est aligné avec les croix, avec les points blancs, avec les points noirs ?
3. Même question pour les points d'abscisse 3 et d'abscisse 7.
4. Dresser les tableaux de nombres qui correspondent au graphique tel qu'il a été complété.



Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils ou non alignés avec une suite de croix, de points noirs ou de points blancs ?

$$(0,0)\ ;\ (0,\overline{2})\ ;\ (\overline{1},2)\ ;\ (\overline{1},\overline{2})\ ;$$
$$(\overline{2},4)\ ;\ (\overline{2},\overline{4})\ ;\ (\overline{3},6)\ ;\ (\overline{3},\overline{6})\ ;$$
$$(3,7)\ ;\ (\overline{3},\overline{7})\ ;\ (\overline{3},7)\ ;\ (3,\overline{7}).$$

Comment caractériser les ensembles de points alignés ?



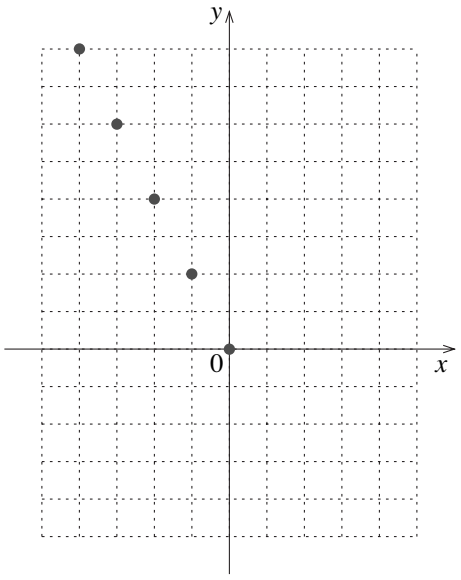
Les points qui correspondent aux couples ci-dessous sont-ils alignés avec une suite de points noirs ?

$$(1,2)\ ;\ (1,\overline{2})\ ;\ (\overline{1},\overline{2})\ ;\ (\overline{5},10)\ ;$$

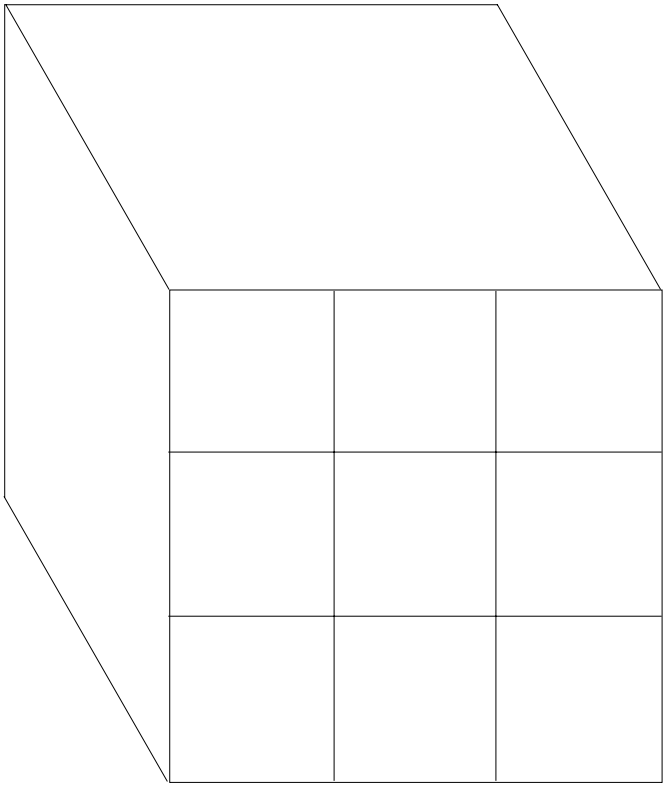
$$(3,6)\ ;\ (3,\overline{6})\ ;\ (\overline{3},\overline{6})\ ;\ (\overline{7},14)$$

$$(100,200)\ ;\ (100,\overline{200})\ ;\ (\overline{100},\overline{200})\ ;\ (\overline{100},200).$$

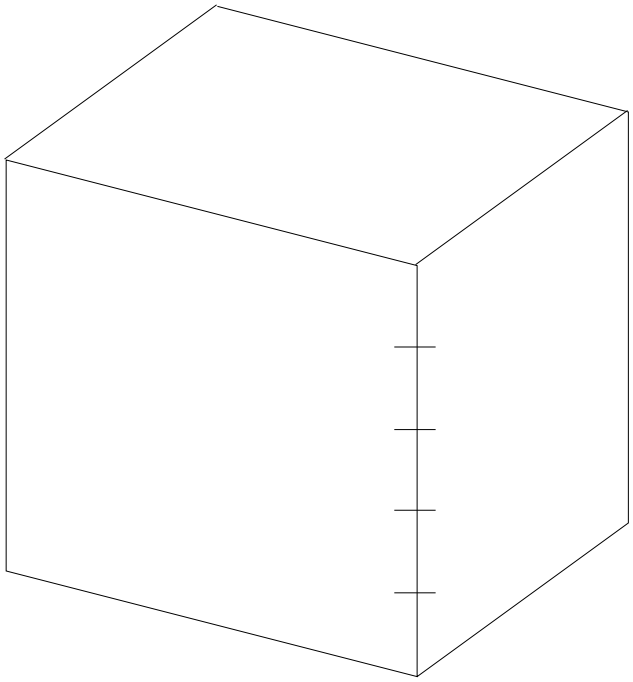
Comment caractériser les points alignés ?



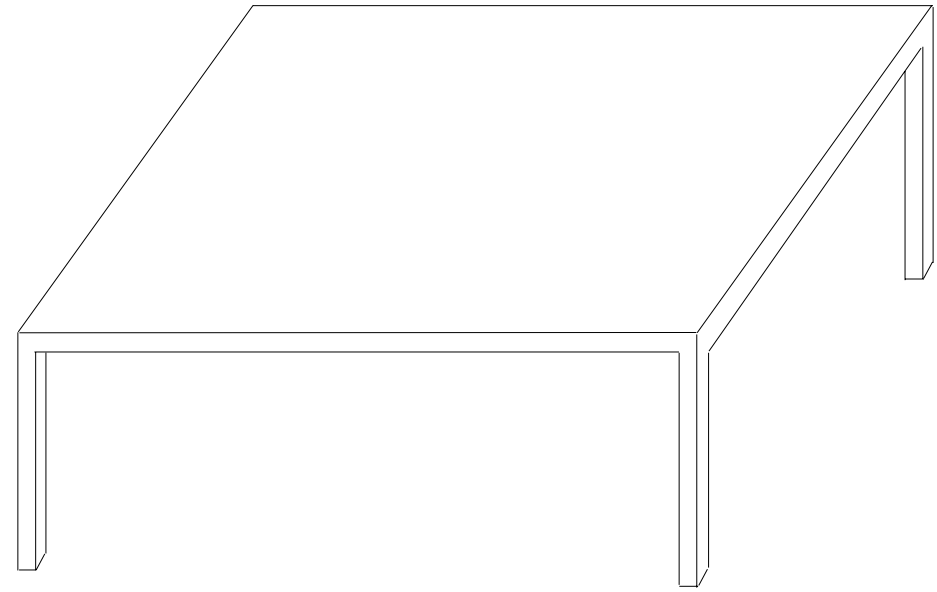
Un dessin d'un cube de Rubick est ébauché ci-dessous ; achever ce dessin sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires. Décrire les différentes étapes de la construction.

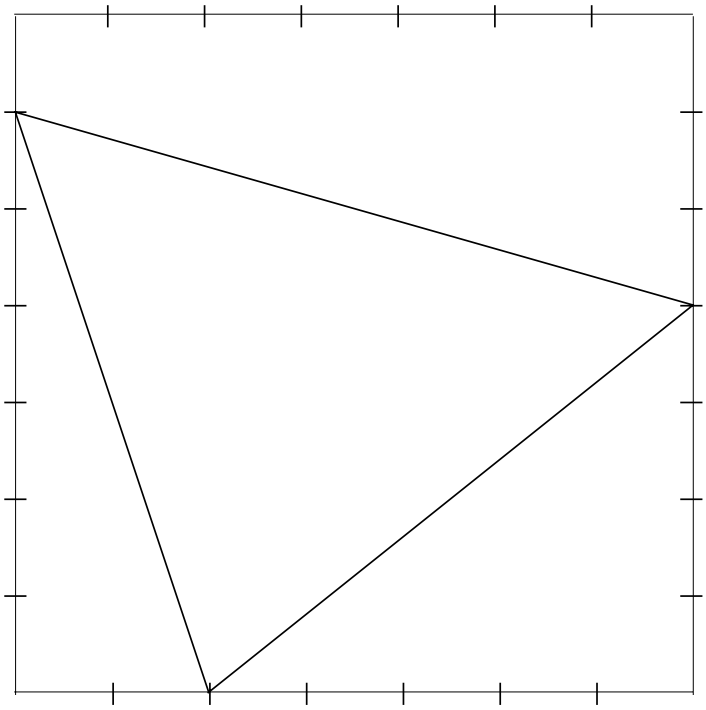


L'arête verticale de ce cube est partagée en cinq parties de même longueur ; partager les autres arêtes en cinq, sans procéder à aucune mesure. Utiliser une règle non graduée et une équerre pour tracer les parallèles nécessaires, décrire les différentes étapes de la construction.

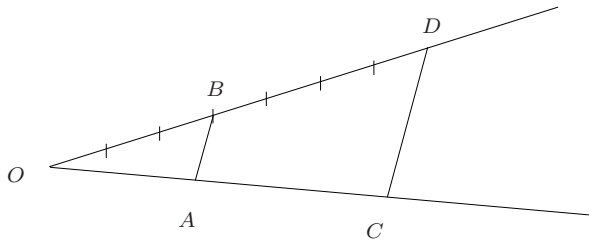


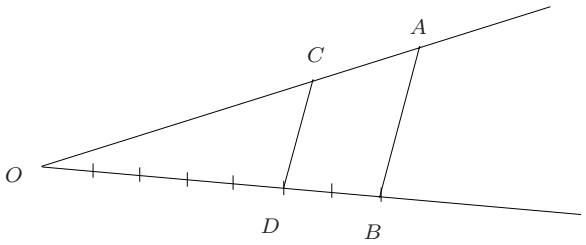
Voici une table sur laquelle on veut dessiner un triangle dont le modèle, vu en vraie grandeur, est placé juste en-dessous. Dessiner le même triangle, dans la même position, sur la table représentée en perspective parallèle. Décrire les étapes de la construction. Utiliser une équerre et une règle non graduée, ne rien mesurer.

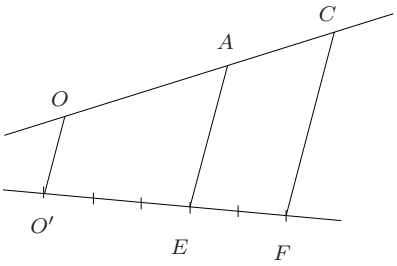


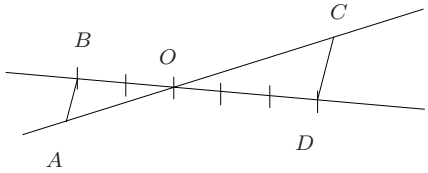


Pour chaque figure, écrire l'une ou l'autre proportion qui fait intervenir le rapport $\frac{|OC|}{|OA|}$.

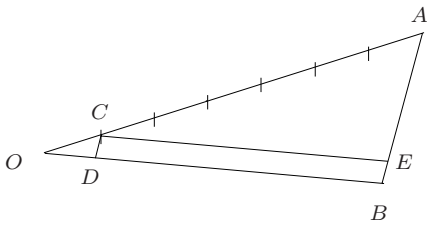


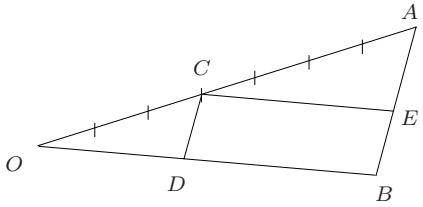






Même question à propos des rapports $\frac{|OD|}{|OB|}$; $\frac{|EB|}{|BA|}$; $\frac{|EB|}{|EA|}$.





Troisième partie

Un aspect de la linéarité
de 15 à 18 ans

Remerciements

Nous remercions les professeurs qui nous ont accueillis dans leurs classes ou qui ont accepté de tester quelques activités :

Frédéric Falisse nous a invités à exposer les méthodes de fausses positions aux élèves de quatrième du collège Saint Augustin à Gerpinnes. Il en a assuré le suivi et nous lui devons les échos des classes du chapitre 7.

Pascale Guissard, professeur de mathématique à l'Institut Saint Julien Parnasse à Auderghem a testé la plupart des activités présentées au chapitre 8 dans sa classe de quatrième année (enseignement général).

Jean-Pierre Cazzaro, professeur de mathématique à l'A. R. de Jette, a expérimenté une grande partie des activités proposées au chapitre 10 dans sa classe de sixième année (enseignement général).

Par ailleurs, les chapitres 7 à 10 ont été présentés aux professeurs qui ont suivi les formations de l'a.s.b.l. « Formations en cours de carrière ».
Nous remercions tous ceux et celles qui nous ont communiqué leurs remarques et nous ont rendu compte des expérimentations qu'ils ont réalisées dans leurs classes.
Certains chapitres ont également fait l'objet d'une formation lors de journées pédagogiques à l'ensemble des professeurs de mathématique du district de Neufchâteau et à l'A.R. de Visé.
Les observations et les suggestions de tous ont contribué à la mise au point des activités de cette brochure.

Le chapitre 13 a fait l'objet de formations ICAFOC/math et physique, réalisées en collaboration avec Édith Baeten, Yvonne Verbist-Scieur et Juan Opsomer.

Nous remercions aussi très cordialement Guy Noël pour ses suggestions à propos du chapitre 11.

7

La linéarité à travers quelques siècles

Avant-propos

Dans toutes les branches des mathématiques et de diverses autres sciences, le problème qui se pose le plus souvent et le plus concrètement est de trouver des solutions d'équations. C'est l'algèbre qui permet de réaliser cela et, à ce titre, c'est une discipline fort ancienne. On trouve en effet des résolutions d'équations dans des tablettes mésopotamiennes et des papyrus égyptiens datant de plus de deux mille ans avant notre ère.

Dans les *Éléments* d'Euclide, qui datent du troisième siècle avant Jésus-Christ, il y a également une forme d'algèbre en ce sens qu'on y trouve des méthodes générales de résolution d'équations, par des procédés géométriques. Chez Diophante d'Alexandrie, que les historiens situent entre 250 et 350 de notre ère, on trouve également de l'algèbre ; mais, tout comme les tablettes babyloniennes et les papyrus égyptiens, le texte de Diophante consiste en un recueil de problèmes particuliers avec solutions et ne peut donc être considéré comme un traité théorique qui aurait pour souci de donner une méthode générale de résolution.

Quant aux méthodes dites « de fausse position » (simple ou double), qui ont été utilisées pendant des siècles, elles fournissent des méthodes générales de résolution des problèmes du premier degré, mais par des procédés purement arithmétiques.

Il est admis par les spécialistes d'histoire des mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application, a été la publication d'un petit ouvrage intitulé *Muḫtaṣar fī ḥisāb al-jabr*[1] *wa l-muqābala* (*Abrégé de calcul par le jabr et la muqābala*). Ce texte est l'œuvre du savant d'origine persane Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫūwarizmī[2] (vers 780 - vers 850) qui travaillait à Baghdād, dans la Maison de la Sagesse, fondée par le calife abbasside al-Ma'mūn. La dédicace au calife, qui régna jusqu'en 833, permet de situer l'œuvre dans le temps.

[1] *Al-jabr* (qui a donné naissance au mot *algèbre*) et *al-muqābala* sont les deux principales opérations qui permettent de réduire les équations algébriques à une des formes canoniques dont la solution est donnée dans le traité.

[2] Comme son nom l'indique, il est originaire du Ḫūwarizm, région au sud de la mer d'Aral.

1 La fausse position simple chez les Égyptiens

De quoi s'agit-il ?

Montrer comment les Égyptiens résolvaient des équations du premier degré il y a quatre mille ans.

Analyser la méthode de fausse position simple et établir le lien avec les tableaux de proportionnalité.

Enjeux

Donner du sens au concept de linéarité en situant son émergence dans un contexte historique et culturel.

Montrer par contraste la commodité de la méthode algébrique d'aujourd'hui. Cette méthode nécessitait une longue élaboration, comme en témoigne le chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Le problème 24 du *Papyrus mathématique Rhind* repris ci-après et proposé en annexe à la page 469 sous une forme photocopiable pour les élèves. Les quelques hiéroglyphes qu'il faut pouvoir décrypter pour comprendre le problème sont donnés dans un petit lexique à la page 206 et en annexe à la page 470.

Prérequis. – La résolution des équations du premier degré.

1.1 Introduction

L'une des méthodes utilisées depuis la plus haute Antiquité est ce qu'on appelle la méthode de fausse position (simple). Elle consiste à donner une valeur à l'inconnue, à opérer les calculs décrits dans l'énoncé puis, en fonction de l'erreur qui apparaît, à ajuster la valeur donnée *a priori* à l'inconnue.

Nous nous proposons ici d'analyser cette méthode à partir du problème 24 du *Papyrus mathématique Rhind* conservé au *British Museum* (où il est catalogué sous les numéros BM 10057 et BM 10058). Ce papyrus est l'une des principales sources d'information sur les connaissances mathématiques égyptiennes. Outre des tables de multiplication, on y trouve quelque quatre-vingt sept problèmes d'arithmétique et de géométrie, avec les solutions.

1.2 Quelques caractéristiques des mathématiques égyptiennes

Le système numérique utilisé par les Égyptiens de l'Antiquité est purement décimal mais non positionnel.

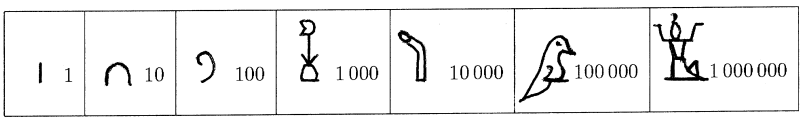
Qu'il s'agisse de n'importe quelle opération, tout est ramené à des additions. Les mathématiques égyptiennes ont ainsi un caractère nettement additif et linéaire.

Les Égyptiens emploient presque exclusivement les fractions de numérateur 1 (fractions unitaires). La technique qu'ils utilisent pour opérer les divisions

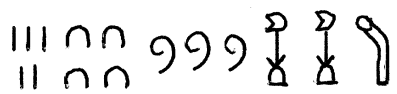
favorise l'apparition de ce type de fractions. Il y a cependant une exception pour la fraction $\frac{2}{3}$ et le scribe semble avoir une certaine facilité à trouver les deux tiers de n'importe quel nombre. En fait, les tables de multiplication qui se trouvent au début du document sont des tables de multiplication par deux des fractions unitaires à dénominateurs impairs (de 3 à 101). Comme nous le verrons ci-dessous, la technique utilisée par le scribe lors des multiplications est la « duplication ». Pour dupliquer la fraction $\frac{1}{5}$, par exemple, le scribe ne peut se satisfaire d'une réponse du type $\frac{2}{5}$. Il utilise alors les tables qui lui donnent le résultat de l'opération exprimé en termes de fractions unitaires : $2 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

1.3 Quelques hiéroglyphes

En ce qui concerne l'écriture des nombres, il existe un symbole pour toute puissance de 10, symbole qui se répète autant de fois qu'il est nécessaire lors de l'écriture du nombre.

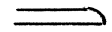


Ainsi, par exemple, 12 345 s'écrit de droite à gauche

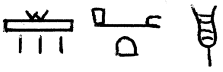
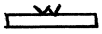
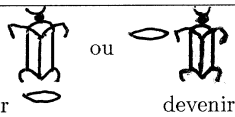
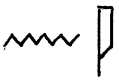
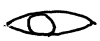
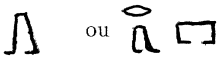


Pour désigner une fraction (unitaire, rappelons-le), on utilise le symbole  qui se prononce *rè* et signifie bouche, ouverture.

$\frac{1}{3}$ s'écrit :  et $\frac{1}{123}$: .

Il existe cependant deux exceptions, l'une pour $\frac{1}{2}$:  et l'autre, pour la fameuse fraction $\frac{2}{3}$: .

Voici encore quelques hiéroglyphes utiles :

 ; adjectif possessif	 ‘ḥ‘ quantité, inconnue	 ‘ḳ ajouter
 ḏ;·t le reste	 dmd somme, total	 f elle
 ḫpr devenir	 ḫr donc, alors	 ḥr sur
 ín donc, ainsi	 ír faire, prendre	 ir·t calculer
 m considéré comme	 m y selon que, ce que	 n de
 pn ceci	 pr·t ou pr soustraire	 w ḏ il reste

1.4 Opérations

Le scribe égyptien décrit en détail la technique qu'il utilise pour opérer les multiplications et les divisions. Nous en verrons un exemple ci-après. Par contre, il est totalement muet en ce qui concerne les additions et soustractions. Le peu d'erreurs commises dans ces dernières opérations laisse supposer qu'il disposait de tables, mais aucune n'est arrivée jusqu'à nous et ce n'est donc là qu'une hypothèse. Peut-être apprenait-il des tables d'addition par cœur dès son plus jeune âge ?

La multiplication s'effectue par duplications successives. Par exemple, pour effectuer 37×47, le scribe procède ainsi :

\	1	47
	2	94
\	4	188
	8	376
	16	752
\	32	1 504
Total	37	1 739

Le scribe coche les termes qui interviennent effectivement dans le calcul. Remarquons que ce tableau est un tableau de proportionnalité dans lequel les lignes sont obtenues, soit en multipliant la ligne précédente par deux, soit en additionnant des lignes sélectionnées en vue d'obtenir un résultat bien déterminé (37 dans cet exemple).

La division est traitée comme opération inverse de la multiplication. Ainsi, pour diviser 133 par $9\frac{1}{2}$, le scribe se demande par quoi il faut multiplier $9\frac{1}{2}$ pour obtenir 133.

	1	$9\frac{1}{2}$
\	2	19
\	4	38
\	8	76
Total	14	133

1.5 Problème 24

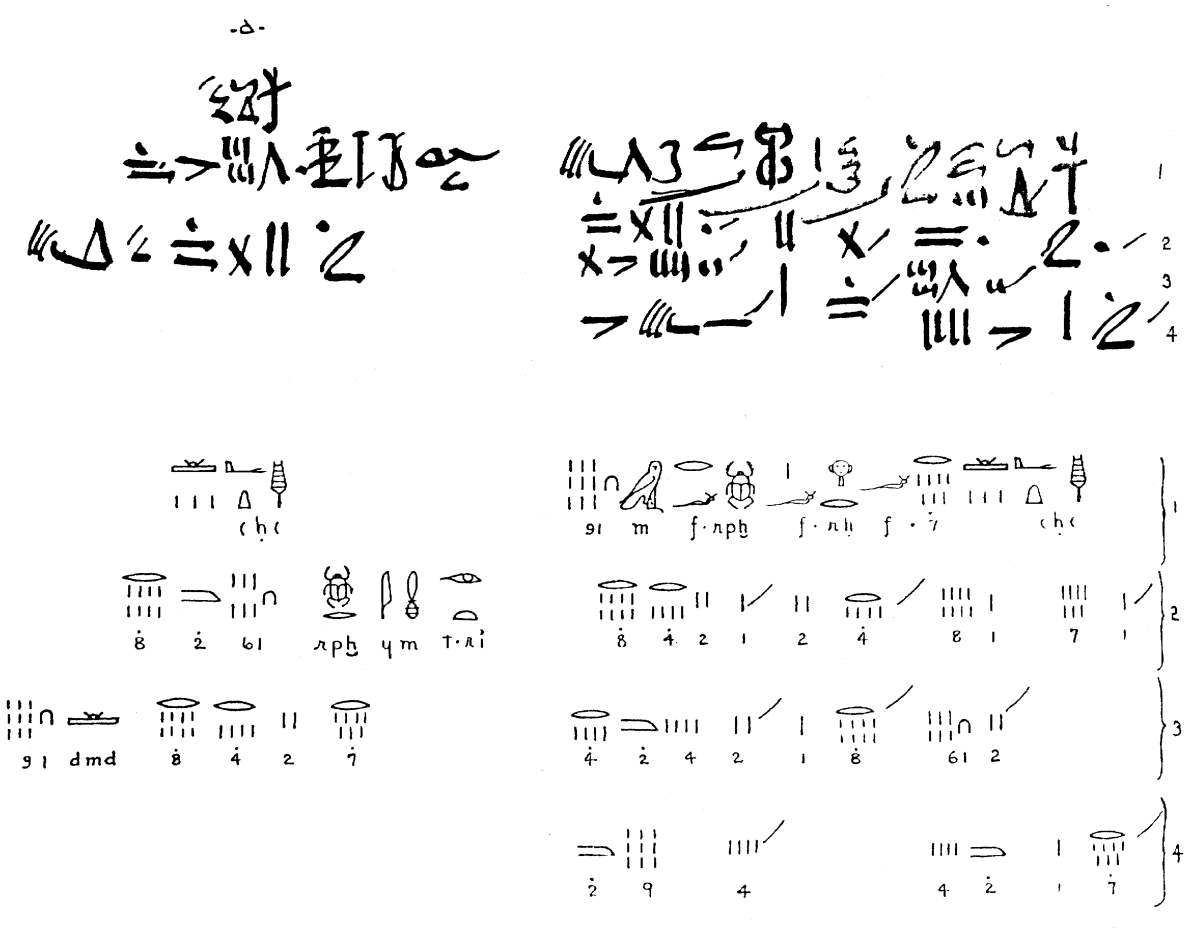


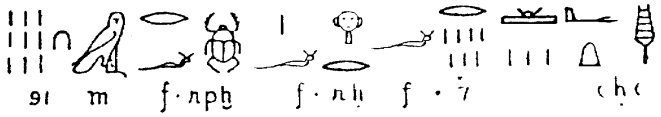
Fig. 1 : Problème 24 du papyrus Rhind

Seule la partie supérieure de la figure 1 se trouve sur le papyrus. Il s'agit d'un texte en écriture hiératique qui est l'écriture cursive du scribe. Les égyptologues qui ont étudié le manuscrit l'ont transcrit en hiéroglyphes, plus faciles à décrypter. Cette transcription apparaît dans la partie inférieure de la figure. Notons que le texte du papyrus Rhind est écrit de droite à gauche.

L'énoncé du problème apparaît à la première ligne à droite. Le voici en écriture hiératique :



et en hiéroglyphes :



Une traduction littérale en est :

Une quantité, un septième d'elle sur elle devenir elle en tant que 19,

ce que nous écririons aujourd'hui

$$x + \frac{1}{7}\,x = 19.$$

\	1	7
\	$\frac{1}{7}$	1
Total	$1\frac{1}{7}$	8

Le scribe suppose au départ que la quantité cherchée vaut 7. Il utilise la méthode de fausse position simple. Il choisit un nombre qui permet d'éviter l'apparition trop rapide de fractions. Il calcule alors la quantité et son septième : $7 + 1 = 8$ (voir lignes 2 et 4 à l'extrême droite de la figure 1).

	1	8
\	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
\	$\frac{1}{4}$	2
\	$\frac{1}{8}$	1
Total	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	19

Ce résultat est faux puisqu'il aurait dû trouver 19. Le raisonnement qu'il tient alors est le suivant : la proportion de 19 à 8 est la même que celle de la quantité cherchée à 7, nombre qu'il avait choisi au départ pour des raisons de facilité. Il est ainsi amené à diviser 19 par 8 selon la méthode que nous avons exposée ci-dessus, c'est-à-dire qu'il recherche par combien il faut multiplier 8 pour obtenir 19. Nous lisons cela à la colonne 2 (à partir de la droite), lignes 2, 3 et 4 et à la colonne 3, lignes 2 et 3.

\	1	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
\	2	$4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
\	4	$9\frac{1}{2}$
Total	7	$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$

Il obtient $2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$, rapport de la proportion qu'il doit maintenant multiplier par 7 (quatrième colonne, lignes 2, 3 et 4). Notons que le scribe multiplie $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ par 7 et non 7 par $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Or, dans l'esprit de la méthode de fausse position, lorsqu'on a trouvé le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 8 à 19 (dans le second membre), il serait logique de multiplier ensuite 7 (la fausse position) par ce même coefficient. Cette inversion de l'ordre des facteurs, qui simplifie le calcul, semble indiquer que les Égyptiens avaient une connaissance intuitive de la commutativité de la multiplication.

\	1	$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$
\	$\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
Total	$7\frac{1}{7}$	19

Dans la partie gauche du fragment, nous trouvons à la ligne 1 le hiéroglyphe signifiant « la quantité », à la ligne 2, sa valeur, à savoir 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$. À la ligne 3, le scribe ajoute son septième et vérifie que cela fait bien un total de 19.

Le raisonnement qui sous-tend cette méthode de résolution peut être condensé dans le tableau de proportionnalité suivant

x	$x + \frac{x}{7}$
$\times 2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$: 7 ; $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$	8 ; 19 : $\times 2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$

où on passe de la deuxième à la troisième ligne en multipliant par le facteur $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Le principe de la méthode se base sur la proportionnalité de x et $x+\frac{x}{7}$.

La fausse position simple a été utilisée très longtemps. On la retrouve notamment dans les textes arabes, dans le *Liber abaci* de Leonardo Fibonacci (XIIIe siècle) et dans *La summa* de Luca Pacioli (XVe siècle). Notons que l'inconnue peut être calculée à partir d'un rapport interne du tableau, comme c'est le cas ici, mais également à partir du rapport externe, comme nous le verrons à la page 213.

Échos des classes

Les élèves ont été stupéfaits d'apprendre que les méthodes de résolution anciennes n'étaient pas « exactes ». Le fait qu'il fallait supposer une valeur (qui avait toutes les chances d'être fausse) pour la réponse afin de la corriger ensuite leur paraît une démarche beaucoup plus lourde que l'algèbre d'aujourd'hui.

Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme actuellement.

Ils estiment qu'il faudrait plus souvent introduire les chapitres du cours de mathématique par un peu d'histoire, pour mieux en percevoir la portée.

Prolongements possibles

Nous proposons en annexe à la page 471 les problèmes 25 et 27 du papyrus Rhind, qui peuvent être traités de la même manière.

2 La double fausse position chez les Arabes

De quoi s'agit-il ?

Comprendre la méthode de double fausse position à partir d'un exemple extrait d'un texte attribué au juif espagnol Abraham ibn Ezra (Tolède, vers 1089 – Rome, vers 1167).

Justifier la méthode en interprétant les différents éléments qui interviennent dans la formule sur le graphique de la fonction linéaire liée au problème.

Enjeux

Voir les enjeux de la section 1 à la page 204. Cette activité illustre en outre le pouvoir éclairant des graphiques linéaires (voir la section 5.3 à la page 581).

De quoi a-t-on besoin ?

Le texte attribué à Abraham ibn Ezra proposé ci-après et repris en annexe à la page 473.

Prérequis. – La résolution des équations du premier degré et la représentation graphique des fonctions linéaires.

2.1 Introduction

Ying buzu (excédent et déficit), *al-ḫaṭa'ayn* (l'erreur), *regula duarum falsarum positionum*, *regola delle doi false positioni*, *règle des plateaux de la balance*. Ce sont là quelques appellations qui toutes, désignent un même procédé permettant de résoudre des problèmes exprimables par des équations linéaires à une inconnue ou par des systèmes linéaires à deux inconnues.

Cette fameuse règle des deux fausses positions était sans doute connue à Baghdād à l'époque de l'algébriste al-Ḫuwarizmī dans la première moitié du neuvième siècle. Nous l'illustrerons par un extrait d'un manuscrit traduit de l'arabe en latin, intitulé *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit*, c'est-à-dire le *Livre sur l'agrandissement et la diminution nommé le calcul de la conjecture d'après ce que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien.*

L'auteur arabe de cet ouvrage est inconnu ; certains historiens pensent ou ont pensé qu'il pourrait s'agir d'Abū Kāmil Šuga ibn Aslam ibn Muḥammad al-ḤĀsib al-Misrī, qui florissait vers les années 900. D'autres attribuent le texte, ou du moins sa traduction en latin, au juif espagnol Abraham ibn Ezra. Le titre pourrait laisser croire que la paternité de la règle revient aux savants indiens. Cependant la ressemblance de la terminologie avec les expressions chinoises *ying* (excédent) et *buzu* (déficit) donne à penser que cette règle, connue bien avant en Chine – voir à ce sujet le chapitre sept du *Jiuzhang Suanshu*, titre généralement traduit par les *Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul*, qu'on peut dater d'un peu avant le début de notre ère –, ait pénétré dans la littérature arabe par un chemin qui est passé par l'Inde ou par la « route de la soie ». Il faut en effet constater que, dans les ouvrages mathématiques indiens connus à ce jour, qui sont antérieurs au douzième siècle, on ne trouve pas trace de cette règle.

Ce procédé de résolution d'équations linéaires se perpétue chez de nombreux auteurs arabes comme al-Karaǧī (mort vers 1025) et en Europe, chez Leonardo Pisano Fibonacci au treizième siècle et chez Luca Pacioli au quinzième.

Le principe en est le suivant. On donne à l'inconnue deux valeurs « quelconques[3] » qui se révèlent le plus souvent être de fausses valeurs et, à partir de là, il est possible de calculer la solution vraie. Trois cas évidemment se présentent :

- Les deux fausses valeurs sont plus petites que l'inconnue.
- Les deux fausses valeurs sont plus grandes que l'inconnue.
- L'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

Le texte qui suit illustre la résolution d'un problème par la méthode de double fausse position dans le cas où l'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

2.2 Un problème linéaire

Voici une traduction d'un extrait de l'ouvrage attribué à Abraham ibn Ezra. Le texte original en latin est disponible en annexe à la page 472.

Après la louange à Dieu, voici ce qu'il est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient : soit un census[4] duquel on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau de la balance une seconde quantité, qui est divisée par la première, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande. Donc après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six ; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par cinq qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.

Par cette règle, il s'ensuit que tu poses douze pour la chose inconnue et tu ôtes son tiers et son quart et il restera cinq ; comment récupérer douze ? La chose effectivement inconnue. Il faut en fait deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et il viendra dix-neuf et un cinquième.

Remarquons tout d'abord que, même s'il est question de *census*, ce problème est en fait un problème du premier degré. L'auteur nous explique la règle des plateaux de la balance (figure 2).

[3] En fait, elles sont généralement « bien choisies » pour simplifier les calculs.
[4] Terme désignant le carré de l'inconnue recherchée.

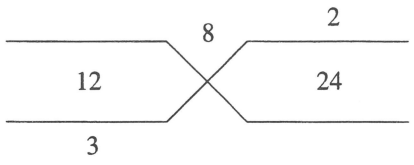


Fig. 2

La première fausse position qu'il choisit est 12. C'est une valeur dont il est facile de soustraire le tiers et le quart. On trouve 5, c'est-à-dire qu'il y a un déficit de 3 par rapport à la valeur 8 qu'il faudrait obtenir. On place ce 3 en-dessous du plateau de la balance qui contient la valeur 12, comme le montre la figure 2. On recommence l'opération pour la seconde fausse position, dont la valeur choisie est 24. Le résultat 10 présente un excès de 2 par rapport à la valeur attendue 8. Cette valeur 2 est placée au-dessus du deuxième plateau. Il faut ensuite effectuer l'opération suivante :

$$\frac{2 \times 12 + 3 \times 24}{2+3} = \frac{96}{5}.$$

La traduction moderne du problème nous donne l'équation

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8 \quad \text{ou} \quad \frac{5x}{12} = 8 \ (*) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{96}{5}.$$

Nous constatons que la réponse obtenue par la méthode de fausse position est bien celle que nous trouvons en résolvant l'équation (*). Comment pouvons-nous expliquer cela ?

Représentons graphiquement la fonction linéaire $y = \dfrac{5x}{12}$ qui correspond au premier membre de l'équation (*). La valeur de cette fonction est

$$5 \text{ pour } \quad x = 12,$$
$$10 \text{ pour } \quad x = 24,$$

comme le montre la figure 3.

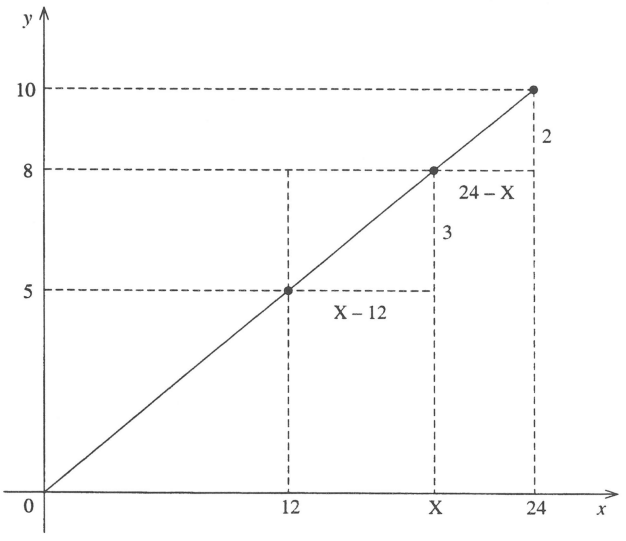


Fig. 3

La valeur cherchée est celle, notée X, pour laquelle la fonction prend la valeur 8. La figure montre deux triangles rectangles semblables, dont les bases sont respectivement $\mathrm{X}-12$ et $24-\mathrm{X}$, et dont les hauteurs sont 3 et 2. Les relations de proportionnalité entre les mesures des côtés de deux figures semblables nous permettent d'écrire

$$\frac{\mathrm{X}-12}{24-\mathrm{X}}=\frac{3}{2}.$$

Résolvons cette équation sans effectuer les multiplications,

$$2\cdot(\mathrm{X}-12)=3\cdot(24-\mathrm{X}),$$

$$2\mathrm{X}-2\times 12=3\times 24-3\mathrm{X},$$

$$2\mathrm{X}+3\mathrm{X}=2\times 12+3\times 24 \qquad (3+2)\mathrm{X}=2\times 12+3\times 24,$$

et finalement

$$\mathrm{X}=\frac{2\times 12+3\times 24}{2+3}.$$

Nous retrouvons ainsi la formule de la double fausse position.

L'auteur tente de convaincre le lecteur de la généralité de sa méthode en multipliant les exemples. Il justifie à chaque fois le résultat obtenu en traitant le problème d'une autre manière. Ainsi, dans le dernier paragraphe, il termine son exposé en résolvant l'équation par la méthode de fausse position simple.

La fausse position choisie est 12, ce qui donne 5 pour la valeur de $x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}$. Il se demande alors par combien il faut multiplier 5 pour retrouver 12 ; il cherche donc le facteur qui permet de passer de la deuxième colonne du tableau ci-dessous à la première. Il trouve $2\frac{2}{5}$, qu'il multiplie par 8 pour trouver la solution $19\frac{1}{5}$. Remarquons que comme dans le problème 24 du papyrus Rhind, l'ordre des facteurs est inversé.

x	$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}$
12	5
$19\frac{1}{5}$	8

$\times 2\frac{2}{5}$
$\longleftarrow$

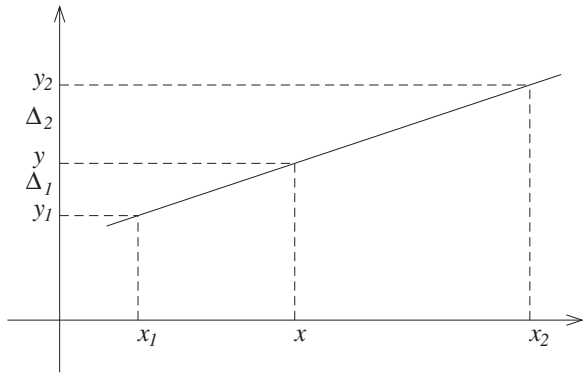
Voici donc un exemple de fausse position simple où l'inconnue est calculée à partir du rapport externe du tableau de proportionnalité.

Prolongement possible

La règle peut être appliquée aux problèmes généraux du premier degré. Soit l'équation

$$ax+b=y.$$

Considérons les deux fausses positions x_1 et x_2 qui produisent les deux valeurs y_1 et y_2.



$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ \Delta_1 &= |y_1 - y| \\ \Delta_2 &= |y_2 - y| \end{aligned}$$

Fig. 4

Dans la figure ci-dessus, qui illustre le cas où la valeur cherchée est située entre les deux fausses positions, nous avons

$$\Delta_1 = |y_1 - y| = y - y_1 = a(x - x_1),$$

$$\Delta_2 = |y_2 - y| = y_2 - y = a(x_2 - x).$$

De l'expression de la proportion $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, on peut tirer la valeur de x qui vaut

$$x = \frac{x_2\Delta_1 + x_1\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

Ceci montre que la valeur de x obtenue par la règle de la balance peut encore être interprétée comme le barycentre des deux fausses positions x_1 et x_2, munies des poids Δ_2 et Δ_1.

Un raisonnement similaire permet d'établir la formule dans les cas où les deux fausses positions sont, soit plus petites, soit plus grandes que l'inconnue. Nous obtenons

$$x = \frac{x_2\Delta_1 - x_1\Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{x_1\Delta_2 - x_2\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1},$$

en tenant compte du fait que toutes les quantités qui interviennent dans le calcul sont nécessairement positives (« Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande… », nous indique Abraham ibn Ezra).

Échos des classes

Les élèves ont été surpris de voir que les problèmes de mathématique pouvaient être résolus en langage courant, par un texte dépourvu de formules, mais que c'était « encore plus compliqué qu'avec des maths ». Après avoir constaté les difficultés et la lourdeur de ce mode d'expression, ils acceptent mieux le formalisme actuel dont l'utilité leur paraît plus évidente, et surtout perçoivent que « ce n'est qu'une question de convention ».

3 Les combinaisons linéaires chez Léonard de Pise

De quoi s'agit-il ? Montrer comment Léonard de Pise, dit Fibonacci résout un système linéaire indéterminé.

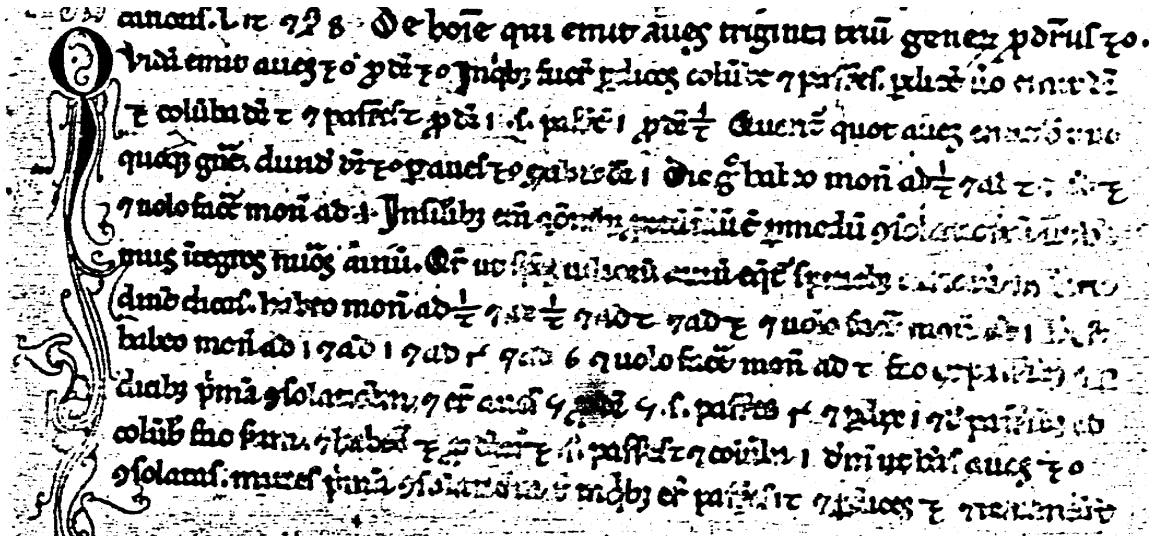
Enjeux Introduire et travailler la notion de *combinaison linéaire*. Celle-ci est une généralisation du rapport interne (voir la section 7.3 à la page 589).

De quoi a-t-on besoin ? Le texte du problème des oiseaux ci-dessous, repris en annexe à la page 475.

3.1 Introduction

On possède peu de renseignements sur Léonard de Pise, autres que ceux qu'il nous livre dans le prologue du *Liber abaci* : son père était *publicus scriba*, scribe pour les commerçants de Pise, à la douane de Bougie, en Algérie. Il fit venir auprès de lui le jeune Léonard afin de lui faire apprendre au contact des Arabes, les méthodes de calcul au moyen de figures indiennes (ce que nous appelons « chiffres arabes »). Plus tard, Fibonacci parcourra tout le bassin méditerranéen (Égypte, Syrie, Grèce, Sicile, Provence) pour étancher sa soif de savoir. Il a contribué à répandre en Occident l'arithmétique basée sur la numération de position (chiffres indo-arabes).

Dans le chapitre onze du *Liber abaci*, Fibonacci introduit la notion de « compensation » des monnaies ; ce sont des problèmes de proportionnalité qui montrent comment calculer le nombre de livres-monnaie qu'on peut battre à partir d'un certain nombre de livres-poids d'argent, lorsqu'on se fixe un taux d'argent dans l'alliage de la livre-monnaie. La technique de résolution qu'il expose à cette occasion lui permet, plus loin dans le chapitre, de résoudre des équations diophantiennes (dans l'ensemble des fractions positives) indéterminées. Voici le texte d'un de ces problèmes où l'auteur utilise des combinaisons linéaires pour rechercher des solutions.



3.2 Le problème des oiseaux

De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

Le texte original en latin est disponible en annexe à la page 474. En voici la traduction.

De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour $\frac{1}{2}$ denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés. Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 ; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix ; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde ; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

Le système linéaire qui traduit ce problème est

$$\begin{cases} 3x + 2y + \dfrac{z}{2} &= 30, \\ x + y + z &= 30. \end{cases}$$

Fibonacci observe tout d'abord que, pour acheter 30 oiseaux pour 30 deniers, il faut constituer des ensembles de n oiseaux pour n deniers de manière que *l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères.* Réaliser une telle égalité avec trois espèces d'oiseaux semble difficile ; une manière de simplifier le problème consiste à rechercher des combinaisons de deux espèces d'oiseaux dans la même proportion.

Fibonacci observe que

$$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5,$$

ce qui lui fournit un ensemble de *cinq* oiseaux (une perdrix et quatre moineaux) pour *cinq* deniers (ensemble E_1 du tableau ci-dessous).

Il observe encore que

$$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3,$$

ce qui lui donne cette fois un ensemble de *trois* oiseaux (une colombe et deux moineaux) pour *trois* deniers (ensemble E_2 du tableau ci-dessous).

En considérant une combinaison linéaire convenable des deux relations qui précèdent, il obtiendra alors *trente* oiseaux pour *trente* deniers. Cette combinaison linéaire consiste à prendre trois fois le premier ensemble de volatiles et cinq fois le second ($E = 3E_1 + 5E_2$).

	perdrix à 3 deniers	colombes à 2 deniers	moineaux à 1/2 denier	nombre d'oiseaux	coût
E_1	1		4	1+4=5	$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$
E_2		1	2	1+2=3	$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$
E	3	5	$3 \times 4 + 5 \times 2 = 22$	3+5+22=30	$3 \times 3 + 5 \times 2 + 22 \times \frac{1}{2} = 30$

L'ensemble $E = 3E_1 + 5E_2$ fournit bien une solution du problème, puisqu'il s'agit d'un ensemble de 30 oiseaux, de trois espèces différentes pour une somme de 30 deniers.

L'auteur termine en nous signalant qu'il est possible de trouver des combinaisons linéaires qui réalisent des ensembles de n'importe quel nombre n d'oiseaux pour n deniers, si n est supérieur à 15. Mais pour n inférieur à 15, il affirme que le problème n'est possible que pour 8, 11 et 13 oiseaux, et il décrit la combinaison qui fournit la solution dans chacun des cas.

> Montrer qu'il y a une solution pour toute valeur de n supérieure à 15. FIBONACCI n'a-t-il pas oublié une possibilité pour n inférieur à 15 ?

On peut obtenir

16 oiseaux pour 16 deniers par la combinaison $2E_1 + 2E_2$,

17 oiseaux pour 17 deniers par la combinaison $1E_1 + 4E_2$,

18 oiseaux pour 18 deniers par la combinaison $3E_1 + 1E_2$,

et à partir de là, on obtient 19, 20 et 21 oiseaux en ajoutant $1E_2$ à chacune des combinaisons précédentes, et ainsi de suite.

On peut aussi obtenir 14 oiseaux pour 14 deniers par la combinaison $1E_1 + 3E_2$.

8

Introduction au calcul vectoriel

Avant-propos

Au fil de leur parcours scolaire, les élèves ont calculé, d'abord avec des nombres, ensuite avec des lettres qui représentent des nombres. Afin de les motiver, on leur annonce qu'on va leur faire découvrir quelque chose de nouveau sur le plan du calcul. Ce nouveau mode de calcul permettra de traduire des problèmes géométriques sous forme algébrique. En troisième année, les élèves ont déjà vu qu'ils peuvent associer une équation à toute droite du plan. Ils ont vu l'intérêt de cette association et peuvent comprendre qu'un outil algébrique performant peut être utile pour faire de la géométrie plus évoluée.

L'introduction au calcul vectoriel est conçue de manière très intuitive à la section 1. Cependant, après ce démarrage en douceur, les problèmes résolus à la section 2 exploitent de manière très profonde le concept de combinaison linéaire.

Le lecteur intéressé par l'émergence du concept de vecteur et les débuts du calcul vectoriel trouvera au chapitre 14 une brève anthologie de sources historiques commentées.

1 Vers un nouveau mode de calcul

De quoi s'agit-il ?

Montrer des objets mathématiques sur lesquels agissent l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire : les vecteurs déplacements dans le plan et dans l'espace, les polynômes et les suites arithmétiques.

Enjeux

Faire apparaître une structure commune et dégager la notion d'espace vectoriel. On trouvera, à la section 7 du chapitre 16, des commentaires qui permettent de situer les vecteurs et les combinaisons linéaires dans le développement global de l'idée de linéarité de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. Sur l'usage essentiel fait ci-dessous du plan quadrillé, voir au même chapitre la section 7.6.

Matières couvertes

Vecteurs : composantes, somme, produit par un nombre, relation de Chasles, propriétés du calcul vectoriel, combinaisons linéaires.

Compétences

Décomposer un vecteur suivant deux directions et lui *associer un couple de nombres.*

Construire la somme de vecteurs et lui associer un couple de nombres.

Utiliser le théorème de Thalès pour construire le produit d'un vecteur par un nombre et lui associer un couple de nombres.

De quoi a-t-on besoin ?

Un plan de Manhattan, ou de l'Ensanche à Barcelone, ou de tout autre quartier dont les rues forment un quadrillage régulier.

Des feuilles A4 recouvertes d'un quadrillage de 1 cm de côté, d'autres recouvertes d'un réseau de parallélogrammes, d'autres encore d'un réseau de triangles. D'autres feuilles encore, où certains points sont marqués sur le quadrillage. Ce matériel peut être obtenu par photocopie des documents fournis en annexe aux pages 477 à 485 et reproduits en petit dans les figures 1 à 14.

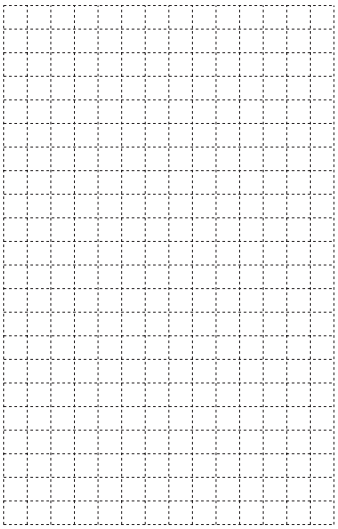


Fig. 1 : quadrillage

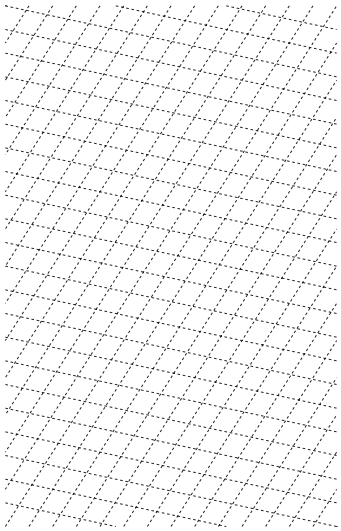


Fig. 2 : réseau de parallélogrammes

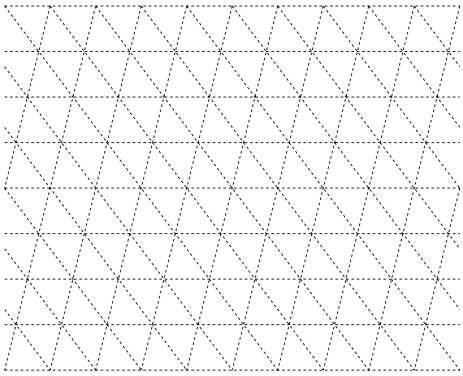


Fig. 3 : réseau de triangles

1.1 Opérations sur les nombres réels

Comment s'y prendre ?

Avant d'introduire ce nouveau mode de calcul portant sur des éléments géométriques, le professeur peut commencer par faire un état des lieux des connaissances des élèves concernant les règles du calcul sur les nombres. Les élèves connaissent les règles de calcul et les propriétés de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division des nombres réels, mais ne sont pas forcément capables de leur donner un nom. Ils connaissent le rôle du « zéro » pour l'addition et du « un » pour la multiplication, mais n'ont peut-être pas la notion de « neutre ». Il peut être intéressant de commencer l'activité par une mise en ordre des propriétés de l'addition et de la multiplication des réels ; la synthèse qui interviendra à la fin de l'activité prendra plus de sens et plus de force si elle s'appuie sur une comparaison avec les propriétés du calcul sur les nombres.

Le relevé de ces propriétés prend la forme d'une première étape de formalisation et d'une mise en place du vocabulaire adéquat.

Les propriétés de l'addition des nombres réels

1. La somme de deux nombres réels existe toujours et est un nombre réel.
2. La somme des réels est associative, cela signifie que, si on souhaite additionner trois réels, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat
$$(a+b)+c = a+(b+c).$$
3. Le nombre 0 est neutre pour l'addition, cela signifie que si on l'ajoute à n'importe quel nombre réel (ou si on lui ajoute n'importe quel nombre), le résultat de la somme est ce nombre lui-même
$$a+0 = a = 0+a.$$
4. Chaque réel a possède un opposé noté $-a$, c'est le nombre qu'il faut lui ajouter pour obtenir le neutre 0
$$a+(-a) = 0 = (-a)+a.$$
5. La somme des réels est commutative, ce qui signifie que dans une somme, on peut changer l'ordre des termes
$$a+b = b+a.$$

Ces cinq propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un *groupe commutatif* pour l'addition.

Parmi les propriétés évoquées ci-dessus, quelles sont celles que possède la soustraction des nombres réels ?

La soustraction n'est ni associative ni commutative. L'existence d'un neutre soulève un problème plus subtil. Les élèves observent que
$$a-0 = a \quad \text{mais que} \quad 0-a \neq a.$$

Le nombre 0 est donc neutre pour la soustraction lorsqu'il est placé à droite de a, mais pas lorsqu'il est placé à gauche. Ceci ne peut se produire que pour une opération non commutative, ce qui est le cas de la soustraction. Tandis que dans l'addition (ou toute autre opération commutative), le neutre à droite est forcément aussi neutre à gauche.

Tout ceci montre bien que l'addition fonctionne, en un certain sens, mieux que la soustraction et c'est pourquoi la soustraction d'un nombre peut être redéfinie comme l'addition de son opposé

$$a - b = a + (-b).$$

Les propriétés de la multiplication

1. Le produit de deux nombres réels existe toujours et est un nombre réel[1].
2. Le produit des réels est associatif, cela signifie que, si on souhaite multiplier trois réels, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. Le nombre 1 est neutre pour la multiplication, cela signifie que si on multiplie n'importe quel nombre réel par 1 (ou si on multiplie 1 par ce nombre), le résultat du produit est ce nombre lui-même

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$$

4. Chaque réel $a \neq 0$ possède un inverse noté $\frac{1}{a}$, c'est le nombre par lequel il faut le multiplier pour obtenir le neutre 1

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a.$$

5. Le produit des réels est commutatif, ce qui signifie que dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Ces cinq propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des nombres réels non nuls, noté $\mathbb{R}_0$, est un *groupe commutatif* pour la multiplication.

Parmi les propriétés évoquées ci-dessus, quelles sont celles que possède la division des nombres réels ?

Tout comme la soustraction des nombres réels, la division n'est ni associative, ni commutative. Le neutre 1 est neutre à droite mais pas à gauche.

[1] Le quotient de deux nombres réels n'est pas toujours un réel. Il faut enlever 0 pour que la division soit une opération interne. Les propriétés de la multiplication décrites ici restent vraies dans l'ensemble des réels non nuls, y compris la première, puisque le produit de deux réels ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

Comme pour la soustraction, on peut remplacer la division par un nombre par la multiplication par son inverse

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Le professeur qui le souhaite peut formaliser davantage l'énoncé de ces propriétés en introduisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, qui peuvent être perçus dans ce contexte comme des abréviations utiles. Il faudra cependant éviter de rebuter les élèves par une formalisation exagérée, tout dépend de la classe que l'on a devant soi. Il convient de garder à l'esprit que le but premier de cette activité n'est pas d'arriver à une définition axiomatique d'un espace vectoriel, mais bien d'en donner une approche intuitive et de dégager les propriétés du calcul vectoriel pour les mettre en œuvre par la suite.

Échos des classes

Cette mise au point concernant les opérations sur les nombres réels s'est imposée d'elle-même dès qu'on a voulu comparer les propriétés du calcul sur les déplacements (ou sur les couples de composantes) aux propriétés du calcul dans $\mathbb{R}$.

1.2 Déplacements dans un plan

Comment s'y prendre ?

Ces mises au point étant faites, plus ou moins rapidement suivant les connaissances de la classe, le professeur annonce clairement la mise en place d'un nouveau mode de calcul, sur des objets géométriques, avec des opérations d'addition et de multiplication qu'il faudra comparer, du point de vue de leurs propriétés, avec les opérations bien connues sur les nombres.

Le début de cette activité reprend des idées assez simples, qui sont sans doute familières aux élèves depuis le premier degré. Une approche similaire leur a probablement été proposée lors de l'introduction des repères et des coordonnées. Même si la description du début de cette activité semble longue, le travail initial sur le quadrillage ne devrait donc pas prendre beaucoup de temps ; il est néanmoins nécessaire pour préparer la suite.

On montre aux élèves un plan de Manhattan (ou de Barcelone) et on leur pose les questions suivantes.

> Comment indiquer le chemin qui mène d'un point quelconque de cette ville à un autre ?
> Ce chemin est-il unique ?
> Y a-t-il plusieurs chemins de même longueur ?
> Y a-t-il des chemins plus courts que les autres ?

Après une première discussion, on fournit à chaque élève une feuille munie d'un quadrillage sur lequel sont marqués quatre points A, B, C et D, les mêmes pour tous les élèves (figure 4).

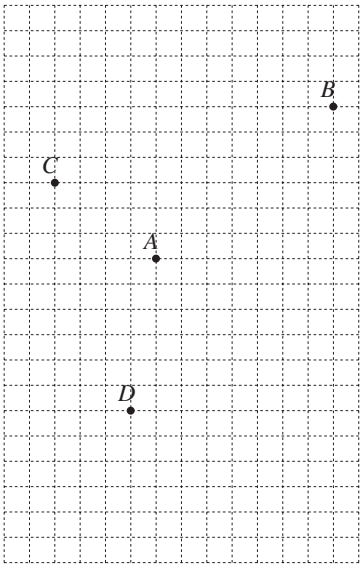


Fig. 4 : 4 points sur un quadrillage

On leur demande de dessiner différents chemins qui mènent de A à B sur le quadrillage, sans contrainte de longueur, et de trouver ensuite une manière de décrire ces chemins à leurs condisciples. Ils vont probablement imaginer un codage du type droite, gauche, haut, bas ou encore nord, sud, est, ouest.
La plupart d'entre eux décriront leur chemin de l'une de ces façons

- 7 à droite, 6 en haut,
- 2 à droite, 2 en haut, 3 à droite, 4 en haut, 2 à droite,
- 5 à droite, 2 en haut, 2 à droite, 4 en haut,

que nous noterons

- $7d, 6h$,
- $2d, 2h, 3d, 4h, 2d$,
- $5d, 2h, 2d, 4h$.

Tous ces chemins sont de même longueur, mais il apparaît bien vite que les messages longs et compliqués sont susceptibles d'être mal compris et entraînent des erreurs.

La contrainte supplémentaire de simplifier les indications au maximum s'impose alors d'elle-même. Ainsi, en regroupant les déplacements[2] vers la droite et vers le haut, on obtient pour tous ces chemins : $7d, 6h$ ou $6h, 7d$. Dans ce codage, l'ordre dans lequel on note les déplacements horizontaux et verticaux n'a pas d'importance.

Certains élèves auront dessiné un chemin plus long, comme par exemple $1h, 1g, 2h, 6d, 1h, 2d, 2h$, ce qui donne après regroupement des déplacements dans le même sens $8d, 1g, 6h$.

Le message peut encore être réduit en observant que le déplacement de 1 vers la droite est compensé par le déplacement de 1 vers la gauche, ainsi on obtient également $7d, 6h$.

Tous les chemins de A à B peuvent donc s'écrire $7d, 6h$ après regroupement des déplacements dans une même direction et en soustrayant ceux qui vont en sens contraires. Notons AB le déplacement de A à B obtenu après cette réduction. De la même manière, le déplacement AC pourra s'écrire $4g, 3h$ et AD, $1g, 6b$. D'autres déplacements comme BC ou CD peuvent être examinés si nécessaire. Inversement, les élèves constateront qu'il leur est toujours possible de placer sans ambiguïté le point P tel que AP s'écrit $2d, 8b$.

Une activité similaire est alors proposée sur une feuille munie d'un réseau de parallélogrammes (figure 5).

[2] Dans ce contexte, le mot déplacement utilisé tout d'abord dans un sens naïf, sera précisé peu à peu au cours de l'activité.

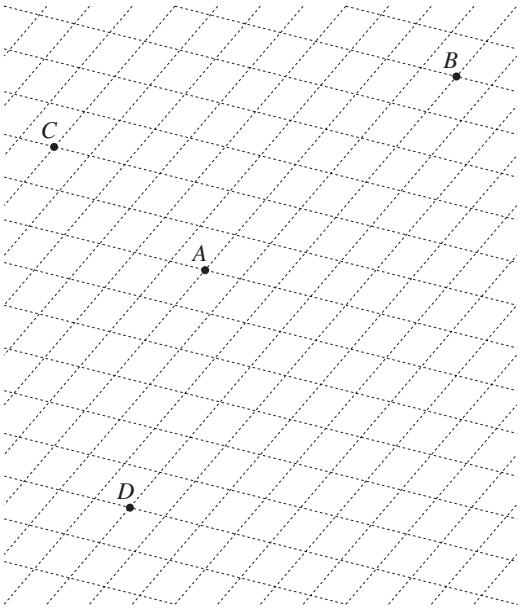


Fig. 5 : 4 points sur un réseau de parallélogrammes

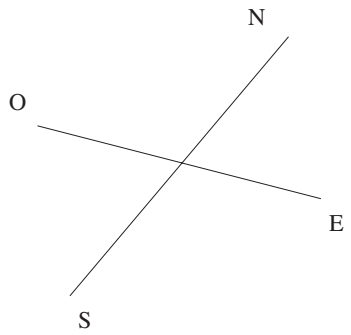


Fig. 6 : codage

Les symboles de codage d, g, h, b ne conviendront sans doute plus pour décrire les chemins sur cette figure. Les élèves ne manqueront pas de suggérer un codage adéquat. Pour la suite de cette discussion, nous adopterons le codage illustré par la figure 6, par analogie avec les plans des villes.

Les déplacements AB, AC et AD s'écrivent alors

- AB : 2E, 6N,
- AC : 6W, 2N,
- AD : 3E, 6S ;

et le point E tel que BE s'écrit 5W, 4S peut être placé sans ambiguïté.

On peut alors s'interroger sur la nécessité de disposer de quatre symboles de codage puisqu'il n'y a en fait que deux directions, et sur chacune d'entre elles deux sens. Les élèves, qui ont déjà manipulé des repères auparavant, proposeront par exemple de garder d et h pour le quadrillage (E et N pour le réseau de parallélogrammes) et de compter négativement les déplacements vers la gauche et vers le bas (vers l'ouest et le sud). Ceci revient à orienter chacune des deux directions privilégiées sur ces grilles. Dans cette nouvelle optique, on écrira $-3d, 5h$ au lieu de $3g, 5h$ et $-5d, -8h$ au lieu de $5g, 8b$. C'est donc bien l'introduction des nombres négatifs qui nous permet de réduire à deux le nombre des symboles de codage. Ainsi, tout déplacement sur une de ces grilles pourra être représenté par une expression du type $\alpha d, \beta h$ ou $\beta h, \alpha d$, où α et β sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Est-il possible de simplifier encore le codage pour ne garder que les deux nombres ?

Le professeur amènera les élèves à la conclusion qu'il faut convenir d'un

ordre pour énoncer ces nombres. Par exemple, si le premier nombre représente le déplacement sur la direction gauche-droite, et le deuxième, le déplacement sur la direction bas-haut, il n'y aura plus d'ambiguïté.

Ainsi, sur le quadrillage,

- $7d, 4h$ est noté $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;
- $3g, 5h$ est noté $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$;
- $5g, 8b$ est noté $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Il convient d'insister sur l'importance de la convention à propos de la disposition des nombres. En effet, s'il est indifférent d'écrire $7d, 4h$ ou $4h, 7d$ pour désigner univoquement le déplacement AB, le couple $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ représente le déplacement $7d, 4h$, c'est-à-dire AB, tandis que le couple $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ représente le déplacement $4d, 7h$, différent de AB.

Nous avons choisi de disposer les couples sous forme de colonnes pour préparer le vecteur colonne du calcul matriciel et pour éviter la confusion avec les couples de coordonnées (le lien sera explicité plus tard). De plus, les différentes opérations sur les couples, qui se font terme à terme, se voient mieux dans cette disposition où les termes correspondants sont sur une même ligne.

Dans les deux cas qui viennent d'être examinés, il apparaît que deux directions suffisent pour décrire un déplacement quelconque sur le réseau. Les élèves reçoivent alors une feuille munie d'un réseau triangulaire et on leur demande de décrire les déplacements de A à B et de A à C (figure 7).

Peut-on encore décrire ces déplacements au moyen de deux symboles ?

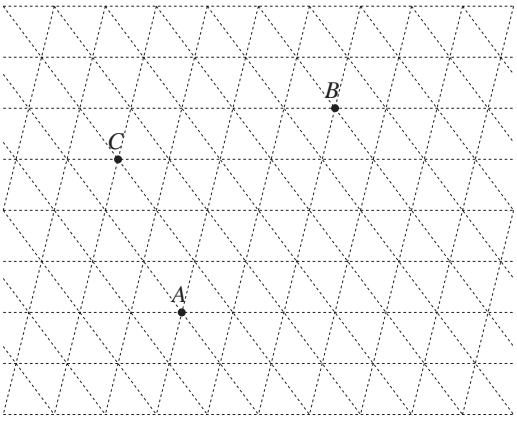


Fig. 7 : 3 points sur un réseau triangulaire

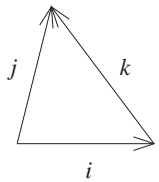


Fig. 8 : orientation des 3 directions

Trois directions privilégiées, que nous noterons i, j, k, se dégagent sur le réseau de triangles. Munissons chacune d'une orientation : de gauche à

droite pour la direction i, de bas en haut pour les directions j et k, comme le montre la figure 8. Pour décrire le déplacement AB, les élèves proposeront spontanément $2i, 4j$ qui semble le plus naturel, tandis que pour AC, ils pourraient proposer $1i, 3k$, ou $1j, 2k$, ou encore $-2i, 3j$, ou même $-1i, 2j, 1k$. Il apparaît néanmoins que deux symboles suffisent encore pour décrire les déplacements sur le réseau triangulaire ; une façon de s'en convaincre est de remarquer que, si on supprime une des trois directions, on ne modifie pas les nœuds du réseau. Cependant, il n'y a plus unicité de l'écriture puisque les élèves proposent différentes solutions, suivant les deux directions qu'ils ont choisies parmi les trois directions du réseau. Il est cependant possible de passer d'une écriture à une autre si on remarque que

- $1i, 1k$ peut remplacer $1j$;
- $1j, -1k$ peut remplacer $1i$;
- $-1i, 1j$ peut remplacer $1k$.

On demande aux élèves de le vérifier sur les différentes formes proposées pour AC.

Peut-on écrire AB en utilisant seulement i, k ou j, k ?

AB peut s'écrire $6i, 4k$ ou $6j, -2k$. Les déplacements sur le réseau triangulaire peuvent donc également s'exprimer au moyen de deux directions, mais il faudra faire un choix parmi i, j, k. Ils pourront donc être représentés par des couples de différentes manières.

- Pour le choix des directions i, j, dans cet ordre,
  - AB sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;
  - AC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
  - BC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Pour le choix des directions i, k, dans cet ordre,
  - AB sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$;
  - AC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
  - BC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Pour le choix des directions j, k, dans cet ordre,
  - AB sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$;
  - AC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
  - BC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On peut à nouveau conclure que deux directions suffisent pour décrire tous les déplacements, mais que les couples associés à chaque déplacement dépendent du choix des deux directions. Cependant, dès que deux directions orientées ont été choisies dans un ordre déterminé, le couple associé à chaque déplacement est unique.

Échos des classes

Le travail sur le quadrillage et le réseau de parallélogrammes se fait rapidement. Les élèves sont plongés dans le contexte familier du repérage dans le plan. Ils conçoivent facilement que deux nombres suffisent pour décrire un déplacement et qu'il est nécessaire d'adopter une convention pour l'ordre de ces deux nombres.

Le travail sur le réseau triangulaire prend plus de temps (une période de cours) mais permet de faire progresser considérablement toute une série d'intuitions concernant l'expression des vecteurs dans une base.

Même si on ne prononce pas des expressions comme *dépendance linéaire*, *indépendance linéaire*, *famille libre*, *famille génératrice*, les élèves perçoivent intuitivement que, dès qu'on se donne deux déplacements de directions différentes, ils engendrent tous les déplacements du plan. De plus, l'activité montre clairement que les deux déplacements « de base » déterminent univoquement les *composantes* des déplacements, mais que ces composantes sont différentes chaque fois que l'on change de base. Les élèves comprennent aussi qu'il est possible de calculer les composantes des déplacements dans une nouvelle base dès qu'on connaît les composantes des déplacements dans l'ancienne et les composantes des déplacements de l'ancienne base dans la nouvelle (c'est ce que l'on fait quand on remarque que $1i, 1k$ peut remplacer $1j$, par exemple).

1.3 Opérations sur les déplacements

Comment s'y prendre ?

Pour définir les opérations sur les déplacements, revenons dans le plan muni d'un quadrillage et de quatre points comme dans la figure 9.

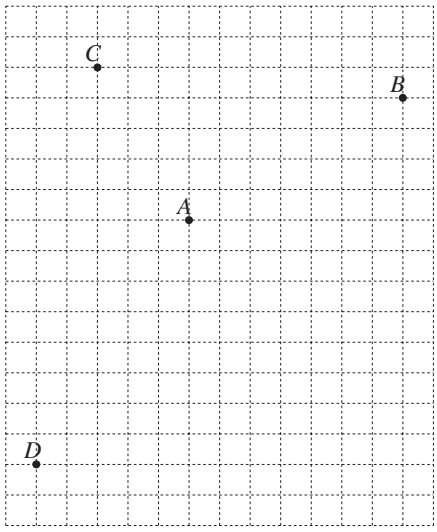


Fig. 9 : Addition de déplacements.

Addition de déplacements

Premier cas : l'origine du second déplacement coïncide avec l'extrémité du premier.

Si après le déplacement AB noté $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, on effectue le déplacement BC noté $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$, on s'est déplacé de A en C. On demande aux élèves de décrire le déplacement AC. Deux modes de pensée peuvent guider leur réflexion.

Certains d'entre eux penseront à regarder AC sur le dessin et diront que AC se note $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On leur pose alors la question suivante.

Une relation existe-t-elle entre les trois couples de nombres, et si oui, laquelle ?

Les élèves constatent facilement que

$$-3 = 7 + (-10) \quad \text{et} \quad 5 = 4 + 1.$$

Cette observation nous incite à parler d'addition de déplacements. Cette opération sera notée

$$AB + BC = AC$$

et pour les couples correspondants

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

D'autres penseront à réinterpréter les couples en termes de déplacements horizontaux et verticaux. En effectuant BC après AB, le déplacement obtenu est 7 à droite suivi de 10 à gauche, et 4 vers le haut suivi de 1 vers le haut. Ils concluront que le résultat est donc 3 à gauche et 5 en haut, ce qui correspond au couple $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. L'opération qu'ils font spontanément est l'addition terme à terme des couples $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il est donc naturel d'interpréter cette opération comme une somme et on écrira

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Après avoir vérifié sur le dessin que $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est bien le couple qui représente AC on écrit aussi

$$AB + BC = AC.$$

Cette relation est connue sous le nom de « relation de Chasles ».

Si après AB, on effectue le déplacement en sens contraire BA, on constate que

$$AB + BA = AA.$$

Le dessin montre que le couple associé à BA est $\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$, l'écriture en termes de couples de la relation précédente est alors

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi le *déplacement nul*, qui consiste à rester sur place, et BA comme le *déplacement opposé* de AB, ce qui permet d'écrire

$$BA = -AB \text{ et } \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous permet d'établir le lien entre l'addition et la soustraction des déplacements.

On exploite ces résultats pour répondre à la question ci-dessous.

Connaissant CD noté $\begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$ et CA noté $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, quel est le déplacement AD tel que $CA + AD = CD$?

Des élèves cherchent le couple qui, additionné à $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, donne $\begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$, et trouvent $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ pour AD. Ils écriront

$$CA + AD = CD \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

D'autres penseront à utiliser la relation de Chasles et écriront

$$AD = AC + CD \text{ ou } AD = -CA + CD,$$

et pour les couples correspondants

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Deuxième cas : l'origine du second déplacement ne coïncide pas avec l'extrémité du premier.

Dans un premier temps, on demande aux élèves de dessiner un déplacement quelconque, par exemple le déplacement $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, sur un quadrillage vierge. Ils le placeront évidemment en des endroits différents de la feuille. Ce déplacement, noté AB, peut être visualisé en traçant le segment qui joint son origine A à son extrémité B. Le couple $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ détermine la *direction* du déplacement, son *sens* et sa *longueur*, mais ne donne aucune indication sur l'endroit où il faut le dessiner sur la feuille.

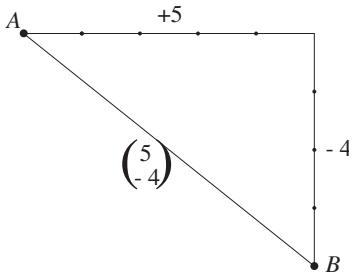


Fig. 10

Une discussion au sein de la classe amène à la conclusion que tous les dessins sont corrects, qu'ils représentent tous le même déplacement, ou des *déplacements égaux*. Il apparaît donc qu'un même déplacement peut être dessiné en une infinité d'endroits dans le plan et qu'on pourra choisir parmi toutes ces possibilités celle qui convient le mieux à chaque situation. Les élèves évoqueront peut-être l'analogie avec les translations.

Ceci va permettre de définir l'addition de déplacements même si l'origine du second déplacement ne coïncide pas avec l'extrémité du premier sur le dessin. Il suffira de dessiner une autre représentation du deuxième déplacement. Ainsi pour définir $AB + CD$, on effectue le déplacement AB, puis le déplacement égal à CD, dont l'origine est en B et l'extrémité en E. On peut encore dire que BE est la représentation du déplacement CD, dont l'origine coïncide avec l'extrémité de AB. Les élèves sont invités à placer le point E sur le quadrillage (voir figure 12 à la page 232). On écrira

$$AB + CD = AB + BE = AE.$$

On constate que AE s'écrit $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ et que

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

On pourrait aussi dessiner une autre représentation de AB, dont l'extrémité coïncide avec C, mais, dans ce cas, le dessin sort du cadre de la feuille. On peut encore imaginer de remplacer AB et CD par des déplacements $A'B'$ et $B'E'$, tels que $A'B' = AB$ et $B'E' = CD$. Les déplacements $A'B'$ et $B'E'$ sont ainsi placés dans les conditions d'application de la relation de Chasles et leur somme est le déplacement $A'E'$. On invite les élèves à réaliser cette construction en choisissant pour B' un nœud du quadrillage tel que le dessin soit entièrement contenu dans le cadre. La comparaison du déplacement AE et des différentes représentations de $A'E'$ montre bien que les sommes obtenues sont égales ; le couple de nombres est toujours $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ pour tous les déplacements $A'E'$.

Multiplication de déplacements par un nombre

Quel est le déplacement CL qui, en partant de C, mène deux fois plus loin que CA dans la même direction et le même sens[3] ?

[3] Pour multiplier un vecteur par deux, différents modes de pensée coexistent dans les

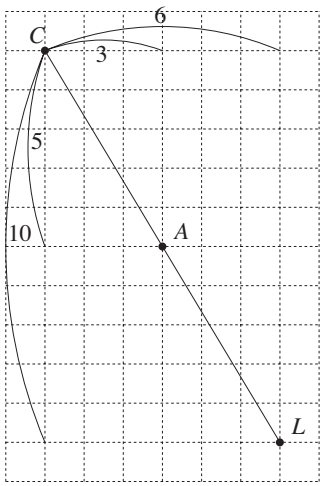


Fig. 11 : Construction de CL

Après avoir placé L et observé la configuration de Thalès de la figure 11, on constate que CL correspond à $\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$. Il est donc naturel d'adopter la convention d'écriture

$$CL = 2CA \text{ et } \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix};$$

ainsi que

$$CL = -2AC \text{ et } \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

ou encore

$$CA = \frac{1}{2}CL \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix};$$

$$AC = \frac{-1}{2}CL \text{ et } \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Ces nombres, par lesquels on multiplie les déplacements (et les couples) sont appelés *scalaires*[4] pour les distinguer des nombres qui composent les couples représentant les déplacements.

On peut se demander où se trouve le point N tel que

$$CN = \frac{1}{2}CA \text{ correspondant au couple } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le point N n'est plus un nœud du quadrillage. De par leur définition, les déplacements CN et CL, multiples de CA, ont la même direction que CA,

esprits : ajouter le vecteur à lui-même, aller deux fois plus loin dans la même direction et le même sens ou doubler chaque composante.

[4] C'est à W. R. Hamilton que nous devons l'introduction des vocables *vecteurs* et *scalaires*, dans ses *Elements of Quaternions* [1866]. Les *scalaires* sont des nombres qui permettent la comparaison de *vecteurs* qui sont sur un même axe, axe qu'Hamilton appelait *échelle* (en anglais *scale*).

ce qui implique l'alignement des points A, C, N et L. Par contre, le point E, qui, dans un premier temps, semblait aligné avec A et C ne peut l'être car AE n'est pas un multiple de CA. En effet, il n'existe aucune valeur de λ telle que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ces observations sont illustrées par la figure 12.

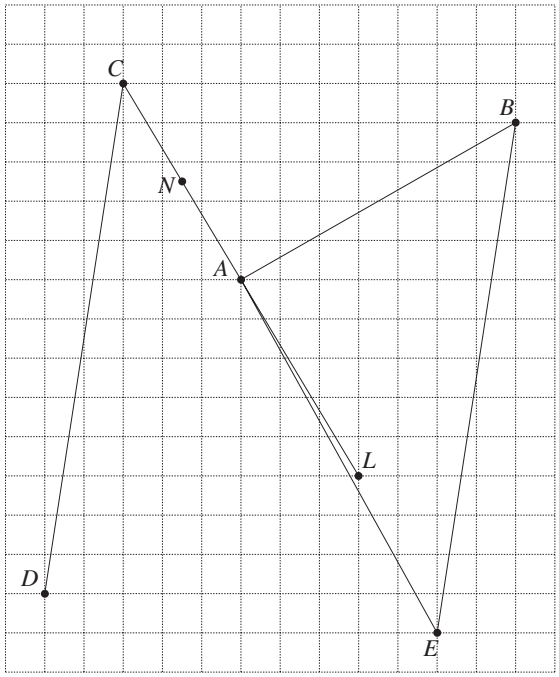


Fig. 12 : Opérations sur les déplacements

La multiplication du déplacement CA par le scalaire $\frac{1}{2}$ nous a permis d'atteindre le point N qui n'est plus un nœud du quadrillage.

Comment, à partir d'un nœud du quadrillage, atteindre d'autres points qui ne sont pas des nœuds ?

Les élèves associeront sans doute la multiplication par un scalaire non entier au fait d'atteindre, à partir d'un nœud du quadrillage, un point qui ne l'est pas.

Les deux opérations de somme et de multiplication par un scalaire peuvent être combinées pour produire une somme de multiples de deux ou plusieurs déplacements. Par exemple, on peut définir le déplacement AX de la manière suivante : $AX = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AC$. Les élèves sont invités à le construire. On dit que le déplacement AX est une *combinaison linéaire* des déplacements AB et AC, les scalaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont les *coefficients* de cette combinaison linéaire.

La multiplication par un scalaire nous a amenés à considérer des déplacements dont le point d'arrivée est un point quelconque du plan. Il faut

donc étendre les opérations à des déplacements dont les extrémités ne sont plus des nœuds du réseau. On perçoit clairement que le point de départ et le point d'arrivée suffisent pour déterminer un déplacement. Dorénavant, nous représenterons toujours celui-ci par un segment de droite joignant le point de départ au point d'arrivée (comme dans les figures 10 à 12). Ce segment est orienté du point de départ vers le point d'arrivée, orientation qui transparaît d'ailleurs dans l'écriture du déplacement, AB étant le déplacement qui va de A vers B et BA son opposé de B vers A. Nous pouvons étendre de manière naturelle les opérations définies sur les déplacements liés au quadrillage à tous les déplacements du plan.

Cependant, pour exprimer chacun des déplacements au moyen d'un couple de nombres comme nous avons pu le faire jusqu'à présent, il faudra choisir deux directions, munies chacune d'un sens et d'une unité. Notons i et j les déplacements unitaires, dans le sens positif, dans chacune de ces deux directions. Si nous pouvons exprimer tout déplacement du plan comme combinaison linéaire de ces deux déplacements « de base », alors, dans l'expression $AB = \lambda i + \mu j$, les coefficients λ et μ déterminent le couple $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ associé à ce déplacement. En effet, les couples associés aux déplacements élémentaires i et j sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et l'écriture sous forme de couples de la combinaison linéaire $\lambda i + \mu j$ est $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. Les élèves sont invités à montrer que cette décomposition est toujours possible dans un cas général.

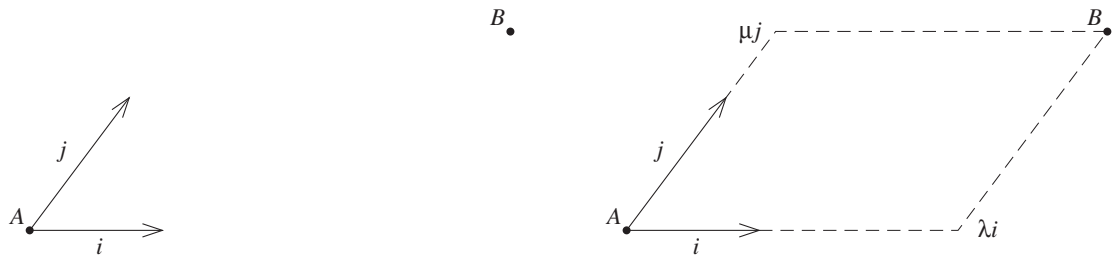


Fig. 13 : Cas général

Remarquons que le choix de deux déplacements « de base » induit dans le plan un réseau de parallélogrammes, déterminé par les directions et les longueurs de i et j. Le choix très naturel et le plus souvent utilisé est celui de deux directions perpendiculaires, l'une horizontale, orientée de gauche à droite, l'autre verticale, orientée de bas en haut, et sur chacune d'elles, la même unité de longueur. Le réseau sous-jacent est alors un quadrillage, mais il est bien entendu que les déplacements ne sont plus liés aux nœuds du réseau. Cependant, comme le quadrillage permet une visualisation plus claire des problèmes, nous continuerons à le faire apparaître dans la plupart des dessins.

Propriétés des opérations

Les exercices suivants et d'autres analogues sont proposés aux élèves. Leur intérêt est non seulement de faire manipuler les opérations qui viennent d'être définies, mais surtout de dégager petit à petit les propriétés du calcul vectoriel.

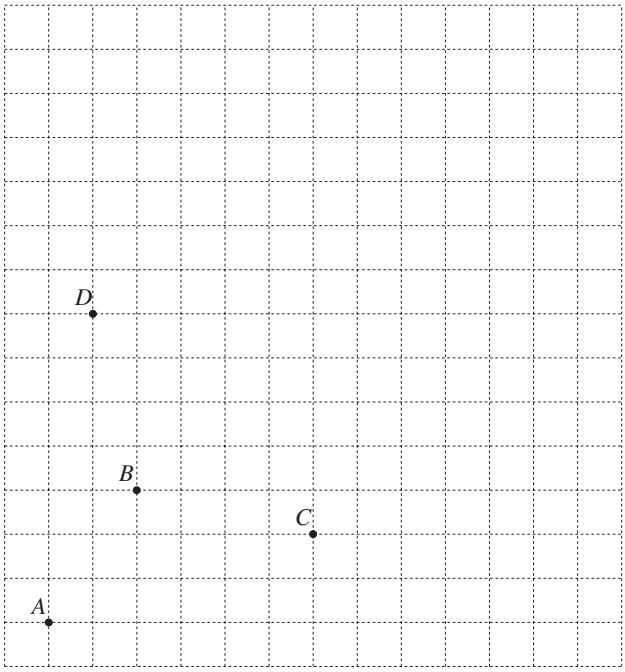


Fig. 14 : Propriétés des opérations

1. Représenter et calculer les couples correspondant à
   - $(AB + BC) + CD$ et $AB + (BC + CD)$;
   - $AB + BC$ et $BC + AB$;
   - $2(AB + BC)$ et $2AB + 2BC$;
   - $2AB + 3AB$ et $(2 + 3)AB = 5AB$;
   - $5(\frac{2}{3}AB)$ et $(5 \cdot \frac{2}{3})AB = \frac{10}{3}AB$.
2. Imaginer une construction géométrique, à partir du quadrillage, pour déterminer
   - le point E tel que $AE = \frac{8}{5}AB$;
   - le point F tel que $CF = \frac{-3}{4}CB$;
   - le point R tel que $AR = \sqrt{2}AD$.

   Indication : pour chacun des cas, choisir sur le quadrillage une unité adaptée à la construction, suffisamment grande pour éviter les imprécisions.

Les propriétés qui sont dégagées des exercices proposés et reprises en synthèse n'ont pas été démontrées. C'est un choix volontaire afin de ne pas allonger ce travail. Il n'est pas malsain de ne pas tout prouver d'emblée, surtout quand ce qu'on a à prouver paraît si naturel.

Synthèse

Addition de déplacements

- La somme de deux déplacements tels que l'origine du second coïncide avec l'extrémité du premier est définie par la relation de Chasles $AB + BC = AC$. En particulier : $AB + BA = AA$.
  BA est le déplacement opposé de AB.
  AA est le déplacement nul.
- Si les couples associés à AB et à BC sont respectivement $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, AC est représenté par le couple $\begin{pmatrix} \alpha + \lambda \\ \beta + \mu \end{pmatrix}$, BA par le couple $\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$, le déplacement nul par le couple $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Des déplacements égaux sont représentés par le même couple.
- La somme de deux déplacements tels que l'origine du second ne coïncide pas avec l'extrémité du premier est définie par
  $$AB + CD = AB + BE = AE$$
  où BE est le déplacement égal à CD, d'origine B.
- Propriétés :
  $$\begin{aligned} (AB + BC) + CD &= AB + (BC + CD), \\ AB + BC &= BC + AB. \end{aligned}$$

Multiplication par un scalaire

- kAB est le déplacement qui va k fois plus loin que B dans la direction de AB, à partir de A. Si k est positif, le sens est celui de AB, sinon, celui de BA.
- kAB est représenté par le couple $\begin{pmatrix} k\alpha \\ k\beta \end{pmatrix}$.
- Propriétés :
  $$\begin{aligned} k(AB + BC) &= kAB + kBC, \\ kAB + \ell AB &= (k + \ell)AB, \\ k(\ell AB) &= (k\ell)AB. \end{aligned}$$

Échos des classes

Le fait de travailler simultanément sur les déplacements du plan et sur les couples de nombres qui y sont associés permet de confronter à chaque étape différents modes de raisonnement. Pour certains élèves, c'est l'aspect graphique qui est prépondérant, tandis que d'autres raisonnent d'emblée sur les composantes. Le va-et-vient permanent entre le dessin et l'écriture des relations, soit en termes de déplacements, soit en termes de couples, permet de faire progresser les différents aspects en même temps et de lever quelques difficultés. Ainsi, lorsque les élèves ont proposé un peu rapidement

le couple $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ pour le déplacement opposé à $AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, le retour au dessin leur a permis de corriger rapidement l'erreur.

Tout au long de ce travail d'élaboration des définitions des opérations sur les déplacements, les différents raisonnements qui guident les élèves éclairent ces opérations sous divers aspects, ce qui contribue à donner du sens aux définitions.

Lors des exercices de construction de multiples de déplacements, les élèves ont imaginé des stratégies très variées pour utiliser le quadrillage de la manière la plus efficace. Par contre, lorsque le professeur a proposé des exercices de construction (additions et multiplications par un scalaire) sur des feuilles dépourvues de quadrillage, les élèves ont été très perturbés. Une discussion a été nécessaire pour convaincre chacun que, si la présence du quadrillage sur la feuille permet d'effectuer rapidement ces opérations, elle n'est nullement indispensable. La somme de deux déplacements par la relation de Chasles, la construction d'un déplacement égal à un autre, ou d'un multiple d'un déplacement par une configuration de Thalès ne dépendent pas de la présence d'un quelconque réseau. Même convaincus, certains élèves étaient cependant si déstabilisés qu'ils ont essayé de « tricher » en glissant subrepticement une feuille quadrillée sous la feuille blanche pour tenter d'apercevoir le quadrillage par transparence.

Quelques exercices formels de fixation des propriétés ont fait apparaître des erreurs comme

$$2BM + MC = 3BC \quad \text{ou} \quad AM - MB = -AB,$$

le recours au dessin a permis de les corriger.

Le foisonnement des idées a été si grand tout au long de cette phase de l'activité que le besoin de faire le point et de rassembler les résultats obtenus de manière claire s'est fait sentir impérieusement. C'est pourquoi la synthèse concernant les opérations sur les déplacements, qui n'avait pas été prévue au départ, s'est avérée indispensable.

1.4 Langage PostScript

Comment s'y prendre ?

Toutes ces manipulations un peu fastidieuses peuvent être remplacées par une activité utilisant le langage PostScript (langage de commande d'imprimante). Les professeurs intéressés pourront se procurer sur internet à l'adresse URL

`http://www.profor.be/crem/index.htm`

le document CalculVectoriel.eps qui contient déjà certaines instructions PostScript. Celles-ci dessinent le quadrillage et positionnent le point A. Il est conseillé de faire une copie de ce document avant d'y faire travailler les élèves. Toutes les opérations effectuées sur le quadrillage peuvent être illustrées au moyen de ce langage. Pour visualiser les effets des commandes PostScript, il faut télécharger un interpréteur :

– sur Macintosh : MacGS que l'on trouve sur le site internet

http://www.cs.wisc.edu/~ghost/macos/index.htm

– pour windows : GSView que l'on trouve sur le site internet

http://www.cs.wisc.edu/~ghost/gsview/index.html

Voici comment se présente ce document :

```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-1.2
%%BoundingBox: 110 139 513 769

...

%*****************************************
% Commandes introduites par l'utilisateur *
%*****************************************

allerenA
7 4 rlineto
(B) point
-10 1 rlineto
(C) point
allerenA
-3 5 rlineto



%*****************************************

stroke
grestore
% Dessin du quadrillage
[1 s div 1 s div] 0 setdash vert
[1 s div 1 s div] 0 setdash hor

showpage
```

Ce fichier peut être ouvert avec n'importe quel éditeur de texte, de préférence le plus simple possible comme, par exemple, le Bloc-notes de Windows, ou Alpha pour Macintosh. Si on utilise Word, ou tout autre traitement de texte, il faut veiller à sauver le document en mode texte et non en mode Word (ou autre).

Les élèves insèreront leurs commandes dans un espace réservé qui se situe en dessous du commentaire « commandes de l'utilisateur » et au-dessus d'une ligne d'astérisques. Le déplacement $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ est obtenu au moyen de la commande

```
7 4 rmoveto
```

À cet endroit on positionne un point (B par exemple) au moyen de la commande point ; on le nomme B par la commande

```
(B) point
```

Si on souhaite visualiser le déplacement en ligne droite, on remplace la commande

`rmoveto`

par la commande

`rlineto.`

La commande

`allerenA`

permet de retourner au point A. Pour faire disparaître le quadrillage, on place le caractère

`%`

devant chacune des deux lignes qui suivent

```
% dessin du quadrillage
```

Pour illustrer une addition, par exemple,

$$AB + BC = AC \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

les commandes seront

```
7 4 rlineto
(B) point
-10 1 rlineto
(C) point
```

Après avoir visualisé le résultat, on ajoute les commandes

```
allerenA
-3 5 rlineto
```

Ces deux dernières commandes ont pour effet de tracer le déplacement somme AC.

Pour illustrer une multiplication par un scalaire, par exemple, $AM = 2AC$, les commandes seront

```
allerenA
-3 5 2 rlinetomul
(M) point
```

Si on souhaite effectuer une opération à partir d'un point du quadrillage autre que A, par exemple C, on pourra atteindre celui-ci à partir de A de la manière suivante

```
allerenA
-3 5 rmoveto
```

Ceci permettra ensuite d'effectuer le déplacement $CL = 2CA$

```
3 -5 2 rlinetomul
(L) point
```

On obtiendra $CN = \frac{1}{2}CA$ comme suit[5] :

```
allerenA
-3 5 rmoveto
3 -5 1 2 div rmovetomul
(N) point
```

On peut encore placer $AQ = \frac{-1}{3}AB$:

```
allerenA
7 4 1 3 div neg rlinetomul
```

et $AR = \sqrt{2}AL$

```
allerenA
3 -5 2 sqrt rlinetomul
(R) point
```

Les élèves vérifieront que les points obtenus par constructions géométriques coïncident avec ceux placés par le logiciel. La commande

```
a b k rlinetomul
```

est, en fait, équivalente à

```
k a mul k b mul rlineto
```

ce qui traduit la propriété

$$k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}.$$

1.5 Déplacements dans l'espace

Comment s'y prendre ?

Une démarche analogue à celle décrite aux sections 1.2 et 1.3 pour introduire les déplacements dans le plan et les opérations sur ceux-ci permet d'aborder les déplacements dans l'espace.

Décrire le déplacement qui mène du point A au point B (figure 15).

Les élèves imagineront probablement un codage du type droite-gauche (d-g), avant-arrière (av-ar), haut-bas (h-b). Le déplacement AB sera alors décrit comme 4 en avant, 1 à gauche et 2 vers le bas, que nous noterons, de manière plus condensée,

4av, 1g, 2b ou encore 1g, 4av, 2b.

Les élèves prennent conscience qu'il faut trois directions pour décrire les déplacements de l'espace, et que, sur chacune d'elles, il y a deux sens. Cette observation permet de réduire le nombre des symboles de codage à trois au lieu de six. On conviendra de garder les symboles av, d, et h, de compter positivement les déplacements vers l'avant, vers la droite et vers le haut et négativement les déplacements vers l'arrière, vers la gauche et vers le bas.

[5] PostScript utilise la notation polonaise inverse ; ainsi 1 2 div effectue la division de 1 par 2.

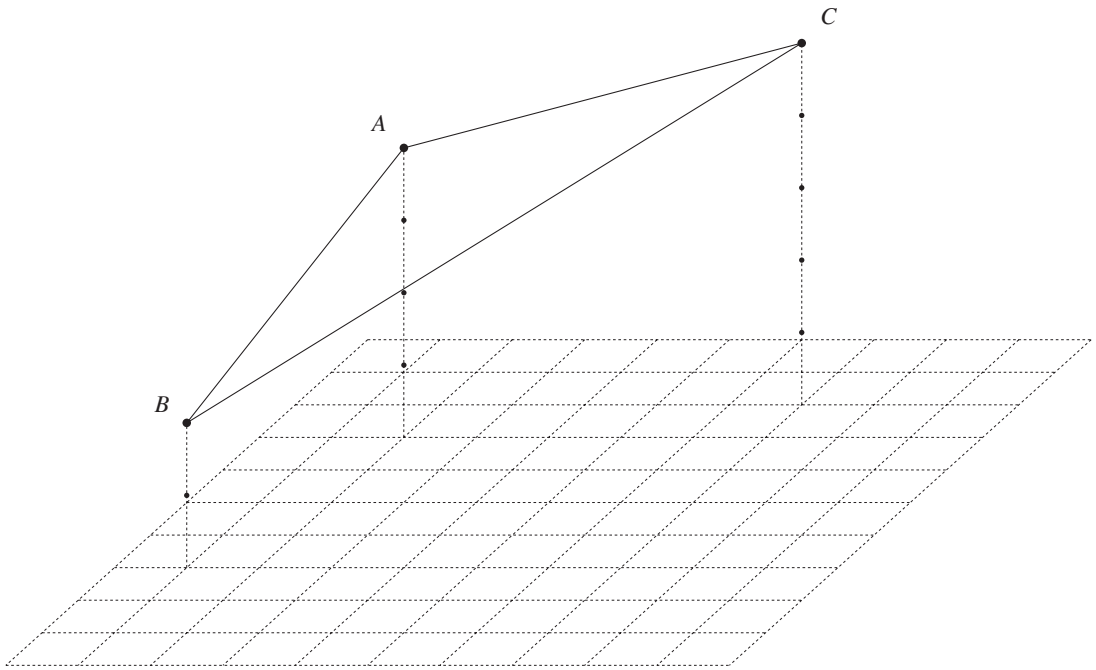


Fig. 15 : Déplacements et addition de déplacements dans l'espace

Le déplacement AB sera alors noté : 4av, -1d, -2h.

Si on veut encore simplifier le codage pour ne garder que les nombres, il faut convenir en plus d'un ordre pour les énoncer. Par exemple, si le premier nombre représente le déplacement sur la direction arrière-avant, le deuxième le déplacement sur la direction gauche-droite, et le troisième le déplacement sur la direction bas-haut, il n'y aura pas d'ambiguïté. Le déplacement AB sera noté $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De la même manière, on a

$$BC = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AC = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Addition de déplacements

Comme dans le plan, on a la relation de Chasles

$$AB + BC = AC,$$

et, pour les triples correspondants, l'addition s'écrit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'origine du second déplacement ne coïncide pas avec l'extrémité du premier, on remplace l'un des déplacements par un déplacement équivalent

de manière à retrouver une situation où la relation de Chasles est d'application.

L'opposé du déplacement AB est le déplacement $BA = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $AB + BA = AA$ (déplacement nul) et, pour les triples correspondants,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés de l'addition des déplacements dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.

Multiplication de déplacements par un scalaire

On définit kAB comme le déplacement qui va k fois plus loin que B dans la direction de AB, à partir de A. Si k est positif, le sens est celui de AB, sinon, celui de BA. La figure 16 illustre deux exemples de multiplication scalaire.

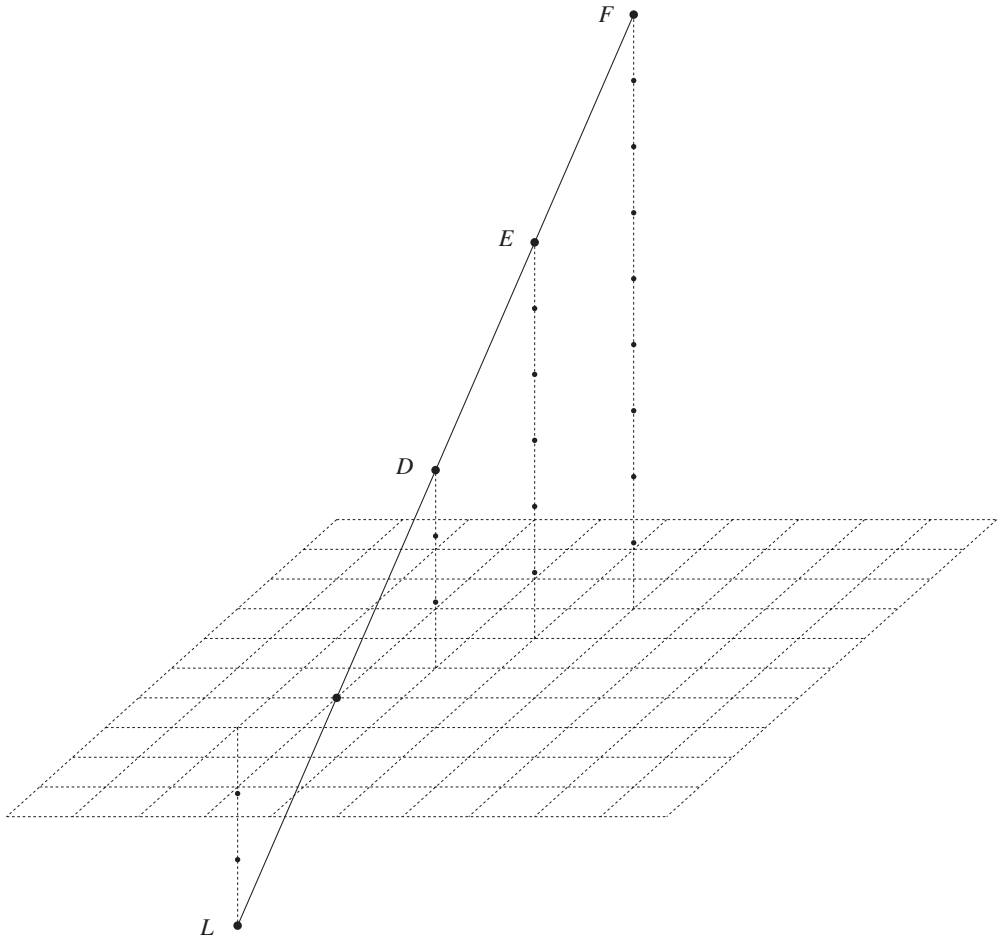


Fig. 16 : Multiplication scalaire dans l'espace

On a

$DF = 2DE$ et, pour les triples correspondants $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$DL = -2DE$ et, pour les triples correspondants $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les propriétés de la multiplication scalaire des déplacements dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.

1.6 Polynômes

Comment s'y prendre ?

Après une première approche des espaces vectoriels par des gestes très quotidiens, proches du bon sens, comme se déplacer dans un plan de ville, le but de cette activité est de montrer que la structure ainsi dégagée peut se retrouver dans un contexte très différent. Il s'agit donc d'une démarche purement intellectuelle, qui peut intéresser certains élèves, mais qu'il ne conviendra sans doute pas d'aborder dans toutes les classes.

Dès la troisième, les élèves connaissent l'addition des polynômes et leur multiplication par un scalaire. Nous allons éclairer ces opérations sous un jour nouveau en les replaçant dans un contexte semblable à celui dans lequel nous venons de travailler.

Considérons tout d'abord l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, dont la forme générale, ordonnée par puissances croissantes de x, est $a + bx + cx^2$.

Chaque polynôme peut être considéré comme une combinaison linéaire de trois polynômes « de base » 1, x et x^2, avec les coefficients a, b, c. Ainsi,

$$a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2.$$

Ceci permet d'associer à chaque polynôme un triple de nombres $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Les élèves sont invités à écrire les triples de nombres correspondant aux polynômes « de base » 1, x et x^2 et à retrouver le triple $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des trois triples « de base ». Ils pourront comparer cette décomposition avec celle effectuée sur les couples de nombres associés aux déplacements du plan.

On demande aux élèves de calculer

1. $P(x) + Q(x)$
2. $-2P(x) + 3Q(x)$
3. $Q(x) - R(x)$

où $P(x) = 3 - 2x + 5x^2$, $Q(x) = -2 + 7x + x^2$ et $R(x) = x^2 + 1$ et de transcrire ces différentes opérations en termes de triples associés.

La comparaison avec les opérations sur les couples associés aux déplacements du plan s'impose d'elle-même.

> Retrouve-t-on pour les opérations sur les polynômes des propriétés semblables à celles dégagées pour les déplacements dans un plan à la page 234 ?

Les élèves vérifient sur les exemples proposés que

$$\begin{aligned}(P(x) + Q(x)) + R(x) &= P(x) + (Q(x) + R(x)),\\ P(x) + Q(x) &= Q(x) + P(x),\\ k(P(x) + Q(x)) &= kP(x) + kQ(x),\\ kP(x) + \ell P(x) &= (k + \ell)P(x),\\ k(\ell P(x)) &= (k\ell)P(x),\end{aligned}$$

où k et ℓ sont des scalaires quelconques. La connaissance que les élèves ont des opérations sur les polynômes leur permettra sans doute de dire que ces propriétés restent vraies pour n'importe quel polynôme. Si nécessaire, on peut proposer d'autres exemples pour les polynômes $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$.

Prolongement possible

> Est-il possible de procéder de la même manière pour
>
> - les polynômes de degré inférieur ou égal à 3,
> - les polynômes de degré inférieur ou égal à 4,
> - tous les polynômes ?
>
> Combien de polynômes « de base » faudrait-il pour exprimer tout polynôme comme combinaison linéaire de ceux-ci ?

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, à 4, ... à n s'exprimeront comme combinaisons linéaires de 4, 5, ... $(n+1)$ « polynômes de base » et seront représentés par des quadruples, quintuples, ... $(n+1)$-uples. Il faudrait une infinité de « polynômes de base » pour exprimer tout polynôme comme combinaison linéaire de ceux-ci.

1.7 Suites arithmétiques

Comment s'y prendre ?

On montre aux élèves quelques débuts de listes de nombres qu'on leur demande de prolonger. Le professeur signalera aux élèves qu'en prolongeant indéfiniment ces listes de nombres, on obtient ce que les mathématiciens nomment *suites de nombres*. Chacun des nombres est appelé *terme* de la suite.

$S1$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$S2$	0	1	4	9	16	25	$\cdots$
$S3$	1	3	5	7	9	11	$\cdots$
$S4$	1	11	111	1 111	11 111	111 111	$\cdots$
$S5$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$
$S6$	2	5	8	11	14	17	$\cdots$
$S7$	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
$S8$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\cdots$
$S9$	1	-3	-7	-11	-15	-19	$\cdots$
$S10$	3	$\frac{17}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{27}{4}$	8	$\frac{37}{4}$	$\cdots$

Parmi ces dix suites de nombres, y en a-t-il qui ont un mode de construction semblable ? Si oui, lesquelles ?

Dans les suites $S1$, $S3$, $S6$, $S9$ et $S10$, la valeur de chaque terme à partir du deuxième est obtenue en ajoutant une quantité constante à la valeur du terme qui précède. Ce type de suite est appelé *suite arithmétique* et la quantité constante ajoutée est la *raison* de la suite.

Les suites qui précèdent ont été « définies » par leurs six premiers termes.

Si on sait qu'il s'agit de suites arithmétiques, faut-il fournir autant de termes ? Quel nombre minimum d'informations faut-il donner pour qu'une telle suite soit entièrement connue ?

Des réponses variées que proposeront les élèves, nous retiendrons que la donnée des deux premiers termes t_1, t_2 ou celle du premier terme t_1 et de la raison r suffisent pour que la suite soit déterminée.

Y a-t-il une manière naturelle d'additionner deux suites, de les multiplier par un scalaire ?

Les élèves proposeront sans doute de faire ces opérations terme à terme. On leur demande alors de calculer, par exemple $S3 + S6$, $2S6$ et $2S10$.

$S3$	1	$\overset{2}{)}$	3	5	7	9	11	$\cdots$
$S6$	2	$\overset{3}{)}$	5	8	11	14	17	$\cdots$
$S3 + S6$	3	$\overset{5}{)}$	8	13	18	23	28	$\cdots$
$S6$	2	$\overset{3}{)}$	5	8	11	14	17	$\cdots$
$2S6$	4	$\overset{6}{)}$	10	16	22	28	34	$\cdots$
$S10$	3	$\overset{\frac{5}{4}}{)}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{27}{4}$	8	$\frac{37}{4}$	$\cdots$
$2S10$	6	$\overset{\frac{5}{2}}{)}$	$\frac{17}{2}$	11	$\frac{27}{2}$	16	$\frac{37}{2}$	$\cdots$

On observe sur ces exemples que la somme de deux suites arithmétiques est une suite arithmétique, ainsi que la multiplication d'une suite arithmétique par un scalaire.

Ces propriétés sont-elles vraies en toute généralité ?

Au cours de ces opérations, comment trouve-t-on les premiers termes et les raisons des suites obtenues ?

Les élèves sont invités à écrire les opérations sous une forme générale, par exemple,

$S1$	a	$a+r$	$a+2r$	$\cdots$
$S2$	b	$b+r'$	$b+2r'$	$\cdots$
$S1+S2$	$a+b$	$a+b+(r+r')$	$a+b+2(r+r')$	$\cdots$
$kS1$	ka	$ka+kr$	$ka+2kr$	$\cdots$

La suite $S1$ est déterminée par les nombres a et r, nous l'écrivons sous forme de couple $\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix}$ par analogie avec les déplacements et les polynômes. De même, la suite $S2$ correspond au couple $\begin{pmatrix} b \\ r' \end{pmatrix}$. La suite

$$S1+S2 \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} a+b \\ r+r' \end{pmatrix},$$

puisque son premier terme est $a+b$ et sa raison $r+r'$. De même, la suite

$$kS1 \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} ka \\ kr \end{pmatrix},$$

puisque son premier terme est ka et sa raison kr. Les opérations sur les suites se traduisent par les opérations correspondantes sur les couples :

$$\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ r+r' \end{pmatrix},$$
$$k\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kr \end{pmatrix}.$$

On retrouve à nouveau des propriétés de la somme et de la multiplication par un scalaire, semblables à celles observées pour les déplacements dans un plan à la page 234 et pour les polynômes à la page 243. Elles peuvent être vérifiées dans le cas général, puisque les opérations sur les suites viennent d'être dégagées en termes de couples sous forme littérale. Les élèves vérifient que

$$\begin{aligned}
(S1+S2)+S3 &= S1+(S2+S3),\\
S1+S2 &= S2+S1,\\
k(S1+S2) &= kS1+kS2,\\
kS1+\ell S1 &= (k+\ell)S1,\\
k(\ell S1) &= (k\ell)S1.
\end{aligned}$$

Remarquons au passage l'évolution du niveau d'abstraction dans l'énoncé et la vérification des propriétés : pour les déplacements du plan, elles ont été mises en évidence sur des exemples ; pour les polynômes, elles ont été énoncées sous forme générale mais vérifiées sur des polynômes particuliers ; tandis que pour les suites, elles sont démontrées en toute généralité.

Prolongement possible

Cela signifie-il que toute suite arithmétique peut s'écrire sous forme de combinaison linéaire de deux suites arithmétiques « de base » ?

Si $\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelles sont les suites arithmétiques qui correspondent aux couples $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

On demande aux élèves d'écrire les suites $S3$, $S6$ et $S10$ comme combinaisons linéaires des deux suites « de base »

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \ldots \text{ et } \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots$$

Les élèves seront peut-être étonnés de constater que les suites arithmétiques, qui comportent une infinité de termes, peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires de deux suites arithmétiques « de base », tandis qu'une infinité de polynômes « de base » sont nécessaires pour exprimer tous les polynômes, alors que chacun d'eux ne comporte qu'un nombre fini de termes.

1.8 Synthèse : vers la structure d'espace vectoriel

Comment s'y prendre ?

Les élèves viennent de rencontrer quelques ensembles dont les éléments sont de natures très différentes. Néanmoins, les opérations effectuées sur ces objets, ainsi que les propriétés de ces opérations, présentent des ressemblances frappantes. Une discussion au sein de la classe, conduite par le professeur, devrait permettre de dresser la liste de ces points communs. La réflexion peut être suscitée par quelques questions.

Quelles sont les opérations qui ont été effectuées sur les éléments de ces différents ensembles ?
Quelles sont les propriétés de ces opérations qu'on retrouve dans les différents exemples ?
Retrouve-t-on les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels ?
Expliquer comment, dans ces exemples, les éléments ont pu être associés à des n-uples et comment les opérations de somme et de multiplication par un scalaire se transposent en termes d'opérations sur les n-uples.

Que ce soient les déplacements (dans le plan ou l'espace), les polynômes ou les suites arithmétiques, nous avons pu

- les additionner,
- les multiplier par un scalaire,
- en faire des combinaisons linéaires,
- les exprimer comme combinaisons linéaires d'un certain nombre d'éléments « de base ».

Examinons tout d'abord les propriétés de l'addition en les comparant à celles de l'addition des nombres réels. Dans chacun des cas, on retrouve

l'associativité et la commutativité de l'addition. On s'interroge alors sur l'existence d'un élément neutre et d'un opposé pour chaque élément.

Dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux,
– quel est l'élément nul ?
– quel est le polynôme opposé à $P(x) = 3 - 2x + 5x^2$?

Dans l'ensemble des suites arithmétiques,
– quel est l'élément nul ?
– quelle est la suite opposée à la suite 1 4 7 10 ...

Dans chaque ensemble, il y a donc un élément nul qui correspond au couple $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (au n-uple dont tous les coefficients sont nuls). Cet élément est neutre pour l'addition, ce qui signifie que si on l'additionne à un élément quelconque, la somme obtenue est cet élément lui-même.

Chaque élément a un opposé, qui correspond au couple (au n-uple) dont les termes ont le signe contraire de ceux du couple (n-uple) représentant l'élément de départ. Quand on additionne un élément et son opposé, on trouve l'élément nul. Cette dernière propriété est l'outil qui permet de résoudre des équations.

La multiplication par un scalaire ne ressemble pas à la multiplication des nombres réels, déjà théorisée à la page 221. Les propriétés qui ont été dégagées dans les différents exemples montrent qu'elle s'apparente plutôt à une « multiplication naturelle », dans laquelle les deux éléments du produit sont de natures différentes, et qu'on utilise implicitement quand on dit

– 3 fois (1 pomme + 1 poire) = 3 pommes + 3 poires,
– 2 pommes + 3 pommes = 5 pommes,
– 2 fois 3 pommes = 6 pommes.

Même s'ils ne peuvent pas désigner par leur nom les propriétés de la multiplication par un scalaire, les élèves pourront sans doute associer celles qui ont le même statut dans les listes reprises dans les exemples.

Les ensembles dont les éléments peuvent être additionnés et multipliés par un scalaire, avec les propriétés que nous avons rencontrées et qui sont reprises ci-dessous, sont appelés *espaces vectoriels*. Leurs éléments sont appelés *vecteurs* et sont généralement représentés par une minuscule surmontée d'une flèche : $\overrightarrow{u}$.

Voici les propriétés qui caractérisent un espace vectoriel $\mathcal{V}$.

Les propriétés de la somme

Dans un *espace vectoriel* $\mathcal{V}$,

1. la somme de deux vecteurs existe toujours et est un vecteur. En effet,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \quad \text{appartient à} \quad \mathcal{V}.$$

2. La somme des vecteurs est associative, ce qui permet d'écrire la somme de trois vecteurs sans parenthèses. Ainsi,

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

3. Il y a un vecteur nul noté $\overrightarrow{0}$ tel que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}.$$

4. Chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ a un opposé noté $-\overrightarrow{u}$ tel que

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}.$$

5. La somme des vecteurs est commutative, ce qui signifie que dans une somme, on peut changer l'ordre des vecteurs. On a

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.$$

Ces cinq propriétés peuvent être résumées en disant que $\mathcal{V}$ est un *groupe commutatif* pour l'addition des vecteurs.

Les propriétés de la multiplication par un scalaire

Dans ce qui suit, k et ℓ représentent des scalaires.

1. Un vecteur peut toujours être multiplié par un scalaire et le résultat est un vecteur,

$$k\overrightarrow{u} \quad \text{appartient à} \quad \mathcal{V}\,;$$

2.
$$k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}\,;$$

3.
$$(k + \ell)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{u}\,;$$

4.
$$k(\ell\overrightarrow{u}) = (k\ell)\overrightarrow{u}.$$

La propriété 2 établit un lien entre la multiplication par un scalaire et l'addition des vecteurs ; les deux suivantes établissent le lien avec les opérations sur les scalaires, l'addition (propriété 3) et la multiplication (propriété 4). Les propriétés 2 et 3 sont des propriétés de distributivité, la propriété 4 est une propriété d'associativité. On l'appelle « associativité mixte » car elle lie deux opérations de multiplication : la multiplication des scalaires et la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Existe-t-il un neutre pour la multiplication par un scalaire ?

La question de l'existence d'un neutre pour la multiplication par un scalaire met en évidence une situation qu'on ne rencontre pas dans les opérations qui lient deux éléments de même nature. Les élèves exhiberont sans doute le scalaire neutre 1

$$1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v},$$

mais il est impossible de trouver un vecteur neutre $\overrightarrow{n}$ tel que

$$k\overrightarrow{n} = k,$$

puisque $k\overrightarrow{n}$ est un vecteur et ne peut donc valoir k. La propriété $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ exprime que le neutre de la multiplication des réels est aussi neutre pour la multiplication par un scalaire. Nous ajoutons cette propriété afin d'être complet, même si notre but n'est pas de donner une définition axiomatique rigoureuse.

Dimension*[6] *et opérations sur les n-uples

Si les éléments « de base » sont au nombre de deux (déplacements dans le plan, polynômes de degré inférieur ou égal à un, suites arithmétiques), chaque élément peut être exprimé comme combinaison linéaire des deux éléments « de base ». Les coefficients de cette combinaison linéaire forment un couple qui représente cet élément. Les couples associés aux éléments « de base » sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si les éléments « de base » sont au nombre de trois (déplacements dans l'espace, polynômes de degré inférieur ou égal à deux), chaque élément peut être exprimé comme combinaison linéaire des trois éléments « de base ». Les coefficients de cette combinaison linéaire forment un triple qui représente cet élément. Les triples associés aux éléments « de base » sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si les éléments « de base » sont au nombre de n (polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$), chaque élément peut être exprimé comme combinaison linéaire des n éléments « de base ». Les coefficients de cette combinaison linéaire forment un n-uple qui représente cet élément. Les n-uples associés aux éléments « de base » sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce nombre n, qui représente le nombre d'éléments « de base » nécessaires pour exprimer tout élément de l'ensemble comme combinaison linéaire de ceux-ci, et qui correspond également au nombre de termes dans le n-uple associé à chaque élément, est appelé la *dimension* de l'espace vectoriel.

[6] Nous n'avons pas défini la notion de famille libre. Cependant le travail effectué dans cette activité donne une première approche des notions de « famille génératrice » et de « base », qui permet de parler de dimension de manière intuitive.

Dans un espace vectoriel de dimension 2, les opérations de somme et de multiplication par un scalaire se tranposent aux couples qui les représentent de la manière suivante,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix},$$

$$k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}.$$

Ces opérations s'étendent de manière naturelle à un espace vectoriel de dimension n,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix},$$

$$k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{pmatrix}.$$

Ces opérations jouissent des propriétés caractéristiques des espaces vectoriels, et c'est pourquoi on peut dire que l'ensemble des n-uples de réels forme aussi un espace vectoriel.

Échos des classes

Le niveau de la classe n'a pas permis d'aborder d'autres types de vecteurs que les déplacements du plan. La synthèse finale a néanmoins été réalisée par les élèves eux-mêmes, sur base des synthèses antérieures. L'écriture condensée des vecteurs représentés par une seule lettre surmontée d'une flèche (pour les distinguer des scalaires) leur a paru très naturelle, puisqu'ils avaient déjà rencontré des vecteurs dans d'autres contextes. Seul le neutre de la multiplication scalaire a posé problème : la valeur 0 a été proposée en premier.

2 Géométrie analytique et calcul vectoriel

De quoi s'agit-il ?

Résoudre des problèmes de géométrie analytique du plan et de l'espace en utilisant le calcul vectoriel.

Enjeux

Développer les compétences liées au calcul vectoriel en analysant diverses situations-problèmes. Sur les liens entre vecteurs et géométrie analytique, voir aussi la section 8.1 du chapitre 16. Sur les centres de gravité, voir aussi le chapitre 12.

Compétences

Le calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace, faisant intervenir les composantes des vecteurs.

Les formes synthétique et analytique des notions, des relations et équations de base de la géométrie : incidence, alignement, concourance, parallélisme, milieu d'un segment, centre de gravité, ...

Les formes synthétique et analytique des translations, symétries centrales et homothéties du plan et de l'espace.

De quoi a-t-on besoin ?

Des feuilles A4 recouvertes d'un quadrillage de 1 cm de côté ou d'un réseau de parallélogrammes, certaines munies d'une origine O, d'autres encore où sont marqués une origine O et quelques autres points. Ce matériel peut être obtenu par photocopie des documents fournis en annexe aux pages 486 à 488.

2.1 Lien entre les composantes d'un vecteur et les coordonnées de ses extrémités

Comment s'y prendre ?

Le problème de situer un point sur un quadrillage est latent depuis le moment où, dans l'activité précédente, on a demandé aux élèves de dessiner un déplacement donné par ses composantes. Les élèves ont bien pris conscience qu'ils peuvent représenter un déplacement donné, mais ils ne savent que faire pour décrire un représentant de ce déplacement en un endroit précisément choisi. Le travail suivant a pour but de lever cette difficulté.

On distribue à tous les élèves une feuille A4 recouverte d'un quadrillage et on demande à l'un d'entre eux de placer un point A sur un nœud de ce quadrillage. Sans montrer sa feuille, il doit alors communiquer des renseignements à ses condisciples pour que chacun puisse dessiner le point A exactement au même endroit. Il est probable que l'élève qui a choisi la position du point A situe celui-ci comme l'extrémité d'un déplacement dont l'origine serait le coin inférieur gauche du quadrillage (ou un autre coin). Les élèves se rendent compte que, pour traiter ce problème, une origine doit être choisie en un point qu'on peut décrire sans ambiguïté, par exemple en un coin du quadrillage. Sinon il est tout aussi difficile d'expliquer où se trouve l'origine du déplacement que son extrémité. On recommence l'activité après avoir distribué une autre feuille quadrillée munie d'un point marqué O. On demande aux élèves de choisir ce point O comme origine pour marquer le point A comme extrémité d'un déplacement OA décrit en fonction du quadrillage. On montre alors aux élèves une feuille, sans quadrillage, où l'on a placé un point O et un point A, et on leur demande de reproduire le déplacement OA à partir d'un point O placé arbitrairement sur une feuille de leur cahier.

Cette courte activité préalable est destinée à faire prendre conscience aux élèves que pour déterminer la position d'un point, il faut

- soit une origine et deux directions privilégiées, orientées et munies d'une unité (par exemple induites par un quadrillage ou un réseau de parallélogrammes) ;
- soit une origine et deux vecteurs « de base ».

La donnée d'une origine, qui n'était pas nécessaire pour décrire des déplacements, devient indispensable dès qu'on veut préciser la position des points. On définit alors la « position du point A » comme le déplacement qui permet de passer de O à A. On peut donc lui associer un couple de nombres. On a

$$\text{position de } A = OA = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

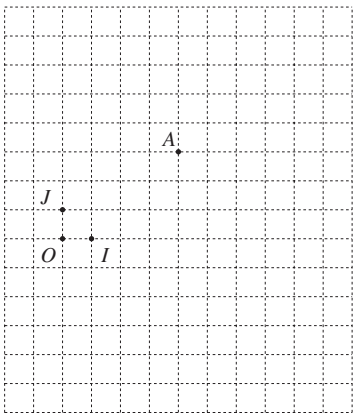


Fig. 17 : Quadrillage

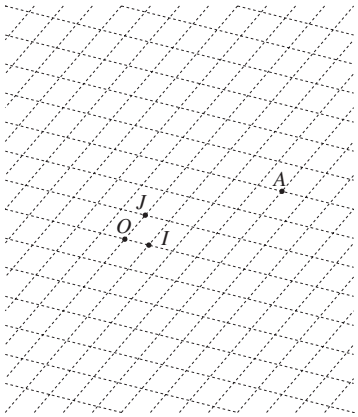


Fig. 18 : Réseau de parallélogrammes

Les élèves reconnaissent les coordonnées du point A dans le repère OIJ, où O est le point origine choisi, I et J étant les extrémités des vecteurs « de base » $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ placés avec leur origine en O. D'une manière générale, les coordonnées des points sont des couples de nombres réels ; elles ne sont entières que pour les nœuds du quadrillage associé au repère OIJ.

Les élèves ont l'habitude d'écrire ces coordonnées en ligne et non en colonne. On pourrait revenir à cette façon de faire pour les couples de coordonnées de points, mais aussi pour les couples de composantes de vecteurs, tout en signalant aux élèves que plus tard (en calcul matriciel), il faudra utiliser une notation de tous ces couples en colonnes. Dans ce document, nous avons choisi de continuer à écrire tous les n-uples en colonnes.

Pour établir le lien entre les composantes des vecteurs et les coordonnées des points, on distribue la feuille suivante, munie d'un quadrillage et des points O, A, B, C et D (figure 19).

> Y a-t-il un lien entre les coordonnées des points A, B, C, D et les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AD}$?

Dans un premier temps, les élèves notent les couples de coordonnées des points et les couples de composantes des vecteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

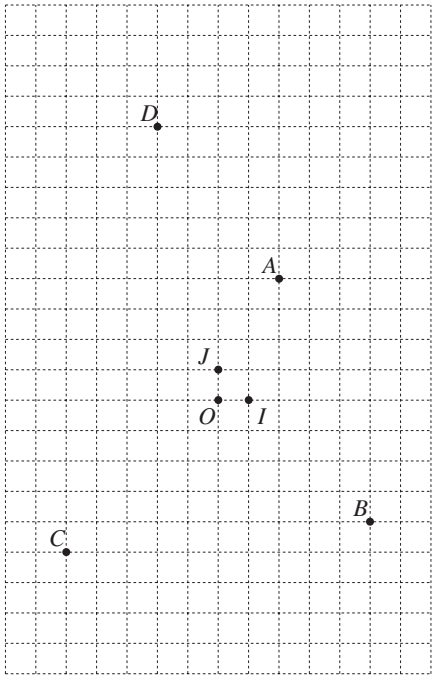


Fig. 19 : Coordonnées et composantes

En comparant les couples associés à A, B et $\overrightarrow{AB}$, certains élèves constateront que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et vérifieront ensuite si une relation similaire est encore vraie pour les autres vecteurs. D'autres penseront peut-être à la relation de Chasles et au fait qu'on peut aller de O à B en passant par A

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

ou qu'on peut aller de A à B en passant par O

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}.$$

Ils en déduiront que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (\text{position de } B) - (\text{position de } A). \end{aligned}$$

Cette constatation peut être étayée par un raisonnement intuitif en reprenant un cas très simple où les points A et B se trouvent à droite et plus haut que O, par exemple $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$. On voit bien alors que, pour aller de A en B, il faut avancer de 6 vers la droite, pour passer de l'abscisse 3 à l'abscisse 9, et de 3 vers le haut, pour passer de l'ordonnée 4 à l'ordonnée 7. Le dessin montre bien que, quelle que soit la position de O, la différence des abscisses et la différence des ordonnées déterminent les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Composantes d'un vecteur. – *Les composantes d'un vecteur sont obtenues par la différence entre les coordonnées de son extrémité et celles de son origine.*

Tout ceci se généralise aux vecteurs de l'espace.

À ce stade du travail, le professeur explique aux élèves que le fait de pouvoir situer des points dans le plan ou l'espace munis d'un repère, et d'avoir établi le lien entre les coordonnées des points et les composantes des vecteurs, va leur permettre d'aller plus loin. Dans les activités qui suivent, nous allons utiliser des équations vectorielles extrêmement simples pour résoudre toutes sortes de problèmes de géométrie, tant dans le plan que dans l'espace.

Échos des classes

La nécessité de marquer une origine pour situer des points dans le plan n'a posé aucune difficulté. Ici encore, les élèves ont fait appel à différents

modes de raisonnement pour établir le lien entre les composantes d'un vecteur et les coordonnées de ses extrémités. Le fait de définir la position du point A comme le déplacement OA situe d'emblée le problème dans le contexte des déplacements du plan et amène l'idée d'utiliser la relation de Chasles.

2.2 Problèmes d'alignement et de parallélisme

De quoi s'agit-il ?

Résoudre des problèmes d'alignement et de parallélisme dans le plan et dans l'espace à partir d'équations vectorielles.

Comment s'y prendre ?

À quelle condition des points du plan et de l'espace sont-ils alignés ?

Le problème est ainsi posé sous une forme très générale. Les élèves proposeront sans doute d'examiner d'abord la situation dans le plan. Ils arriveront peut-être à dégager une idée intuitive à partir d'un cas très simple qu'ils auront choisi eux-mêmes. L'exemple suivant leur est fourni, soit pour les inciter à formuler clairement leur raisonnement, soit pour guider leur réflexion.

1. Les points A, B et C du plan sont-ils alignés ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 100 \\ 69 \end{pmatrix}.$$

2. Les points P, Q et R de l'espace sont-ils alignés ?

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 302 \\ 300 \\ -690 \end{pmatrix}.$$

Confrontés à la première question, les élèves seront sans doute tentés de représenter les points dans un repère approprié. Les coordonnées du point C les obligent à choisir une unité très petite dans chacune des directions. Le manque de précision du dessin ne leur permettra pas de se convaincre avec certitude.

D'autres penseront peut-être à écrire l'équation de la droite AB et à observer que les coordonnées du point C vérifient cette équation. Aucune de ces deux stratégies ne leur permettra de répondre à la deuxième question. Par contre les élèves qui se souviennent que dans la section 1, l'alignement des points A, C, N, L a été mis en relation avec le fait que les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont multiples de $\overrightarrow{CA}$ (figure 12 à la page 232), auront à leur disposition l'outil qui leur permettra de répondre aux deux questions par le même raisonnement et de la manière la plus économique.

Les élèves constatent que $\overrightarrow{AC}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$ en observant leurs composantes

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 99 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

Par contre,

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ -695 \end{pmatrix} \text{ n'est pas multiple de } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

ce qui indique que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

Le fait que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que ces deux vecteurs d'origine A ont la même direction. Cette remarque nous amène tout naturellement à poser la question du parallélisme.

À quelle condition des droites du plan ou de l'espace sont-elles parallèles ?

Après une première discussion dans la classe, nous proposons à nouveau un exemple pour soutenir la réflexion.

1. Dans le plan muni d'un repère, les droites AB et CD sont-elles parallèles ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

2. Dans l'espace muni d'un repère, les droites PQ et RS sont-elles parallèles ?

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Le dessin de la première situation ne permet pas de conclure avec certitude. Les droites AB et CD semblent plus ou moins parallèles. Cependant, le calcul des composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -8 \\ -19 \end{pmatrix}$ montre qu'un de ces deux vecteurs n'est pas multiple de l'autre et qu'ils n'ont donc pas la même direction. Par conséquent, les droites AB et CD ne sont pas parallèles. Dans l'espace, par contre,

$$\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{RS} \text{ puisque } \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on peut conclure que les droites PQ et RS sont parallèles.

Parallélisme et alignement. *– Si $\overrightarrow{CD}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction et les droites AB et CD sont parallèles*[7]*. Si de plus, les droites AB et CD ont un point commun, les quatre points A, B, C et D sont alignés. En particulier, si $\overrightarrow{AC}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$, les points A, B et C sont alignés.*

[7] On admet explicitement qu'une droite est parallèle à elle-même et que le parallélisme est une relation d'équivalence.

Tout ceci permet de résoudre des problèmes plus complexes, où interviennent à la fois des questions d'alignement et de parallélisme.

Dans le plan muni d'un repère OIJ, on donne les points

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Représenter graphiquement les points D, E, F et K et calculer leurs coordonnées, sachant que

1. D est le point de la droite BC, dont l'abscisse vaut 2 dans le repère OIJ ;
2. E est le point de la droite AC dont l'abscisse est le double de l'ordonnée dans le repère OIJ ;
3. F est le point de la parallèle à la droite AB passant par C, dont l'ordonnée vaut -2 dans le repère OIJ ;
4. K est le point de la parallèle à la droite AC passant par B, dont l'abscisse vaut 259 dans le repère OIJ.

Voici comment ces questions peuvent être traitées.

1. Recherche du point D : les données permettent de placer le point D sur le dessin.

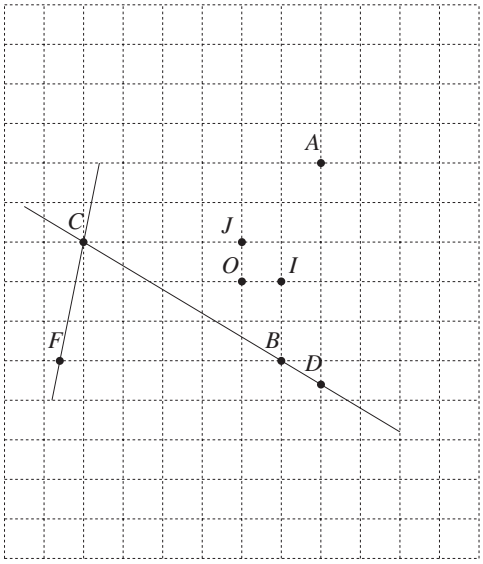


Fig. 20 : Alignement et parallélisme

Pour exprimer que le point D est aligné avec B et C, on écrit que $\overrightarrow{BD}$ est multiple de $\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire

$$\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{BC},$$

où λ est un scalaire. En remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} 2 &= 1-5\lambda \\ y_D &= -2+3\lambda \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur de λ qui correspond au point D : $\lambda = -\frac{1}{5}$, valeur qui peut être interprétée en observant le dessin. Celui-ci montre que $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, le point D étant situé du côté opposé à C par rapport à B et à une distance cinq fois plus petite de B que celle de B à C. Ces constatations permettent de comprendre clairement le rôle que joue le paramètre dans l'équation vectorielle de départ. En remplaçant la valeur de λ dans la deuxième équation, on trouve $y_D = -\frac{13}{5}$. Les coordonnées de D sont donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$.

2. Recherche du point E : il n'est plus possible de placer le point E avec précision sans faire le calcul préalable. Par un raisonnement similaire au précédent, on écrit l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{AE} = \mu\overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AC},$$

où μ est un scalaire. En remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2y_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} 2y_E &= 2-6\mu \\ y_E &= 3-2\mu \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur de μ qui correspond au point E : $\mu = -2$ et les coordonnées du point $E = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$. Il est possible à présent de placer le point E sur le dessin et de vérifier qu'il répond bien à la question.

3. Recherche du point F : cette fois le point F peut être construit avec précision, la difficulté supplémentaire provient du fait qu'il ne s'agit plus d'un simple problème d'alignement. Il faudra peut-être renvoyer les élèves à la synthèse de la page 255 pour les amener à écrire une équation vectorielle de départ.

$$\overrightarrow{CF} = \nu\overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \nu\overrightarrow{AB},$$

où ν est un scalaire. En remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_F \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} x_F &= -4-\nu \\ -2 &= 1-5\nu \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur de ν qui correspond au point F : $\nu = \frac{3}{5}$ et les coordonnées du point $F = \begin{pmatrix} -\frac{23}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. Recherche du point K : l'abscisse 259 du point K est trop grande pour qu'on puisse visualiser celui-ci, mais un calcul analogue aux précédents donne, à partir de l'équation vectorielle $\overrightarrow{BK} = \rho\overrightarrow{AC}$, la valeur de $\rho = -43$ et les coordonnées du point $K = \begin{pmatrix} 259 \\ 84 \end{pmatrix}$.

Il est possible de traiter des problèmes du même type dans l'espace. Nous en donnons un exemple.

Dans l'espace muni d'un repère $OIJK$, on donne les points A, B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées des points D, E, F et K, sachant que

1. D est le point de la droite BC, d'abscisse -3 dans le repère $OIJK$;
2. E est le point de la droite AC, dont la somme des coordonnées vaut 5 dans le repère $OIJK$;
3. F est le point de la parallèle à la droite AB passant par C, de hauteur 11 dans le repère $OIJK$;
4. K est le point de la parallèle à la droite AB passant par C, d'abscisse 258 dans le repère $OIJK$.

Il n'est plus question ici de s'appuyer sur un dessin, mais le travail effectué dans le plan a préparé les élèves à écrire les équations vectorielles de départ sans avoir recours à un support visuel. Les résultats obtenus sont

$$D = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 258 \\ -1 \\ -644 \end{pmatrix}.$$

Ces différentes questions montrent bien que le calcul vectoriel permet de traiter certains problèmes d'alignement et de parallélisme tant dans le plan que dans l'espace.

Échos des classes

Seuls les problèmes dans le plan ont été traités dans une classe de quatrième. La difficulté majeure a été d'établir une équation vectorielle de départ. À partir de celle-ci, le passage aux couples de composantes s'effectue naturellement. Les élèves ont pris l'habitude de « lire » les composantes sur le quadrillage ; les fréquents retours au dessin qui en résultent ont permis de donner du sens aux étapes de calcul, et notamment d'interpréter la valeur du paramètre.

Pour chacune des questions, différentes équations vectorielles ont été proposées. Le fait que toutes ces équations conduisent, par des calculs différents, à la même réponse, a été une source d'étonnement pour certains.

2.3 Centres de gravité

De quoi s'agit-il ? Déterminer les coordonnées du centre de gravité de 2, 3, 4, ... points, dans le plan et dans l'espace.

Comment s'y prendre ? La première question concerne la recherche des coordonnées du milieu d'un segment, tant dans le plan que dans l'espace.

Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ où

1. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans le plan muni d'un repère ;
2. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère.

En déduire l'expression générale des coordonnées du milieu d'un segment, dans le plan et dans l'espace.

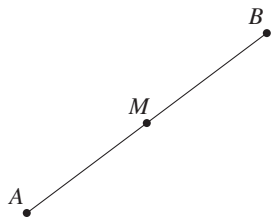


Fig. 21 : Milieu d'un segment

Le point M, milieu de $[AB]$, est évidemment un point de la droite AB. La recherche du milieu s'apparente donc à un problème d'alignement, où la position du point cherché par rapport aux points A et B est connue. À partir de l'une des équations vectorielles

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},$$

on obtient, en remplaçant chacun des vecteurs par son expression en somme de vecteurs passant par l'origine,

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Cette dernière relation permet de calculer les coordonnées du milieu, aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Pour le problème posé, on obtient donc $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans le plan et $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dans l'espace, mais le raisonnement effectué ci-dessus fournit une formule générale pour déterminer le milieu d'un segment.

De plus, on peut remarquer que, puisque tout point P du plan ou de l'espace peut jouer le rôle de l'origine, la relation $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ peut encore s'écrire

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$$

pour tout point P du plan ou de l'espace.

Milieu d'un segment. – *Voici quatre égalités qui définissent le point M, milieu du segment $[AB]$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \\
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{MB}, \\
\overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \\
\overrightarrow{PM} &= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} \quad \textit{pour tout point } P \textit{ du plan ou de l'espace.}
\end{aligned}$$

La relation $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ peut encore s'écrire $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$; cette dernière expression donnera lieu à une généralisation ultérieure.

Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$, où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont

$$M = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans l'espace muni d'un repère, les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$, où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ sont

$$M = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}.$$

Le point M milieu du segment $[AB]$ est le point qui vérifie la condition $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. Par analogie, on peut poser la question suivante.

Existe-il, pour tout triangle ABC du plan ou de l'espace, un point G qui vérifie la condition $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$? Si ce point G existe, quelle est sa position par rapport aux sommets du triangle ABC ?

Cette question, très générale, peut être abordée par un problème particulier.

1. Dans le plan muni d'un repère, on donne les trois points A, B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

2. Dans l'espace muni d'un repère, on donne les trois points A, B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dans ces deux cas, on demande de vérifier l'existence d'un point G qui vérifie la condition $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, et, s'il existe, de déterminer ses coordonnées.
Démontrer ensuite que ce point G se trouve sur les médianes du triangle, aux deux tiers à partir du sommet.

On montre tout d'abord que la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

est équivalente à

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Cette deuxième relation est obtenue facilement en remplaçant $\overrightarrow{GA}$ par $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}$, et en procédant de même pour $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$. Cette expression établit l'existence du point G en toute généralité, et cette forme est analogue à l'expression de M comme milieu du segment $[AB]$. Tout comme les coordonnées du point M sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des extrémités du segment $[AB]$, les coordonnées du point G sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des sommets du triangle ABC. On obtient alors $G = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ pour le problème dans le plan et $G = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ celui dans l'espace.

Remarquons que la démonstration suggérée ci-dessus permet d'établir que la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

est équivalente à

$$\overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

pour tout point P du plan ou de l'espace.

Les élèves peuvent vérifier, à titre d'exercice, que le point G trouvé, appelé *centre de gravité de* ABC, est bien situé sur chacune des médianes du triangle (et donc à leur intersection), aux deux tiers à partir du sommet.

La propriété peut être établie dans le cas général par un calcul vectoriel relativement simple. Notons A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

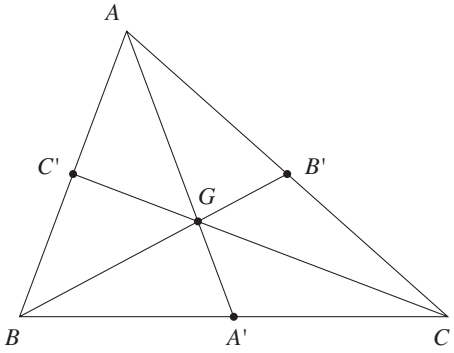


Fig. 22 : Centre de gravité d'un triangle

Les propositions A' est milieu de $[BC]$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{PA'} = \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2},$$

G est centre de gravité de ABC

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

sont vraies quelle que soit la position du point P. Si on place celui-ci en A, on obtient

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

ce qui montre bien que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Centre de gravité d'un triangle*[8]*. – *Le point G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Voici deux autres égalités qui définissent le point G.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ \overrightarrow{PG} &= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \quad \textit{pour tout point } P \textit{ du plan ou de l'espace.} \end{aligned}$$

Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur les médianes aux deux tiers à partir du sommet.

Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ sont

$$G = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{pmatrix}.$$

Dans l'espace muni d'un repère, les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$ sont

$$G = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ \frac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{pmatrix}.$$

[8] Chaque fois qu'il sera question du centre de gravité d'une figure, il s'agira du centre de gravité des sommets de cette figure (sous-entendu : affectés d'une même masse).

Prolongements possibles

Centre de gravité d'un quadrilatère quelconque

Déterminer la position du centre de gravité d'un quadrilatère quelconque.

Le centre de gravité de quatre points A, B, C, D est le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}.$$

Ce point G est aussi défini par la relation équivalente

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4},$$

dans laquelle il semble naturel d'effectuer des groupements, par exemple

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}}{2}.$$

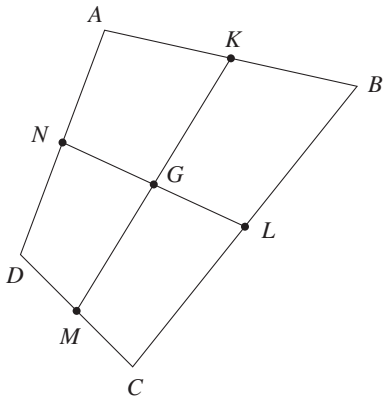


Fig. 23

Nous voyons ainsi apparaître de manière naturelle les milieux K et M des segments $[AB]$ et $[CD]$, définis par les relations

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

On obtient ainsi $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$ qui situe le point G au milieu de la médiane $[KM]$. L'autre façon de grouper

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL}}{2}$$

montre que le point G se trouve aussi au milieu de la médiane $[NL]$.

On a ainsi démontré que le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque est le point d'intersection des médianes, et que celles-ci se coupent en leur milieu.

Remarque. – On peut aussi voir que les médianes d'un quadrilatère $ABCD$ quelconque se coupent en leur milieu en prouvant au préalable que le quadrilatère $KLMN$ qui joint les milieux de ses côtés est un parallélogramme. Cette démonstration peut également se faire vectoriellement.

Centre de gravité d'un tétraèdre

Déterminer la position du centre de gravité d'un tétraèdre quelconque $ABCD$.

Il s'agit donc de situer le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}, \text{ ou encore } \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$

Au cours de la résolution du problème précédent, nous n'avons jamais utilisé le fait que les points A, B, C et D étaient coplanaires. Nous pouvons donc reprendre ces mêmes calculs pour établir que le point G se trouve au milieu des segments $[KM]$ et $[LN]$, où K, L, M et N sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Un troisième groupement des sommets deux par deux

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{2}$$

montre que le point G se trouve aussi au milieu du segment $[QR]$, où Q et R désignent les milieux des arêtes $[AC]$ et $[BD]$. Ceci démontre donc que, dans un tétraèdre quelconque, les segments joignant les milieux des paires d'arêtes gauches se coupent en leur milieu, et que ce point d'intersection est le centre de gravité du tétraèdre.

Dans un tétraèdre, il est tout aussi naturel de grouper trois sommets, de manière à faire apparaître les centres de gravité des faces triangulaires. On écrit, par exemple, que

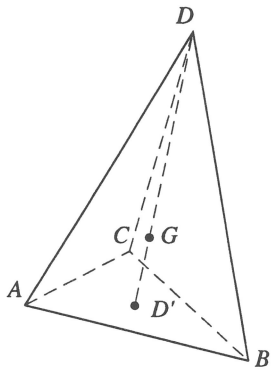


Fig. 24

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}) + \overrightarrow{OD}}{4} = \frac{3\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$

Cette relation fait intervenir D', centre de gravité de la face ABC. Elle est encore vraie si on remplace le point O par n'importe quel point P du plan. En particulier, en plaçant O au point D, on obtient

$$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'},$$

qui indique que le point G se trouve sur le segment $[DD']$, aux trois quarts à partir de D.

Une autre voie est de partir directement de l'expression

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}.$$

En y remplaçant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ par $3\overrightarrow{GD'}$, on obtient

$$3\overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GD'}$$

qui exprime également que le point G se trouve sur le segment $[DD']$, aux trois quarts à partir de D.

Si on appelle *hypermédiane d'un tétraèdre* le segment qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, on peut donc démontrer que le centre de gravité du tétraèdre est situé sur chacune des hypermédianes,

aux trois quarts à partir du sommet. Les quatre hypermédianes sont donc concourantes en ce point.

Centre de gravité d'une pyramide

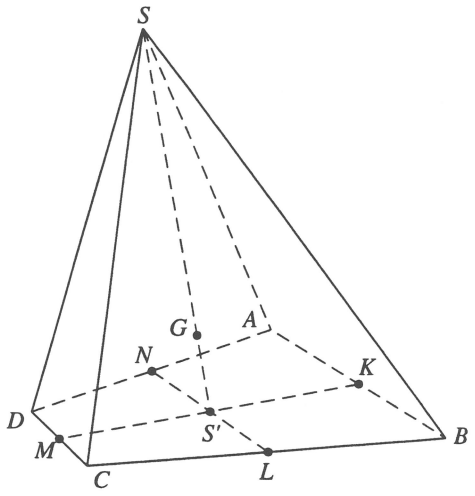


Fig. 25

On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et dont la base $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. Déterminer la position du centre de gravité de la pyramide $SABCD$.

La résolution des deux derniers problèmes devrait permettre aux élèves d'imaginer, puis de démontrer, que le centre de gravité G de cette pyramide se trouve sur le segment $[SS']$, où S' est le point d'intersection des médianes de la base $ABCD$ et qu'il se trouve, sur ce segment, aux quatre cinquièmes à partir du sommet S.

Centre de gravité d'un ensemble de points du plan ou de l'espace

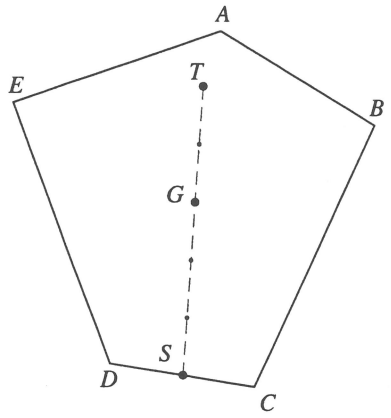


Fig. 26

Pour fixer les idées, considérons cinq points A, B, C, D et E dans l'espace. Le centre de gravité de ces cinq points est le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{0}.$$

Ce point G existe et est déterminé par la relation

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{5}.$$

Soit T le centre de gravité du triangle ABE et S celui du segment $[CD]$. On a donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GT} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GS}.$$

En remplaçant, dans la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{0},$$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE}$ par $3\overrightarrow{GT}$ et $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$ par $2\overrightarrow{GS}$,

on obtient

$$3\overrightarrow{GT} + 2\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{0} \text{ ou encore } \overrightarrow{SG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{ST},$$

qui exprime que le centre de gravité de l'ensemble des cinq points se trouve sur le segment qui joint les centres de gravité des groupements de trois et de deux points.

Dans l'expression $3\overrightarrow{GT} + 2\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{0}$, les coefficients 2 et 3 représentent le nombre de points des groupements dont T et S sont les centres de gravité.

Généralisation

Considérons un ensemble de n points du plan ou de l'espace A_1, A_2, A_3, ..., A_n et notons G le centre de gravité de ces n points. Répartissons ces n points en deux groupements de p et $n-p$ points ($p < n$), $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$, de centre de gravité G_1, et $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_n$ de centre de gravité G_2.

Un raisonnement analogue à celui qui précède permet d'établir que

$$p\overrightarrow{GG_1} + (n-p)\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{0}.$$

On peut encore voir les choses de la manière suivante.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}}{n} =$$

$$\frac{(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_p}) + (\overrightarrow{OA_{p+1}} + \overrightarrow{OA_{p+2}} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})}{n} =$$

$$\frac{p\frac{(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_p})}{p} + (n-p)\frac{(\overrightarrow{OA_{p+1}}+\overrightarrow{OA_{p+2}}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})}{n-p}}{n} =$$

$$\frac{p\overrightarrow{OG_1} + (n-p)\overrightarrow{OG_2}}{n}.$$

C'est une autre façon de situer le point G sur le segment $[G_1G_2]$.

Échos des classes Voir ceux de la section 2.2, à la page 258.

2.4 Problèmes d'incidence

De quoi s'agit-il ? Quelques problèmes plus complexes faisant appel au même type de raisonnement qui a servi précédemment peuvent être soumis aux élèves, si le professeur souhaite approfondir cette matière. En voici un exemple relatif à l'intersection de deux droites du plan, traité en termes d'équations vectorielles et paramétriques.

Comment s'y prendre ?

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points A, B, C, P et Q et leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite PQ avec les côtés du parallélogramme $ABCD$.

Précisons que les points demandés doivent appartenir aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ou $[DA]$ et non à leurs prolongements.

Le premier problème qui se pose aux élèves est de réaliser un dessin qui illustre la situation. Dans un repère orthonormé, l'abscisse 95 du point A impose une unité telle que le dessin est peu utile. Certains élèves penseront peut-être à prendre une unité plus petite sur l'axe des abscisses que sur l'axe des ordonnées. Ils obtiennent ainsi une figure qui, même si elle est imprécise, soutient le raisonnement.

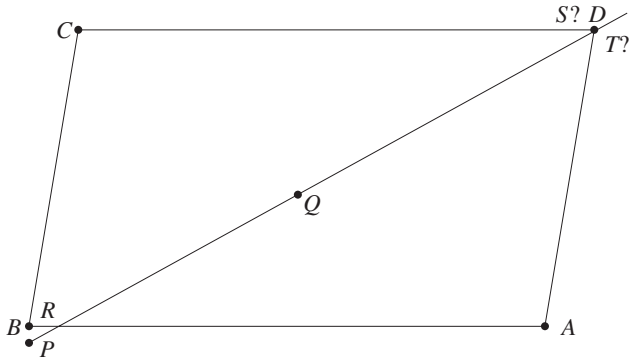


Fig. 27

Trouver les coordonnées du point D ne devrait pas leur poser de problème. Le plus simple est de partir de l'une des équations vectorielles $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. On trouve $D = \begin{pmatrix} 104 \\ 20 \end{pmatrix}$.

La figure montre que la droite PQ coupe certainement le côté $[BA]$ en un point que nous notons R. Il faut donc chercher les coordonnées du point d'ordonnée 2 sur la droite PQ. À partir de l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ},$$

et en remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_R \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 49 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} x_R &= 1 + 49\lambda \\ 2 &= 1 + 9\lambda \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur $\lambda = \frac{1}{9}$ qui correspond au point R et ensuite les coordonnées du point $R = \begin{pmatrix} \frac{58}{9} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par contre, l'imprécision du dessin ne permet pas de voir si la droite PQ passe par D, ou si elle coupe le côté $[CD]$ ou le côté $[AD]$. Le plus simple est de vérifier si la droite PQ passe par D. Ce n'est pas le cas car

$$\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} 103 \\ 19 \end{pmatrix} \text{ n'est pas multiple de } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 49 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Calculons ensuite les coordonnées du point S d'intersection des droites PQ et CD. C'est le point d'ordonnée 20 sur la droite PQ. On trouve $\begin{pmatrix} 104,4 \\ 20 \end{pmatrix}$ pour le point S. Il faut alors remarquer que ce point est à droite de D et qu'il n'appartient donc pas au segment $[CD]$. On en déduit que la droite PQ coupe le côté $[AD]$ en un point que nous noterons T. La détermination de ce point T pose un problème nouveau. En effet, nous ne connaissons pour T ni l'abscisse, ni l'ordonnée, ni une relation entre les deux. Nous savons seulement que le point T est à la fois un point de la droite PQ et un point de la droite AD. Exprimons que T est sur la droite PQ par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{PT} = \lambda \overrightarrow{PQ} \text{ ou } \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ}.$$

Le point T appartient aussi à la droite AD, ce qui s'exprime par

$$\overrightarrow{AT} = \mu \overrightarrow{AD} \text{ ou } \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

L'erreur habituelle des élèves consiste à désigner par la même lettre les paramètres dans les deux expressions de $\overrightarrow{OT}$. Dans ce cas, ils obtiennent une équation vectorielle

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AD}$$

qui se révèle impossible dès qu'on remplace les vecteurs par les couples de composantes. Le retour au schéma permet de comprendre qu'il n'y a aucune raison pour que les vecteurs $\overrightarrow{PT}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient dans le même rapport que les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{AD}$. Il existe donc une valeur de λ et une valeur de μ, en général différentes, telles que

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

En passant aux couples des composantes, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 49 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} 1 + 49\lambda &= 95 + 9\mu \\ 1 + 9\lambda &= 2 + 18\mu \end{cases}$$

permet de déterminer les valeurs de λ et μ qui correspondent au point T. Remarquons qu'il suffit de connaître l'une de ces deux valeurs pour déterminer les coordonnées du point T. Dans le système mis sous la forme

$$\begin{cases} 49\lambda - 9\mu &= 94 \\ 9\lambda - 18\mu &= 1, \end{cases}$$

il est facile d'éliminer μ en multipliant la première équation par 2. Nous obtenons ainsi $\lambda = \frac{187}{89}$ et les coordonnées du point T

$$T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{187 \times 49}{89} \\ 1 + \frac{187 \times 9}{89} \end{pmatrix}, \text{ dont les valeurs approchées sont } \begin{pmatrix} 103,95 \\ 19,91 \end{pmatrix}.$$

Ce point est bien sur le segment $[AD]$.

La résolution de ce problème a permis de montrer toute la puissance des équations vectorielles et paramétriques pour traiter des problèmes d'incidence. Les méthodes décrites ci-dessus peuvent s'appliquer telles quelles à des problèmes d'incidence dans l'espace. Nous en proposons à titre d'exemples. Voici tout d'abord un problème de section plane dans un cube[9].

Construire la section du cube de la figure 28 (en annexe à la page 491) par le plan PQR, où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A, Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$, et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. On demande ensuite de déterminer les coordonnées de tous les sommets de cette section, après avoir choisi un repère approprié.

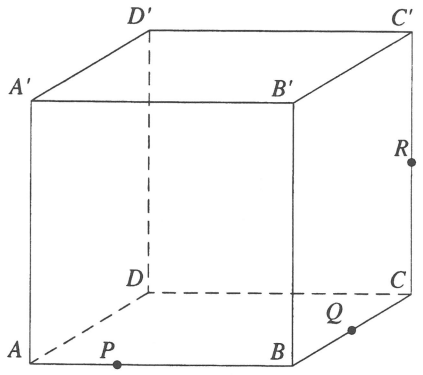


Fig. 28

Dans tous les exercices précédents, le repère était imposé par l'énoncé, puisque les points étaient donnés par des coordonnées. Par contre, pour traiter ce dernier problème, les élèves devront placer eux-mêmes un repère. Le plus facile est de placer l'origine sur un sommet du cube et les trois vecteurs « de base » sur des arêtes. Nous proposons, par exemple, de placer l'origine en A, et les vecteurs « de base » de telle sorte que $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AA'}$. Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve ensuite

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'un des points intermédiaires $V = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, intersection des droites PQ et DC, ou $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, intersection des droites QR et $B'C'$, permet de

[9] Des problèmes de ce type sont traités sous forme synthétique dans CREM [2001b].

calculer ensuite les points $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'arête $C'D'$, $T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'arête $A'D'$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ sur l'arête AA'.

Cette méthode de calcul reproduit les étapes de la construction de la section, mais le calcul vectoriel permet aussi de travailler d'emblée dans le plan de section PQR. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{QT}$ et $\overrightarrow{QU}$ peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$.

Pour la détermination du point S, par exemple, on a

$$\overrightarrow{QS} = \lambda\overrightarrow{QP} + \mu\overrightarrow{QR} \text{ ou } \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sachant que $y_S = 1$ et que $z_S = 1$, on détermine successivement $\mu = 2$ et $\lambda = 1$, puis $x_S = \frac{1}{3}$. Cette méthode peut sembler plus compliquée puisqu'elle met en jeu un système à deux paramètres, mais d'autre part le même système permet également de calculer les coordonnées des points T et U.

Les valeurs des coordonnées des sommets de la section permettent de situer avec précision ces points sur les arêtes. Par exemple S se trouve au tiers de $[D'C']$ à partir de D'. Si tous les élèves n'ont pas choisi le même repère, ce peut être l'occasion de leur faire remarquer que, même si les coordonnées des points de la section sont différentes, l'interprétation de leur position sur les arêtes du cube reste identique.

Passons maintenant à un autre type de questions. La mise en œuvre des équations vectorielles et paramétriques permet aussi de déterminer les positions relatives des droites de l'espace.

Dans l'espace muni d'un repère $OIJK$, on donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les positions relatives des droites CD, EF, EG et PQ par rapport à la droite AB ?

Rappelons que des droites de l'espace peuvent être parallèles, sécantes ou gauches. Les élèves doivent imaginer une méthode pour déterminer la

position de chacune des droites par rapport à AB. Le plus simple est de calculer les coordonnées d'un vecteur sur chacune des droites, car ce premier travail permet de voir facilement quelles sont les droites qui ont la même direction que AB. On obtient

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{CD} = -6\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB}$, on peut conclure que les droites AB, CD et EG ont la même direction. Il s'agit alors de préciser si elles sont parallèles disjointes ou confondues. Une stratégie consiste à vérifier si l'un des points C, D, E ou G est aligné avec A et B (voir la synthèse de la page 255). Le calcul des composantes des vecteurs $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ montre que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, tandis que $\overrightarrow{AE}$ n'est pas multiple de $\overrightarrow{AB}$. En conclusion, les points A, B, C et D sont alignés, alors que les droites AB et EG sont parallèles disjointes.

Plutôt que d'utiliser une condition d'alignement, les élèves auront peut-être l'idée de vérifier si les droites AB et CD, puis AB et EG, ont un point commun. Si T est un point commun aux droites AB et CD, il vérifie les équations vectorielles

$$\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CT} = \mu\overrightarrow{CD} \text{ ou } \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CD}.$$

En égalant les expressions de $\overrightarrow{OT}$ et en remplaçant les vecteurs par leurs composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Le système qui en découle, à savoir

$$\begin{cases} \lambda + 6\mu &= 3 \\ \lambda + 6\mu &= 3 \\ -\lambda - 6\mu &= -3 \end{cases}$$

est vérifié par une infinité de valeurs des paramètres λ et μ, du moment que $\lambda = -6\mu + 3$. Cela montre bien qu'il y a une infinité de points communs aux droites AB et CD et que les points A, B, C, D sont alignés. À chaque valeur de λ qui situe un point T par rapport à A et B correspond une seule valeur de μ qui situe ce même point T par rapport à C et D.

En recherchant de la même manière un point d'intersection S aux droites AB et EG, on obtient l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE} + \mu\overrightarrow{EG},$$

et en termes de composantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu &= -4 \\ \lambda - 2\mu &= 2 \\ -\lambda + 2\mu &= 0 \end{cases}$$

est cette fois impossible, ce qui montre bien que les droites de même direction AB et EG sont parallèles disjointes.

Nous avons déjà vu que les droites EF et PQ n'ont pas la même direction que la droite AB. C'est donc l'existence d'un éventuel point d'intersection qui nous permettra de savoir si elles sont gauches ou sécantes avec AB.

S'il existe un point L commun aux droites AB et EF, il vérifie l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE} + \mu\overrightarrow{EF},$$

et en termes de composantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda - \mu &= -4 \\ \lambda + \mu &= 2 \\ -\lambda - 2\mu &= 0 \end{cases}$$

qui en découle, on détermine les valeurs $\lambda = -1$ et $\mu = 3$ qui vérifient les deux premières équations. Ces valeurs devraient également vérifier la troisième équation pour être solutions du système, mais ce n'est pas le cas. On dit que le système est *incompatible*. Aucune valeur de λ et de μ ne convient, les droites AB et EF sont donc gauches.

On reprend le même raisonnement pour un éventuel point R commun aux droites AB et PQ. Il vérifie l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} + \mu\overrightarrow{PQ},$$

et en termes de composantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dans le système qui s'ensuit,

$$\left\{\begin{array}{rcr} \lambda-\mu & = & -3 \\ \lambda+\mu & = & 1 \\ -\lambda-2\mu & = & -3, \end{array}\right.$$

les valeurs $\lambda=-1$ et $\mu=2$ qui vérifient les deux premières équations du système vérifient également la troisième équation. Cette fois le système est *compatible*. Le point d'intersection R est obtenu en remplaçant, soit λ par -1 dans $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}$, soit μ par 2 dans $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{PQ}$. On obtient

$$R=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce travail a permis de rencontrer de manière naturelle des systèmes de 3 équations à 2 inconnues, en donnant du sens aux différents cas qui peuvent se présenter, tout en évoquant l'aspect vectoriel des positions relatives des droites de l'espace.

Un autre type de problèmes d'incidence dans l'espace[10] est celui de la recherche du point de percée d'une droite dans un plan. Nous proposons de l'aborder par un exercice comme celui-ci.

> On considère le tétraèdre $ABCD$, R le point situé sur l'arête $[AD]$ au tiers à partir de D et E le point du plan ABC tel que $BACE$ forme un parallélogramme. On demande de déterminer le point de percée P de la droite RE dans la face BCD, de situer ce point avec précision sur la droite RE et dans la face BCD, en utilisant un repère approprié.

Le dessin de la figure 29 est reproduit en annexe à la page 490.

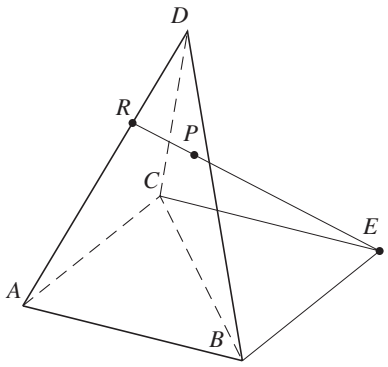


Fig. 29

La nature du problème nous conduit à renoncer à l'emploi d'un repère orthonormé. Il vaut mieux, si on veut éviter de trop longs calculs, se donner un repère dont l'origine est un sommet du tétraèdre et dont les vecteurs « de base » sont sur les arêtes de celui-ci. On peut, par exemple choisir

[10] Des problèmes de ce type sont traités sous forme synthétique dans CREM [2001b].

de travailler dans le repère $ABCD$. Les vecteurs « de base » sont alors $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{AD}$. Dans ce repère, les points A, B, C, D, E et R ont pour coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Comme le point P appartient à la droite RE, il vérifie l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{RP} = \lambda \overrightarrow{RE} \text{ ou } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AR} + \lambda \overrightarrow{RE}.$$

De plus nous avons vu que tout vecteur d'un plan pouvait être exprimé comme combinaison linéaire de deux vecteurs « de base » de ce plan. Dans le plan BCD, on peut donc exprimer le vecteur $\overrightarrow{BP}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$. L'équation vectorielle

$$\overrightarrow{BP} = \mu \overrightarrow{BC} + \nu \overrightarrow{BD} \text{ ou } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC} + \nu \overrightarrow{BD}$$

exprime donc bien que le point P appartient au plan BCD. On exprime que P appartient à la fois à la droite RE et au plan BCD en égalant les deux expressions de $\overrightarrow{AP}$, ce qui donne, en passant aux composantes des vecteurs,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système qui en découle,

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= 1 \\ \lambda - \mu &= 0 \\ -\frac{2}{3}\lambda - \nu &= -\frac{2}{3} \end{cases}$$

a pour solution $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{4}, \nu = \frac{1}{2}$. Les coordonnées du point P sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans le repère choisi. Elles sont obtenues en remplaçant, par exemple, λ par $\frac{1}{4}$ dans l'expression de $\overrightarrow{AP}$. Les valeurs des paramètres peuvent cependant être interprétées indépendamment du repère. Le fait que

$$\overrightarrow{RP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{RE}$$

signifie que le point P se trouve sur le segment $[RE]$ au quart à partir de R. Dans la face BCD, on peut situer le point P à partir de la relation

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

2.5 Quelques transformations du plan et de l'espace

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points A, B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Représenter graphiquement les points suivants et calculer leurs coordonnées, sachant que

1. D est le point tel que $CABD$ forme un parallélogramme,
2. A' est l'image de A par la translation $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{BC}$,
3. B' est le symétrique de B par rapport à A,
4. C' est l'image de C par une homothétie de centre A et de rapport $-\frac{3}{4}$.

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points A, B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées des points D, A', B' et C' définis de la même manière que dans le plan.
En déduire, après généralisation, l'expression analytique des translations, symétries centrales et homothéties dans le plan et dans l'espace.

Voici les résultats pour le plan.

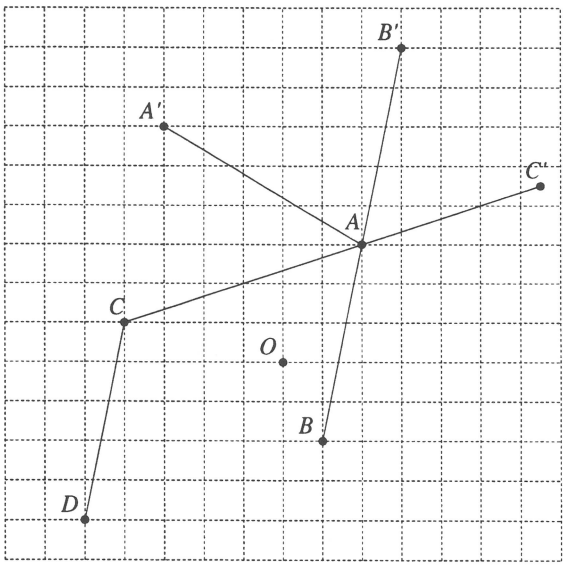


Fig. 30 : Transformations du plan

1. L'équation $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ nous donne $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point D.
2. L'équation $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ nous donne $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point A'.
3. L'équation $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BA}$ nous donne $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point B'.
4. L'équation $\overrightarrow{AC'} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ nous donne $\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point C'.

Voici les résultats pour l'espace.

1. L'équation $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ nous donne $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point D.
2. L'équation $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ nous donne $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point A'.
3. L'équation $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BA}$ nous donne $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point B'.
4. L'équation $\overrightarrow{AC'} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ nous donne $\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point C'.

Généralisation

Considérons les points P et P' de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. P' est l'image de P par la translation $\overrightarrow{t}$ de composantes $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$
   si et seulement si $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{t}$
   si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$.
2. P' est l'image de P par la symétrie de centre C de coordonnées $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$
   si et seulement si $\overrightarrow{CP'} = \overrightarrow{PC}$
   si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. P' est l'image de P par l'homothétie de centre C de coordonnées $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et de rapport k

   si et seulement si $\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}$

   si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-k) \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$.

Les expressions correspondantes dans l'espace sont obtenues sans peine en ajoutant la troisième composante.

Ce dernier travail montre que le calcul vectoriel permet également d'exprimer de manière extrêmement concise des propriétés de translation, de symétrie centrale et d'homothétie. Il permet d'en dégager facilement les expressions analytiques, aussi bien dans l'espace que dans le plan. Nous proposons, pour terminer, deux applications qui mettent en œuvre ces transformations.

Dans un plan, on considère trois points non alignés A, B et M. Au point M, on associe le point R milieu de $[BM]$, le point S, symétrique de R par rapport à A, ainsi que le point P, point d'intersection des droites MS et AB. Qu'advient-il du point P lorsque le point M se déplace dans le plan ?

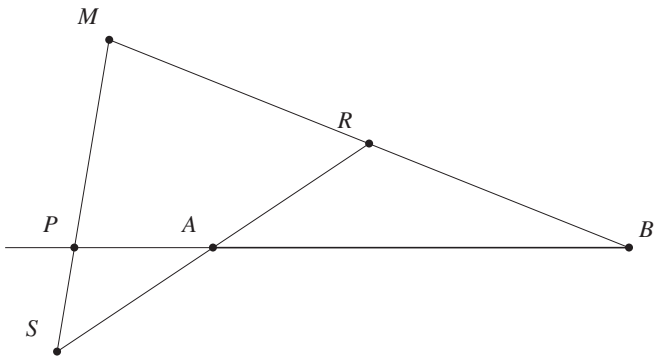


Fig. 31

Il semble naturel de travailler dans un repère dont l'origine est A et où $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, les points A et B ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le point mobile M sera noté $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. On obtient successivement

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{2} \\ \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda+1}{2} \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

En exprimant que le point P est aligné avec M et S, on obtient l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MS} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{MS},$$

ce qui donne pour les coordonnées du point P

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + k\left[\begin{pmatrix} -\frac{\lambda+1}{2} \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{k(3\lambda+1)}{2} \\ \frac{\mu(2-3k)}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme le point P appartient à la droite AB, son ordonnée est nulle, ce qui permet de déterminer la valeur de k qui vaut $\frac{2}{3}$. En remplaçant k par $\frac{2}{3}$ dans les coordonnées de P, on trouve $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Le point P est donc un point fixe, situé sur la droite AB, et tel que $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Dans un triangle ABC, on note H, J, K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, G le centre de gravité. Le point M étant un point quelconque du plan, on note P, Q, R les symétriques de M par rapport à H, J, K. Montrer que

1. les segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont même milieu O ;
2. les trois points M, G, O sont alignés.

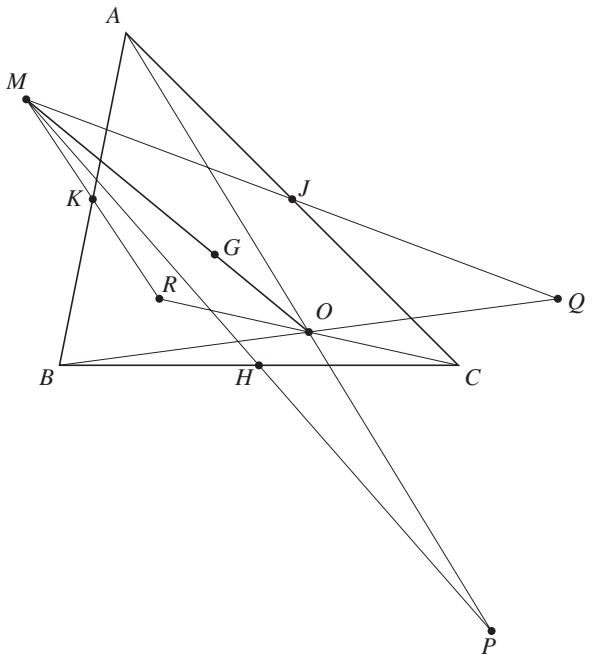


Fig. 32

Plaçons le repère en BHK, pour éviter d'introduire immédiatement des coordonnées fractionnaires. On a donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le point quelconque M est noté $M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ -\mu \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 2-\mu \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2-\mu \end{pmatrix}.$$

En calculant les coordonnées des milieux de $[BQ]$, de $[AP]$ et de $[CR]$, on trouve chaque fois $\begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} \\ 1-\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$, ces trois segments ont donc bien le même milieu $O = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} \\ 1-\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$. Il reste à calculer

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda \\ \frac{2}{3}-\mu \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{GO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{3}-\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GO}$, on peut en déduire que les points M, G et O sont alignés, et que G se trouve sur $[MO]$, aux deux tiers à partir de M.

Ce dernier résultat, qui peut sembler inattendu quand on travaille vectoriellement, apparaît de manière naturelle au cours d'une démonstration synthétique des propriétés annoncées. Voici quelques indications qui permettent de rédiger une telle démonstration.

Dans le triangle ABC, le segment $[JH]$ est parallèle au segment $[AB]$ et $|JH| = \frac{|AB|}{2}$.

Dans le triangle MPQ, le segment $[JH]$ est parallèle au segment $[QP]$ et $|JH| = \frac{|QP|}{2}$.

On en déduit que les segments $[AB]$ et $[QP]$ sont parallèles et de même longueur. Le quadrilatère $ABPQ$ est donc un parallélogramme dont les diagonales $[AP]$ et $[BQ]$ se coupent en leur milieu.

On démontre de même que $BCQR$ est un parallélogramme dont les diagonales $[CR]$ et $[BQ]$ se coupent en leur milieu.

Par conséquent, les trois segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont même milieu O.

Le point G, centre de gravité du triangle ABC, se trouve sur la médiane $[BJ]$ aux deux tiers à partir de B. Comme $[BJ]$ est aussi médiane du triangle BMQ, G est aussi le centre de gravité de ce triangle et se trouve donc également sur la médiane $[MO]$, aux deux tiers à partir de M. Les trois points M, G, O sont donc alignés.

Échos des classes Voir ceux de la section 2.2, à la page 258.

9

Le produit scalaire

1 Des polygones réguliers au produit scalaire

De quoi s'agit-il ?

Faire apparaître des relations algébriques entre les coordonnées des sommets des polygones réguliers. Pour chaque paire de vecteurs, trouver une expression algébrique qui ne dépend que de leurs longueurs et de l'angle formé par leurs directions.

Enjeux

La somme des vecteurs et le produit d'un vecteur par un scalaire sont les deux opérations qui permettent de construire la géométrie affine par calcul. Le produit scalaire que nous introduisons ici permet de même d'établir par calcul les propriétés euclidiennes (voir à ce sujet le chapitre 15).

Nous cherchons ici à faire émerger les différentes formes du produit scalaire à partir de figures géométriques simples et à donner du sens à l'expression du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée.

Matières couvertes. – La règle des cosinus, encore appelée *théorème de Pythagore généralisé* et la formule du cosinus de la différence de deux angles.

Le produit scalaire de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace, exprimé sous des formes faisant intervenir

– *les composantes des vecteurs dans un repère orthonormé,*

– *la fonction cosinus,*

– *la projection d'un vecteur sur l'autre.*

Les propriétés du produit scalaire et leur justification dans un contexte géométrique.

Compétences. – *Savoir, connaître, définir : le calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace faisant intervenir les composantes des vecteurs et le produit scalaire de deux vecteurs.*

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur dans une base orthonormée.

La trigonométrie dans le triangle rectangle.

Les nombres trigonométriques d'un angle orienté rapporté au cercle trigonométrique et leurs valeurs remarquables.

Matériel. – Une calculatrice scientifique.

1.1 Émergence d'une formule

Comment s'y prendre ?

Tout au long de ce chapitre, nous travaillerons dans le plan métrique, c'est-à-dire dans le plan muni d'une unité de longueur.

Le début de cette activité peut sembler très directif. Il a pour but de confronter les élèves avec une série de figures géométriques simples : des polygones réguliers centrés à l'origine d'un repère orthonormé. La recherche des coordonnées des sommets de ces polygones fournit l'occasion d'utiliser les sinus et cosinus de quelques angles orientés rapportés au cercle trigonométrique dans un contexte de géométrie analytique. L'observation des figures et des tableaux de nombres obtenus à partir des coordonnées de leurs sommets devrait permettre de dégager une formulation du produit scalaire dans une base orthonormée, ainsi que son interprétation.

> Représenter un carré $ABCD$ inscrit dans un cercle de rayon 1 centré à l'origine O d'un repère orthonormé. Indiquer les coordonnées des sommets du carré dans ce repère.

Certains élèves auront placé les sommets du carré sur les axes car, dans cette position, les coordonnées des sommets semblent évidentes. Ils obtiennent alors la figure 1.

D'autres auront eu l'idée de placer les médianes du carré sur les axes et obtiendront la figure 2.

Il est possible que d'autres positions du carré soient proposées spontanément. Sinon, le professeur demande de dessiner aussi le carré dont une diagonale forme un angle de 30° avec l'axe des x (figure 3).

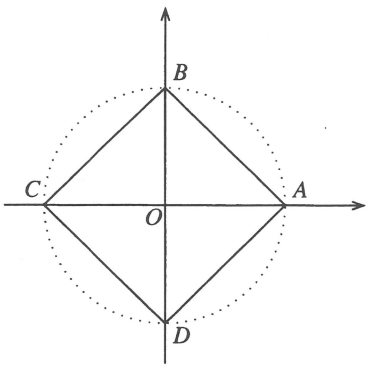


Fig. 1

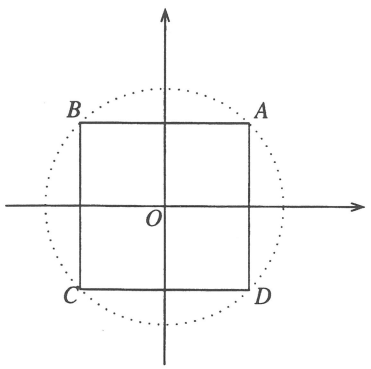


Fig. 2

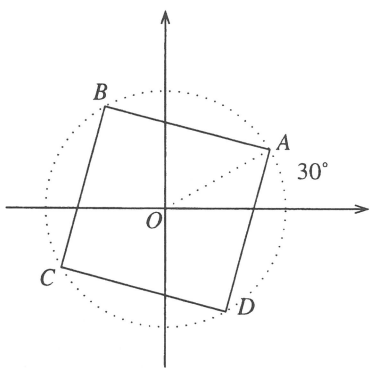


Fig. 3

Pour chacun des carrés obtenus, placer les coordonnées des sommets dans un tableau comme celui présenté ci-dessous pour le carré de la figure 1 et observer les régularités que présentent ces tableaux de nombres. Quelles sont les régularités qui persistent lorsque le carré est placé dans une position plus générale ?

	A	B	C	D
x	1	0	-1	0
y	0	1	0	-1

Les connaissances des élèves en trigonométrie devraient leur permettre de construire les tableaux suivants pour les carrés des figures 2 et 3.

	A	B	C	D
x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

	A	B	C	D
x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les deux premiers tableaux présentent des régularités qui proviennent de la position particulière du carré par rapport aux axes. Dans le premier, les seules valeurs qui apparaissent sont 1, 0 et -1 ; dans le second, il n'y a que deux valeurs opposées. Le tableau de nombres associé à la figure 3, moins particulière que les deux précédentes, donne une meilleure idée des régularités qu'on pourrait observer dans le cas général. On n'y voit que deux valeurs différentes en valeur absolue : $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces deux nombres reviennent dans chaque colonne, en changeant de place à chaque passage d'une colonne à la suivante et avec les signes « moins » aux mêmes endroits que dans le tableau précédent. Pour aborder le cas général, on suggère aux élèves de dessiner un carré dont une diagonale forme un angle quelconque α avec l'axe des x. Ils obtiennent la figure 4 et le tableau qui s'y rapporte.

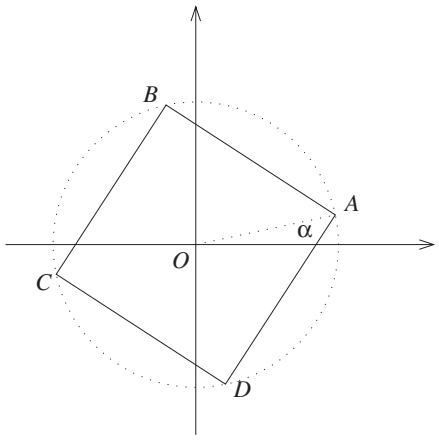


Fig. 4

	A	B	C	D
x	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
y	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$

Il sera sans doute utile de faire observer aux élèves que les coordonnées de chacun des sommets du carré vérifient la relation $x^2 + y^2 = 1$, puisque $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, et que cette relation est liée au fait que le carré est inscrit dans un cercle de rayon 1.

Et si le cercle circonscrit au carré n'est plus de rayon 1 ?
Dessiner un carré inscrit dans un cercle centré à l'origine et dont le sommet A dans le premier quadrant a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; compléter ensuite le tableau qui s'y rapporte.

Il faudra sans doute susciter une discussion dans la classe pour amener les élèves à observer que ce dernier carré fournit un cas plus général que les précédents, le rayon du cercle circonscrit au carré valant $\sqrt{a^2 + b^2}$, quantité qui n'est pas nécessairement égale à 1.

Les moyens qui sont à la disposition des élèves pour déterminer les coordonnées des sommets ne manquent pas. Ils peuvent, par exemple, considérer les triangles rectangles dont les hypoténuses sont les segments OA, OB, OC et OD, et dont les côtés sont parallèles aux axes. La rotation de 90° autour de O qui amène chacun de ces triangles sur le suivant permet de justifier l'égalité des longueurs des côtés de ces triangles. Il reste alors à déterminer les signes pour en déduire les coordonnées des sommets du carré. La figure 5 montre comment passer des coordonnées du point A à celles du point B.

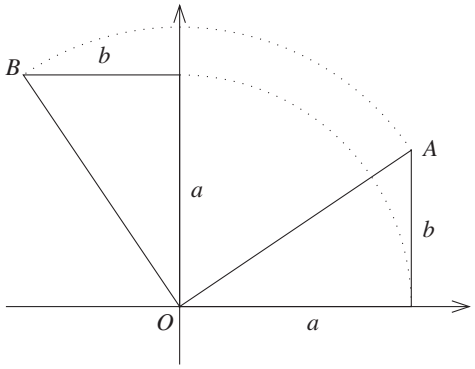


Fig. 5

Voici le tableau obtenu.

	A	B	C	D
x	a	$-b$	$-a$	b
y	b	a	$-b$	$-a$

Une phase de discussion sera sans doute encore nécessaire pour que toute la classe soit convaincue que ce tableau généralise tous les précédents.

On demande alors aux élèves d'analyser ce tableau, en particulier les sous-tableaux formés de deux colonnes consécutives. Leur faire expliquer comment on passe d'une colonne à la suivante éclaire assez bien la question.

Remarquons au passage que le tableau est cyclique et qu'on peut passer de la dernière colonne à la première par le même procédé. Le but est de trouver une relation toujours vérifiée par les coordonnées de deux sommets consécutifs du carré. Les élèves devraient finalement parvenir à la conclusion que le produit des abscisses est toujours égal à l'opposé du produit des ordonnées. Pour formuler mathématiquement cette observation sous la forme d'une relation liant x_1, y_1, x_2, y_2, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets consécutifs du carré, on écrira d'abord

$$x_1x_2 = -y_1y_2 \quad \text{et ensuite} \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

La même expression calculée sur les coordonnées de deux sommets diamétralement opposés donne

-1 pour tous les carrés inscrits dans un cercle de rayon 1 ;

$-(a^2 + b^2) = -r^2$ dans le cas général.

Que se passe-t-il si le nombre de côtés est plus grand que quatre ? Les tableaux de nombres obtenus à partir des coordonnées des sommets d'autres polygones réguliers présentent-ils de telles régularités ? Qu'advient-il de la relation $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$? Que vaut l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ lorsqu'on la calcule pour différentes paires de sommets ?

Examinons, par exemple, un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1 et centré en O. C'est un polygone dont la construction est bien connue des élèves. La figure 6 montre un hexagone dont un diamètre coïncide avec l'axe des x et la figure 7 montre un hexagone dont un diamètre forme un angle de 12° avec l'axe des x.

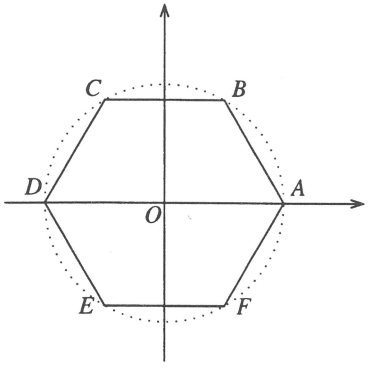


Fig. 6

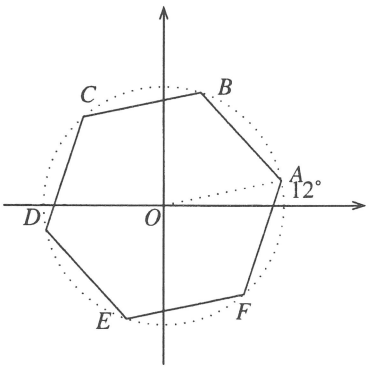


Fig. 7

Ce sont les valeurs particulières des sinus et cosinus des multiples de 60° qui fournissent les coordonnées des sommets de l'hexagone de la figure 6, et pour l'hexagone de la figure 7, les coordonnées des sommets sont exprimées sous la forme $(\cos 12°, \sin 12°)$, $(\cos 72°, \sin 72°)$, ...

On note les coordonnées des sommets dans un tableau de la forme

	A	B	C	D	E	F	A
x							
y							
$x_1x_2 + y_1y_2$							

où $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets consécutifs de l'hexagone.

Des régularités dans le tableau des coordonnées n'apparaissent plus de manière aussi évidente que pour le carré ; par contre, on voit que l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ calculée pour les coordonnées de deux sommets consécutifs d'un hexagone vaut toujours 0,5.

La même expression $x_1x_2 + y_1y_2$ est également calculée pour les coordonnées de différentes paires de sommets non consécutifs de l'hexagone.

Les résultats obtenus peuvent être regroupés de la manière suivante : l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ vaut

$0,5$ lorsque $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets consécutifs de l'hexagone ;

$-0,5$ lorsque $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets de l'hexagone situés à 120° l'un de l'autre ;

-1 lorsque $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets diamétralement opposés de l'hexagone.

On commence alors à penser que l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ est liée à l'angle formé par les vecteurs d'origine O et dont les extrémités sont les sommets d'un polygone inscrit dans un cercle de rayon 1. Il serait intéressant de connaître la valeur de l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ si l'angle formé par les vecteurs considérés vaut 0°, c'est-à-dire lorsque $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On obtient alors $x_1^2 + y_1^2 = 1$ dans tous les cas où le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ est à distance 1 de O. En tenant compte de cette dernière observation, on dresse le tableau suivant.

angle	$x_1x_2 + y_1y_2$
0°	1
90°	0
180°	-1
60°	$0,5$
120°	$-0,5$

Ce tableau devrait permettre de conjecturer que

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\alpha,$$

où α est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$, P_1 et P_2 étant des points situés à distance 1 de l'origine et de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On désignera par « longueur d'un vecteur » la longueur du segment qui joint son origine à son extrémité. Ceci nous permet d'énoncer la conjecture sous la forme suivante,

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\alpha,$$

où α est l'angle formé par les vecteurs de longueur 1 et de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

L'exemple du carré inscrit dans un cercle de rayon différent de 1 montre bien que la longueur des vecteurs joue également un rôle dans la valeur de l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$.

Quelle signification peut-on donner à l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ lorsque les vecteurs sont de longueurs différentes (et différentes de 1) ?

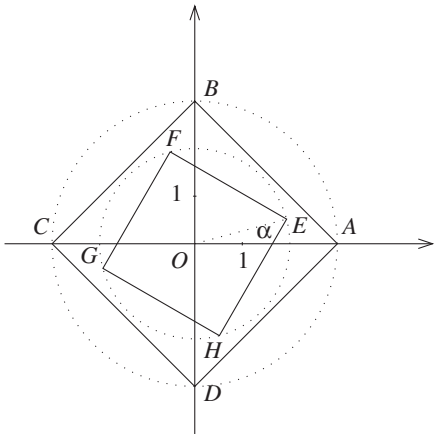


Fig. 8

Pour soutenir le réflexion des élèves, on leur présente la figure 8, qui montre deux carrés,

- l'un inscrit dans un cercle de rayon 3 et dont une diagonale coïncide avec l'axe des x,
- l'autre inscrit dans un cercle de rayon 2 et dont une diagonale forme un angle α avec l'axe des x.

Les coordonnées des sommets des deux carrés sont rassemblées dans le tableau suivant.

	A	E	B	F	C	G	D	H
x	3	$2\cos\alpha$	0	$-2\sin\alpha$	-3	$-2\cos\alpha$	0	$2\sin\alpha$
y	0	$2\sin\alpha$	3	$2\cos\alpha$	0	$-2\sin\alpha$	-3	$-2\cos\alpha$
$x_1x_2 + y_1y_2$	$6\cos\alpha$	$6\sin\alpha$	$6\cos\alpha$	$6\sin\alpha$	$6\cos\alpha$	$6\sin\alpha$	$6\cos\alpha$	

L'expression $x_1^2 + y_1^2$ qui valait 1 pour les vecteurs de longueur 1, vaut à présent 9 pour les sommets du carré $ABCD$ et 4 pour ceux du carré $EFGH$. D'une manière générale, le théorème de Pythagore nous indique que, pour un point P de coordonnée $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$, l'expression $x_P^2+y_P^2$ est égale au carré de sa distance à l'origine $|OP|$, ou encore au carré de la longueur du vecteur $\overrightarrow{OP}$. La longueur d'un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ vaut donc $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Le tableau permet également de vérifier que

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 3 \cdot 2 \cdot \cos\alpha$$

pour les paires de sommets A et E, B et F, C et G et enfin D et H ; et que

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 3 \cdot 2 \cdot \sin\alpha = 3 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

pour les paires de sommets E et B, F et C, G et D et, pour terminer, H et A, où $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ est l'angle $\widehat{EOB}$.

Ceci devrait inciter les élèves à conjecturer que l'expression $x_1x_2+y_1y_2$ vaut le produit des longueurs des vecteurs dont les composantes sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, multiplié par le cosinus de l'angle formé par les directions de ces deux vecteurs.

Cette expression $x_1x_2 + y_1y_2$ est appelée le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée et est notée[1] $< \overrightarrow{v_1} | \overrightarrow{v_2} >$.

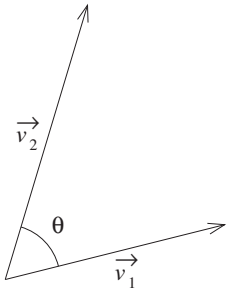


Fig. 9

La conjecture peut donc s'écrire

$$< \overrightarrow{v_1} | \overrightarrow{v_2} >= x_1x_2 + y_1y_2 = \|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\| \cdot \cos\theta$$

où $\|\overrightarrow{v_1}\|$ et $\|\overrightarrow{v_2}\|$ sont les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ et θ l'angle formé par les directions de ces deux vecteurs. Nous avons montré que $\|\overrightarrow{v_1}\|$ et $\|\overrightarrow{v_2}\|$ valent respectivement $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ et $\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

1.2 Les trois formes du produit scalaire

Comment s'y prendre ?

Généralisons la situation observée pour les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$ de la figure 8 dans le but d'obtenir une première forme du produit scalaire faisant intervenir les directions des vecteurs.

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ formant avec l'axe des x des angles orientés α et β. Dessinons ces vecteurs de telle sorte que leur origine coïncide avec l'origine O du repère orthonormé : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$. Nous savons que dans ce cas, les composantes des vecteurs sont égales aux coordonnées de leurs extrémités A et B. Les relations trigonométriques dans les triangles rectangles OAA' et OBB' nous donnent les coordonnées des

[1] Le choix de la notation $< \overrightarrow{v_1} | \overrightarrow{v_2} >$ pour le produit scalaire de deux vecteurs n'a rien d'impératif. Nous l'avons adoptée pour bien distinguer cette opération de la multiplication dans les réels et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire. En effet, il s'agit d'une opération tout à fait nouvelle qui, à deux vecteurs, associe un nombre. Ce nombre dépend de la longueur des deux vecteurs et de l'angle formé par leurs directions. Ceci s'écarte notablement d'une multiplication au sens usuel. De plus, cette notation se rapproche de celles habituellement utilisées pour les formes bilinéaires dans les ouvrages d'algèbre linéaire.

points A et B, et donc les composantes des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, qui sont respectivement

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{a}\| \cos\alpha \\ \|\overrightarrow{a}\| \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{b}\| \cos\beta \\ \|\overrightarrow{b}\| \sin\beta \end{pmatrix},$$

où $\|\overrightarrow{a}\|$ et $\|\overrightarrow{b}\|$ sont les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

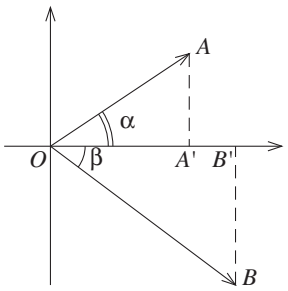


Fig. 10

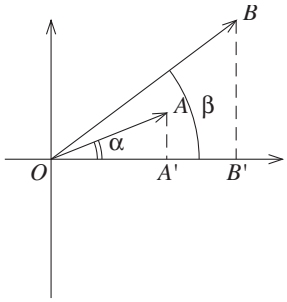


Fig. 11

Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut donc

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Or, nous avions conjecturé que

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \cos\theta$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, qui vaut $\alpha - \beta$ dans le cas de la figure 10 et $\beta - \alpha$ dans la figure 11. Remarquons que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$. La conjecture est donc établie si les élèves connaissent la formule qui exprime $\cos(\alpha - \beta)$ en fonction des nombres trigonométriques de α et β. Si ce n'est pas le cas, nous proposons ci-dessous une démonstration de la conjecture à partir de la règle des cosinus, encore appelée *théorème de Pythagore généralisé*. Nous présentons dans la section 1.5 à la page 295 une démonstration de ce dernier théorème telle qu'elle apparaît dans *Les Éléments* d'Euclide. Remarquons que la comparaison des deux expressions de $< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >$ ci-dessus nous permettra de déduire la formule du cosinus de la différence de deux angles, dès que la conjecture sera établie.

Démonstration de la conjecture

Nous proposons ici une façon d'établir le lien entre les deux premières formes du produit scalaire,

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= x_1x_2 + y_1y_2 \quad \text{et} \quad < \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \cos\theta.$$

Considérons un triangle quelconque ABC tel que les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Celles-ci sont indépendantes de la position de l'origine du repère. Nous pouvons donc placer l'origine du repère en A sans nuire à la généralité. Dans ce cas, les coordonnées des

points B et C sont également $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et les composantes de $\overrightarrow{BC}$ valent $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. En calculant le carré de la longueur du côté BC, on trouve

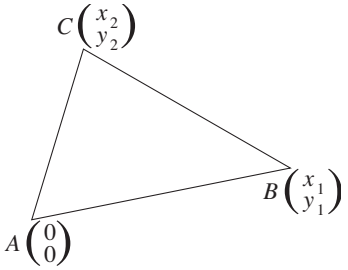


Fig. 12

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= |AB|^2 + |AC|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

En comparant cette dernière égalité avec le calcul de $|BC|^2$ par la règle des cosinus,

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{A},$$

on établit l'égalité

$$x_1x_2 + y_1y_2 = |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{A}.$$

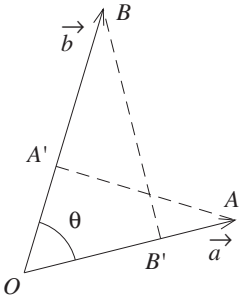


Fig. 13

Si on change de repère orthonormé, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ changent de valeurs, mais l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ reste *invariante* et vaut toujours $|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{A}$.

Forme du produit scalaire faisant intervenir la projection orthogonale d'un vecteur sur l'autre

Il reste à faire le lien avec la forme du produit scalaire qui fait intervenir la projection d'un vecteur sur l'autre.

Les figures montrent que, dans l'expression

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \| \overrightarrow{a} \| \| \overrightarrow{b} \| \cos \theta,$$

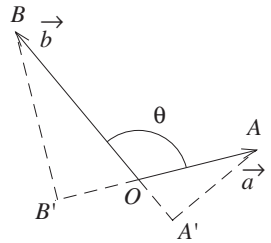


Fig. 14

$\| \overrightarrow{b} \| \cos \theta$ représente la longueur $|OB'|$ de la projection du vecteur $\overrightarrow{b}$ sur la direction du vecteur $\overrightarrow{a}$, munie du signe + si l'angle θ est aigu et du signe − si l'angle θ est obtus. On peut encore interpréter cela en disant que le signe est + si le vecteur $\overrightarrow{a}$ et la projection de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$ sont de même sens, et que le signe est − s'ils sont de sens contraires. De la même manière, $\| \overrightarrow{a} \| \cos \theta$ représente la longueur $|OA'|$ de la projection du vecteur $\overrightarrow{a}$ sur la direction du vecteur $\overrightarrow{b}$, munie du signe adéquat (figures 13 et 14).

Synthèse

Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont deux vecteurs de composantes respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en base orthonormée, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} > &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \cos\theta \\ &= (\text{signe})|OA| \cdot |OB'| = (\text{signe})|OB| \cdot |OA'| \end{aligned}$$

Dans cette dernière forme, $|OA|$, $|OB|$, $|OA'|$ et $|OB'|$ représentent les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et des projections orthogonales de chacun d'eux sur la direction de l'autre (voir figures 13 et 14). Le signe est

+ si l'angle θ est aigu, ou encore, si l'un des vecteurs et la projection de l'autre sur celui-ci sont de même sens,

− si l'angle θ est obtus, ou encore, si l'un des vecteurs et la projection de l'autre sur celui-ci sont de sens contraires.

Les valeurs $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ et $\|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ qui représentent les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont encore appelées *norme* de $\overrightarrow{a}$ et *norme* de $\overrightarrow{b}$. D'autre part, si les composantes des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont écrites sous la forme

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{a}\| \cos\alpha \\ \|\overrightarrow{a}\| \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{b}\| \cos\beta \\ \|\overrightarrow{b}\| \sin\beta \end{pmatrix},$$

α et β étant les angles orientés formés par les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ avec l'axe des x (voir les figures 10 et 11), le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut alors

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Comme θ est égal à $\alpha - \beta$ ou à $\beta - \alpha$, la comparaison de cette dernière égalité avec

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \cos\theta$$

permet d'établir la formule donnant le cosinus de la différence de deux angles, à savoir

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Extension du produit scalaire à l'espace

Deux vecteurs de l'espace, amenés dans une position où leurs origines coïncident en un point quelconque de l'espace, déterminent un plan. Dans ce plan, leur produit scalaire vaut donc

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \cos\theta,$$

où θ désigne l'angle formé par leurs directions. Montrons que si les composantes des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, leur produit scalaire peut s'écrire

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Il suffit pour cela d'adapter la démonstration de la conjecture dans le plan au cas où ABC est un triangle de l'espace.

Considérons un triangle ABC quelconque dans l'espace tel que les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Celles-ci sont indépendantes de la position de l'origine du repère, que nous pouvons donc placer en A. Dans ce cas, les coordonnées des points B et C sont égales aux composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

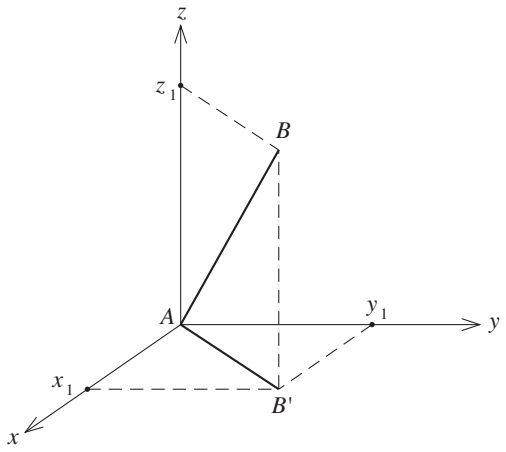


Fig. 15

La figure 15 montre bien que $|AB|^2 = |AB'|^2 + |B'B|^2$, le triangle $AB'B$ étant rectangle en B'. Comme $|AB'|^2 = x_1^2 + y_1^2$, on a

$$|AB|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

et de manière analogue

$$|AC|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Cette expression du carré d'une longueur comme somme de trois carrés peut être considérée comme une extension du théorème de Pythagore dans l'espace. D'une manière générale, la longueur d'un vecteur de l'espace (et du plan) est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes.

En calculant le carré de la longueur du côté BC, égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{BC}$ de composantes $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$, on trouve

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + z_2^2 + z_1^2 - 2z_1z_2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &= |AB|^2 + |AC|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \end{aligned}$$

En comparant cette dernière égalité avec l'expression de $|BC|^2$ calculée par la règle des cosinus, à savoir

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{A},$$

on établit l'égalité

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{A}.$$

1.3 Calculer des longueurs et des angles

Comment s'y prendre ?

Que peut-on calculer au moyen du produit scalaire ?

Toute l'activité qui précède visait à faire émerger l'idée que le produit scalaire de deux vecteurs est une expression qui dépend de la longueur de chacun des vecteurs et de l'amplitude de l'angle que forment leurs directions. On peut donc espérer qu'arrivés à ce stade, les élèves proposent spontanément d'utiliser le produit scalaire pour calculer des longueurs et des angles. Reste à établir les formules.

Pour arriver à une formule qui donne la longueur d'un vecteur, il faut encore observer que l'expression $x_1^2 + y_1^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2$ dans le plan (qui devient $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2$ dans l'espace) peut encore être vue comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{a}$ par lui-même (encore appelé *carré scalaire* du vecteur $\overrightarrow{a}$). En effet,

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{a} >= x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2.$$

Par conséquent, la longueur du vecteur $\overrightarrow{a}$ peut être calculée par la formule

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{a} >},$$

ce qui peut s'énoncer

1. *La norme d'un vecteur est la racine carrée de son carré scalaire.*

La deuxième forme du produit scalaire

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \cos \theta$$

fournit la formule qui permet de calculer l'angle (non orienté) formé par les directions de deux vecteurs. On obtient

$$\cos \theta = \frac{< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >}{\|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\|}.$$

En particulier, on peut énoncer

2. *Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.*

Ces deux formules peuvent être exploitées pour calculer la longueur d'un segment $[AB]$ et l'angle de deux droites AB et CD. On obtient

$$|AB| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{<\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}>} \quad \text{et} \quad \cos(AB, CD) = \frac{<\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}>}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}.$$

Le chapitre suivant proposera quelques situations-problèmes où ces aspects du produit scalaire seront mis en œuvre.

1.4 Propriétés du produit scalaire

Comment s'y prendre ?

À partir du moment où les élèves disposent des trois formes de l'expression du produit scalaire, les démonstrations de ses propriétés ne devraient pas poser de problèmes. Ils peuvent à tout moment se référer à la forme de leur choix pour donner une justification adéquate.

$$\begin{aligned} <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}> &= <\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}> \\ <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}> &= <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}>+<\overrightarrow{a}|\overrightarrow{c}> \\ <\overrightarrow{a}|k\overrightarrow{b}> &= k<\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}> \end{aligned}$$

Il nous semble intéressant de montrer ces propriétés à partir de la première forme du produit scalaire dans le plan. Considérons des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ quelconques, k et ℓ des scalaires quelconques. Nous notons

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

les composantes de ces vecteurs. Ainsi, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ et $k\overrightarrow{b}$ sont

$$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ y_2+y_3 \end{pmatrix}, \quad k\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} kx_2 \\ ky_2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}> &= x_1x_2+y_1y_2, \\ <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{c}> &= x_1x_3+y_1y_3, \\ <\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}> &= x_2x_1+y_2y_1 \\ &= x_1x_2+y_1y_2 \\ &= <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}>, \\ <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}> &= x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3) \\ &= x_1x_2+y_1y_2+x_1x_3+y_1y_3 \\ &= <\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}>+<\overrightarrow{a}|\overrightarrow{c}>, \\ <\overrightarrow{a}|k\overrightarrow{b}> &= x_1kx_2+y_1ky_2 \\ &= k(x_1x_2+y_1y_2) \\ &= k<\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b}>, \end{aligned}$$

ce qui établit les propriétés dans le plan. Celles-ci peuvent être démontrées dans l'espace de manière analogue.

Les deux dernières propriétés peuvent être condensées en une seule qui s'écrit

$$< \overrightarrow{a} | k\overrightarrow{b} + \ell\overrightarrow{c} >= k < \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} > + \ell < \overrightarrow{a} | \overrightarrow{c} > ;$$

et en tenant compte de la commutativité, on a aussi

$$< k\overrightarrow{b} + \ell\overrightarrow{c} | \overrightarrow{a} >= k < \overrightarrow{b} | \overrightarrow{a} > + \ell < \overrightarrow{c} | \overrightarrow{a} > .$$

Cet ensemble de propriétés exprime la *bilinéarité du produit scalaire.*

Application de la bilinéarité du produit scalaire

Adoptons, pour la perpendicularité des droites et des plans ces deux définitions, couramment admises.

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par son pied.

Un plan est perpendiculaire à une droite si et seulement si cette droite est perpendiculaire au plan.

La première définition est très exigeante : pour s'assurer de la perpendicularité d'une droite et d'un plan, il faudrait vérifier que la droite est perpendiculaire à une infinité de droites du plan. Une condition aussi forte est-elle vraiment nécessaire ?

À combien de droites d'un plan faut-il vérifier qu'une droite est perpendiculaire pour pouvoir conclure qu'elle est perpendiculaire au plan ?

La vue d'un livre ouvert posé debout sur une table nous donne l'intuition que si la droite est perpendiculaire à deux droites du plan passant par son pied, elle sera perpendiculaire à toutes les autres, et donc qu'elle sera perpendiculaire au plan. La linéarité du produit scalaire fournit la réponse à la question en même temps que sa justification.

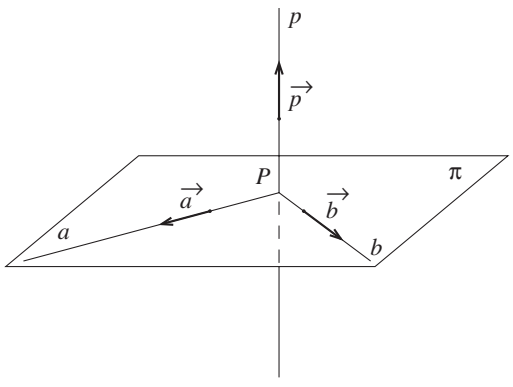


Fig. 16

En effet, considérons une droite p, P un point de cette droite, un plan π passant par P et contenant deux droites a et b sécantes en P et perpendiculaires à p. Montrons que la droite p est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par P. Pour cela, considérons un vecteur directeur sur chacune des droites : $\overrightarrow{p}$ sur p, $\overrightarrow{a}$ sur a, et $\overrightarrow{b}$ sur b. Si la droite p est perpendiculaire aux droites a et b, on a

$$< \overrightarrow{p} | \overrightarrow{a} >= 0 \quad \text{et} \quad < \overrightarrow{p} | \overrightarrow{b} >= 0.$$

Par conséquent,

$$< \overrightarrow{p} | k\overrightarrow{a} + \ell\overrightarrow{b} >= k < \overrightarrow{p} | \overrightarrow{a} > + \ell < \overrightarrow{p} | \overrightarrow{b} >= 0.$$

Comme toutes les droites du plan π passant par P ont un vecteur directeur

de la forme $k\overrightarrow{a} + \ell\overrightarrow{b}$, la relation $< \overrightarrow{p}|k\overrightarrow{a} + \ell\overrightarrow{b} >= 0$ montre que la droite p est perpendiculaire à toute droite du plan π passant par P.

Ceci nous permet d'énoncer une première forme de la condition suffisante de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites du plan passant par son pied.

De plus, comme toutes les droites du plan π ont un vecteur directeur de la forme $k\overrightarrow{a} + \ell\overrightarrow{b}$, la relation $< \overrightarrow{p}|k\overrightarrow{a} + \ell\overrightarrow{b} >= 0$ montre que la droite p est *orthogonale* à toute droite du plan π.

La linéarité du produit scalaire sous-tend donc également les démonstrations de propriétés de la perpendicularité d'une droite et d'un plan, comme par exemple

toute droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan,

et la deuxième forme de la condition suffisante de perpendicularité d'une droite et d'un plan

une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

1.5 La règle des cosinus

Cette activité complémentaire présente une démonstration de la règle des cosinus, encore appelée *théorème de Pythagore généralisé*. Nous en proposons ici une approche géométrique et directement appuyée sur les propositions 12 et 13 des *Éléments* d'Euclide (en annexe aux pages 491 à 493).

Cette activité de démonstration peut prendre place à tout autre endroit du cours qui conviendra au professeur, mais nous l'évoquons ici puisque nous en utilisons les résultats pour établir l'équivalence des différentes formes du produit scalaire.

Euclide, Les Éléments, Livre II, proposition 12.

Les *Éléments* d'Euclide représentent le premier ouvrage connu où les mathématiques sont présentées sous une forme déductive bien structurée, avec des démonstrations et un souci de rigueur. La plupart des élèves en ont entendu parler, mais il est probable qu'aucun d'entre eux n'a jamais eu l'occasion de consulter un texte mathématique ancien. Proposer aux élèves cette activité de lecture et d'interprétation nous a paru intéressant et de nature à susciter de l'intérêt pour l'histoire des mathématiques. La proposition 12 du livre II est un bon exemple d'un théorème dont la version originale peut être proposée aux élèves pour qu'ils la décortiquent et la traduisent dans un langage mathématique actuel. Voici la traduction en français de B. Vitrac[2].

[2] Dans cette section, nous adopterons la notation de Vitrac, plus légère et nous noterons AB indifféremment pour le segment $[AB]$ et pour sa longueur $|AB|$. Il n'en résulte aucune ambiguïté.

12

Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus.

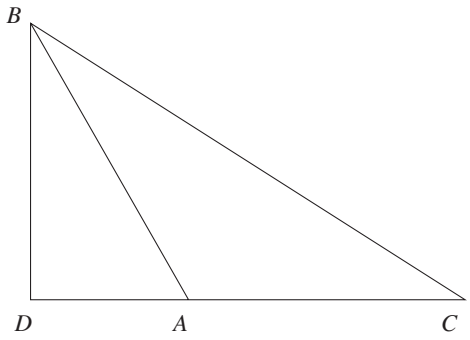


Fig. 17

Soit le triangle obtusangle ABC ayant l'angle sous BAC obtus, et, qu'à partir du point B soit menée BD, perpendiculaire sur CA, prolongée. Je dis que le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA, AC de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

En effet, puisque la droite CD a été coupée au hasard au point A, le carré sur DC est donc égal aux carrés sur CA, AD et deux fois le rectangle contenu par CA, AD (II. 4). Que celui sur DB soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CD, DB sont donc égaux aux carrés sur CA, AD, DB, et à deux fois le rectangle contenu par CA, AD. Mais d'une part celui sur CB est égal à ceux sur CD, DB ; en effet l'angle en D est droit (I. 47). Et d'autre part celui sur AB est égal à ceux sur AD, DB. Donc le carré sur CB est égal aux carrés sur CA, AB et deux fois le rectangle contenu par CA, AD. De sorte que le carré sur CB est plus grand que les carrés sur CA, AB de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

Donc dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus. Ce qu'il fallait démontrer.

La traduction de la thèse en langage mathématique actuel serait

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot CA \cdot AD,$$

où D est le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur AC.

Euclide nous invite à écrire que

$$DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD,$$

où nous reconnaissons le développement de $DC^2 = (CA + AD)^2$ par le produit remarquable $(a + b)^2$. La proposition (II. 4) à laquelle il est fait

référence présente une démonstration de cette formule dans un contexte géométrique.

En ajoutant DB^2 aux deux membres, on obtient

$$DC^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 \cdot CA \cdot AD.$$

D'autre part,

$$CB^2 = DC^2 + DB^2 \quad \text{et} \quad AB^2 = AD^2 + DB^2,$$

car l'angle en D est droit. Les élèves devraient reconnaître dans la proposition (I. 47) évoquée ici le théorème que nous appelons communément « théorème de Pythagore ».

En remplaçant $DC^2 + DB^2$ et $AD^2 + DB^2$ dans l'équation précédente, on obtient finalement

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot CA \cdot AD,$$

qui est bien la thèse annoncée.

Euclide - Les Éléments, Livre II, proposition 13.

On présente ensuite aux élèves l'énoncé de la proposition (II. 13). L'activité qui leur est proposée ici est de traduire la thèse en langage actuel et de démontrer la propriété à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en adaptant la démonstration de la propriété (II. 12) au cas du triangle acutangle.

13

Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en-deçà de l'angle aigu.

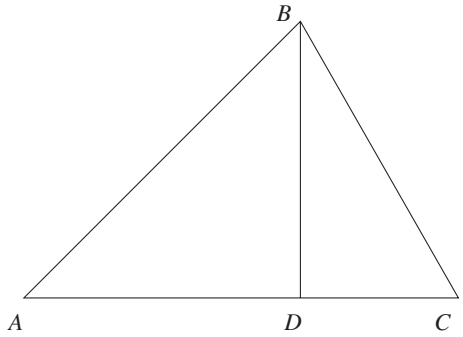


Fig. 18

La thèse est cette fois

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot CA \cdot AD.$$

La règle des cosinus

Pour obtenir la forme actuelle de ce théorème, il faut remarquer que les relations trigonométriques dans le triangle ABD nous donnent

$AD = AB \cdot \cos \widehat{A}$, dans la figure 18, où $\cos \widehat{A}$ est positif,

$AD = -AB \cdot \cos \widehat{A}$, dans la figure 17 à la page 296, où $\cos \widehat{A}$ est négatif.

On obtient ainsi la règle des cosinus

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}.$$

On peut encore adopter une notation plus légère en posant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$; on écrit alors

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

et, comme le triangle est quelconque, les sommets A, B et C ont le même statut, ce qui permet d'écrire aussi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}.$$

Commentaires

La méthode utilisée au début de ce chapitre (voir la section 1.1 à la page 281) pour faire émerger la forme $x_1x_2 + y_1y_2$ peut également faire apparaître la forme $x_1y_2 - x_2y_1$, cette dernière forme étant associée au produit vectoriel. Nous avons montré que le produit scalaire est une forme bilinéaire invariante pour les changements de repères orthonormés de même unité. Le produit vectoriel est une forme bilinéaire invariante pour les changements de repères orthonormés qui conservent l'unité et l'orientation.

2 Géométrie analytique et produit scalaire

De quoi s'agit-il ?

Résoudre, en utilisant le calcul vectoriel et le produit scalaire, des problèmes de représentation en vraie grandeur de figures planes de l'espace, ainsi que d'autres problèmes où interviennent des calculs d'angles et de longueurs. Ces problèmes sont abordés sous différents aspects, dans le but de réinvestir des propriétés de géométrie synthétique, des constructions de sections planes, des développements et d'autres types de représentations.

Enjeux

Développer les compétences liées au produit scalaire en analysant diverses situations-problèmes. Donner du sens aux calculs effectués au moyen du produit scalaire en les utilisant pour construire des figures.

Compétences. – À partir des notions introduites dans la section 1, *déterminer une longueur, un angle, une relation entre points-droites-plans, une équation, une propriété de figure, par une méthode routinière.*

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Le chapitre 8 à la page 218 et la section 1 de ce chapitre.

Les notions de droites orthogonales, de droite perpendiculaire à un plan, de plans perpendiculaires, et les propriétés de la perpendicularité.

Matériel. – Une calculatrice scientifique.

Du matériel pour dessiner et un rapporteur.

Les développements d'un cube et d'un tétraèdre régulier sur papier fort, qui peuvent être obtenus par photocopie des documents fournis en annexe aux pages 494 et 495.

2.1 Vraie grandeur d'une section dans un cube.

Comment s'y prendre ?

Reprenons le problème de section plane dans un cube traité dans la section 2 du chapitre 8. La figure 19 montre la section du cube par le plan PQR, où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A, Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$, et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. Représenter cette section en vraie grandeur.

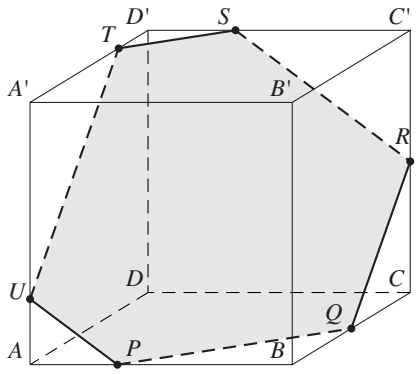


Fig. 19

Reprenons le repère que nous avions choisi pour la détermination des sommets de la section. Plaçons l'origine en A, et les vecteurs « de base » de telle sorte que $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{AA'}$. Si nous prenons l'arête du cube comme unité de longueur, ce repère est bien un repère orthonormé. Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les sommets de la section ont pour coordonnées

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Chacun de ces sommets peut être situé avec précision sur les arêtes du cube :

S se trouve sur $[D'C']$ au tiers à partir de D',

T se trouve sur $[A'D']$ aux trois quarts à partir de A',

U se trouve sur $[AA']$ au quart à partir de A.

Certains élèves peuvent imaginer de tracer chacun des segments de la section dans un carré figurant une face du cube, en respectant les positions des points sur les arêtes. Le mieux est alors de le faire globalement sur un développement du cube en papier fort. On peut fournir celui-ci aux élèves de manière à limiter les imprécisions au départ. Ils pourront ainsi mesurer les longueurs des côtés de la section, avec une précision qui dépend évidemment du soin qu'ils auront apporté à leur dessin. Ce procédé peut néanmoins leur paraître fastidieux et peu précis, et les inciter à trouver une autre solution. Or précisément, la découverte du produit scalaire leur a donné un outil facile à manipuler pour calculer des longueurs. Ainsi, pour calculer la longueur du segment $[PQ]$, on commence par déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$, obtenues en soustrayant les coordonnées de P de celles de Q,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et on calcule ensuite} \quad \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}.$$

Ce résultat pourrait également être obtenu par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle PBQ. En effet, les côtés de l'angle droit mesurent $|PB| = \frac{2}{3}$ et $|BQ| = \frac{1}{2}$, ce qui permet de calculer la longueur de l'hypoténuse qui vaut $|PQ| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$. La comparaison des calculs montre bien que la formule $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{<\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}>}$ n'est rien d'autre que l'application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse coïncide avec le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes.

De la même manière, on obtient ensuite

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{6};$$

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{ST}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \frac{5}{12};$$

$$\overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{TU}\| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$\overrightarrow{UP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{UP}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \frac{5}{12}.$$

N'oublions pas que ces valeurs représentent les mesures des côtés de la section lorsque l'unité de longueur est la longueur de l'arête du cube. Ces valeurs calculées peuvent éventuellement être comparées aux longueurs mesurées sur le développement du cube, pour corroborer ou infirmer les résultats des calculs.

Une fois en possession de ces différentes mesures, il n'est pas certain que les élèves réalisent immédiatement que ces données sont insuffisantes pour dessiner la vraie grandeur de la section. Quelques tâtonnements seront sans doute nécessaires pour qu'ils se persuadent qu'ils doivent aussi connaître les mesures des angles, ou bien les longueurs des diagonales. Dans le même ordre d'idées, de nombreux élèves ignorent en effet que, pour démontrer qu'une figure est un polygone régulier (le triangle faisant exception), il ne suffit pas de démontrer l'égalité des côtés, mais qu'il faut aussi établir celle des angles. On peut, par exemple, leur faire observer que, avec quatre segments de 5 cm, on peut bien sûr construire un carré, mais aussi toute une série de losanges qui diffèrent par leurs angles.

Si les élèves proposent de calculer les longueurs des diagonales pour construire la vraie grandeur de la section par triangulation, le professeur les laisse poursuivre dans cette voie mais leur annonce clairement que la mesure précise des angles de la figure leur sera demandée. Ils disposeront alors d'un moyen de comparer les valeurs d'angles mesurées sur le dessin aux valeurs calculées. Si, par contre, les élèves proposent spontanément de calculer les mesures des angles pour représenter la section en grandeur réelle, le problème qui se pose est celui de la détermination de ces mesures. Ici encore, c'est le produit scalaire qui fournit un outil efficace. En effet, la formule

$$< \overrightarrow{a} | \overrightarrow{b} >= \| \overrightarrow{a} \| \| \overrightarrow{b} \| \cos\theta$$

peut être exploitée pour calculer un angle compris entre deux vecteurs. Ainsi, par exemple, l'angle $\widehat{Q}$ de l'hexagone de section est compris entre les vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$, dont le produit scalaire peut être calculé à partir de leurs composantes (celles de $\overrightarrow{QP}$ sont opposées à celles de $\overrightarrow{PQ}$). On a

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$< \overrightarrow{QP} | \overrightarrow{QR} >= -\frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

et, en remplaçant $< \overrightarrow{QP} | \overrightarrow{QR} >$ par $-\frac{1}{4}$ dans

$$< \overrightarrow{QP} | \overrightarrow{QR} >= \| \overrightarrow{QP} \| \| \overrightarrow{QR} \| \cos\widehat{Q},$$

on obtient la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{Q}$

$$\cos\widehat{Q} = \frac{< \overrightarrow{QP} | \overrightarrow{QR} >}{\| \overrightarrow{QP} \| \| \overrightarrow{QR} \|} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{10}.$$

La mesure en degrés de l'amplitude de l'angle $\widehat{Q}$ est déterminée par la calculatrice, qui donne $\widehat{Q} = 115°, 10409025$.

Si les élèves négligent d'utiliser les vecteurs orientés de telle sorte que leur origine coïncide avec le sommet de l'angle, ils obtiendront l'angle supplémentaire de celui qu'ils croient calculer. Ils devraient s'apercevoir de leur erreur en confrontant leurs résultats avec la vision approximative que leur fournit le dessin en perspective. Un angle aigu d'environ 65° semble peu réaliste dans la section hexagonale que nous étudions ici.

Arrivés à ce stade du travail, certains élèves auront peut-être remarqué que la symétrie de la figure peut leur éviter de calculer tous les angles. Le professeur leur demande alors de justifier les propriétés utilisées. Mais il est également possible que, rassurés par le caractère routinier de l'application de la formule, ils entreprennent de calculer tous les angles.

Ce travail est un peu fastidieux, mais néanmoins bien préparé, puisque nous disposons déjà des composantes de tous les vecteurs correspondants aux côtés de la section, ainsi que de leurs longueurs. Le professeur peut suggérer aux élèves une répartition des tâches, pour éviter que trop de temps ne soit consacré à des calculs répétitifs. Les résultats obtenus sont

$$\widehat{Q} = \widehat{R} = \widehat{T} = \widehat{U} = 115°, 10409025 \quad \text{et} \quad \widehat{S} = \widehat{P} = 129°, 7918195.$$

Le professeur pose la question de la vérification.

> A-t-on, comme dans le triangle, une propriété qui donne la somme des angles d'un hexagone ?

Un découpage d'un hexagone quelconque en triangles permet de voir que la somme de ses angles vaut 720°, ce qui est bien le cas ici.

Les élèves qui ont effectué tous les calculs sans se poser trop de questions seront peut-être étonnés de constater qu'il n'y a que deux amplitudes d'angles différentes. Une intéressante discussion peut s'installer dans la classe pour expliquer cette propriété. Pouvait-on prévoir l'égalité de certains angles ? C'est l'occasion de se souvenir de cette propriété des plans parallèles :

Si un plan coupe deux plans parallèles, il les coupe suivant des droites parallèles.

Le plan de section coupe donc les faces parallèles suivant des segments parallèles. On a donc

$$PQ \text{ est parallèle à } TS,$$
$$QR \text{ est parallèle à } TU,$$
$$RS \text{ est parallèle à } UP.$$

Par conséquent, $\widehat{P} = \widehat{S}$, $\widehat{Q} = \widehat{T}$, $\widehat{R} = \widehat{U}$, car ce sont des angles à côtés parallèles. Les positions particulières des points Q et R, au milieu des arêtes $[BC]$ et $[CC']$, et des points S et P au tiers des arêtes $[AB]$ et $[D'C']$ permettront de justifier l'égalité des angles $\widehat{Q}$ et $\widehat{R}$, et donc $\widehat{T}$ et $\widehat{U}$.

Les élèves constatent ainsi qu'une analyse préalable des propriétés géométriques de la figure permet d'éviter quelques calculs. Cependant, ils peuvent

– on l'a vu – arriver à la solution en utilisant le produit scalaire, qui fournit une méthode efficace de résolution de ce type de problème. Dans ce cas, les propriétés de symétrie que le calcul a mises en évidence peuvent être réexaminées dans un contexte de géométrie synthétique. Cette démarche permettra peut-être aux moins intuitifs d'améliorer leur vision dans l'espace.

Les élèves sont à présent en mesure de dessiner la section en vraie grandeur.

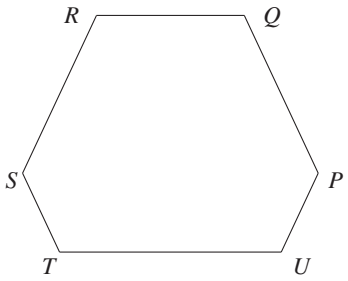


Fig. 20

Pour clôturer l'activité de manière très concrète, le professeur leur suggère de repérer les points de la section sur le développement de cube et d'assembler les cubes tronqués obtenus après découpage, de manière à faire apparaître la section. Celle-ci est alors comparée au dessin réalisé à partir des calculs, par application directe du modèle en carton sur la figure. Comme l'hexagone de section possède un axe de symétrie passant par les milieux des côtés $[RQ]$ et $[TU]$, le problème de l'orientation ne se pose pas ici. Quelle que soit la partie du cube qu'on dépose sur la figure, la section sera superposable au dessin de la vraie grandeur.

2.2 Distance d'un sommet du cube à une diagonale

Comment s'y prendre ?

Dans la représentation en perspective cavalière du cube de la figure 21, construire la perpendiculaire issue de D' à la diagonale $A'C$. Calculer la distance du sommet D' à la diagonale $A'C$.

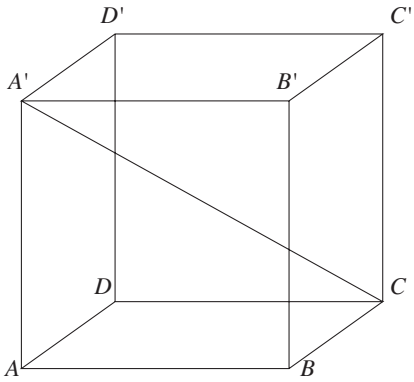


Fig. 21

Certains élèves seront peut-être tentés d'appliquer leur équerre sur la figure pour tracer directement la perpendiculaire demandée. Néanmoins, après un temps de réflexion et de discussion, ils devraient s'apercevoir que la plupart des angles droits n'apparaissent pas en vraie grandeur dans une représentation en perspective cavalière. C'est par exemple le cas des angles droits de la base. Seuls les angles des faces frontales $ABB'A'$ et $CC'D'D$ apparaissent comme des angles droits dans la figure 21. Le sommet D' et la diagonale $A'C$ appartiennent au plan non frontal $A'D'C$, et dans ce plan, la représentation du rectangle $A'D'CB$ est un parallélogramme. Il n'y a donc aucune raison d'espérer que la perpendiculaire issue de D' forme avec $A'C$ un angle droit dans la représentation.

Cette première analyse permet cependant de remarquer que la construction demandée est une droite du plan $A'D'C$ et que le problème pourrait donc être examiné dans ce plan.

Première approche : utilisation du produit scalaire

Il faut donc déterminer un point P de la diagonale $A'C$ tel que $D'P$ est perpendiculaire à $A'C$, et calculer ensuite la longueur de $[D'P]$. Comme il s'agit d'un problème d'angle et de longueur, les élèves penseront probablement à utiliser le produit scalaire. Plaçons le repère sur les arêtes du cube comme dans le problème précédent, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le point P cherché appartient à la diagonale $A'C$, il vérifie donc la relation d'alignement $\overrightarrow{A'P} = k\overrightarrow{A'C}$, qui peut s'écrire

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + k\overrightarrow{A'C}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point P sont donc de la forme

$$P = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1-k \end{pmatrix}.$$

Les composantes des vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{D'P}$ sont alors

$$\overrightarrow{A'C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{D'P} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ -k \end{pmatrix}.$$

Exprimons, au moyen du produit scalaire, que ces vecteurs sont orthogonaux,

$$< \overrightarrow{A'C} | \overrightarrow{D'P} >= 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 \cdot k + 1 \cdot (k-1) + (-1) \cdot (-k) = 0.$$

Cette dernière équation, équivalente à $3k - 1 = 0$, nous donne $k = \frac{1}{3}$, ce qui détermine les coordonnées du point cherché, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Le fait que $k = \frac{1}{3}$ nous indique que $\overrightarrow{A'P} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$, c'est-à-dire que le point P se trouve sur la diagonale $[A'C]$ au tiers à partir de A'. Ceci permet de placer le point P sur le dessin, puisque la perspective cavalière respecte les rapports des longueurs des segments dans une direction donnée.

On peut encore trouver les composantes du vecteur $\overrightarrow{D'P}$ et calculer sa longueur. On obtient

$$\overrightarrow{D'P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{D'P}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

qui est la distance du sommet D' à la diagonale $A'C$.

On peut aussi chercher le point de percée de la droite $D'P$ dans la face $ABB'A'$. Ce point, noté Q, est sur la droite $D'P$, ce qui se traduit par la relation d'alignement

$$\overrightarrow{D'Q} = \lambda\overrightarrow{D'P} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD'} + \lambda\overrightarrow{D'P}.$$

Nous obtenons ainsi, pour les coordonnées du point Q

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Comme ce point est dans la face $ABB'A'$, $y_Q = 1 - \frac{2}{3}\lambda = 0$, ce qui donne la valeur de $\lambda = \frac{3}{2}$ et ensuite les coordonnées du point de percée cherché, $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ce dernier résultat indique que le point Q se trouve au centre de la face $ABB'A'$, c'est-à-dire à l'intersection des diagonales $A'B$ et AB', et permet de placer correctement le point P sur le dessin sans devoir partager le segment $[A'C]$ en trois.

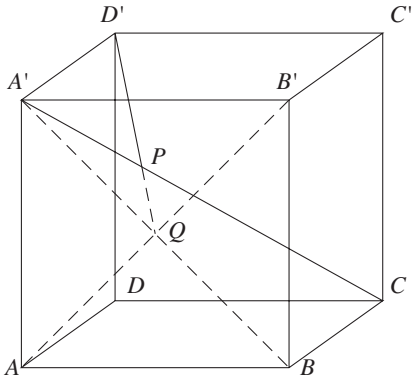


Fig. 22

La figure 22 montre la solution du problème.

Deuxième approche : résolution du problème dans le plan diagonal $A'D'CB$**.**

Nous avons déjà observé que le problème pouvait être examiné dans le plan diagonal $A'D'C$, déterminé par la diagonale $A'C$ et le point D'. En effet, la perpendiculaire issue de D' sur $A'C$ est évidemment une droite de ce plan. Si nous prenons l'arête du cube comme unité de longueur, la longueur de la diagonale $A'B$ peut être calculée par le théorème de Pythagore. Elle vaut $\sqrt{2}$ et le rectangle $A'BCD'$ est représenté à la figure 23. Une feuille de format A4, qui a les mêmes proportions que ce rectangle, permet de visualiser la situation.

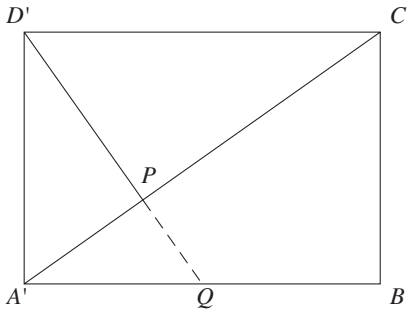


Fig. 23

On a $|A'D'| = 1$ et $|A'B| = \sqrt{2}$; le théorème de Pythagore appliqué au triangle $A'BC$, rectangle en B, nous donne alors la longueur de la diagonale $|A'C| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.

Ne perdons pas de vue que le problème de la représentation de la perpendiculaire issue de D' sur $A'C$ sera résolu si nous pouvons déterminer la position de son pied P sur la diagonale $A'C$. Nous voyons apparaître dans cette figure deux autres triangles rectangles en P : les triangles $A'PD'$ et CPD'. En appliquant le théorème de Pythagore dans ces deux triangles, nous allons calculer les longueurs de leurs côtés et déterminer ainsi $|A'P|$. Ainsi,

dans le triangle $A'PD'$, on a $|A'P|^2 + |D'P|^2 = 1$ et donc $|D'P|^2 = 1 - |A'P|^2$,

dans le triangle CPD', on a $|CP|^2 + |D'P|^2 = 2$.

En remplaçant $|D'P|^2$ par $1 - |A'P|^2$, et $|CP|$ par $|A'C| - |A'P| = \sqrt{3} - |A'P|$ dans cette dernière égalité, on obtient

$$1 - |A'P|^2 + (\sqrt{3} - |A'P|)^2 = 2.$$

Cette équation dont l'inconnue est $|A'P|$ se réduit au premier degré et nous donne $|A'P| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ce qui nous indique que le point P se trouve au tiers de la diagonale $[A'C]$ à partir de A', et nous permet dès lors de le représenter. La distance $|D'P|$ est calculée également. On a

$$|D'P|^2 = 1 - |A'P|^2 = 1 - \frac{1}{3} \text{ et donc } |D'P| = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Pour établir complètement le lien avec la solution précédente, il reste à situer le point Q d'intersection de la droite $D'P$ avec $A'B$. Comme $|A'P| = \frac{1}{3}|A'C|$, on a aussi $|PC| = \frac{2}{3}|A'C|$ et $|A'P| = \frac{1}{2}|PC|$. Les triangles semblables $D'PC$ et QPA' nous permettent alors de conclure que $|A'Q| = \frac{1}{2}|D'C| = \frac{1}{2}|A'B|$. Le point Q se trouve donc au milieu de la diagonale de face $[A'B]$.

Remarques

1. Il est également loisible d'utiliser le produit scalaire dans la figure plane $A'BCD'$.
2. Une troisième approche du même problème sera évoquée dans la section 2.3.

2.3 Sections du cube par des plans perpendiculaires à une diagonale

Comment s'y prendre ?

Étudier les sections d'un cube par l'ensemble des plans perpendiculaires à une diagonale (AC' dans les figures ci-dessous).
Quelles sont les propriétés géométriques des polygones obtenus ?
Que peut-on dire de leurs côtés, de leurs angles ?
Pour quelles positions du plan de section sont-ils réguliers ?
Où se situent leurs centres de gravité[3] ?

Une analyse succincte du problème montre qu'il y aura au moins deux types de sections. Un plan passant par un point de la diagonale proche d'un des sommets A ou C' ne coupe que les trois arêtes issues de ce sommet et la section est alors un triangle. Mais si le plan de section coupe la diagonale en un point proche de son milieu, la section semble être un hexagone. Il est très possible que les élèves ne perçoivent pas d'emblée qu'il y a des sections hexagonales. Nous montrerons plus loin comment les leur faire découvrir.

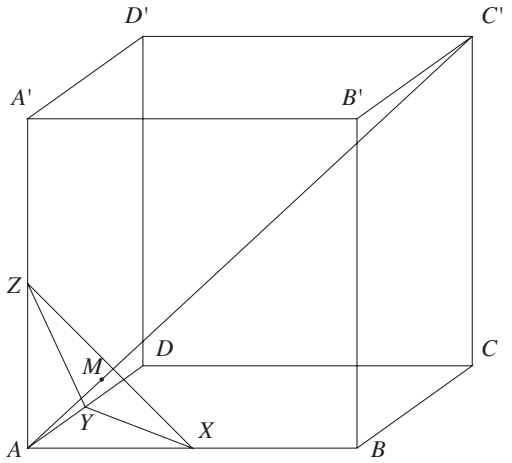


Fig. 24

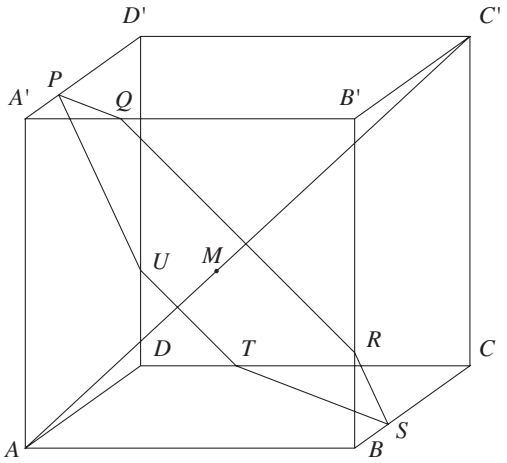


Fig. 25

[3] Il s'agit du centre de gravité des sommets du polygone, au sens où il a été défini dans le chapitre 8.

Plaçons le repère sur les arêtes du cube comme précédemment, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le plan de section est entièrement déterminé par la position du point M de la diagonale AC' par lequel il passe. Puisque M appartient à AC', la relation d'alignement $\overrightarrow{AM} = m \cdot \overrightarrow{AC'}$ nous donne les coordonnées de ce point. On a

$$\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad M = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}.$$

Si $m = 0$, le point M coïncide avec le point A et la section est réduite à ce point ; une situation similaire se produit pour $m = 1$, valeur pour laquelle M coïncide avec C'. Les points de la diagonale AC' intérieurs au cube correspondent ainsi aux valeurs de m comprises entre 0 et 1.

Le plan π passant par M et perpendiculaire à la diagonale AC' est l'ensemble de tous les points N tels que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AC'}$, c'est-à-dire tels que $< \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MN} >= 0$.

Pour poursuivre notre étude, examinons plus précisément les questions suivantes.

Les sections triangulaires

> À quelles valeurs de m correspondent les sections triangulaires ?
> Déterminer les coordonnées de leurs sommets et de leurs centres de gravité, calculer les côtés et les angles.

La figure 24 montre que, lorsque le plan π coupe la diagonale AC' en un point proche de A ou de C', c'est-à-dire pour des valeurs de m proches de 0 ou de 1, la section est un triangle.

À partir de A

Les sommets. – Déterminons par exemple les coordonnées du point X, point de percée de la droite AB dans le plan π. Comme X est sur la droite AB,

$$\overrightarrow{AX} = x \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{nous donne} \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} x - m \\ -m \\ -m \end{pmatrix}.$$

Exprimons, au moyen du produit scalaire, que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{MX}$ sont orthogonaux,

$$< \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MX} >= 0 \quad \text{ou} \quad x - m - m - m = 0.$$

Cette dernière équation nous donne $x = 3m$, et les coordonnées du point X sont $\begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce point X soit un sommet de la section du

cube par le plan π, il doit être situé sur l'arête $[AB]$; ses coordonnées sont alors comprises entre 0 et 1 : on a par conséquent $0 < 3m < 1$. La valeur de m doit donc être comprise entre 0 et $\frac{1}{3}$.

De la même manière, nous déterminons ensuite $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix}$, sur l'arête $[AD]$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3m \end{pmatrix}$, sur l'arête $[AA']$.

Le centre de gravité. – Les coordonnées du centre de gravité de chacun de ces triangles sont obtenues en effectuant la moyenne arithmétique des coordonnées de ses sommets (voir la section 2.3 du chapitre 8). On a

$$G = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3m \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = M.$$

Le centre de gravité de chacun de ces triangles est donc le point de percée de la diagonale AC' dans le plan π.

Les côtés et les angles. – Pour calculer les longueurs des côtés de la section, déterminons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{YZ}$, et $\overrightarrow{ZX}$ et calculons leur norme. On obtient

$$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} -3m \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{2(3m)^2} = 3m\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{YZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3m \\ 3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{YZ}\| = \sqrt{2(3m)^2} = 3m\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{ZX} = \begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ -3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{ZX}\| = \sqrt{2(3m)^2} = 3m\sqrt{2}.$$

La section XYZ est un triangle équilatéral (les angles valent donc 60°) dont les côtés mesurent $3\sqrt{2}m$.

Les valeurs limites

pour $m = 0$, le triangle est réduit au point A,

pour $m = \frac{1}{3}$, les points X, Y, Z coïncident avec les points B, D, A' (voir figure 26). La section est donc le triangle équilatéral $A'BD$, dont le centre de gravité est bien le point $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

À partir de C'

Symétriquement, nous obtenons des sections triangulaires $X'Y'Z'$, où X'est sur l'arête $[D'C']$, Y' sur $[B'C']$ et Z' sur $[CC']$. Par la même méthode, nous

déterminons $X' = \begin{pmatrix} 3m-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3m-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3m-2 \end{pmatrix}$.
Ces triangles correspondent aux valeurs de m comprises entre $\frac{2}{3}$ et 1. La section $X'Y'Z'$ est un triangle équilatéral dont les côtés mesurent $3\sqrt{2}(1-m)$, et dont le centre de gravité est le point $\begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$.

Pour $m = 1$, le triangle est réduit au point C',

pour $m = \frac{2}{3}$, les points X', Y', Z' coïncident avec les points D', B', C (voir figure 27). La section est donc le triangle équilatéral $D'B'C$, dont le centre de gravité est bien le point $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

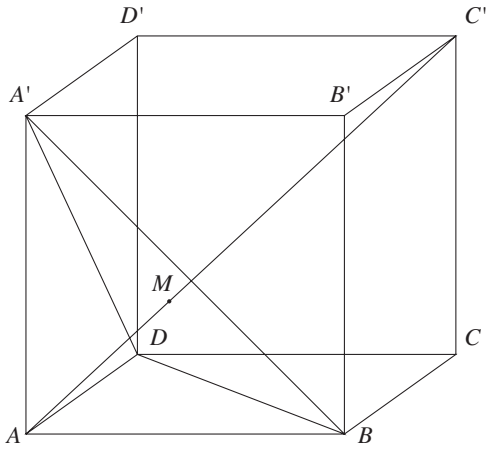


Fig. 26 : $m = \frac{1}{3}$

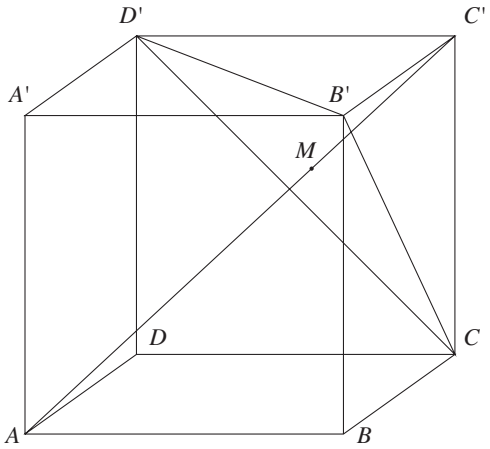


Fig. 27 : $m = \frac{2}{3}$

Les sections hexagonales

Envisageons maintenant les autres sections. Si les élèves n'ont pas remarqué qu'il y a des sections hexagonales parmi les sections étudiées, on peut les leur faire découvrir en repartant du triangle $A'BD$ correspondant à la valeur limite $m = \frac{1}{3}$. En prenant pour m une valeur légèrement supérieure, on constate que le plan π coupe la droite AB en un point $X = \begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ situé un peu à droite de B. De même, il coupe la droite AD en un point Y situé au-delà de D, et la droite AA' en un point Z situé au-dessus de A'. Dans ce cas, le triangle XYZ n'est plus la section du cube par le plan π, mais les droites XY, YZ et ZX restent les droites d'intersection du plan π avec les faces $ABCD$, $ADD'A'$ et $ABB'A'$. Les élèves disposent donc de tous les éléments nécessaires à la construction de la section. On leur demande de la dessiner en justifiant les étapes.

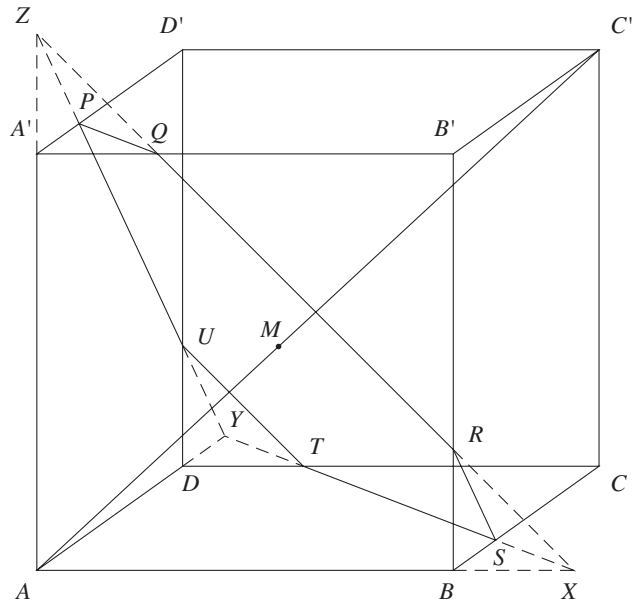


Fig. 28

Dans le plan $ABCD$, la droite XY coupe les arêtes $[BC]$ et $[CD]$ aux points S et T qui sont donc les extrémités du segment de la section dans la face inférieure du cube. De même, dans le plan $ADD'A'$, la droite YZ coupe les arêtes $[DD']$ et $[A'D']$ aux points U et P ; et dans plan $ABB'A'$, la droite ZX coupe les arêtes $[A'B']$ et $[BB']$ aux points Q et R. La section du cube par le plan π est donc l'hexagone $PQRSTU$.

À quelles valeurs de m correspondent les sections hexagonales ?
Déterminer les coordonnées de leurs sommets et de leurs centres de gravité, calculer les côtés et les angles et énoncer quelques propriétés géométriques les concernant.
Y a-t-il des hexagones réguliers ?
Représenter la section en vraie grandeur pour une valeur de m choisie.

Les sommets. – Déterminons par exemple les coordonnées du point de percée P de la droite $A'D'$ dans le plan π. Comme P est sur la droite $A'D'$,

$$\overrightarrow{A'P} = p \cdot \overrightarrow{A'D'} \text{ nous donne } P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -m \\ p-m \\ 1-m \end{pmatrix}.$$

Exprimons, au moyen du produit scalaire, que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux :

$$< \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MP} >= 0 \text{ ou } -m+p-m+1-m=0.$$

Cette dernière équation nous donne $p = 3m-1$, et les coordonnées du point P sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 3m-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour que ce point P soit un sommet de la section du cube par le plan π, il doit être situé sur l'arête $[A'D']$; sa deuxième coordonnée est alors comprise entre 0 et 1 : on a donc $0 < 3m-1 < 1$. La valeur de m doit être comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Déterminons ensuite le point de percée Q de la droite $A'B'$ dans le plan π. Nous obtenons

$$\overrightarrow{A'Q} = q \cdot \overrightarrow{A'B'} \text{ et donc } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et enfin

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} q-m \\ -m \\ 1-m \end{pmatrix}.$$

En exprimant, au moyen du produit scalaire, que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont orthogonaux, on a

$$< \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MQ} >= 0 \text{ ou } q - m - m + 1 - m = 0.$$

Cette dernière équation nous donne $q = 3m-1$, et donc $Q = \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ici encore, ce sont les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ qui correspondent aux positions de Q sur l'arête $[A'B']$.

En procédant de manière analogue, nous déterminons successivement

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3m-1 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [BB'],$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3m-1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [BC],$$

$$T = \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [DC],$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3m-1 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [DD'].$$

Nous déduisons de ceci que, pour les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, la section du cube par le plan π est l'hexagone $PQRSTU$.

Le centre de gravité. – Il est possible de déterminer les coordonnées du centre de gravité de ces hexagones en effectuant la moyenne arithmétique des coordonnées de leurs sommets. On a

$$G = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3m-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3m-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3m-1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = M.$$

Ainsi, toute section hexagonale a son centre de gravité au point de percée de la diagonale AC' dans le plan π.

Les côtés. – Pour calculer les longueurs des côtés de la section, déterminons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, ... et calculons leur norme. On obtient

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 1-3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2(3m-1)^2} = (3m-1)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2-3m \\ 0 \\ 3m-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{2(2-3m)^2} = (2-3m)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3m-1 \\ 1-3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{2(3m-1)^2} = (3m-1)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 3m-2 \\ 2-3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{ST}\| = \sqrt{2(3m-2)^2} = (2-3m)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 1-3m \\ 0 \\ 3m-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{TU}\| = \sqrt{2(3m-1)^2} = (3m-1)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{UP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3m-2 \\ 2-3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{UP}\| = \sqrt{2(3m-2)^2} = (2-3m)\sqrt{2}.$$

Ces calculs permettent de découvrir plusieurs propriétés géométriques de ces hexagones.

Nous voyons tout d'abord qu'ils ont deux fois trois côtés de même longueur.

Nous savons que les côtés d'une section hexagonale dans un cube sont parallèles deux à deux, puisque le plan de section coupe deux faces parallèles suivant des segments parallèles. Nous avons donc que

PQ est parallèle à ST,

TU est parallèle à QR,

RS est parallèle à UP.

Nous constatons que les côtés parallèles sont de longueurs différentes, toujours dans le rapport $\dfrac{2-3m}{3m-1}$.

Nous voyons aussi que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont des multiples de $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les côtés $[PQ]$ et $[ST]$ sont donc parallèles aux diagonales $[BD]$ et $[B'D']$

des faces du cube. De même, les côtés $[QR]$ et $[TU]$ sont parallèles aux diagonales $[BA']$ et $[CD']$ des faces du cube ; et les côtés $[RS]$ et $[UP]$ sont parallèles aux diagonales $[DA']$ et $[CB']$ des faces du cube.

Les angles. – Lorsque la valeur de m varie entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, les côtés de l'hexagone restent toujours parallèles aux trois directions BD, BA' et DA' des faces du cube. Les amplitudes des angles devraient donc rester constantes. Nous pouvons nous en assurer en calculant par exemple l'angle $\widehat{QPU}$, au moyen du produit scalaire, ce qui donne

$$\cos\widehat{QPU} = \frac{<\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PU}>}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PU}\|} = \frac{(1-3m)(2-3m)}{(3m-1)\sqrt{2}(2-3m)\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

La valeur obtenue pour le cosinus de l'angle est bien indépendante de m et l'amplitude de cet angle est 120°. Un calcul analogue permet de constater que tous les angles de toutes les sections hexagonales mesurent 120°.

La vraie grandeur. – Nous sommes à présent en mesure de dessiner l'une de ces sections en vraie grandeur. La figure 29 représente la vraie grandeur de la section de la figure 25 à la page 307 pour la valeur $m = \frac{43}{100}$.

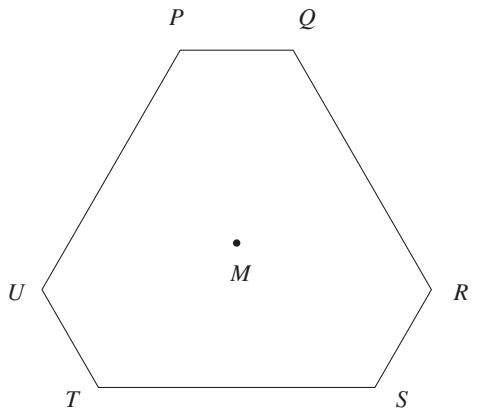


Fig. 29

L'hexagone régulier. – Pour que tous les côtés de l'hexagone soient égaux, il faut que $2-3m = 3m-1$, ce qui correspond à la valeur $m = \frac{1}{2}$. Le plan de section passe alors par le point $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, milieu de la diagonale $[AC']$. De plus, comme $3m-1 = \frac{1}{2}$, chacun des sommets de l'hexagone est au milieu de l'arête à laquelle il appartient, et les côtés mesurent $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons déjà vérifié que tous les angles valaient 120°. Nous pouvons donc en conclure que la section du cube par le plan médiateur de la diagonale $[AC']$ est un hexagone régulier.

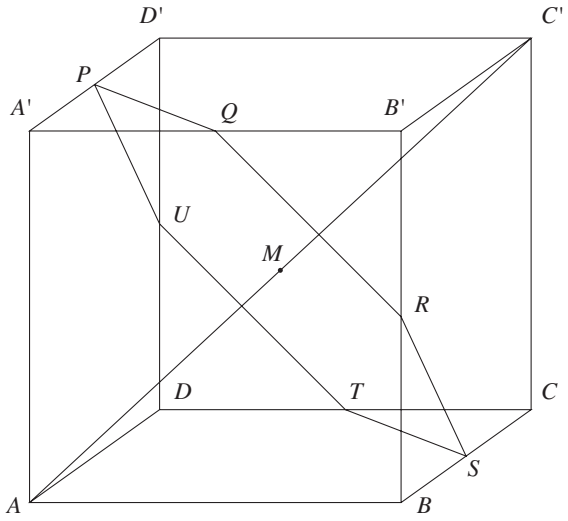


Fig. 30

Synthèse

C'est le moment de demander aux élèves de faire la synthèse des propriétés des sections d'un cube par un plan perpendiculaire à une diagonale. Certaines de ces propriétés peuvent être justifiées, ou même découvertes par des raisonnements de géométrie synthétique, mais l'utilisation systématique du produit scalaire comme outil d'investigation a sans nul doute aidé de nombreux élèves à faire le tour de la question. La synthèse pourrait ressembler à ceci :

Pour $0 < m \leqslant \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3} \leqslant m < 1$, la section est un triangle équilatéral.
Pour $\frac{1}{3} < m < \frac{2}{3}$, la section est un hexagone dont les angles mesurent 120°, dont les côtés sont parallèles deux à deux (il s'agit des côtés situés dans des faces parallèles). De plus, il y a deux fois trois côtés égaux (voir figure 29).
Pour $m = \frac{1}{2}$, l'hexagone est régulier.
Dans tous les cas, le centre de gravité de la section est situé au point de percée de la diagonale AC' dans le plan π.

On peut terminer l'activité en montrant aux élèves que la diagonale du cube est un axe de rotation d'ordre 3. Cette découverte donne un nouvel éclairage à toutes ces propriétés qui se révèlent alors presque évidentes.

Remarque. – Ce travail permet d'aborder d'une troisième manière le problème de la section 2.2 à la page 303. En effet, le triangle $AD'B'$ est le triangle équilatéral obtenu comme section du cube par le plan perpendiculaire à la diagonale $A'C$ au point P situé au tiers de $A'C$. La perpendiculaire à la diagonale $A'C$ issue de D' est donc une droite du plan $AD'B'$, et son pied est le point de percée P de $A'C$ dans ce plan. Ce point P est aussi le centre de gravité du triangle $AD'B'$. Il se trouve donc sur la médiane $D'Q$ de ce triangle.

2.4 Vraie grandeur d'une section dans un tétraèdre régulier

Comment s'y prendre ?

Construire la section du tétraèdre régulier $ABCD$ par le plan PQR où

P est le point situé au milieu de l'arête $[CD]$,

Q est le point de l'arête $[BD]$, situé au tiers à partir de B,

R est le point de l'arête $[AB]$, situé au quart à partir de A.

Construire la vraie grandeur de cette section.

Pour traiter des problèmes de sections planes dans les tétraèdres, nous avons précédemment utilisé des repères dont l'origine et les points unités coïncidaient avec les sommets du tétraèdre. Ce choix ne semble pas approprié pour résoudre ce dernier problème, car un tel repère n'est pas orthonormé. Dès qu'il est question de calculer des distances et des angles, c'est-à-dire d'étudier les propriétés métriques d'une figure, l'utilisation du produit scalaire nécessite l'emploi d'un repère orthonormé.

Plaçons donc l'origine du repère orthonormé au point A, l'axe des x sur l'arête AB et le point unité sur cet axe en B. L'axe des y sera placé dans le plan ABC, et l'axe des z perpendiculairement à ce plan. Nous avons donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

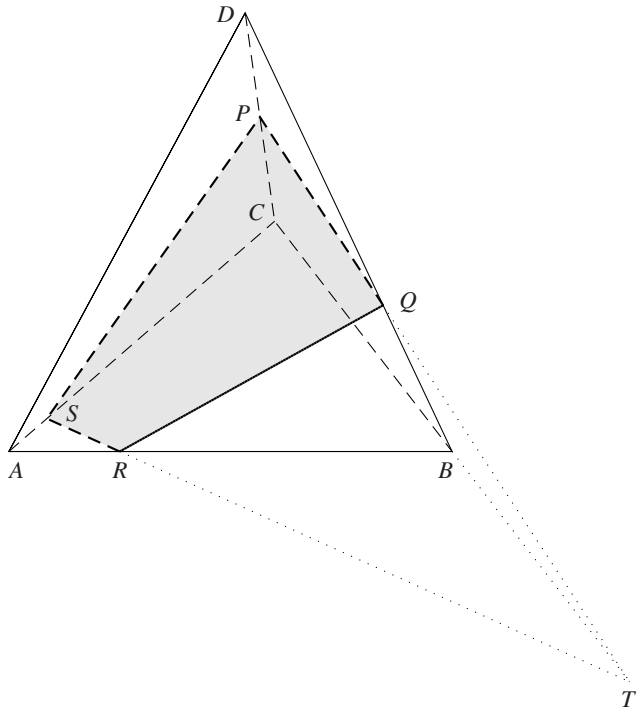


Fig. 31

Les coordonnées du point C, sommet du triangle équilatéral ABC, ne posent pas trop de problème. Elles peuvent être déterminées par la trigonométrie, ou par le calcul de la hauteur du triangle ; on trouve

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

si le point C est placé du même côté de AB que l'axe des y.

La détermination du sommet D du tétraèdre nécessite un raisonnement géométrique préalable. Le point D est équidistant des sommets A, B et C du triangle de la base. Il appartient donc aux plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Ces trois plans perpendiculaires à la base ABC, contiennent la droite perpendiculaire au plan ABC et passant par le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC. Cette droite est à l'intersection des trois plans médiateurs et contient donc le sommet D. Comme le triangle ABC est équilatéral, le point d'intersection des médiatrices est aussi le centre de gravité du triangle, dont les coordonnées peuvent être calculées par moyenne arithmétique de celles des sommets du triangle (voir la section 2.3 du chapitre 8). On a

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point D peuvent alors être déterminées en calculant la hauteur $|DG|$ du triangle ADG, sachant que son hypoténuse $[AD]$ mesure 1. Ou encore, ce qui revient au même, en exprimant que le point D, dont les coordonnées sont de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ k \end{pmatrix}$$

est à distance 1 de A. Nous obtenons ainsi

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Passons à la détermination des sommets connus de la section :

$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ nous donne immédiatement $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ nous donne $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ou encore

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{18} \\ \frac{\sqrt{6}}{9} \end{pmatrix};$$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ nous donne

$$P = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Le plan PQR coupe donc les faces BCD et ABD du tétraèdre suivant les segments $[PQ]$ et $[QR]$. Déterminons à présent la section dans la face ABC. Cherchons à cet effet le point de percée de la droite PQ dans le plan ABC. Nous connaîtrons ainsi un deuxième point du plan de section dans le plan de cette face. Ce point, noté T, vérifie la relation d'alignement $\overrightarrow{PT} = \lambda\overrightarrow{PQ}$. Nous avons par conséquent

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} \text{ et } T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{18} \\ -\frac{\sqrt{6}}{18} \end{pmatrix}.$$

Ce point T, dont la troisième coordonnée vaut 0 puisqu'il est dans le plan ABC, correspond donc à la valeur $\lambda = 3$, ce qui donne

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons ensuite le point S, intersection de la droite TR et de l'arête AC. La relation d'alignement $\overrightarrow{TS} = \mu\overrightarrow{TR}$ ou $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OT} + \mu\overrightarrow{TR}$ nous indique que les coordonnées de S sont de la forme

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme S est aussi sur la droite AC, ses coordonnées sont également de la forme

$$S = \nu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui indique que sa deuxième coordonnée est égale à la première multipliée par $\sqrt{3}$. Cette constatation, appliquée à l'expression précédente de S, permet de déterminer la valeur de μ. On trouve $\mu = \frac{8}{7}$ et

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{\sqrt{3}}{14} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui termine la construction de la section.

Comme dans l'exercice précédent, c'est au moyen du produit scalaire que nous calculons les longueurs de côtés et les amplitudes des angles. Voici les résultats :

$$||\overrightarrow{PQ}|| = 0,600925212576, \qquad \widehat{P} = 73°, 0091767079,$$
$$||\overrightarrow{RQ}|| = 0,650854139659, \qquad \widehat{S} = 82°, 763077974,$$
$$||\overrightarrow{RS}|| = 0,217241518939, \qquad \widehat{R} = 130°, 7321067,$$
$$||\overrightarrow{SP}|| = 0,745736179208, \qquad \widehat{Q} = 73°, 4956386183.$$

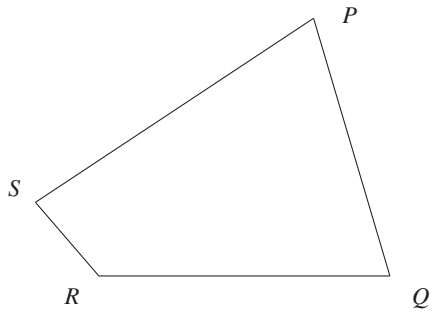


Fig. 32

Nous vérifions que la somme des angles du quadrilatère vaut bien 360°. Nous sommes à présent en mesure de dessiner la vraie grandeur de la section. Comme pour la section du cube de la page 299, nous demandons aux élèves de reporter les points de section sur le développement d'un tétraèdre régulier (fourni en annexe), puis de découper et d'assembler celui-ci pour faire apparaître la section, qui sera comparée à la figure construite à partir des mesures obtenues par calcul. Si les deux figures ne sont pas superposables mais semblent symétriques, les élèves sont invités à s'interroger sur la concordance entre l'orientation de la représentation en vraie grandeur et celle de la section construite à partir du développement.

Commentaires

Nous l'avons vu dans les exercices de ce chapitre où plusieurs approches sont présentées : la plupart des problèmes que nous proposons aux élèves de l'enseignement secondaire pour utiliser le produit scalaire peuvent être traités par d'autres moyens. Le recours aux théorèmes de Thalès et de Pythagore, ou l'exploitation des propriétés géométriques des figures concernées, permettent souvent d'arriver à la solution. Comparé à ces méthodes dont la variété peut dérouter, le produit scalaire fournit à la fois une méthode de résolution routinière et l'outil qui leur permet de mener à bien les calculs. Une telle méthode, basée sur des calculs systématiques, peut paraître fastidieuse. Cependant, si elle permet à certains de découvrir *a posteriori* des propriétés géométriques intéressantes, elle atteint un but important : celui de faire progresser chacun dans sa perception de l'espace.

10

Nombres complexes et géométrie

1 Introduction historique

De quoi s'agit-il ?

Cette activité, de nature très différente des précédentes, propose la lecture de deux textes qui replacent l'émergence des nombres complexes dans un cadre historique. Le premier, de J. Wallis [1685], fait état des difficultés qu'il y avait à admettre, non seulement l'existence des *nombres imaginaires*, mais aussi celle des *nombres négatifs*. Le second, de Laisant [1887] (à partir de l'article de Bellavitis [1854]), montre à quel point les premiers travaux sur ce que nous appelons le *calcul vectoriel* étaient liés à la représentation des nombres complexes.

Enjeux

L'objectif est de faire voir aux élèves comment la naissance d'un nouveau concept mathématique est liée aux préoccupations des scientifiques d'une époque. En l'occurrence, les nombres complexes représentés géométriquement apparaissent comme les éléments appropriés à la conception d'un calcul en géométrie euclidienne.

Compétences. – *Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.*

De quoi a-t-on besoin ?

Les deux textes proposés ci-dessous et repris en annexe aux pages 557, 558 et 562 sous une forme photocopiable pour les élèves.

Prérequis. – Si le premier texte peut servir d'introduction aux *nombres complexes*, le second ne prend tout son sens que lorsque les élèves ont connaissance des opérations sur les nombres complexes, y compris sous forme trigonométrique.

1.1 Sur les nombres imaginaires

Alors que les quantités irrationnelles étaient connues depuis l'antiquité, les nombres négatifs n'ont été acceptés que très tardivement. Lorsqu'une valeur négative apparaissait, elle était rejetée. Ainsi, Leonardo Fibonacci (1170-1240 environ), dans son *Liber abaci* (1202, révision 1228), trouve une solution égale à -9 pour l'avoir de l'un des hommes dans le problème

intitulé « De quinque hominibus et una bursa[1] ». Il dit : « Ce problème n'a pas de solution, sauf si nous posons que cet homme a une dette de 9... », interprétation qui permet d'écarter le signe « − ». Il donne ensuite la solution complète du système dans cette hypothèse.

Quelques siècles plus tard, ARGAND, dans son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* [1806], appelle *quantités imaginaires* aussi bien les quantités négatives que celles dont le carré est négatif.


Johannis Wallis S. T. D.
Geometriæ Profeſſoris SAVILIANI,
in Celeberrima Academia OXONIENSI,
DE
ALGEBRA
Tractatus;
HISTORICUS & PRACTICUS.
Anno 1685 Anglice editus; Nunc Auctus Latine.
Cum variis
APPENDICIBUS;
Partim prius editis Anglice, Partim nunc primum editis.
Operum Mathematicorum Volumen alterum.
OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO MDCXCIII.

Le texte qui suit montre que la même démarche de pensée qui conduit à admettre l'existence des nombres négatifs peut également nous amener à concevoir celle des nombres que nous appelons *imaginaires*. Il s'agit d'une traduction libre de la version anglaise de l'*Algèbre* de J. WALLIS [1685], (*in* D. Smith [1959]). John WALLIS (1616-1703) était professeur savilien[2] de géométrie à Oxford (1649-1703). Contemporain de NEWTON, il fut le premier à apporter une contribution substantielle au traitement géométrique des quantités imaginaires. Pour favoriser la diffusion de ses idées en dehors de l'Angleterre, Il publia en 1693 une version latine de cette *Algèbre*. En voici un extrait (qu'on trouve au chapitre LXVI, Vol. II, p. 286 de la version latine). Le même texte – en vieil anglais – est fourni en annexe aux pages 555 et 556.

Ces quantités, dites *imaginaires*, provenant des racines supposées de carrés négatifs, sont censées impliquer que la situation est impossible. Et il en est effectivement ainsi si l'on s'en tient strictement à ce qui est communément admis. Car il est impossible qu'un nombre (négatif ou positif), multiplié par lui-même puisse produire (par exemple) -4, en vertu de la règle des signes. Mais il est tout aussi impossible qu'une quantité quelconque, même non supposée carrée, puisse être négative. En effet, il n'est pas possible qu'une grandeur puisse être *moindre que rien*, ou qu'un nombre soit *plus petit que zéro*.

Mais cette supposition (de l'existence de quantités négatives) n'est ni inutile, ni absurde, lorsqu'elle est bien comprise. Et si, du point de vue de la notation algébrique pure, cela amène une quantité inférieure à zéro, lorsqu'on l'applique à la physique, elle représente une quantité tout aussi réelle que si le signe était $+$, mais il faut l'interpréter en sens contraire. Ainsi, par exemple : supposons qu'un homme ait avancé (de A vers B) de 5 yards, et qu'ensuite, il ait reculé (de B vers C) de 2 yards. Si on demande de combien il a avancé (quand il est en C), ou à combien de yards il est devant A, je trouve (en soustrayant 2 de 5) qu'il a avancé de 3 yards (parce que $5 - 2 = 3$).



Fig. 1

[1] Des cinq hommes et une bourse. FIBONACCI propose ce problème dans le chapitre 12 de son ouvrage, chapitre où l'on trouve de nombreuses récréations mathématiques et notamment le célèbre problème des lapins.

[2] L'un des événements marquants de l'histoire des mathématiques à l'Université d'Oxford fut la fondation en 1619 par Sir Henry SAVILE, de deux chaires (dites *savilliennes*) en géométrie et en astronomie. Les statuts imposés par SAVILE prévoyaient, notamment, d'enseigner ces deux matières par l'exégèse des grands textes du passé, principalement les *Éléments* d'EUCLIDE et l'*Almageste* de PTOLÉMÉE (in FAUVEL J. et al. [1999]).

Mais si, ayant avancé de 5 yards vers B, il recule ensuite de 8 yards vers D, et qu'on demande de combien il a avancé quand il est en D, ou combien plus en avant il est de A, je dis -3 yards (parce que $5-8=-3$). C'est-à-dire qu'il a avancé de 3 yards de moins que rien.

Ce qui, du point de vue de la justesse de l'expression ne peut être, puisqu'il ne peut exister moins que rien. Ainsi, si on se limite à la ligne AB vers l'*avant*, la situation est impossible.

Mais si (contrairement à notre supposition) la ligne partant de A peut être prolongée vers l'arrière, nous trouverons D 3 yards derrière A (ce qui est supposé être avant lui).

Et donc, dire qu'il a *avancé* de -3 yards représente ce que nous exprimerions, en langage ordinaire, par : il a reculé de 3 yards, ou il manque 3 yards pour être aussi en avant qu'il l'était en A.

Ceci ne répond pas seulement par un nombre négatif à la question posée, car il n'a pas (comme on l'avait supposé) avancé du tout, mais au contraire, il est si loin d'avoir avancé, qu'il a reculé de 3 yards, et qu'il est en D, 3 yards plus en arrière que lorsqu'il était en A.

Et, par conséquent, -3 désigne le point D aussi réellement que $+3$ désigne le point C. Non pas en avant, comme on l'avait supposé, mais en arrière de A. Ainsi, $+3$ signifie 3 yards en avant et -3, 3 yards en arrière, mais toujours sur la même ligne droite. Et chacun désigne (en tout cas sur la même ligne droite infinie) un et un seul point. Et il en va ainsi pour toute équation du premier degré qui n'admet qu'une seule racine.

Maintenant, ce qu'on admet sur les droites doit, pour la même raison, être admis dans les plans.

Et par exemple, supposons qu'en un endroit, nous gagnons 30 acres sur la mer, mais que nous en perdons 20 en un autre lieu, et qu'on demande combien d'acres nous avons gagné en tout ; la réponse est 10 acres ou $+10$ (parce que $30-20=10$). Ceci représente aussi 1600 perches carrées (car l'acre anglais est une surface rectangulaire de 40 perches de longueur sur 4 perches de largeur dont l'aire est 160 ; 10 acres valent donc 1600 perches carrées).

Si cette surface est un carré, son côté sera long de 40 perches ou (si on admet la racine négative) -40. Mais si en un troisième endroit, on perd 20 acres de plus, et qu'on pose la même question : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être -10 acres (car $30-20-20=-10$) c'est-à-dire que le gain est de 10 acres moins que rien. Ce qui revient à dire qu'il y a une perte de 10 acres ou de 1600 perches carrées.

Et de là naît une nouvelle difficulté, qui n'est pas plus une impossibilité que celle que nous avons rencontrée précédemment (en supposant une quantité négative ou moindre que rien). Ne considérer que $\sqrt{1600}$ est ambigu, cela peut être 40 ou -40. Et de cette ambiguïté, il ressort que les équations quadratiques ont deux racines.

Maintenant (en supposant que cette surface négative -1600 perches a la forme d'un carré), ne doit-on pas admettre que ce supposé carré possède un côté ? Et si oui, que sera ce côté ?

Nous ne pouvons pas dire qu'il vaut 40, ni -40 (parce que l'une ou l'autre de ces valeurs, multipliée par elle-même, donnera $+1600$, pas -1600). Mais plus vraisemblablement, sa valeur est $\sqrt{-1600}$ (la supposée racine d'un carré négatif) ou (ce qui est équivalent) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ suggère une moyenne proportionnelle[3] entre une quantité positive et une quantité négative. Car, de la même manière que $\sqrt{bc}$ représente une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ et $-c$ (dont le produit vaut bc dans les deux cas), $\sqrt{-bc}$ indique une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$, ou entre $-b$ et $+c$ (dont le produit vaut $-bc$). Et ceci, sur le plan algébrique, fournit la véritable interprétation d'une telle racine imaginaire $\sqrt{-bc}$.

Dans les chapitres suivants, Wallis illustre cette notion par de nombreux exemples géométriques.

[3] La moyenne proportionnelle de a et b est la valeur x telle que $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ et donc $x=\sqrt{ab}$; on l'appelle aussi moyenne géométrique de a et b.

1.2 Exposition de la méthode des équipollences

En 1867, TAIT publie un *Traité élémentaire des quaternions*, encouragé en cela par Sir William HAMILTON, inventeur des quaternions. Le premier chapitre de cet ouvrage s'intitule *Des vecteurs et de leur composition* et commence par expliquer comment la découverte de l'emploi de $\sqrt{-1}$ comme *réalité géométrique* a conduit HAMILTON à fonder son *Calcul des quaternions*. Ensuite TAIT expose le début de ce calcul qui n'est rien d'autre que ce que nous appelons le calcul vectoriel et que BELLAVITIS appelle *Méthode des équipollences*.

Le texte qui suit est le début du chapitre II de l'ouvrage *Théorie et applications des équipollences* de C. A. LAISANT [1887], largement inspiré de l'*Exposition de la méthode des équipollences* de G. BELLAVITIS [1854].

Après avoir défini les *quantités géométriques* qu'on soumet au calcul dans la *méthode des équipollences*, et qu'on appelle *droites (limitées)*[4], l'auteur définit, dans le chapitre I, l'*équipollence* de deux droites, puis l'*addition* et la *soustraction* de droites. Nous reconnaissons dans ces définitions les notions de vecteur libre, d'égalité de deux vecteurs et les opérations d'addition et de soustraction de vecteurs qui nous sont familières. L'auteur entreprend ensuite de définir une opération de multiplication des *droites*.

CHAPITRE II
Multiplication et division des droites.

Produit de deux droites. – Produits de plusieurs droites.

28. Jusqu'à présent, dans les calculs que nous avons effectués sur les droites, nous n'avons fait intervenir que la multiplication *par un nombre réel*. Nous avons maintenant à considérer des produits de droites multipliées les unes par les autres, et pour cela, nous devons tout d'abord définir le produit de deux droites, que nous supposerons ramenées à la même origine O.

Le produit de deux droites OA, OB *est une droite* OC *dont la* LONGUEUR *est égale au* PRODUIT *des longueurs de* OA *et* OB, *et dont l'*INCLINAISON *est égale à la* SOMME *des inclinaisons de* OA *et* OB.

Il suit de là que l'équipollence[5] OA.OB = OC entraîne les deux égalités[6]

$$\text{gr.OA} \times \text{gr.OB} = \text{gr.OC} \quad \text{et} \quad \text{inc.OA} + \text{inc.OB} = \text{inc.OC}.$$

Une première remarque, indispensable à faire, c'est que, tandis que la somme de deux droites était tout à fait indépendante de tout autre élément du plan, leur produit dépend au contraire de l'origine des inclinaisons que l'on a choisie.

Malgré la multiplicité des inclinaisons d'une droite donnée, il ne peut y avoir aucune indécision sur la direction du produit, puisque l'inclinaison de celui-ci ne peut jamais être altérée que d'un nombre entier de circonférences, ce qui ne change rien à sa direction.

[4] BELLAVITIS appelle *droite* ce que nous appellerions *vecteur déplacement dans le plan*.

[5] Il faut entendre l'*égalité*.

[6] La notation gr.AB désigne la longueur (grandeur) d'une droite AB, indépendam-

Sans contester ce qu'une définition comme celle que nous venons de donner peut en apparence présenter d'arbitraire *a priori*, il est bon de montrer cependant qu'elle se justifie assez naturellement, à la condition qu'on admette pour unité la droite OI de longueur égale à l'unité et dirigée suivant l'origine des inclinaisons.

D'après la définition de la multiplication admise en Arithmétique, on doit former le produit OC, au moyen du multiplicande OA, comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI. Or, quelles opérations a-t-on fait subir à OI pour l'amener en OB ? On a modifié la longueur dans le rapport $\frac{\text{gr.OB}}{\text{gr.OI}} = \text{gr.OB}$, puis on a fait tourner la droite ainsi obtenue, dans le sens convenable, de l'angle $\beta = \text{inc.OB}$. L'analogie nous conduit donc à dire, que pour avoir le produit OA.OB, nous devons modifier la longueur de OA dans le rapport gr.OB, ce qui donnera une droite de longueur gr.OA $\times$ gr.OB dirigée suivant OA, puis faire tourner cette droite de l'angle β. Or, elle avait pour inclinaison $\alpha = \text{inc.OA}$. Son inclinaison après la rotation sera donc $\alpha + \beta$; c'est-à-dire que nous retombons précisément sur la droite OC, telle que nous l'avons définie plus haut.

Le lecteur sera sans doute étonné de constater que cette *multiplication des droites* ne correspond ni au produit scalaire de deux vecteurs, ni à leur produit vectoriel. Par contre, l'analogie avec le produit de deux nombres complexes écrits sous leur forme trigonométrique est assez frappante. Il suffit d'identifier la longueur de la *droite* et le module du nombre complexe, l'inclinaison de la *droite* et l'argument du nombre complexe pour se rendre compte qu'il s'agit bien de la même opération.

Si Bellavitis définit ainsi le produit de deux *droites*, c'est dans le but d'utiliser cette opération pour faire de la géométrie : la multiplication par une *droite* est une opération qui permet d'effectuer une similitude directe.

2 Nombres complexes et transformations du plan

De quoi s'agit-il ?

À partir de l'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes, écrire les principales transformations du plan sous forme de relations liant l'affixe d'un point quelconque du plan complexe et celle de son image par cette transformation.

Exprimer quelques situations géométriques sous forme de calcul avec des nombres complexes.

Enjeux

L'objectif est de mettre en place l'écriture en termes d'opérations sur les nombres complexes de quelques transformations du plan, de façon à les exploiter comme outils de démonstration pour établir des propriétés géométriques de figures planes (voir la section 3 à la page 333). Les transformations en question sont essentiellement les similitudes (et tous les cas particuliers de similitude), ce qui tient à la nature même des fonctions linéaires sur les complexes (voir la section 8.5 du chapitre 16).

ment de la direction de cette droite.

La notation inc.AB désigne l'inclinaison d'une droite AB. C'est l'angle formé par la droite OM (OM=AB) et une droite OX appelée *origine des inclinaisons*. L'inclinaison est *positive* si la rotation qui amène OX sur OM s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, sinon elle est négative.

Compétences. – *Construire une représentation géométrique des nombres complexes et interpréter géométriquement les opérations.*

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Les opérations sur les nombres complexes, y compris sous leur forme trigonométrique.

2.1 Représentation géométrique des nombres complexes

Comment s'y prendre ?

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, prenons le sens trigonométrique pour sens positif de rotation. Considérons un nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels. Il est représenté par le point P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le point P est le *point représentatif* ou l'*image* du nombre complexe z.

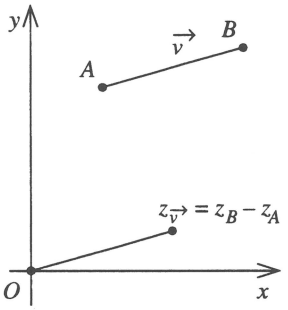


Fig. 2

Le nombre complexe z s'appelle l'*affixe* du point P, ce qu'on note parfois z_P. Par extension, on dit encore que z est l'affixe du vecteur $\vec{v}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on le note $z_{\vec{v}}$. Le lien immédiat entre l'affixe et les composantes d'un vecteur nous indique que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la différence entre l'affixe de son extrémité et celle de son origine (figure 2). On a

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A.$$

Propriétés

Les définitions précédentes permettent d'établir que

l'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme de leurs affixes,

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}} ;$$

l'affixe de l'opposé d'un vecteur est l'opposé de son affixe,

$$z_{-\vec{v}} = -z_{\vec{v}} ;$$

l'affixe de la multiplication d'un vecteur par le scalaire k est égale à son affixe multipliée par k,

$$z_{k\vec{v}} = kz_{\vec{v}}.$$

L'affixe du milieu d'un segment est la moyenne arithmétique des affixes de ses extrémités,

$$\text{si } M \text{ est le milieu de } [AB], \text{ alors } z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

L'affixe du centre de gravité d'un triangle est la moyenne arithmétique des affixes de ses sommets,

$$\text{si } G \text{ est le centre de gravité d'un triangle } ABC,$$
$$\text{alors } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

2.2 Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes

Les quelques questions suivantes sont destinées à guider les élèves dans leur découverte de la signification géométrique des opérations sur les nombres complexes.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x+yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = z + a + bi\,?$$

Quelques exemples devraient permettre aux élèves de constater que le point P' est l'image du point P par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $a + bi$.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x+yi$, quel est le point P' représentatif de son *conjugué*

$$\overline{z} = x - yi\,?$$

Des exemples montrent clairement que le point P' est l'image du point P par la symétrie orthogonale d'axe Ox.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x+yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = k \cdot z, \quad \text{où} \quad k \text{ est un nombre réel non nul}\,?$$

Ici encore, quelques exemples montrent clairement que le point P', d'affixe $z' = kx + kyi$ est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport k. Nous noterons $\mathcal{H}(O, k)$ cette homothétie.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x+yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = z \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\,?$$

L'interprétation de cette dernière opération nécessite d'écrire z sous forme trigonométrique. Notons σ son module et τ son argument, nous avons

$$z' = \sigma(\cos\tau + i\sin\tau)(\cos\theta + i\sin\theta) = \sigma(\cos(\theta+\tau) + i\sin(\theta+\tau)).$$

Le point P' est donc le point représentatif d'un nombre complexe de même module que z, mais dont l'argument a été augmenté de θ. Il s'agit donc de l'image de P par la rotation de centre O et d'angle θ. Nous noterons $\mathcal{R}(O, \theta)$ cette rotation.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x+yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = z \cdot \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,?$$

En procédant comme pour la question précédente, nous écrirons

$$z' = \sigma(\cos\tau + i\sin\tau)\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \sigma\rho(\cos(\theta+\tau) + i\sin(\theta+\tau)).$$

Le point P' est donc le point représentatif d'un nombre complexe dont le module est le produit de celui de z par ρ, et dont l'argument est celui de z augmenté de θ. Il s'agit donc de l'image de P par la composée de l'homothétie $\mathcal{H}(O,\rho)$ et de la rotation $\mathcal{R}(O,\theta)$. Une telle composée est appelée *similitude directe*. Nous noterons $\mathcal{SD}(O,k,\theta)$ la similitude directe composée d'une homothétie de centre O et de rapport k et d'une rotation de même centre et d'angle θ.

2.3 Quelques transformations

Comment s'y prendre ?

Le travail précédent devrait permettre d'écrire les principales transformations du plan sous forme de calcul avec des nombres complexes.

Dans le plan des complexes, considérons des transformations qui à P d'affixe z associent P' d'affixe z'.

La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$

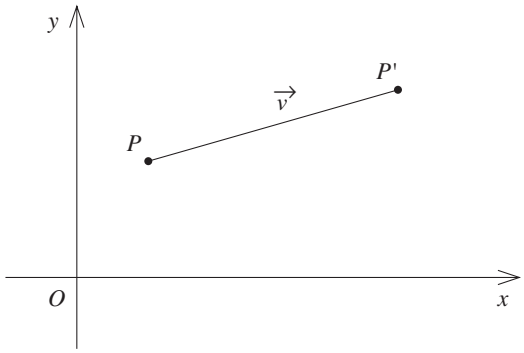


Fig. 3

La relation vectorielle

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{v},$$

se traduit, sur les affixes, par

$$z' = z + \alpha \quad \text{où} \quad \alpha \text{ est l'affixe de } \overrightarrow{v}.$$

L'homothétie de centre Ω ***et de rapport*** k

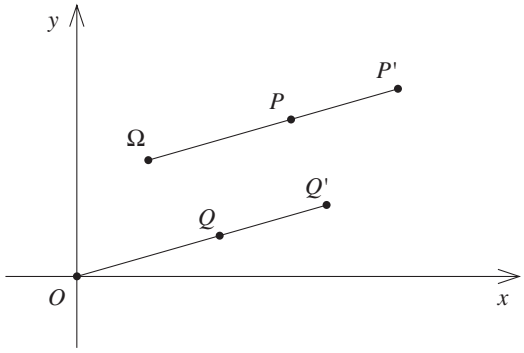


Fig. 4

La relation vectorielle

$$\overrightarrow{\Omega P'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega P} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OQ},$$

où k un nombre réel non nul, se traduit, sur les affixes, par

$$z' - \omega = k(z-\omega) \quad \text{ou } z' = \omega + k(z-\omega),$$

où ω est l'affixe de Ω.

La rotation de centre Ω et d'angle θ

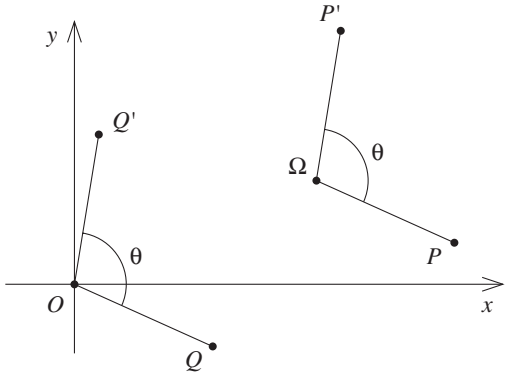


Fig. 5

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega P'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega P}$ par la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ de centre Ω et d'angle θ (exprimé en radians)
ou
le vecteur $\overrightarrow{OQ'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ par la rotation $\mathcal{R}(O, \theta)$ de centre O et d'angle θ se traduit, sur les affixes, par la multiplication de l'affixe de $\overrightarrow{OQ}$, ou de $\overrightarrow{\Omega P}$, par $(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On obtient $z_{\overrightarrow{\Omega P'}} = z_{\overrightarrow{\Omega P}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$,
ou $z_{\overrightarrow{OQ'}} = z_{\overrightarrow{OQ}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$,
c'est-à-dire $z' - \omega = (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta)$,
ou $z' = \omega + (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On peut encore décomposer la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ de la manière suivante,
Q est l'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$, d'affixe $-\omega$,

$$z_1 = z - \omega\,;$$

Q' est l'image de Q par la rotation $\mathcal{R}(O, \theta)$,

$$z_1' = (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta)\,;$$

P' est l'image de Q' par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, d'affixe ω,

$$z' = z_1' + \omega = (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta) + \omega.$$

La similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ

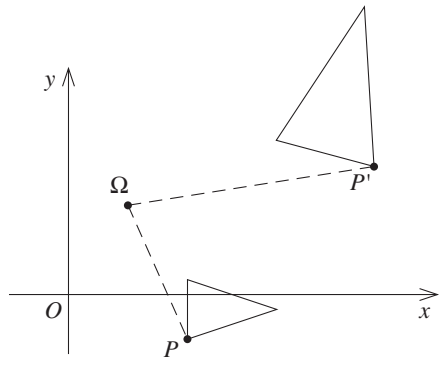


Fig. 6

En combinant les deux opérations précédentes, nous pouvons dire que
le vecteur $\overrightarrow{\Omega P'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega P}$ par la similitude $\mathcal{SD}(\Omega, k, \theta)$,
ou que
le vecteur $\overrightarrow{OQ'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ par la similitude $\mathcal{SD}(O, k, \theta)$,
ce qui se traduit, sur les affixes, par la multiplication de l'affixe de $\overrightarrow{OQ}$, ou de $\overrightarrow{\Omega P}$, par $k(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On obtient $z_{\overrightarrow{\Omega P'}} = z_{\overrightarrow{\Omega P}} \cdot k(\cos\theta + i\sin\theta)$,

ou $z_{\overrightarrow{OQ'}} = z_{\overrightarrow{OQ}} \cdot k(\cos\theta + i\sin\theta)$,

c'est-à-dire $z' - \omega = (z - \omega) \cdot k(\cos\theta + i\sin\theta)$,

ou $z' = \omega + (z - \omega) \cdot k(\cos\theta + i\sin\theta)$.

La figure 6 illustre l'image d'un triangle par la similitude $\mathcal{SD}(\Omega, 1.7, 75°)$

Prolongements possibles

La symétrie orthogonale d'axe AB

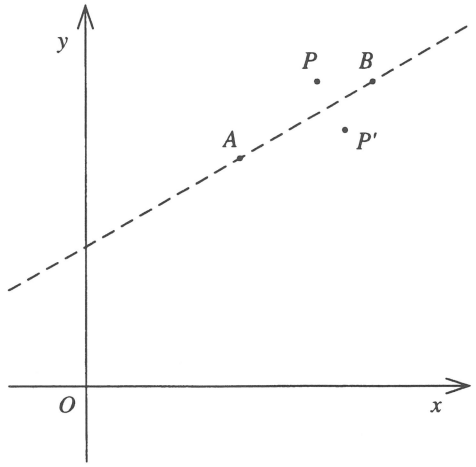


Fig. 7

Pour compléter cet exposé, nous montrons ici une méthode qui permet de découvrir la relation liant les affixes z et z' d'un point P quelconque du plan complexe et de son image P' par la symétrie orthogonale d'axe AB. Nous la donnons pour information, mais nous n'en ferons pas usage dans les exercices proposés à la section 3.

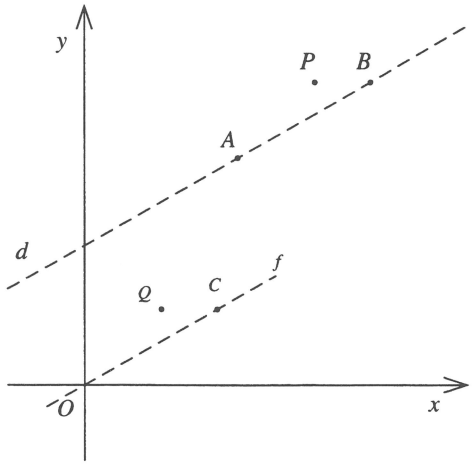


Fig. 8

Notons a et b les affixes respectives des points A et B.

Effectuons tout d'abord la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. Elle envoie A sur O, B sur C et P sur Q. On obtient

$$z_C = b - a \quad \text{et} \quad z_Q = z - a.$$

Cette première opération amène l'axe de symétrie d sur la droite f passant par O.

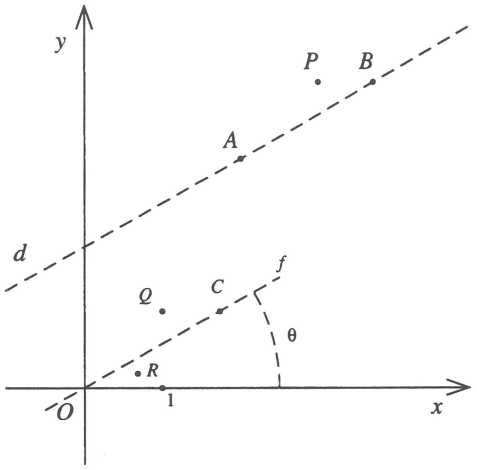


Fig. 9

Effectuons ensuite la similitude directe qui applique C sur le point d'affixe $1+0i$. Cette similitude, d'angle θ (sens horlogique sur la figure 9) et dont le rapport est égal à l'inverse du module de $(b-a)$, applique Q sur R. L'opération sur les affixes qui correspond à cette similitude est la division par $(b-a)$. On a

$$z_R = \frac{z_Q}{b-a}.$$

Notons que cette deuxième opération amène l'axe de symétrie sur l'axe Ox, axe par rapport auquel il est aisé de réaliser une symétrie orthogonale.

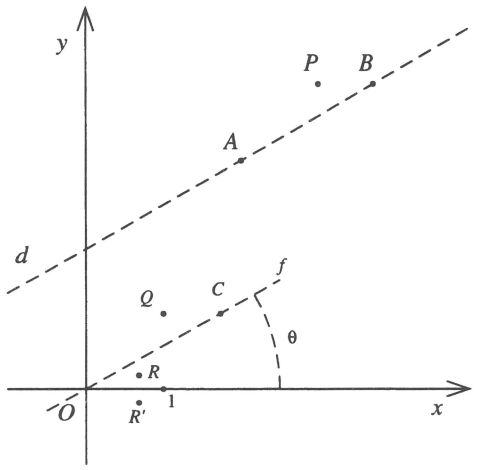


Fig. 10

Nous sommes à présent en mesure d'écrire l'affixe de R', symétrique de R par rapport à Ox ; l'affixe de R' est le conjugué de celui de R. On a

$$z_{R'} = \overline{\left(\frac{z_Q}{b-a}\right)} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}},$$

où $\bar{a}, \bar{b}$ et $\bar{z}$ sont les complexes conjugués de a, b et z.

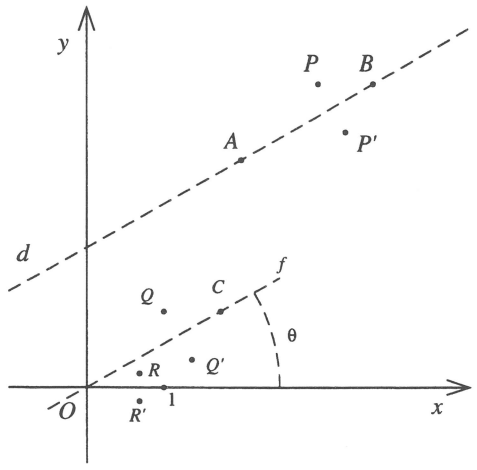


Fig. 11

La dernière étape consiste à effectuer la similitude qui applique le point d'affixe $1+0i$ sur C, puis la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. On obtient successivement

$$z_{Q'} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}(b-a),$$

puis

$$z_{P'} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}(b-a)+a.$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$\frac{z'-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

2.4 Quelques situations géométriques

Comment s'y prendre ?

Considérons les points A, B, C, D, ... deux à deux distincts dont les affixes respectives sont a, b, c, d, ... (éléments de $\mathbb{C}$).

Alignement. – Exprimer que les trois points A, B et C sont alignés.

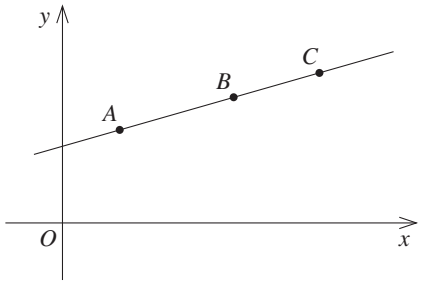


Fig. 12

La condition vectorielle d'alignement

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB},$$

se traduit, sur les affixes, par

$$c - a = k \cdot (b - a) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R},$$

ou encore A, B C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

Perpendicularité. – Exprimer que les deux droites AB et CD sont perpendiculaires.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$, d'affixe $(d-c)$, est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'affixe $(b-a)$, par une rotation de 90° et une homothétie de rapport k.

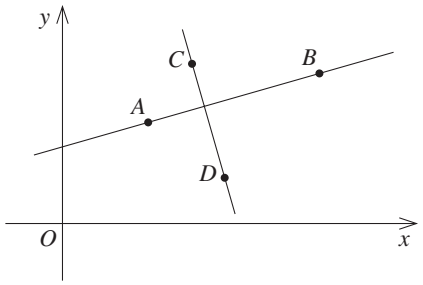


Fig. 13

Nous obtenons

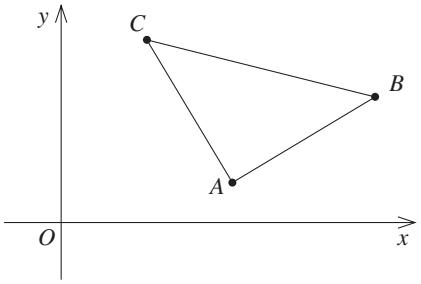
$$d - c = (b - a) \cdot i \cdot k \text{ et donc } \frac{d-c}{b-a} = k \cdot i.$$

Ainsi $AB \perp CD$ si et seulement si $\dfrac{d-c}{b-a}$ est un imaginaire pur.

La norme du rapport $\dfrac{d-c}{b-a}$ vaut le rapport des longueurs des segments $[CD]$ et $[AB]$.

Remarquons que si $(b-a) = r + is$, $(d-c) = (r+is) \cdot i \cdot k = k(-s+ri)$.

Triangle rectangle isocèle. – Exprimer que le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet A.

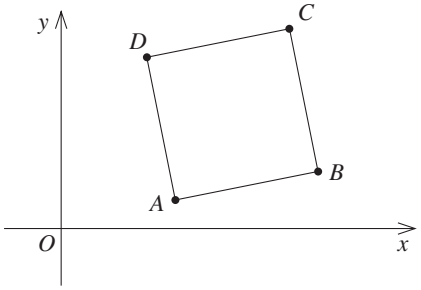


Comme conséquence directe de la relation précédente, il vient : ABC est rectangle isocèle de sommet A si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = i.$$

Fig. 14

Carré. – Exprimer que la figure $ABCD$ est un carré.

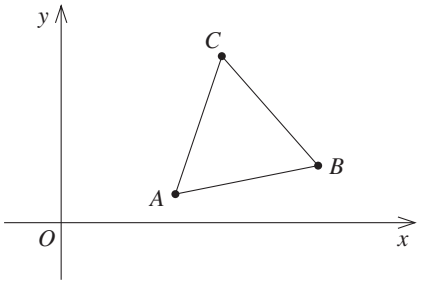


Cela peut se faire en écrivant deux relations du type

$$\begin{cases} d-a = (b-a)i \\ a-b = (c-b)i. \end{cases}$$

Fig. 15

Triangle équilatéral. – Exprimer que la figure ABC est un triangle équilatéral.



On peut écrire une relation du type

$$c-a = (b-a)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Fig. 16

Remarque. – Dans ce qui précède, lorsque l'on dit « triangle ABC », ou carré « $ABCD$ », cela signifie que l'on cite les sommets A, B, C, D dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Commentaires

Il est intéressant de noter que tout ce qui précède suffit à exposer la première démonstration que Gauss donne du théorème fondamental de l'algèbre : *Toute équation algébrique de degré n dans les complexes admet n racines (certaines d'entre elles pouvant être confondues).* À ce sujet, on peut consulter F. Enriques [1924–1927].

3 Faire de la géométrie avec les nombres complexes

De quoi s'agit-il ?

Résoudre quelques problèmes de géométrie plane au moyen des nombres complexes[7]. C'est dans des problèmes faisant intervenir des déplacements et similitudes du plan que les nombres complexes sont particulièrement utiles.

Traiter une même application avec différents outils : propriétés de figures, transformations, nombres complexes et comparer ces différentes approches. D'autres méthodes n'ont pas été développées ici : le calcul vectoriel (qui n'est évoqué qu'à titre indicatif) et la géométrie analytique.

Enjeux

L'objectif est d'utiliser l'aspect géométrique des opérations sur les nombres complexes pour établir des propriétés géométriques de figures planes. Bien que cette méthode de démonstration ne diffère guère de celle qui utilise le calcul vectoriel, il convient de mettre en évidence l'avantage que présente la multiplication par le nombre complexe adéquat pour effectuer une rotation d'un angle qui n'est pas un multiple de 90°.

Par ailleurs, cette activité propose des applications dont les démonstrations par la géométrie synthétique exploitent les propriétés des transformations du plan. Ceci donne du sens à cette matière, dont l'étude semble parfois stérile aux élèves et aux enseignants, de par son manque d'utilisation.

De manière plus générale, le but est aussi de rencontrer un nouvel outil de démonstration en géométrie, de diversifier les méthodes, de les comparer en évaluant les avantages de chacune d'elles.

Compétences. – *Traiter des applications à caractère géométrique au moyen des nombres complexes.*

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – La représentation géométrique des nombres complexes et les principales transformations du plan sous forme d'opérations sur les nombres complexes.

Fichiers Cabri. – Pour chacune des applications suivantes, un fichier Cabri commenté est disponible sur le site du CREM à l'adresse

`http://www.profor.be/crem/index.htm`

Remarque. – Chaque fois qu'on désigne une figure par ses sommets, ceux-ci sont donnés dans le sens trigonométrique.

[7] Certains de ces exercices sont proposés dans A. Bajart [1998].

3.1 Un point fixe

Comment s'y prendre ?

Dans un plan, on considère trois points non alignés A, B et M. Au point M, on associe le point R milieu de $[BM]$, le point S, symétrique de R par rapport à A, ainsi que le point P, point d'intersection des droites MS et AB. Qu'advient-il du point P lorsque le point M se déplace dans le plan ?

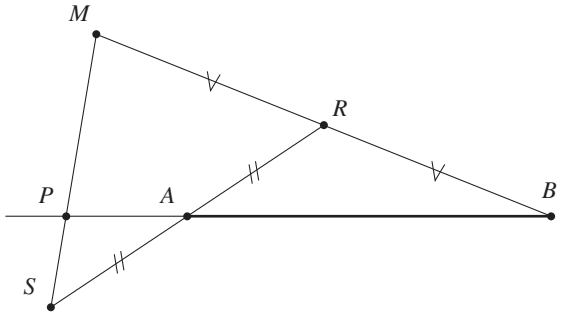


Fig. 17

Ce problème a déjà été traité par calcul vectoriel au chapitre 8. Nous en proposons ici deux autres solutions : l'une par les nombres complexes, l'autre par la géométrie synthétique.

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du repère en A et le point unité sur l'axe des réels en B. Les affixes des points A, B sont respectivement $a = 0 + 0i$ et $b = 1 + 0i$.

Notons $m = \lambda + \mu i$ l'affixe du point mobile M.

L'affixe de R, milieu de $[MB]$ est alors $r = \frac{\lambda+1}{2} + \frac{\mu}{2}i$ et celle de S symétrique de R par rapport à l'origine A est $s = -\frac{\lambda+1}{2} - \frac{\mu}{2}i$.

L'alignement de M, P et S, qui s'exprime vectoriellement par $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MS}$, nous donne la relation $p - m = k(s - m)$ pour les affixes.

L'affixe de P est donc

$$p = (\lambda + \mu i) + k(-\frac{\lambda + 1}{2} - \frac{\mu}{2}i - \lambda - \mu i).$$

En regroupant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons

$$p = \lambda - k\frac{3\lambda + 1}{2} + \mu\frac{2 - 3k}{2}i.$$

Comme P est un point de l'axe réel, la partie imaginaire de son affixe est nulle, ce qui donne $k = \frac{2}{3}$. En remplaçant k par cette valeur, on obtient finalement $p = -\dfrac{1}{3} + 0i$.

Ce résultat s'interprète comme ceci : P est un point fixe, situé sur la droite AB, à une distance $\frac{|AB|}{3}$ de A, du côté opposé à B.

Par la géométrie synthétique

Suivons les indications de l'énoncé pour découvrir les transformations du plan qui sont appliquées au point M, et voyons quelle est l'image du point P par cette composition de transformations.

Tout d'abord, une homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$, notée $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ applique M sur R; ensuite R est lui-même envoyé sur S par la symétrie de centre A, notée $\mathcal{SC}_A$.

Si les élèves savent que la composée $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$, ils peuvent en déduire que le point P est fixe. En effet, le centre de cette dernière homothétie est à la fois un point de la droite AB, qui est sa propre image par la composée $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$, et un point de la droite MS. C'est donc le point P.

Comme de nombreux élèves ne sont plus familiarisés avec les propriétés de composition des transformations, il faudra peut-être procéder autrement.

Quelle est l'image du point P par la composée $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$?

L'homothétie $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ applique P sur Q, milieu de $[PB]$, ensuite Q est envoyé sur Q' symétrique de Q par rapport à A. Montrons que Q' coïncide avec P.

$\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$	$\mathcal{SC}_A$	$\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$
$M \longrightarrow R$	$R \longrightarrow S$	$M \longrightarrow S$
$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow Q'$	$P \longrightarrow Q' (= P\,?)$

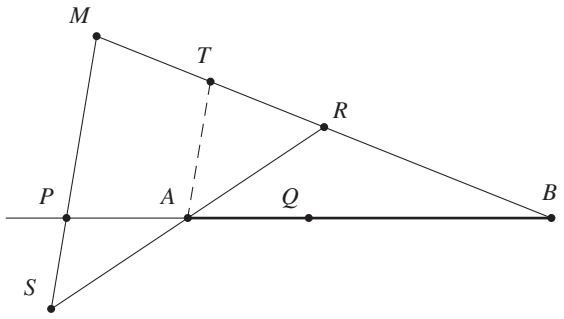


Fig. 18

Traçons la droite parallèle à SM passant par A et notons T le point d'intersection de cette droite avec MB (figure 18). La configuration de Thalès dans le triangle SRM nous indique que

puisque A est au milieu de $[SR]$,

T est au milieu de $[MR]$, et donc au quart de $[MB]$, à partir de M.

Une configuration similaire dans le triangle PBM nous permet de déduire que

puisque T est au quart de $[MB]$, à partir de M,

A est au quart de $[PB]$, à partir de P, et donc au milieu de $[PQ]$.

Ainsi l'image de Q par la symétrie $\mathcal{SC}_A$ est P, qui est donc un point fixe de la similitude $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$. Ce point fixe P est le centre de cette similitude et toutes les droites joignant un point M quelconque à son image S par cette similitude passent par P. De plus, la position de P, sur la droite AB, à une distance $\frac{|AB|}{3}$ de A, du côté opposé à B est une conséquence du fait que A est au quart de $[PB]$, à partir de P.

Remarque. – Une autre façon de justifier que l'image de Q par la symétrie $\mathcal{SC}_A$ est P consiste à démontrer que les triangles SAP et RAQ sont isométriques, ce qui permet de déduire que $|AP| = |AQ|$.

3.2 Problème des deux triangles rectangles isocèles

Comment s'y prendre ?

On donne deux triangles isocèles OAB et OCD rectangles en O.
Montrer que la médiane issue du sommet O de l'un des deux triangles AOD ou COB est hauteur de l'autre.
Envisager encore plusieurs types de démonstrations.

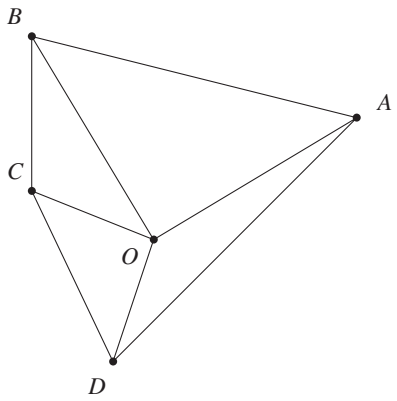


Fig. 19

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du plan en O, l'axe des réels sur OA et l'axe des imaginaires sur OB. Le repère OAB est orthonormé puisque le triangle OAB est rectangle et isocèle. Les affixes respectives de A et B sont alors $a = 1 + 0i$ et $b = 0 + 1i$.

Notons $c = r + si$ l'affixe du point C. Comme D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, notée $R(O, \frac{\pi}{2})$, son affixe d vaut ci et donc $d = (r + si)i = -s + ri$.

Plaçons M au milieu de $[CB]$ et montrons que OM, médiane du triangle OBC, est perpendiculaire à AD. Pour cela, calculons et comparons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AD}$. On a

$$z_{\overrightarrow{OM}} = \frac{r}{2} + \frac{s+1}{2}i \quad \text{et} \qquad z_{\overrightarrow{AD}} = -s - 1 + ri.$$

Il reste à vérifier que, si on multiplie par i l'affixe de $\overrightarrow{OM}$, on retrouve bien celle de $\overrightarrow{AD}$, à un facteur près. Et en effet,

$$z_{\overrightarrow{OM}} \cdot i = (\frac{r}{2} + \frac{s+1}{2}i)i = \frac{-s-1}{2} + \frac{r}{2}i = \frac{1}{2}(-s-1+ri) = \frac{1}{2}z_{\overrightarrow{AD}}.$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ nous indique de plus que $|OM| = \frac{1}{2}|AD|$.

Par le calcul vectoriel

La perpendicularité de OM et AD est établie en vérifiant que le produit scalaire $< \overrightarrow{OM}|\overrightarrow{AD} >$ est nul ; le calcul des normes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AD}$ montre que $\|\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD}\|$.

Par la géométrie synthétique

Recherchons une transformation du plan qui amène, par exemple, $[AD]$ sur $[OM]$. La présence d'angles droits et d'un milieu nous suggère de nous tourner vers les rotations d'un quart de tour ainsi que vers les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$.

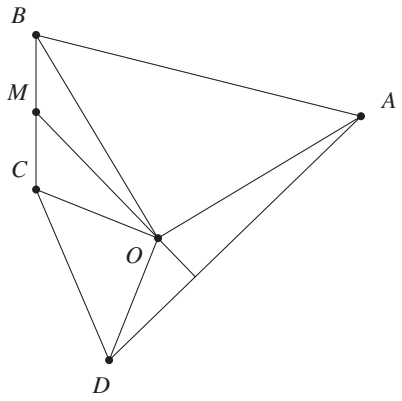


Fig. 20

Voici une des façons de s'y prendre.

Effectuons tout d'abord la rotation $\mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$. Elle applique D sur C et A sur Q, où Q est le symétrique de B par rapport à O.

Ensuite, l'homothétie $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ applique C sur M et Q sur O.

$\mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$	$\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$	$\mathcal{H}(B, \frac{1}{2}) \circ \mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$
$D \longrightarrow C$	$C \longrightarrow M$	$D \longrightarrow M$
$A \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow O$	$A \longrightarrow O$

Par conséquent, la composée $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2}) \circ \mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$ applique le segment $[DA]$ sur le segment $[MO]$, et on peut en déduire que ces deux segments sont perpendiculaires, et que $|OM| = \frac{1}{2}|AD|$.

3.3 Problème des trois triangles équilatéraux

Comment s'y prendre ?

Le triangle ABC est équilatéral et G désigne son centre. Si D est un point de $[BC]$, on construit les triangles équilatéraux BED et DFC de centres respectifs H et J, comme sur la figure 21.
Démontrer que le triangle GHJ est également équilatéral.

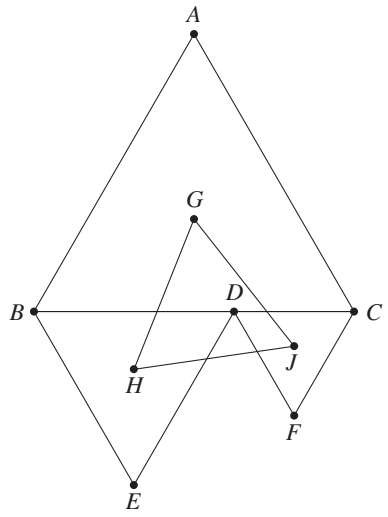


Fig. 21

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du plan en B, l'axe des réels sur BC, avec le point unité en C, et l'axe des imaginaires perpendiculaire à BC.

La recherche des affixes respectives des différents points de la figure 21 fournit l'occasion d'appliquer de manière systématique les propriétés et les expressions des transformations du plan complexe exposées aux pages 325 à 328. Voici les résultats.

B : $b = 0 + 0i$;

C : $c = 1 + 0i$;

A : $a = c \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, car A est l'image de C par la rotation $\mathcal{R}(B, \frac{\pi}{3})$;

G : $g = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$, car G est le centre de gravité du triangle ABC ;

D : $d = k + 0i$, car D est un point quelconque du segment $[BC]$;

E : $e = d \cdot (\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{k}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{2}i$, car E est l'image de D par la rotation $\mathcal{R}(B, -\frac{\pi}{3})$;

H : $h = \frac{k}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{6}i$, car H est le centre de gravité du triangle BED ;

F : $f = d+(c-d)\cdot(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = k+(1-k)(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{k+1}{2} - \frac{(1-k)\sqrt{3}}{2}i$, car $\overrightarrow{DF}$ est l'image de $\overrightarrow{DC}$ par la rotation $\mathcal{R}(D, -\frac{\pi}{3})$;

J : $j = \frac{k+1}{2} - \frac{(1-k)\sqrt{3}}{6}i$, car J est le centre de gravité du triangle DFC.

Pour justifier que le triangle GHJ est équilatéral, il suffit de vérifier, par exemple, que le vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{GH}$ par la rotation $\mathcal{R}(G, \frac{\pi}{3})$. Ou encore que le vecteur $\overrightarrow{HG}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{HJ}$ par la rotation $\mathcal{R}(H, \frac{\pi}{3})$. D'autres possibilités de vérification peuvent être évoquées par les élèves ; rien ne s'oppose à ce que chacun poursuive les calculs en suivant sa propre idée.

Calculons, par exemple, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GJ}$.

$$z_{\overrightarrow{GH}} = h - g = \frac{k-1}{2} - \frac{(k+1)\sqrt{3}}{6}i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{GJ}} = j - g = \frac{k}{2} + \frac{(k-2)\sqrt{3}}{6}i.$$

Il reste à vérifier que

$$z_{\overrightarrow{GH}}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = z_{\overrightarrow{GJ}}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{k-1}{2} - \frac{(k+1)\sqrt{3}}{6}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{k}{2} + \frac{(k-2)\sqrt{3}}{6}i,$$

ce qui est bien le cas.

Cette application montre très clairement à quel point la méthode de démonstration par les nombres complexes est efficace, même et surtout si des rotations d'angles non multiples de $\frac{\pi}{2}$ interviennent dans le problème. En effet, un seul calcul suffit à établir que deux côtés sont de même longueur et qu'ils forment un angle de 60°.

Par le calcul vectoriel

On peut démontrer que le triangle GHJ est équilatéral en calculant par produit scalaire les longueurs des trois côtés, ou encore la mesure d'un angle et les longueurs des deux côtés qui le bordent, ...

Par la géométrie synthétique

Cette démonstration utilise des propriétés concernant la composition de deux rotations, et la décomposition d'une rotation en composée de deux symétries orthogonales.

Ces notions ne sont peut-être pas familières à tous les élèves, et le professeur jugera de l'opportunité d'effectuer cet exercice de démonstration en fonction des connaissances des élèves de sa classe. Nous proposons ci-dessous un schéma de réflexion qui permet de guider les élèves pour leur permettre de retrouver ces propriétés, et d'en déduire la démonstration de l'énoncé proposé.

Il faut tout d'abord s'assurer que les élèves se souviennent que les tranformations du plan se répartissent en *déplacements* et *retournements*. Ensuite, on pose quelques questions destinées à rafraîchir leur mémoire.

La composée de deux symétries orthogonales est-elle un déplacement ou un retournement ?
Plus précisément, quelle est la transformation composée de deux symétries orthogonales

d'une part, d'axes parallèles, distants d'une longueur ℓ ?

d'autre part, d'axes sécants en O, formant un angle θ ?

Il s'agit bien entendu d'un déplacement. Dans le premier cas, il s'agit d'une translation dont le vecteur est perpendiculaire aux axes des symétries et de longueur 2ℓ ; dans le second cas, il s'agit d'une rotation de centre O et d'angle 2θ. L'ordre dans lequel on effectue la composée des deux symétries détermine le sens de la translation ou de la rotation, suivant le cas.

Peut-on décomposer toute rotation de centre O et d'angle α en une composée de deux symétries orthogonales ? De quelle manière ?

La figure 22 apporte des éléments de réponse à cette question.

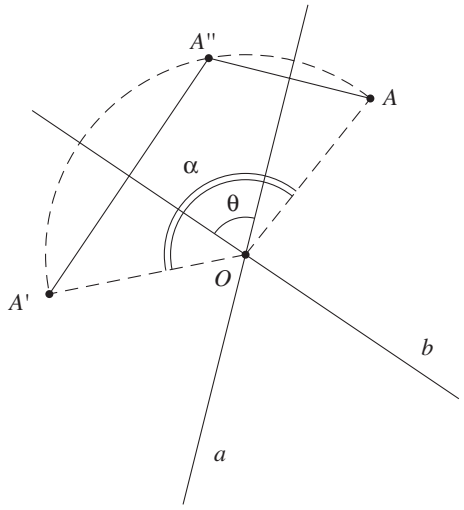


Fig. 22

La rotation de centre O et d'angle α est la composée de deux symétries orthogonales dont les axes a et b se coupent en O et forment un angle $\theta = \frac{\alpha}{2}$, θ étant l'angle allant de a vers b. Il convient d'être très attentif à l'ordre des symétries dans la décomposition, car il s'agit d'angles orientés. La figure montre que $\mathcal{R}(O, \alpha) = \mathcal{SO}_b \circ \mathcal{SO}_a$, tandis que la composée $\mathcal{SO}_a \circ \mathcal{SO}_b$ correspond à la rotation de même centre O et d'angle $(-\alpha)$.

Cette décomposition est-elle unique ?

Comme le montrent les figures 23 et 24, la position du point intermédiaire A'' (tel que $|OA''| = |OA|$) est arbitraire et chaque choix de A'' détermine une position des axes de symétrie. Ceux-ci se coupent toujours en O et forment un angle $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

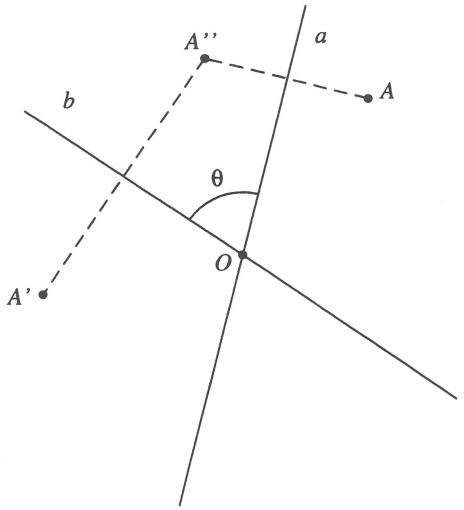


Fig. 23

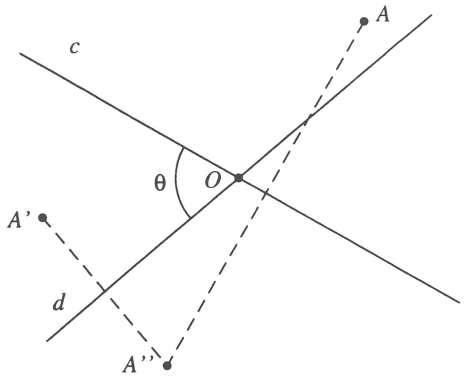


Fig. 24

La composée de deux rotations s'obtient donc par la composée de quatre symétries orthogonales. Nous allons voir qu'en vertu de ce qui précède, un choix judicieux des axes de symétries permet d'obtenir cette composée de deux rotations comme composée de deux symétries orthogonales.

Notons $\mathcal{SO}_a$ la symétrie orthogonale d'axe a, et décomposons, par exemple, la composée de deux rotations de 120° et de centres respectifs A et B en composée de quatre symétries. On a

$$\mathcal{R}(A, 120°) = \mathcal{SO}_b \circ \mathcal{SO}_a \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(B, 120°) = \mathcal{SO}_d \circ \mathcal{SO}_c$$

$$\mathcal{R}(B, 120°) \circ \mathcal{R}(A, 120°) = \mathcal{SO}_d \circ \mathcal{SO}_c \circ \mathcal{SO}_b \circ \mathcal{SO}_a.$$

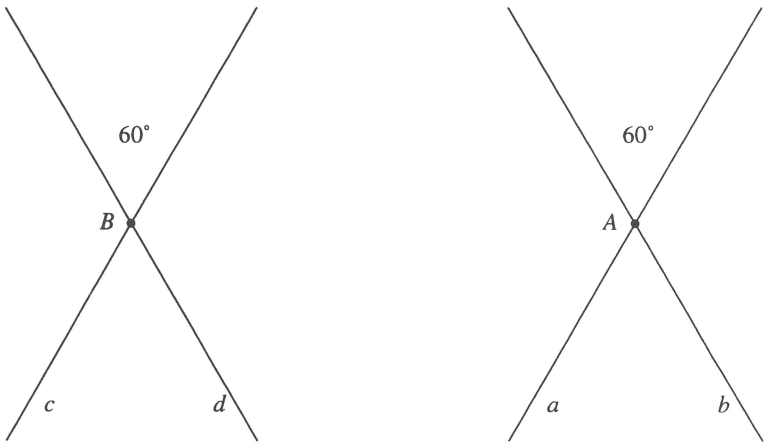


Fig. 25

La mesure de l'angle de la rotation qui amène a sur b (ou c sur d) est bien de 60°. En amenant les axes b et c dans la position de la droite des centres AB, comme le montre la figure 26, nous obtenons

$$\mathcal{R}(B, 120°) \circ \mathcal{R}(A, 120°) = \mathcal{SO}_{d'} \circ \mathcal{SO}_{c'} \circ \mathcal{SO}_{b'} \circ \mathcal{SO}_{a'} = \mathcal{SO}_{d'} \circ \mathcal{SO}_{a'}.$$

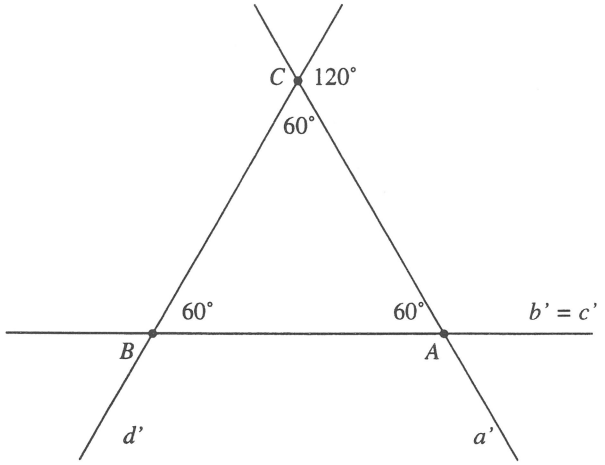


Fig. 26

L'angle de la rotation qui amène a' sur d' mesure $(-60°)$ ou $120°$. La composée $\mathcal{SO}_{d'} \circ \mathcal{SO}_{a'}$ est donc une rotation de centre C et d'angle $(-120°)$ ou $240°$, ce qui revient au même. On peut donc écrire

$$\mathcal{R}(B, 120°) \circ \mathcal{R}(A, 120°) = \mathcal{R}(C, 240°).$$

De manière plus générale, déterminer sur un schéma le centre et l'angle de la composée de deux rotations de centres respectifs A et B et d'angles α et β.

Revenons au problème des trois triangles.

Nous observons que la rotation $\mathcal{R}(J, 120°)$ applique C sur D, et que la rotation $\mathcal{R}(H, 120°)$ applique D sur B. Leur composée peut être déterminée en vertu de ce qui précède (figure 26). Il s'agit de la rotation de $240°$ dont le centre forme un triangle équilatéral avec J et H.

Voit-on sur le dessin de la figure 21 une rotation de $240°$ qui amène C sur B ?

La rotation $\mathcal{R}(G, 240°)$ répond à cette question. Il faudra encore expliquer pourquoi il y a unicité de la rotation d'un angle donné qui amène un point donné sur un autre, lorsqu'on connaît l'angle de la rotation. Nous pourrons alors conclure que GHJ forme un triangle équilatéral.

Prolongement possible

Que se passe-t-il si le point D n'est plus sur la droite BC ?

Le fichier Cabri montre que l'énoncé reste vrai. Il reste à voir que la démonstration synthétique inclut ce cas. Cette propriété, appelée par certains *théorème de Napoléon*, peut également être démontrée par les nombres complexes.

3.4 Problème des trois carrés

Comment s'y prendre ?

On donne un segment $[OB]$ et un point A de ce segment. D'un même côté de OB, on construit les carrés de côtés $[OA]$ et $[AB]$, de l'autre côté, le carré de côté $[OB]$.
Désignons par C, D et E les centres respectifs de ces trois carrés. Démontrer que BC est perpendiculaire à DE. Montrer en outre que $|BC| = |DE|$.

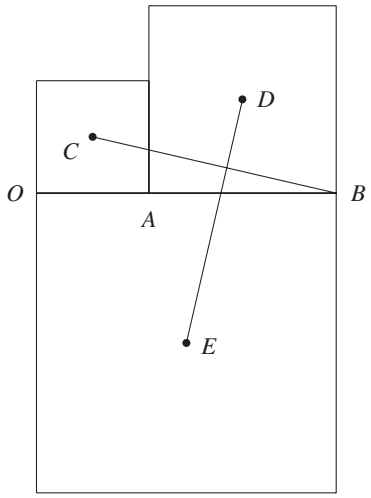


Fig. 27

Remarque. – On pourrait également démontrer que les segments $[OD]$ et $[CE]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

Par les nombres complexes

Pour établir la thèse, il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{BC}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, ce qui peut se vérifier facilement au moyen des affixes de ces deux vecteurs.

Plaçons l'origine du plan en O, l'axe des réels sur OB, avec le point unité en B, et l'axe des imaginaires perpendiculaire à OB.

Déterminons tout d'abord les affixes des points de la figure 27 nécessaires au calcul des affixes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$:

$O : o = 0 + 0i$;
$B : b = 1 + 0i$;
$A : a = k + 0i$;
$C : c = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}i$;
$D : d = \frac{k+1}{2} + \frac{1-k}{2}i$;
$E : e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Calculons ensuite les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$. On obtient

$$z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = \frac{k-2}{2} + \frac{k}{2}i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{DE}} = e - d = -\frac{k}{2} + \frac{k-2}{2}i.$$

Il reste à vérifier que

$$z_{\overrightarrow{BC}} \cdot i = z_{\overrightarrow{DE}}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{k-2}{2} + \frac{k}{2}i\right) \cdot i = -\frac{k}{2} + \frac{k-2}{2}i,$$

ce qui est bien le cas.

Le fait qu'il n'est pas nécessaire de connaître le centre de la rotation pour effectuer cette vérification étonnera peut-être les élèves et suscitera quelques commentaires.

Par le calcul vectoriel

La perpendicularité des segments $[BC]$ et $[DE]$ est établie en vérifiant que le produit scalaire $< \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{DE} >$ est nul ; l'égalité de leurs longueurs est vérifiée en calculant les normes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$.

Par la géométrie synthétique

Nous cherchons une rotation d'angle 90° qui applique $[BC]$ sur $[DE]$, ou ce qui revient au même, une rotation d'angle $-90°$ qui applique $[DE]$ sur $[BC]$.

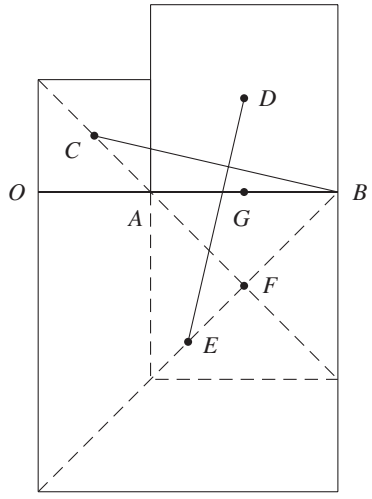


Fig. 28

La rotation de centre G et d'angle $-90°$ envoie D sur B, elle applique aussi B sur F et BE sur FC (figure 28). En effet, $|BE|$ vaut la mesure de la demi-diagonale du carré construit sur $[OB]$, et $|FC| = |FA| + |AC|$, vaut la somme des mesures des demi-diagonales des carrés construits sur $[AB]$ et $[OA]$. Comme la mesure de la diagonale du carré construit sur $[OB]$ est égale à la somme des mesures des diagonales des carrés construits sur $[AB]$ et $[OA]$, on a bien $|BE| = |FC|$. Il en résulte que E est envoyé sur C, et donc DE sur BC.

$\mathcal{R}(G, -\frac{\pi}{2})$
$B \longrightarrow F$
$D \longrightarrow B$
$[BE] \longrightarrow [FC]$
$E \longrightarrow C$
$[DE] \longrightarrow [BC]$

On peut déduire de tout ceci que les segments $[DE]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

3.5 Problème des quatre carrés (et plus...)

Comment s'y prendre ?

On construit quatre carrés sur les côtés d'un parallélogramme extérieurement à celui-ci. Démontrer que les centres de ces carrés sont les sommets d'un carré.

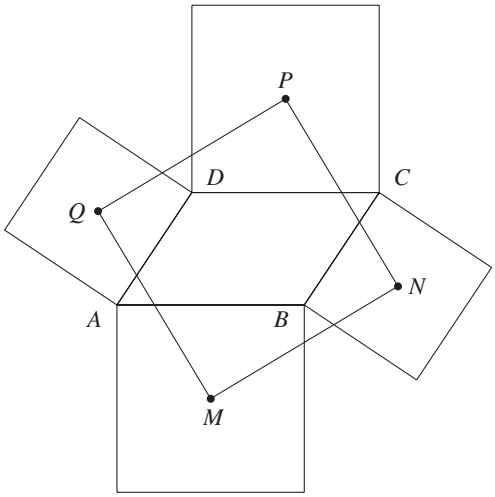


Fig. 29

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du plan en D, l'axe des réels sur DC, avec le point unité en C, et l'axe des imaginaires perpendiculaire à DC.

Déterminons tout d'abord les affixes des points de la figure 29.

D : $d = 0 + 0i$;

C : $c = 1 + 0i$;

A : $a = k + \ell i$;

B : $b = k + 1 + \ell i$, car B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$, d'affixe $1 + 0i$;

P : $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;

M : $m = (k + \frac{1}{2}) + (\ell - \frac{1}{2})i$.

Q : Le point Q est l'image de A par une similitude directe de centre D, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, notée $\mathcal{SD}(D, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4})$. Nous obtenons donc q par la relation

$$q = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i),$$

et donc

$$q = (k + \ell i)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{k+\ell}{2} + \frac{\ell - k}{2}i.$$

N : Le vecteur $\overrightarrow{CN}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{CB}$ par une similitude directe de centre C, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, notée $\mathcal{SD}(C, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$. Nous obtenons donc n par la relation

$$n - c = (b - c) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$$

$$n = c + (b - c) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i),$$

et donc

$$n = 1 + (k + \ell i)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = 1 + \frac{k-\ell}{2} + \frac{k+\ell}{2}i.$$

Les affixes de ces deux derniers points Q et N peuvent être calculées par différents procédés comme l'indique la remarque ci-après.

Démontrons à présent que $MNPQ$ est un carré. Pour cela, calculons par exemple les affixes des vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{QP}$. Nous obtenons

$$z_{\overrightarrow{QM}} = m - q = \frac{1 + k - \ell}{2} + \frac{-1 + k + \ell}{2}i,$$

$$z_{\overrightarrow{QP}} = p - q = \frac{1 - k - \ell}{2} + \frac{1 + k - \ell}{2}i,$$

et nous vérifions que

$$(m - q)i = (p - q).$$

Ceci démontre que les segments $[QP]$ et $[QM]$ sont perpendiculaires et de même longueur, mais ne suffit pas à prouver que $MNPQ$ est un carré. Il faut encore calculer, par exemple,

$$z_{\overrightarrow{MN}} = n - m = \frac{1 - k - \ell}{2} + \frac{1 + k - \ell}{2}i,$$

et constater que

$$(n - m)i = (q - m),$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque. – Une autre manière d'obtenir les affixes des points Q et N est de calculer les affixes d'un troisième sommet de chacun des carrés construits sur $[AD]$ et $[BC]$, et d'exprimer ensuite que Q et N sont les

milieux des diagonales de ces carrés. Par exemple, si on désigne par A' le sommet opposé à A dans le carré construit sur $[AD]$, son affixe a' vaut $a \cdot (-i)$, ce qui donne $a' = \ell - ki$ et pour Q, milieu de $[AA']$,

$$q = \frac{k+\ell}{2} + \frac{\ell - k}{2} i.$$

Il est fort possible que cette méthode de détermination des affixes de Q et N soit suggérée par les élèves. Elle ne doit pas être rejetée puisqu'elle est correcte, mais elle nécessite de calculer les affixes de points supplémentaires. Le professeur peut cependant faire observer que les affixes q et n peuvent être obtenues directement grâce aux similitudes. C'est une excellente occasion de voir fonctionner l'expression de la similitude et d'en montrer toute la puissance.

Par le calcul vectoriel

On peut vérifier, par exemple, que

- $< \overrightarrow{MN} | \overrightarrow{MQ} >= 0$ et $< \overrightarrow{QM} | \overrightarrow{QP} >= 0$, ce qui établit que la figure possède des angles droits en M et Q,
- $\|\overrightarrow{NM}\| = \|\overrightarrow{MQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\|$, ce qui établit l'égalité des longueurs de trois côtés.

Ceci suffit à établir que $MNPQ$ est un carré.

Par la géométrie synthétique

Nous donnons ci-dessous un schéma de démonstration. Les élèves sont invités à apporter des justifications aux étapes successives.

Il est possible de compléter la figure 29 pour obtenir un *pavage* du plan (figure 30). En effet, si on considère comme motif de base un polygone constitué de deux carrés et de deux parallélogrammes ayant un sommet en commun, on obtient, en reproduisant indéfiniment ce motif, un assemblage de polygones isométriques qui peut être étendu à tout le plan, et tel que ces polygones ne se recouvrent pas et ne laissent entre eux aucune lacune (c'est ce qu'on appelle un *pavage*).

Il faudra justifier qu'en chaque sommet du pavage la somme des angles vaut bien 360°.

Désignons par « petits carrés » les carrés identiques à celui construit sur $[AD]$ et par « grands carrés » les carrés identiques à celui construit sur $[DC]$ (dans l'hypothèse où, comme dans la figure 29, $|AD|$ est plus petit que $|DC|$, sinon il suffit d'intervertir les mots « grand » et « petit »). La figure 31 montre que chaque centre d'un « petit carré » est le centre d'une rotation de 90° qui applique les uns sur les autres les « grands carrés » et donc leurs centres, ce qui signifie que les centres des quatre « grands carrés » situés autour d'un même « petit carré » forment aussi un carré.

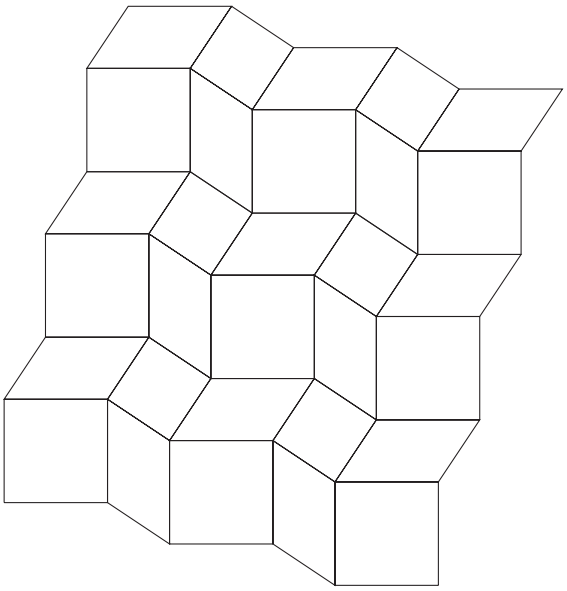


Fig. 30

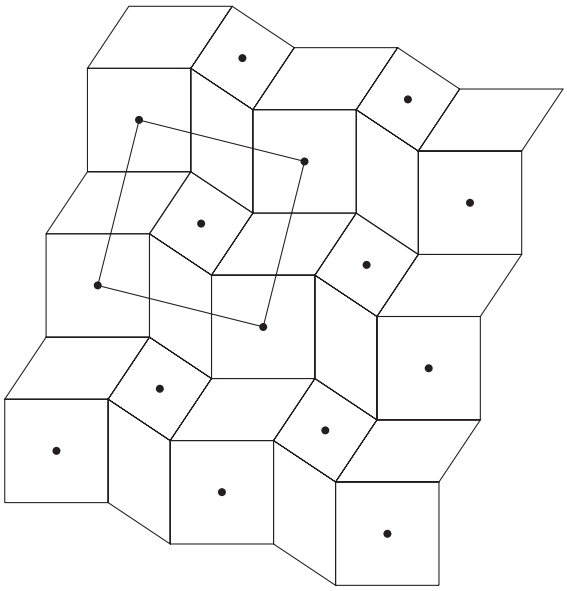


Fig. 31

Dessinons deux de ces carrés, comme le montre la figure 32 et traçons leurs diagonales (figure 33).

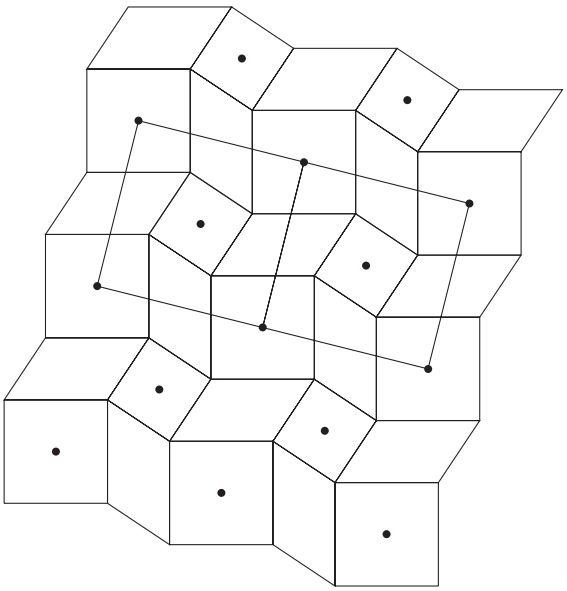


Fig. 32

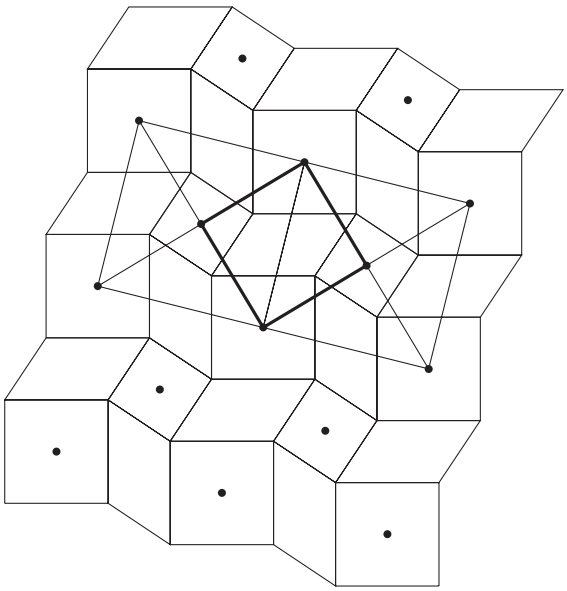


Fig. 33

Nous voyons apparaître un nouveau carré dont les côtés sont formés des demi-diagonales des précédents, ce qui achève la démonstration.

Échos des classes

L'expérience s'est déroulée dans une classe de 6e année de l'enseignement général, option mathématique 6h. Elle s'est déroulée en approximativement 4h de cours. Les sections 2 et 3 de ce chapitre ont été abordées d'une manière plus ou moins semblable à celle décrite dans le texte. Il s'agissait en effet de raccrocher ces deux points à ce qui avait été vu auparavant, conformément au programme officiel (principales propriétés algébriques des nombres complexes, forme trigonométrique et plan de Gauss).

On a commencé par montrer le lien entre les nombres complexes et les principales transformations du plan ($z \to z + c$, $z \to -z$, $z \to \overline{z}$, $z \to -\overline{z}$, $z \to z \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ et $z \to r \cdot z$ ($r \in \mathbb{R}$)). Cette approche des transformations a tout de suite plu aux élèves, qui voyaient là une application concrète des nombres complexes et une façon tout à fait nouvelle pour eux d'aborder les transformations du plan, d'une manière analytique rassurante.

On est ensuite passé aux propriétés des affixes décrites au paragraphe 2.1. Là aussi, les élèves ont rapidement accroché et ont découvert par eux-mêmes plusieurs de ces propriétés.

Les *Quelques situations géométriques* du 2.4 ont été proposées en guise d'exercices avec le même succès. En particulier, la traduction en termes de nombres complexes d'une rotation non centrée à l'origine est apparue comme tout à fait naturelle.

Dans la section 3, les problèmes 3.2, 3.3 et 3.4 ont été résolus en classe mais uniquement par les nombres complexes. Des élèves plus curieux ont cependant demandé s'il était possible d'aborder les choses par des méthodes plus « classiques » de géométrie synthétique ou autre, et nous nous sommes attardés à résoudre ainsi certains passages des problèmes proposés, ce qui a été l'occasion de revoir des propriétés des transformations du plan étudiées durant les premières années du secondaire.

Par exemple, dans le problème 3.4, certains élèves ont été très étonnés de constater que prouver l'existence d'une rotation appliquant un segment sur un autre ne nécessitait nullement que l'on détermine son centre. La résolution de ce problème par la géométrie synthétique leur a prouvé la puissance de l'outil « nombres complexes ».

L'application 3.5 a, quant à elle, été proposée en interrogation. Les résultats furent assez médiocres et décevants car les élèves, quelque peu dépassés par le problème, ne savaient pas toujours par où l'entreprendre, et se focalisaient davantage sur les calculs en oubliant l'aspect géométrique de la question. Certains, par exemple, ont confondu carré et losange, ou carré et rectangle. À ce stade, poser cette question sous cette forme lors d'un contrôle fut une erreur, les difficultés calculatoires étant encore trop présentes.

Après une correction approfondie faite en classe, un exercice similaire a été proposé en contrôle. Les résultats furent nettement meilleurs et certains élèves, généralement faibles, sont presque arrivés au bout de la démonstration.

Commentaires

Certains calculs liés à la résolution de ces exercices peuvent paraître longs et fastidieux, mais le contenu géométrique des problèmes leur donne une signification. Il nous paraît de loin préférable d'exercer les élèves au calcul avec les nombres complexes dans un tel contexte, plutôt que de leur soumettre des listes d'exercices vides de sens.

Par ailleurs, ces différentes applications montrent bien la puissance du calcul avec les nombres complexes comme outil de démonstration. À partir des expressions des similitudes du plan en termes d'affixes, on dispose d'une méthode générale et systématique pour démontrer toute une classe de propriétés de figures.

11

Dessins en PostScript et géométrie analytique

1 Utiliser les coordonnées pour dessiner

De quoi s'agit-il ?

Réaliser quelques dessins en PostScript.

Enjeux

Mettre en œuvre de manière plaisante les premiers rudiments de géométrie analytique en découvrant le PostScript.

La géométrie analytique prend place dans la construction de l'idée de linéarité d'une part par la correspondance linéaire, sur chaque axe, entre distances (munies d'un signe) à l'origine et abscisses, et d'autre part par la représentation des droites et plans à l'aide d'équations linéaires et affines, voir sections 5 et 6 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Un éditeur de texte et un interpréteur PostScript[1].

Prérequis. – Repérages : pour repérer un point sur une feuille de papier, il faut par exemple deux directions (deux axes), une origine, une orientation et une unité de mesure sur chacune des deux directions, ainsi qu'une convention quant à l'ordre des informations qui sont données.

Comment s'y prendre ?

Le PostScript permet de représenter des points, des lignes droites ou des courbes à partir des coordonnées de points. Il possède deux axes (invisibles). Au départ, le premier est horizontal et coïncide avec le bord inférieur de la feuille de papier. L'autre est vertical et coïncide avec le bord gauche de la feuille. L'origine des deux axes est donc le coin inférieur gauche

[1] On écrit les commandes du PostScript avec n'importe quel éditeur de texte, par exemple `Alpha` sur Macintosh ou `NotePad.exe` (le Bloc-notes) sous Windows.

Les commandes sont ensuite interprétées à l'aide d'un interpréteur PostScript. Sur Macintosh on utilisera `MacGS` ou `GSview` que l'on trouve sur le site internet :

`<http://www.cs.wisc.edu/~ghost/macos/index.htm>`.

Pour Windows, on trouve `GSview` sur le site internet :

`<http://www.cs.wisc.edu/~ghost/gsview/index.html>`.

Ces programmes sont gratuits, sauf l'éditeur `Alpha` qui est un shareware. Il est à noter que les imprimantes PostScript possèdent un interpréteur PostScript incorporé.

de la feuille. Le sens des axes est habituel : sur l'axe horizontal, le sens positif va de gauche à droite et sur l'axe vertical, il va de bas en haut. Ce qui est moins habituel, c'est l'unité de longueur sur chacun des axes : elle vaut exactement $\frac{1}{72}$ pouce. C'est une très petite unité qui permet de dessiner sans devoir utiliser trop de chiffres après la virgule, ou plutôt après le point, car en PostScript la virgule est remplacée par un point. Dans cette unité, la largeur d'une feuille A4 vaut 612 et la hauteur 792. Autrement dit, le coin supérieur droit de la feuille possède par défaut (612,792) comme coordonnées[2].

Les premières commandes. – Pour le PostScript, un dessin est un ensemble de lignes droites et de courbes qui sont soit tracées, soit remplies (avec une certaine couleur). L'ensemble des lignes droites et courbes est appelé *chemin*, en anglais *path*. La première chose à faire pour commencer un dessin ou une partie de dessin est de dire que l'on commence un nouveau chemin en écrivant : `newpath`.

L'idée de départ est assez simple : un morceau de ligne droite (un segment) va d'un point à un autre. Sur cette base, une ligne brisée, en un ou plusieurs morceaux, se définit grâce aux instructions suivantes :

– `moveto` : on (dé)place le *point courant* à l'endroit spécifié ; cela correspond au fait d'aller placer son crayon en un point de la feuille (sans tracer quoi que ce soit).

– `lineto` : on déplace le point courant à l'endroit spécifié tout en définissant une partie de chemin qui devra être tracé ; c'est un segment qui va du point où l'on se trouvait au point indiqué.

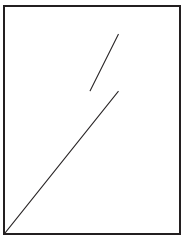
– `rmoveto` : c'est la même chose que `moveto`, mais ce sont les coordonnées du déplacement qui sont indiquées et non celles du point d'arrivée ; c'est un déplacement relatif.

– `rlineto` : c'est la même chose que `lineto`, mais ce sont les coordonnées du déplacement qui sont indiquées et non celles du point d'arrivée.

Lorsque le chemin a été défini au moyen de ces commandes, il n'apparaît pas encore sur le dessin. Il faut encore le tracer, ce qui se fait au moyen de la commande `stroke`.

Voici un premier dessin.

```
newpath
0 0 moveto
400 500 lineto
0 200 rmoveto
-100 -200 rlineto
stroke
```



On peut observer que

– les coordonnées des points sont indiquées *avant* l'instruction qui leur correspond ; par exemple

[2] Il y a une différence entre les dimensions réelles de la feuille et la partie qui peut en être imprimée. Il y a en effet une bordure inaccessible à l'imprimante, dont les dimensions varient d'une imprimante à l'autre.

```
0 0 moveto
```

signifie : déplacer le point courant en $(0, 0)$;

– on ne peut tracer de segment ou se déplacer de manière relative que si l'on se trouve déjà quelque part, c'est-à-dire s'il existe un point courant ; après un `newpath`, il n'y a pas de point courant et il faut donc commencer le chemin par un `moveto` avant d'utiliser `lineto`, `rlineto` ou `rmoveto`.

Modifier le système d'axes. – On peut modifier le système d'axes de plusieurs manières différentes. En voici deux qui sont utiles pour les dessins de cette activité.

1. Pour déplacer les axes, sans les changer de direction, de sens, ni d'unité, on utilise l'instruction `translate` qui en change uniquement l'origine. Par exemple `100 100 translate` déplace l'origine au point $(100, 100)$.
2. Pour faire tourner le système d'axes, on utilise l'instruction `rotate`. Par exemple, `45 rotate` fait tourner le système d'axes de 45 degrés, autour de l'origine, dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

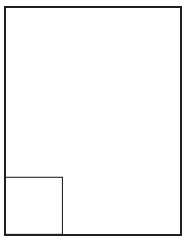
Les commandes `translate` et `rotate` sont toujours relatives au système d'axes en vigueur au moment où on les écrit.

Un carré

Dessiner un carré dont le côté mesure 200 unités et dont le coin inférieur gauche coïncide avec le coin inférieur gauche de la feuille.

On travaille avec des coordonnées relatives pour devoir modifier les instructions le moins possible si on en change le point de départ.

```
newpath
0 0 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
```



Le carré se trouve en bas et à gauche de la feuille. On n'en voit bien que deux côtés, ce qui peut être gênant.

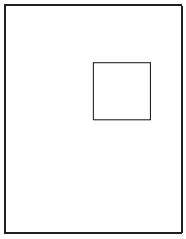
Dessiner le même carré mais avec son coin inférieur gauche au centre de la feuille.

Voici deux possibilités pour déplacer le carré vers le centre de la feuille :

1. Placer le coin inférieur gauche au centre.
2. Déplacer les axes.

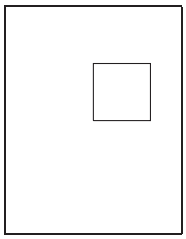
Placer le coin inférieur gauche du carré au centre de la feuille, c'est-à-dire en $(306, 396)$, se fait en remplaçant `0 0 moveto` au début par `306 396 moveto`.

```
newpath
306 396 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
```



En déplaçant l'origine du système d'axes au moyen de `translate`, le coin inférieur gauche du carré reste $(0, 0)$; ce dernier point n'est toutefois plus le coin inférieur gauche de la feuille mais le point dont les coordonnées ont été transmises à l'opérateur `translate`.

```
306 396 translate
newpath
0 0 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
```



Faire tourner le carré

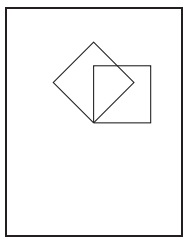
Dessiner le même carré « sur une pointe ».

Il s'agit par exemple de faire tourner le carré de 45° (sens trigonométrique) autour du sommet inférieur gauche. Une manière de le faire est de calculer les coordonnées de chacun des sommets du carré dans cette position. Une autre manière, beaucoup plus facile, consiste à faire tourner les axes de 45° au moyen de l'instruction `rotate` et à dessiner le carré dans ce nouveau système d'axes : si on garde les mêmes coordonnées, le carré suit le mouvement.

On voit ici l'intérêt d'avoir déplacé l'origine du système d'axes au milieu de la feuille : faire tourner le système d'axes se fait autour de son origine. Si l'on gardait l'origine située au coin inférieur gauche de la feuille et que l'on faisait tourner le système d'axes, le carré, en suivant ce mouvement, sortirait de la feuille.

```
306 396 translate
newpath
0 0 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
```

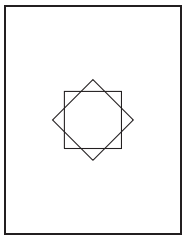
```
45 rotate
newpath
0 0 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
```



Dessiner les mêmes carrés de telle manière que le deuxième soit obtenu par une rotation de 45° autour du centre du premier et non pas autour de son sommet inférieur gauche.

Il suffit que le centre du carré coïncide avec l'origine du système d'axes. Pour cela on place son sommet inférieur gauche en $(-100, -100)$.

```
306 396 translate
newpath
-100 -100 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
45 rotate
newpath
-100 -100 moveto
200 0 rlineto
0 200 rlineto
-200 0 rlineto
0 -200 rlineto
stroke
```

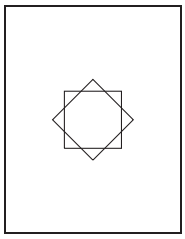


Les instructions pour dessiner les deux carrés sont identiques ! On peut « mémoriser » ces instructions pour ne devoir les écrire qu'une seule fois. Ceci sera utile lorsque l'on voudra dessiner plus de deux fois un tel carré... Pour mémoriser une suite d'instructions, il faut choisir un nom, par exemple `carre`. Ce nom ne peut pas comporter de caractère accentué. Pour la définition on fait précéder ce nom du caractère `/`. En écrivant

```
/carre { ... } def
```

on mémorise la suite d'instructions entre les accolades dans `carre`. Lorsque l'on écrira ensuite `carre`, cela aura exactement le même effet que d'écrire directement cette suite d'instructions.

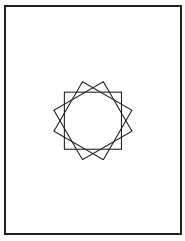
```
/carre {
  newpath
  -100 -100 moveto
  200 0 rlineto
  0 200 rlineto
  -200 0 rlineto
  0 -200 rlineto
  stroke
} def
306 396 translate
carre
45 rotate
carre
```



Dessiner trois ou quatre carrés identiques ayant même centre et placés régulièrement autour de ce centre.

La solution s'inspire directement de ce qui précède. La voici par exemple pour trois carrés :

```
/carre {
  newpath
  -100 -100 moveto
  200 0 rlineto
  0 200 rlineto
  -200 0 rlineto
  0 -200 rlineto
  stroke
} def
306 396 translate
carre
30 rotate
carre
30 rotate
carre
```



2 Parallélisme

De quoi s'agit-il ?

Traiter, en PostScript, de questions concernant les parallélogrammes et les cubes.

Enjeux

Utiliser des vecteurs pour dessiner et prouver.

Sur la place des vecteurs dans le développement de l'idée de linéarité, voir la section 7 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Les outils informatiques pour travailler en PostScript (voir page 351).

Prérequis. – Une première initiation au PostScript, par exemple la section 1 de ce chapitre. Une description plus complète de quelques principes et des opérateurs de base se trouvent dans l'annexe 4 à la page 501. Le lecteur est invité à s'y référer lorsque les aspects du PostScript utilisés ici nécessitent un peu plus d'explications.

Comment s'y prendre ?

En PostScript, on met toujours les arguments avant le nom de la fonction. Pour la suite des activités, il est utile de préciser cela : le PostScript, comme d'autres langages informatiques, travaille avec ce qu'on appelle une *pile*. Bornons-nous à dire ici qu'une pile est une mémoire dans laquelle s'entassent les uns au-dessus des autres (ou les uns à côté des autres) les éléments que l'on y met. Chaque opérateur y prend, en commençant par le dessus, les arguments dont il a besoin. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la section 1.1 de l'annexe 4 à la page 501.

Pour faciliter le travail d'écriture des dessins, nous proposons d'utiliser des opérateurs qui ne sont pas standard en PostScript, mais qui permettent de travailler directement avec des vecteurs à deux ou à trois dimensions. Ces opérateurs sont décrits dans l'annexe 5 à la page 509. Pour les avoir à sa disposition, il suffit de les copier avant les instructions PostScript du dessin que l'on souhaite réaliser[3].

Les vecteurs s'introduisent entre crochets, avec un (ou plusieurs) espace(s) pour séparer les composantes. Lorsque nous disons « vecteurs », il s'agit de n-uples de réels qui représentent, selon le contexte et l'opérateur PostScript utilisé, tantôt une position, tantôt un déplacement.

Les nouveaux opérateurs définis ont leur nom qui commence par une majuscule. Par exemple `Add` permet d'additionner deux vecteurs. Comme toujours en PostScript, les vecteurs que l'on additionne se placent avant l'opérateur.

Les opérateurs disponibles sont :

`Add` et `Sub` : addition et soustraction de deux vecteurs.

`Mul` : multiplication d'un vecteur par un scalaire. On écrit d'abord le vecteur et ensuite le scalaire.

[3] Ils peuvent être téléchargés à partir du site internet du CREM,
`http://www.profor.be/crem/index.htm`

`Div` : division d'un vecteur par un scalaire. On écrit d'abord le vecteur et ensuite le scalaire.

`Neg` : multiplication du vecteur par -1.

`Moveto`, `RMoveto`, `Lineto` et `Rlineto` : définition de chemins à partir de vecteurs à deux ou trois dimensions. Lorsque les vecteurs ont trois dimensions, il y a implicitement une perspective parallèle qui projette les vecteurs sur le plan du dessin. Il s'agit d'une perspective dont la fuyante est à 30° et dont le rapport vaut un demi. On peut modifier les paramètres de la perspective cavalière.

`Point` : dessine un point (un petit disque noir) à l'endroit mentionné. On peut modifier le rayon du disque en introduisant, par exemple

```
/RayonPoint 3 def
```

Par défaut, ce rayon vaut 5.

2.1 Le quadrilatère passant par les milieux

Comment s'y prendre ?

Soit les points

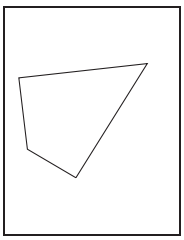
$$A = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 50 \\ 550 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 80 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Dessiner le quadrilatère $ABCD$ et le quadrilatère joignant les milieux des côtés de $ABCD$.
Que peut-on dire de ce dernier quadrilatère ?

Cette activité demande un aller-retour entre l'ordinateur et la feuille de papier : certaines parties du travail demandent en effet de mettre au point, ou de revoir, les outils mathématiques nécessaires à leur réalisation.

Lorsque l'on a recopié les opérateurs permettant de travailler directement avec des vecteurs, on « écrit » le dessin de $ABCD$ en PostScript par exemple de la manière suivante :

```
[...]
/a [250 200] def
/b [500 600] def
/c [50 550] def
/d [80 300] def

newpath
a Moveto b Lineto c Lineto
d Lineto a Lineto stroke
```



Il faut ensuite déterminer le milieu de chaque côté. Prenons le milieu de $[AB]$. Les coordonnées de A correspondent aux composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$. Rappelons qu'en PostScript, l'origine O se trouve au départ dans le coin inférieur gauche de la feuille de dessin. Les coordonnées du point milieu M sont les composantes du vecteurs $\overrightarrow{OM}$ que l'on peut trouver grâce à $\overrightarrow{OA}$ et à $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Si l'on décompose $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}),$$

et l'on trouve finalement :

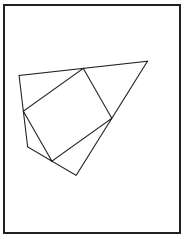
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Pour trouver les coordonnées de M, il suffit donc d'additionner celles de A et de B et de diviser le résultat par 2. En PostScript, cela donne `a b Add 2 Div`. Regardons ce calcul en détail[4] :

États successifs de la pile	
`a`	`[250 200]`
`b`	`[250 200]` `[500 600]`
`Add`	`[750 800]`
`2`	`[750 800]` `2`
`Div`	`[375 400]`

On peut donc ajouter maintenant le quadrilatère reliant les milieux des côtés :

```
[...]

                          c d Add 2 Div Lineto
newpath                   d a Add 2 Div Lineto
a b Add 2 Div Moveto      a b Add 2 Div Lineto
b c Add 2 Div Lineto      stroke
```



Le quadrilatère ressemble à s'y méprendre à un parallélogramme. On vérifie que c'en est un grâce aux vecteurs. Appelons M_1 M_2, M_3 et M_4 les quatre milieux (figure 1). Vérifier que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme revient à vérifier, par exemple, que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$.

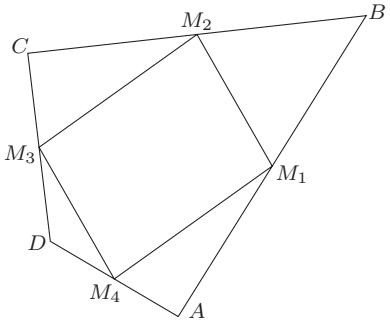


Fig. 1

[4] Dans beaucoup d'ouvrages, la pile est dessinée verticalement. Dans les représentations qui suivent, les piles sont dessinées horizontalement pour gagner de la place. Cela n'a bien sûr aucune importance. Ce qu'il faut garder en tête, c'est que *les éléments de la pile « sortent » du côté où ils « entrent »*.

Calculons les coordonnées de ces quatre milieux :

$$\overrightarrow{OM_1} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} 375 \\ 400 \end{pmatrix};$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} 275 \\ 575 \end{pmatrix};$$
$$\overrightarrow{OM_3} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \begin{pmatrix} 65 \\ 425 \end{pmatrix};$$
$$\overrightarrow{OM_4} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 165 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

La conclusion vient du calcul suivant :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 275 \\ 575 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 375 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 175 \end{pmatrix};$$
$$\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \begin{pmatrix} 65 \\ 425 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 165 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 175 \end{pmatrix}.$$

Obtient-on un parallélogramme quel que soit le quadrilatère $ABCD$ de départ, ou bien les coordonnées ont-elles été choisies de manière à donner ce résultat ?

Les élèves peuvent essayer avec d'autres coordonnées et constater que la propriété se répète. On peut le prouver en se ramenant, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, aux coordonnées, mais le calcul algébrique qui en résulte est assez lourd. Faire le calcul directement avec les vecteurs est beaucoup plus simple. On veut donc vérifier que

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}.$$

Calculons ces deux vecteurs en fonction de A, B, C et D :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2};$$
$$\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} - \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

2.2 Les parallélogrammes par trois points

Comment s'y prendre ?

Soit les points

$$A = \begin{pmatrix} 150 \\ 180 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 250 \\ 110 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 180 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

Dessiner tous les parallélogrammes qui ont ces points pour sommets.

Soit un point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme. Si les sommets sont dans cet ordre-là (figure 2 à la page suivante), alors on doit avoir

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

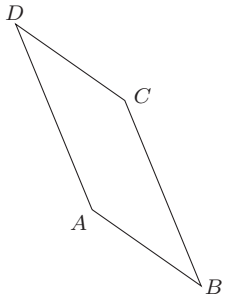


Fig. 2

On peut trouver les coordonnées de D à partir de l'égalité

$$\overrightarrow{OD} \;=\; \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}.$$

En traduisant cela en coordonnées, on obtient $D = C + A - B$.

Selon l'ordre dans lequel on effectue les opérations, on obtient plusieurs manières d'écrire cela en PostScript. Par exemple, $D = C + (A - B)$ s'écrit

```
/d c a b Sub Add def
```

tandis que $D = (C + A) - B$ s'écrit

```
/d c a Add b Sub def
```

Regardons ces calculs en détail :

`/d c a b Sub Add def`

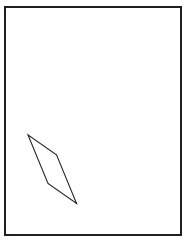
États successifs de la pile				
`/d`	`d`			
`c`	`d`	`[180 280]`		
`a`	`d`	`[180 280]`	`[150 180]`	
`b`	`d`	`[180 280]`	`[150 180]`	`[250 110]`
`Sub`	`d`	`[180 280]`	`[-100 70]`	
`Add`	`d`	`[80 350]`		
`def`				

`/d c a Add b Sub def`

États successifs de la pile				
`/d`	`d`			
`c`	`d`	`[180 280]`		
`a`	`d`	`[180 280]`	`[150 180]`	
`Add`	`d`	`[330 460]`		
`b`	`d`	`[330 460]`	`[250 110]`	
`Sub`	`d`	`[80 350]`		
`def`				

On peut alors écrire la séquence d'instructions qui dessine le parallélogramme $ABCD$.

```
[...]

/a [150 180] def            newpath
/b [250  110] def           a Moveto b Lineto c Lineto
/c [180 280] def            d Lineto a Lineto
/d c a b Sub Add def        stroke
```

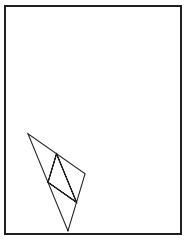


Pour trouver les autres parallélogrammes, il suffit de considérer les autres ordres possibles pour les sommets. Il n'y a que deux autres possibilités.

1. $ACBD$: dans ce cas, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA}$.
2. $ABDC$: dans ce cas, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$.

On peut dessiner les trois parallélogrammes sur la même feuille.

```
[...]
/d b a c Sub Add def        /d c b a Sub Add def
newpath                     newpath
a  Moveto c Lineto          a  Moveto b Lineto
b Lineto d Lineto           d Lineto c Lineto
a Lineto                    a  Lineto
stroke                      stroke
```



2.3 Cubes

Soit un cube dont la base inférieure est $ABCD$ et la base supérieure $A'B'C'D'$ (A' se trouvant au dessus de A, ...) avec

$$A = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Dessiner le cube de telle manière que

(a) toutes les arêtes soient visibles (le cube est transparent) ;

(b) le cube soit opaque.

Un schéma peut aider à visualiser la situation (figure 3).

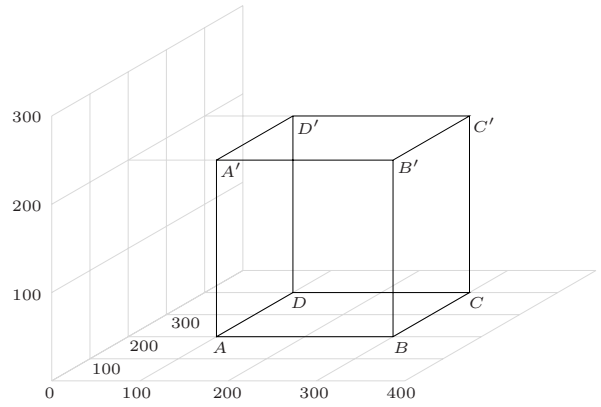


Fig. 3

Pour trouver les coordonnées du point C, on utilise les égalités vectorielles

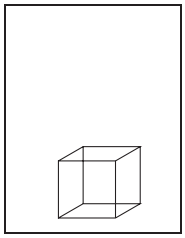
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\,; \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Pour trouver les coordonnées des points B', C' et D', on utilise les égalités vectorielles

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}\,; \\ \overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AA'}\,; \\ \overrightarrow{OC'} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA'}\,; \\ \overrightarrow{OD'} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AA'}. \end{aligned}$$

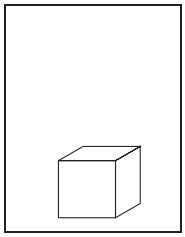
Pour dessiner le cube transparent, on écrit alors le programme PostScript, par exemple, comme ci-après.

```
[...]
/a [100 200 0] def          newpath
/b [300 200 0] def          a Moveto b Lineto c Lineto
/d [100 400 0] def          d Lineto a Lineto
/ap [100 200 200] def       ap Lineto bp Lineto cp Lineto
                            dp Lineto ap Lineto
/c b d a Sub Add def        b Moveto bp Lineto
/bp b ap a Sub Add def      c Moveto cp Lineto
/cp c ap a Sub Add def      d Moveto dp Lineto
/dp d ap a Sub Add def      stroke
```



Pour le cube opaque, il faut uniquement modifier la deuxième partie du programme, ce qui donne

```
[...]
        newpath
        a Moveto b Lineto bp Lineto
        ap Lineto a Lineto
        b Moveto c Lineto cp Lineto
        bp Lineto b Lineto
        ap Moveto bp Lineto cp Lineto
        dp Lineto ap Lineto
        stroke
```



Prolongement possible

Dessiner un octaèdre régulier.

Indication : chaque sommet d'un octaèdre régulier est le centre d'une face d'un cube.

2.4 Sections de cubes

Comment s'y prendre ?

Dessiner en PostScript la section du cube $ABCDA'B'C'D'$ ci-dessus par le plan PQR où

- P se trouve au tiers de l'arête $[AB]$, du côté de A ;
- Q est au milieu de l'arête $[BC]$;
- R est au milieu de l'arête $[CC']$.

Pour ce faire, déterminer des procédures générales pour trouver l'intersection d'une droite avec les différentes faces du cube.

Dans un premier temps, dessinons les points P, Q et R. Les milieux de segments n'ont plus de secret pour nous. Pour le tiers, on a

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Ceci peut s'écrire immédiatement en PostScript

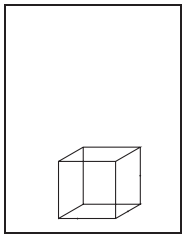
```
/p a b a Sub 3 Div Add def
```

En détail,

États successifs de la pile	
/p	p
a	p | [100 200 0]
b	p | [100 200 0] | [300 200 0]
a	p | [100 200 0] | [300 200 0] | [100 200 0]
Sub	p | [100 200 0] | [200 0 0]
3	p | [100 200 0] | [200 0 0] | 3
Div	p | [100 200 0] | [$\frac{200}{3}$ 0 0]
Add	p | [$\frac{500}{3}$ 200 0]
def	

Pour placer un point (un petit disque noir) aux endroits requis, on utilise l'opérateur (non standard) `Point`. (On peut modifier la grosseur du point en redéfinissant le paramètre `RayonPoint`.)

```
[...]
/p a b a Sub 3 Div Add def
/q b c Add 2 Div def
/r c cp Add 2 Div def

p Point q Point r Point
[...]
```



Pour déterminer les autres sommets de la section, il est nécessaire de trouver des points intermédiaires. Ce sont les intersections de droites contenues dans le plan de section avec une face du cube (ou plus précisément un plan contenant une face). Par exemple, on peut rechercher le point S, intersection de la droite PQ avec le plan contenant la face $DCC'D'$ (figure 4).

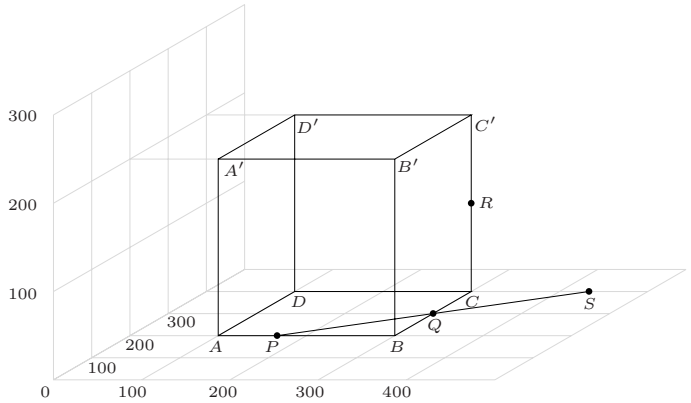


Fig. 4

Le point S se trouve sur la droite PQ. On peut donc écrire

$$\overrightarrow{OS} \quad = \quad \overrightarrow{OP} + \lambda_S \overrightarrow{PQ},$$

où λ_S est un scalaire. Comme le point S se trouve dans la face verticale à l'arrière du cube, on sait que sa deuxième coordonnée y_S vaut 400. Par conséquent,

$$400 \quad = \quad y_P + \lambda_S(y_Q - y_P),$$

ou encore

$$\lambda_S \quad = \quad \frac{400-y_P}{y_Q-y_P} \quad = \quad \frac{400-200}{300-200} \quad = \quad 2.$$

Remarquons qu'une simple considération sur les triangles isométriques QBP et QCS amène également ce résultat.

En PostScript, les coordonnées du point S se calculent alors de cette manière qui suit

```
/s p q p Sub 2 Mul Add def
```

Pour trouver les coordonnées du point T, intersection de la droite SR avec la face horizontale supérieure du cube (figure 5), on recommence le même genre de calcul. On sait que

$$\overrightarrow{OT} \quad = \quad \overrightarrow{OS} + \lambda_T \overrightarrow{SR},$$

et que la troisième coordonnée z_T de T vaut 200, ce qui entraîne que

$$200 \quad = \quad z_S + \lambda_T(z_R - z_S),$$

ou encore

$$\lambda_T \quad = \quad \frac{200-z_S}{z_R-z_S} \quad = \quad \frac{200-0}{100-0} \quad = \quad 2.$$

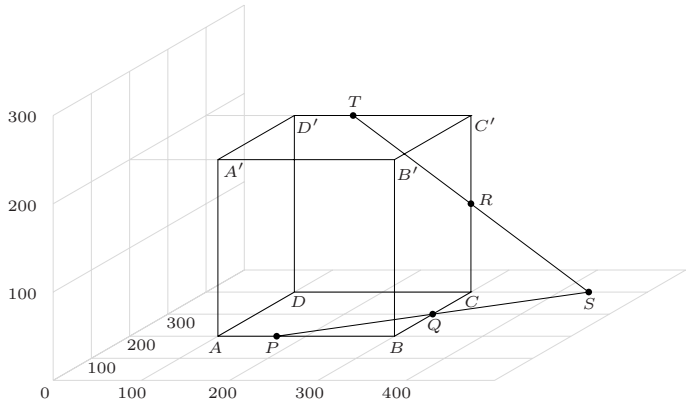


Fig. 5

En PostScript, les coordonnées du point T se calculent alors comme suit

```
/t s r s Sub 2 Mul Add def.
```

Il faut rechercher les coordonnées du point U, intersection de la droite passant par T et parallèle à PS (elle se trouve dans la face supérieure du cube) avec la face gauche du cube (figure 6). On sait qu'il existe un scalaire λ_U tel que

$$\overrightarrow{OU} \quad = \quad \overrightarrow{OT} + \lambda_U \overrightarrow{PQ}.$$

Comme U de trouve dans la face verticale à gauche du cube, on sait aussi que $x_U = 100$. Il en découle que

$$100 \quad = \quad x_T + \lambda_U(x_Q - x_P),$$

ou encore

$$\lambda_U \quad = \quad \frac{100 - x_T}{x_Q - x_P}.$$

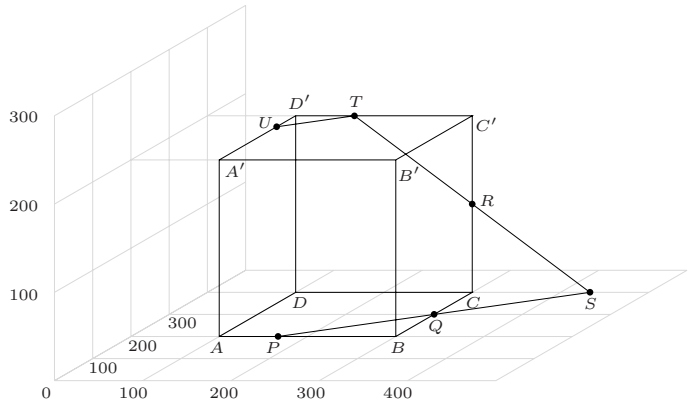


Fig. 6

Les coordonnées de T (et donc x_T) ont été calculées en PostScript. Nous pouvons récupérer x_T au moyen de l'opérateur `get`. Pour avoir la première coordonnée de `t`, il faut écrire

```
t 0 get
```

car, en PostScript, les indices sont numérotés à partir de zéro. De même, nous pouvons utiliser `get` pour obtenir $x_Q - x_P$. Nous pouvons donc poursuivre le programme par

```
/lu 100 t 0 get sub q p Sub 0 get div def
/u t q p Sub lu Mul Add def
```

Regardons le premier de ces calculs en détail[5],

	États successifs de la pile
`/lu`	`lu`
`100`	`lu` | `100`
`t`	`lu` | `100` | $[x_T \ y_T \ z_T]$
`0 get`	`lu` | `100` | x_T
`sub`	`lu` | `100` $-$ x_T
`q p Sub`	`lu` | `100` $-$ x_T | $[x_Q - x_P \ y_Q - y_P \ z_Q - z_P]$
`0 get`	`lu` | `100` $-$ x_T | $x_Q - x_P$
`div`	`lu` | $\frac{100 - x_T}{x_Q - x_P}$
`def`	

[5] Dans la description de la pile, les noms de variables en *italique* indiquent une valeur numérique dans la pile tandis que les noms en `caractères droits` indiquent des noms PostScript.

Il nous reste à trouver l'intersection W de l'arête AA' avec le plan de section. C'est le point d'intersection de la droite passant par U et parallèle à QR avec la face avant du cube (figure 7). Nous avons donc

$$\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OU} + \lambda_W \overrightarrow{QR},$$

et

$$200 = y_U + \lambda_W (y_R - y_Q).$$

Par conséquent,

$$\lambda_W = \frac{200 - y_U}{100}.$$

Nous pouvons donc écrire en PostScript

```
/lw 200 u 1 get sub 100 div def
/w u r q Sub lw Mul Add def
```

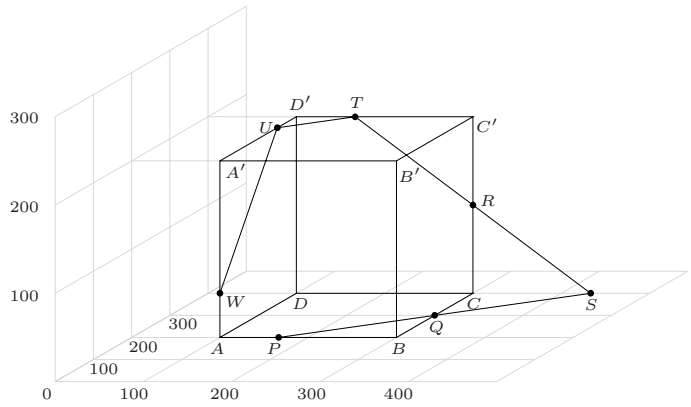


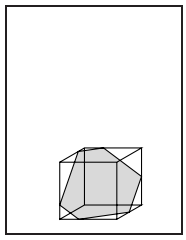
Fig. 7

Nous avons tous les points permettant de dessiner la section. Il reste maintenant à les relier, et éventuellement à dessiner la section en grisé. Ceci se fait au moyen de l'opérateur `setgray` qui prend un argument dans la pile : le niveau de gris. La couleur blanche se définit par `1 setgray` et le noir par `0 setgray`. Les niveaux de gris intermédiaires[6] se définissent en donnant une valeur entre `0` et `1`. Si on utilise ensuite l'opérateur `stroke`, les traits seront dessinés dans le gris choisi. Pour dessiner une surface en gris, il faut utiliser l'opérateur `fill` qui remplit l'intérieur du chemin courant dans la couleur choisie. Comme l'opérateur `fill` rend le dessin opaque, l'ordre dans lequel on place les instructions de dessin a son importance.

[6] Le niveau de gris est en fait le rapport entre le nombre de pixels blancs et le nombre total de pixels dans une surface donnée.

```
0.85 setgray
newpath
p Moveto q Lineto
r Lineto t Lineto
u Lineto w Lineto
p Lineto fill
```

```
0 setgray
newpath
p Moveto q Lineto
r Lineto  t Lineto
u Lineto w Lineto
p Lineto stroke

[ dessin du cube ]
```



Prolongement possible

Les procédures mises en œuvre pour trouver les coordonnées de S, T, U et W sont semblables. La seule vraie différence se trouve dans la composante utilisée pour déterminer la valeur du paramètre (λ_S, λ_T, λ_U ou λ_W). Il s'agit en effet dans tous les cas de trouver l'intersection d'une droite avec un plan dont la principale caractéristique (du point de vue algébrique) est précisément que tous ses points ont une de leurs coordonnées constante.

> Écrire une procédure automatique permettant de déterminer la valeur de λ en fonction des données suivantes :
> – deux points de la droite ;
> – l'indice de la composante constante des points du plan ;
> – la valeur de cette constante.

Un telle procédure demande donc quatre arguments (à prendre dans la pile) :

1. Le premier point de la droite.
2. Le deuxième point de la droite.
3. L'indice de la composante constante des points du plan (1 pour x, 2 pour y et 3 pour z).
4. La valeur de cette constante.

Pour trouver la valeur de λ_S avec une telle procédure, appelée par exemple `lambda` et qui est détaillée ci-après, on aura à introduire

```
p q 2 400 lambda
```

et pour trouver λ_T

```
s r 3 200 lambda
```

Construisons la procédure en suivant pas à pas ce qu'elle doit faire dans le premier cas. Au moment où l'on écrit `lambda`, il y a donc dans la pile

$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2	400

Pour pouvoir utiliser facilement les données qui se trouvent dans la pile, nous les mettons dans des variables ayant un nouveau nom (leur nom d'origine ne sert à rien car d'une fois à l'autre il sera différent) :

```
/@valeur exch def
```

mettra `400` dans la variable `@valeur`.

Une remarque technique s'impose ici. Pourquoi utiliser le caractère « `@` » ? Il peut être considéré comme une lettre au même titre que les autres caractères de l'alphabet. Il convient relativement bien pour « protéger » les noms de variables. Supposons que nous utilisons le nom `valeur`. Il y a un risque qu'un utilisateur de la macro fasse appel à la macro `lambda` sans savoir (ou en ayant oublié) qu'une variable avec ce nom y est définie. Il n'est donc pas impossible que l'utilisateur définisse une variable avec ce même nom. Dans un tel cas, la valeur de la variable `valeur` sera « écrasée » par celle que lui attribue la macro `lambda`. Celui qui programme la macro doit donc « protéger » les noms. Ceci est une problématique générale en informatique. Elle donne lieu aux notions de variables *locales* et *globales*. Une manière de réaliser une bonne protection à peu de frais est de réserver un caractère comme « `@` » pour ne l'utiliser que dans des noms intermédiaires[7].

Regardons la définition de `@valeur` en détail,

États successifs de la pile					
	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2	400	
`/@valeur`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2	400	`@valeur`
`exch`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2	`@valeur`	400
`def`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2		

Nous récupérons ensuite l'indice de la composante utile. Nous avons vu qu'en PostScript les indices des composantes sont numérotés à partir de 0. Nous devons donc retirer 1 pour que l'utilisateur puisse introduire la valeur usuelle (numérotée à partir de 1)

```
1 sub /@indice exch def
```

mettra `1` dans la variable `@indice`. En détail :

États successifs de la pile					
	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2		
`1`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	2	1	
`sub`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	1		
`/@indice`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	1	`@indice`	
`exch`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$	`@indice`	1	
`def`	$[x_P\ y_P\ z_P]$	$[x_Q\ y_Q\ z_Q]$			

Les instructions

```
@indice get /@q exch def
```

mettront y_Q dans la variable `@q`. En détail,

[7] Même si le PostScript ne possède pas de variables locales liées à des opérateurs, il existe une notion de noms locaux : ceux de variables ou opérateurs associés à un dictionnaire. Ceci devient trop technique pour le travail suggéré ici, mais peut faire l'objet d'un travail au cours d'informatique.

États successifs de la pile	
	$[x_P\ y_P\ z_P]$ $[x_Q\ y_Q\ z_Q]$
`@indice`	$[x_P\ y_P\ z_P]$ $[x_Q\ y_Q\ z_Q]$ `1`
`get`	$[x_P\ y_P\ z_P]$ y_Q
`/@q`	$[x_P\ y_P\ z_P]$ y_Q `@q`
`exch`	$[x_P\ y_P\ z_P]$ `@q` y_Q
`def`	$[x_P\ y_P\ z_P]$

Les instructions

```
@indice get /@p exch def
```

mettront y_P dans la variable `@p`.

Il reste alors à effectuer le calcul

$$\frac{400 - y_P}{y_Q - y_P},$$

c'est-à-dire

```
@valeur @p sub @q @p sub div
```

Reprenant les instructions les unes à la suite des autres, nous avons

```
/@valeur exch def
1 sub /@indice exch def
@indice get /@q exch def
@indice get /@p exch def
@valeur @p sub @q @p sub div
```

Définir l'opérateur `lambda` revient à compléter ces instructions de la manière suivante.

```
/lambda{
/@valeur exch def
1 sub /@indice exch def
@indice get /@q exch def
@indice get /@p exch def
@valeur @p sub @q @p sub div
} def
```

On peut alors définir les point S et T comme ci-dessous.

```
[...]
/lambda{
  /@valeur exch def
  1 sub /@indice exch def
  @indice get /@q exch def
  @indice get /@p exch def
  @valeur @p sub @q @p sub div
} def
```

```
/ls p q 2 400 lambda def
/s p q p Sub ls Mul Add def
/lt s r 3 200 lambda def
/t s r s Sub lt Mul Add def
```

Pour déterminer U, il faut trouver un deuxième point de la droite qui passe par T et qui est parallèle à une direction donnée par un vecteur. Ceci est

très facile (figure 8) : on prend le point U' (`up`) défini par

$$\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{PQ}.$$

Lorsque U sera défini, pour déterminer W, on trouvera W' (`wp`) par

$$\overrightarrow{OW'} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{QR}.$$

```
/up t q p Sub Add def
/lu t up 1 100 lambda def
/u t up t Sub lu Mul Add def
```

```
/wp u r q Sub Add def
/lw u wp 2 200 lambda def
/w u wp u Sub lw Mul Add def
```

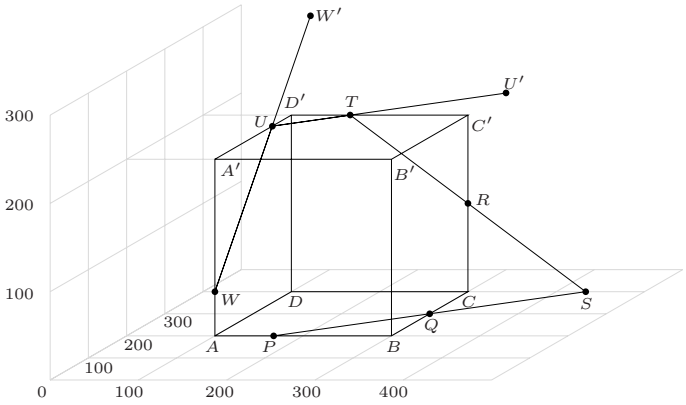


Fig. 8

3 Vu et caché

De quoi s'agit-il ?

Déterminer les parties vues et cachées d'une droite traversant un tétraèdre opaque.

Enjeux

Approfondir la question du vu et du caché.

Travailler la vision dans l'espace.

De quoi a-t-on besoin ?

Les outils informatiques pour travailler en PostScript (voir page 351).

Les opérateurs PostScript (non standard) pour travailler directement avec des vecteurs à deux ou trois composantes (voir page 356).

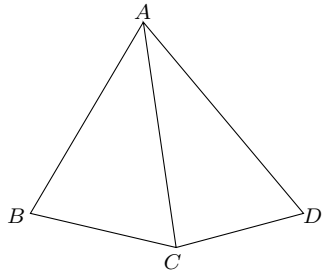
L'opérateur PostScript (non standard) `PPDP` qui permet de déterminer le point de percée d'une droite dans un plan, dont la définition est en annexe (page 511).

Prérequis. – Les sections 1 et 2 de ce chapitre, ainsi que la question concernant le point de percée d'une droite dans un plan, à la page 273 (chapitre 8, section 2.4).

Comment s'y prendre ?

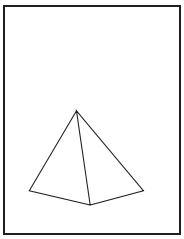
Soit $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dessiner en PostScript le tétraèdre *opaque* $ABCD$.



Il y a une manière très rapide de représenter le tétraèdre (seules les faces ABC et ACD sont visibles) :

```
0 100 translate

                          newpath
/A [200 120 300] def      A Moveto B Lineto
/B [0 200 0] def          C Lineto D Lineto
/C [300 0 0] def          A Lineto C Lineto
/D [400 200 0] def        stroke
```



Même si la représentation du tétraèdre le fait apparaître opaque, le dessin ci-dessus n'est pas opaque. Un dessin est opaque lorsqu'il cache les dessins qui se trouvent en dessous de lui. En PostScript, c'est l'ordre dans lequel sont écrites les instructions de dessin qui détermine ce qui se trouve au-dessus ou en dessous : ce qui est dessiné d'abord se trouve en dessous. Travailler avec des dessins opaques est utile entre autres lorsque l'on veut représenter des parties vues et cachées.

Pour rendre opaque le dessin du tétraèdre, on peut procéder comme suit. L'opérateur `fill` permet de remplir une surface (c'est-à-dire l'intérieur d'un chemin) avec une certaine couleur. On va donc « peindre » le tétraèdre en blanc avant d'en dessiner les arêtes. L'opérateur `setgray` permet de déterminer le *niveau de gris* d'un dessin. Il prend une valeur dans la pile : `1` pour blanc, `0` pour noir, et toutes les valeurs intermédiaires pour les nuances de gris. On remplace alors les cinq dernières lignes ci-dessus par

```
1 setgray newpath A Moveto B Lineto
C Lineto D Lineto A Lineto fill
0 setgray newpath A Moveto B Lineto C Lineto D Lineto
A Lineto C Lineto stroke
```

Ajouter au dessin du tétraèdre opaque $ABCD$ la droite PQ, en ne représentant que ses parties visibles. Quatre positions différentes sont proposées pour P et Q.

Premier cas. – Soit $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$. Pour dessiner la ligne PQ, on ajoute

```
/P [20 30 50] def
/Q [400 400 400] def

newpath P Moveto Q Lineto stroke
```

On obtient la figure 9. Ceci ne donne aucune indication sur la visibilité de cette droite. On a évidemment l'impression qu'elle se trouve devant le tétraèdre. Mais c'est uniquement parce qu'elle a été dessinée après le tétraèdre. Si on la dessine avant (ce qui se fait simplement en écrivant les dernières instructions avant celles qui dessinent le tétraèdre), on obtient la figure 10. On a alors l'impression que la droite se trouve derrière le tétraèdre. Qu'en est-il exactement ?

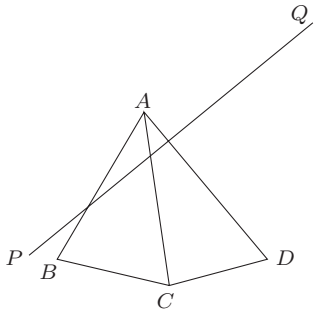


Fig. 9

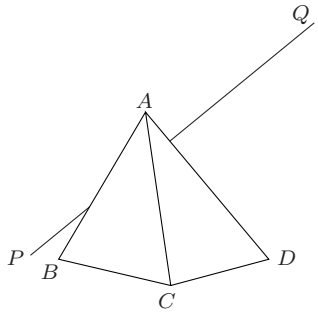


Fig. 10

Utilisons la macro `PPDP` pour déterminer la position du point de percée de la droite PQ dans le plan ABC :

```
A B C P Q PPDP Point.
```

On obtient la figure 11, ce qui montre que la droite PQ rencontre le tétraèdre à l'intérieur de cette face.

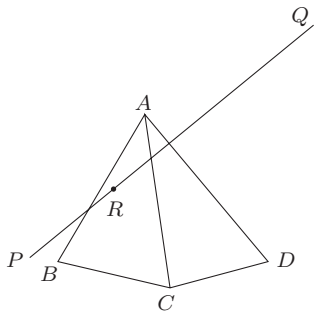


Fig. 11

Il reste deux possibilités pour dessiner la droite. Appelons R le point de percée de PQ dans ABC.

1. On dessine d'abord $[RQ]$, ensuite le tétraèdre et ensuite $[PR]$ (figure 12). On voit l'intérêt de travailler avec un dessin opaque. Si le dessin était

transparent, il aurait fallu déterminer les coordonnées de l'intersection de la droite représentant RQ avec le segment représentant l'arête AD du tétraèdre.

2. On dessine d'abord $[PR]$, ensuite le tétraèdre et ensuite $[RQ]$ (figure 13).

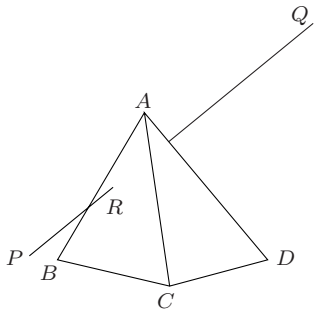


Fig. 12

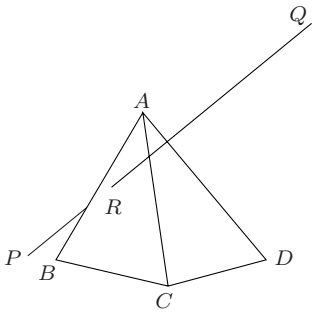


Fig. 13

Pour déterminer laquelle de ces deux représentations est correcte, on recherche l'intersection de la droite PQ avec le plan ACD :

```
A C D P Q PPDP Point.
```

La figure 14 montre que le point de percée se trouve cette fois en dehors du tétraèdre. Il ressort de la position du point S dans cette figure, que le deuxième point de rencontre de la droite et du tétraèdre se trouve dans la face « arrière ». Ceci n'est compatible qu'avec la figure 12, qui est par conséquent la bonne représentation.

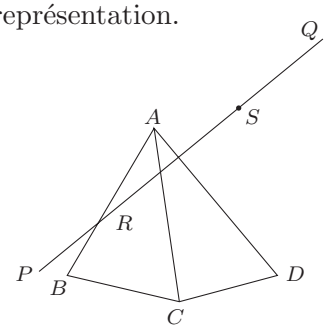


Fig. 14

Deuxième cas. – Soit $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 400 \\ 50 \\ 400 \end{pmatrix}$. On représente sur un seul dessin le tétraèdre, la droite PQ et les points de percée de PQ dans les faces ABC et ACD. La figure 15 semble montrer que la situation est la même que dans le cas précédent. Pourtant, lorsque l'on dessine la même chose, c'est-à-dire le segment $[RQ]$, le tétraèdre et ensuite le segment $[PR]$, on obtient la figure 16, qui n'est pas la même. En fait, les positions des représentations des points de percée ont pratiquement permuté. Pour s'en rendre compte, on dessine à nouveau les deux points de percée sur

deux dessins différents[8]. Dessinons le point de percée R de PQ dans ABC (figure 17), ce qui permet d'identifier les deux points de la figure 15. Les positions des points de percée indiquent que la droite PQ ne rencontre pas le tétraèdre et qu'elle se trouve devant lui. La figure 16 est donc la représentation correcte.

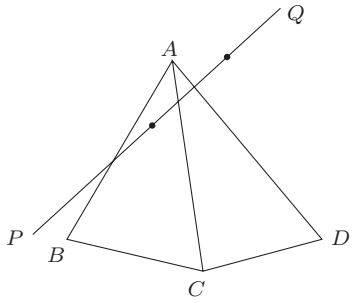


Fig. 15

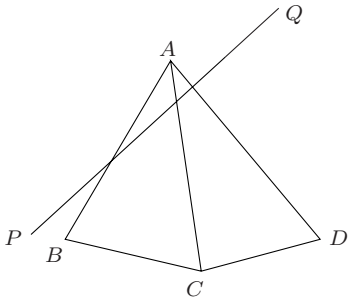


Fig. 16

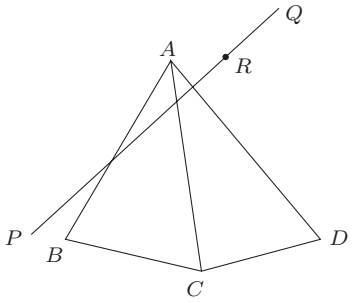


Fig. 17

Troisième cas. – Soit $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 400 \\ 180 \\ 400 \end{pmatrix}$. La figure 18 donne la représentation du point de percée R de PQ dans ABC. On complète cette représentation avec le deuxième point de percée (figure 19). On voit que la droite PQ rencontre les deux faces. La représentation des parties vues de la droite est donnée par la figure 20. Elle s'obtient en dessinant simplement les segments $[PR]$ et $[SQ]$.

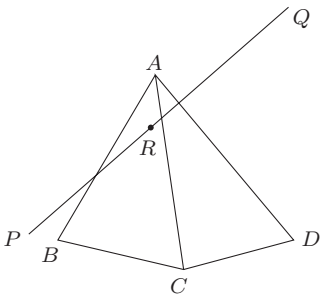


Fig. 18

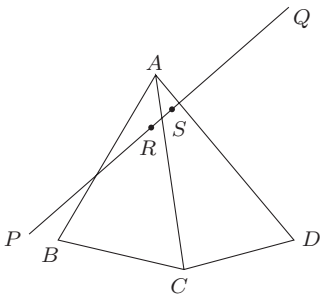


Fig. 19

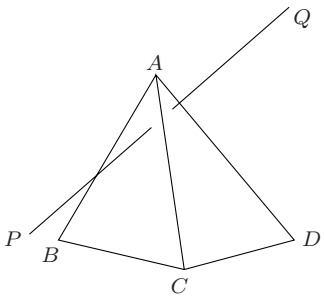


Fig. 20

Quatrième cas. – Soit $P = \begin{pmatrix} -50 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 400 \\ 50 \\ 400 \end{pmatrix}$. La figure 21 donne la représentation du premier point de percée R dans le plan de la face ABC. On complète cette représentation avec le deuxième point de percée (figure 22). On voit que la droite PQ rencontre la face ACD mais pas la face ABC. La représentation est donnée par la figure 23.

[8] Lorsque le dessin est fait en PostScript, les deux points ne sont pas distincts l'un de l'autre et il faut donc trouver un moyen de les distinguer. Au lieu de le faire en produisant deux dessins différents, on peut dessiner deux points dont les apparences sont différentes.

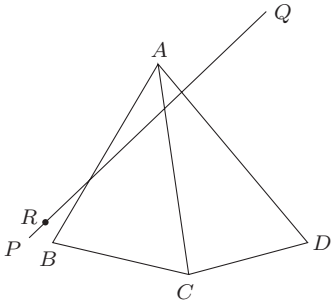


Fig. 21

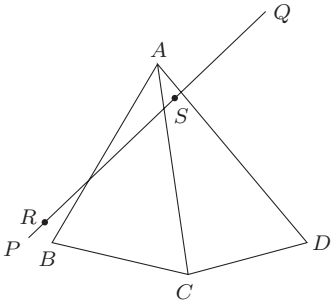


Fig. 22

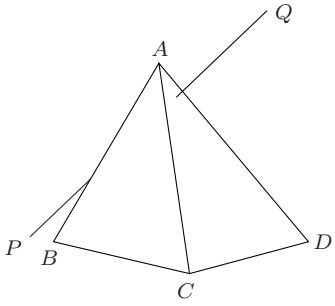


Fig. 23

Prolongement possible

Dans les situations précédentes, nous avons vu qu'il pouvait y avoir plusieurs possibilités pour dessiner les parties vues et cachées pour un même dessin. La position des points de percée de PQ dans les plans des faces visibles du tétraèdre permet de choisir celle qui convient. Deux questions assez différentes peuvent prolonger cette problématique.

Une même représentation pour plusieurs situations spatiales différentes. – Reprenons le dernier cas. En gardant les mêmes positions apparentes de tous les points, on peut dessiner la figure 24. Cette figure peut-elle représenter une situation réelle ?

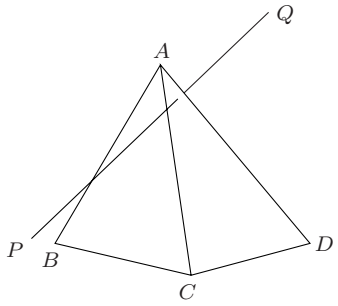


Fig. 24

Trouver des points P et Q tels que la représentation des parties vues et cachées de la droite PQ soit exactement celle de la figure 24.

Pour trouver de tels points « expérimentalement », il faut pouvoir modifier les positions des points P et Q (dans l'espace) sans modifier la position de leur représentation. Résoudre la question ci-dessus passe donc par une question intermédiaire, à savoir

Soit un point $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$. Trouver tous les points $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ ayant la même représentation en perspective que A.

Il faut examiner en détail comment une telle perspective est réalisée concrètement. C'est l'occasion de regarder de plus près l'opérateur PostScript

`Perspective` qui est utilisé avec les macros permettant le travail avec les vecteurs. Les coordonnées de la représentation d'un point $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ sont obtenues par le calcul

$$x_A e_1 + y_A e_2 + z_A e_3,$$

où les e_i sont les coordonnées des images des points

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

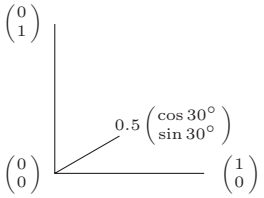


Fig. 25

Pour la représentation avec une fuyante à 30° et de rapport un demi, on a les coordonnées suivantes (cf. figure 25)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0.5\cos 30^\circ \\ 0.5\sin 30^\circ \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les points A et B ont donc même représentation si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_B & + & 0.5\cos 30^\circ y_B & = & x_A & + & 0.5\cos 30^\circ y_A \\ 0.5\sin 30^\circ y_B & + & z_B & = & 0.5\sin 30^\circ y_A & + & z_A. \end{array} \right.$$

Supposons que l'on fixe une valeur pour y_B. On trouve alors que

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x_B & = & x_A & + & 0.5\cos 30^\circ (y_A - y_B) \\ z_B & = & z_A & + & 0.5\sin 30^\circ (y_A - y_B). \end{array} \right.$$

On peut encore écrire ceci d'une autre manière, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x_B & = & x_A & + & (y_B - y_A)(-0.5\cos 30^\circ) \\ y_B & = & y_A & + & (y_B - y_A) \\ z_B & = & z_A & + & (y_B - y_A)(-0.5\sin 30^\circ), \end{array} \right.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + (y_B - y_A) \begin{pmatrix} -0.5\cos 30^\circ \\ 1 \\ -0.5\sin 30^\circ \end{pmatrix}.$$

La forme que l'on obtient n'est pas tellement étonnante. Les points B qui ont même représentation que A sont les points de la droite passant par A et parallèle à la direction de projection, et ce que l'on vient d'obtenir est bien l'équation vectorielle ou paramétrique d'une droite

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{v},$$

avec

$$\lambda = y_B - y_A \;\text{ et }\; \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -0.5\cos 30^\circ \\ 1 \\ -0.5\sin 30^\circ \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de programmer facilement un opérateur pour donner un autre point à partir du paramètre $y_B - y_A$, qui donne l'écart entre la nouvelle et l'ancienne valeur de la deuxième coordonnée. Pour l'utiliser, il faut placer dans la pile les coordonnées (sous forme vectorielle) du point de départ et la valeur de $y_B - y_A$. On a

```
/AutrePoint {
  /@d exch def [30 cos -2 30 sin] -0.5 Mul @d Mul Add
} def
```

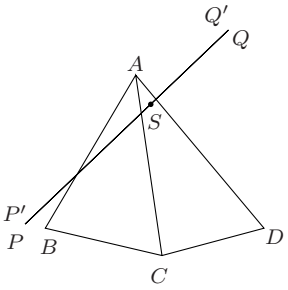


Fig. 26

Nous pouvons revenir maintenant à la figure 24. Nous allons faire varier un segment $[P'Q']$ de manière qu'il ait même projection (représentation en perspective) que le segment $[PQ]$ et que son point de percée dans la face ACD reste S (figure 26). Pour que le vu et caché corresponde à la figure 24, il faudra que le point de percée R' de $[P'Q']$ dans le plan de la face ABC se situe à gauche de S, mais à droite de la face ABC.

Si S reste fixe et que Q se déplace en Q', la position de P' est entièrement fixée : P' est aligné sur Q' et S ; sa projection coïncide avec celle de P. Considérons le plan contenant les droites PQ et $P'Q'$ qui se coupent en S. Puisque tous ces points ont même projection (représentation en perspective) les droites de projection sont contenues dans ce plan : ce sont les droites PP' et QQ' qui sont parallèles. Une telle situation est représentée à la figure 27.

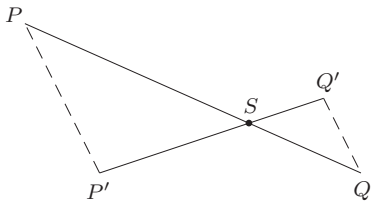


Fig. 27

Grâce au théorème de Thalès, nous savons que si μ est un scalaire tel que $\overrightarrow{SP} = \mu\overrightarrow{QS}$, alors on doit avoir $\overrightarrow{SP'} = \mu\overrightarrow{Q'S}$. Pour trouver la valeur de μ, on peut faire le rapport entre les différences des premières composantes

$$\mu \quad = \quad \frac{x_P - x_S}{x_S - x_Q},$$

ce que l'on traduit en PostScript par

```
/mu P S Sub 0 get S Q Sub 0 get div def.
```

On peut alors déterminer le point P' en fonction du point Q'. Dans ce qui suit, nous notons `Pp` le point P' et `Qp` le point Q'. Voici un exemple où la valeur 5 a été choisie pour $y_{Q'} - y_Q$, ce qui correspond donc à une augmentation de 5 pour la deuxième coordonnée de Q.

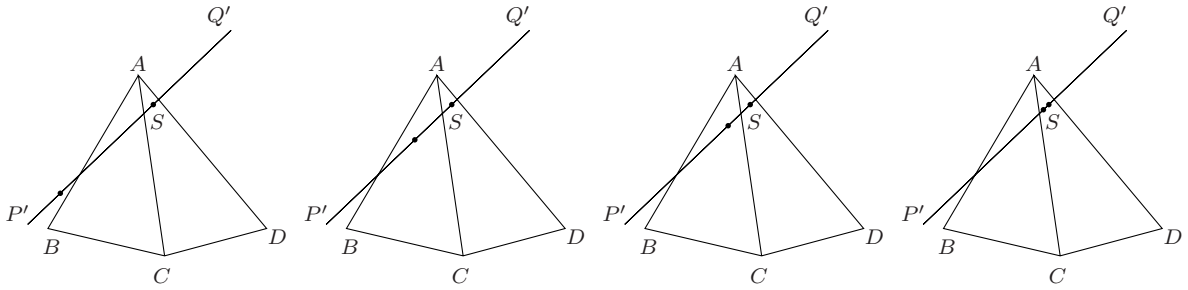
```
/Qp Q 5 AutrePoint def

/Pp S S Qp Sub mu Mul Add def
```

Le dernier calcul correspond à

$$P' \quad = \quad S + \mu(S - Q').$$

La valeur 5 choisie signifie donc que le point Q' « s'éloigne » puisque y augmente. Comme S reste fixe, le point P' « se rapproche ». Lorsqu'on augmente cette valeur, ce point se rapproche encore plus et le point de percée R' de $P'Q'$ dans la face ABC se déplace vers la droite.

La figure 28 montre diverses situations des points de percée pour des valeurs de $y_{Q'} - y_Q$ de plus en plus grandes.

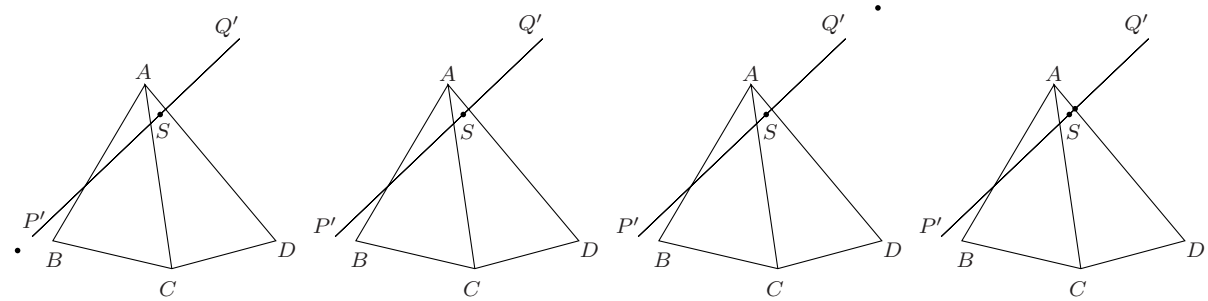


$y_{Q'} - y_Q = 5$ $y_{Q'} - y_Q = 50$ $y_{Q'} - y_Q = 100$ $y_{Q'} - y_Q = 500$

Fig. 28

Une situation qui répond à la question posée est donnée par $y_{Q'} - y_Q = 500$.

On peut terminer ce prolongement en examinant ce qui se passe lorsque l'on donne des valeurs négatives à $y_{Q'} - y_Q$. La figure 29 en montre quelques exemples. Une problématique intéressante est l'analyse de ce qui se passe entre $y_{Q'} - y_Q = -5$ et $y_{Q'} - y_Q = -50$.



$y_{Q'} - y_Q = -5$ $y_{Q'} - y_Q = -10$ $y_{Q'} - y_Q = -50$ $y_{Q'} - y_Q = -500$

Fig. 29

Commentaires

Les logiciels graphiques 3D, qui traitent les représentations en perspective d'objets de l'espace, ont des procédures pour déterminer automatiquement les parties vues et cachées. Il est hors de propos de vouloir « vider » cette question ici. Toutefois il est possible, pour ceux qui ont envie d'en savoir un peu plus, d'avoir une idée relativement générale de cette problématique qui prolonge celle que l'on a traitée dans cette activité, en avançant encore un peu vers l'automatisation des procédures de détection du vu et du caché.

Soit une figure plane opaque. Écrire un programme PostScript qui permet de représenter cette figure ainsi que les parties vues et cachées d'un segment $[PQ]$. Pour simplifier le programme, on suppose que ni P ni Q ne sont dans le plan de la figure.

Il faut déterminer les positions relatives de P et de Q relativement au plan de la figure. Soit R le point de percée de la droite PQ dans ce plan. Il y a quatre possibilités, à savoir

1. P et Q sont devant le plan : il faut dessiner la figure et ensuite le segment $[PQ]$.
2. P et Q sont derrière le plan : il faut dessiner le segment $[PQ]$ et ensuite la figure.
3. P est devant et Q est derrière : il faut dessiner le segment $[RQ]$, ensuite la figure et le segment $[PR]$ pour terminer.
4. P est derrière et Q est devant : il faut dessiner le segment $[PR]$, ensuite la figure et le segment $[RQ]$ pour terminer.

Il faut donc pouvoir déterminer si un point X est devant ou derrière le plan. Considérons le point X' qui se trouve dans le plan de la figure et dont la représentation en perspective coïncide avec celle de X. Si X est devant ce plan, X sera devant X'. Dans le système d'axes utilisé jusqu'ici (voir figure 25), ce sera le cas si la deuxième coordonnée de X est plus petite que celle de X'. Supposons que A, B et C soient trois sommets non alignés de la figure considérée. Le point X' est donné par le point de percée de la droite de projection passant par X dans le plan ABC. Les coordonnées d'un deuxième point de la droite de projection sont données par $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{v}$ où

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -0.5\cos 30^\circ \\ 1 \\ -0.5\sin 30^\circ \end{pmatrix}$$

donne la direction de projection.

Il y a plusieurs manières de programmer cela en PostScript, notamment en utilisant les opérateurs `if` ou `ifthen` pour réaliser des tests. Ci-dessous, nous présentons une manière de programmer moins classique qui évite ces tests.

Supposons que la figure soit un parallélogramme $ABCD$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

La figure en question poura être dessinée par une macro `figure` définie comme suit :

```
/A [150 250 150] def
/B [300 400 250] def
/C [400 200 400] def
/D C A B Sub Add def
/figure {1 setgray newpath
         A Moveto B Lineto C Lineto D Lineto A Lineto fill
         0 setgray newpath
         A Moveto B Lineto C Lineto D Lineto A Lineto stroke
         } def
```

Supposons aussi que les points P et Q soient définis par :

```
/P [100 100 000] def
/Q [400 300 500] def
```

Nous allons maintenant définir la fonction `TestDevantDerriere` qui prend dans la pile les coordonnées du point à tester et qui renvoie dans la pile la valeur 1 ou 0 selon que le point est devant ou derrière le plan ABC. Le principe en est le suivant. Soit X le point à tester. On calcule $y' - y$ où y' est la 2e coordonnée du point du plan ABC ayant même représentation que X. Cette valeur est positive ou négative selon que X est devant ou derrière le plan ABC. En la divisant par sa valeur absolue, on obtient 1 ou -1. En ajoutant 1, cela fait 2 ou 0. En la divisant par 2, on obtient 1 ou 0. Appelons i_P et i_Q les valeurs ainsi obtenues pour P et Q. Le nombre

$$i = 2 \times i_P + i_Q$$

est entier et varie entre 0 et 3. Il vaut

0 si P et Q sont tous deux derrière le plan ;

1 si P est derrière et Q est devant le plan ;

2 si P est devant et Q est derrière le plan ;

3 si P et Q sont tous deux devant le plan.

Appelons

`DerriereDerriere`,

`DerriereDevant`,

`DevantDerriere` et

`DevantDevant`

les macros à exécuter dans chacun de ces cas. Il s'agit donc d'éxécuter la i^{e} composante de la liste

`[{DerriereDerriere} {DerriereDevant}{DevantDerriere} {DevantDevant}]`.

Pour pouvoir choisir cette i^{e} composante, il faut que i soit considéré par PostScript comme entier. Or, même si sa valeur est entière, il est considéré comme réel (au niveau de sa représentation informatique) et il faut le convertir en entier. C'est ce que fait l'opérateur `cvi`.

Pour exécuter la macro choisie, on utilise l'opérateur `exec`.

Voici les différentes macros :

```
/R A B C P Q PPDP def

/DevantDevant {figure newpath P Moveto Q Lineto stroke} def
/DerriereDerriere {newpath P Moveto Q Lineto stroke figure} def
/DevantDerriere {newpath R Moveto Q Lineto stroke figure
                 newpath P Moveto R Lineto stroke} def
/DerriereDevant {newpath P Moveto R Lineto stroke figure
                 newpath R Moveto Q Lineto stroke} def

/v [30 cos -2 30 sin] -0.5 Mul def

/TestDevantDerriere{/X@ exch def A B C X@ X@ v Add PPDP X@ Sub
                    1 get dup abs div 1 add 2 div cvi
                    } def

/i P TestDevantDerriere 2 mul Q TestDevantDerriere add def

[{DerriereDerriere} {DerriereDevant} {DevantDerriere}
{DevantDevant}] i get exec
```

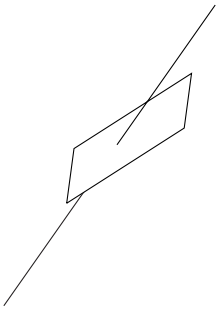


Fig. 30

La figure 30 montre le résultat de cette macro pour les valeurs indiquées.

12

Problèmes d'équilibre

1 Le levier

De quoi s'agit-il ?

Déterminer le barycentre de points affectés d'un poids lorsque tous les points sont alignés.

Enjeux

Établir une formule générale donnant le point d'équilibre d'une tige à laquelle plusieurs objets sont suspendus. Les questions de barycentres offrent une introduction significative à la notion de combinaison linéaire (voir la section 7 du chapitre 16).

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – De quoi expérimenter l'équilibre d'une tige où sont suspendus plusieurs objets, par exemple : des règles graduées en bois, des écrous (tous de même poids), des élastiques et du fil de nylon.

Prérequis. – Calcul avec les nombres négatifs, calcul algébrique.

1.1 Le cas de deux objets

Comment s'y prendre ?

Préparation du matériel. – On fore un petit trou au milieu de chaque règle graduée de manière à pouvoir y attacher une ficelle par laquelle on pourra la suspendre. Il faut que la règle graduée tienne en équilibre avec les graduations tournées vers le bas. Pour cela, il est sans doute nécessaire de forer un deuxième trou de manière à compenser celui qui a été prévu par le fabriquant d'un côté de la règle. Plus le point de suspension est placé haut, plus l'équilibre sera stable. Il est préférable que l'enseignant choisisse un modèle de règle, qu'il fasse l'expérience lui-même au préalable et qu'il prépare ensuite suffisamment de règles pour les groupes de travail qu'il aura prévus.

Des écrous sont attachés à un bout de fil, lui-même attaché à un élastique qui est placé autour de la règle et qui peut être déplacé le long de celle-ci. Dans la suite, nous appellerons poids un ou plusieurs écrous attachés de la sorte. Les graduations permettront alors de déterminer de manière assez précise les positions des différents poids qui seront suspendus à la règle.

Remarque. – Le fait d'utiliser une tige suspendue en son milieu a pour effet de supprimer l'effet du poids de la tige sur l'expérience.

Une tige est attachée en son milieu à un fil, lui-même tenu en main. On y suspend deux poids. Où peut-on les placer de telle sorte que la tige reste parfaitement horizontale ? Donner si possible plusieurs solutions.

Les élèves sont répartis en différents groupes et expérimentent en choisissant différents poids.

En exprimant les distances à partir du point de suspension de la tige, on obtient par exemple :

1 écrou	2 écrous
20 cm	10 cm
15 cm	7.5 cm

1 écrou	3 écrous
15 cm	5 cm
18 cm	6 cm

2 écrous	3 écrous
15 cm	10 cm
18 cm	12 cm

Trouver une formule générale reliant les distances d_1 et d_2 entre le point où la tige est suspendue et les poids constitués respectivement de p_1 et p_2 écrous.

Il s'agit ici d'inférer la formule

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_2}{p_1},$$

ou encore

$$p_1 d_1 = p_2 d_2.$$

1.2 Le cas de trois objets

Comment s'y prendre ?

Soient trois poids constitués respectivement de 1, 2 et 3 écrous que l'on souhaite suspendre à la règle. Il s'agit de prévoir les endroits où les placer pour réaliser l'équilibre, et de vérifier ensuite expérimentalement. Y a-t-il plusieurs endroits possibles ?

L'idée est de regrouper deux poids afin de se ramener au cas précédent. On réalise l'expérience suivante en pensée. On regroupe deux poids, par exemple ceux de 1 et de 3 écrous. Il faut donc placer d'une part 4 écrous et d'autre part 2 écrous. Si on place les 2 écrous à 20 cm à droite du milieu de la tige, le poids de 4 écrous doit être placé à 10 cm à gauche de ce milieu. On sépare maintenant le poids de 4 écrous en deux poids de 1 écrou et 3 écrous. Si on déplace le poids de 3 écrous de 3 cm vers la droite, il faut, pour conserver l'équilibre, déplacer celui de 1 écrou de 9 cm vers la gauche.

On aurait pu déplacer le poids de 3 écrous de 4 cm vers la droite. Il aurait alors fallu déplacer celui de 1 écrou de 12 cm vers la gauche.

On aurait encore pu déplacer le poids de 3 écrous de 12 cm vers la droite. Il aurait alors fallu déplacer celui de 1 écrou de 36 cm vers la gauche. Dans

ce cas, le poids de 3 écrous se trouverait à droite du point de suspension de la tige.

On aurait aussi pu placer le poids de 2 écrous à 24 cm à droite du milieu de la tige. Dans ce cas, le poids groupé aurait été placé à 12 cm à gauche.

On aurait encore pu... Il y a énormément de solutions. Voici les quelques solutions obtenues ci-dessus que l'on peut vérifier expérimentalement :

1 écrou	3 écrous	2 écrous
19 cm à gauche	7 cm à gauche	20 cm à droite
22 cm à gauche	6 cm à gauche	20 cm à droite
46 cm à gauche	2 cm à droite	20 cm à droite
21 cm à gauche	9 cm à gauche	24 cm à droite
24 cm à gauche	8 cm à gauche	24 cm à droite

On voit qu'il y a beaucoup de solutions. Peut-on exprimer toutes ces solutions en une seule formule ?

Soit p_1, p_2 et p_3 les nombres d'écrous des trois poids suspendus à des distances d_1, d_2 et d_3 du point d'attache G de la tige (figure 1).

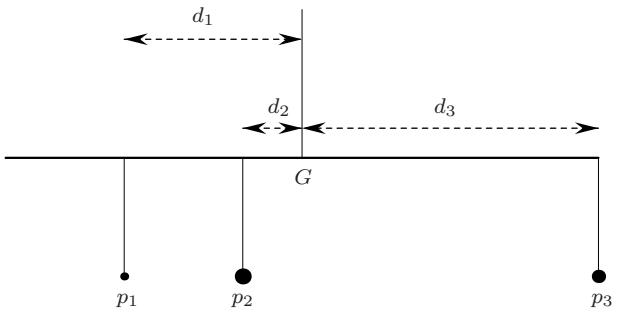


Fig. 1

Regardons d'abord le cas où p_1, p_2 et p_3 valent respectivement 1, 3 et 2.

Si la tige est en équilibre, on a

$$4\ell = 2d_3, \tag{12.1}$$

où ℓ est la distance à laquelle il faut placer les deux premiers poids regroupés pour équilibrer les 2 écrous situés à une distance d_3 du point G (figure 2).

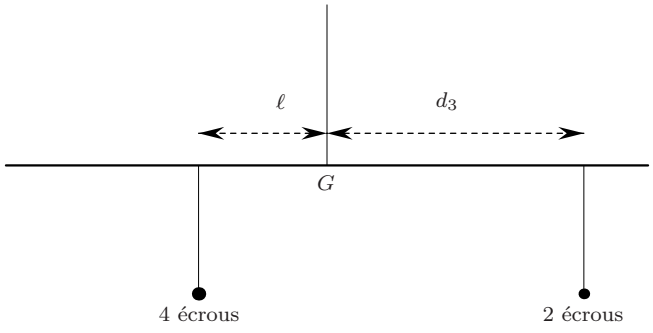


Fig. 2

Si on déplace le poids de 3 écrous à une distance e_2 vers la droite, il faut déplacer le poids de 1 écrou à une distance e_1 vers la gauche de telle manière que

$$e_1 \quad = \quad 3e_2.$$

Comme $e_1 = d_1 - \ell$ et $e_2 = \ell - d_2$ (figure 3), on a

$$d_1 - \ell \quad = \quad 3(\ell - d_2),$$

et donc

$$4\ell = d_1 + 3d_2.$$

En replaçant ce résultat dans l'expression (12.1), on obtient

$$d_1 + 3d_2 = 2d_3.$$

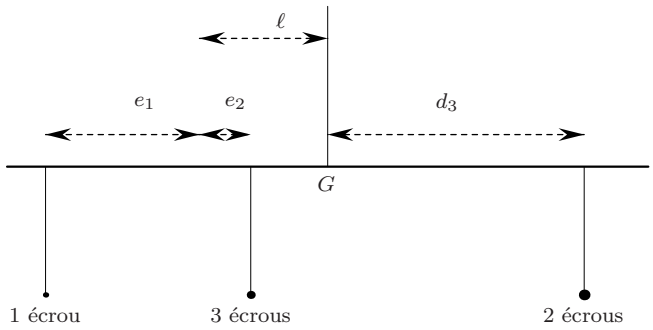


Fig. 3

Si on décidait de mettre le deuxième poids à droite de G, on trouverait comme expression :

$$d_1 = 3d_2 + 2d_3.$$

On peut vérifier que toutes les solutions trouvées plus haut vérifient une des deux expressions, qui indiquent également comment trouver toutes le solutions possibles : si on choisit par exemple d_1 et d_2, elles permettent de calculer d_3.

Pour généraliser à tous les poids possibles, il suffit de remarquer que les nombres 1, 3 et 2 sont bien les mesures des poids (en écrous !). On a donc

$$p_1d_1 + p_2d_2 = p_3d_3 \quad \text{ou} \quad p_1d_1 = p_2d_2 + p_3d_3.$$

1.3 Le cas de n objets

Comment s'y prendre ?

Trouver une relation générale entre les positions de n poids suspendus à une tige en équilibre elle-même suspendue en son milieu.

Prenons le cas de quatre poids p_1, p_2, p_3 et p_4. Supposons qu'on les a numérotés selon leur position (de gauche à droite). En reproduisant ce que l'on a fait avec trois poids, on arrive aux différentes expressions

$$p_1d_1 + p_2d_2 + p_3d_3 = p_4d_4,$$

ou

$$p_1d_1 + p_2d_2 = p_3d_3 + p_4d_4,$$

ou

$$p_1d_1 = p_2d_2 + p_3d_3 + p_4d_4.$$

Le choix de l'expression adéquate dépend de la position des poids p_2 et p_3 relativement au point de suspension G.

Il est difficile de généraliser ces formules lorsqu'on les laisse ainsi. En effet, il faudrait écrire un nombre d'expressions qui serait variable selon le nombre de poids. On peut déjà se faciliter le travail en les écrivant toutes avec le deuxième membre nul :

$$p_1d_1 + p_2d_2 + p_3d_3 - p_4d_4 = 0$$

ou

$$p_1d_1 + p_2d_2 - p_3d_3 - p_4d_4 = 0$$

ou

$$p_1d_1 - p_2d_2 - p_3d_3 - p_4d_4 = 0.$$

On peut alors écrire ces trois expressions sous la forme

$$p_1d_1 \pm p_2d_2 \pm p_3d_3 - p_4d_4 = 0.$$

Les signes attachés à p_2d_2 et à p_3d_3 dépendent des positions de p_2 et de p_3 à gauche ou à droite de G.

Pour n poids, on pourra écrire

$$p_1d_1 \pm p_2d_2 \ldots \pm p_{n-1}d_{n-1} - p_nd_n = 0. \tag{12.2}$$

Il y a donc « beaucoup » de formules possibles qui diffèrent selon les signes. Ceux-ci dépendent des positions relatives des poids par rapport à G. S'ils sont à droite de G, le signe est négatif. S'ils sont à gauche, le signe est positif. Si on décide de remplacer les distances d_i par les abscisses x_i des points de suspension des poids et que l'on fixe l'origine en G, on obtient alors une expression qui est la même dans tous les cas. En effet, si p_i est à gauche de G, $x_i = -d_i$, sinon $x_i = d_i$. L'équation (12.2) devient alors

$$-p_1x_1 - p_2x_2 \ldots - p_{n-1}x_{n-1} - p_nx_n = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$p_1x_1 + p_2x_2 \ldots + p_{n-1}x_{n-1} + p_nx_n = 0. \tag{12.3}$$

1.4 Recherche du point d'équilibre

Comment s'y prendre ?

On attache plusieurs objets à une règle. Trouver le point où il faut suspendre la règle pour qu'elle soit en équilibre.

À la section précédente, la position de G était fixée au préalable. C'est le contraire de ce que l'on fait en général : la position des points étant fixée, on cherche la position du point G. Expérimentalement, cela pose des difficultés pratiques puisque la règle sur laquelle les poids sont attachés a elle-même un poids qui modifie le point d'équilibre. Par contre, par une expérience de pensée, on peut imaginer que la règle a un poids nul.

Il n'est toutefois pas possible d'utiliser la formule (12.3), puisque celle-ci suppose que les abscisses des points de suspension des poids sont données relativement au point G de suspension de la règle. Or, c'est précisément ce dernier point que l'on cherche. Une question intermédiaire va permettre de trouver une solution.

Comment se transforme la formule (12.3) si on place l'origine des abscisses n'importe où ?

Soient donc une autre origine pour les abscisses, g l'abscisse du point G et x_i les abscisses des points p_i. Il faut se ramener au cas précédent, c'est-à-dire amener l'origine des abscisses en G. Cela se fait simplement en retirant g à chaque abscisse. L'expression (12.3) devient alors

$$p_1(x_1 - g) + p_2(x_2 - g) \ldots + p_{n-1}(x_{n-1} - g) + p_n(x_n - g) = 0,$$

où g est l'abscisse du point d'équilibre. Cette expression peut s'écrire

$$\sum p_i x_i \quad = \quad (\sum p_i) g. \tag{12.4}$$

Elle permet de trouver l'abscisse du point d'équilibre à partir des différents poids et de leurs abscisses, ce qui donne

$$g = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}. \tag{12.5}$$

Il est également possible de résoudre cette question sans imaginer une règle de poids nul. Le poids de la tige a une influence sur la position du point d'équilibre. On fait l'hypothèse que cette influence est la même que celle d'un objet qui serait suspendu au milieu de la tige et qui aurait le même poids que celle-ci. On remplace donc la tige et son poids par un poids ponctuel (p_{n+1}) situé en son milieu (d'abscisse x_{n+1}). Notons que cette supposition pourrait être justifiée dans une théorie plus complète.

Une fois réalisé le calcul du point d'équilibre de la tige, la position trouvée peut également faire l'objet d'une vérification expérimentale.

2 Barycentres dans un plan

De quoi s'agit-il ? Déterminer le barycentre de points affectés d'un poids lorsque tous les points sont dans un même plan.

Enjeux Établir une formule générale donnant le point d'équilibre d'une plaque à laquelle plusieurs objets sont suspendus.

De quoi a-t-on besoin ? ***Prérequis.*** – Premiers éléments de calcul vectoriel (cf. le chapitre 8 à la page 218).

2.1 Le cas de trois poids égaux

Comment s'y prendre ?

Soit une plaque circulaire suspendue à un fil en son centre. On souhaite lui accrocher trois objets de poids égaux. Caractériser les manières de placer ces objets pour que la plaque reste parfaitement horizontale.

On reprend la méthode de regroupement utilisée précédemment. La plaque est suspendue au centre G. On place un des poids en un point de la plaque A. On regroupe les deux autres poids. Pour que la plaque reste en équilibre, il faut que le point P où on les place se trouve sur la droite AG (figure 4). Comme le poids en P est double de celui en A, la distance de P à G doit valoir la moitié de celle de A à G.

Lorsque l'on sépare les deux poids, il faut, pour garder l'équilibre, les placer sur une ligne passant par P en veillant à ce qu'ils se trouvent à même distance de P. On en déduit que les trois poids doivent être placés en des points formant un triangle dont G est l'intersection des médianes.

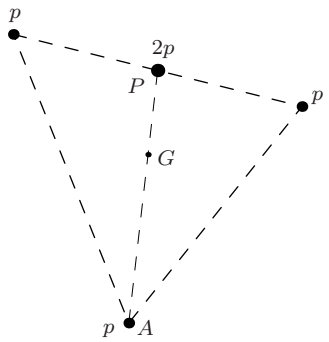


Fig. 4

2.2 Le cas de trois poids quelconques

Comment s'y prendre ?

Soit une plaque circulaire suspendue à un fil en son centre. On souhaite lui accrocher trois objets de poids quelconques. Caractériser les manières de placer ces objets pour que la plaque reste parfaitement horizontale.

Soit à placer, par exemple, des poids formés respectivement de 3 écrous, 2 écrous et 4 écrous (figure 5).

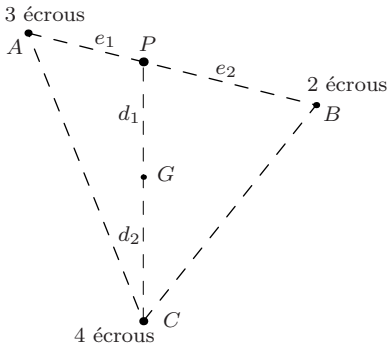


Fig. 5

Plaçons le poids de 4 écrous en C et imaginons dans un premier temps que les poids de 3 et 2 écrous sont regroupés au point P se trouvant sur la droite CP. Pour que la plaque reste en équilibre, la condition suivante doit être vérifiée :

$$5d_1 = 4d_2. \tag{12.6}$$

Si les deux poids de 3 et 2 écrous sont placés en deux endroits distincts, A et B, il faut alors respecter en plus la condition

$$3e_1 = 2e_2. \tag{12.7}$$

Ceci permet de déterminer concrètement des manières de disposer les trois poids pour garder l'équilibre. Il y a moyen toutefois de caractériser de manière plus générale les positions des poids, comme cela a été fait pour le levier.

Comme les distances sur la droite AB, où se trouvent les poids de 3 et 2 écrous, ne peuvent se comparer à celles sur la droite PC, l'idée est de s'occuper des positions des poids les uns relativement aux autres en termes de vecteurs (changements de position) et non plus de distances. Supposons connaître les coordonnées des points A, B et C où sont placés les poids de 3, 2 et 4 écrous. Les expressions (12.6) et (12.7) se traduisent par (figure 6)

$$5\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{GC} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}.$$

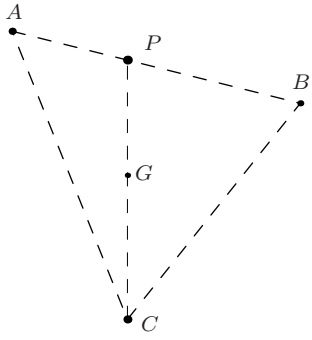


Fig. 6

Ces deux relations entre des vecteurs peuvent se réécrire comme relations entre des coordonnées (indiquées ci-après simplement par les lettres désignant les points) :

$$\begin{aligned} 5(G-P) &= 4(C-G) \quad \text{ou encore} \quad (5+4)G = 5P + 4C\,; \\ 3(P-A) &= 2(B-P) \quad \text{ou encore} \quad (3+2)P = 3A + 2B. \end{aligned}$$

En les combinant, on trouve alors une relation entre les coordonnées de G et celles des trois points où sont suspendus les poids :

$$9G \;=\; 3A + 2B + 4C.$$

Le coefficient de G provient de la somme $3 + 2 + 4$ qui sont les nombres d'écrous, c'est-à-dire les mesures des poids (dans l'unité « écrou »). On peut donc écrire immédiatement l'expression correspondante dans le cas général :

$$(p_1 + p_2 + p_3)G \;=\; p_1A + p_2B + p_3C, \tag{12.8}$$

où p_1, p_2 et p_3 sont les mesures des poids suspendus en A, B et C. C'est une relation entre quatre positions. Dès que trois d'entre elles sont fixées, elle permet de calculer la quatrième.

2.3 Recherche du point d'équilibre

Comment s'y prendre ?

De la manière dont le problème a été posé, la position de G est fixe. C'est le contraire de ce que l'on fait en général : la position des trois points étant fixée, on cherche la position du point G. Expérimentalement, cela pose des difficultés pratiques, puisque le dispositif sur lequel les objets seraient attachés a lui-même un poids qui modifie le point d'équilibre. Comme dans le cas du levier, par une expérience de pensée, on peut imaginer les trois objets reliés par une structure ne pesant rien et trouver leur point d'équilibre au moyen de l'expression (12.8).

Prolongement possible

Le résultat obtenu se généralise au cas de n objets. On peut le faire par récurrence en reproduisant la démarche utilisée pour trois poids : on regroupe deux poids et on se base sur le résultat obtenu pour $n-1$ poids. On trouve ainsi le résultat pour n objets dont les coordonnées sont données par A_i et les poids par p_i, à savoir

$$(\sum p_i)G = \sum p_i A_i.$$

3 Équilibre d'un point

De quoi s'agit-il ?

Établir expérimentalement les conditions d'équilibre d'un point soumis à des forces.

Enjeux

La loi de composition des forces, c'est-à-dire la somme de deux forces par la règle du parallélogramme ; les premières propriétés de cette somme.

Il s'agit de la modélisation d'une situation physique. Cette modélisation montre la parenté des forces avec d'autres entités mathématiques ou physiques représentées par des vecteurs. Voir aussi à cet égard la section 8.4 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une corde de traction, comme par exemple celles qu'on utilise au cours de gymnastique. Un assemblage de trois cordes de ce type nouées en un point.

Un seau d'eau.

Un dispositif de composition de forces d'un type déjà décrit par E. Mach [1903] dans un célèbre ouvrage sur l'histoire de la mécanique. La figure 7, extraite de cet ouvrage, en donne une idée. La figure 8 montre un dispositif analogue disponible dans le commerce. Mais on peut sans trop de peine construire cela soi-même, de la manière suivante.

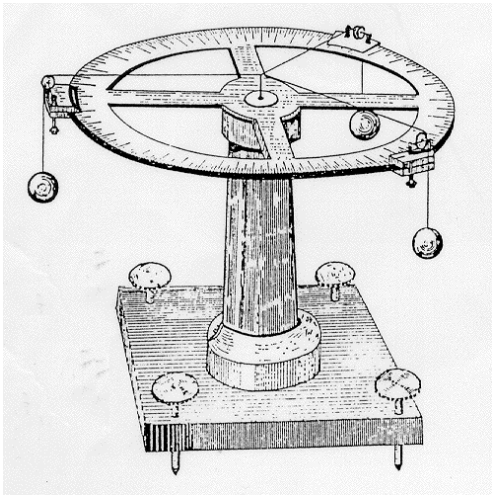


Fig. 7



Fig. 8

On noue trois ficelles en un point et on fait passer chacune d'elles sur une poulie fixée en périphérie de la table. Au bout de chaque ficelle on attache un objet pesant, par exemple un godet contenant de la grenaille de plomb. Il faut aussi disposer d'une balance pour peser ces godets. Nous conseillons de choisir une table ronde, pour que le dispositif ne suggère aucune direction privilégiée dans le plan horizontal. Toutefois, une table carrée ou rectangulaire ne présenterait pas d'inconvénient majeur.

3.1 Équilibrer deux forces d'égale intensité

Comment s'y prendre ?

Lorsque deux personnes tirent à chaque bout d'une corde avec des forces égales dans des sens opposés, la situation est équilibrée, et donc la corde ne bouge pas. Considérons maintenant un système de trois cordes nouées en un point. Une personne A tire sur une des cordes. On demande à deux autres personnes B et C de tirer sur les deux autres cordes, symétriquement par rapport à la première corde, comme le montre la figure 9, qui est une vue du dessus. La personne A s'efforce de maintenir son effort constant. Les personnes B et C ajustent leur force pour que le nœud ne bouge pas. Comment varie la force qu'elles doivent développer lorsqu'elles augmentent l'angle entre leurs deux cordes ?

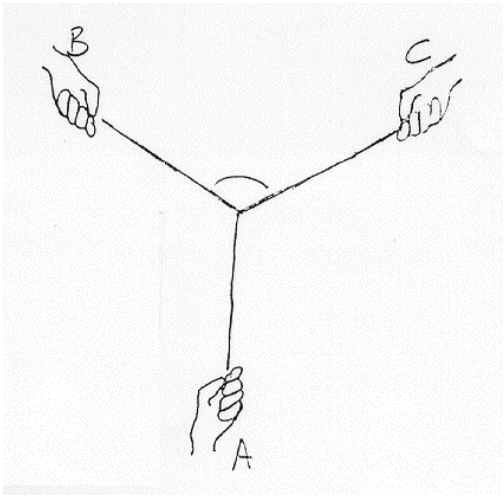


Fig. 9

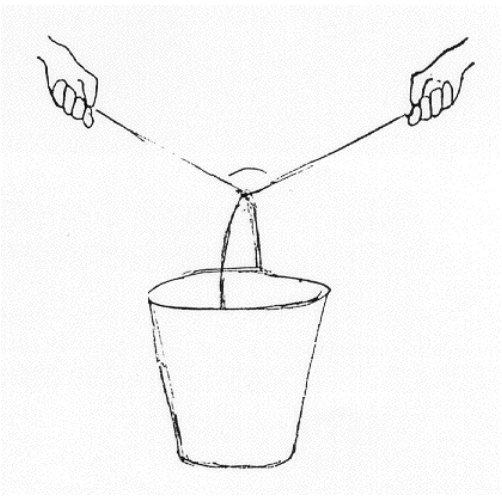


Fig. 10

Cette expérience, purement qualitative, fait voir qu'au fur et à mesure que l'angle en question grandit, la force que doivent développer B et C devient de plus en plus grande. Et lorsque l'angle s'approche de 180°, la force qu'il faudrait développer devient tellement grande que B et C ne peuvent plus résister.

Une corde est nouée sur l'anse d'un seau rempli d'eau. Que se passe-t-il lorsque deux personnes tirent symétriquement sur la corde, comme le montre la figure 10 ?

Plus les forces exercées symétriquement sur la corde sont grandes, plus grand est l'angle entre les deux moitiés de la corde. Il s'avère impossible de tirer assez fort pour que cet angle devienne un angle plat.

Une fois réalisées ces deux expériences assez grossières, on va s'efforcer de comprendre mieux ce qui se passe en mesurant les angles et les forces[1]. Pour cela, on se sert de l'appareil représenté à la figure 8.

[1] Ci-après, nous donnons les mesures des forces en grammes-forces. Nous pensons que mesurer ici les forces en Newton ne pourrait qu'embrouiller les élèves.

Disposons deux poulies aux deux extrémités d'un diamètre de la table, faisons passer une ficelle sur ces deux poulies et suspendons des deux côtés des poids égaux, par exemple 50 g de chaque côté (voir figure 11). Le point central ne bouge pas. Remplaçons une des deux forces de 50 g par deux forces de même intensité disposées symétriquement comme le montre la figure 12. Quelle intensité x (commune) devrons-nous donner à ces deux forces pour que le point central ne bouge pas ? Et comment varie cette intensité lorsque nous faisons varier l'angle α ?

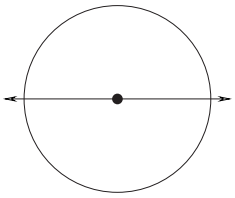


Fig. 11

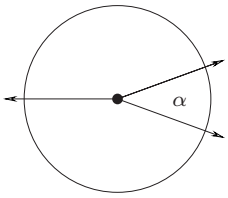


Fig. 12

Faisons l'expérience pour quelques valeurs de l'angle α. Nos résultats sont consignés dans le tableau suivant.

angle α	30°	60°	90°	120°	150°	160°	180°
force x	24 g	29,5 g	35g	51 g	97,5 g	144 g	?

La figure 13 reprend graphiquement ces résultats. Elle montre que la force varie avec l'angle, mais selon une loi que l'on ne perçoit pas immédiatement. Essayons donc de préciser cette loi.

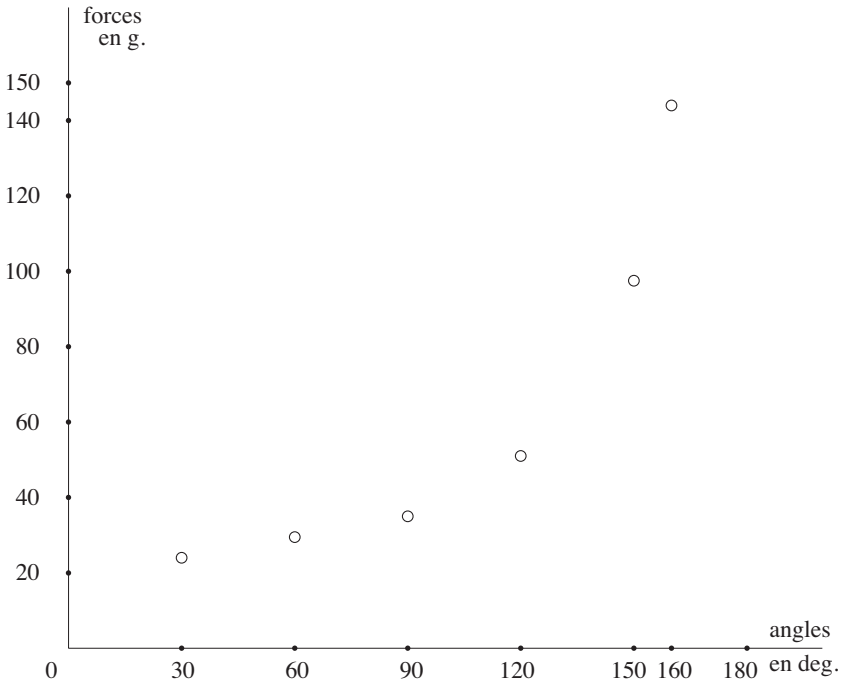


Fig. 13

Les points que nous venons de déterminer sont-ils – fut-ce à peu près – sur le graphe d'une fonction familière ? Difficile à dire. Tentons d'y voir plus clair.
En fait, la situation que nous examinons a un premier aspect géométrique, puisqu'on y discerne d'abord trois directions issues d'un point. Ne serait-il pas éclairant de dessiner les forces à une certaine échelle sur cette figure géométrique ? En ce faisant, nous garderions sous les yeux un maximum d'informations. D'où la proposition suivante : choisir une échelle pour représenter les forces, par exemple 5 cm pour 100 g, et représenter chacune des forces à l'échelle, en respectant sa direction.

À la figure 14, nous avons représenté toutes les forces mesurées ci-dessus. Chacune d'elles correspond à une flèche issue du point fixe et dont la longueur a été calculée à l'échelle choisie.

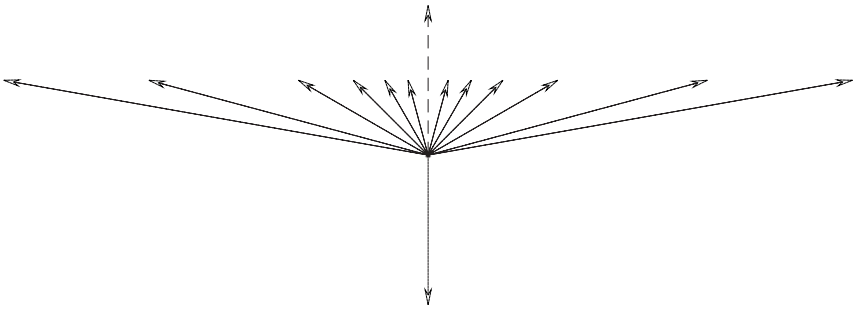


Fig. 14

Il n'est pas étonnant que la figure obtenue soit symétrique, ou plus précisément qu'elle possède un axe de symétrie, déterminé par la force donnée. Mais – chose curieuse –, les extrémités de toutes les flèches ont l'air d'être alignées sur une droite perpendiculaire à cet axe. Ainsi, toutes ces forces auraient sur cet axe la même projection orthogonale.

Qui plus est, le point commun de projection coupe sans doute cette force F en deux : en effet, si on envisage le cas limite d'un angle nul entre les deux forces symétriques, on voit bien que chacune de ces deux forces doit avoir une intensité moitié de celle de la force F.

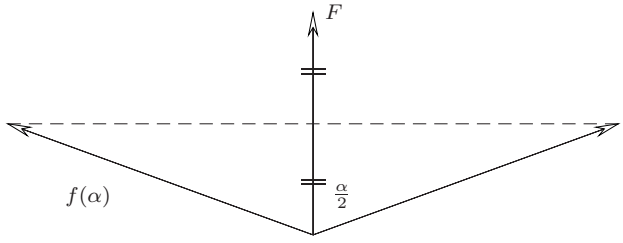


Fig. 15

Si on accepte cette analyse, on trouve la relation cherchée entre l'angle et la force. En effet, comme on le voit sur la figure 15, on a

$$f(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{F}{2},$$

et par conséquent

$$f(\alpha) = \frac{F}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

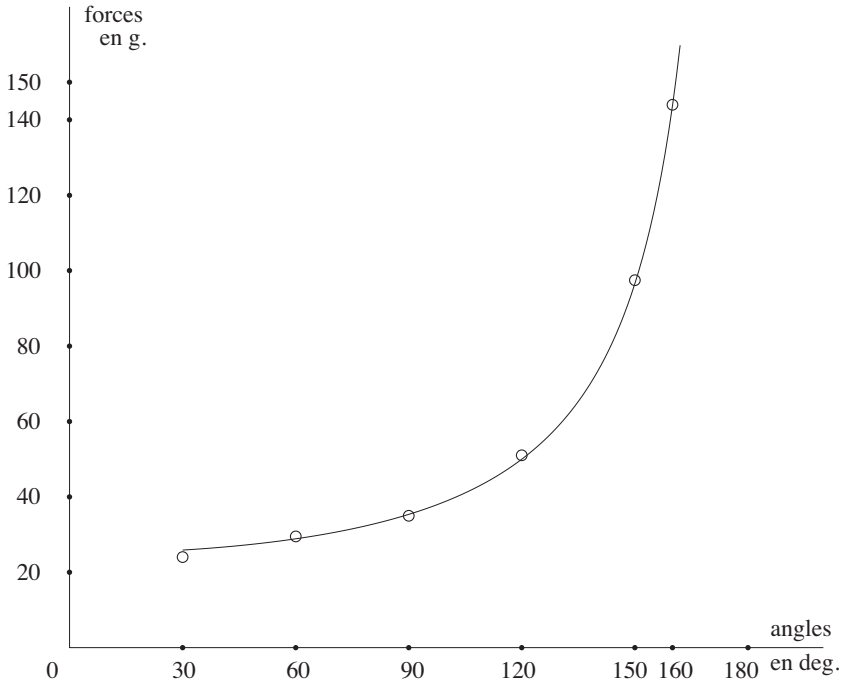


Fig. 16

La figure 16 superpose notre courbe expérimentale de tout-à-l'heure et le graphe de la fonction que nous venons de découvrir. La correspondance est assez bonne pour que nous puissions accepter notre modèle théorique de la situation.

Renversons maintenant la situation en nous donnant deux forces symétriques par rapport à une droite d, comme sur la figure 17. Trouver une troisième force qui les équilibre.

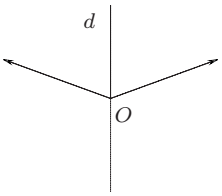


Fig. 17

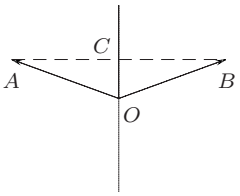


Fig. 18

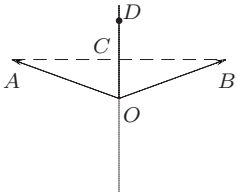


Fig. 19

Une solution – trouvée en s'inspirant de la figure 15 – consiste à projeter les deux forces sur la droite d, ce qui peut se faire en dessinant le segment AB. On obtient ainsi le point C (figure 18). L'intensité de la force cherchée correspond au double de OC, ce qui nous amène au point D (figure 19). La force cherchée est donnée par le segment OE opposé à OD (figure 20).

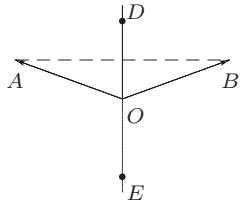


Fig. 20

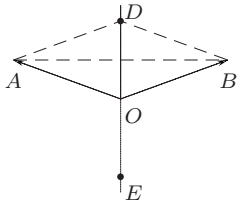


Fig. 21

On peut alors observer qu'il y a aussi moyen de trouver le point E, celui qui détermine la force cherchée, en se servant d'une diagonale du losange $OADB$: c'est ce que montre la figure 21.

3.2 Équilibrer deux forces d'intensités inégales

Comment s'y prendre ?

On donne maintenant deux forces de directions et de grandeurs quelconques (par exemple deux forces tirant sur des ficelles écartées de 83°, l'une de 54 g et l'autre de 87 g) (voir figure 22), et on demande de les équilibrer par une troisième force.

L'argumentation suivante est plausible, quoique nullement évidente. On a vu qu'on peut remplacer deux forces symétriques « par une diagonale du losange qu'elles définissent ». On peut alors supposer qu'on pourrait remplacer deux forces non symétriques par « une diagonale appropriée du parrallélogramme qu'elle définissent » (voir figure 23). Il suffirait ensuite d'équilibrer cette force par son opposée. On détermine l'intensité et l'orientation de cette force en mesurant à l'échelle sur la figure 24. Nous avons réalisé l'expérience sur l'appareil de la figure 8 à la page 390. Il s'avère que cette conjecture est bonne, aux erreurs de mesure près.

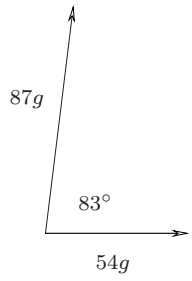


Fig. 22

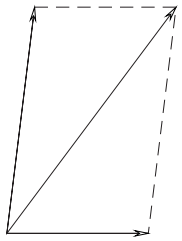


Fig. 23

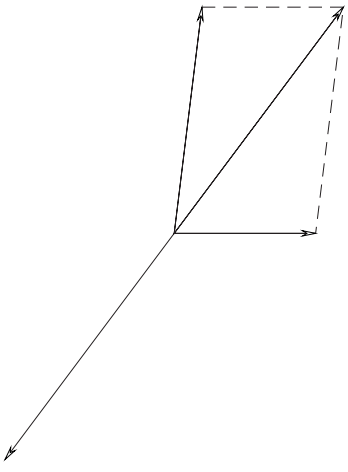


Fig. 24

Si les élèves ne font pas cette conjecture, ils peuvent déterminer la force cherchée en tâtonnant expérimentalement, puis la représenter à l'échelle.

C'est le moment pour le professeur de donner le coup de pouce qui s'impose : il expliquera la loi du parallélogramme des forces.

On peut remplacer cette dernière question par « l'expérience de pensée » suivante, que nous présentons sous forme de dialogue.

L'un. – Considérons un fil dont une extrémité est attachée à une glissière dans laquelle elle se meut sans frottement. On pourra imaginer par exemple une tringle à rideau munie d'une attache à roulettes à laquelle on a fixé une ficelle. La figure 25 schématise cette situation. On sait que lorsqu'on tire sur la ficelle dans une direction perpendiculaire à la glissière, on n'observe aucun mouvement. Pour que l'attache mobile se déplace, il faut et il suffit d'incliner la direction de la traction (voir figure 26). En disant qu'il *suffit* de faire cela, on suppose implicitement que la glissière ne comporte aucun frottement. Jusqu'ici, ce que nous avons affirmé relève de l'expérience commune. Et si maintenant on tire sur deux ficelles nouées à l'attache (voir 27), comment pensez-vous qu'il faudra tirer pour que l'attache ne bouge pas ?

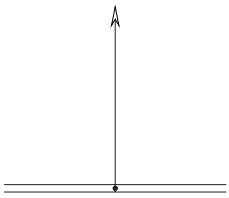


Fig. 25

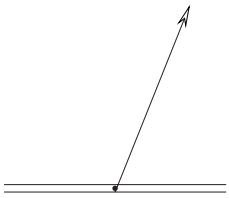


Fig. 26

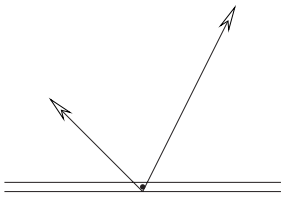


Fig. 27

L'autre. – Regardons d'abord une seule force. Pour qu'il n'y ait pas mouvement, on s'arrange pour que la situation soit équilibrée, autrement dit pour que la projection orthogonale de la force sur la glissière soit nulle. Si on tire avec deux forces, il semble raisonnable de supposer qu'il n'y aura pas de mouvement si les deux forces ont le long de la glissière des projections orthogonales qui se compensent, par exemple comme sur la figure 28.

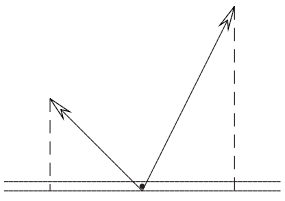


Fig. 28

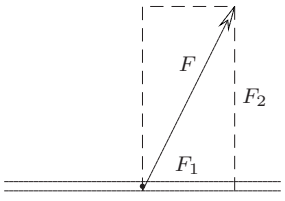


Fig. 29

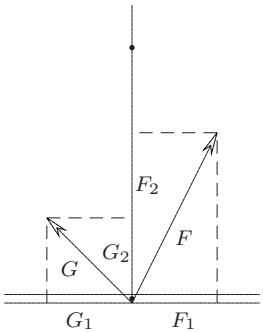


Fig. 30

L'un. – On ne voit en effet guère d'autre réponse plausible. Considérons maintenant la chose sous l'angle suivant. La figure 29 représente à nouveau un force inclinée par rapport à la glissière. Appelons cette force F, et désignons respectivement par F_1 et F_2 ses projections dans la direction de la glissière et dans la direction orthogonale. On peut dire que F_1 est ce qui tend à mouvoir l'attache, tandis que F_2

est ce qui tire sur la glissière. Convenons de munir F_1 du signe + si la traction s'exerce vers la droite, et du signe − si elle s'exerce vers la gauche. Revenons maintenant au cas où deux forces F et G sont appliquées à l'attache, et décomposons chacune d'elles de la manière indiquée (voir figure 30). Est-ce qu'il n'est pas raisonnable de penser que ce qui tend à mouvoir l'attache, c'est $F_1 + G_1$, et que ce qui tire sur la glissière, c'est $F_2 + G_2$?

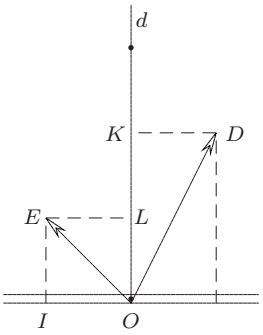


Fig. 31

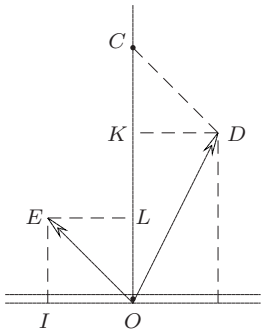


Fig. 32

L'autre. – Mais oui, c'est une conjecture plausible. Et alors, comme nous l'avons vu avant, la condition pour que l'attache demeure immobile s'écrirait $F_1 + G_1 = 0$. L'effet conjoint des deux forces serait alors le même que celui d'une seule force H perpendiculaire à la glissière et dont les projections seraient 0 et $F_2 + G_2$. C'est ce que montre la figure 30.

L'un. – Alors je peux montrer une façon simple de trouver géométriquement le point qui détermine la force H. Je reproduis la figure 30 en donnant des noms à ses points principaux : voir figure 31. Ensuite, je mène par D une parallèle à EO qui coupe la droite d en un point C (figure 32). Le triangle DKC est isométrique au triangle OIE. En effet, les côtés KD et IO sont isométriques. Les angles en I et en K sont tous deux droits, et enfin les angles en O et en D sont de même amplitude par construction (leurs côtés sont deux à deux parallèles). Donc KC est isométrique à OL. Par conséquent OC a pour longueur $F_2 + G_2$. Ainsi C détermine bien la force H. On peut exprimer ce résultat autrement : la force H est donnée par la diagonale appropriée du parallélogramme $ODCE$.

On donne deux forces égales et opposées, par exemple de 100 g chacune. On voudrait, sans menacer l'équilibre, remplacer une de ces deux forces par deux autres, mais dont l'une est donnée à l'avance. Est-ce possible ?

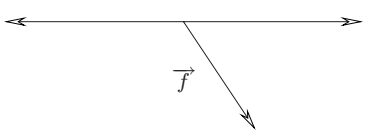


Fig. 33

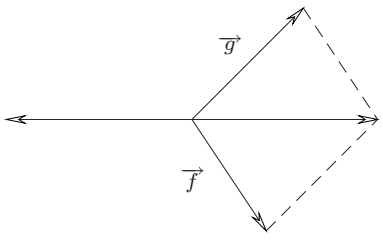


Fig. 34

La figure 33 représente la situation pour un certain choix de la force $\overrightarrow{f}$ donnée à l'avance[2]. La réponse est que l'on peut trouver la force demandée : on construit le parallélogramme dont une diagonale est la force à remplacer et dont un des côtés est la force donnée à l'avance. La force $\overrightarrow{g}$ cherchée est donnée par l'autre côté du parallélogramme (voir figure 34).

3.3 D'autres questions d'équilibre

Prolongements possibles

Le dispositif expérimental proposé permet de poser quelques autres questions conduisant à approfondir d'une part le problème physique de l'équilibre d'un point soumis à des forces, mais aussi d'autre part la règle du parallélogramme. Voici quelques-unes de ces questions.

> Trois points fixes (trois poulies) sont donnés sur le bord de la table. On choisit un quatrième point quelque part sur la table et on y amène le point de jonction des trois ficelles. Est-il toujours possible, en faisant passer les ficelles par les trois points donnés, d'y suspendre trois poids – à déterminer – tels que le point de jonction des ficelles soit en équilibre ?

Supposons d'abord que le quatrième point choisi soit à l'intérieur du triangle déterminé par les trois points fixes. Les directions des forces à appliquer pour obtenir l'équilibre nous sont imposées (figure 35). Construisons alors un parallélogramme ayant deux de ses côtés dans deux des directions données, et sa diagonale dans la troisième direction. Une telle construction est toujours possible (figure 36). Il nous suffira ensuite de choisir nos poids proportionnels aux côtés et à la diagonale du parallélogramme ainsi construit.

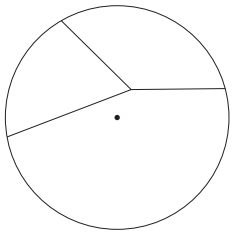


Fig. 35

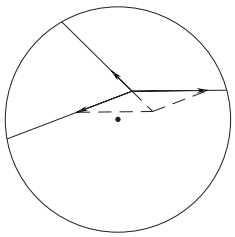


Fig. 36

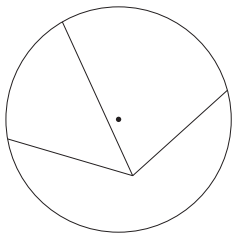


Fig. 37

D'autre part, si le quatrième point choisi est à l'extérieur du triangle déterminé par les trois points fixes, on ne peut plus contruire le parallélogramme requis : la figure 37 montre une situation de ce genre. Pour réaliser l'équilibre dans un tel cas, il faudrait une ficelle qui pousse au lieu de tirer, ce qui n'est pas possible.

La conclusion est que l'intérieur du triangle déterminé par les trois points fixes est l'ensemble des points que l'on peut amener à l'équilibre par un choix approprié des trois forces. Remarquons au passage que si un point est en équilibre sous l'action de trois forces, il demeure en équilibre si on multiplie la grandeur de chacune de ces forces par un même nombre.

[2] Nous représentons maintenant les forces par des lettres surmontées d'une flèche.

L'appareil présenté à la figure 8 à la page 390 permet de vérifier notre conclusion expérimentalement avec une bonne précision. Les trois points fixes sont les sommets des poulies. La figure 38 illustre une réponse particulière.

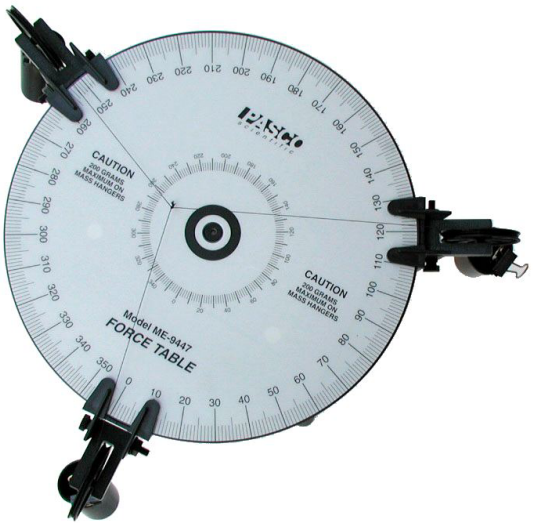


Fig. 38

Une remarque pratique s'impose à propos de cette expérience. Le point dont on étudie l'équilibre (c'est-à-dire l'endroit où se rejoignent les trois ficelles) n'est plus maintenant le centre du cercle. Or chaque poulie se trouve dans un plan vertical passant par ce centre. Il s'ensuit que la ficelle qui passe sur une poulie n'est plus dans le plan de celle-ci, et qu'elle risque donc de quitter la poulie. L'expérience montre qu'avec l'appareil de la figure 8 on peut quand même tolérer un angle assez important (de l'ordre d'une trentaine de degrés) entre chaque ficelle et le plan de la poulie correspondante sans que cet accident se produise.

On accroche des poids aux trois ficelles. Y a-t-il toujours moyen de déterminer où il faut placer les trois points fixes au bord de la table pour que le point de jonction des ficelles demeure en place ?

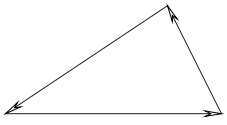


Fig. 39

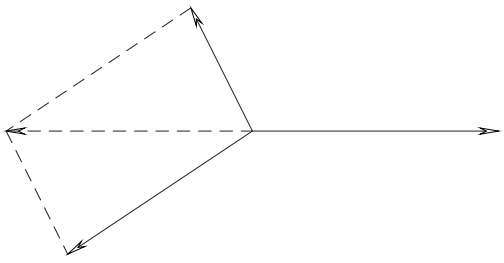


Fig. 40

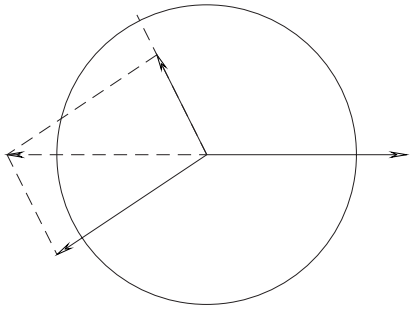


Fig. 41

Pour obtenir un équilibre, il faut que l'on puisse, avec les trois forces, « faire un parallélogramme et sa diagonale ». C'est possible, en vertu de l'inégalité triangulaire, si le plus grand poids est plus petit que la somme des deux autres. Si tel est le cas en effet, on peut « disposer les trois forces en triangle » (figure 39), et donc aussi les disposer comme sur la figure 40 en configuration d'équilibre. Il suffit alors de déposer cette figure sur la table en plaçant l'origine des trois forces au centre : celles-ci pointent vers trois points du bord de la table où on peut placer les poulies (figure 41). Il y a bien entendu une infinité de solutions, correspondant à une rotation d'ensemble d'un angle quelconque du système des trois ficelles autour du centre de la table.

Nous savons qu'un point est en équilibre sous l'action de trois forces si la somme de deux d'entre elles est opposée à la troisième et de même intensité que celle-ci. Mais pour vérifier cela, peut-on commencer par sommer deux quelconques des forces ?

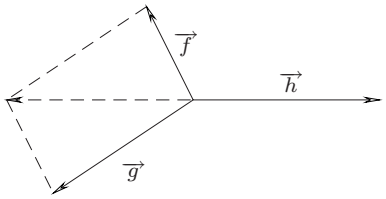


Fig. 42

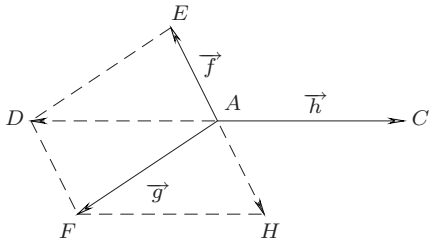


Fig. 43

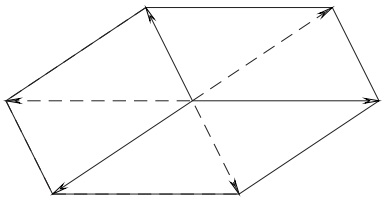


Fig. 44

La figure 42 montre deux forces $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ en équilibre avec une force $\overrightarrow{h}$. Montrons tout d'abord que les forces $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ sont en équilibre avec la force $\overrightarrow{f}$. Pour cela, construisons la somme $\overrightarrow{k}$ de $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ comme le montre la figure 43. Il faut montrer que $\overrightarrow{k}$ est égal et opposé à $\overrightarrow{f}$. Or,

AC est égal et parallèle à DA par construction ;

FH est égal et parallèle à AC par construction ;

donc DA est égal et parallèle à FH ;

donc DF est égal et parallèle à AH puisque $DFHA$ est un parallélogramme ;

mais DF est égal parallèle à EA par construction ;

donc AH est égal et parallèle à EA ;

et par conséquent $\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{f}$.

On tire aussi de cet exercice un nouvel énoncé de la condition d'équilibre d'un point soumis à trois forces : le point est en équilibre si la somme des trois forces qui lui sont appliquées est nulle. Cet énoncé a ceci d'agréable qu'il fait jouer le même rôle à chacune des trois forces.

Si, arrivés à cette question, les élèves manient déjà les vecteurs et s'ils ont reconnu la nature vectorielle des forces, alors la démonstration que nous venons d'achever se résume à remarquer que

$$\text{si} \quad \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = -\overrightarrow{h},$$
$$\text{alors} \quad \overrightarrow{g} + \overrightarrow{h} = -\overrightarrow{f}.$$

Il est assez agréable de constater, comme le montre la figure 44 , que trois forces en équilibre et leurs sommes deux à deux déterminent les sommets d'un hexagone dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

On se donne trois poids et trois points fixes au bord de la table. Existe-t-il un point sur la table qui soit en équilibre sous l'action de ces trois poids ? Si oui, où est ce point ?

Traitons d'abord un cas particulier. Soient les trois forces dont les intensités sont spécifiées par les segments de la figure 45 et les trois points de la figure 46.

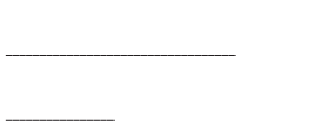


Fig. 45

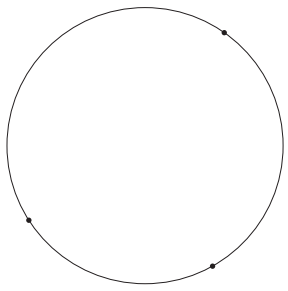


Fig. 46

Pour pouvoir trouver un point en équilibre, il faut d'abord bien entendu que les trois forces puissent être disposées en un système de somme nulle. Nous savons pour cela que le plus grand des trois poids doit être plus petit que la somme des deux autres (voir ci-dessus). Tel est le cas pour les forces que nous nous sommes données. Disposons-les donc en un système de somme nulle (figure 47).

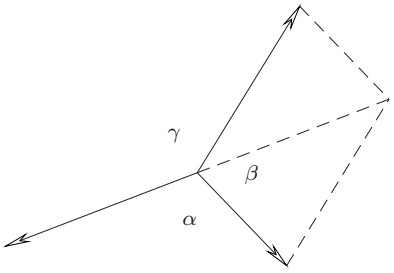


Fig. 47

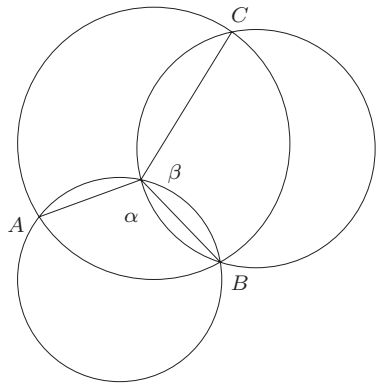


Fig. 48

Ces trois forces déterminent trois angles α, β et γ. Traçons sur AB un arc de cercle tel que tout angle $\widehat{AXB}$ ayant son sommet X sur cet arc soit égal à α. Traçons de même sur BC un arc de cercle correspondant à l'angle β (voir figure 48). L'intersection de ces deux arcs de cercle nous donne une position possible pour l'équilibre. Nous avons donc une solution à notre problème : le point cherché existe et nous l'avons situé.

Par ailleurs, si les angles α et β avaient été tous deux suffisamment proches de π, les deux cercles ne se seraient pas coupés. Nous pourrions alors essayer de travailler au départ d'un autre couple de côtés du triangle ABC. Mais on voit bien que, quels que soient les angles de ce triangle, il existera des cas, si α et β sont trop grands, où nous ne trouverons pas de point d'intersection aux deux cercles.

On tire sur un point avec des forces de même grandeur réparties de telle sorte que deux forces successives fassent entre elles un angle de 72°. L'anneau est-il en équilibre ?

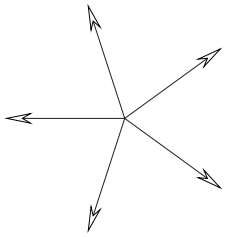


Fig. 49

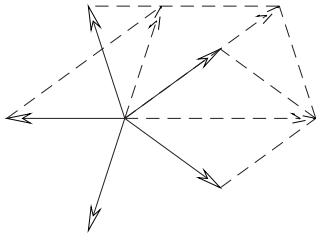


Fig. 50

La figure 49 montre les forces en jeu. On peut en faire la somme par la règle du parallélogramme, et on trouve une force nulle, aux erreurs de tracé près. La figure à construire est quelque peu confuse (figure 50). Mais on peut aussi s'aviser que pour trouver la somme de deux forces, au lieu de passer par la diagonale du parallélogramme (figure 51), il suffit d'enchaîner les deux flèches (voir figure 52). Si on procède de la sorte pour les cinq forces en jeu dans notre problème, les flèches dessinent évidemment un pentagone régulier (figure 53), et il va alors de soi que leur somme est nulle.

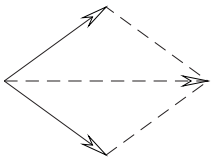


Fig. 51

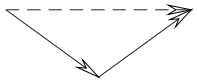


Fig. 52

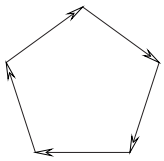


Fig. 53

Vers où cela va-t-il ? Ce chapitre prépare évidemment l'enseignement de la mécanique. Plus précisément, nous avons examiné ici l'équilibre d'un point. La matière qui vient naturellement ensuite est l'étude de l'équilibre d'un solide indéformable, avec pour cas particulier l'équilibre dans un champ de pesanteur uniforme et la théorie des centres de gravité. Le parallélogramme des forces est aussi l'un des éléments clés de la dynamique, qui est l'étude des mouvements des corps sous l'action des forces.

13

Les mouvements et les vitesses

Avant-propos

La notion de vitesse est essentielle en mécanique. Elle se précise à travers deux étapes importantes de sa construction : son évaluation numérique et sa caractérisation géométrique. Or, dès qu'un mouvement se révèle être un peu complexe, ces deux aspects se retrouvent presque inextricablement liés, et là où en mathématiques on étudie au départ deux notions distinctes : la dérivée et le vecteur, en physique on ne considère plus qu'un seul objet : la vitesse.

À la croisée des deux disciplines, une image mentale commune peut se dégager de l'étude de photographies stroboscopiques du mouvement de projectiles. Elle est subordonnée à un principe général de discrétisation : les éclairs successifs d'un stroboscope figent des positions très rapprochées du projectile, et invitent à décomposer son mouvement en une succession très dense de mouvements simples, quasi rectilignes et uniformes, mais dont la direction et l'intensité de la vitesse changent tout le temps.

C'est à partir de cette image discrète que nous proposons ici de construire progressivement la notion de vitesse.

En bref, ce chapitre vise à

- détailler pourquoi et comment la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme peut être considérée comme un prototype de grandeur vectorielle en physique,
- définir la vitesse instantanée d'un mobile comme vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme « idéal »,
- mettre en évidence l'efficacité de ce double point de vue :

  grandeur vectorielle/mouvement rectiligne idéal

  à travers l'étude du mouvement circulaire uniforme.

En plus des photographies stroboscopiques – et des expériences de pensée, chères aux physiciens – le recours aux fonctions d'un tableur permet de proposer des modèles et de simuler des situations. En outre, dans le cas du mouvement circulaire uniforme, la définition même de ce genre de mouvement permet d'en *construire a priori des stroboscopies* à l'aide d'un tableur !

1 Marcher ou nager, c'est la même chose ?

De quoi s'agit-il ?

Décrire un mouvement rectiligne uniforme (inaccessible à des mesures directes) à partir des caractéristiques d'autres mouvements rectilignes uniformes (accessibles à de telles mesures).

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme. Une interprétation cinématique des équations paramétriques d'une droite.

Sur les vitesses situées dans le cadre général du calcul vectoriel, voir la section 8.3 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les éléments du calcul vectoriel dans le plan, par exemple en termes de changements de position (voir le chapitre 8). La notion de mouvement rectiligne uniforme, en particulier de vitesse d'un tel mouvement, conçue dans un premier temps comme vitesse moyenne.

1.1 La décomposition d'un mouvement rectiligne

Comment s'y prendre ?

La situation suivante est simple, et très classique[1].

> Question 1.
> Lors d'un entraînement de triathlon, un athlète doit traverser à la nage une rivière large de 200 m et animée d'un fort courant. Il part du pied A d'un pont qui traverse cette rivière (cf. la figure 1 ci-dessous) et s'efforce de toujours nager droit devant lui, perpendiculairement à la berge, mais – bien sûr ! – le courant le déporte. Yves et Xavier sont eux aussi au pied A du pont, et observent le nageur prêt à s'élancer. Comment devraient-ils s'organiser (aussi simplement que possible) pour estimer la vitesse du nageur pendant sa traversée ?

Une manière simple de s'organiser

Voici une méthode qui suppose qu'Yves et Xavier disposent tout au plus d'une montre ou d'un chronomètre, et savent marcher... intelligemment.

Xavier emprunte le sentier le long de la berge et marche en restant toujours à hauteur du nageur ; en allongeant le pas, il fait des enjambées d'un mètre (en moyenne) et note la distance parcourue pour chaque minute écoulée. Yves fait de même sur le pont, et en s'efforçant lui aussi de rester toujours à hauteur du nageur. Tout cela revient donc à situer la position du nageur de minute en minute, dans un repère orthonormé « naturel ».

[1] Pour des variantes et des prolongements, on se reportera par exemple à E. Hecht [1999] : p. 51-59, A. Meessen [1984] : problème 5 à la p. 122, Physical Science Study Committee [1970] : p. 86-87 ou FESeC [1997] : p. V9 à V11, ... sans oublier Formes et mouvements, CREM [2001a] : p. 274-275.

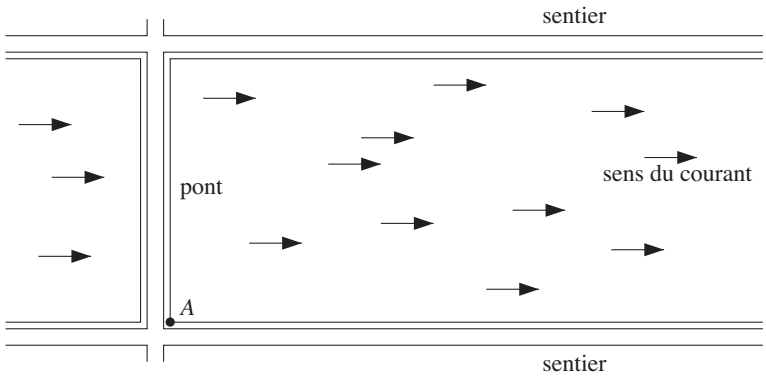


Fig. 1 : Le décor.

Il est relativement raisonnable de faire ici une *hypothèse d'uniformité* concernant les déplacements de Xavier et d'Yves. Pour fixer les idées, supposons donc que Xavier parcourt ainsi d'une démarche régulière 40 mètres par minute, tandis qu'Yves traverse pareillement le pont d'un pas égal en 10 minutes, c'est-à-dire à raison de 20 mètres par minute.

Les élèves peuvent facilement simuler cette situation à l'aide d'un tableur, et représenter ainsi les positions respectives de Xavier, d'Yves et du nageur toutes les minutes.

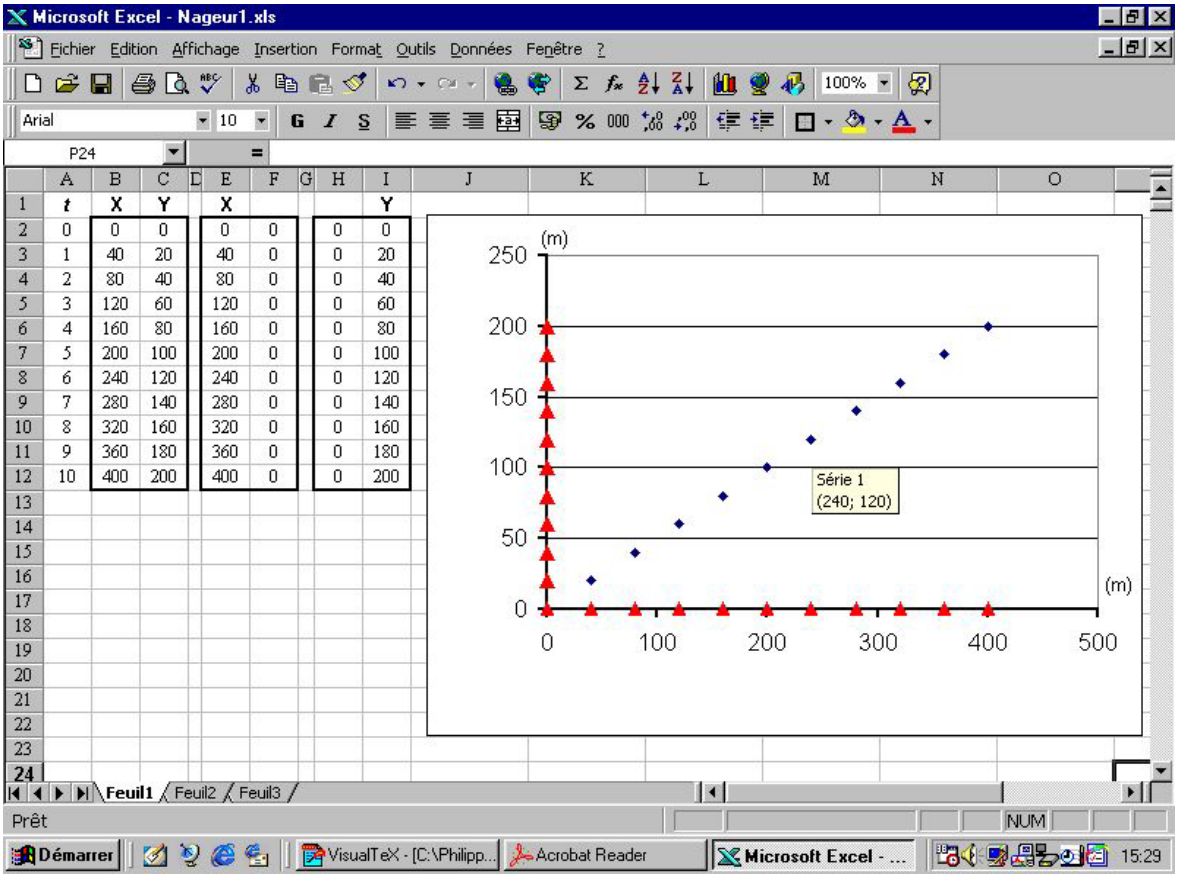


Fig. 2 : Les positions de Xavier, Yves et du nageur, toutes les minutes.

Par subdivisions successives, ils peuvent ensuite faire apparaître les positions des trois protagonistes de la question de manière presque continue.

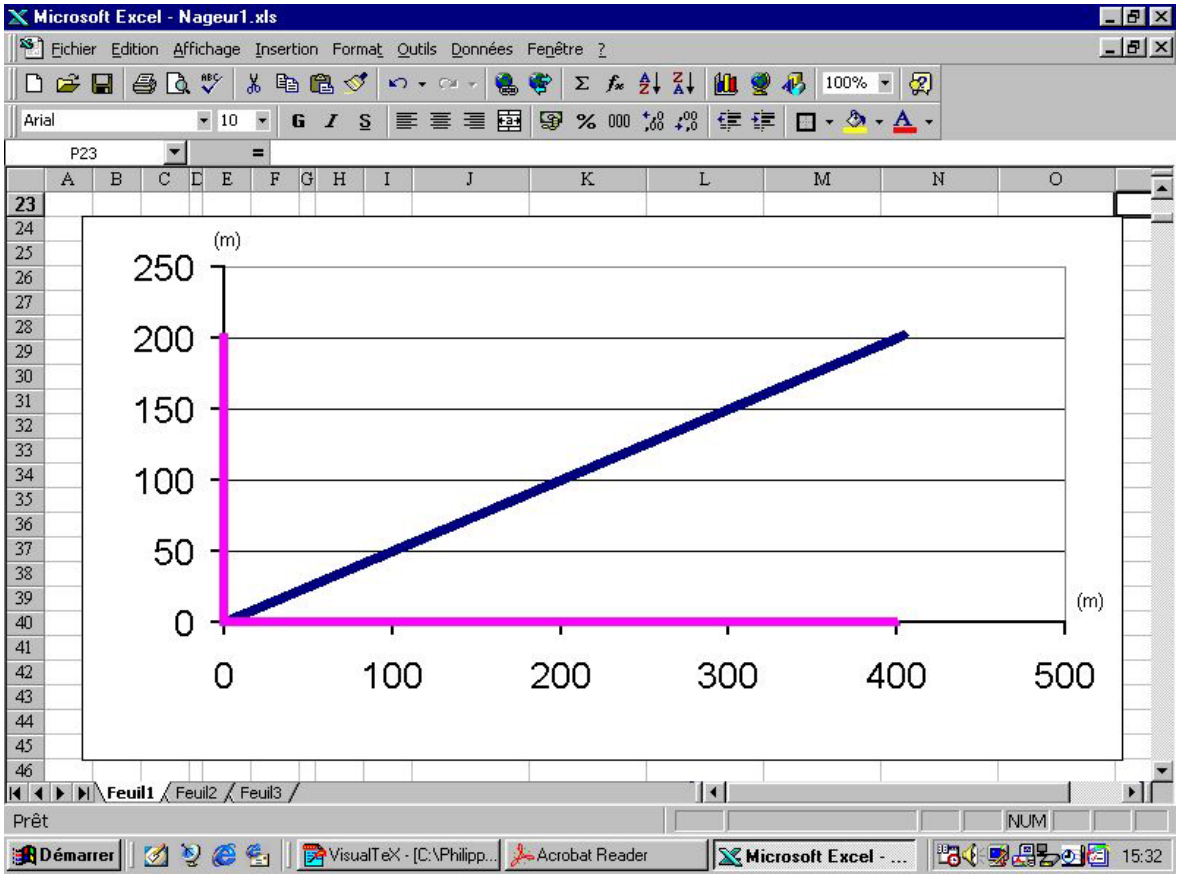


Fig. 3 : Les positions de Xavier, Yves et du nageur, toutes les 0,01 s.

Yves atteint ainsi l'autre rive en même temps que le nageur ; celui-ci a donc, lui aussi, mis 10 minutes pour traverser la rivière. Quelles sont les autres caractéristiques de son mouvement ?

Le déplacement du nageur est rectiligne

Décrire le déplacement du nageur revient à exprimer sa position en fonction de celles d'Yves et de Xavier. Or, nous avons supposé que le déplacement de chacun des deux observateurs est rectiligne et uniforme. La position de Xavier – comptée en mètres à partir du point A – s'exprime donc par l'équation

$$x = 40t,$$

où t est la durée de marche, comptée en minutes ; et pareillement pour Yves

$$y = 20t.$$

La position du nageur est ainsi déterminée à tout instant grâce aux deux équations

$$\begin{cases} x = 40t, \\ y = 20t, \end{cases}$$

qui méritent dès lors d'être appelées les *équations du mouvement*.

Occupons-nous de la trajectoire du nageur, c'est-à-dire de l'ensemble de toutes ses positions. C'est une figure géométrique indépendante du temps. Elle s'obtient donc en « chassant » le temps t hors des deux équations du mouvement. La première équation donne $t = \frac{x}{40}$, ce qui permet d'écrire la deuxième, à savoir

$$y = 20 \cdot \frac{x}{40} = \frac{1}{2}x.$$

C'est l'équation d'une droite[2]. Le nageur suit donc une trajectoire rectiligne dont le point de départ est l'origine A du repère « naturel ».

Le mouvement du nageur est uniforme

Rappelons qu'un mouvement est qualifié d'uniforme si une même durée d'observation correspond toujours à un même espace parcouru, indépendamment de l'instant où débute l'observation.

Le mouvement du nageur détermine celui de Xavier et d'Yves, et chacun de ces mouvements est rectiligne. Montrons alors que le déplacement du nageur est uniforme si et seulement si celui de Xavier et d'Yves le sont aussi.

Supposons d'abord que les mouvements de Xavier et d'Yves sont uniformes. Situons leurs positions à deux instants d'observation (différents) : soient X_1, X_2 et Y_1, Y_2. Les mouvements étant uniformes, si la durée d'observation est la même, les distances parcourues par chacun doivent donc être identiques (cf. figure 4). On a

$$\left|X_1X_1'\right| = \left|X_2X_2'\right|,$$

$$\left|Y_1Y_1'\right| = \left|Y_2Y_2'\right|,$$

où X_1', X_2' et Y_1', Y_2' désignent les positions atteintes à la fin de l'observation.

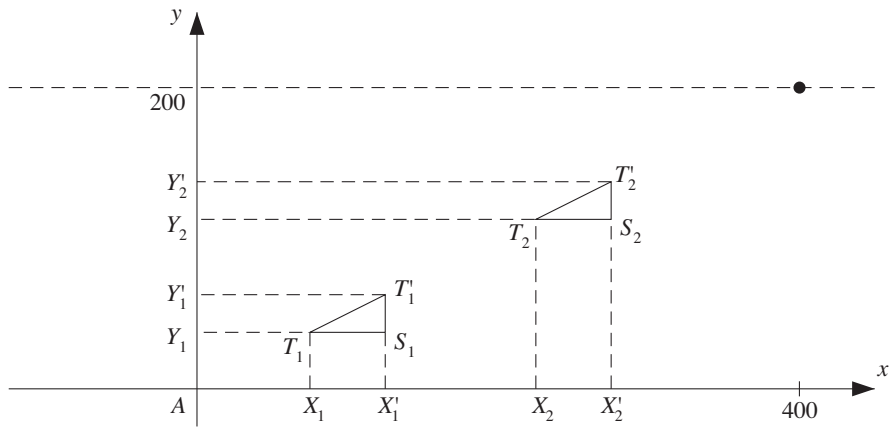


Fig. 4 : L'uniformité en termes de triangles isométriques.

[2] Le contexte est différent, mais les idées mises en œuvre ici sont exactement celles des chapitres 5 et 6.

Mais alors les triangles (rectangles) $T_1S_1T_1'$ et $T_2S_2T_2'$ sont isométriques : pendant cette durée d'observation, les distances $|T_1T_1'|$ et $|T_2T_2'|$ parcourues par le nageur sont donc bien identiques.

La réciproque s'établit d'une manière analogue, c'est-à-dire à l'aide d'une isométrie de triangles rectangles. Supposons que le mouvement du nageur est rectiligne uniforme. La trajectoire du nageur étant rectiligne, les angles $\widehat{T}_1$ et $\widehat{T}_2$ des triangles rectangles $T_1S_1T_1'$ et $T_2S_2T_2'$ sont égaux, et le mouvement du nageur étant uniforme, les distances $|T_1T_1'|$ et $|T_2T_2'|$ sont égales. Les triangles rectangles $T_1S_1T_1'$ et $T_2S_2T_2'$ sont donc isométriques, d'où on déduit immédiatement que les distances parcourues par Xavier (resp. Yves) pendant les durées d'observation sont identiques.

Une estimation de la vitesse du nageur

Le déplacement du nageur étant rectiligne et uniforme, sa vitesse est constante, et peut se calculer dès qu'on connaît la distance parcourue pendant un intervalle de temps. Or, la distance parcourue pendant les 10 minutes que dure la traversée s'obtient grâce au théorème de Pythagore (cf. figure 5) :

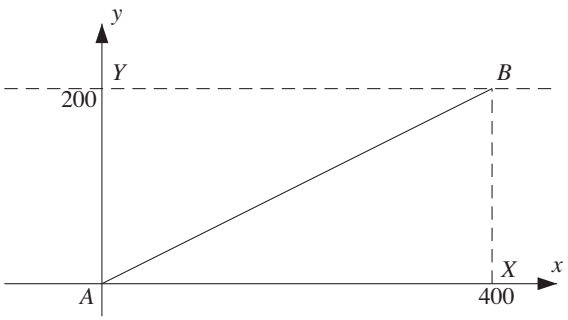


Fig. 5 : L'espace parcouru par le nageur.

$$|AB| = \sqrt{|AX|^2 + |AY|^2} = \sqrt{400^2 + 200^2} = 200\sqrt{5} = 447,21\ldots \text{ (m)}$$

La vitesse du nageur est donc approximativement de 45 mètres par minute (c'est-à-dire $0,75$ m/s ou $2,7$ km/h).

1.2 La vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme

Comment s'y prendre ?

Aussi satisfaisantes qu'elles soient, les réponses apportées à la question 1 méritent d'être approfondies. C'est ce que la question suivante se propose de faire. Son caractère plus théorique explique que sa résolution n'est pas nécessairement laissée à la seule initiative des élèves. L'enseignant veillera néanmoins à ce que les caractéristiques essentielles de la vitesse en tant que *grandeur vectorielle* – puisque c'est de cela qu'il s'agit ici – soient clairement mises en évidence pour tous les élèves.

Question 2.
Quelles sont les relations qui lient les trois vitesses, celle de Xavier, celle d'Yves et celle du nageur, et plus précisément, comment exprimer ces relations en termes mathématiques (direction, sens des mouvements) et en termes physiques (mobiles concernés, grandeurs associées aux mouvements) ?

Un bilan des observations

On vient de montrer que le mouvement du nageur est rectiligne et uniforme si et seulement si celui d'Yves et Xavier le sont et que la vitesse du nageur peut être évaluée en conséquence, à partir des vitesses respectives d'Yves et de Xavier.

Ceci remis en mémoire, les déplacements et donc les vitesses d'Yves, de Xavier et du nageur ont néanmoins des caractéristiques physiques assez différentes. Précisons ces différences.

- Chacun des déplacements considérés concerne des personnes différentes, et dans notre représentation, ce sont bien des *points* différents qui bougent.
- D'autre part, les *droites* suivant lesquelles les mouvements rectilignes uniformes se manifestent sont complètement distinctes pour chacun des trois protagonistes.
- Enfin, ni Yves ni Xavier n'exercent d'effet physique contraignant sur le nageur, ils ne lui communiquent pas l'énergie nécessaire à son effort et ils ne sont donc en rien la cause de son mouvement.

Et néanmoins, comme on l'a vu par exemple en écrivant l'équation de la trajectoire du nageur, les trois mouvements ne sont pas indépendants. Les déplacements de Xavier et d'Yves permettent même de reconstituer complètement le mouvement du nageur.

Comment relier le mouvement de Xavier ou d'Yves, avec ce que le nageur ressent ?

On peut introduire dans le raisonnement des mouvements et donc des vitesses dont les effets physiques sont directement perceptibles par le nageur.

- Si le nageur est en eau calme (un étang ou un lac par exemple), l'absence de courant lui permet de nager effectivement droit devant lui sans être déporté. Cette vitesse existe aussi pour notre triathlète pris dans le courant d'eau : c'est celle qu'il acquiert par l'exercice de sa (seule) force musculaire. C'est aussi celle qu'il s'efforce de diriger toujours perpendiculairement à la rive. Comme il essaie de se diriger ainsi indépendamment du courant, on appelle cette vitesse : la *vitesse du nageur par rapport au courant*, ou *par rapport à l'eau*.
- Si le nageur se laisse dériver sous l'effet du courant sans nager[3], son déplacement, comme sa vitesse, est parallèle à la rive. La vitesse

[3] ... Mais sans oublier de rester à la surface de l'eau...

correspondante n'est alors en fait que la vitesse du courant, ou si on veut être précis : la *vitesse du courant par rapport à la rive*.

Résumons-nous : nous disposons maintenant de cinq vitesses au lieu de trois pour analyser le mouvement du nageur ! Mais comme trois d'entre elles possèdent des effets physiques ressentis directement par le nageur, il y a peut-être du sens à décrire la manière dont ces effets sont reliés les uns aux autres.

Comment combiner des grandeurs caractérisées aussi bien par leur direction que par leur intensité ?

Chacune des vitesses rencontrées jusqu'à maintenant est associée à un mouvement rectiligne uniforme et est entièrement déterminée par quatre caractéristiques :

- le point en mouvement, ou *point d'application* de la vitesse,
- la *direction* de la vitesse, c'est-à-dire la droite suivant laquelle le mouvement rectiligne se produit,
- le *sens* de la vitesse, qui est un des deux sens[4] de parcours sur la droite en question,
- l'*intensité* de la vitesse, c'est-à-dire la mesure de l'espace parcouru par unité de temps.

Les résultats obtenus dans la question 1 suggèrent alors une manière de combiner des grandeurs physiques ayant autant de caractéristiques géométriques diverses. La vitesse du nageur par rapport au courant et la vitesse du courant par rapport à la rive sont en effet deux grandeurs physiques du type que l'on vient de définir. Elles concernent directement notre nageur. Il y a donc du sens à envisager leur effet simultané, qui se manifeste dans le mouvement résultant du nageur. De plus, les caractéristiques de ce mouvement résultant sont déterminées à partir d'un rectangle naturellement associé à la situation :

- ce mouvement résultant est lui aussi rectiligne, et on sait déterminer sa direction, c'est celle de la diagonale d'un rectangle dont les côtés sont proportionnels à chacune des vitesses primitives ;
- il est de plus lui aussi uniforme, de telle sorte qu'on sait aussi mesurer l'intensité de la vitesse correspondante : elle est équivalente à la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés sont équivalents à chacune des mesures des vitesses primitives.

Pour faire bref, une grandeur physique possédant les quatre caractéristiques géométriques décrites plus haut, et obéissant à cette règle de combinaison « en rectangle » sera appelée une *grandeur vectorielle*, afin de mettre en évidence les traits communs de ce type de grandeur avec la notion de vecteur.

On représente alors par $\overrightarrow{v}_{nageur/rive}$ la vitesse du nageur par rapport à la rive, considérée comme grandeur vectorielle ; on note pareillement

[4] Le sens du courant est distinct de sa direction, du moins dans le langage mathématique...

$\overrightarrow{v}_{courant/rive}$ la vitesse du courant par rapport à la rive, et $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}$ la vitesse du nageur par rapport au courant. La résultante[5] des deux vitesses $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}$ et $\overrightarrow{v}_{courant/rive}$ donne donc naissance à la vitesse $\overrightarrow{v}_{nageur/rive}$ du nageur :

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{nageur/courant} + \overrightarrow{v}_{courant/rive}.$$

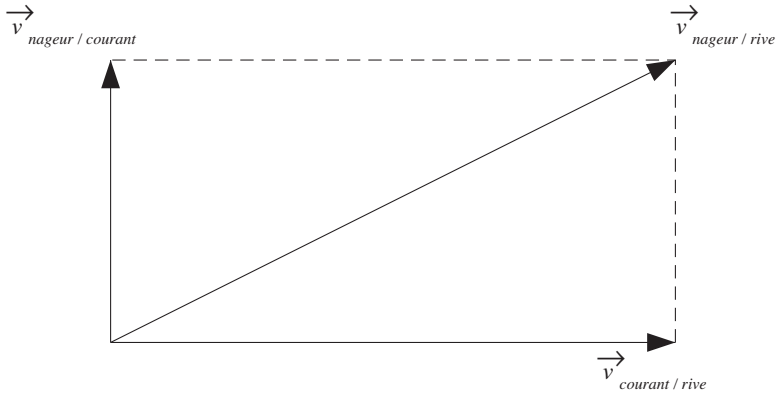


Fig. 6 : La combinaison des vitesses se visualise ici à l'aide d'un rectangle.

L'opération de combinaison ou d'addition vectorielle met ainsi bien en jeu les *quatre* caractéristiques des grandeurs concernées : le point d'application (commun), la direction, le sens et la mesure ou intensité.

... Mais on n'a pas encore répondu à la question !

Au travers de la notion de grandeur vectorielle, la relation

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{nageur/courant} + \overrightarrow{v}_{courant/rive}$$

est maintenant revêtue d'une signification tant mathématique que physique. Mais cette relation n'est pas celle qui a été mise en scène dans la question 1, et qui serait plutôt du type

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{Yves} + \overrightarrow{v}_{Xavier},$$

où $\overrightarrow{v}_{Xavier}$ et $\overrightarrow{v}_{Yves}$ désignent les vitesses de Xavier et d'Yves. Comme il est important ici de préciser les points d'application des vitesses en question, il vaudrait même mieux écrire :

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(T_1) = \overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) + \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1),$$

où Y_1 et X_1 sont les positions respectives de Yves et de Xavier lorsque le nageur est observé en T_1 dans la rivière (cf. figure 7). Mais que signifie une telle écriture, mathématiquement correcte, au point de vue physique ?

[5] Ou combinaison, ou encore somme vectorielle...

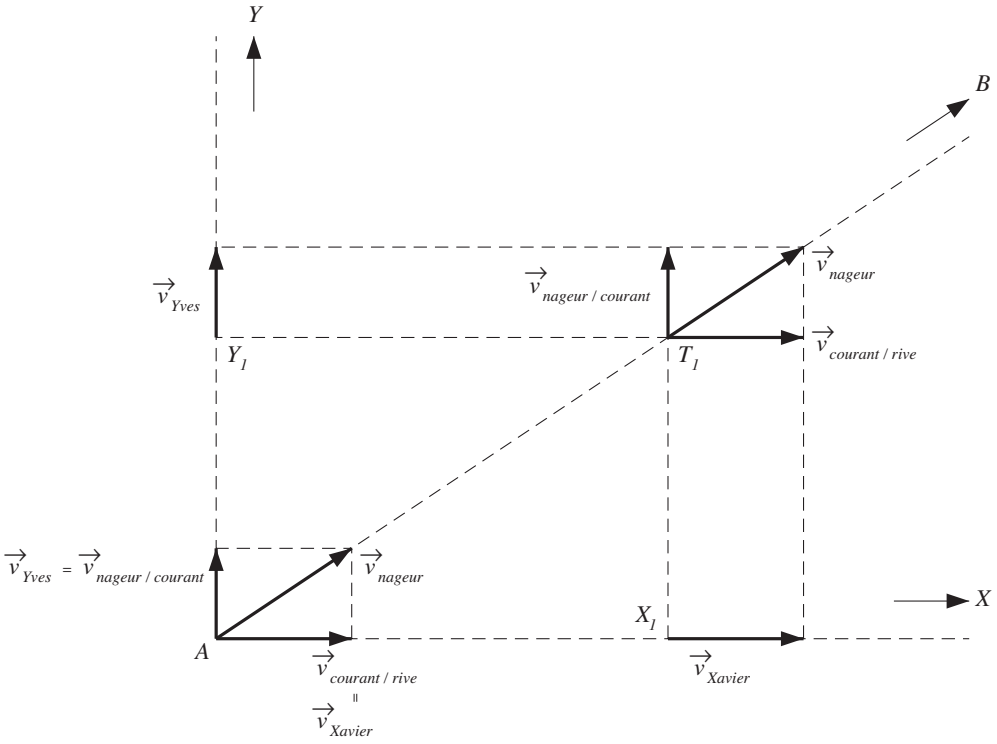


Fig. 7 : Des grandeurs a priori différentes traduisent des effets équivalents.

La réponse vient en deux étapes. Au moment initial, c'est-à-dire lorsque Xavier, Yves et le nageur entament leurs mouvements respectifs au pied A du pont, on a

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(A) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(A) + \overrightarrow{v}_{courant/rive}(A),$$

et donc aussi

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(A) = \overrightarrow{v}_{Yves}(A) + \overrightarrow{v}_{Xavier}(A), \tag{1}$$

puisqu'au point A, on a des égalités de vitesses

$$\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(A) = \overrightarrow{v}_{Yves}(A) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_{courant/rive}(A) = \overrightarrow{v}_{Xavier}(A).$$

D'autre part, le mouvement d'Yves est rectiligne et uniforme, de telle sorte qu'il y a un sens physique à écrire

$$\overrightarrow{v}_{Yves}(A) = \overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1), \tag{2}$$

puisque cela signifie que, lors d'un déplacement le long de sa propre trajectoire rectiligne, Yves ne voit pas changer sa vitesse. On donne ainsi une signification physique à ce que cette vitesse-là ne soit pas liée à son point d'application : c'est une caractéristique fondamentale du mouvement sous-jacent ! Pour la même raison, on a aussi

$$\overrightarrow{v}_{Xavier}(A) = \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1), \tag{3}$$

et

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(A) = \overrightarrow{v}_{nageur/rive}(T_1). \qquad (4)$$

La relation (1) devient ainsi, suite à (2), (3) et (4),

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(T_1) = \overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) \ + \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1),$$

qui est bien la relation en jeu dans la question 1. En termes de grandeur vectorielle, cette relation s'interprète donc maintenant comme une manière d'exprimer globalement — c'est-à-dire indépendamment du point d'application — la composition de mouvements rectilignes uniformes.

Et si on veut vraiment aller au fond des choses...

Une question en appelle une autre. Quelles sont en général les conditions physiques qui autorisent certaines vitesses à se libérer de leur point d'application ? Par exemple, quelle est la signification physique des égalités mathématiques

$$\overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1) \ \text{ et } \ \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1) = \overrightarrow{v}_{courant/rive}(T_1) \ ?$$

À nouveau, il vaut mieux décomposer le raisonnement en deux étapes. D'abord, une égalité telle que

$$\overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1)$$

exprime que deux grandeurs vectorielles ont la même manifestation physique au même point. Mais l'égalité qui vient ensuite à l'esprit, à savoir

$$\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1),$$

se révèle avoir un statut assez nouveau ! En effet, le point d'application de cette vitesse se déplace le long d'une trajectoire rectiligne qui n'est pas du tout celle du mouvement sous-jacent, c'est-à-dire du nageur (cf. la figure 7), et ce n'est donc pas le caractère uniforme du mouvement du nageur qui peut rendre compte à lui seul de l'égalité en question. Comment interpréter néanmoins cette égalité en termes de mouvements rectilignes uniformes ?

Cette interprétation prend en compte l'hypothèse suivante : quel que soit l'endroit de la rivière où il se trouve, le nageur déploie pour se déplacer (en restant perpendiculaire au courant) une énergie qui est toujours la même[6]. De manière presque équivalente, s'il n'y a pas de courant, et si plusieurs nageurs de même force que notre triathlète partent en même temps de la rive en nageant droit devant eux, ils progresseront en restant toujours à même hauteur ; une telle circonstance s'observe d'ailleurs assez souvent dans les premiers instants d'une course de vitesse en natation. Et la conclusion est analogue si on imagine que ces nageurs partent de la ligne Y_1T_1.

[6] Cela sous-entend, par exemple, qu'il n'y a pas un endroit dans la rivière où la température de l'eau est anormalement froide, et où un engourdissement ou des crampes peuvent ralentir le nageur ; ce genre d'effet est évoqué dans la question 4 plus loin.

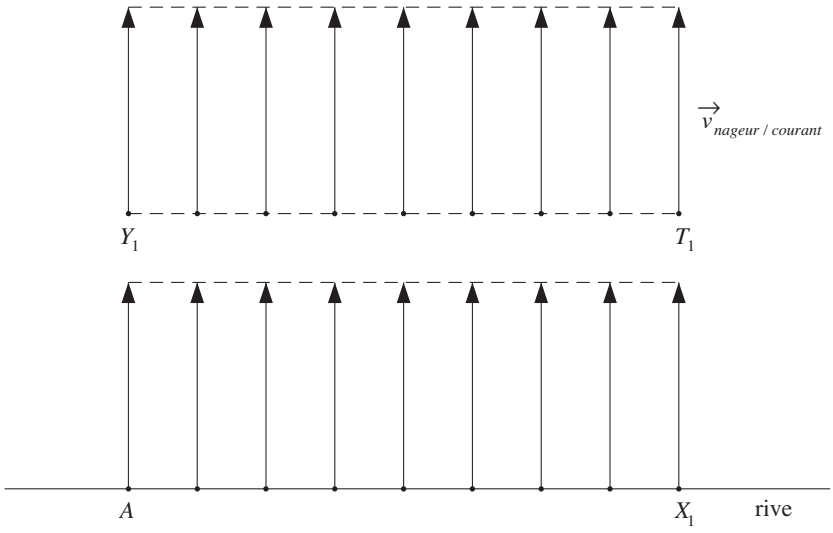


Fig. 8 : Le transport parallèle de la vitesse du nageur par rapport au courant.

C'est au sens de telles expériences de pensée que l'égalité

$$\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1)$$

prend alors une double signification physique, à savoir :

- il existe un mouvement rectiligne uniforme qui part du point Y_1 pour arriver en T_1,
- et le long de la trajectoire de ce mouvement, une famille continue de mouvements rectilignes uniformes permet de relier $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1)$ à $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1)$.

En bref, deux mouvements rectilignes uniformes peuvent être considérés comme équivalents dès qu'il y a moyen de les « transporter par parallélisme » l'un sur l'autre de manière continue.

Une description analogue s'applique aux deux égalités

$$\overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1) = \overrightarrow{v}_{courant/rive}(X_1) = \overrightarrow{v}_{courant/rive}(T_1),$$

et correspond d'ailleurs à l'idée d'un courant constant en tout point de la rivière, c'est-à-dire un courant dont la mesure de l'effet donne toujours le même résultat, quel que soit l'endroit de la rivière où cette mesure est réalisée.

1.3 Du rectangle au parallélogramme

Comment s'y prendre ?

Revenons-en à notre triathlète, et remarquons d'abord qu'il y a un moyen bien simple pour aider le nageur à se déplacer perpendiculairement à la direction du courant. Il suffit qu'il nage en restant face à un troisième larron – appelons-le Jacques – qui se déplace sur l'autre rive, en restant toujours à la même hauteur que Xavier (cf. la figure 9).

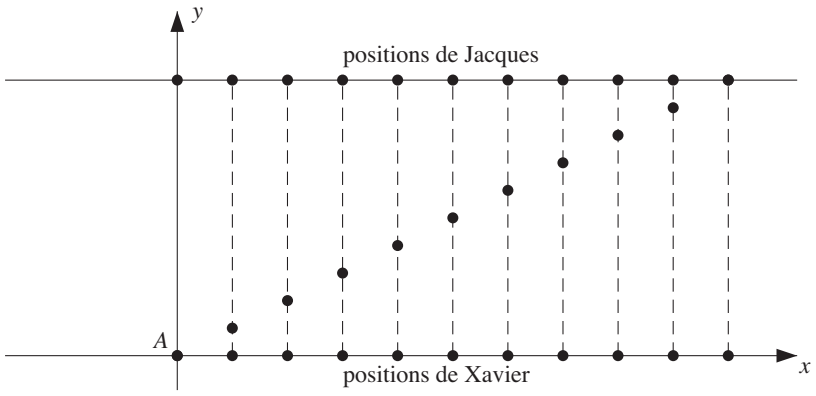


Fig. 9 : Le nageur se dirige en restant en face de Jacques.

Question 3.
Que se passe-t-il alors si Jacques, au lieu de partir du point Y, à l'extrémité du pont sur l'autre rive, entame son mouvement par exemple 120 mètres avant ce point ? Que faut-il changer dans la résolution de la question 1 ?
Pour que cette nouvelle situation reste comparable à celle qui précède, on suppose encore que la vitesse de Jacques reste la même que celle de Xavier, que le nageur s'efforce de garder toujours Jacques en point de mire et qu'il essaie de maintenir sa vitesse (dans la direction qu'il vise) à 20 mètres par minute.

Il n'y a pas grand-chose à changer !

En fait, on peut reproduire textuellement tout le raisonnement développé dans la réponse à la question 1 ainsi que la formulation vectorielle qui en a été présentée dans la réponse à la question 2. Car ce qui importe, c'est qu'on combine encore deux mouvements rectilignes uniformes : le fait que leurs directions ne soient plus orthogonales ne change rien à l'affaire. Le mouvement résultant du nageur est donc encore rectiligne et uniforme : le parallélogramme remplace le rectangle (cf. la figure 10).

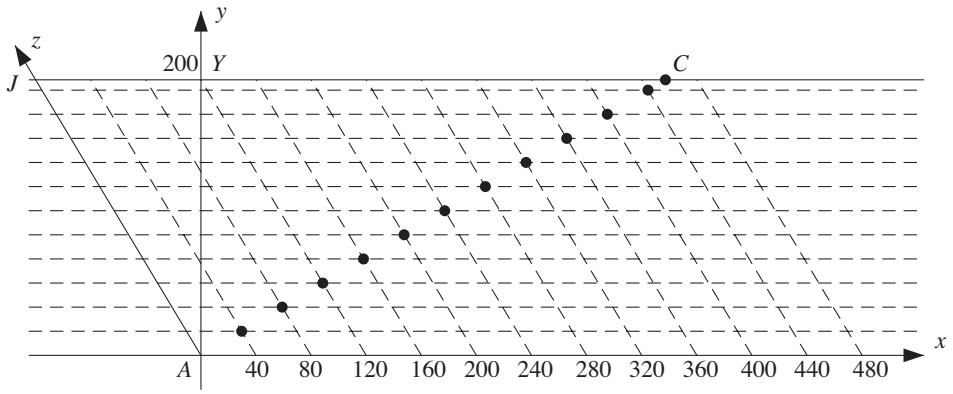


Fig. 10 : La trajectoire du nageur est déterminée par des parallélogrammes.

L'écriture vectorielle permet de manifester cette permanence du raisonnement. En effet,

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{nageur/courant} + \overrightarrow{v}_{courant/rive},$$

pourvu qu'on identifie correctement la direction des différents vecteurs $\overrightarrow{v}_{nageur/rive}$, $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}$ et $\overrightarrow{v}_{courant/rive}$, puisque c'est uniquement en terme de directions que les changements par rapport à la question 1 se produisent.

Le calcul de la vitesse du nageur

Le calcul de la vitesse réelle du nageur dans la nouvelle situation peut encore s'obtenir par analogie avec le cas « rectangulaire ». D'abord, dans un repère adapté (cf. la figure 10), les deux équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} x = 40t, \\ z = 20t, \end{cases}$$

où t est toujours la durée du déplacement compté en minutes. Ensuite, le calcul du temps nécessaire à la traversée résulte de l'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AJY (cf. la figure 11) : la relation

$$200^2 + 120^2 = (20t)^2$$

implique en effet : $t = \sqrt{136} = 11,66\ldots$ (en minutes).

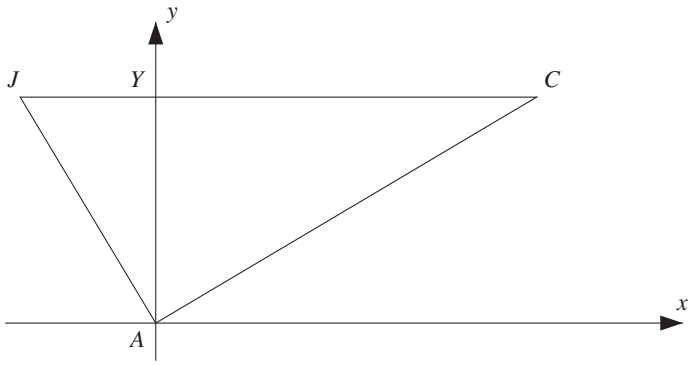


Fig. 11 : Le théorème de Pythagore permet d'évaluer la vitesse.

On en déduit $|YC| = 40 \cdot (11,66\ldots - 3) = 346,47\ldots$ (m). Le théorème de Pythagore, employé cette fois-ci dans le triangle AYC permet alors d'évaluer

$$|AC| = 400,05\ldots \text{ (m)}.$$

Et finalement, la vitesse du nageur vaut

$$\text{mesure de } \overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \frac{400,05\ldots}{11,66\ldots} = 34,30\ldots \text{ (m/min)}.$$

Ce résultat n'a rien de bien étonnant : le nageur a mis plus de temps qu'auparavant pour parcourir une plus petite distance !

1.4 Synthèse : la notion de grandeur vectorielle

Beaucoup de grandeurs utilisées en physique proviennent d'une description géométrique des phénomènes qu'on souhaite étudier, cette description incluant presque toujours le mode de calcul de ces grandeurs. Les vitesses des mouvements rectilignes uniformes fournissent peut-être l'exemple le plus simple de grandeurs susceptibles d'une telle description géométrique. A ce titre, elles servent de modèles à ce qu'on appelle ici une *grandeur vectorielle*. On se limite dans la suite aux premières considérations relevant de la mécanique du point matériel.

La définition de grandeur vectorielle

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un point matériel dans le plan ou dans l'espace, la première chose à délimiter est l'ensemble des positions que ce point peut occuper durant son mouvement. Il s'agit souvent d'une région plus ou moins bien définie du plan ou de l'espace, sans qu'on exige *a priori* de se restreindre ainsi à la seule trajectoire. De plus, la partie en question n'est pas nécessairement rectiligne ou plane : le mouvement pendulaire ou le mouvement à la surface de la terre en sont deux illustrations. Cette partie de l'espace dans laquelle se déroule le mouvement du point matériel s'appelle l'*espace de configuration* de ce point ; on est supposé assez naturellement y disposer d'un procédé de calcul de la distance séparant deux points quelconques.

Une grandeur physique d'une espèce donnée est qualifiée de *grandeur vectorielle* si elle possède les trois séries de propriétés suivantes.

- D'abord, des *propriétés de représentation géométrique* : au sens où il existe une représentation géométrique de cette grandeur qui possède
  - une origine ou point d'application, pris dans l'espace de configuration,
  - une direction,
  - un sens,
  - une intensité évaluée par rapport à une unité de mesure associée à l'espèce de grandeur en question (par exemple le mètre par seconde, s'il s'agit d'une vitesse).

  Une telle représentation géométrique est souvent figurée par un segment orienté dans un plan ou un espace, qui est de par sa nature même, distinct de l'espace de configuration. Ce segment est attaché à son point d'application, qui est le seul point commun à ces deux mondes différents : l'espace de configuration et l'espace de représentation de la grandeur en question. Des échelles appropriées (par exemple une échelle pour les longueurs et une échelle pour les vitesses) permettent de faire coexister dans un même dessin des grandeurs vectorielles de nature différente.
- Ensuite, des *propriétés de composition* : l'ensemble de ces représentations géométriques attachées à un même point obéit aux règles du calcul des vecteurs liés à ce point. Plus précisément, l'ensemble de toutes les grandeurs de cette espèce attachées à un même point

est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien, la structure euclidienne reflétant le choix de l'unité de mesure de la grandeur en question.

- Enfin, des *propriétés de comparaison* : l'ensemble de toutes les grandeurs de cette espèce attachées à un même point peut être transporté par parallélisme en un autre point de l'espace de configuration, et être ainsi comparé à l'ensemble des grandeurs de même espèce attachées à ce dernier point.

  De manière un peu plus concrète, les *propriétés de composition* attribuées à ces grandeurs signifient que

  – lorsqu'une telle grandeur est multipliée par n'importe quel nombre (réel, et différent de 0), il en résulte une grandeur de même espèce, dont la représentation géométrique garde le même point d'application, conserve sa direction, ne modifie son sens que si le signe du nombre est négatif, et voit son intensité multipliée par la valeur absolue du nombre considéré (cf. la figure 12) ;

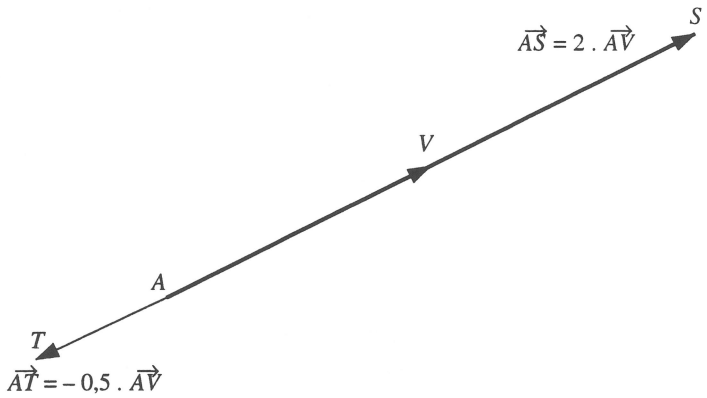


Fig. 12 : La représentation géométrique de multiples d'une grandeur vectorielle.

  – dès que deux d'entre elles ont leurs représentations géométriques qui possèdent le même point d'application, ces grandeurs peuvent être composées ou combinées pour redonner une grandeur de même espèce, et la représentation géométrique du résultat se réalise suivant la « règle du parallélogramme » (cf. la figure 13).

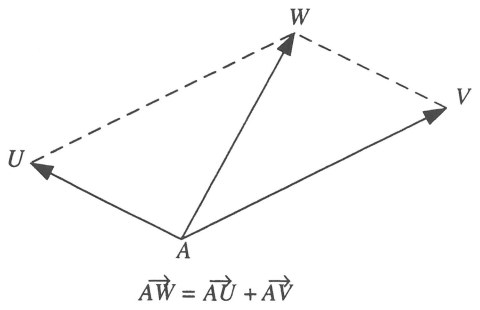


Fig. 13 : La composition de grandeurs vectorielles se représente grâce à la règle du parallélogramme.

Ces deux définitions suffisent pour établir que les représentations géométriques des grandeurs en question obéissent aux règles usuelles (associativité, commutativité, distributivités, ...) du calcul des vecteurs attachés, ou liés, à un point donné de l'espace de configuration.

La raison d'être des *propriétés de comparaison* peut paraître anodine ou détournée, mais elle est pourtant fondamentale ! Ces propriétés décrivent en termes géométriques un protocole de comparaison des grandeurs attachées à des points différents de l'espace de configuration, et qui n'est pas limité à la seule intensité de ces grandeurs. C'est en particulier ce protocole qui permet de définir l'égalité de grandeurs vectorielles de même espèce attachées à des points distincts.

Un exemple fondamental de grandeur vectorielle

Les questions 2 et 3 ont montré en effet que la vitesse d'un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme se comporte en chaque point de l'espace de configuration comme un vecteur attaché à ce point. Lorsqu'on travaille en des points distincts de l'espace de configuration, ces mêmes questions ont mis en évidence un critère d'égalité. Pour mémoire, ce critère peut s'énoncer comme suit :

> si $\overrightarrow{v}\,(P)$ et $\overrightarrow{w}\,(Q)$ sont des vitesses attachées respectivement aux points P et Q, alors $\overrightarrow{v}\,(P) = \overrightarrow{w}\,(Q)$ si et seulement si, en notant P' et Q' les positions respectivement atteintes par P et Q après les mêmes durées de parcours : le quadrilatère $PP'Q'Q$ (situé entièrement dans l'espace de configuration) est un parallélogramme.

Plus concrètement peut-être, deux telles vitesses sont égales en tant que grandeurs vectorielles si et seulement si les trajectoires des points mobiles correspondants sont parallèles et parcourues dans le même sens, et si les intensités des vitesses correspondantes sont égales. C'est ce qui semble traduire au mieux l'idée intuitive d'égalité de ces grandeurs lorsque l'espace de configuration est l'espace usuel[7].

D'autres exemples de grandeurs vectorielles

À toute position d'un point (mobile) à un instant donné dans un repère fixé, on peut associer le vecteur-position de ce point, dont l'origine est l'origine du repère et l'extrémité la position du point mobile à l'instant considéré. Ainsi, dans le cas de la situation étudiée dans la question 1, si on note $N(t)$ la position du nageur à l'instant t, on peut écrire les équations

[7] Quand on commence à étudier les premiers rudiments de la mécanique dans l'enseignement secondaire, on se place presque toujours dans l'espace de configuration le plus commode possible, qui est le plan – ou l'espace – affine euclidien. On y dispose d'un « parallélisme absolu », qui permet souvent de considérer comme allant de soi les propriétés de comparaison des grandeurs vectorielles.

Il faut néanmoins essayer de garder présent à l'esprit que la représentation sur une même figure des positions et des vitesses n'est pas naturelle, au sens où il s'agit en effet de grandeurs de nature différente. Les sections suivantes permettront de préciser cette remarque. Par exemple, les propriétés du mouvement *circulaire* uniforme montrent que, dans le cas d'un mouvement à la surface de la terre, la vitesse est toujours située *dans le plan tangent* à la sphère terrestre, et n'a donc *que* son origine en commun avec celle-ci !

du mouvement

$$\begin{cases} x = 40t, \\ y = 20t, \end{cases}$$

comme une égalité entre grandeurs vectorielles

$$\overrightarrow{AN}(t) = t \cdot \overrightarrow{AN},$$

où $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$ est le vecteur-position du nageur après une minute d'effort. Un déplacement – ou changement de position – est alors une différence (vectorielle) entre deux vecteurs-position, etc ; on retrouve ainsi, à quelques nuances de langage près, la géométrie du plan ou de l'espace affine.

Les questions 7 et 15 ci-après construiront la vitesse (instantanée) comme grandeur vectorielle dans le cas de deux types de mouvement curviligne : le mouvement du projectile (lancé horizontalement), et le mouvement circulaire uniforme.

Les forces constituent un autre exemple de grandeur vectorielle (voir le chapitre 12).

La quantité de mouvement, le champ électrique, le champ magnétique, ... constituent encore d'autres exemples de grandeurs vectorielles qu'on rencontre en physique.

Par contre, la température, la charge électrique, ... sont des exemples de grandeurs physiques qui *ne* sont *pas* vectorielles, mais scalaires.

2 Comment immobiliser le temps ?

De quoi s'agit-il ?

Décrire quantitativement le mouvement d'un projectile à partir des caractéristiques de deux mouvements rectilignes bien choisis. Montrer pourquoi la vitesse instantanée *doit* être une grandeur vectorielle.

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse instantanée.

De quoi a-t-on besoin ?

Un montage appelé « le jet d'eau articulé » décrit dans les figures 15 et 16 ci-dessous, ainsi que dans le texte qui accompagne ces figures.

Deux photographies stroboscopiques, ou chronophotographies, (cf. les figures 19 et 22 dans la suite, en annexe aux pages 496 et 497).

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les notions et lois fondamentales concernant la chute libre[8], plus précisément :

- l'accélération de la pesanteur g est constante et vaut $9,81$ m/s^2,
- la vitesse est une fonction linéaire du temps : $v = gt$,
- et l'espace parcouru est décrit par la formule $e = \frac{gt^2}{2}$.

[8] Il serait possible de ne pas en faire des prérequis, et de les découvrir ici : les photographies étudiées dans la suite permettant en effet d'établir ces lois. Mais cela nous éloignerait de notre but...

2.1 Le nageur se fatigue.

Comment s'y prendre ?

Tout ce qui a précédé supposait que notre triathlète nageait avec une vigueur anormalement constante.

> Question 4.
> Comment peut-on se rendre compte que le nageur se fatigue ?

Ce qui ne change pas, et ce qui change

Comme la vitesse du courant est exactement celle de Xavier, celui-ci n'a aucun moyen de se rendre compte que le nageur est en train de se fatiguer.

Par contre, Yves, qui n'est concerné que par la partie transversale du mouvement du nageur, en perçoit toutes les variations. Si le nageur progresse avec moins de vigueur, Yves avancera moins vite, et s'il doit s'immobiliser pour rester à hauteur du nageur, c'est que celui-ci, fatigué, s'est laissé emporter par le courant.

Une simulation vaut mieux qu'un long discours...

En voici une, mais beaucoup d'autres sont envisageables.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	(en minutes)
$x(t)$	0	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	(en mètres)
$y(t)$	0	38	72	102	128	150	168	182	192	198	200	(en mètres)

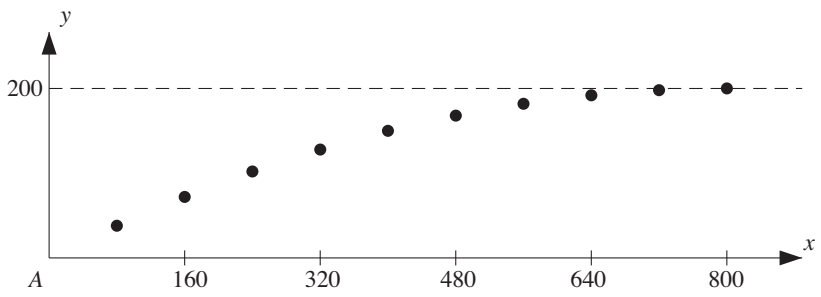


Fig. 14 : L'effet de la fatigue.

Au vu de tout ce qui a été mis en évidence précédemment, une question se pose presque tout de suite : comment parler de la vitesse du nageur dans une telle situation ? Son déplacement n'est manifestement plus rectiligne, ni uniforme[9] !

2.2 Le jet d'eau articulé

Comment s'y prendre ?

Lorsqu'on arrose une pelouse avec un tuyau d'arrosage, quelle est la forme du jet d'eau ?

[9] Sauf bien sûr dans le cas où le nageur se laisse emporter par le courant. Mais un triathlète qui se respecte ne se laisse jamais entraîner de la sorte...

Si on arrose à la verticale, le jet d'eau fournit une description de l'arroseur... arrosé. Si on n'arrose pas à la verticale mais, par exemple, suivant un angle de 30° avec l'horizontale, le jet d'eau emprunte une trajectoire qui n'est pas rectiligne, mais bien incurvée vers le sol.

En effet, aussi puissant que soit le jet d'eau et même si la direction initiale du jet est bien rectiligne, l'eau retombe de toute façon sur la pelouse : la trajectoire ne peut donc pas être une droite. Par ailleurs, on observe que la portée de l'arrosage varie avec l'angle initial du jet, et la pression d'eau à la sortie.

Voici un procédé expérimental qui permet de mieux observer et de commencer à décrire la forme du jet d'eau. On se procure une longue latte en bois, bien rigide, d'environ 2 m de long. L'extrémité du tuyau d'arrosage est fixée sur 50 cm à une des faces de cette latte ; il peut se révéler utile d'insérer entre la latte et le tuyau une fine tranche d'isomo (ou polystyrène expansé) afin d'empêcher que le jet d'eau ne mouille trop la latte. À partir de la sortie du tuyau, on fixe des petits clous dans l'autre face de la latte, à des intervalles réguliers (de 30 cm par exemple). On y suspend des lattes, marquées de 10 cm en 10 cm, de telle sorte qu'elles puissent pivoter autour de leur point d'attache (cf. la figure 15).

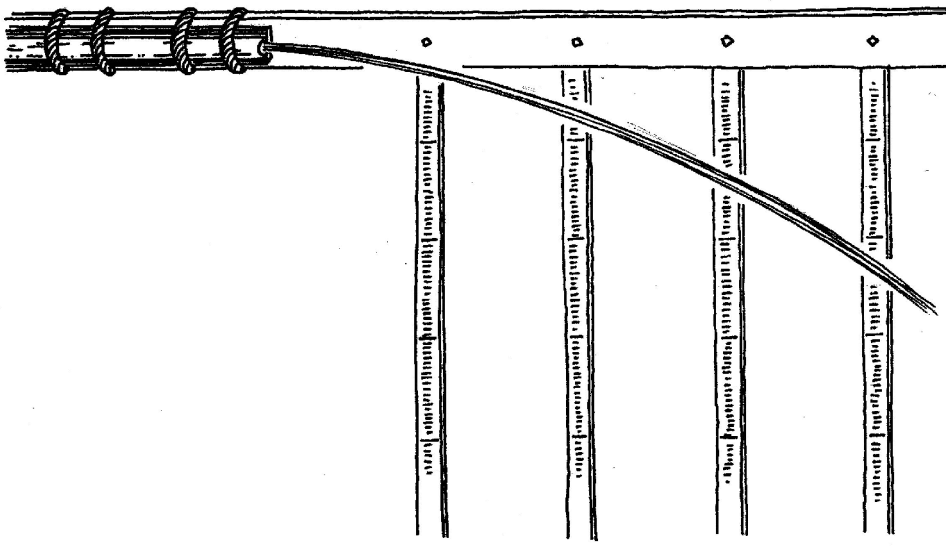


Fig. 15 : Le jet d'eau articulé.

On peut ainsi reproduire (à l'échelle) la forme du jet d'eau avec une plus ou moins bonne précision. On trouve dans certains laboratoires de physique de l'enseignement secondaire des appareillages de ce type, produits par des firmes spécialisées (un exemple est visible sur la figure 16 ci-dessous), et qui permettent de réaliser des mesures de meilleure qualité.

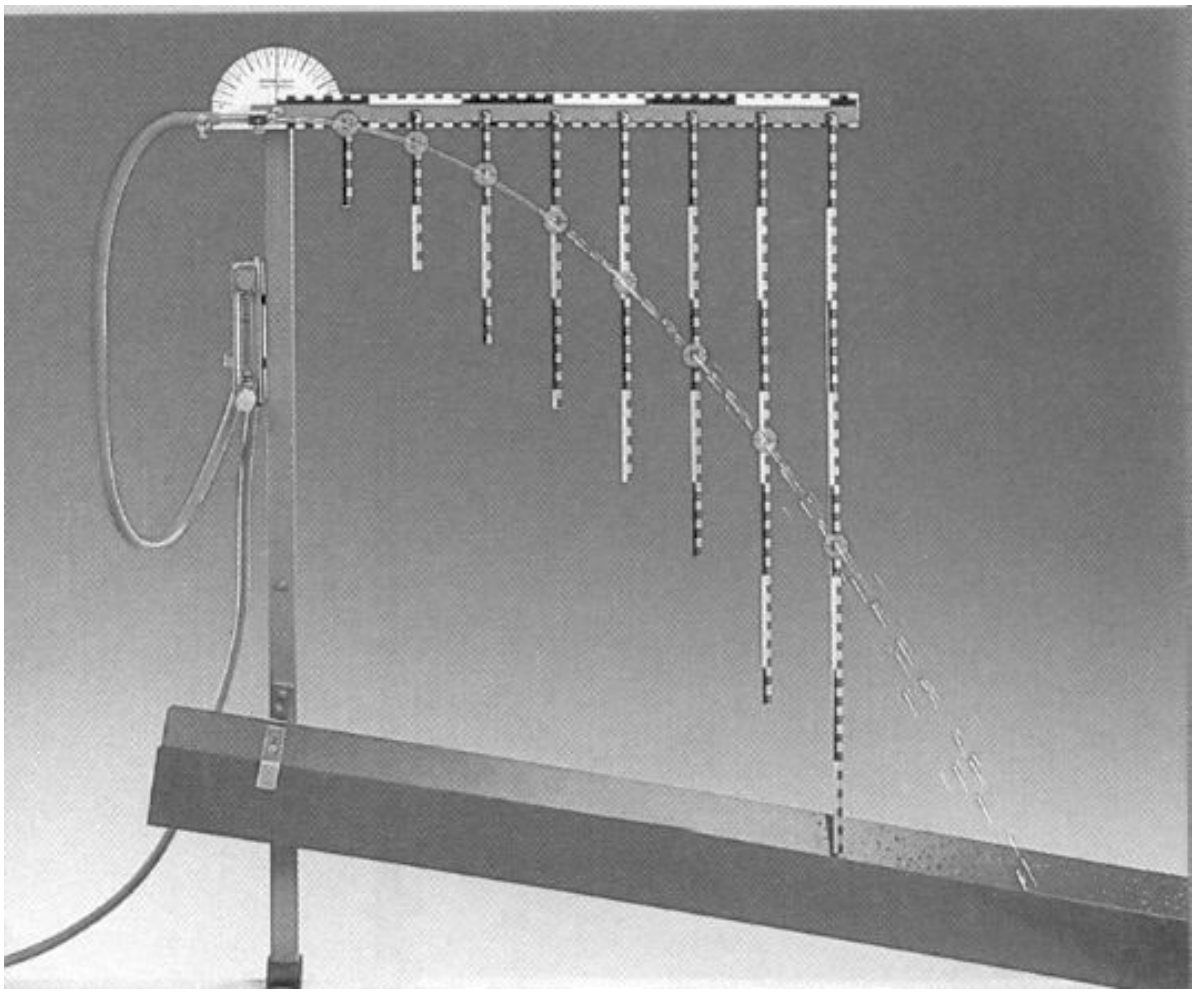


Fig. 16 : Un jet d'eau mieux articulé

Question 5.
Qu'observe-t-on lorsqu'on redresse cet appareillage (le tuyau et le système formé du bâton et des lattes graduées, solidairement), en visant à 30° avec l'horizontale par exemple ?
Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer ?

Une observation étonnante, et ce qui s'en déduit

Dès qu'on redresse le jet d'eau, on observe que les écarts verticaux de la trajectoire par rapport à la direction initiale du jet ne changent pas ou, plus simplement, que redresser le jet d'eau n'a aucune influence sur sa déviation.

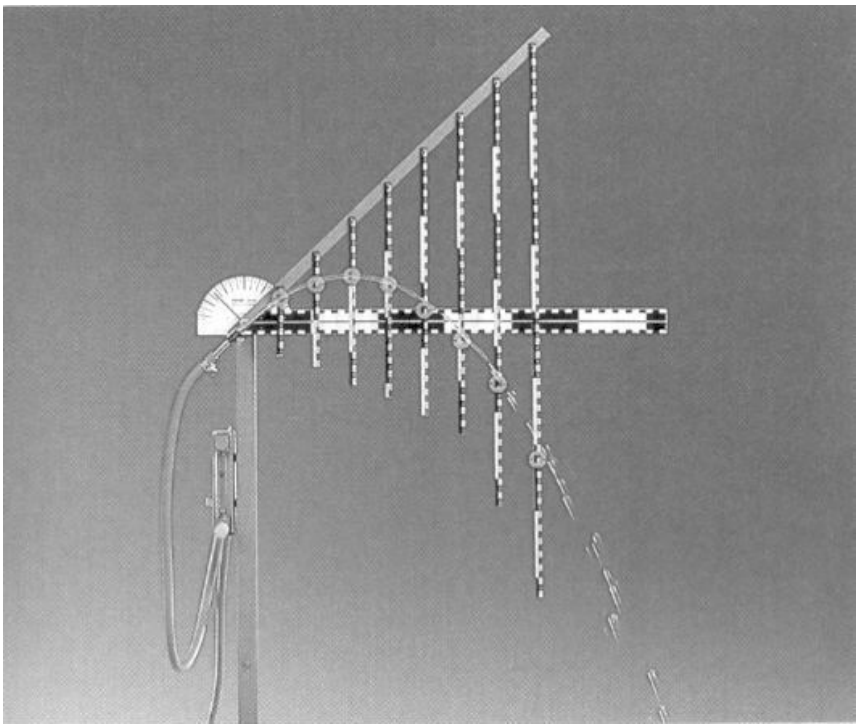


Fig. 17 : La déviation verticale du jet d'eau ne change pas.

En termes plus géométriques, et avec la représentation et les notations de la figure 18 : tant que $|AM| = |AM'|$, on a $|MT| = |M'T'|$.

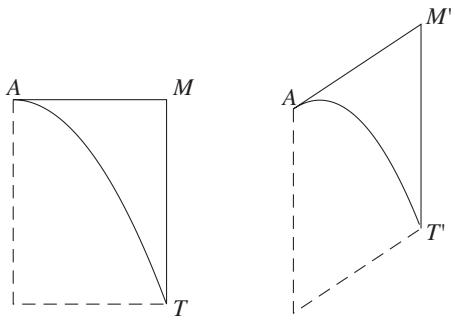


Fig. 18 : Les rectangles deviennent des parallélogrammes.

Il s'ensuit que comprendre la trajectoire du jet d'eau lorsque sa direction initiale est horizontale permet ensuite de comprendre la trajectoire lorsque la direction initiale est quelconque.

Par ailleurs, comme la direction initiale du jet d'eau semble n'avoir aucune influence sur la déviation verticale, on peut suspecter que la cause du caractère curviligne de la trajectoire est « quelque chose » dont l'effet est relativement universel. Malheureusement, si on peut conjecturer que la pesanteur est ce « quelque chose », l'expérience du jet d'eau articulé ne permet pas de s'en convaincre...

2.3 La conjugaison de deux mouvements

Comment s'y prendre ?

Une manière efficace d'étudier des mouvements (relativement) complexes consiste – pourvu que le mouvement s'y prête ! – à en tirer une photographie en pose dans une chambre noire éclairée uniquement par un stroboscope. On appelle cela une photographie stroboscopique ou une chronophotographie ; pour disposer d'un peu plus de détails techniques à ce sujet, on peut se reporter à A. Meessen [1984] : compléments, p. 18 à 22. Des résultats analogues peuvent aussi s'obtenir à l'aide d'un appareil photographique numérique (à partir d'une fréquence de prises de vues de 10 images/seconde) ou d'une caméra vidéo, utilisée en plan fixe. Dans ce dernier cas, il suffit lors de la reproduction sur magnétoscope, de reporter les positions successives du mobile sur une feuille transparente.

La figure 19 est une chronophotographie du mouvement de deux balles :

- l'une, commence à tomber au point A (cf. la figure 20), verticalement, suivant un mouvement de chute libre, exactement à l'instant où
- l'autre, lancée initialement sur un plan horizontal, quitte ce plan à partir de ce même point A.

Un système de déclenchement simultané (visible dans le coin supérieur gauche de la figure) permet de synchroniser le départ des deux balles au point A. La fréquence des éclairs est de 1/30 s, et la distance entre deux horizontales égale 15,24 cm (extrait de Physical Science Study Committee [1970]).

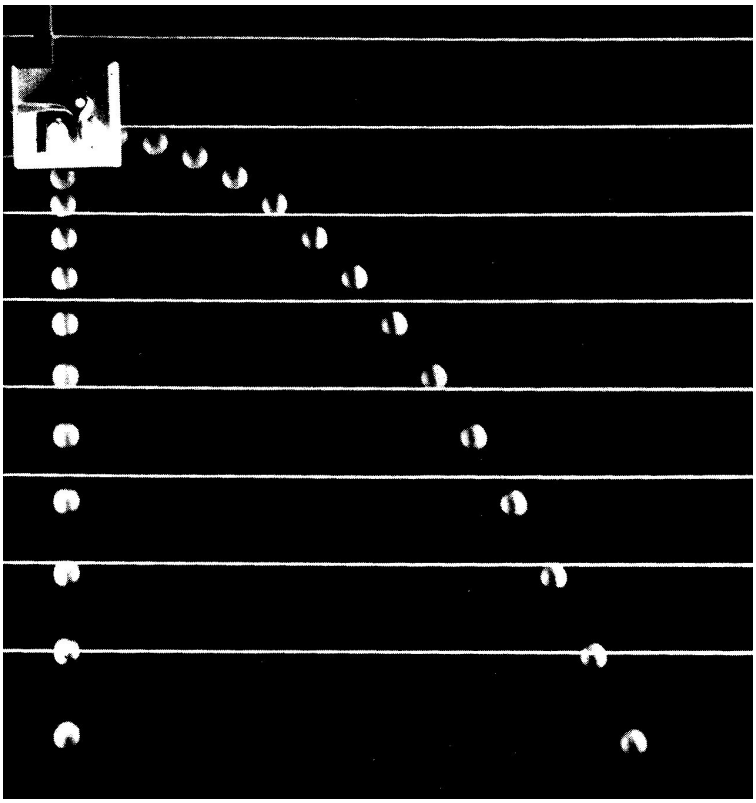


Fig. 19 : Une chronophotographie du mouvement de deux balles.

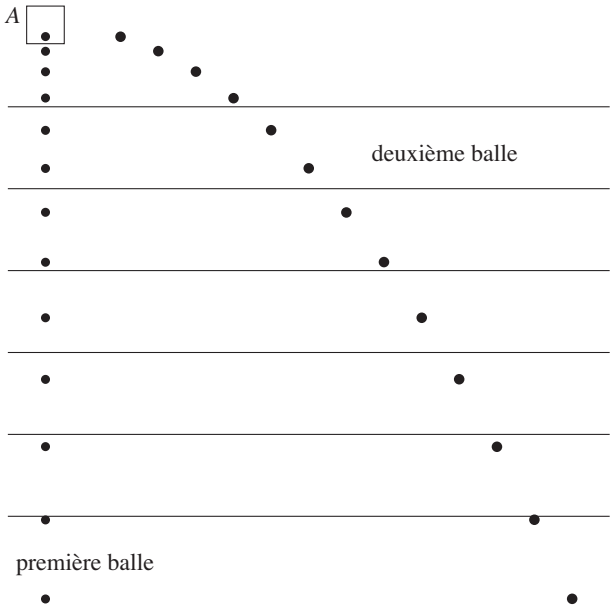


Fig. 20 : Le point A et le mouvement des deux balles.

Quelle relation y a-t-il entre le jet d'eau – orienté horizontalement – et une chronophotographie comme celle ci-dessus ? Le jet d'eau est évidemment un ensemble de gouttes, et on peut faire l'hypothèse (très raisonnable) que la forme du jet d'eau est celle de la trajectoire de n'importe laquelle de ses gouttes. En d'autres termes, le jet d'eau fige l'histoire (physique) du mouvement de n'importe quelle goutte, il immobilise toute la trajectoire en continu d'une goutte. On pourrait parler du « modèle corpusculaire » du jet d'eau. La chronophotographie de la figure 19 est donc un outil idéal pour étudier la forme du jet d'eau, puisqu'elle fige, elle aussi, l'écoulement du temps, et nous dévoile ainsi beaucoup de propriétés des mouvements qui, sans cela, échapperaient à l'œil.

Question 6.
Quelles sont les équations du mouvement de chacune de ces deux balles ?
Quelles sont les équations de leur trajectoire ?

La première balle est animée d'un mouvement de chute libre

La première balle tombe suivant une trajectoire verticale qui ne peut être qu'un mouvement de chute libre.

Si on veut s'en convaincre, il suffit de comparer les espaces parcourus sur la photographie avec ceux prédits par la loi de chute libre. Avant cela, il faut fixer un repère commun[10] pour le mouvement des deux balles (il est tracé sur la figure 21).

[10] ... et observer en fait un léger décalage entre la position initiale de la première balle et celle de la deuxième balle. Cela ne porte pas à conséquence pour la très grande majorité des calculs numériques qui suivent.

La loi de la chute libre s'écrit alors $y = -\frac{gt^2}{2}$, où $g = 9,81\text{m/s}^2$, y est mesuré en mètres et le temps t est compté en secondes à partir de l'instant (initial) où la première balle passe par le point A.

La comparaison s'effectue simplement à partir d'un tableau reprenant les positions en fonction du temps écoulé.

t	(en multiples de 1/30 s)	1	2	3	4	5	6	...
$-y$	(observé, en mètres)	?	0,03	0,05	0,09	0,14	0,19	...
$-y$	(calculé, en mètres)	0,005	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	...

...	7	8	9	10	11	12	13	14
...	0,27	0,34	0,44	0,54	0,65	0,79	0,92	1,07
...	0,27	0,35	0,44	0,56	0,66	0,78	0,92	1,07

Les résultats concernant les positions calculées sont arrondis avec la même borne d'erreur absolue que celle qu'il semblait raisonnable d'attribuer à la chronophotographie, c'est-à-dire 1 cm.

La projection verticale du mouvement de la deuxième balle coïncide avec le mouvement de la première balle.

C'est la conclusion la plus manifeste de cette chronophotographie ! Elle implique immédiatement que la deuxième équation du mouvement de la deuxième balle s'écrit (aussi) $y = -\frac{gt^2}{2}$.

La projection horizontale du mouvement de la deuxième balle est un mouvement (rectiligne) uniforme.

La construction de cette projection n'offre aucune difficulté (cf. la figure 21).

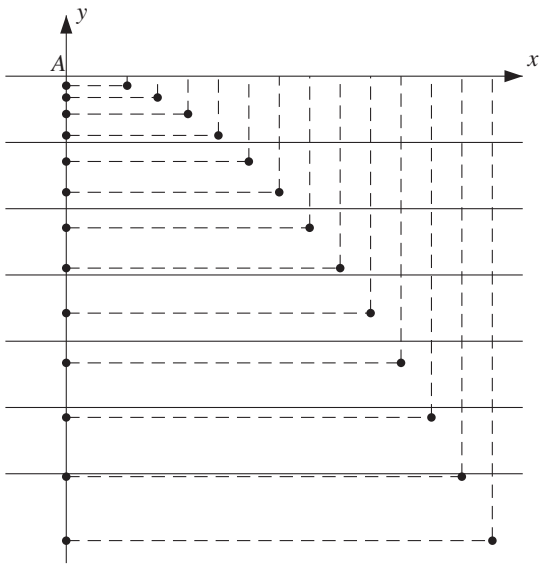


Fig. 21 : Les projections verticales et horizontales des positions de la deuxième balle.

Un tableau des positions observées met bien en évidence le caractère uniforme du mouvement.

t	(en multiples de 1/30 s)	1	2	3	4	5	6	...
x	(observé, en mètres)	?	0,15	0,22	0,29	0,36	0,43	...

...	7	8	9	10	11	12	13	14
...	0,50	0,56	0,63	0,70	0,77	0,84	0,91	0,97

La vitesse de ce mouvement (rectiligne) uniforme vaut donc (approximativement[11])

$$\frac{0,07}{\frac{1}{30}} = 2,1(\text{m/s}).$$

Dès lors, la première équation du mouvement s'écrit $x = 2,1t$.

La trajectoire de la deuxième balle est parabolique.

On vient d'obtenir les deux équations du mouvement de la deuxième balle :

$$\begin{cases} x = 2,1t, \\ y = -\frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

En isolant le temps t dans la première équation, on obtient $t = \frac{x}{2,1}$, d'où

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{2,1}\right)^2 = -1,1122\ldots\ x^2,$$

puisque $g = 9,81\text{m/s}^2$. C'est l'équation d'une parabole passant par le point A.

2.4 La vitesse de la deuxième balle

Comment s'y prendre ?

Ainsi, et comme dans le cas de la trajectoire du nageur, la trajectoire de la balle n'est pas trop difficile à déterminer. Mais dans le cas du nageur, c'est surtout la *vitesse* et ses caractéristiques qui ont été l'objet de la réflexion.

Comme pour la question 2, le caractère plus théorique des deux questions suivantes explique que leur résolution ne soit pas nécessairement laissée à la seule initiative des élèves, et l'enseignant veillera encore à ce que les étapes essentielles des raisonnements soient bien rencontrées par tous les élèves.

Question 7.
Comment définir la vitesse de la balle qui suit la trajectoire parabolique de la figure 19, à chaque instant où l'éclair du stroboscope « l'immobilise » ?

[11] Les erreurs résultent du défaut de synchronisation entre les départs des deux balles, déjà relevé plus haut.

Il faut une nouvelle définition de vitesse...

Jusqu'ici la notion de vitesse a toujours été associée à un mouvement rectiligne, même si on a déjà pu relever des différences significatives, suivant qu'on parlait de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme, ou des vitesses moyenne ou instantanée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Or, dans le cas du mouvement parabolique, la trajectoire n'a plus rien de rectiligne ! Alors, que faire ?

Evidemment, l'intuition nous souffle qu'il y a encore un sens à parler de vitesse, même pour un mouvement qui n'est pas rectiligne. Il s'agit donc de passer d'une sensation de vitesse pour un mouvement curviligne à une *définition* de vitesse.

Or, dans un mouvement curviligne, l'intuition de vitesse peut assez naturellement être associée à l'idée de direction, sous une forme très visuelle et intuitive elle aussi. Par exemple, la chronophotographie d'une balle qui rebondit (cf. la figure 22 ci-après, extraite de Physical Science Study Committee [1970]) suggère qu'à chaque rebond, la vitesse change de direction.

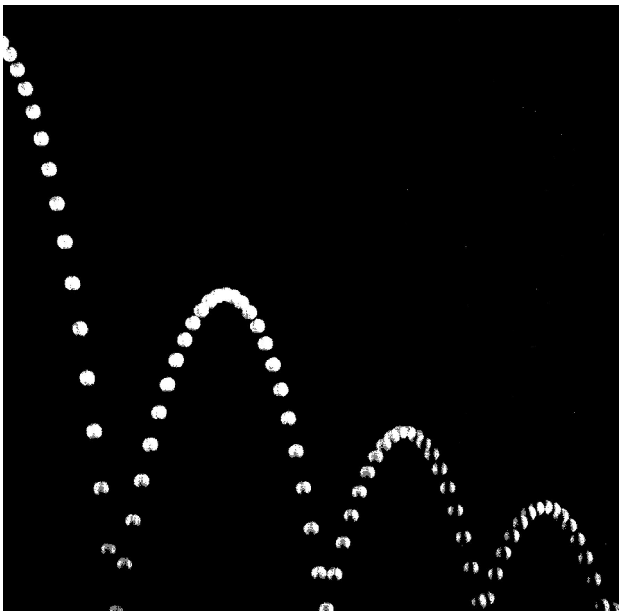


Fig. 22 : Quelle est la direction de la vitesse au rebond ?

Nous savons que la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme est une grandeur vectorielle, et que ce statut de grandeur vectorielle est indissociable[12] de l'idée de direction. Une première hypothèse de travail consiste donc à vouloir définir la vitesse pour un mouvement curviligne comme une grandeur vectorielle.

Dès lors, on doit commencer par se choisir un point d'application de cette grandeur à définir. Pour fixer les idées, ce sera le point P correspondant ici à la position de la balle à l'instant d'observation $t = \frac{5}{30}$ s.

[12] Il s'agit de grandeurs physiques ! Les vecteurs du mathématicien sont moins contraignants.

Il y beaucoup de vitesses possibles pour le point P.

Une chronophotographie ne fige que certaines positions de la balle. Une première approximation de la réalité consiste alors à ne retenir que ces positions-là, à réduire donc le mouvement réel à la succession de mouvements (aussi simples que possible) qui font passer d'une position à la suivante. C'est ce qu'on appelle « discrétiser le mouvement ».

Mais le mouvement le plus simple possible qui fait passer du point P au point suivant P_1 est le mouvement rectiligne uniforme correspondant. À ce mouvement est associé une vitesse qui est une grandeur vectorielle ; on la note $\overrightarrow{v_{r.u.}}(P)$, ou $\overrightarrow{v_{r.u.}}$ si la mention du point P n'est pas essentielle. La figure 23 représente la direction de cette vitesse.

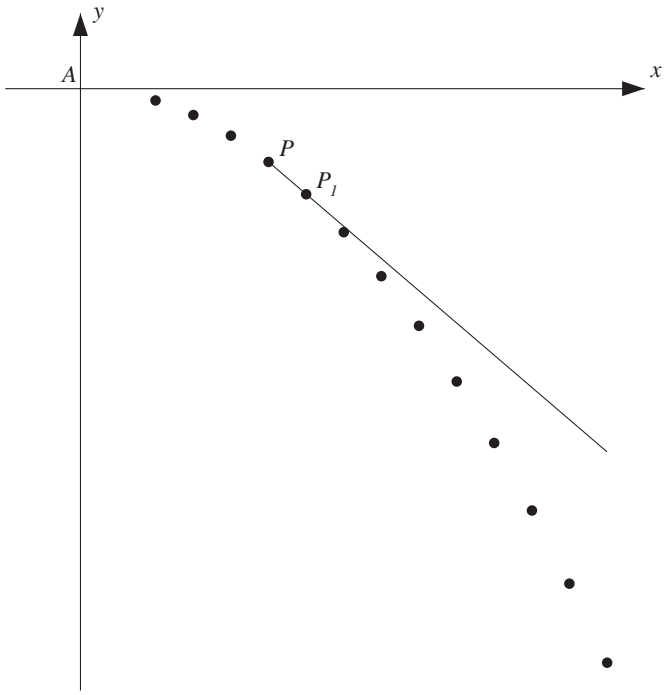


Fig. 23 : La direction de la vitesse du mouvement discrétisé.

Et comme la chronophotographie qui nous occupe a été réalisée avec une fréquence d'éclair de $\frac{1}{30}$ s, on peut aussi calculer la mesure de cette vitesse (notée alors $v_{r.u.}$, sans la flèche) grâce aux positions déjà relevées,

t	(en multiples de 1/30 s)	...	5	6	...
x	(observé, en mètres)	...	0,36	0,43	...
$-y$	(calculé, en mètres)	...	0,14	0,19	...

et à l'éternel théorème de Pythagore (cf. la figure 24)

$$v_{r.u.} = \frac{\sqrt{(0,05)^2 + (0,07)^2}}{\frac{1}{30}} = 2,58\ldots \text{ (m/s)}.$$

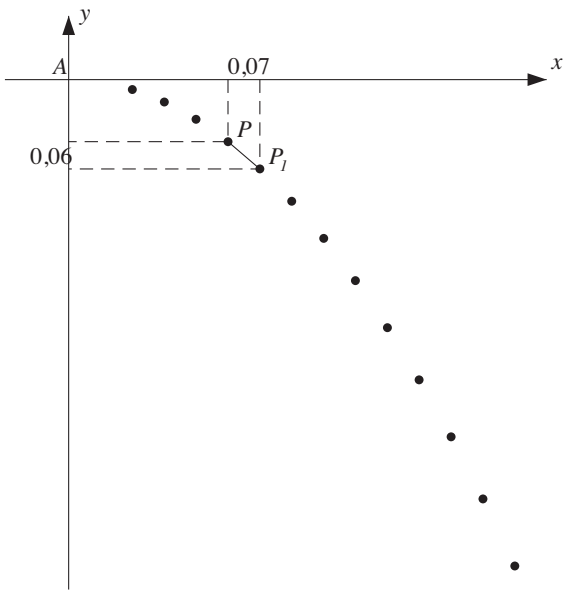


Fig. 24 : La mesure de la vitesse du mouvement discrétisé.

Mais cette vitesse est entièrement tributaire du choix de la fréquence d'éclairs du stroboscope. Par exemple, si la discrétisation est réalisée à la fréquence de $\frac{1}{10}$ s, la direction de la vitesse au point P est différente, comme le montre la figure 25.

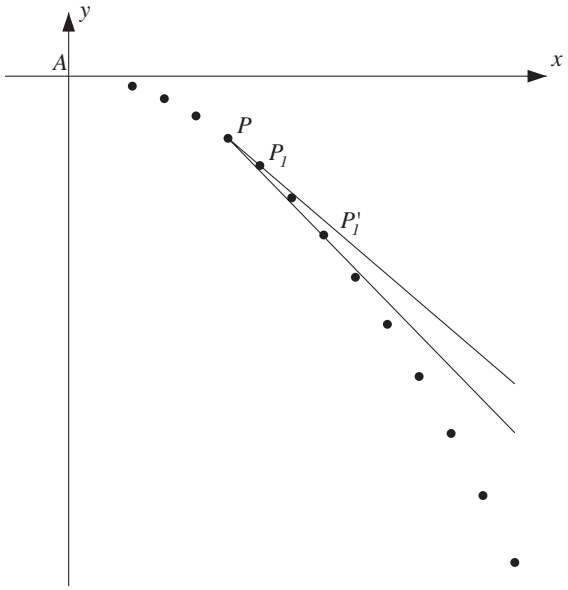


Fig. 25 : La direction de la vitesse dépend de la discrétisation choisie.

La mesure de cette vitesse est également différente. Les données correspondantes

t	(en multiples de 1/30 s)	...	5	8	...
x	(observé, en mètres)	...	0,36	0,56	...
$-y$	(calculé, en mètres)	...	0,14	0,34	...

permettent d'obtenir

$$v_{r.u.} = \frac{\sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2}}{\frac{1}{10}} = 2,82\ldots \text{ (m/s)}.$$

Résumons-nous ! En discrétisant le mouvement, il est possible – au départ d'un point P fixé – de l'approximer (localement) par un mouvement rectiligne uniforme, et donc d'y associer une vitesse en tant que grandeur vectorielle. Le problème est qu'il y a beaucoup de discrétisations possibles, donc beaucoup de mouvements rectilignes uniformes possibles, et donc beaucoup de vitesses possibles pour le même point P. Et qu'à part ce point d'application P commun, toutes ces vitesses ont des directions et des mesures différentes.

Une définition idéale

La fréquence des éclairs du stroboscope ne permet pas d'aller voir le mouvement de la balle d'assez près, c'est-à-dire sans discontinuité entre les positions successives. Mais heureusement, les élèves en savent maintenant assez pour passer de l'expérimentation à la simulation !

D'abord, ils peuvent facilement reproduire à l'aide du tableur les positions de la balle au $\frac{1}{30}$ s, en accord avec les résultats de la chronophotographie, et les équations du mouvement qui en ont été déduites.

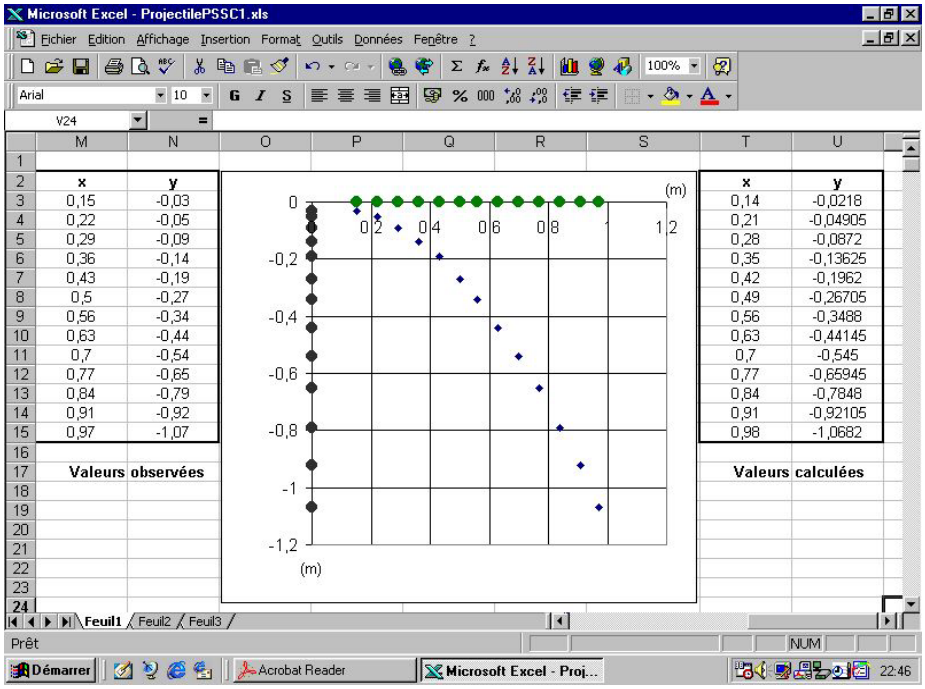


Fig. 26 : Les positions des deux balles (et de la projection horizontale), au trentième de secondes.

À partir des équations du mouvement, et en travaillant sur des intervalles de temps suffisamment brefs, ils peuvent ensuite faire apparaître la trajectoire parabolique de la deuxième balle, apparemment sans discontinuité.

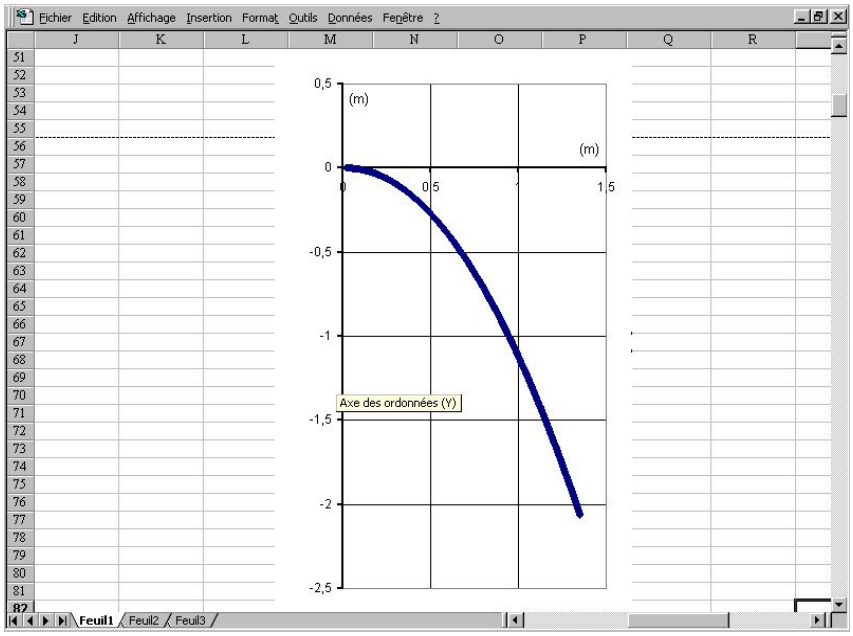


Fig. 27 : La trajectoire de la deuxième balle, au millième de secondes.

Plus l'intervalle de temps est petit (c'est-à-dire plus la fréquence des éclairs du stroboscope est grande), et plus la trajectoire discrétisée se révèlera proche de la trajectoire réelle. Mais cette trajectoire quasi continue n'est pas pour autant la trajectoire complète. Pour s'en rendre compte, il suffit de « zoomer », par exemple autour du point P atteint après $\frac{5}{30}$ s ; on obtient alors la figure suivante.

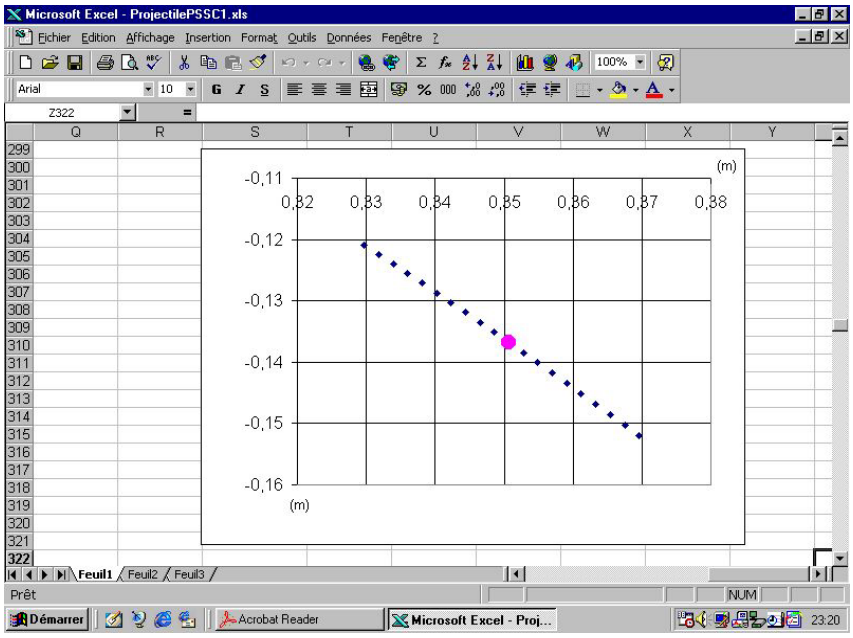


Fig. 28 : La trajectoire de la balle au voisinage du point P, au millième de secondes.

Cette image est tout à fait surprenante : la trajectoire de la balle se révèle extrêmement proche de celle d'un mouvement rectiligne uniforme ! Passé l'effet de surprise, cette image donne lieu à quelques observations et conséquences importantes.

D'abord, elle confirme encore un peu plus la représentation de la trajectoire parabolique comme une succession suffisamment resserrée de trajectoires de mouvements rectilignes uniformes. Visuellement, la direction et la grandeur de la vitesse en des points successifs ne paraissent même pas être différentes. Mais bien sûr, la trajectoire globale nous rappelle que cette apparence est trompeuse : il n'y a rien de rectiligne, ni d'uniforme dans ce mouvement.

D'autre part, deux positions successives sont tellement resserrées qu'il n'y a rien de bien audacieux à supposer qu'*entre ces deux positions* le mouvement est quasiment rectiligne et uniforme. On ne voit d'ailleurs pas très bien ce qu'on pourrait proposer d'autre : c'est en effet le seul *modèle* de mouvement dont on dispose.

De plus, le tableur permet de calculer l'intensité de la vitesse en question, à des instants successifs, avec une bien meilleure précision qu'auparavant. Ainsi, au départ de la simulation au millième de secondes, on obtient

t (en s)	$x = 2,1t$ (en m)	$y = -\frac{gt^2}{2}$ (en m)	$v_{r.u.x}(t)$ (en m/s)	$v_{r.u.y}(t)$ (en m/s)
0,165	0,3465	-0,13353863	2,1	-1,623555
0,166	0,3486	-0,13516218	2,1	-1,633365
0,167	0,3507	-0,13679555	2,1	-1,643175
0,168	0,3528	-0,13843872	...	...

où

$$v_{r.u.x}(t) = \frac{x(t+0,001) - x(t)}{0,001},$$

et

$$v_{r.u.y}(t) = \frac{y(t+0,001) - y(t)}{0,001}.$$

On en tire que

$$v_{r.u.}(0.166) = \sqrt{(2,1)^2 + (-1,633365)^2} = 2,6604\ldots \text{m/s},$$

$$v_{r.u.}(0.167) = \sqrt{(2,1)^2 + (-1,643175)^2} = 2,6664\ldots \text{m/s}.$$

De manière générale, ce mode d'approche permet donc d'assimiler la trajectoire parabolique à une succession suffisamment resserrée de trajectoires de mouvements rectilignes uniformes, dont la direction et la grandeur de la vitesse changent continûment.

Ainsi, on peut proposer de définir *la* vitesse du point P comme celle de ce morceau de mouvement rectiligne uniforme (au départ de P) obtenu à partir de « la meilleure simulation possible » ou de « la meilleure chro-

nophotographie possible »[13]. L'origine photographique de cette définition aide peut-être à mettre en évidence pourquoi on parle alors aussi de vitesse instantanée[14] ; on la note $\overrightarrow{v_{inst.}}(P)$ ou tout simplement $\overrightarrow{v}(P)$.

Mais n'y a-t-il pas moyen d'être un peu plus précis quant aux caractéristiques de direction et de mesure de cette vitesse idéale ?

Le rectangle magique

Puisque la vitesse du point P se définit à partir d'un mouvement rectiligne idéal, elle peut être décomposée, comme dans le cas du nageur. Si pour abréger on ne note pas les points d'application, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y},$$

où $\overrightarrow{v_x}$ est la vitesse du point P_x dans son mouvement rectiligne obtenu par projection du mouvement du point P sur l'axe des x, et pareillement pour $\overrightarrow{v_y}$, comme les représente la figure 29.

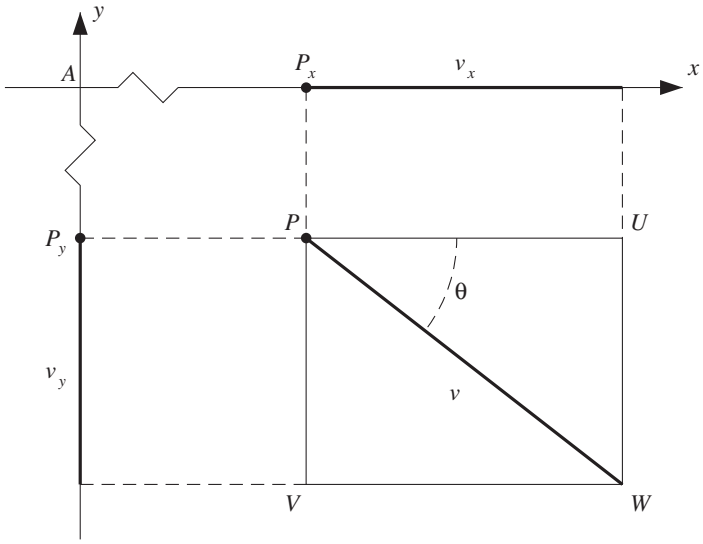


Fig. 29 : Le rectangle magique.

Or, il s'agit à chaque fois de mouvements idéaux, c'est-à-dire des mouvements observés sur « la meilleure chronophotographie – ou simulation – possible », et nous savons que

- le mouvement rectiligne horizontal (c'est-à-dire le long de l'axe des x) est un mouvement rectiligne *uniforme*,
- le mouvement rectiligne vertical (c'est-à-dire le long de l'axe des y) est un mouvement *de chute libre*.

[13] En d'autres termes, la vitesse ainsi définie est une notion « idéale » que les chronophotographies et les simulations permettent d'approcher. Une telle approximation peut toujours être améliorée, pourvu que les appareils de mesure (stroboscope, appareils photographiques) ou les outils de calcul le permettent.

[14] Comme on le rappelle plus bas, cette appellation concorde avec celle déjà utilisée dans l'étude de la chute libre.

Cela nous permet d'identifier $\overrightarrow{v_x}$ et $\overrightarrow{v_y}$ à des grandeurs vectorielles bien déterminées,

- pour ce qui concerne le point d'application, la direction et le sens, tout est clair,
- et pour ce qui concerne la mesure de chacune de ces vitesses :
  - la valeur v_x étant *a priori* la mesure de la vitesse (instantanée) du point P_x animé d'un mouvement *uniforme*, elle est identique à la vitesse « ordinaire » de ce point et comme cette dernière a déjà été calculée plus haut, on a : $v_x = 2,1$ (m/s) ;
  - la valeur v_y étant *a priori* la mesure de la vitesse (instantanée) du point P_y animé d'un mouvement *de chute libre*, on sait qu'il s'agit d'une fonction linéaire du temps et qu'elle vaut à l'instant considéré : $v_y = g \cdot \frac{5}{30} = 1,635\ \ldots$ (m/s).

Dès lors, si on note θ l'angle que forme la vitesse $\overrightarrow{v}$ avec l'horizontale passant par le point P (cf. encore la figure 29), on calcule

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|UW|}{|PU|} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot \frac{5}{30}}{2,1} = 0,7785\ldots,$$

d'où $\theta \approx 38°$, et

$$v\left(\frac{5}{30}\right) = v(0,166\ldots) = |PW| = \sqrt{|PU|^2 + |UW|^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{(2,1)^2 + \left(g \cdot \frac{5}{30}\right)^2} = 2,6614\ldots \text{ (m/s)}.$$

Pour mémoire, le calcul réalisé plus haut directement sur la chronophotographie avait fourni $v_{r.u.} = 2,58\ldots$ (m/s) ; par ailleurs, on peut aussi calculer : $v(0,166) = 2,6574\ldots$ (m/s) et $v(0,167) = 2,6634\ldots$ (m/s), et comparer ces résultats avec $v_{r.u.}(0.166) = 2,6604\ldots$ (m/s) et $v_{r.u.}(0.167) = 2,6664\ldots$ (m/s).

Ces deux résultats achèvent de déterminer toutes les caractéristiques de la vitesse au point P, considérée comme grandeur vectorielle idéale ou alors – plus précisément ? – comme *vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme idéal*[15].

2.5 La formulation vectorielle de l'équation du mouvement de la deuxième balle

Comment s'y prendre ?

Arrêtons-nous encore un instant sur les équations du mouvement de la balle, telles que la question 6 nous les a fait découvrir.

> Question 8.
> Comment reformuler en termes de grandeurs vectorielles les équations du mouvement obtenues lors de l'analyse de la chronophotographie ?

[15] Ce mouvement rectiligne uniforme idéal est tangent à la trajectoire de la balle au point P, mais c'est là une autre histoire...

Comme il n'y a plus de raison pour fixer *a priori* l'instant d'observation, on va reprendre l'analyse de la chronophotographie (cf. la figure 19) pour un instant d'observation t quelconque. On note alors $P(t)$ la position de la balle à un tel instant, et on convient d'abréger $P(t)$ en P lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté.

Une décomposition du mouvement héritée du rectangle magique

Puisque la décomposition de la vitesse a déjà permis de résoudre la question précédente, on va pareillement décomposer le mouvement du point P suivant les deux directions associées à ce mouvement,

- l'horizontale, qui est la direction initiale du mouvement,
- et la verticale, qui est la direction d'un mouvement ordinaire[16] de chute libre.

Avec les notations de la figure 30 ci-après, le mouvement horizontal à considérer est donc celui de la projection P_x du point P sur l'axe des x ; c'est un mouvement (rectiligne) uniforme. Comme on a (déjà) noté v_x la mesure (constante) de la vitesse de ce point, on a

$$|AP_x(t)| = v_x t.$$

Le mouvement vertical est celui de la projection P_y du point P sur l'axe des y ; c'est un mouvement (rectiligne) de chute libre. La loi fondamentale de la chute libre permet d'écrire

$$|AP_y(t)| = \frac{gt^2}{2}.$$

Considérons alors le *changement de position* qui amène le point A sur le point P, et associons-y la grandeur vectorielle définie comme suit,

- son point d'application est le point A,
- sa direction est celle de la droite passant par les deux points A et P,
- son sens est celui qui mène de A à P sur cette droite,
- sa mesure est celle de la distance, prise en mètres, qui sépare les deux points en question.

On note $\overrightarrow{AP}$ ce changement de position. On peut définir pareillement les changements de position $\overrightarrow{AP_x}$ et $\overrightarrow{AP_y}$, et on a (cf. la figure 30)

$$\overrightarrow{AP}\,(t) = \overrightarrow{AP_x}\,(t) \; + \overrightarrow{AP_y}\,(t)\,.$$

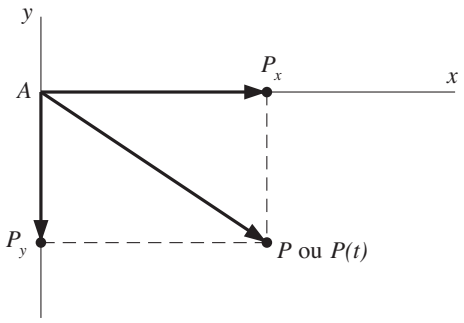


Fig. 30 : Le changement de position est une grandeur vectorielle qui se décompose.

[16] C'est-à-dire sans autre mouvement qui s'y ajoute.

Une décomposition qui se décompose encore...

On peut mieux exprimer l'information fournie par l'expression précédente en mettant en valeur les mesures des changements de position calculées plus haut : $|AP_x(t)| = v_x t$ et $|AP_y(t)| = \frac{gt^2}{2}$. Pour cela, on introduit deux nouvelles grandeurs vectorielles :

- le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$ est un changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction initiale du tir de la balle ; il a comme point d'application le point A, comme direction celle de l'axe des x, comme sens le sens positif de parcours de cet axe, et comme mesure l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre,
- le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ est un changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction verticale ; il a encore comme point d'application le point A, comme direction celle de l'axe des y, comme sens le sens positif de cet axe, et toujours comme mesure l'unité de longueur (le mètre).

On fait alors apparaître les différentes caractéristiques de la grandeur vectorielle $\overrightarrow{AP_x}(t)$ en l'écrivant sous la forme

$$\overrightarrow{AP_x}(t) = v_x t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}}.$$

Cette écriture concentre en effet toute l'information de mesure dans le facteur $v_x t$ et toute l'information de direction dans le terme $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$. Pareillement, l'écriture

$$\overrightarrow{AP_y}(t) = \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$$

distingue l'information de mesure dans le terme $\frac{gt^2}{2}$, celle de direction dans le terme $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ et précise avec le signe « $-$ » que le sens de $\overrightarrow{AP_y}(t)$ et le sens de $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ sont opposés.

Lorsqu'on écrit finalement l'équation $\overrightarrow{AP}(t) = \overrightarrow{AP_x}(t) + \overrightarrow{AP_y}(t)$ en précisant toutes les caractéristiques des grandeurs vectorielles $\overrightarrow{AP_x}(t)$ et $\overrightarrow{AP_y}(t)$, on obtient (cf. la figure 31)

$$\overrightarrow{AP}(t) = v_x t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}.$$

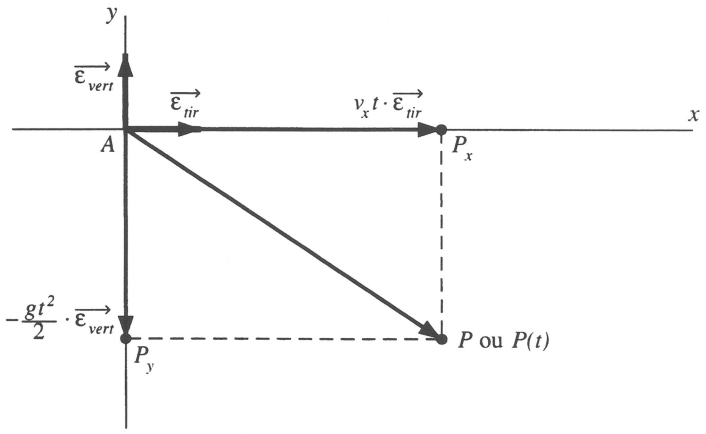


Fig. 31 : L'équation vectorielle du mouvement de la balle se visualise à l'aide d'un rectangle.

La position de la balle est ainsi complètement décrite à n'importe quel instant en termes de grandeurs vectorielles de référence. L'équation obtenue mérite bien d'être appelée l'*équation vectorielle du mouvement*. Pour mémoire, on a obtenu comme équations du mouvement dans le problème du nageur (cf. la question 1 et la synthèse de la section 1)

$$\overrightarrow{AN}(t) = t \cdot \overrightarrow{AN},$$

où $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$ est le vecteur-position du nageur après une minute d'effort. Ces équations s'écrivent aussi

$$\overrightarrow{AN}(t) = 40t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{Xavier}} + 20t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{Yves}},$$

où $\overrightarrow{\varepsilon_{Xavier}}$ (respectivement $\overrightarrow{\varepsilon_{Yves}}$) est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement le long de la berge (respectivement le long du pont), en parfaite analogie avec les équations vectorielles du mouvement du projectile.

3 Le tir oblique

De quoi s'agit-il ? Décrire de manière quantitative la forme d'un jet d'eau.

Enjeux L'équation vectorielle générale du mouvement d'un projectile.

De quoi a-t-on besoin ? Une chronophotographie (cf. la figure 33, en annexe à la page 498).

3.1 Retour au jet d'eau articulé

Comment s'y prendre ? Revenons-en à l'étude du jet d'eau.

Nous savons déjà que la forme du jet d'eau est celle de la trajectoire de n'importe laquelle des gouttes qui le constituent. La question qui nous intéresse maintenant est de décrire le mouvement d'une goutte d'eau dès sa sortie du tuyau d'arrosage, suivant les principes qui ont permis de décrire le mouvement de la balle dans la chronophotographie. Mais cette fois-ci, il s'agit de prendre en compte le fait que le tuyau est dirigé suivant un angle avec l'horizontale qui n'est pas nécessairement nul. Or, la description d'un tir à l'horizontale n'est pas sans rapport avec celle d'un tir dans une direction quelconque. En effet, l'expérience du jet d'eau articulé (cf. la question 5) a livré un résultat assez étonnant : peu importe que la direction de tir soit horizontale ou oblique, lorsque les distances mesurées dans cette direction sont les mêmes, alors les écarts verticaux correspondants sont eux aussi identiques. Tout semble donc être indépendant de la direction… ? Comme les grandeurs vectorielles prennent explicitement en compte les questions de direction, il est assez naturel de se poser la question suivante.

Question 9.
En termes de grandeurs vectorielles, qu'est-ce qui change – et qu'est-ce qui ne change pas – dans la description du mouvement d'une balle ou d'une goutte d'eau, lorsqu'on passe d'une direction de tir horizontale à une direction de tir oblique ?

Commençons par adapter les notations. Le point A devient le point de sortie de la goutte d'eau ou, de manière plus explicite, l'orifice du tuyau d'arrosage. On note $G(t)$ la position de la goutte d'eau à un instant d'observation t quelconque, et on a donc $G(0) = A$. On convient toujours d'abréger $G(t)$ en G lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté.

Comme précédemment, on décompose le mouvement en deux mouvements qui intègrent ce que l'expérience du jet d'eau articulé a mis en évidence. Le mouvement vertical est donc celui de la projection G_y du point G sur l'axe des y *parallèlement à la direction de tir* ; et le mouvement dans la direction de tir – ou mouvement oblique – est alors celui de la projection G_z du point G sur l'axe des z (c'est-à-dire l'axe de la direction initiale du mouvement) parallèlement à la verticale (cf. la figure 32). Suivant les résultats obtenus lors de la résolution de la question 3, on peut dès lors écrire – en parfaite analogie avec le cas du tir horizontal – le changement de position $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison vectorielle des changements de position $\overrightarrow{AG_z}$ et $\overrightarrow{AG_y}$,

$$\overrightarrow{AG}\,(t) = \overrightarrow{AG_z}\,(t) \; + \overrightarrow{AG_y}\,(t)\,.$$

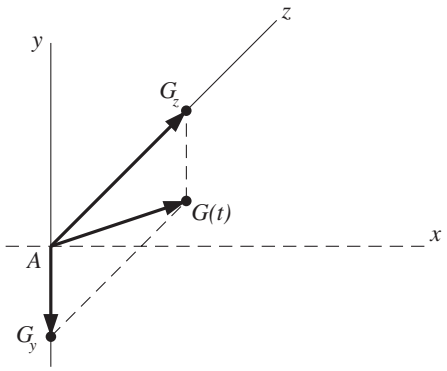


Fig. 32 : Le changement de position de la goutte d'eau se décompose suivant la verticale et la direction de tir.

Une hypothèse qui découle (!) de l'expérience du jet d'eau

On est alors amené assez naturellement à faire une *hypothèse de décomposition* : *chacun* de ces deux mouvements a les *mêmes caractéristiques* que le mouvement correspondant dans le cas de la direction de tir horizontale. Plus précisément, on suppose donc que

- le mouvement du point G_z est un mouvement rectiligne uniforme suivant la direction du tir,
- le mouvement du point G_y est un mouvement de chute libre le long de la verticale passant par le point A.

Il y a au moins deux manières de justifier cette hypothèse. La première consiste à faire une nouvelle expérience de stroboscopie, avec une direction initiale de tir qui ne soit plus horizontale : cf. la figure 22, ou la figure 33 ci-après (extraite de A. Meessen [1984]).

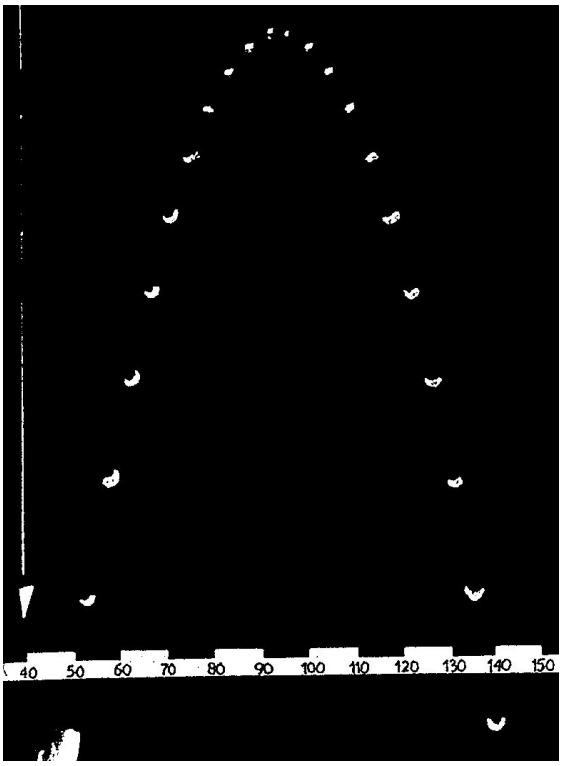


Fig. 33 : Une nouvelle expérience de stroboscopie.

Un traitement analogue[17] à celui de la question 6 permet alors de vérifier que le mouvement des points G_y et G_z est exactement celui qui est impliqué par l'hypothèse de décomposition.

Une deuxième méthode consiste à faire appel à la notion de *force* de pesanteur et au principe d'inertie[18]. Pour mémoire, ce principe affirme que « *tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.* » Comme la force de pesanteur est la seule[19] force qui s'applique à la goutte d'eau, c'est elle qui se retrouve responsable de la forme curviligne de la trajectoire. De manière équivalente, si la force de pesanteur n'existait pas, le mouvement de la goutte d'eau serait rectiligne uniforme, suivant la direction initiale de mouvement, c'est-à-dire l'axe des z.

[17] Sur le cliché, les dimensions sont fournies en *cm*, et l'intervalle de temps entre deux éclairs consécutifs est de 0,059 *s*.

[18] Pourvu évidemment que les élèves le connaissent. Les raisonnements en termes de chronophotographies sont entièrement cinématiques, et donc indépendants du principe d'inertie !

[19] Comme souvent, on néglige la résistance de l'air, et les effets hydrodynamiques propres au jet d'eau lui-même.

Les conséquences de l'hypothèse de décomposition

Comment caractériser la vitesse du mouvement rectiligne uniforme du point G_z ?

Cette vitesse étant constante, on peut l'identifier avec celle de la goutte d'eau au moment exact où elle sort du tuyau d'arrosage au point A. Pour mettre en évidence cette caractéristique dans les notations, on convient de noter $\overrightarrow{v_{init}}$ cette vitesse « initiale » puisqu'il s'agit de la vitesse de la goutte d'eau à l'instant initial d'observation.

Précisons ensuite que la *caractérisation* de la grandeur vectorielle $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$ doit être modifiée : elle a toujours comme point d'application le point A, mais sa direction a changé – c'est maintenant celle de l'axe des z dans la figure 34, c'est-à-dire celle suivant laquelle le tuyau d'arrosage projette toutes les gouttes d'eau – le sens quant à lui reste le sens « positif » de parcours de cet axe, et la mesure reste l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre.

Avec ces modifications, on montre comme précédemment que le mouvement d'une goutte d'eau est décrit par l'*équation vectorielle*

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}.$$

D'une certaine manière, cette équation décrit les variations avec le temps d'un parallélogramme « magique » (cf. la figure 34 ci-dessous). Comme dans la question 7, on pourrait en déduire la vitesse du point $G(t)$ à n'importe quel instant de son mouvement, etc.

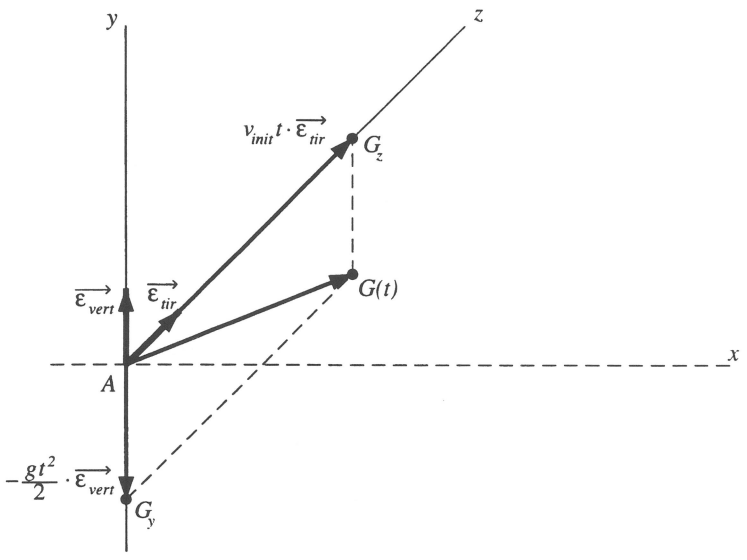


Fig. 34 : Un parallélogramme magique décrit le mouvement.

Il est encore intéressant d'observer que l'équation vectorielle que l'on vient d'obtenir a la même *forme* que celle issue de l'étude de la chronophotographie, alors que la situation physique est *a priori* différente.

En réalité, tout a été fait pour obtenir cette identité de forme troublante : l'hypothèse de décomposition, et surtout la manière dont le calcul des

grandeurs vectorielles règle les questions de directions ont été des *deus ex machina*. Et cette identité de forme redevient très naturelle dès qu'on s'aperçoit que toute la différence entre les deux situations physiques est prise en compte par l'interprétation géométrique différente qu'on réserve à la grandeur vectorielle de référence $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$.

3.2 La forme du jet d'eau

Comment s'y prendre ?

La question suivante n'a rien pour surprendre !

> Question 10.
> Quelle est finalement la trajectoire d'une goutte d'eau – ou la forme du jet d'eau – si le tuyau d'arrosage est dirigé suivant un angle de 45° avec l'horizontale ?
> Et s'il s'agit d'un angle θ quelconque ?

... Et tout le travail est quasiment fait, il ne s'agit plus que de mise en forme !

Un changement de références

Si on veut travailler avec les coordonnées ordinaires du point $G(t)$, c'est-à-dire celles prises suivant les axes des x et des y de la figure 32 ou 34, il est intéressant d'introduire deux nouvelles grandeurs vectorielles de références qui soient appropriées à ce (nouveau) choix d'axes. On définit donc

$\overrightarrow{\varepsilon_x}$: c'est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement suivant la direction horizontale ; il a comme point d'application le point A, comme direction celle de l'axe des x, comme sens le sens positif de parcours de cet axe, et comme mesure l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre,

$\overrightarrow{\varepsilon_y}$: c'est le changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction verticale ; il a encore comme point d'application le point A, comme direction celle de l'axe des y, comme sens le sens positif de cet axe, et toujours comme mesure l'unité de longueur (le mètre) ; évidemment $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}} = \overrightarrow{\varepsilon_y}$.

D'autre part, un peu de trigonométrie (en s'aidant de la figure 35) permet de relier entre elles les grandeurs vectorielles $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$, $\overrightarrow{\varepsilon_x}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_y}$.

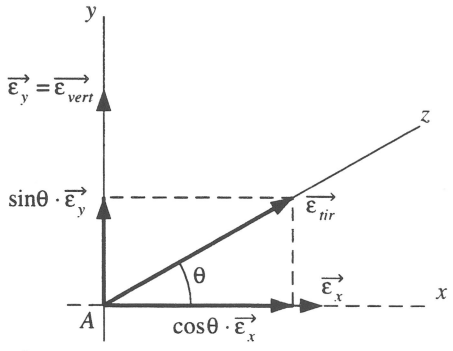


Fig. 35 : De nouvelles grandeurs vectorielles de référence.

$$\overrightarrow{\varepsilon_{tir}} = \cos\theta \cdot \overrightarrow{\varepsilon_x} + \sin\theta \cdot \overrightarrow{\varepsilon_y}.$$

L'équation vectorielle $\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ obtenue à la fin de la question précédente devient alors

$$\overrightarrow{AG(t)} = v_{init}t\,(\cos\theta \cdot \overrightarrow{\varepsilon_x} + \sin\theta \cdot \overrightarrow{\varepsilon_y}) + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_y},$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes suivant les deux grandeurs vectorielles de référence qui ont été associées aux coordonnées, il vient

$$\overrightarrow{AG(t)} = v_{init}t\cos\theta \cdot \overrightarrow{\varepsilon_x} + \left(v_{init}t\sin\theta - \frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_y}.$$

La trajectoire, enfin...

Bien sûr, on peut aussi écrire le résultat précédent directement en termes de coordonnées

$$\begin{cases} x &= v_{init}t\cos\theta, \\ y &= v_{init}t\sin\theta - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Pour tirer alors de ces deux équations la trajectoire du mouvement, il suffit de tout immobiliser, c'est-à-dire de « chasser le temps », cela donne l'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{g}{2v_{init}^2\cos^2\theta} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\theta \cdot x.$$

Comme dans le cas du tir horizontal, c'est l'équation d'une parabole. Elle passe par le point A de coordonnées $(0;0)$, ce qui n'a évidemment rien d'étonnant !

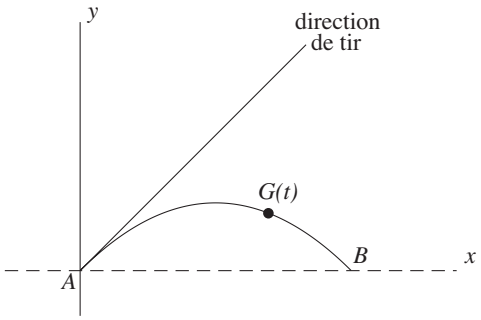


Fig. 36 : La forme du jet d'eau.

Le matériel utilisé dans l'expérience du jet d'eau articulé permet de relever très facilement les coordonnées de plusieurs points de la courbe formée par le jet d'eau, et de confirmer[20], si on le souhaite, son caractère parabolique[21].

[20] Dans les limites de précision que l'expérience permet d'atteindre...

[21] Ce genre de mesure peut fournir aussi une estimation – indirecte, mais relativement précise – de la vitesse v_{init} du jet d'eau à la sortie du tuyau. Si, avec les notations de la figure 36, $p = |AB|$ est la « portée » du jet d'eau, exprimée en m, on obtient après un petit calcul

$$v_{init} = \sqrt{\frac{gp}{\sin 2\theta}}.$$

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{4}$, on trouve $v_{init} \approx 3\sqrt{p}$.

Pour $\theta = 0$, on retrouve la parabole de sommet A déjà étudiée précédemment[22]. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'équation de la trajectoire se simplifie sensiblement de cette manière,

$$y = -\frac{g}{v_{init}^2} \cdot x^2 + x.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la situation de l'arroseur arrosé. L'équation de la trajectoire n'est alors plus d'aucun secours (*sic* !), mais l'équation vectorielle est quant à elle tout à fait parlante (*resic* !)

$$\overrightarrow{AG(t)} = \left(v_{init}t - \frac{gt^2}{2} \right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_y},$$

ou, si l'on préfère

$$\begin{cases} x &= 0, \\ y &= v_{init}t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

3.3 Le problème du poisson-archer

De quoi s'agit-il ?

Déterminer les caractéristiques de rencontre (position, instant...) de deux projectiles partant en même temps d'endroits différents.

Enjeux

Une illustration des propriétés communes de deux mouvements de projectiles.

Une interprétation cinématique des points d'intersection d'une droite et d'une parabole.

Comment s'y prendre ?

La question suivante est l'occasion de rassembler et de prolonger les résultats obtenus lors de l'étude du jet d'eau et de la chronophotographie, et d'y ajouter une pincée de biologie (cruelle !) Elle est inspirée de H. Benson [1993], exemple 4.4, p. 61-62.



Fig. 37

[22] Dans le cas particulier où de plus $v_{init} = 0$, il n'est évidemment plus possible de chasser le temps de l'équation vectorielle du mouvement.

Question 11.
Dans la figure 37, un insecte est posé sur une brindille à une certaine hauteur au-dessus de la surface de l'eau. Un poisson-archer projette une goutte d'eau directement sur l'insecte, afin de l'étourdir et d'arriver ainsi à le gober. Au moment exact où la goutte est projetée, l'insecte voit venir le danger et se laisse tomber pour y échapper.

La goutte d'eau peut-elle atteindre l'insecte ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ? Si non, pourquoi ?

Le problème revient à décrire le mouvement d'une goutte d'eau projetée par le poisson-archer, et à mettre ce mouvement en correspondance avec le mouvement vertical de chute libre de l'insecte. Le poisson-archer projette la goutte d'eau dans une direction qui n'est manifestement pas horizontale.

On peut reprendre *mutatis mutandis* les notations déjà utilisées dans les questions précédentes. Le point A est le point de sortie de la goutte d'eau ou, de manière plus explicite, le bord de la gueule[23] de notre prédateur aquatique. On note

- $G(t)$ la position de la goutte d'eau,
- $I(t)$ la position de l'insecte

à un instant d'observation t quelconque, en convenant encore d'abréger $G(t)$ en G et $I(t)$ en I lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté. On a en particulier $G(0) = A$, tandis que $I(0)$ désigne la position de l'insecte au tout début du drame, là-haut sur sa brindille. Et nous savons déjà tout ce qu'il faut savoir du mouvement de la goutte d'eau meurtrière.

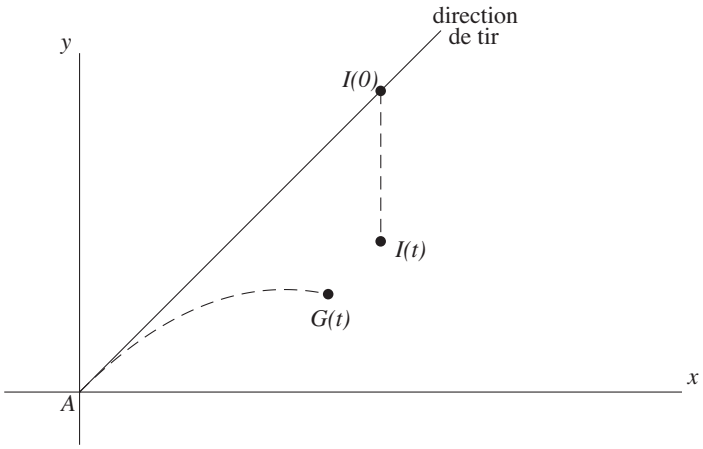


Fig. 38 : Le cadre du drame.

Le mouvement de l'insecte

L'insecte se laisse donc tomber suivant un mouvement *rectiligne* de chute libre *à partir du point* $I(0)$. Quel que soit l'instant d'observation t, le chan-

[23] Au moment du tir, on suppose que le bord de la gueule du poisson-archer affleure la surface de l'eau.

gement de position se décompose sous la forme

$$\overrightarrow{AI}\,(t) = \overrightarrow{AI}\,(0) \; + \overrightarrow{AI_y}\,(t)\,,$$

avec les notations de la figure 39. Comme ce mouvement reste parallèle à l'axe des y, une de ces composantes – celle suivant la direction de tir – est donc constante, c'est-à-dire indépendante du temps.

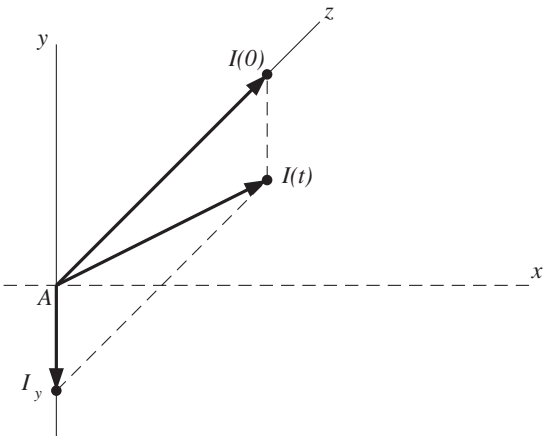


Fig. 39 : Le changement de position pour le mouvement de chute libre de l'insecte.

Notons, suivant la figure 40

- d, la distance horizontale (mesurée en mètres, comme il se doit) qui sépare l'insecte du poisson-archer,
- θ, l'angle de tir mesuré par rapport à l'horizontale, qui est aussi l'angle sous lequel l'insecte est vu par le poisson-archer.

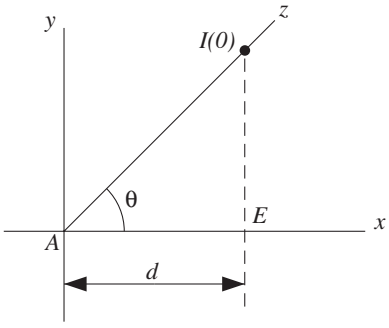


Fig. 40 : Deux paramètres permettent de déterminer la position de l'insecte.

Le triangle rectangle $AEI(0)$ livre immédiatement la relation

$$|AI(0)| = \frac{d}{\cos\theta}.$$

On en déduit – comme précédemment – l'équation vectorielle du mouvement de l'insecte

$$\overrightarrow{AI}\,(t) = \frac{d}{\cos\theta} \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} \; + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}.$$

L'issue du drame

Est-il possible que la goutte d'eau frappe l'insecte ? En d'autres mots, existe-t-il un instant t pour lequel la goutte d'eau et l'insecte se trouvent exactement au même endroit, c'est-à-dire pour lequel $\overrightarrow{AI}(t) = \overrightarrow{AG}(t)$?

Pour bien voir ce qui se passe, il est intéressant d'introduire – après le rectangle magique – le « parallélogramme de la mort » : il est défini (cf. la figure 41) à partir du segment $|G(t)I(t)|$, qui décrit toute l'évolution du drame, puisqu'il est de longueur nulle lorsque la goutte d'eau frappe sa cible.

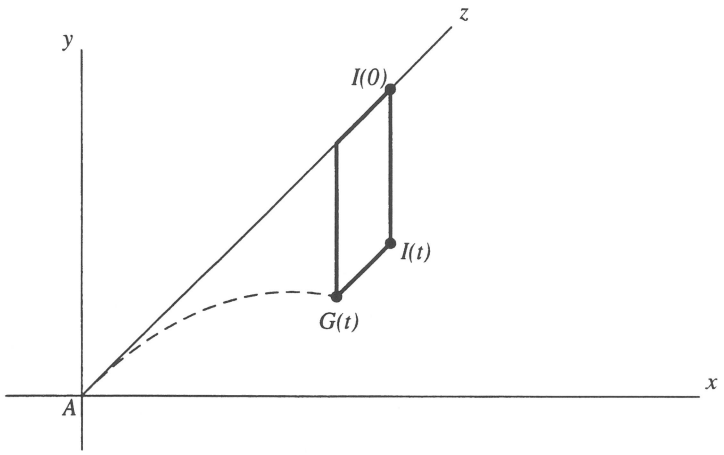


Fig. 41 : Le parallélogramme de la mort !

Or, le parallélogramme $AC(t)J(t)I(t)$ montre que $\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{AI(t)} + \left(-\overrightarrow{AG(t)}\right)$ (cf. la figure 42).

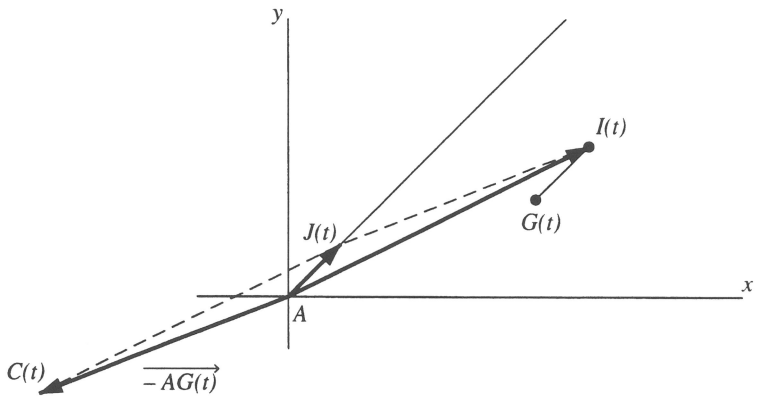


Fig. 42 : Deux grandeurs vectorielles équivalentes.

À partir de l'équation vectorielle du mouvement de la goutte d'eau,

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}},$$

et de celle de l'insecte,

$$\overrightarrow{AI}\,(t) = \frac{d}{\cos\theta}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right)\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{vert}},$$

on peut alors calculer vectoriellement la caractéristique fatale du « parallélogramme de la mort », à savoir

$$\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{AJ(t)} = \overrightarrow{AI(t)} + \left(-\overrightarrow{AG(t)}\right) = \left(\frac{d}{\cos\theta} - v_{init}t\right)\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}.$$

Si la rencontre meurtrière de la goutte d'eau et de l'insecte a bien lieu, cet instant fatal est donc déterminé par la condition

$$\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{0},$$

et vaut

$$t_{mort} = \frac{d}{v_{init}\cos\theta}.$$

Et donc, ça ne rate jamais ? Quels que soient l'angle de tir[24], la vitesse d'expulsion de la goutte d'eau et la distance horizontale qui sépare le poisson-archer de sa cible, l'issue est inéluctable : le poisson-archer fait mouche ? Voire... Rien dans ce qui précède n'a pris en compte que le mouvement de chute libre de l'insecte s'arrête dès que celui-ci touche la surface de l'eau au point E (cf. la figure 40). La goutte d'eau n'atteint donc l'insecte *avant que celui-ci ne touche l'eau* que si

$$|I(0)E| > \frac{gt_{mort}^2}{2}.$$

Comme on sait que $t_{mort} = \frac{d}{v_{init}\cos\theta}$ et que $|I(0)E| = d\,\mathrm{tg}\,\theta$, un peu de calcul livre alors la « condition d'impact »

$$v_{init}^2 > \frac{gd}{\sin 2\theta}.$$

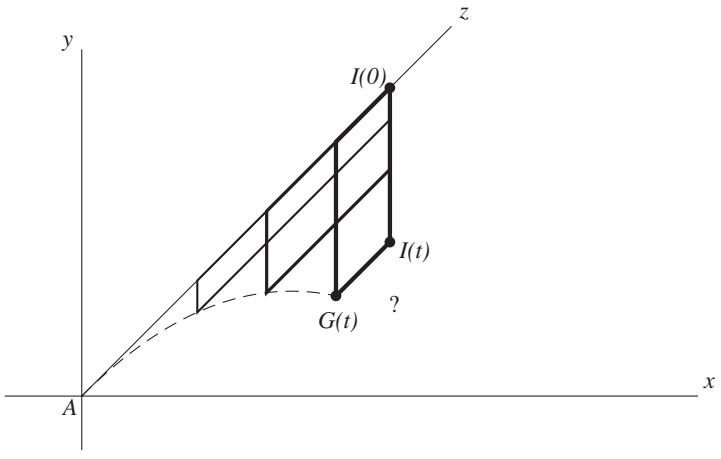


Fig. 43 : L'évolution inéluctable du parallélogramme de la mort.

[24] Pourvu qu'il reste (strictement) compris entre 0° et 90°, mais le poisson-archer n'est pas bigleux au point de l'ignorer !

On peut mener un raisonnement analogue, et plus géométrique, à l'aide du « parallélogramme de la mort ». En effet,en se limitant aux composantes verticales de leurs mouvements, l'insecte et la goutte d'eau doivent se rencontrer s'ils « partent » en même temps. La forme dégénérée du parallélogramme de la mort – c'est-à-dire celle pour laquelle la longueur du segment $|G(t)I(t)|$ est nulle – correspond à la condition d'impact, pourvu que cette forme dégénérée se réalise *au-dessus* de l'eau, etc.

Malheureusement, la nature est impitoyable ! Même si l'insecte arrive à toucher l'eau, son compte est bon : le poisson-archer est alors dans son élément et, après deux petits coups de nageoire, plus rien ne l'empêche de happer l'innocente victime. Versons une larme...

Regardons enfin sur quelques exemples numériques, comment le destin frappe. Supposons pour fixer les idées que $\theta = 45°$ et $d = 5 \cdot 10^{-2}$ m ou 5 cm, ce qui correspond approximativement à ce qu'illustre la figure 37.

- Si, par exemple, $v_{init} = 1$ m/s,
  - alors on obtient $t_{mort} = 7,07\ldots\ 10^{-2}$ s, c'est-à-dire un peu moins d'un dixième de seconde,
  - et $|I(0)I\,(t_{mort})| = 2,45\ldots\ 10^{-2}$ m, c'est-à-dire environ la moitié de la distance qui sépare initialement l'insecte de la surface de l'eau.
- Autre exemple, si $v_{init} = 2$ m/s,
  - alors $t_{mort} = 3,53\ldots\ 10^{-2}$ s, c'est-à-dire un peu moins d'un trentième de seconde,
  - et $|I(0)I\,(t_{mort})| = 0,6125\ldots\ 10^{-2}$ m, c'est-à-dire un peu plus d'un dixième de la distance qui sépare initialement l'insecte de la surface de l'eau.

De manière générale (mais toujours en supposant que $\theta = 45°$), on peut établir la formule

$$|I(0)I\,(t_{mort})| = \frac{gd^2}{v_{init}^2},$$

qui précise comment le peu d'espace qu'arrive encore à parcourir l'insecte avant le choc fatal dépend de la vitesse initiale de la goutte d'eau.

4 Lent ou rapide ?

Cette section illustre la portée du point de vue vectoriel sur la vitesse, en montrant comment une astuce (toute vectorielle) permet de définir et de déterminer immédiatement l'*accélération* d'un mobile animé d'un mouvement circulaire uniforme.

De quoi s'agit-il ? Comparer les vitesses de différents mobiles animés d'un mouvement circulaire uniforme, au départ de simulations de ce type de mouvement.

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse (linéaire) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme. La notion d'hodographe du mouvement de ce point. La définition et la caractérisation vectorielle de l'accélération (linéaire) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme

De quoi a-t-on besoin ?

Quelques données astronomiques (reprises plus bas) concernant le mouvement de rotation de la terre autour du soleil.

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les résultats élémentaires concernant

- la longueur de la circonférence : dépendance du rayon, approximation par des polygones réguliers inscrits ;
- la mesure des angles en radians ;
- l'aire d'un disque, d'un secteur circulaire.

Le cercle trigonométrique, la trigonométrie des angles orientés, les équations paramétriques d'un cercle (sous forme trigonométrique).

4.1 Vitesse angulaire et vitesse linéaire

Comment s'y prendre ?

En général, on dit qu'un mobile ponctuel est animé d'un mouvement circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle.

Ceci dit, il faut certainement commencer par demander aux élèves de faire une liste d'exemples de mouvements circulaires. Les objets tournants sont tellement fréquents que ces exemples ne manquent pas, pourvu bien sûr qu'on se concentre sur un point bien défini de l'objet en mouvement : une essoreuse à salade, beaucoup d'objets électro-ménagers (centrifugeuse, ...) ou de bricolage (foreuse, scie circulaire, ...), une platine de tourne-disque[25], le virage d'une voiture dans un rond-point, certaines figures en skate-board, un looping sur une montagne russe, le lancer du marteau, etc.

Question 12.
Parmi tous ces mouvements circulaires, lesquels mériteraient-ils d'être qualifiés d'uniformes ?

Une définition...

Les exemples ci-dessus et le modèle de la définition du mouvement *rectiligne* uniforme permettent assez vite de dégager une définition en termes d'angles ou d'arcs parcourus, telle que : un mouvement circulaire est uniforme lorsque les angles – ou les arcs – décrits par le point mobile sont entre eux comme les intervalles de temps nécessaires à les parcourir ; ou encore : lorsque des arcs égaux sont parcourus en des temps égaux.

[25] Si, si ! Cet objet antédiluvien est encore très utilisé : par les disc-jockeys dans les dancings par exemple.

Le retour sur les exemples précédents permet alors de nuancer la définition proposée au début : en fait, un mobile est animé d'un mouvement circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle ou un arc de cercle, comme dans le cas du virage en voiture. Dans le cas d'une trajectoire qui n'est pas un cercle complet, le mouvement est souvent *non* uniforme : certaines figures de skate-board et plus généralement les mouvements de type pendulaire sont de ce type.

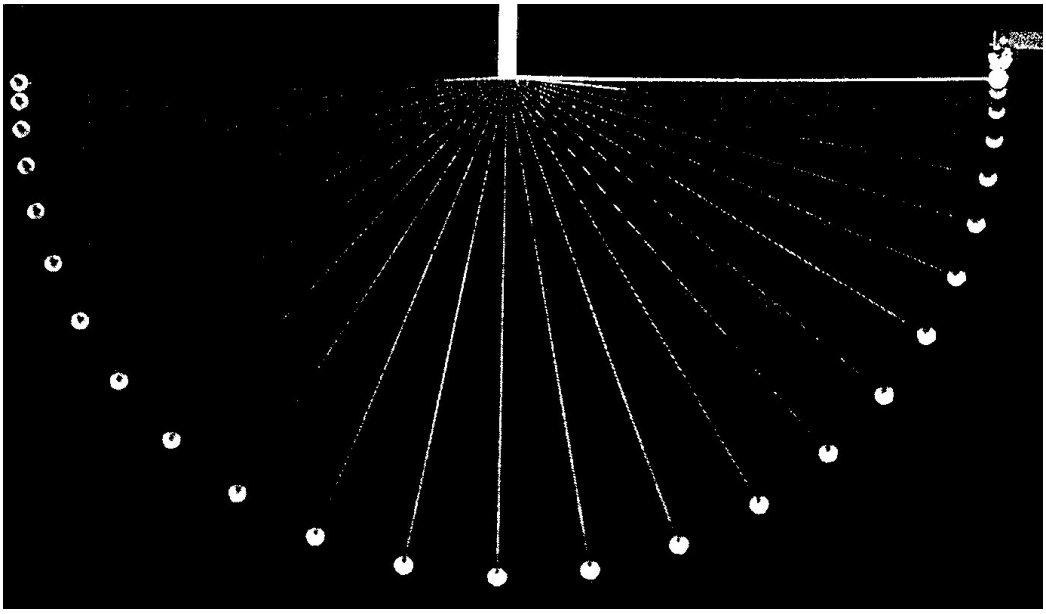


Fig. 44 : Le mouvement pendulaire est circulaire et non uniforme.

... et quelques caractéristiques

Ces observations élémentaires permettent de caractériser un mouvement circulaire uniforme à partir de deux grandeurs, toutes deux scalaires : le rayon R de la trajectoire, et l'angle w parcouru par unité de temps[26] (et mesuré en radians par seconde).

Question 13.
Des deux mouvements de rotation suivants, lequel est le plus lent et lequel est le plus rapide : le mouvement de la terre autour du soleil ou le mouvement d'une dent de scie circulaire (électrique) ?

Assez souvent, le mouvement d'une dent de scie circulaire est ressenti par les élèves comme le plus rapide. Et c'est... vrai, mais d'une manière qui mérite d'être découverte progressivement.

[26] Au lieu de cet angle, on considère souvent la *fréquence* ν du mouvement, c'est-à-dire le nombre de tours parcourus par unité de temps ; lorsque le temps est mesuré en secondes, la fréquence est mesurée en Hertz (1 Hz = 1 s^{-1}). Si on note T la période du mouvement, c'est-à-dire le temps nécessaire à parcourir un tour complet, les diverses relations : $w \cdot T = 2\pi$, $\nu = \frac{1}{T}$ et $2\pi \cdot \nu = w$ sont parfois utiles.

La vitesse angulaire

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'angle w parcouru par unité de temps est appelé la vitesse angulaire. Si on considère, de manière assez naturelle, que le mouvement d'une dent d'une scie circulaire est effectivement un mouvement circulaire uniforme, et si pour fixer les idées, on suppose que la scie tourne à 1500 tours/minute, on obtient

$$w_{scie} = \frac{1500 \times 2\pi}{60} = 157,079\ldots \text{ (rad/s)}.$$

On peut légitimement considérer que c'est un mouvement circulaire (très) rapide.

Le mouvement de la terre autour du soleil

Le mouvement de la terre autour du soleil est-il un mouvement circulaire, et si oui, est-il uniforme ?

Cela demande d'abord une petite recherche de la part des élèves quant aux propriétés du mouvement des planètes. Il n'est pas bien difficile d'obtenir dans des encyclopédies, ou sur Internet, les informations suivantes qui suivent.

- Chaque planète se meut sur une orbite elliptique[27] dont le soleil est un des foyers (première loi de Kepler).
- Le rayon reliant le soleil à la planète balaye des aires égales en des temps égaux (deuxième loi de Kepler).
- L'excentricité[28] de l'orbite de la terre autour du soleil est égale à $0,017$.

La très faible excentricité de l'orbite de la terre autour du soleil signifie que les deux foyers sont quasiment confondus, et qu'il est donc tout à fait raisonnable de supposer que l'orbite en question est circulaire, avec le soleil au centre. Dès que cette hypothèse est faite, la deuxième loi de Kepler implique alors que le mouvement est uniforme, puisque l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à l'angle au centre qui le définit. On calcule alors sans difficulté la vitesse angulaire du mouvement de la terre autour du soleil

$$w_{terre/soleil} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,9923\ldots 10^{-7} \text{ (rad/s)}.$$

Par comparaison avec le cas de la scie, il s'agit ici d'un mouvement circulaire uniforme dont la vitesse angulaire est dérisoire.

Ainsi, pour les deux mouvements circulaires uniformes considérés dans la question, la vitesse angulaire de l'un est très importante, alors que celle

[27] Une ellipse peut être définie comme une courbe allongée, apparentée au cercle, qui s'obtient en coupant un cône circulaire droit par un plan sécant à toutes ses génératrices. On peut établir que la somme des distances d'un point quelconque d'une ellipse à deux points fixes – appelés foyers – est constante, et égale à la plus grande corde, ou grand axe, de l'ellipse. Cette propriété permet de tracer facilement des ellipses suivant le procédé dit « du jardinier ».

[28] L'excentricité d'une ellipse est, par définition, le rapport entre la distance des foyers et la longueur du grand axe.

de l'autre semble dérisoire. Mais la vitesse angulaire mise ainsi en scène ne semble pas être de la même nature que la vitesse du nageur ou de la balle dans les situations précédentes : elle ne semble pas attachée matériellement au point mobile et ne possède pas les particularités d'une grandeur vectorielle...

Question 14.
À quelle vitesse (instantanée) la terre se déplace-t-elle autour du soleil ?

Quelques stroboscopies... virtuelles

La définition même de mouvement circulaire uniforme permet immédiatement de simuler le résultat d'une expérience de stroboscopie pour ce genre de mouvement, au départ de la description trigonométrique du cercle. Si le mouvement considéré est de rayon R et de vitesse angulaire w, alors l'angle parcouru après t unités de temps égale wt, et la position[29] du point mobile à l'instant t est donc décrite par ses équations paramétriques, ou équations du mouvement :

$$\begin{cases} x = x(t) = R\cos wt, \\ y = y(t) = R\sin wt. \end{cases}$$

Suivant les dimensions en jeu dans le problème, la simulation mène à bien choisir les unités à utiliser. Par exemple, dans le mouvement de la terre autour du soleil, la distance moyenne terre/soleil étant de l'ordre de $149{\cdot}10^6$ km, il sera préférable de prendre comme unité de longueur le million de kilomètres. Dans ce cas, si une première simulation est réalisée mois par mois, on posera

$$w_{mois} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 0,5235\ldots \text{ (rad/mois)}$$

et les positions de la terre seront les 12 sommets d'un dodécagone régulier. Chaque nouvelle simulation peut alors amener les élèves à devoir adapter leurs unités ; par exemple, pour une simulation au jour près,

$$w_{jour} = \frac{2\pi}{365} = 0,01721\ldots \text{ (rad/jours)}$$

ou à l'heure près,

$$w_{heure} = \frac{2\pi}{365 \times 24} = 0,0007172\ldots \text{ (rad/heures).}$$

Pour une simulation au jour près, les positions correspondantes de la terre dessinent un cercle presque continu (le point représenté en gras dans la figure ci-dessous est la position de la terre au $46^{\text{ème}}$ jour de l'année).

[29] Le repère dans lequel le mouvement est étudié est conforme à la représentation trigonométrique ou cartésienne usuelle ; dans le cas particulier du mouvement de la terre autour du soleil, on ne tient donc pas compte ici d'éventuelles conventions utilisées en astronomie.

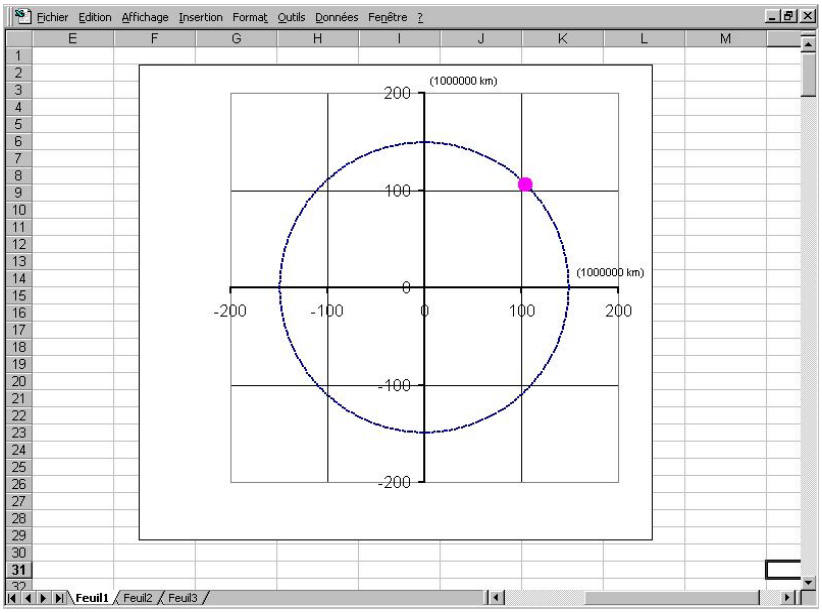


Fig. 45 : La trajectoire de la terre autour du soleil, sur 365 jours.

Cette continuité n'est qu'apparente, comme le montre un agrandissement de la figure, centré sur ce $46^{\text{ème}}$ jour (cf. la partie gauche de la figure 46). Le caractère curviligne de la trajectoire reste encore assez bien marqué. Mais si on réalise une simulation à l'heure près, toujours centrée au même point, ce caractère curviligne n'est plus perceptible (cf. la partie droite de la figure 46) : c'est bien un mouvement *rectiligne* et uniforme qui commence à apparaître !

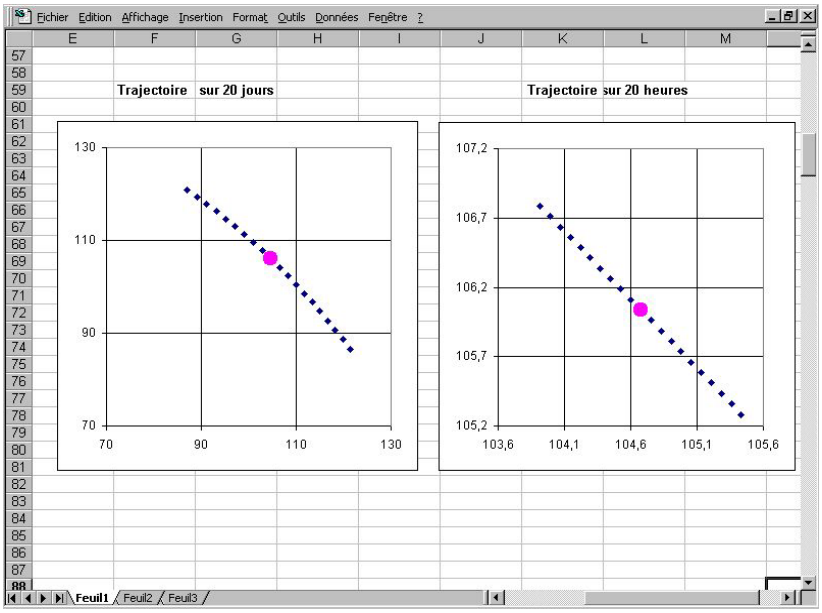


Fig. 46 : La trajectoire de la terre autour du soleil, sur 20 jours, et sur 20 heures.

Comme on l'a mis en évidence dans la section précédente, la vitesse du mouvement rectiligne idéal sous-jacent à une telle simulation est une grandeur vectorielle de même nature que la vitesse du nageur, ou de la balle lancée horizontalement, et associée au déplacement réellement effectué par le mobile.

Une approximation de la vitesse (instantanée)

Le tableau de valeurs qui a servi à représenter la trajectoire de la terre autour du soleil à l'heure près, contient tout ce qu'il faut pour calculer la mesure ou l'intensité de la vitesse de ce mouvement rectiligne presque uniforme. Par exemple, puisque le $46^{\text{ème}}$ jour correspond à la $46 \times 24 = 1\,104^{\text{ème}}$ heure d'observation, le tableau

t (en h)	$x(t)$ (en 10^6 km)	$y(t)$ (en 10^6 km)
1 104	104,676594	106,036837
1 105	104,600511	106,11189

permet de calculer l'intensité de la vitesse du mouvement rectiligne correspondant. On a

$$\begin{aligned} v_{r.u.}(1\,104) &= \sqrt{(-0,076083)^2 + (0,075053)^2} \\ &= 0,10687153\ldots \text{ (10^6 km/h)} = 106\,871,53\ldots \text{ (km/h)}. \end{aligned}$$

C'est une vitesse extraordinaire ! Y a-t-il (néanmoins) moyen d'être encore plus précis ?

Question 15.
Quelles sont les caractéristiques géométriques, ou vectorielles, de la vitesse (instantanée) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ?

La symétrie du cercle à l'œuvre

On devine assez vite que, si un point mobile est animé d'un mouvement circulaire *uniforme*, alors sa vitesse en n'importe quel point de la trajectoire doit toujours d'une certaine manière « être la même ». Plus précisément, cela signifie que si le sens, la direction et l'intensité du vecteur vitesse sont déterminés en un (seul) point de la trajectoire, ils sont alors déterminés en n'importe quel autre point de celle-ci : une rotation appropriée fait l'affaire. En effet, n'importe quelle chronophotographie d'un point est toujours équivalente à une chronophotographie d'un autre point (réalisée à la même fréquence d'éclairs) par une rotation qui amène l'un sur l'autre.

Pour déterminer les caractéristiques géométriques, ou vectorielles, de la vitesse (instantanée) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, il suffit donc de le faire en un seul point de sa trajectoire !

De plus, le calcul de la fin de la question précédente a montré qu'une vitesse très importante n'est pas pour autant très facile à visualiser. Comme de

plus tous les cercles sont homothétiques, revenons-en un moment au bon vieux cercle trigonométrique.

Une limite visuelle

On peut encore faire découvrir la plupart des caractéristiques géométriques de la vitesse en tant que grandeur vectorielle, à l'aide d'une simulation.

Pour fixer les idées, on considère un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = 1$ et de vitesse angulaire $w = \pi$ (rad/s). La position à un instant t est donc décrite par les équations du mouvement

$$\begin{cases} x(t) = \cos \pi t, \\ y(t) = \sin \pi t. \end{cases}$$

Un tableur tel que EXCEL permet de faire varier très simplement un paramètre à l'aide d'une « barre de défilement », et de visualiser directement le résultat sur une figure associée à l'ensemble des données. Dans les figures ci-dessous, on a fait varier le temps t, en l'écrivant sous la forme $t = \frac{1}{n}$, où n est une valeur entière attachée à la barre de défilement, et variant de 1 à 1000. L'extrémité du vecteur décrivant la vitesse du mouvement rectiligne uniforme correspondant est donné par

$$\begin{cases} v_{r.u.x}(0) = x(0) + \frac{x(t)-x(0)}{t} = x(0) + \big(x(\frac{1}{n}) - x(0)\big) \cdot n, \\ v_{r.u.y}(0) = y(0) + \frac{y(t)-y(0)}{t} = y(0) + \big(y(\frac{1}{n}) - y(0)\big) \cdot n. \end{cases}$$

Dans la figure ci-dessous, $n = 3$ dans la cellule C20.

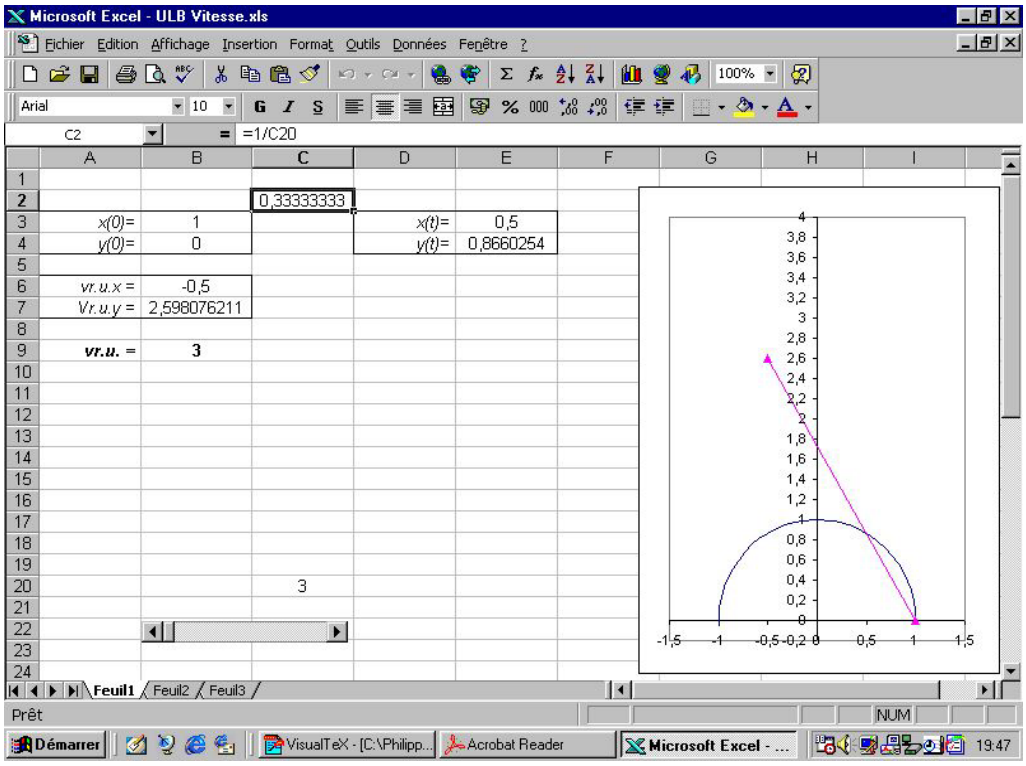


Fig. 47 : Le début du calcul de la vitesse comme grandeur vectorielle.

Et dans la suivante, $n = 1000$ dans la cellule C20.

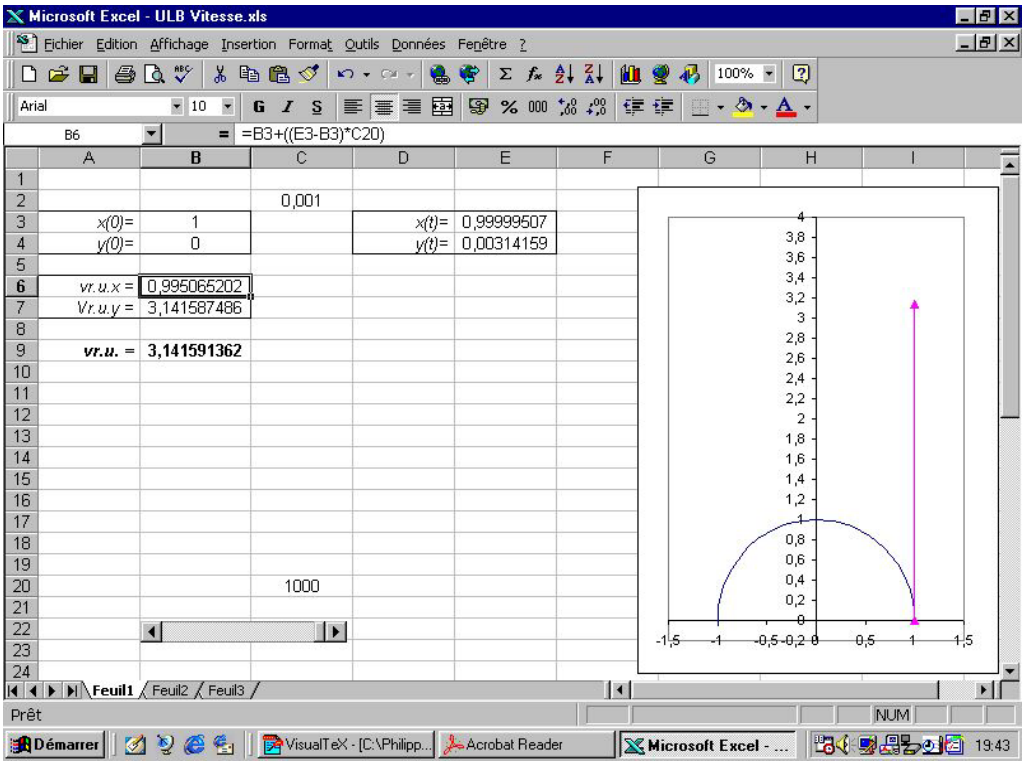


Fig. 48 : La vitesse, à moins d'un millième de seconde.

On observe déjà que la vitesse est quasiment perpendiculaire à l'horizontale, et que son intensité est très proche de $\pi = 3,141592654\ldots$ On peut reprendre ce genre de simulation en faisant varier les paramètres R, w et t. À chaque fois, les résultats sont analogues : plus la discrétisation est fine, et plus le vecteur vitesse se redresse. Et il finit par devenir perpendiculaire au rayon horizontal, tandis que son intensité tend à se rapprocher de Rw.

La vitesse d'un mouvement circulaire uniforme

En fait, toutes ces observations fournissent aussi les idées principales des démonstrations qui restent à faire.

Considérons un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire w. Représentons

- par $M(t)$ ou M, la position du point mobile à l'instant t ;
- par $M(t+\Delta t)$ ou M', la position du point mobile à l'instant $t+\Delta t$, Δt est donc l'intervalle de temps nécessaire à parcourir l'arc de cercle MM' ;
- et par $\overrightarrow{v}(t)$, la vitesse instantanée du point mobile $M(t)$, considérée comme grandeur vectorielle.

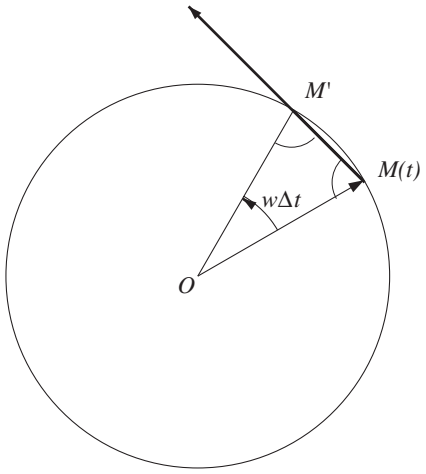


Fig. 49 : Une approximation de la direction de la vitesse instantanée.

L'examen du triangle isocèle OMM' livre la relation

$$\widehat{M} = \frac{\pi - w \cdot \Delta t}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{w \cdot \Delta t}{2},$$

qui montre que l'angle $\widehat{M}$ se rapproche de $\frac{\pi}{2}$ lorsque l'intervalle de temps Δt se rapproche de 0. Cela signifie qu'en termes de leurs représentants géométriques, les vecteurs $\overrightarrow{v}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t)$ sont perpendiculaires.

Ainsi, la vitesse d'un mouvement circulaire uniforme est tangente à la trajectoire de ce mouvement. C'est une propriété facile à observer : par exemple, lorsqu'on lance une bille le long du bord d'un cerceau et qu'on relève ce dernier d'un coup, la bille « prend la tangente », de même lorsqu'on présente une lame d'outil à une meule, les étincelles s'échappent tangentiellement, etc.

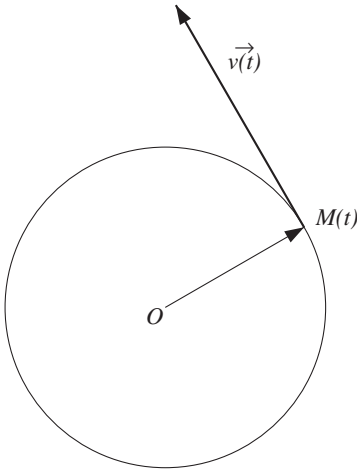


Fig. 50 : La direction de la vitesse instantanée.

Mais il ne faut pas perdre de vue que la justification physique de ce type de comportement fait appel au principe d'inertie, qui est un principe dynamique et qu'on abandonne alors le contexte de la seule cinématique. Par

ailleurs, même lorsque le mouvement circulaire n'est pas uniforme, sa vitesse est encore tangente à la trajectoire du mouvement. Cela résulte d'un raisonnement analogue à celui décrit ci-dessus, pourvu que l'angle parcouru $w(t)$, considéré comme fonction du temps t nécessaire à le parcourir, devienne proche de 0 lorsque ce temps lui-même est proche de 0, ou plus précisément, pourvu que cette angle soit une fonction continue du temps t au voisinage de 0 ; c'est là une hypothèse physiquement très raisonnable !

Un changement de point de vue

Fixons maintenant un repère au centre de la trajectoire circulaire. Nous pouvons alors écrire

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\,(\cos wt \cdot \overrightarrow{e_1} + \sin wt \cdot \overrightarrow{e_2})\,,$$

Effectuons une translation du vecteur $\overrightarrow{v}(t)$ au centre de la trajectoire du mouvement circulaire. Cela revient à changer (littéralement) de point de vue sur la vitesse, et mérite donc qu'on l'interprète physiquement, ce qui sera l'objet de la question 16 ci-après. Mais comme cette translation n'a rien d'étonnant en mathématiques, et qu'elle a déjà été utilisée et justifiée physiquement dans l'étude des mouvements du nageur et de la goutte d'eau, elle ne doit pas trop nous inquiéter pour le moment. Ceci dit, le fait que la vitesse soit perpendiculaire au rayon d'extrémité $M(t)$ implique qu'il existe une constante k telle que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(t) &= k\left(\cos\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\overrightarrow{e_1} + \sin\left(wt+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\overrightarrow{e_2}\right)\\ &= k\,(-\sin wt\cdot\overrightarrow{e_1} + \cos wt\cdot\overrightarrow{e_2})\,.\end{aligned}$$

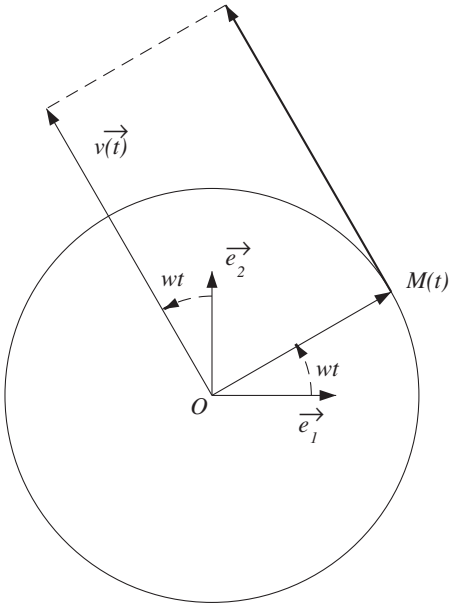


Fig. 51 : La vitesse instantanée, ramenée au centre de la trajectoire.

Par identification des modules dans les deux membres de la dernière égalité, cette constante k ne peut être que l'intensité $v(t)$ de la vitesse instantanée. Mais l'expérience gagnée lors des simulations, ou – plus mathématiquement – la méthode classique de calcul de la longueur de la circonférence (par polygones inscrits) entraîne alors

$$v(t) = \frac{2\pi R}{T},$$

où T est le temps nécessaire à parcourir un tour complet.

> Une justification un peu plus détaillée peut être présentée de la manière suivante. Il s'agit de calculer
>
> $$v(t) \text{ ou } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|MM'|}{\Delta t}.$$
>
> Or, la méthode de calcul de la longueur de la circonférence par « bissection » de polygones inscrits établit que, si MM' est la corde qui sous-tend un angle au centre de $\frac{360^\circ}{2^n}$
>
> $$\lim_{n \to \infty} 2^n \cdot |MM'| = 2\pi R.$$
>
> En posant alors $\Delta t = \frac{T}{2^n}$, on calcule
>
> $$v = \lim_{n \to \infty} \frac{|MM'|}{\frac{T}{2^n}} = \frac{1}{T} \cdot \lim_{n \to \infty} 2^n \, |MM'| = \frac{1}{T} \cdot 2\pi R.$$

Comme $2\pi = wT$, on peut aussi écrire

$$v(t) = Rw,$$

ce qui confirme les résultats des simulations. La vitesse instantanée d'un mouvement circulaire uniforme, considérée comme grandeur vectorielle, s'écrit donc finalement

$$\overrightarrow{v}(t) = Rw \left(-\sin wt \cdot \overrightarrow{e_1} + \cos wt \cdot \overrightarrow{e_2} \right).$$

On la qualifie souvent de *vitesse linéaire*, afin de la distinguer de la vitesse angulaire.

À un niveau plus avancé, on remarquera que le calcul précédent a établi de manière géométrico-physique deux formules de dérivation,

$$(\sin wt)' = w \cos wt,$$

et

$$(\cos wt)' = -w \sin wt.$$

Quelques valeurs numériques à comparer

Revenons-en enfin aux exemples de la question 13, pour achever de quantifier les deux notions de vitesse sous-jacentes. Dans le cas du mouvement de la terre autour du soleil, on a déjà calculé

$$w_{terre/soleil} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,9923\ldots 10^{-7} \text{ (rad/s)},$$

et comme on sait que $R = 149 \times 10^9$ (m), on obtient pour l'intensité de la vitesse linéaire

$$v = Rw = 29686,53\ldots \text{ (m/s)} = 106871,53\ldots \text{ (km/h)}.$$

C'est presque exactement la valeur calculée lors de la simulation à l'heure près ! Pour ce qui concerne le mouvement d'une dent de scie circulaire tournant à 1500 tours/minute, on a obtenu

$$w_{scie} = \frac{1500 \times 2\pi}{60} = 157,079\ldots \text{ (rad/s)} ;$$

si on suppose que le rayon de cette scie égale 20 cm, on trouve pour l'intensité de la vitesse linéaire :

$$v = Rw = 31,415\ldots \text{ (m/s)} = 113,097\ldots \text{ (km/h)}.$$

Lequel de ces deux mobiles est le plus rapide ? Cela dépend de la notion de vitesse que l'on sous-entend, mais en termes de déplacement, il n'y a pas de doute : la terre l'emporte, haut la main !

4.2 Le mouvement de la vitesse

Comment s'y prendre ?

Les propriétés géométriques de la vitesse linéaire d'un mouvement circulaire uniforme sont d'une richesse quasiment inépuisable. On va s'en rendre compte en revenant à un point qui restait à éclaircir dans le déroulement de la question précédente.

> Question 16.
> Lorsqu'on observe du centre de sa trajectoire un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, comment voit-on sa vitesse varier ?

Quel est le mouvement de la vitesse ?

Effectuer une translation de la vitesse au centre de la trajectoire d'un mouvement circulaire uniforme a-t-il un sens physique ? En fait, oui : cela revient à reconstituer le mouvement là où on l'observe. C'est par exemple ce que réalise (partiellement) un dresseur de chevaux lorqu'il fait travailler un cheval à la longe autour de lui. Et il est relativement fréquent en astronomie, d'observer du centre de la trajectoire un point animé d'un mouvement assimilé à un mouvement circulaire uniforme, certaines planètes ou une étoile proche par exemple. En fait, on reconstitue ainsi à l'endroit où on réalise les observations, une portion du mouvement rectiligne uniforme idéal de l'objet observé, en effectuant une translation vers le centre de la trajectoire de cette portion de mouvement rectiligne. Dans le cas du dresseur de chevaux, la longe figure bien le rayon (mobile) le long duquel la translation peut s'imaginer.

On obtient ainsi une grandeur vectorielle $\overrightarrow{OV}(t)$ physiquement équivalente à la vitesse du point mobile $M(t)$,

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{OV}(t).$$

Or, – et c'est là une observation majeure ! – comme le point mobile tourne, le vecteur $\overrightarrow{OV}(t)$ tourne donc lui aussi ! On appelle *hodographe*[30] l'ensemble des extrémités $V(t)$ des vitesses, *après translation au centre de la trajectoire.*

La caractérisation géométrique du vecteur vitesse implique immédiatement que l'hodographe d'un mouvement circulaire uniforme est un cercle.

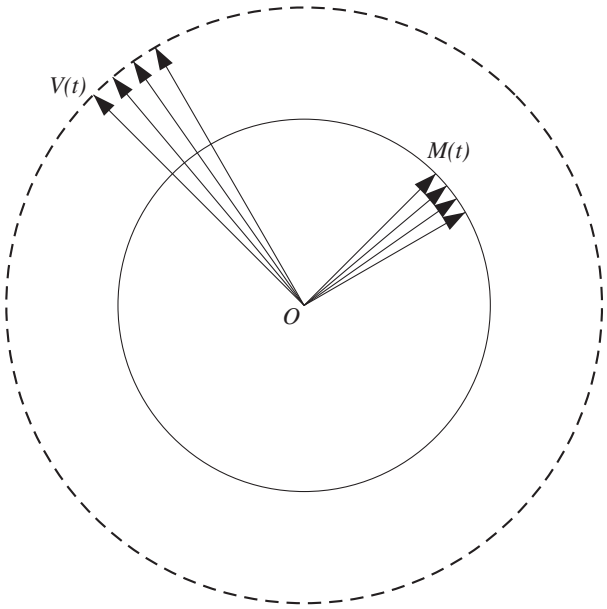


Fig. 52 : Le mouvement de la vitesse, rapporté au centre de la trajectoire.

Plus précisément, si le point mobile $M(t)$ est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire w, le point (imaginaire, et néanmoins) mobile $V(t)$ sera lui aussi animé d'un mouvement circulaire uniforme

- de rayon Rw,
- de la même vitesse angulaire w,
- mais en avance (ou déphasé, comme disent les physiciens) de $\frac{\pi}{2}$ radians sur le mouvement du point $M(t)$,

puisqu'on sait que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$, et d'intensité égale à Rw.

L'accélération d'un mouvement circulaire uniforme

Ce qui a si parfaitement fonctionné une première fois suggère bien vite qu'on le répète, même si l'idée peut paraître bizarre : puisque la vitesse d'un mouvement circulaire uniforme peut être considérée comme étant elle-même soumise à un mouvement circulaire uniforme, quelle en est... la vitesse ?

Bien sûr, il n'est pas très facile d'imaginer ce que représente physiquement cette vitesse-là, surtout lorsqu'on se situe au centre de la trajectoire

[30] Sous cette forme, la notion semble due à W. R. Hamilton (1805-1865). L'hodographe correspond, en géométrie, à ce qu'on appelle parfois l'*application de Gauss*.

du mouvement circulaire... Par contre, son interprétation dynamique (à un facteur près, en terme de force centripète) est assez immédiate mais échappe encore une fois au contexte cinématique privilégié ici.

En tout cas, si cette « vitesse de la vitesse » semble à première vue incongrue, c'est qu'il faut peut-être d'abord revenir un peu sur la notion d'accélération moyenne, comme mesure de la variation de la vitesse par unité de temps ou mieux encore, sur la notion d'accélération instantanée, qu'on peut effectivement définir comme la vitesse instantanée de la vitesse instantanée. Un retour sur la signification de la constante g dans le mouvement de la goutte d'eau étudié plus haut, peut aussi illustrer ce point de vue.

Ceci rappelé, l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme peut donc bien se définir comme la vitesse (appliquée au point mobile) de la vitesse du mouvement. En vertu de tout ce qui précède, c'est une (nouvelle) grandeur vectorielle, caractérisée par :

- son point d'application, c'est-à-dire le point mobile $M(t)$;
- sa direction, qui est celle du rayon $OM(t)$, puisqu'elle doit être perpendiculaire à la direction de la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$, qui est elle-même perpendiculaire à ce rayon ;
- son sens, opposé à celui de $\overrightarrow{OM}(t)$, puisque l'angle correspondant est déphasé deux fois de $\frac{\pi}{2}$;
- son intensité, encore obtenue comme produit du rayon de la trajectoire, ici égal à Rw par la vitesse angulaire w, et qui vaut donc Rw^2.

Un exemple rassurant

Pour ne donner qu'un exemple de calcul de cette accélération, considérons le mouvement de la terre autour de son axe de rotation (pôle nord — pôle sud), pour une ville située à 50° de latitude nord, le centre de la terre étant supposé fixe. La vitesse angulaire de rotation vaut

$$w = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,2722\ldots 10^{-5} \text{ (rad/s)}.$$

Comme le rayon moyen de la terre égale $R = 6378$ (km), le rayon de l'orbite circulaire de la ville en question s'obtient par : $r = R \sin 50° = 4885,83\ldots$ (km). On calcule ensuite

$$v = rw = 355,307\ldots \text{ (m/s)} = 1279,1\ldots \text{ (km/h)},$$

$$a = rw^2 = 0,0258\ldots \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

À titre de comparaison, on vérifie facilement que cette accélération, due à la rotation de la terre sur elle-même, est négligeable par rapport à l'accélération de la pesanteur

$$\frac{a}{g} \approx \frac{1}{380}.$$

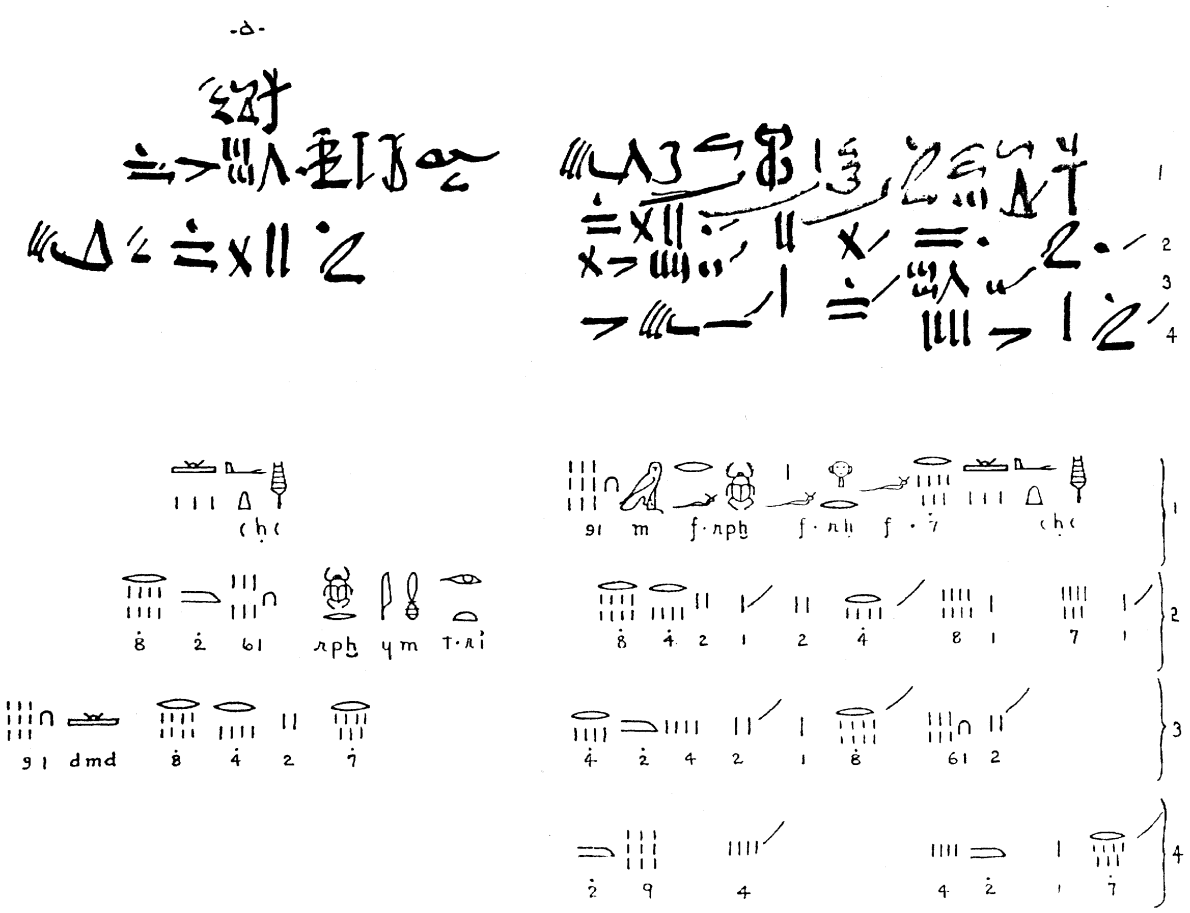
Vers une autre histoire. . . ?

Ce dernier résultat permet de donner une explication géométrique – termes d'une généralisation de ce *transport parallèle* mis en évidence dans le problème du nageur – du résultat de la célèbre expérience de L. Foucault sous le dôme du Panthéon en 1851. Ce n'est pas l'endroit ici de détailler cette explication, aussi belle soit-elle, mais on peut savoir qu'elle est due au mathématicien autrichien J. Radon, dont l'article original est reproduit dans F. Klein, *Vorlesungen über Höhere Geometrie*, J. Springer Verlag, Berlin, 1926.

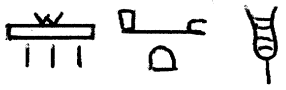
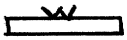
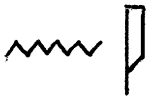
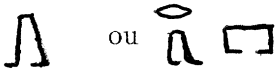
Mais tout cela, c'est déjà une autre histoire. . .

Annexe III

Documents à photocopier



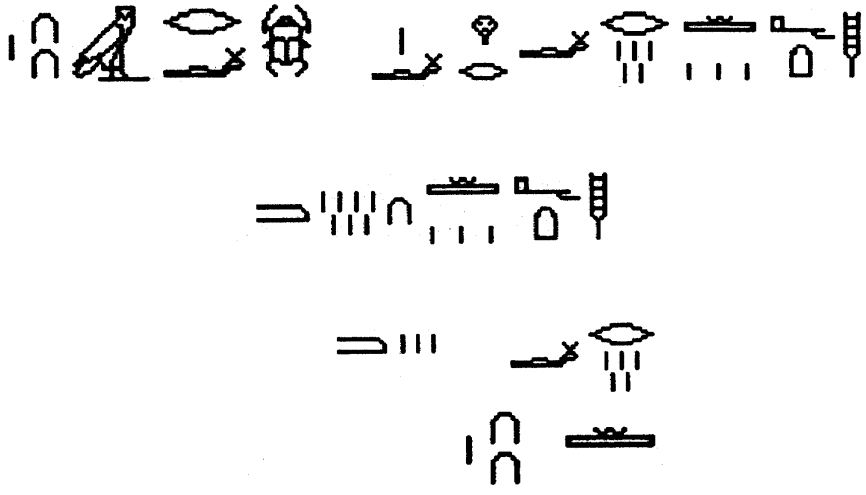
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

;  adjectif possessif	‘ḥ‘  quantité, inconnue	‘ḳ  ajouter
d;·t  le reste	dmd  somme, total	f  elle
ḫpr  ou  devenir	ḫr  donc, alors	ḥr  sur
ín  donc, ainsi	ír  faire, prendre	ir·t  calculer
m  considéré comme	m y  selon que, ce que	n  de
pn  ceci	pr·t ou pr  soustraire	w ḏ  il reste

Problème 25



Problème 27



Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.

Hic post laudem Dei inquit. Compilavi hunc librum secundum quod sapientes Indorum adinvenerunt de numeratione divinationis, utilem in ipso consideranti et studenti, et perseveranti in eo, et intelligenti ejus intentionem. Ex eo igitur est : est census de quo ejus tertia dempta, et quarta, fuit octo quod remansit. Quantus est census ? Capitulum numerationis ejus est ut ex duodecim assumas lancem ; et tertia et quarta ex eo consurgunt, et demas ejus tertia et quarta, que sunt septem, et remanebit quinque. Per ipsum igitur oppone octo, residuum scilicet census et apparebit te jam errasse per tria diminuta : serva ea, deinde assume lancem secundam a prima divisam, que sit ex viginti quattuor, et deme ejus tertiam et quartam que sunt quattuordecim, et remanebit decem. Oppone ergo per eum octo residuum scilicet census. Apparet itaque te jam errasse per duo addita. Multiplica igitur errorem lancis postreme qui est duo in lancem primam, que est duodecim, et perveniet 24. Et multiplica errorem lancis prime, qui est tria, in lancem postremam, que est 24, et erit 72. Aggrega ergo 24 et 72, eo quod unus error est diminutus et alter additus. Si enim utrique essent diminuti aut additi demeres minus ex majore. Postquam ergo aggregasti viginti quattuor et septuaginta duo, fuerit quod aggregatum est nonaginta sex, deinde aggrega duos errores qui sunt tria et duo, et perveniet quinque ; deinde igitur nonaginta sex per quinque qui est ille ex quo pervenit, et perveniet tibi decem et novem dragme et quinta dragme.

Hec propterea regula est ut ponas duodecim rem ignotam et demas ejus tertiam et quartam, et remanebit quinque donec redeat duodecim ? Ipse enim est res ignota. Illud autem est duo et due quinte : multiplica igitur duo et duas quintas in octo et erit decem et novem et quinta.

Livre sur l'agrandissement et la diminution nommé le calcul de la conjecture d'après ce que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien.

Après la louange à Dieu, voici ce qu'il est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient :

Soit un census[1] dont on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau une seconde quantité, divisée par la première, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande.

Donc, après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six ; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par 5 qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.

1. Terme désignant le carré de l'inconnue.

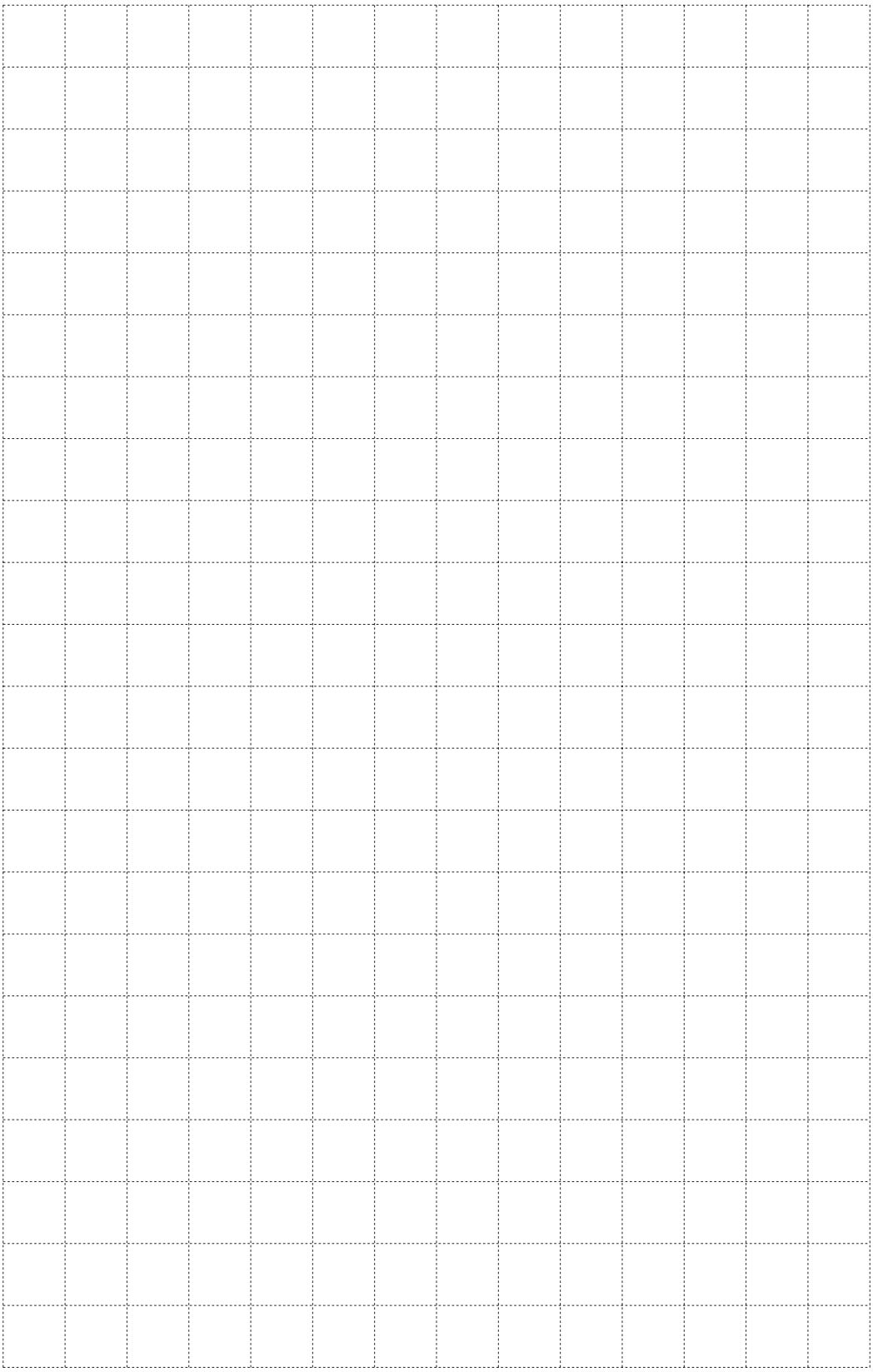
De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

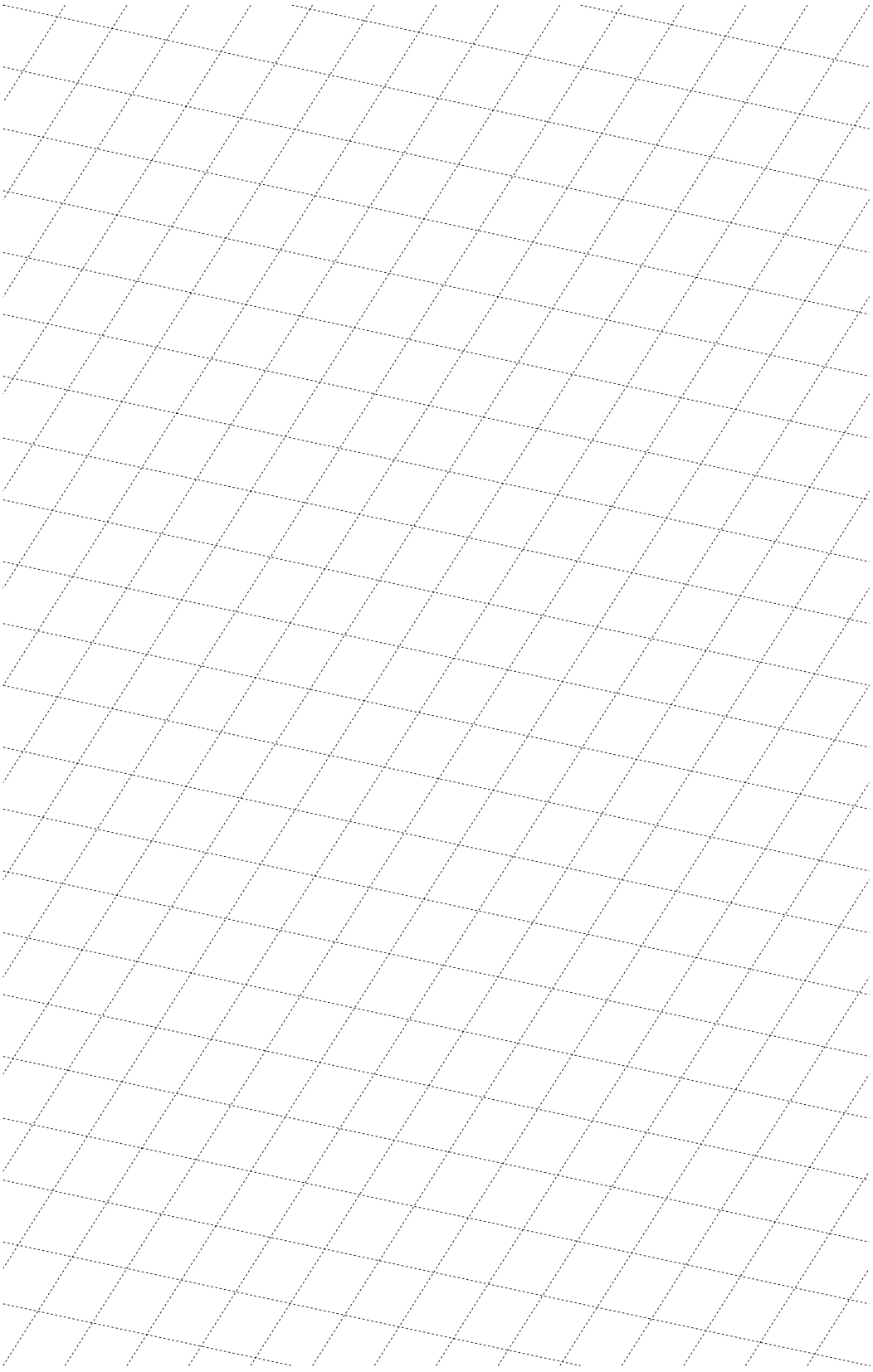
Quidam emit aves 30 pro denariis 30. In quibus fuerunt perdices, columbe et passeres. Perdices vero emit denariis 3 ; columba denariis 2 et passeres 2 pro denario 1, scilicet passer 1 pro denariis $\frac{1}{2}$*. Queritur quot aves emit de unoquoque genere. Divide denarios 30 per aves 30 exibit denarius 1. Dic ergo habeo monetam ad* $\frac{1}{2}$*, et ad 2, et ad 3 ; et volo facere monetam ad 1. In similibus enim questionibus procedendum est per modum consolationum, ut habeamus integros numeros avium. Quare ut species viliorum avium equetur spetiebus cariorum multitudinem dicas : habeo monetam ad* $\frac{1}{2}$*, et ad 2 et ad 3 et volo facere monetam ad 1, hoc est. Habeo monetam ad 1 et ad 4 et ad 6 et volo facere monetam ad 2. Fac ex passeribus et perdicibus primam consolationem ; et erunt aves 5 pro denariis 5 scilicet passeres 4 et perdix 1 ; et de passeribus cum columbis fac secundam ; et habebis 3 aves pro denariis 3, scilicet passeres 2 et columbam 1. Deinde ut habeas aves 30 consolatas mittes primam consolationem ter in quibus erunt passeres 12 et perdices 3. Et remanebunt aves 15 consolate. Pro quibus mittes secundam consolationem quinquies et habebis passeres 10 et columbas 5. Et sic in predictis avibus 30 erunt passeres 22 et columbe 5 et perdices 3 ut in questione ostenditur. Et scias quia de suprascriptis potes habere aves sanas quantas voluerit pro totidem denariis ultra 15 sed infra 15 non possunt haberi aves nisi 13 et 11 et 8. Nam in avibus 13 cadit prima consolatio bis et secunda semel. Et in avibus 11 cadit secunda consolatio bis et prima semel. Et in avibus 8 cadit unaqueque consolatio semel.*

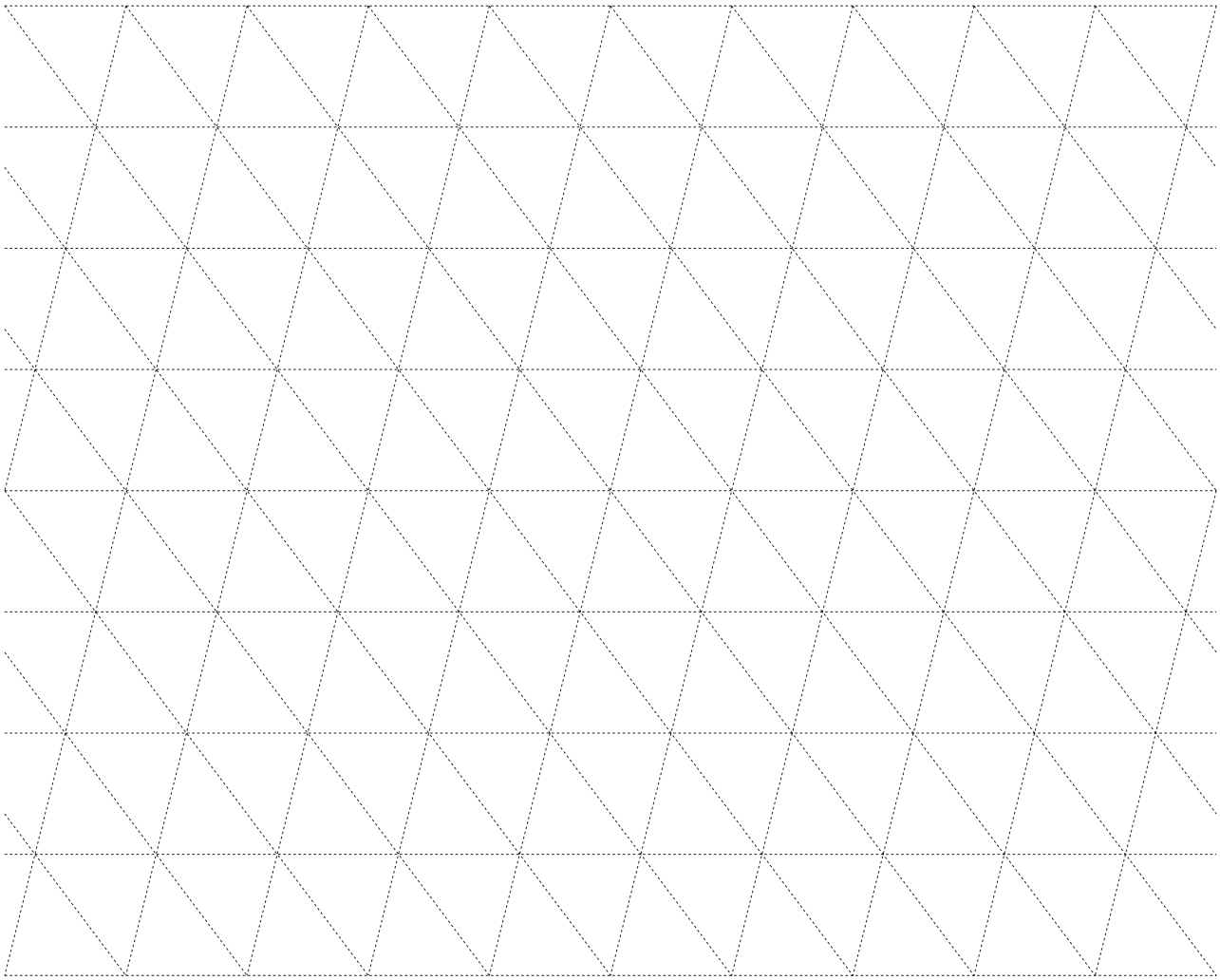
De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers.

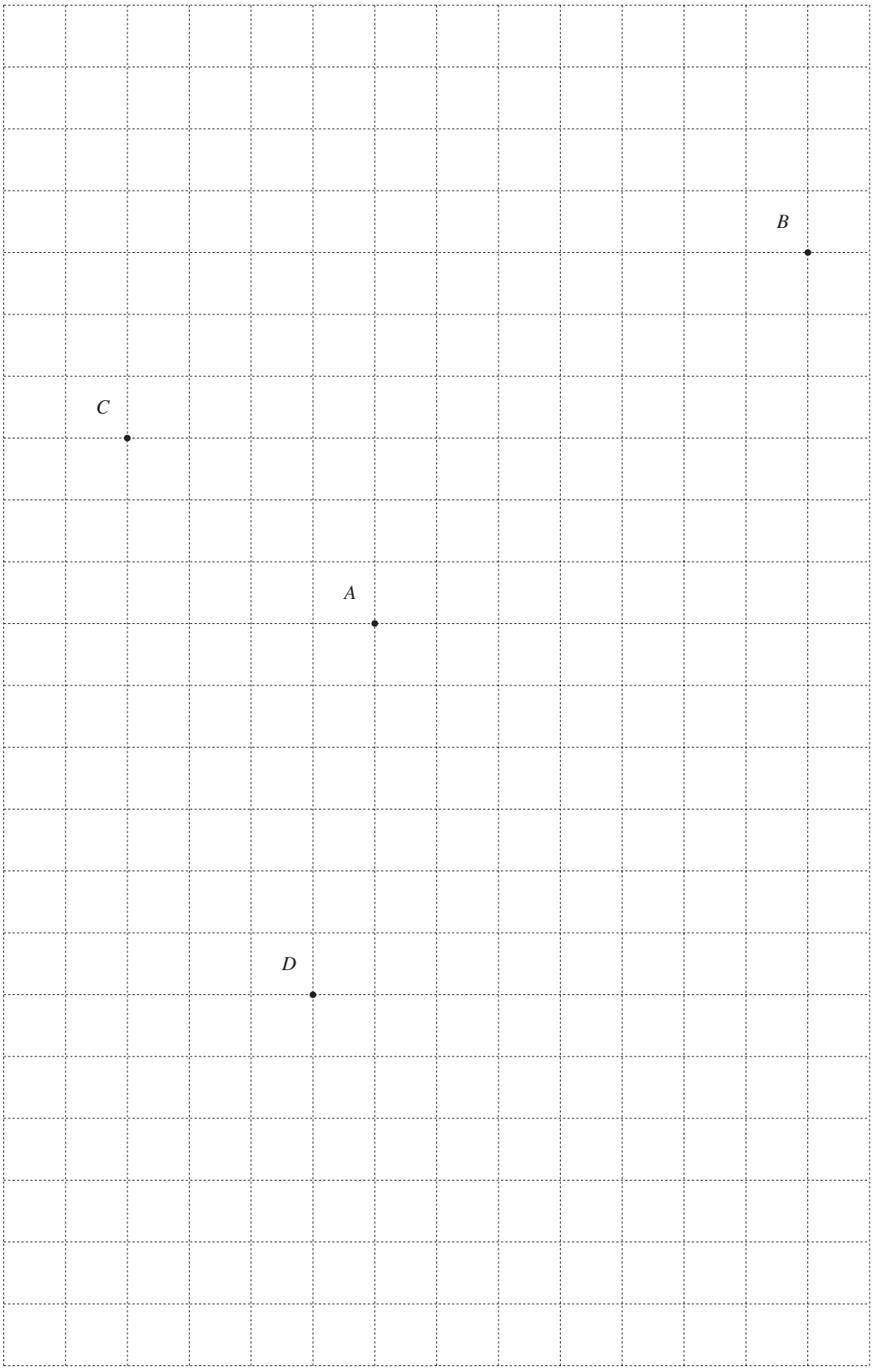
Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour $\frac{1}{2}$ denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés. Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 ; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix ; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde ; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation appraîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

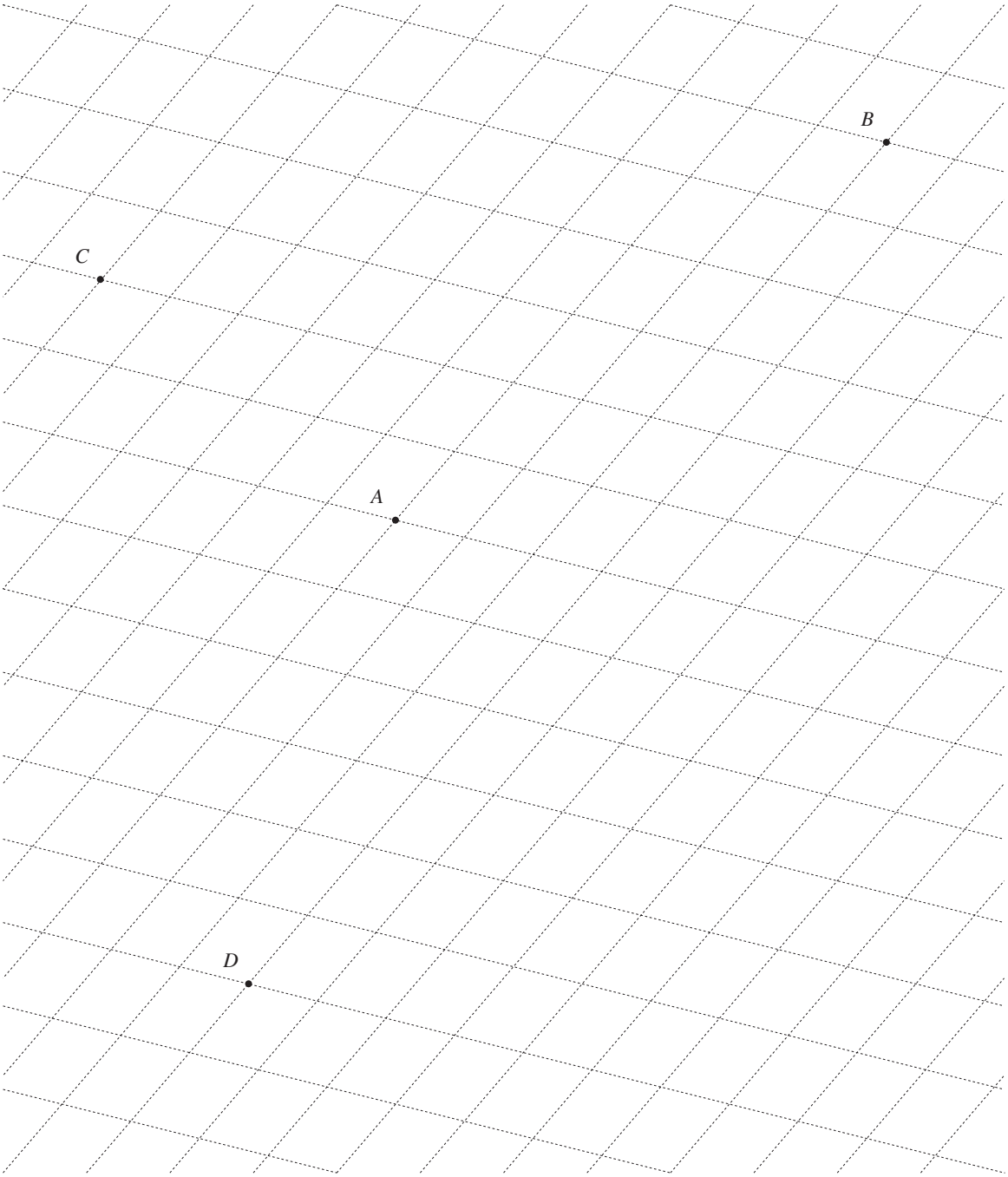

BARCELONA

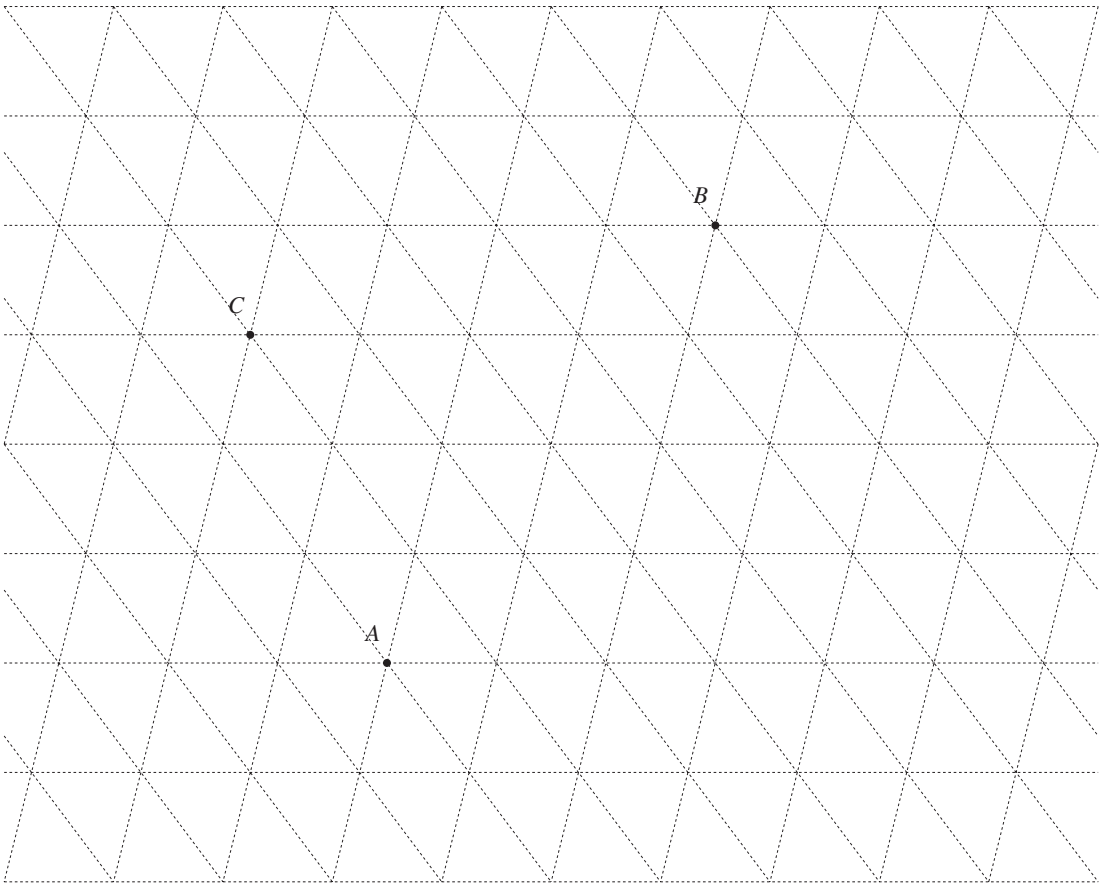


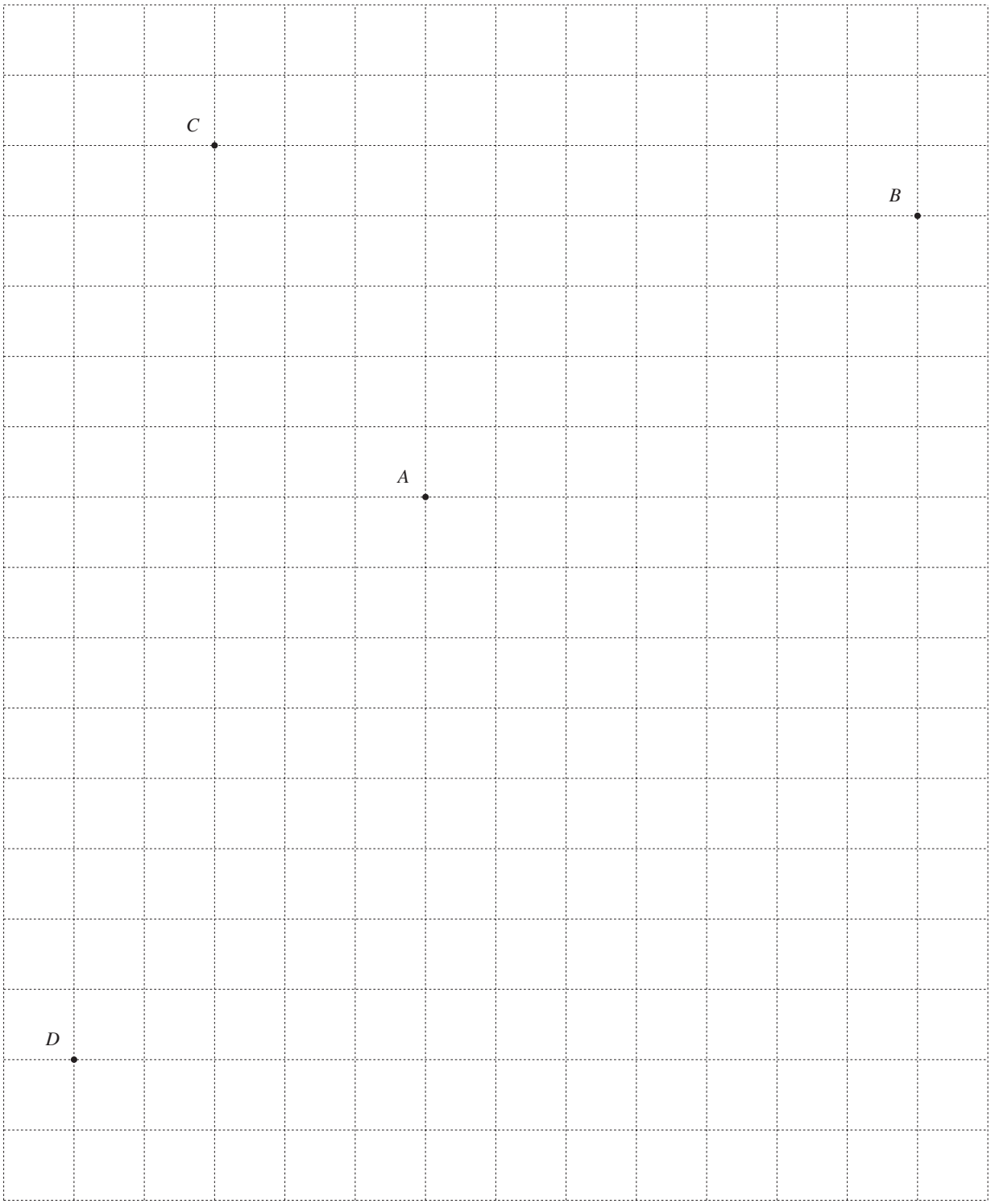


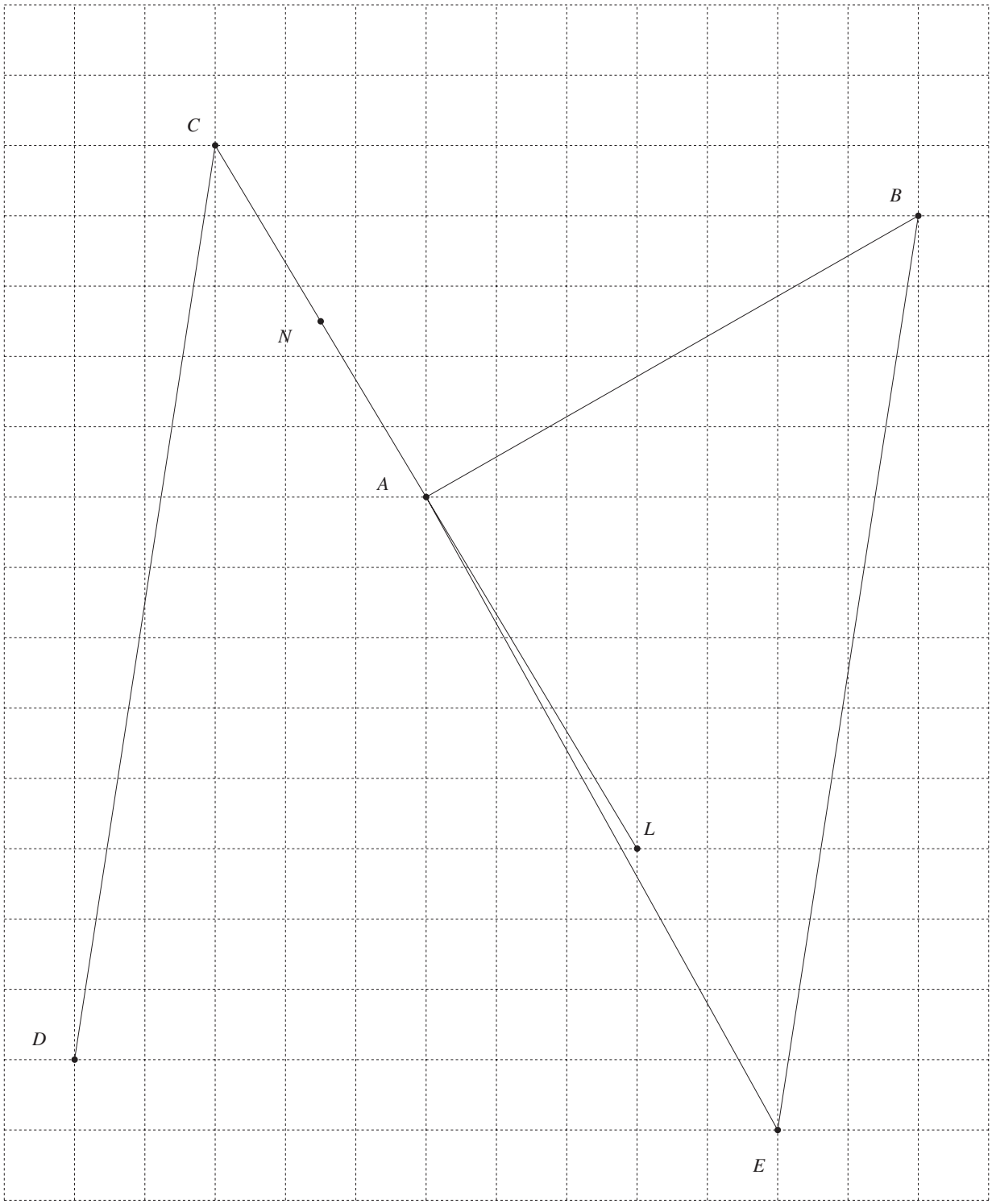


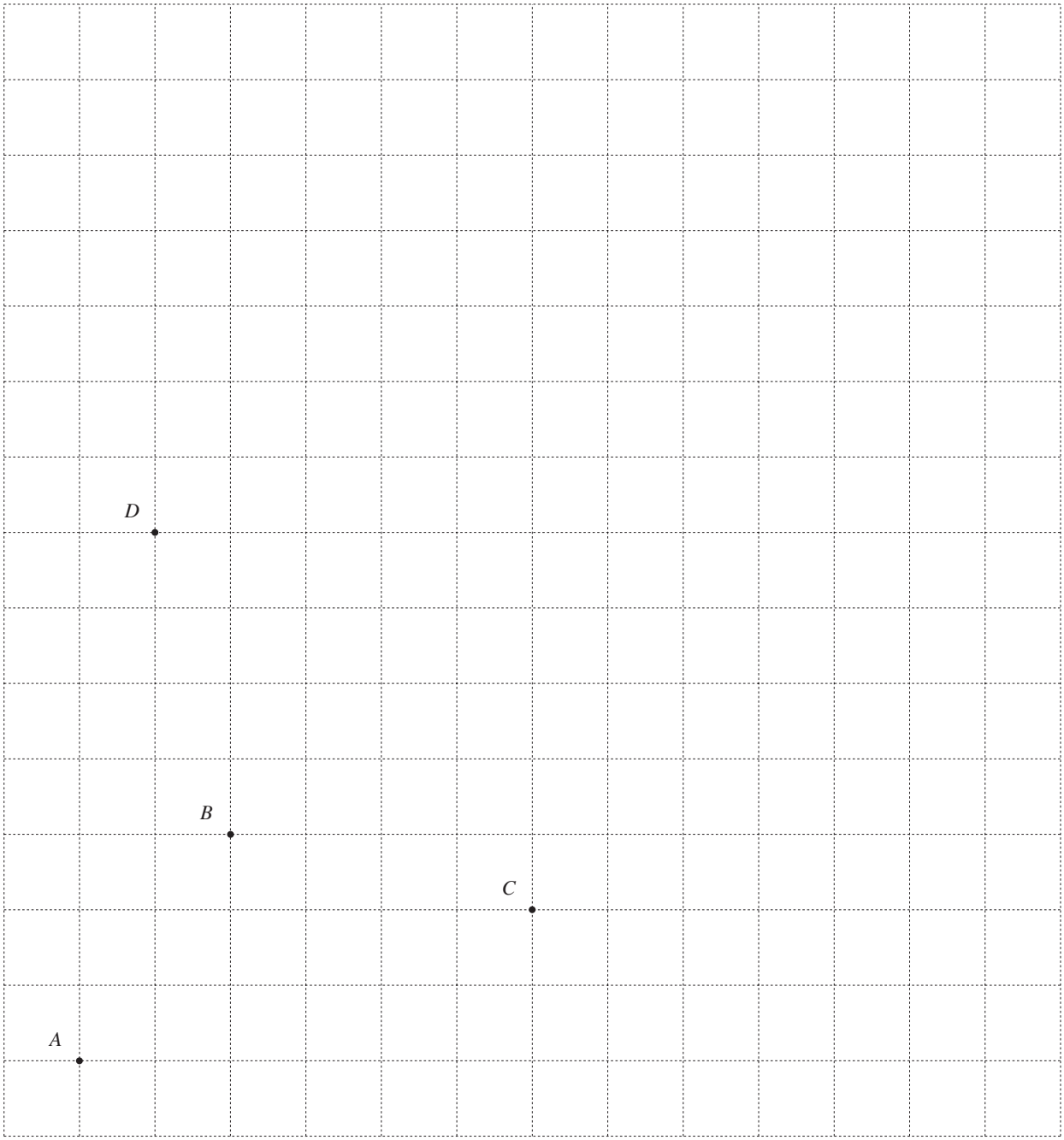

B
C
A
D

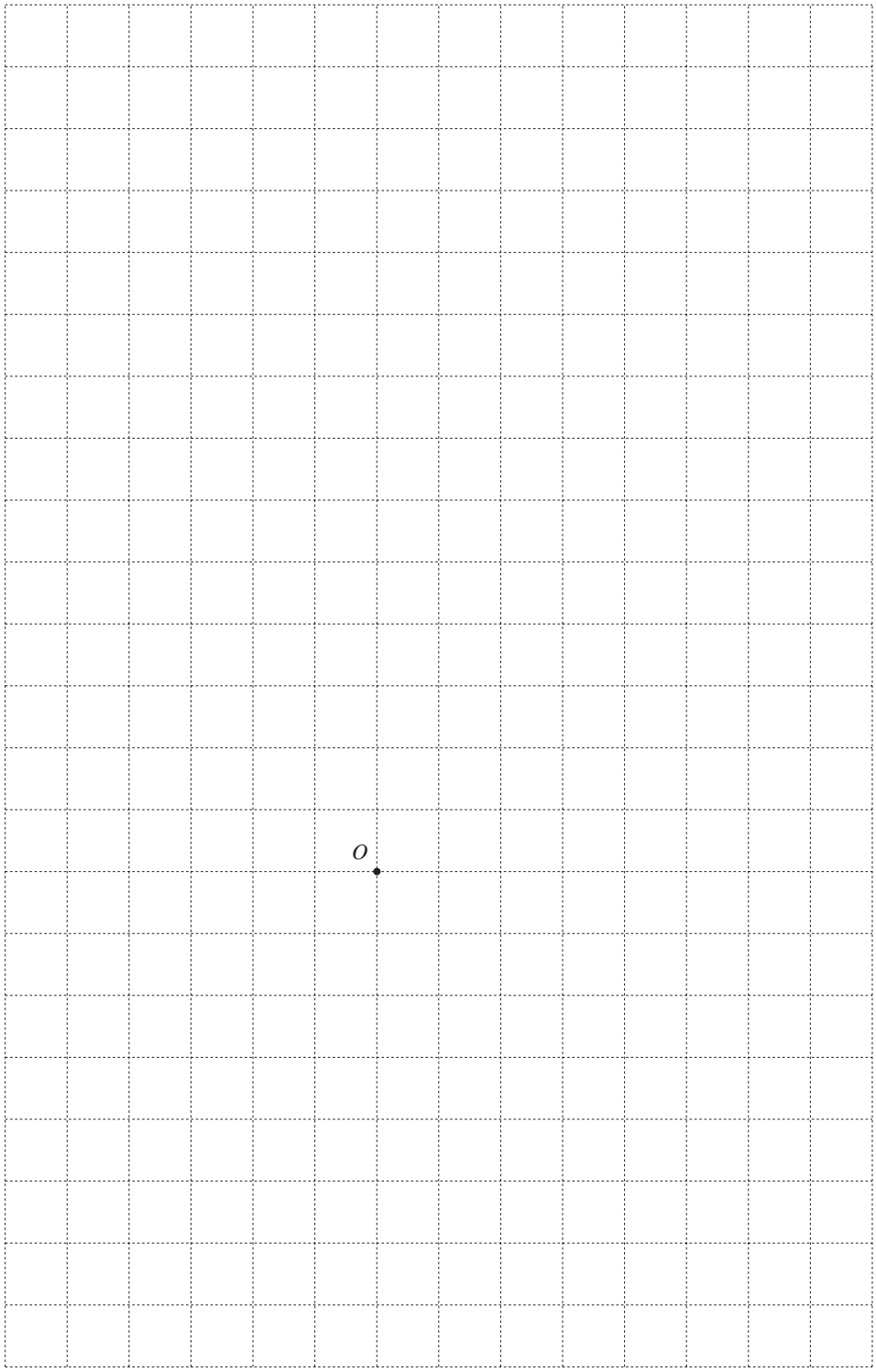

B
C
A
D

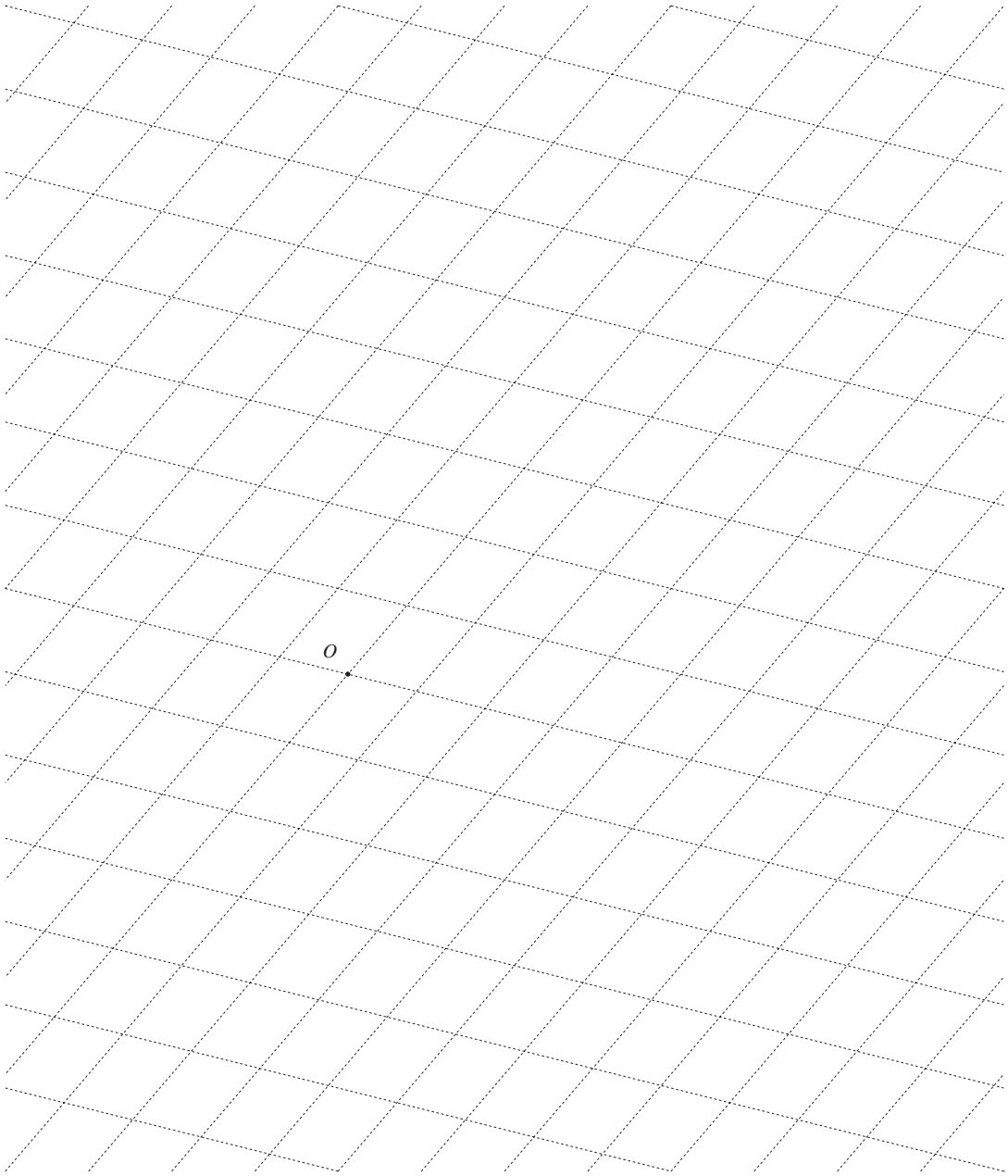

B
C
A

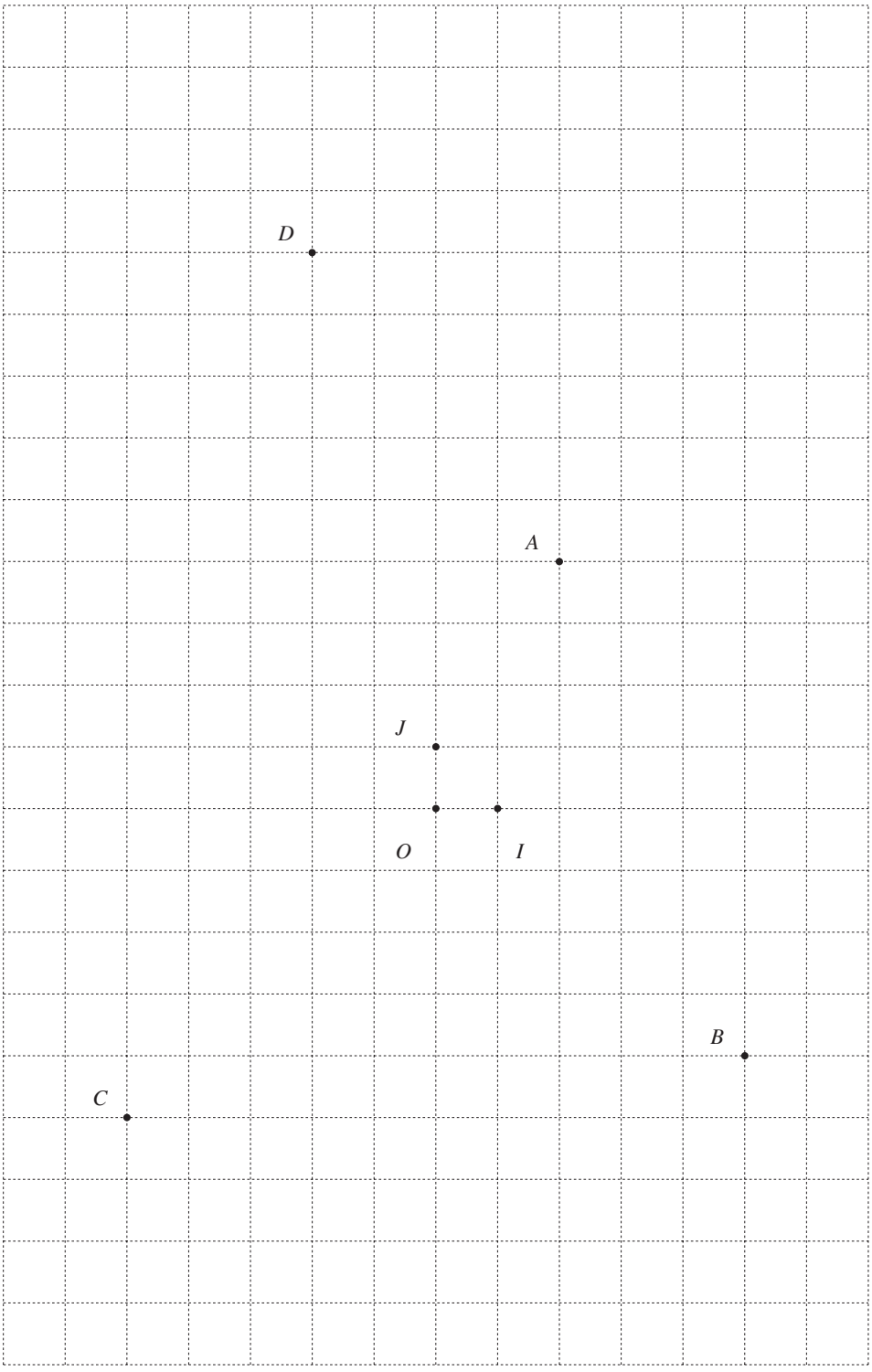

C
B
A
D


C
B
N
A
L
D
E

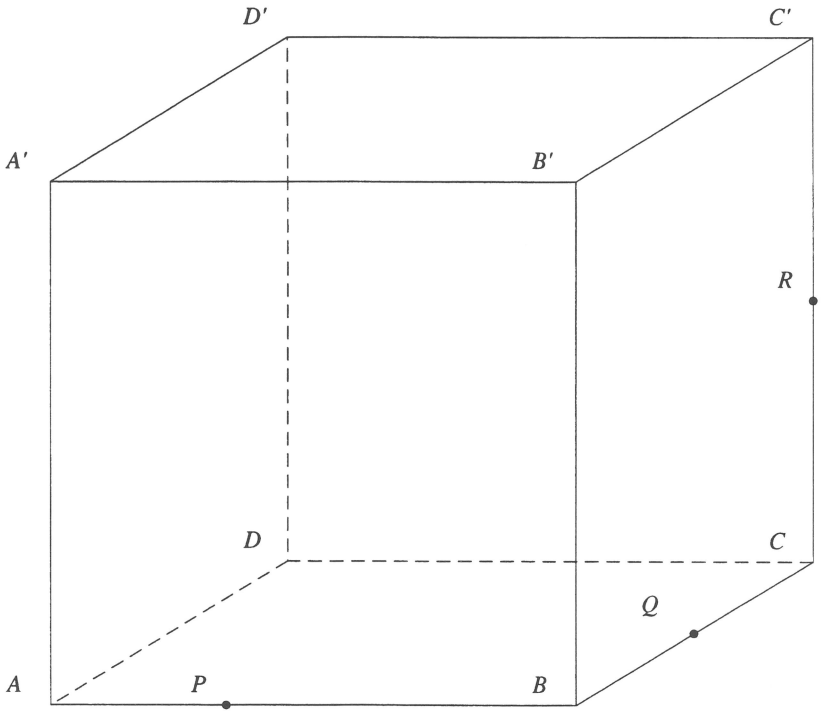

D
B
C
A


O

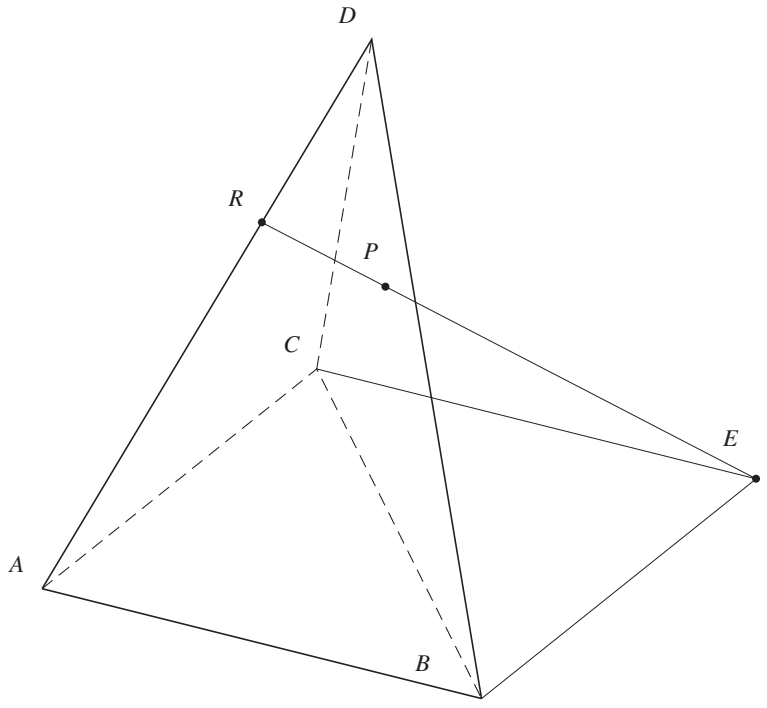

O


D
A
J
O
I
B
C

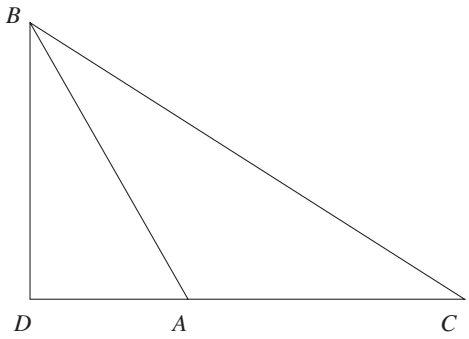
Construire la section du cube de la figure 28 par le plan PQR, où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A, Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$, et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. On demande ensuite de déterminer les coordonnées de tous les sommets de cette section, après avoir choisi un repère approprié.



On considère le tétraèdre $ABCD$, R le point situé sur l'arête $[AD]$ au tiers à partir de D et E le point du plan ABC tel que $BACE$ forme un parallélogramme. On demande de déterminer le point de percée P de la droite RE dans la face BCD, de situer ce point avec précision sur la droite RE et dans la face BCD en utilisant un repère approprié.

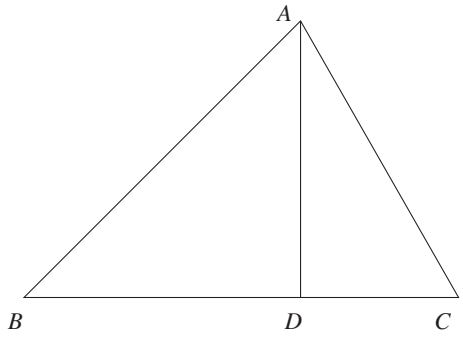


<II.12> In his triangulis qui obtusum habent angulum tanto ea que obtusum subtendit angulum ambobus lateribus amplius potest que obtusum continent angulum, quantum est quod tenetur bis sub uno eorum atque ea que sibi directe iuncta ad obtusum angulum a perpendiculari extra deprehenditur.



Ex IIII^{a} secundi atque penultima I^{i} huius argumentum elicies.

<II.13> Omnis oxigonii tanto ea que acutum respicit angulum ambobus lateribus angulum acutum continentibus minus potest, quantum est quod bis continetur sub uno eorum cui perpendicularis intra superstat eaque sui parte que perpendiculari anguloque acuto interiacet.

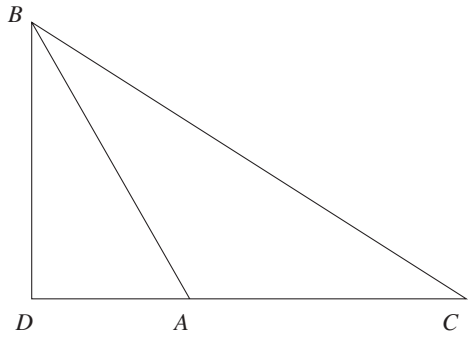


Ex VII^{a} secundi atque penultima I^{i} argumentare ducta perpendiculari ab angulo supremo ad basim.

Euclide - Les Éléments - Livre II, proposition 12.

12

Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus.



Soit le triangle obtusangle ABC ayant l'angle sous BAC obtus, et, qu'à partir du point B soit menée BD, perpendiculaire sur CA, prolongée. Je dis que le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA, AC de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

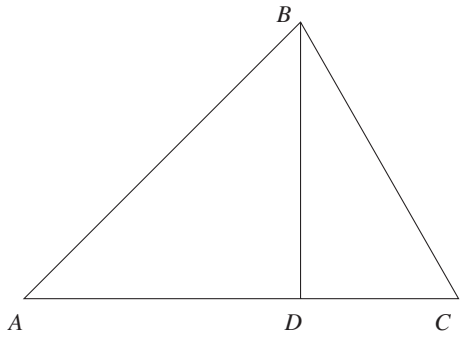
En effet, puisque la droite CD a été coupée au hasard au point A, le carré sur DC est donc égal aux carrés sur CA, AD et deux fois le rectangle contenu par CA, AD (II. 4). Que celui sur DB soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CD, DB sont donc égaux aux carrés sur CA, AD, DB, et à deux fois le rectangle contenu par CA, AD. Mais d'une part ceui sur CB est égal à ceux sur CD, DB ; en effet l'angle en D est droit (I. 47). Et d'autre part celui sur AB est égal à ceux sur AD, DB. Donc le carré sur CB est égal aux carrés sur CA, AB et deux fois le rectangle contenu par CA, AD. De sorte que le carré sur CB est plus grand que les carrés sur CA, AB de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

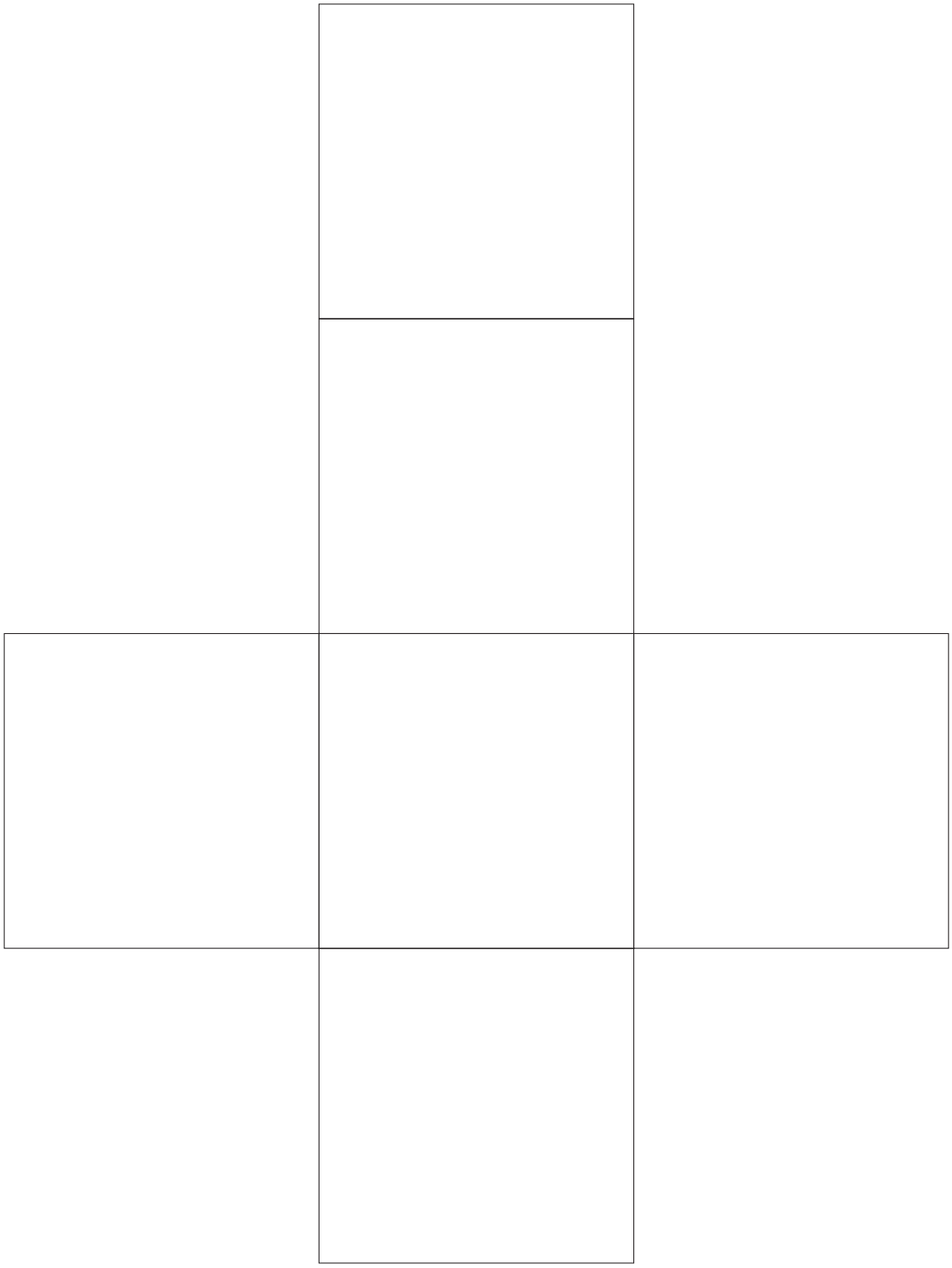
Donc dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus. Ce qu'il fallait démontrer.

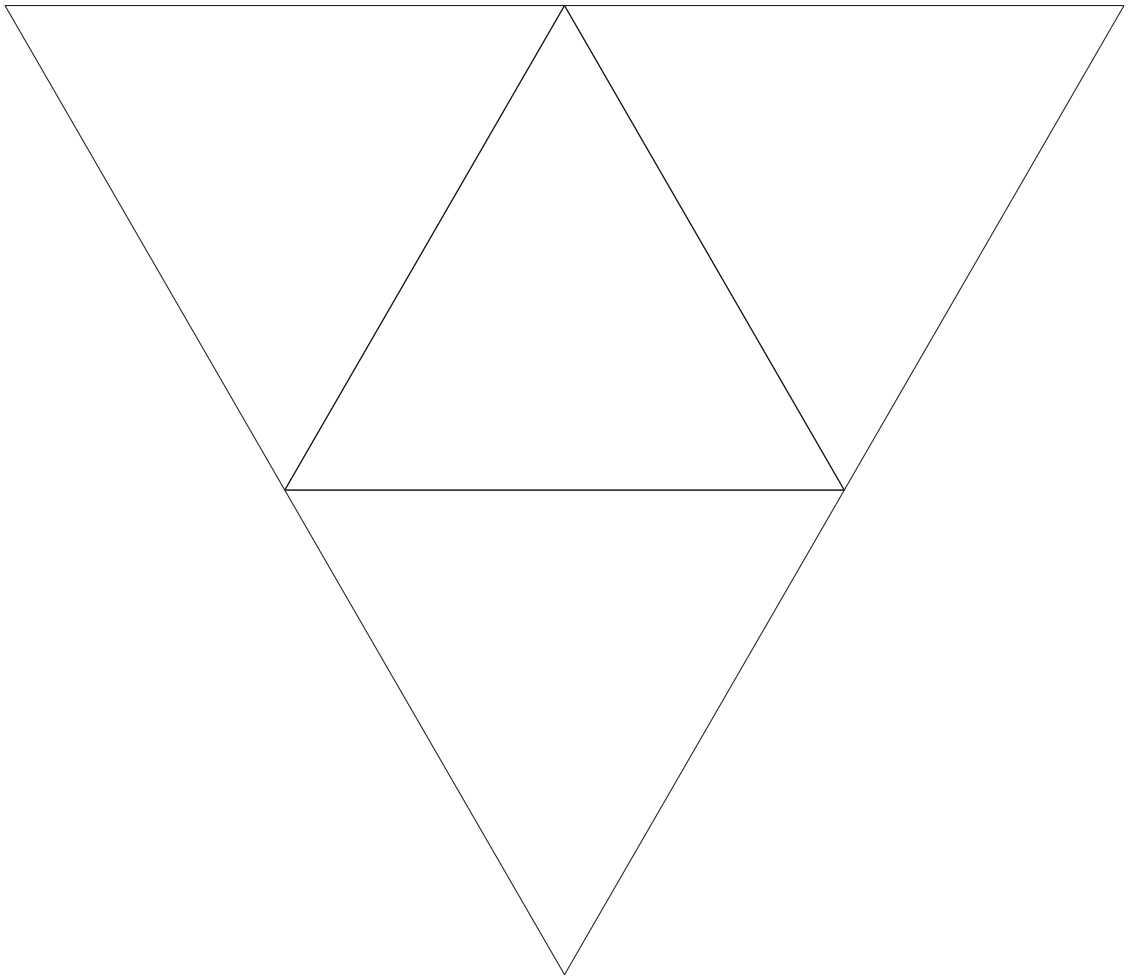
Euclide - Les Éléments - Livre II, proposition 13.

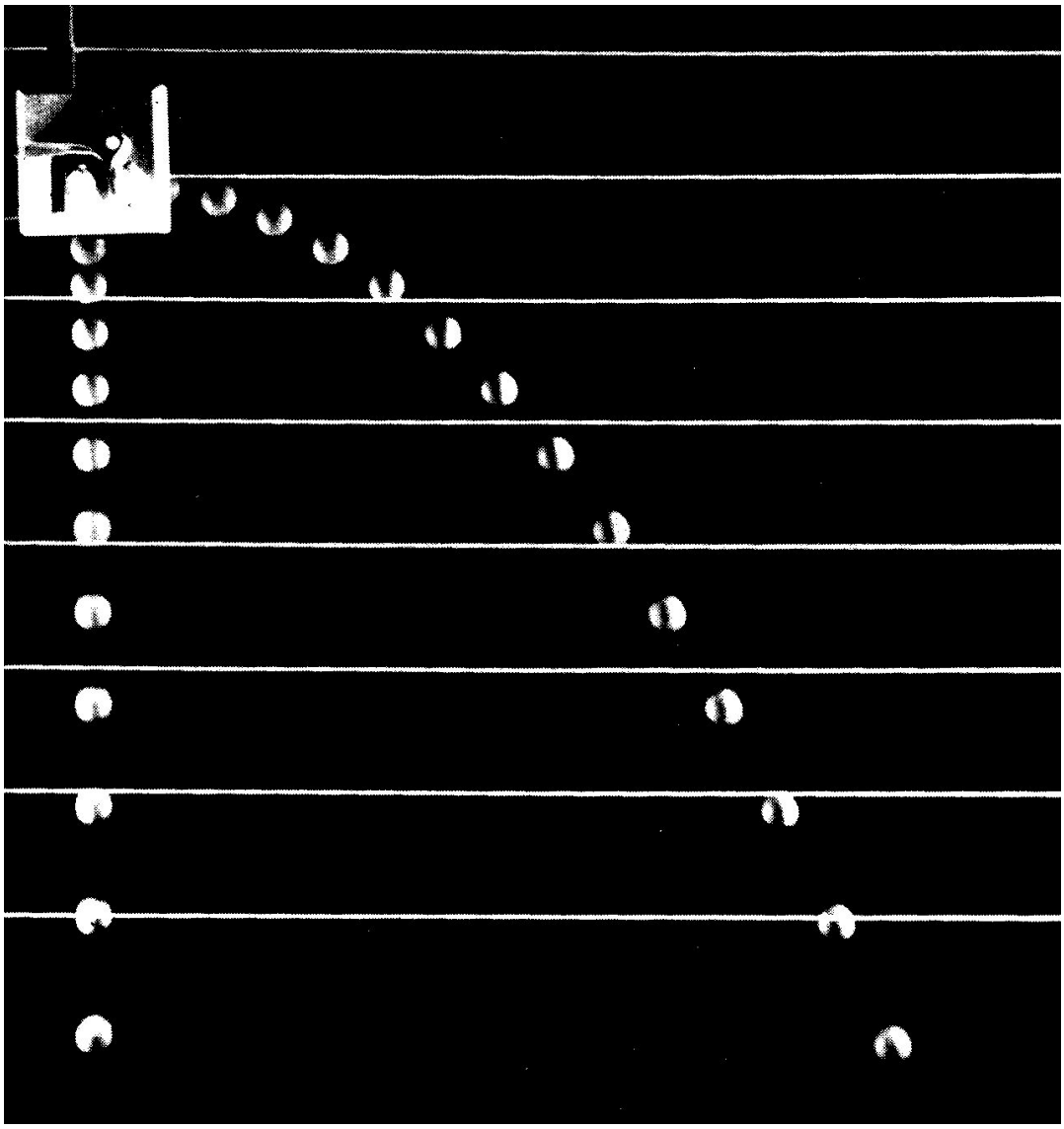
13

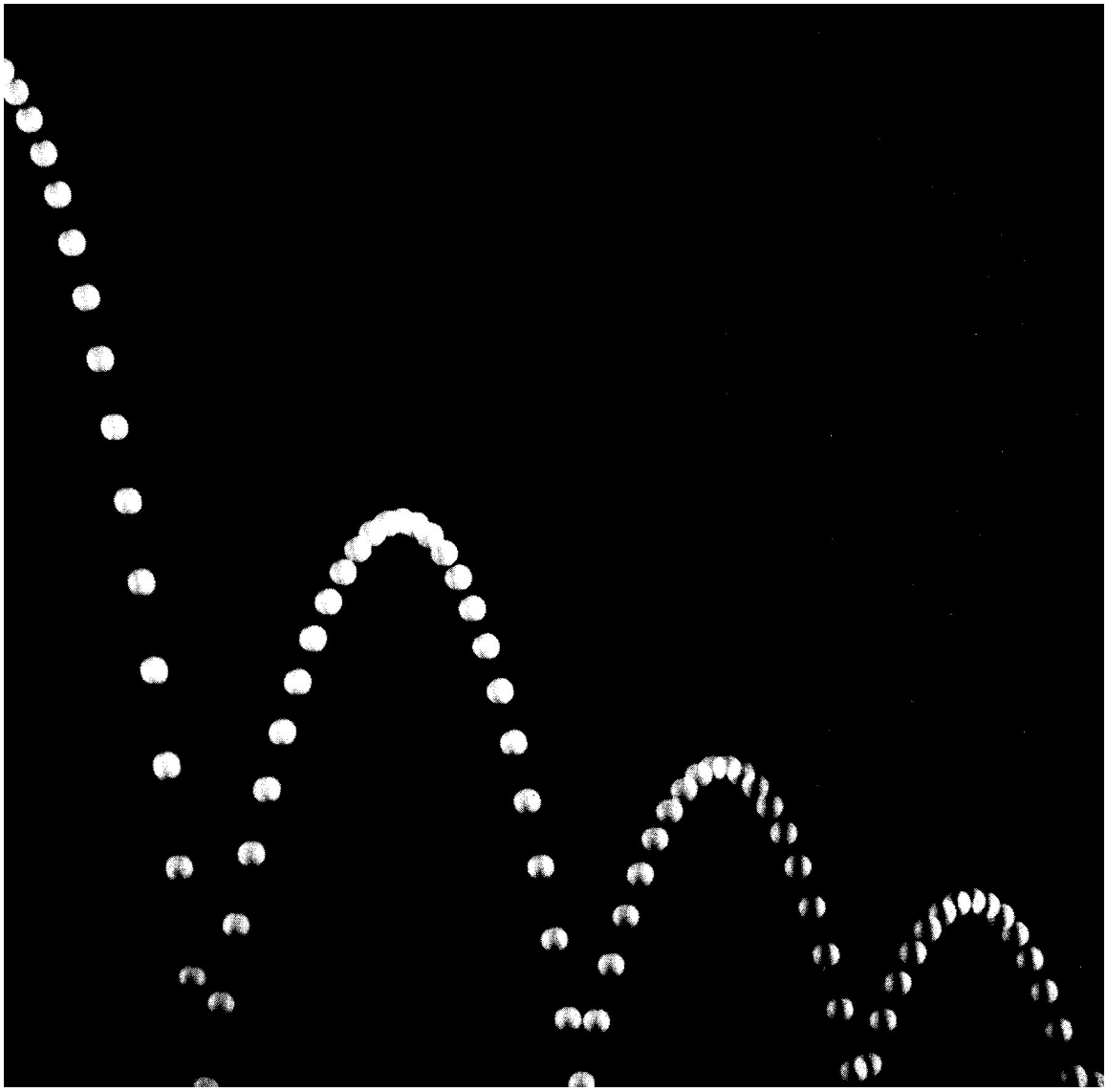
Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en-deçà de l'angle aigu.

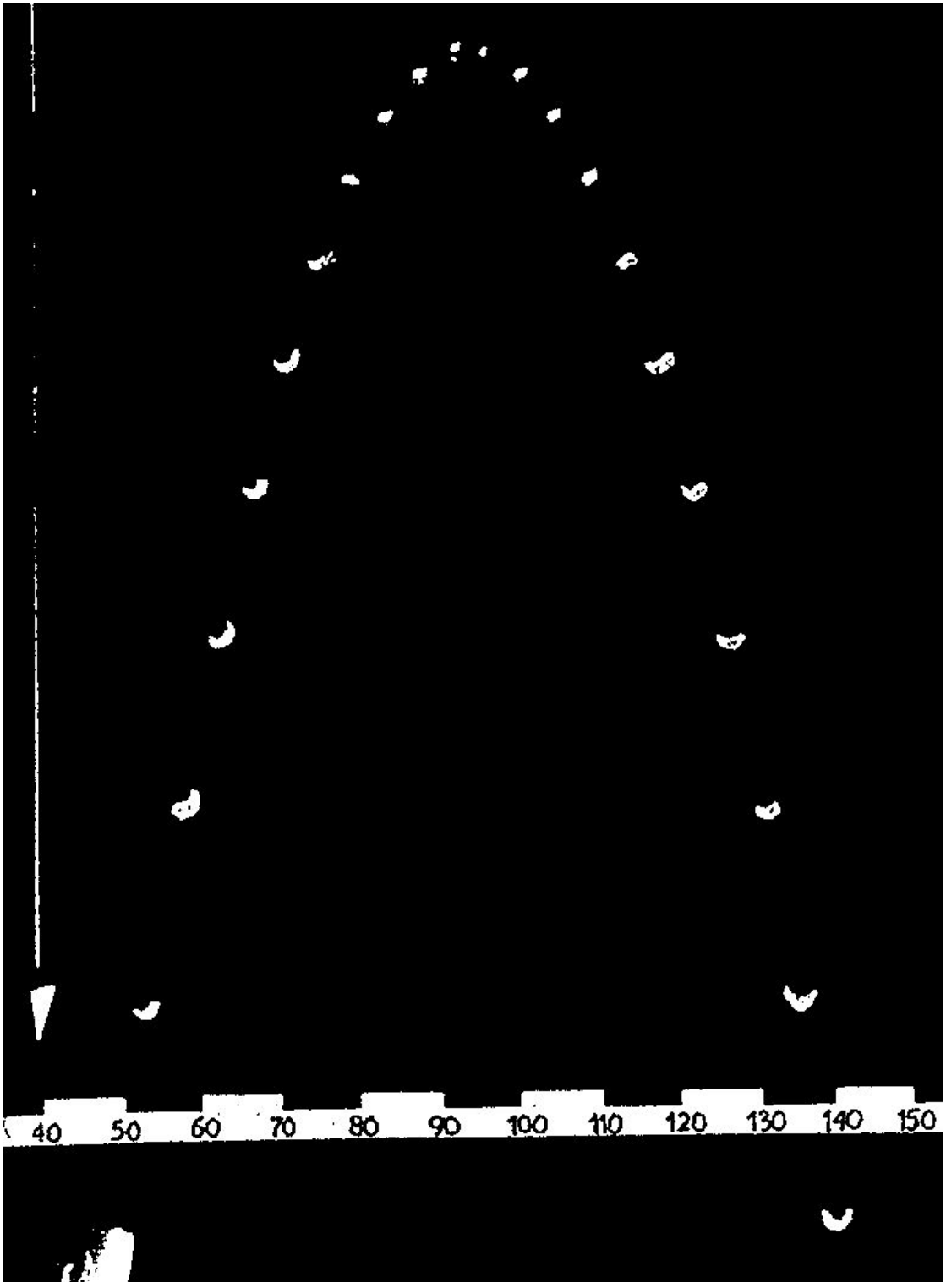


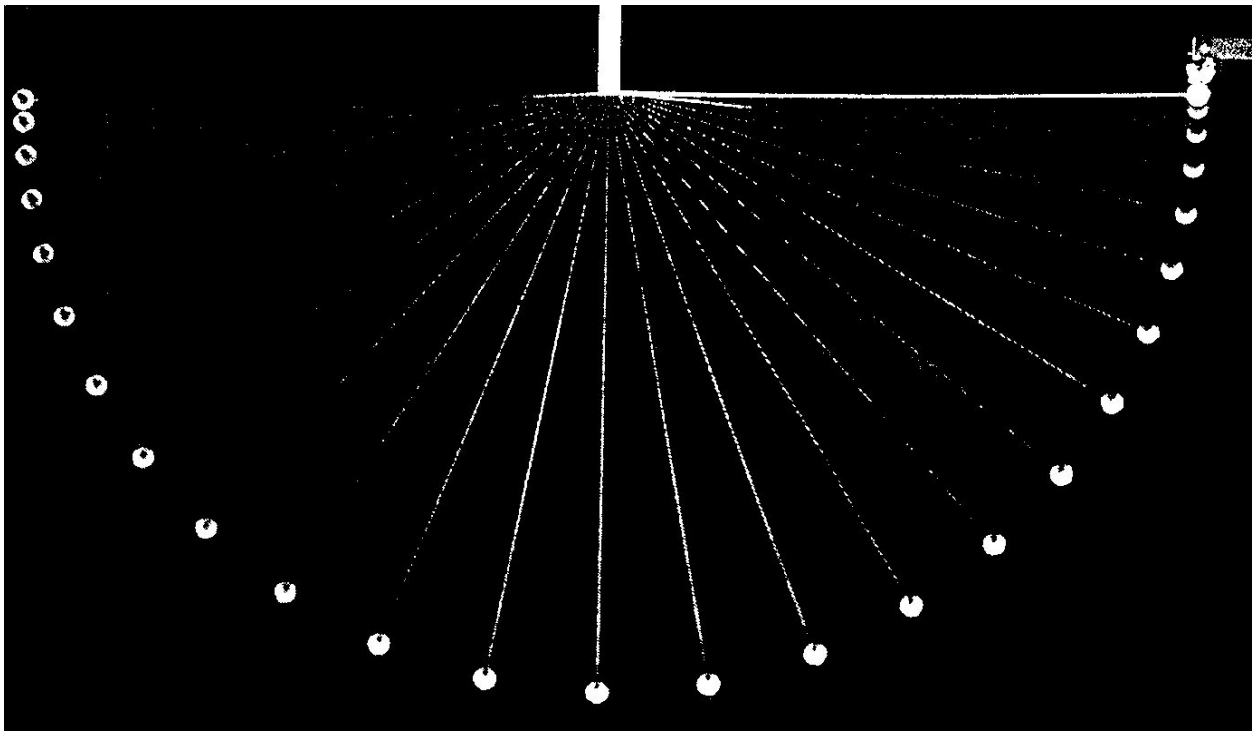









40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150



Annexe IV

Ce qu'il faut savoir du PostScript

1 Calculer

1.1 L'ordre des opérations

L'ordre dans lequel on écrit les opérations n'est pas le même en PostScript que dans l'écriture mathématique courante. Ceci peut paraître un inconvénient dans la mesure où il est nécessaire de modifier des habitudes ancrées depuis l'école primaire. Mais cet inconvénient peut, en fait, être vu comme un avantage. De la même manière que pratiquer une langue étrangère aide à relativiser sa propre culture, pratiquer une autre formalisation du langage mathématique de base permet de relativiser la formalisation usuelle et de faire l'expérience de l'aspect purement conventionnel de ce type de notation.

Le PostScript, de même que d'autres langages informatiques, travaille avec ce qu'on appelle une *pile*. Il s'agit par exemple d'une pile de papiers (et non d'une pile électrique). On ne dépose des papiers qu'au-dessus de la pile. On ne prend en général – il y a des exceptions dans la réalité et aussi dans le PostScript – que ce qui est au-dessus. Lorsque l'on veut faire le calcul

$$3 + 4$$

en PostScript, on place 3 dans la pile, on place 4 et on additionne les deux derniers éléments de la pile

```
3 4 add
```

Lors de cette opération, le 3 et le 4 sont supprimés de la pile, et le résultat du calcul est placé dans la pile. Ce principe reste le même pour toutes les opérations. On place le nombre d'arguments nécessaires dans la pile. On écrit l'opération à faire. Les arguments sont effacés et le résultat est placé dans la pile.

Voici quelques exemples de calcul

(a) $3 + 4 + 5$: `3 4 add 5 add` ou `3 4 5 add add`
La première manière correspond à $(3+4)+5$, la deuxième à $3+(4+5)$.

(b) $6(5 - 9)$: `6 5 9 sub mul`

(c) $-\frac{5+6}{8}$: `5 6 add 8 div neg`

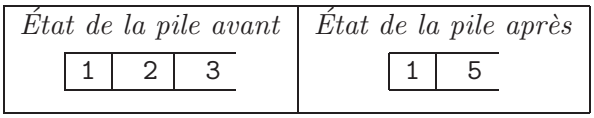
(d) $\frac{9-8}{5-3}$: `9 8 sub 5 3 sub div`

Chaque opérateur PostScript possède un nombre fixe d'arguments. L'opérateur en avale autant qu'il en a besoin. Ces arguments sont donc retirés de la pile l'un après l'autre, toujours en commençant par le dernier.

1.2 Les opérateurs arithmétiques

Voici les principaux opérateurs arithmétiques[32].

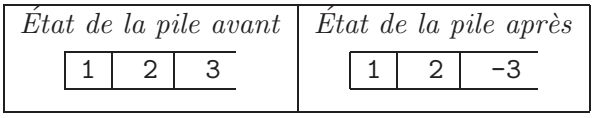
`add` Additionne les deux éléments supérieurs de la pile en les avalant et place le résultat au sommet de la pile.



`sub` Effectue la soustraction des deux éléments supérieurs de la pile en les avalant et place le résultat au sommet de la pile.



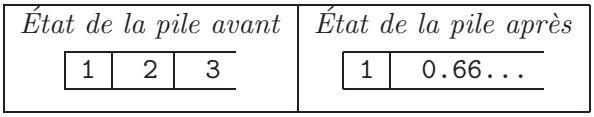
`neg` Change le signe de l'élément supérieur de la pile.



`mul` Multiplie les deux éléments supérieurs de la pile en les avalant et place le résultat au sommet de la pile.



`div` Effectue la division des deux éléments supérieurs de la pile en les avalant et place le résultat au sommet de la pile.

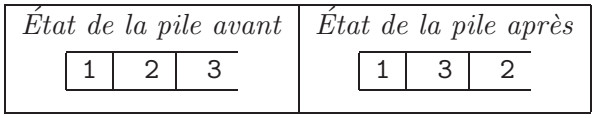


1.3 Gestion de la pile

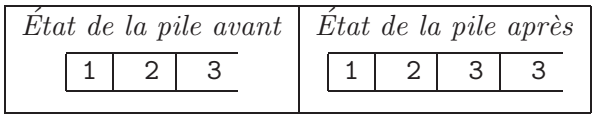
Certains opérateurs sont destinés à la gestion de la pile. Il y a, par exemple, l'opérateur `exch` qui échange les deux derniers éléments de la pile et l'opérateur `dup` qui duplique le dernier élément de la pile.

[32] Concernant la représentation des piles, voir la note 4 à la page 358.

`exch` Échange les deux derniers éléments de la pile.



`dup` Duplique le dernier élément de la pile.



2 Opérateurs pour le dessin

2.1 Définir des chemins

Un dessin est délimité par un chemin, en anglais *path*. Un chemin est constitué d'un point de départ et d'une suite de lignes, droites ou courbes. Une fois le chemin décrit, on peut le tracer (`stroke`) ou le remplir (`fill`). L'endroit du chemin où l'on est arrivé est appelé *point courant*.

`newpath` Définit un nouveau chemin. Après cet opérateur, le point courant n'est plus défini.

`moveto` Détermine le point de départ d'un chemin. Il prend deux arguments dans la pile : ce sont les coordonnées du point où commence le chemin.

`lineto` Ajoute un segment de droite au chemin. Le point de départ est le point courant. Il prend deux arguments dans la pile : ce sont les coordonnées de l'extrémité de ce segment.

`closepath` Termine le chemin en ajoutant un segment entre le point courant et le point de départ du chemin. Il ne prend pas d'arguments dans la pile.

`arc` Ajoute au chemin courant un arc de cercle. Il prend cinq arguments dans la pile : les deux coordonnées du centre, le rayon, l'angle de départ (par rapport à l'horizontale) et l'angle de fin.

2.2 Dessiner

`stroke` Trace un chemin dans la couleur courante. Il ne prend pas d'arguments dans la pile. Par défaut, la couleur est noire.

`fill` Remplit un chemin avec la couleur courante. Il ne prend pas d'arguments dans la pile. Par défaut, la couleur est noire.

`setgray` Définit un niveau de gris comme couleur courante à utiliser pour le tracé des chemins ou leur remplissage. Il prend un argument numérique dans la pile. Le noir est donné par le niveau `0`, le blanc par `1`, et les niveaux de gris intermédiaires par une valeur entre 0 et 1. On peut considérer le niveau de gris comme le rapport entre le nombre de pixels blancs et le nombre total de pixels d'une surface. Par défaut, le niveau de gris est mis à `0`.

2.3 Modifier le système d'axes

Au départ, l'origine du système de coordonnées est toujours le coin inférieur gauche de la feuille et les deux axes sont les bords de la feuille. L'unité sur les deux axes vaut $\frac{1}{72}$ pouce. Tout cela peut être modifié. Les modifications successives s'enchaînent les unes aux autres.

`translate` Déplace l'origine du système de coordonnées. Il prend deux arguments dans la pile : le déplacement horizontal et le déplacement vertical.

`rotate` Fait tourner les axes. Il prend un argument dans la pile : l'angle de rotation en degrés. Lorsque l'angle est positif, le sens de rotation est le sens trigonométrique.

`scale` Met à l'échelle les unités sur chacun des axes du système de coordonnées. Il prend deux arguments dans la pile : les facteurs d'échelle sur chacun des deux axes (ces facteurs peuvent être différents).

3 Définir des variables et de nouveaux opérateurs

3.1 Définir des variables

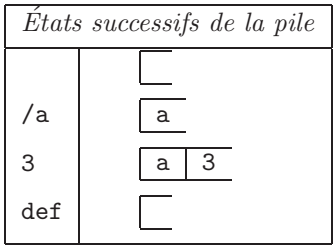
Le contenu de chaque niveau de la pile peut non seulement être une valeur numérique mais aussi un nom, ce qui permet de définir des variables.

Pour mettre un nom dans la pile il faut écrire le nom précédé de `/`. Par exemple, `/Nom` met `Nom` au dessus de la pile. Par contre, lorsque l'on écrit simplement `Nom`, c'est exactement la même chose que d'écrire le contenu de `Nom`.

Si l'on souhaite attribuer la valeur 3 à la variable `a`, il faut introduire :

```
/a 3 def.
```

Regardons les différentes étapes :



Après cela, c'est la variable `a` qui contient la valeur 3, et écrire `a`, c'est écrire 3, c'est-à-dire mettre 3 dans la pile :

État de la pile avant	*État de la pile après*
	3

On peut bien sûr définir une variable comme résultat d'un calcul :

```
/b a dup mul def
```

met le carré de `a` dans `b`. Regardons cela en détail :

États successifs de la pile	
`/b`	b
`a`	b 3
`dup`	b 3 3
`mul`	b 9
`def`	

Il est très utile de pouvoir mettre dans une variable une valeur qui est déjà dans la pile. On peut le faire en utilisant l'opérateur `exch` qui permet de mettre les arguments dans le bon ordre pour l'utilisation de l'opérateur `def`. Par exemple :

`a dup mul /b exch def` :

États successifs de la pile	
`a`	3
`dup`	3 3
`mul`	9
`/b`	9 b
`exch`	b 9
`def`	

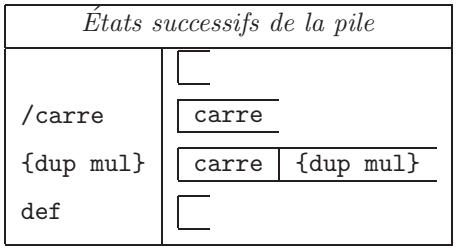
3.2 Définir de nouveaux opérateurs

Lorsque l'on écrit une suite d'instructions (nombres, opérateurs ou noms de variables) entre des accolades, ce n'est pas le résultat de cette suite d'instructions qui est placé dans la pile, mais bien la suite d'instructions elle-même. De cette manière il est possible de définir de nouveaux opérateurs. Il suffit de mémoriser une telle suite d'opérations dans un nom de variable. Lorsque l'on introduira par la suite le nom de cette variable, ce sera exactement comme si l'on écrivait cette suite d'instructions, qui sera donc exécutée à ce moment.

Voici par exemple une fonction permettant de définir le carré d'un nombre :

```
/carre {dup mul} def.
```

Le détail donne :



Lorsque par la suite on introduit par exemple

```
5 carre,
```

cela revient à introduire

```
5 dup mul.
```

4 Les listes

Voici quelques opérateurs qui sont utilisés soit directement, soit dans les macros permettant de travailler avec des vecteurs.

`length` Donne le nombre d'éléments d'une liste.

État de la pile avant	*État de la pile après*
`[1 2 3 4]`	`4`

`get` Met dans la pile un élément d'une liste (array). Il prend deux arguments dans la pile : une liste et un indice. Le premier indice est donné par `0`.

État de la pile avant	*État de la pile après*
`[1 2 3 4]` `2`	`3`

`array` Crée une liste vide. Cet opérateur prend un argument : la longueur de la liste à créer.

État de la pile avant	*État de la pile après*
`2`	`[· ·]`

`astore` Place des éléments de la pile dans une liste.

Par exemple,

```
4 3 2 1 4 array astore :
```

États successifs de la pile	
	-6 | 8
4 3 2 1 4	-6 | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4
array	-6 | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 | [· · · ·]
astore	-6 | 8 | [4 3 2 1]

`aload` Place les éléments d'une liste dans la pile et recopie la liste dans la pile. Par exemple,

```
[1 2 3] aload :
```

États successifs de la pile	
	-5
[1 2 3]	-5 | [1 2 3]
aload	-5 | 1 | 2 | 3 | [1 2 3]

5 Opérateurs de contrôle

`repeat` Permet de répéter un certain nombre de fois des instructions. Elle demande deux arguments. Le premier est un nombre entier ; c'est le nombre de fois qu'il faut exécuter les instructions. Le deuxième est la suite des instructions à répéter. Ils doivent être mis entre accolades :

```
n { ... } repeat
```

`forall` Permet d'appliquer une suite d'instructions à tous les éléments d'une liste.

```
[. . . .] { ... } forall
```

Annexe V

Macros PostScript pour les vecteurs

```
/Add {/@a2 exch def dup /@a1 exch def
   length /@l exch def /@i 0 def
   @l {@a1 @i get @a2 @i get add /@i @i 1 add def} repeat
   @l array astore} def

/Sub {/@a2 exch def dup /@a1 exch def
   length /@l exch def /@i 0 def
   @l {@a1 @i get @a2 @i get sub /@i @i 1 add def} repeat
   @l array astore} def

/Mul {/@a exch def
   dup length /@l exch def
   {@a mul} forall
   @l array astore} def

/Div {/@a exch def
   dup length /@l exch def
   {@a div} forall
   @l array astore} def

/Neg {-1 exch Mul} def

/e1 [1 0] def
/e2 [30 cos 30 sin] 0.5 Mul def
/e3 [0 1] def

/Perspective {/@v exch def
   e1 @v 0 get Mul
   e2 @v 1 get Mul Add
   e3 @v 2 get Mul Add} def

/Coordonnees {dup length 3 eq {Perspective} if aload pop} def

/Moveto {Coordonnees moveto} def
/RMoveto {Coordonnees rmoveto} def
/Lineto {Coordonnees lineto} def
/RLineto {Coordonnees rlineto} def
```

```
/RayonPoint 5 def
/Point {gsave
    newpath
    Coordonnees RayonPoint 0 360 arc fill
    grestore} def
```

Annexe VI

Point de percée d'une droite dans un plan

La macro PPDP (Point de Percée d'une Droite dans un Plan) est donnée ici sans commentaires. Ceux-ci seront ajoutés dans une version ultérieure.

```
/PPDP {/E@ppdp exch def /D@ppdp exch def /C@ppdp exch def
       /B@ppdp exch def /A@ppdp exch def
       /AB@ppdp B@ppdp A@ppdp Sub def
       /AC@ppdp C@ppdp A@ppdp Sub def
       /fX {A@ppdp Sub /AX@ppdp exch def
            AX@ppdp 0 get AB@ppdp AC@ppdp detyz mul
            AX@ppdp 1 get AB@ppdp AC@ppdp detzx mul add
            AX@ppdp 2 get AB@ppdp AC@ppdp detxy mul add
            } def
       /fD@ppdp D@ppdp fX def
       /fE@ppdp E@ppdp fX def
       D@ppdp fE@ppdp Mul E@ppdp fD@ppdp Mul Sub
       fE@ppdp fD@ppdp sub Div
       } def
```

Quatrième partie

Aspects historiques et épistémologiques des vecteurs

14

La naissance des vecteurs : un survol historique

Il n'est pas toujours facile d'avoir accès aux textes originaux qui témoignent de l'émergence d'un concept mathématique. Plutôt que d'écrire une introduction historique, nous avons préféré laisser la parole à quelques auteurs qui ont collaboré aux débuts du calcul vectoriel : Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, Giusto Bellavitis, Peter-Guthrie Tait et Charles-Ange Laisant. Le lecteur dispose ainsi d'un début d'anthologie sur le sujet. Le choix des textes met en évidence la préoccupation majeure de chaque auteur à son époque : décrire simplement un déplacement c'est-à-dire une grandeur d'une autre espèce qu'un nombre réel, en fait quelque chose qui possède à la fois une direction, un sens et une longueur. Argand les appelle *lignes en direction* ou *lignes dirigées*, Tait les nomme *vecteurs* et Bellavitis les désigne par le terme *droites*.

Ce recueil de textes éclaire de manière significative les options qui ont dicté notre démarche dans les activités de mise en place du calcul vectoriel. La corrélation très étroite qui, dès le départ, allie les concepts de nombre complexe et de vecteur, nous a incité à montrer, dans l'esprit de Bellavitis, comment faire facilement et simplement de la géométrie avec les nombres complexes.

En effet, lorsque l'on tente de remonter aux origines des vecteurs, on se heurte inévitablement au souci qu'avaient les mathématiciens de l'époque de donner un sens aux quantités imaginaires. Cela débouche sur la représentation géométrique des complexes et sur leur généralisation à quatre dimensions, les quaternions.

Peter Guthrie Tait (1831-1901) fut, durant quarante ans, professeur de philosophie naturelle à l'université d'Édimbourg. Il était l'ami de William Thomson (Lord Kelvin) et de William Hamilton, inventeur des quaternions. Tait lui-même a écrit un *Traité élémentaire des quaternions* qui parut en 1867. Dans sa préface, il témoigne :

> Sir W. Hamilton, peu de jours avant sa mort, m'engagea vivement à hâter la rédaction de mon travail et à le publier dans le plus bref délai.
> Le sien était à la veille de paraître...

L'intérêt de cet ouvrage réside dans le fait qu'en plus de l'exposé de la théorie, il retrace brièvement l'historique du concept de vecteur.

Ainsi, au chapitre premier – *Des vecteurs et de leur composition* – nous trouvons :

> 1. Durant plus d'un siècle et demi, la représentation géométrique des quantités algébriques, soit négatives, soit imaginaires, -1 et $\sqrt{-1}$ (ou, selon la manière d'écrire, $-$ et $-^{\frac{1}{2}}$, préférée par d'autres), a formé un sujet favori de spéculation parmi les mathématiciens. L'essentiel de tous les procédés proposés consiste dans l'emploi des symboles ci-dessus pour désigner la *direction* et non la *longueur* d'une ligne droite.
> 2. À ce sujet, on s'est depuis longtemps mis en possession du principe d'après lequel, en mesurant les quantités positives le long d'une droite fixe dans un certain sens de sa direction, on devra mesurer les quantités négatives dans le sens de direction opposée de la même droite. Cette convention, en elle-même légitime et utile, forme la base de la méthode géométrique de Descartes, et elle est constamment mise en pratique dans les questions de la Géométrie analytique et dans les Mathématiques appliquées à la Physique.
> 3. Wallis, vers la fin du XVIIe siècle, proposa de représenter les racines impossibles d'une équation quadratique en allant *au dehors* de la droite, sur laquelle on aurait porté les valeurs des racines si elles avaient été réelles. Sa construction revient à donner au symbole $\sqrt{-1}$ la signification de l'unité de longueur menée perpendiculairement à la droite sur laquelle sont portées les quantités réelles.

Nous avons reproduit, en annexe aux pages 555 à 558, un extrait du texte de Wallis [1685] auquel Tait fait allusion. Tait poursuit alors en ces termes :

> 4. En faisant usage des notations ordinaires de la Géométrie analytique à deux dimensions et en employant deux axes rectangulaires, nous pourrons définir le principe en question de la manière suivante : sur Oy l'unité de longueur sera représentée par $\sqrt{-1}$, sur Oy' par $-\sqrt{-1}$; par contre, sur Ox elle le sera par $+1$ et sur Ox' par -1.
> Si nous disposons ces quatre quantités dans un ordre circulaire, savoir dans l'ordre dans lequel elles se succéderont lorsqu'on les parcourt à l'aide d'une rotation dans le sens positif (et nous adopterons pour cela le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre), nous aurons la série
>
> $$+1, \quad \sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}.$$
>
> Dans cette série, chacun des termes se déduit du précédent par la multiplication de ce dernier par le facteur $\sqrt{-1}$. Nous sommes ainsi en droit de conclure que $\sqrt{-1}$ est un opérateur, dont l'application agit d'une manière analogue à celle d'une manivelle qui ferait tourner d'un angle de 90°, et dans le sens positif, toute ligne droite passant par l'origine et assujettie à se mouvoir dans le plan des xy.
> 5. D'après cette manière de voir, la position d'un point dans le plan se trouve déterminée par la donnée d'une seule expression imaginaire. C'est ainsi que $a + b\sqrt{-1}$ pourra être considéré comme la simple représentation d'un point dont les coordonnées sont a et b. Mais on pourra tout aussi bien se servir de l'expression en question pour la représentation de la droite menée de l'origine au point dont il s'agit. Sous ce dernier aspect, l'expression $a + b\sqrt{-1}$ désigne à la fois et la *direction* et la *longueur* de la droite que nous venons de définir ; il est évident, en effet, que la droite forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$ et que la longueur de la droite est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Cet extrait atteste clairement le lien existant entre les nombres complexes et les vecteurs du plan. Tait démontre ensuite que la multiplication de $a + b\sqrt{-1}$ par le facteur $\sqrt{-1}$ produit une rotation de 90° sans changement de longueur. Plus généralement, la multiplication par le facteur $\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha$ aura pour effet une rotation d'angle α dans le sens positif (la multiplication par $\sqrt{-1}$ étant le cas particulier correspondant à $\alpha = \frac{\pi}{2}$). Cette démonstration est fournie en annexe à la page 559. L'auteur explique ensuite que ce qui précède donne du sens à la formule de Moivre

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + \sqrt{-1}\,\sin m\alpha.$$

En effet, le premier membre représente un opérateur qui produit m rotations successives d'angle α chacune et le second membre exprime l'opérateur d'une rotation unique d'un angle $m\alpha$.

Il fait remarquer que l'expression qui entre dans la formule de Moivre présente une ressemblance frappante avec la forme $N(\cos\theta + \varpi \sin\theta)$ sous laquelle on peut mettre tout quaternion (voir ci-dessous), où N est un réel, θ un angle réel et ϖ tel que $\varpi^2 = -1$. « La différence essentielle réside dans le fait que ϖ n'est pas l'équivalent de l'élément algébrique $\sqrt{-1}$, mais qu'il représente l'unité de longueur *dirigée dans une direction* donnée *quelconque dans l'espace* ». Tait présente alors diverses tentatives qui ont précédé l'invention des quaternions par Hamilton :

> 10. Dans le siècle actuel, Argand[1], Warren et d'autres ont étendu les résultats auxquels Wallis et Moivre étaient arrivés. Leurs efforts tendaient vers le but de représenter par une droite le produit de deux droites dont chacune était donnée par un symbole de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Jusqu'à un certain point ces tentatives ne furent pas vaines, mais le succès en était obtenu aux dépens de la simplicité ; la formidable rangée de radicaux dans le traité de Warren en fait foi.
>
> 11. Une recherche très remarquable a été publiée par Servois dans les *Annales de Gergonne* pour l'année 1813, et, autant qu'on a pu s'en assurer, elle est la seule, pour ce genre de recherches, dans laquelle on puisse découvrir la trace d'une anticipation de l'idée de quaternion. Servois, en cherchant à étendre à l'espace ce que l'expression $a + b\sqrt{-1}$ représente relativement à un plan, se trouve conduit par analogie à écrire
>
> $$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$$
>
> pour représenter une droite dans l'espace et d'une longueur égale à l'unité, α, β, γ étant les angles que la droite ferait avec les trois axes. Il s'assure facilement que p, q, r ne peuvent pas être des quantités réelles, et il se demande : « Seraient-elles *imaginaires* réductibles à la forme générale $A+N\sqrt{-1}$? » C'est à cette question qu'il n'a pas de réponse. Nous verrons (au Chapitre suivant) que ces symboles ne sont autre chose que les i, j, k du Calcul des quaternions.

Tait conclut en signalant que seul le traité de Hamilton conduit à une méthode pratique douée de simplicité ; toutes les autres méthodes proposées, quelque ingénieuses qu'elles soient, conduisent constamment à des calculs d'une prolixité rebutante. Il donne alors une idée générale de ce à quoi Hamilton a abouti.

L'idée de Bellavitis [1854], que l'on retrouve dans Laisant [1887] (voir le texte en annexe à la page 562) était de définir un produit de vecteurs dont le résultat soit un vecteur. Cette opération correspondait à ce que nous identifions aujourd'hui comme le produit de deux nombres complexes, l'un des complexes jouant le rôle d'un opérateur qui agit sur l'autre en faisant subir à son point représentatif une similitude directe.

Hamilton veut généraliser à l'espace ce produit de vecteurs qui n'est ni un produit scalaire, ni un produit vectoriel. Il considère deux vecteurs $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ et se demande par quel opérateur il faut multiplier $\overline{OA}$ pour obtenir $\overline{OB}$.

Dans le cas simple où ces deux vecteurs ont même direction, il suffit de multiplier $\overline{OA}$ par un « facteur numérique » dont le signe dépend du fait que les vecteurs ont le même sens ou non.

Si les vecteurs ne sont pas parallèles, il essaie d'abord de déterminer « *le nombre des éléments numériques dont doit dépendre* » l'opérateur en question.

Tait poursuit en ces termes :

> Nous pouvons concevoir que la transformation de $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$ s'opère successivement de la manière suivante :
>
> D'abord on augmente ou l'on diminue la longueur de $\overline{OA}$, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle de $\overline{OB}$. Un *seul* nombre suffira pour effectuer cette opération : c'est le quotient des longueurs

[1] Le lecteur trouvera un extrait du texte de J.-R. Argand à la page 521.

> des deux vecteurs. Ce nombre, comme Hamilton l'a fait remarquer, sera positif, ou, si l'on veut, privé de signe.
>
> Ensuite on tourne $\overline{OA}$ autour de O jusqu'à ce que sa direction soit la même que celle de $\overline{OB}$, et, concurremment avec la première opération, les deux vecteurs se trouvent ainsi en coïncidence parfaite et sont devenus identiques l'un avec l'autre. Pour exprimer cette seconde opération, il faudra connaître *trois* éléments numériques, qui sont les *deux* angles déterminant le plan dans lequel s'effectue la rotation de $\overline{OA}$ (dans le cas d'une planète, ce seraient la longitude du nœud et l'inclinaison), et l'angle déterminant la valeur même de la rotation.
>
> On voit ainsi que le rapport de deux vecteurs, c'est-à-dire le *multiplicateur* nécessaire pour opérer le changement de l'un des vecteurs dans l'autre, dépend en général de *quatre* nombres distincts : c'est de là que vient le nom de *quaternions* donné à ce multiplicateur.

Hamilton se heurte ainsi à deux difficultés lors de la généralisation à l'espace.

Dans le plan, à *deux* dimensions, le multiplicateur était déterminé par *deux éléments numériques* (en fait un nombre complexe) ; tandis que dans l'espace, à *trois* dimensions, il en faut *quatre*.

L'opérateur est ainsi un quaternion, qu'on représente d'ordinaire au moyen des unités imaginaires indépendantes i, j, k sous la forme

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{avec } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

La deuxième difficulté qu'il devra surmonter est que, si le produit de deux complexes est commutatif, le produit de deux quaternions ne peut l'être. Ceci n'est guère étonnant si l'on reste bien conscient que nombres complexes et quaternions sont les opérateurs d'une similitude directe. Or, dans le plan, la composition de rotations de même centre est commutative ; tandis que dans l'espace, la composition de rotations d'axes concourants ne l'est pas de manière générale.

Dans l'extrait qui suit, Tait décrit les vecteurs de l'espace et la base de ce que nous appelons aujourd'hui le calcul vectoriel. Les passages intercalés dans le texte et mis entre accolades sont ajoutés par le traducteur.

> ...
>
> Entamons donc le sujet en posant quelques notions géométriques très simples.
>
> 15. Considérons deux points A et B *dans l'espace*, et, supposant que A soit donné, demandons-nous quel est le nombre de données nécessaires pour fixer la position de B relativement à celle de A. Il faudra donc *trois* données numériques.
>
> Si nous faisons emploi de coordonnées polaires, et qu'il s'agisse par exemple de définir la position de la Lune relativement à celle de la Terre, nous devrons connaître soit la longitude et la latitude géocentriques du satellite, soit son ascension droite et sa déclinaison, et, de plus, nous devrons connaître la distance ou rayon vecteur de cet astre. Les données seront donc encore au nombre de *trois*.
>
> 16. Remarquons de suite qu'aucune mention n'a été faite des coordonnées elles-mêmes soit de A et B, ni de celles de la Terre et de la Lune ; il ne s'est agi que des coordonnées *relatives*.
>
> En conséquence, une expression telle que $\overline{AB}$, en tant qu'elle représente une droite ayant une certaine longueur et une certaine direction, est implicitement dépendante de *trois* nombres ; toute autre droite parallèle à AB et dirigée dans le même sens, dépendra des mêmes trois nombres en question.
>
> Nous pouvons donc établir en principe que *toutes les droites égales et parallèles* {et dirigées dans le même sens} *sont susceptibles d'être représentées par un même symbole, et ce symbole dépendra de trois éléments numériques.* C'est sous ce rapport qu'une droite sera appelée un vecteur : à l'aide d'un vecteur nous voyageons, pour ainsi dire, à partir de l'*origine* A du vecteur pour

arriver à son *extrémité* B, ou, si l'on veut, ce vecteur sera un *véhicule* qui transporte un certain point mobile à partir de A jusqu'en B {mais représentant d'ailleurs la ligne droite qui relie ces deux points}. On pourra donc se servir d'un vecteur pour représenter un *déplacement* défini et dans l'espace.

17. Nous ferons ici, une fois pour toutes, la remarque suivante, qu'en établissant les principes d'un nouveau Calcul nous sommes parfaitement libres d'introduire telle définition de nos symboles qu'il nous sera convenable de poser, pourvu que nous évitions les définitions qui seraient en contradiction les unes avec les autres. L'inventeur des quaternions, en se donnant cette liberté d'action, n'avait en vue que de donner à sa méthode la plus grande *simplicité* possible, la plus grande conformité, si l'on peut s'exprimer ainsi, aux lois naturelles.

18. Représentons $\overline{AB}$ par α ; d'après ce qui précède, cela nous dira que α dépendra de trois nombres. Supposons que $\overline{CD}$ soit égal en longueur à $\overline{AB}$, et de plus parallèle à $\overline{AB}$ et dirigé dans le même sens ; alors nous pouvons à juste titre poser

$$\overline{CD} = \overline{AB} = \alpha,$$

en employant le signe d'*égalité*, $=$, pour dénoter que les vecteurs reliés entre eux par ce signe sont à la fois *égaux en longueur* et *parallèles dirigés dans le même sens*. Nous avons ainsi donné une plus grande extension à la signification du symbole algébrique de l'égalité.

De plus, nous observons qu'une égalité telle que

$$\alpha = \beta$$

entre vecteurs contient implicitement trois égalités entre des nombres.

19. Nous arrivons à l'introduction de la définition du signe $+$ dans le nouveau calcul (et à celle du signe $-$, qui s'en déduira). Soient A, B, C trois points quelconques, et (en vertu de la signification que nous venons de donner au signe de l'égalité $=$) posons

$$\overline{AB} = \alpha,\ \overline{BC} = \beta,\ \overline{AC} = \gamma.$$

En conformité avec ce que nous avons établi au n° 16 (relativement à la signification d'un vecteur comme pouvant dénoter une translation), nous établirons maintenant qu'entre α, β, γ tels que nous venons de les définir, la relation

$$\alpha + \beta = \gamma$$

devra avoir lieu ; en un mot, nous posons

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

La signification du signe $+$ de l'addition des vecteurs, introduite de cette manière avec un élargissement de la signification purement algébrique de ce signe n'est en contradiction avec aucun des principes précédemment introduits. Il y a plus : la nouvelle signification nous met en possession d'une règle qui régit *la composition des vitesses simultanées tant pour la valeur que pour la direction de la vitesse résultante*.

On trouvera cette règle à l'égard des vecteurs justifiée par une autre considération : c'est qu'en ajoutant ensemble algébriquement des différences de coordonnées rectilignes de même nom de A et de B à celles de B et de C, on devra obtenir les différences de coordonnées correspondantes de A et de C. Cela montre en outre que ces coordonnées devront entrer linéairement dans l'expression d'un vecteur.

20. Dans le cas spécial où le point C (dont la position à l'égard de A est tout à fait arbitraire) vient à coïncider avec A il sera évident que nous aurons

$$\overline{AC} = 0,$$

puisqu'il n'y aura pas de chemin, par suite pas de vecteur, à parcourir entre A et C. Dans ce cas, la relation ci-dessus nous donnera

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Si donc nous définissons la signification du signe − de la soustraction par la relation suivante,

$$\overline{BA} = -\overline{AB},$$

nous verrons que le signe −, *appliqué à un vecteur, produit l'effet d'intervertir le sens de direction du vecteur.*

Ce principe s'accorde en tout point avec ceux que nous avons déjà introduits. Par exemple, ayant

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

nous en déduisons

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC},$$

c'est-à-dire

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},$$

relation qui ne diffère de celle du point de départ que par la permutation de B avec C, et, par la suite, elle ne fait que reproduire le principe primitivement introduit.

21. Pour un triangle ABC quelconque nous avons évidemment

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

et pour un polygone fermé plan ou gauche, de même,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{YZ} + \overline{ZA} = 0.$$

Nous aurons aussi

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{YZ} = \overline{AZ}.$$

Ces relations expriment les règles connues de la composition des vitesses et, par la suite, en vertu de la seconde loi de mouvement {suivant les *Principes* de Newton}, elles expriment également les règles de la composition des forces.

L'*interprétation* de l'expression d'une somme de vecteurs gagnera en clarté, si l'on effectue la *construction* de la somme en appliquant la règle pratique suivante : placer l'origine de chacun des termes au point occupé par l'extrémité du terme immédiatement précédent dans l'expression de la somme, l'origine du premier terme étant arbitrairement donnée. De cette manière, *le vecteur qui représente la somme aura pour origine celle du premier terme et pour extrémité le point occupé par l'extrémité du dernier terme en vertu de la construction.* Dans cette opération, le signe + aura reçu la signification de la *liaison* d'une nature définie qu'il s'agit d'établir entre deux termes consécutifs.

22. Si nous composons ensemble un nombre quelconque de vecteurs *parallèles* entre eux, le résultat sera évidemment un multiple de l'un d'entre eux par un nombre abstrait.

Soient A, B, C des points situés sur une même droite ; nous aurons, par exemple,

$$\overline{BC} = x\overline{AB},$$

x étant un nombre positif lorsque B est situé entre A et C ; dans tous les autres cas, x sera négatif : la valeur absolue de x sera dans tous les cas égale au rapport de longueur entre BC et AB. Cette proposition est évidente d'elle-même lorsque ce rapport est commensurable, et par un mode de raisonnement bien connu on l'étendra facilement au cas cas d'un rapport incommensurable.

23. Une proposition importante et presque évidente par elle-même consiste en ce qu'*un vecteur quelconque peut être décomposé en trois composantes parallèles à trois vecteurs donnés, non parallèles entre eux deux à deux ni parallèles à un même plan,* et que, *de plus, cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.*

...

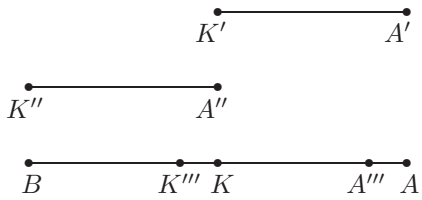
Nous présentons ci-après quelques autres témoignages. D'abord, celui du Norvégien Caspar Wessel. Son étude, qui avait été présentée à l'Académie des Sciences du Danemark en 1797 a été publiée dans les Mémoires de cette Académie. On trouvera en annexe, à la page 560 une version anglaise de cet extrait où il définit la manière d'additionner deux « droites ».

> On ajoute deux lignes droites en les unissant de telle manière que la seconde ligne commence là où finit la première, il passe alors une ligne droite du premier au dernier point des lignes jointes. Cette ligne est la somme des lignes jointes.
>
> Par exemple, si un point avance de trois pieds et recule de deux pieds, la somme de ces deux chemins n'est pas les premiers trois pieds joints aux derniers deux pieds ; la somme est un pied en avant. Car ce chemin, parcouru par le même point, produit le même effet que les deux autres chemins.
>
> ...

Quelques années plus tard, Argand écrivait son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* [1806]. On y trouve notamment ceci :

> ... 5. Observons maintenant que, pour l'existence des relations qui viennent d'être établies entre les quantités $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ..., il n'est pas nécessaire que le départ de la direction, qui constitue une partie de l'essence de ces quantités, soit fixé à un point unique K ; mais que ces relations ont également lieu, si l'on suppose que chaque expression, comme $\overline{KA}$, désigne en général une grandeur égale à $\overline{KA}$, et prise dans la même direction, comme $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, $\overline{K'''A'''}$, $\overline{BK}$, ...(fig. 3).

Fig. 3.



> En effet, en suivant, à l'égard de cette nouvelle espèce de grandeurs, les raisonnements qui ont été faits plus haut, on verra que, si $\overline{KA}$, $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, ... sont des unités positives, $\overline{AK}$, $\overline{A'K'}$, $\overline{A''K''}$, ... seront des unités négatives ; ...
>
> ... 6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$, ..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.
>
> Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des *lignes absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction...

En 1854, Giusto Bellavitis signait un texte intitulé *Sposizione del metodo delle equipollenze* dans le tome XXV, 2e partie des *Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze residente in Modena*. Nous donnons en annexe (page 561) un extrait du texte original en italien dont voici la traduction. Nous renvoyons également au texte de Laisant [1887] (page 562).

> Cette méthode satisfait à un désir de Carnot de trouver un algorithme, qui représente en même temps et la grandeur et la position des différentes parties d'une figure ; il en résulte, par voie directe, des solutions graphiques simples et élégantes de problèmes géométriques. La méthode des équipollences comprend comme cas particuliers les méthodes de coordonnées parallèles ou polaires, le calcul barycentrique, etc. : les problèmes sur les courbes s'y résolvent en général sans privilégier une manière de représentation plutôt qu'une autre ; le plus souvent les calculs y sont plus rapides qu'en géométrie analytique et les résultats sont exprimés sous une forme plus simple.
>
> Une chose essentielle dans la méthode des équipollences est la distinction entre les quantités positives et négatives, de sorte que la *corrélation* des figures est une conséquence nécessaire de l'algorithme sans nul besoin d'aucune attention spéciale, qui ne peut être que source d'erreur. Celui qui est habitué aux principes de la *Géométrie de Position* trouvera aisé de me suivre dans les quelques conventions sur lesquelles s'appuie la méthode ; peut-être pourrait-on être encore plus proche des usages habituels ; mais je ne trouve pas convenable de donner la préférence à une facilité poussée à l'extrême plutôt qu'à la concision des formules. Les conventions seront faciles à retenir par cœur, parce que certaines sont conformes aux règles habituelles relatives aux quantités positives et négatives, d'autres conformes à la très connue composition des forces. Les équipollences expriment des relations entre droites considérées non seulement comme ayant une grandeur, mais également une direction (ou ce qu'on peut exprimer par inclinaison) ; si bien qu'elles sont essentiellement différentes des équations, qui expriment des relations entre seules quantités réelles ; néanmoins le calcul des équipollences suit exactement les mêmes règles, qui sont utilisées dans les équations, ce qui lui confère pas mal d'avantages.
>
> ...

Bellavitis expose alors sa méthode qui est en fait notre calcul vectoriel et va jusqu'à définir le produit de deux vecteurs, qui n'est rien d'autre que le produit de deux nombres complexes.

15

De la géométrie analytique aux vecteurs : essai d'analyse épistémologique

> Si donc il n'y avait pas de corps solide dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.
>
> H. Poincaré

> Faire progresser la pensée ne signifie pas nécessairement refuser le passé : c'est parfois le revisiter pour comprendre non seulement ce qui a été effectivement dit, mais aussi ce qui aurait pu être dit, ou du moins ce que l'on peut dire aujourd'hui (et peut-être aujourd'hui seulement) à partir de ce qui a été dit auparavant.
>
> U. Eco[1]

1 Pourquoi les vecteurs à la base de la géométrie ?

La géométrie analytique, inventée dans les années 1630 par Descartes et Fermat, a pour objectif de soumettre les problèmes géométriques au calcul, de les ramener à l'algèbre. Elle y arrrive, mais avec deux inconvénients. Tout d'abord le repère choisi pour passer d'une figure aux nombres (c.-à-d. aux coordonnées) est arbitraire. Bien entendu, dans chaque problème, on le situe au mieux pour simplifier les calculs, ce qui se fait en observant les symétries de la figure. Néanmoins, il est toujours quelque chose d'extérieur, ajouté à la figure. On exprime aussi cela en disant que le repère est *un élément extrinsèque* à la situation géométrique à l'étude.

Le second inconvénient de la géométrie analytique, c'est qu'une fois le problème mis en coordonnées, on cherche la solution par calcul et que bien souvent, en appliquant les règles de l'algèbre, on oublie la situation géométrique, on s'en écarte en imagination. Certes on n'applique pas n'importe quelles règles de calcul dans n'importe quel ordre. On cherche bien à aller vers le but proposé. Mais en cours de route, il est souvent impossible pratiquement de saisir le sens géométrique des expressions algébriques par lesquelles on passe. Le retour à la figure, évidemment nécessaire, se fait à la fin.

En 1679 déjà, Leibniz cherchait à établir un calcul opérant directement sur les figures, et qui par conséquent éviterait les deux inconvénients en question. Mais l'entreprise devait s'avérer longue et difficile, puisque elle n'a aboutit que vers la fin du XIXe siècle, avec l'apparition des vecteurs tels que nous les connaissons aujourd'hui en géométrie élémentaire et en physique. Curieusement d'ailleurs, les vecteurs ne sont pas nés du seul souci de créer un calcul efficace en géométrie. En

[1] Cité par J. Bideaud.

effet, leur élaboration historique a été mêlée à des questions de nombres complexes, de rotations dans l'espace, d'aires et de volumes, de mécanique, d'électromagnétisme, ... Dans ce chapitre, nous ne nous occuperons que des vecteurs géométriques.

Les vecteurs constituent, en géométrie, un moyen de calcul différent du calcul en coordonnées. Ils évitent le plus souvent les deux inconvénients de ce dernier. En effet, pour traiter un problème de géométrie vectoriellement, on commence par choisir les vecteurs de départ sur la figure à l'étude (éventuellement en orientant certains segments). En ce sens les vecteurs sont *intrinsèques*, indépendants de tout cadre arbitraire tel qu'un repère.

Ensuite on calcule, mais comme les symboles que l'on combine ont un sens visible sur la figure et qu'en outre les formules sont compactes (une équation au lieu de deux ou trois, selon qu'on est dans le plan ou l'espace), on arrive souvent à reconnaître sur la figure les intermédiaires du calcul.

Bien entendu, dès que l'on veut soumettre la situation géométrique en cause au calcul numérique – ce qui n'est pas toujours nécessaire –, on doit revenir des vecteurs aux coordonnées et donc choisir un repère. Mais on peut ne le faire que tout à la fin.

Reprenons le fil de l'histoire. Une fois les vecteurs mis au point comme instruments de calcul commodes, ils ont dépassé ce rôle assez modeste et ont contribué à transformer profondément les mathématiques. Vers la fin du XIXe siècle et au début du XXe, ils ont engendré les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire. Celle-ci s'est développée surtout pour les besoins des équations différentielles et de l'analyse fonctionnelle, et non pour ceux de la géométrie élémentaire. Mais par un retour des choses, les espaces vectoriels ont fini par se retrouver aux fondements de la géométrie élémentaire. On peut aujourd'hui commencer l'exposé de la géométrie élémentaire en disant : « Soit un espace vectoriel sur le corps des réels. » Dans cette perspective, les notions de départ ne sont plus les points, les droites et les plans, mais les vecteurs et les nombres réels. Les droites et les plans sont alors des notions construites.

Ainsi, il a fallu quasiment trois siècles et de multiples recherches sur des questions dont beaucoup n'étaient pas géométriques, pour aboutir à ce renversement majeur : la possibilité de fonder la géométrie sur une toute autre base que les notions traditionnelles de point, droite et plan. D'où la question : peut-on expliquer simplement pourquoi les vecteurs ont fini par s'imposer avec une telle force ?

La réponse est nécessairement dans l'histoire. Mais comme nous l'avons vu, celle-ci est longue et touffue et nous n'essaierons pas ici de la suivre en détail. D'où la question : *y a-t-il moyen, en demeurant sur le terrain de la géométrie élémentaire, de montrer en peu de pages les arguments forts qui poussent à créer les vecteurs et à les mettre à la base de la géométrie ?*

Notre objectif dans ce chapitre est d'organiser un passage, le plus direct et le mieux motivé possible, entre la géométrie analytique et les vecteurs. Ce sera de l'histoire refaite et simplifiée, schématisée, une sorte d'accouchement provoqué, mais que l'on espère éclairant. Ce ne sera en tout cas pas un exposé purement déductif, mais bien l'élaboration argumentée d'une structure nouvelle à partir de la critique d'une structure familière. Nous supposons donc le lecteur familier de la géométrie analytique en axes orthonormés et de l'algèbre des premier et deuxième degrés telle qu'on l'enseigne dans les lycées. Et nous lui demandons de faire comme s'il ignorait les vecteurs.

Terminons cette introduction par deux indications pratiques. Tout notre exposé se situera dans le plan, mais uniquement par raison de simplicité : tout ce que nous ferons s'étend de manière naturelle à l'espace, moyennant des calculs un peu plus longs. Cet exposé devrait être accessible aux élèves motivés des sections scientifiques de la fin du secondaire et pourrait leur faciliter la transition vers des études supérieures. Il lève un petit coin du voile vers les géométries emboîtées du Programme d'Erlangen de F. Klein. À ce titre, il peut servir d'introduction à une lecture de ce programme.

Nos deux sources principales sont le volume consacré à la géométrie par F. Klein [1908] dans ses *Mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé,* et le chapitre intitulé « Géométries abstraites » (rédigé par E. Lehman) dans l'ouvrage de B. Sénéchal [1979] intitulé *Groupes et géométries*. Nous renvoyons à celui-ci le lecteur qui souhaiterait situer notre exposé dans un contexte plus abstrait, où les groupes précèdent les vecteurs.

2 De la géométrie à l'algèbre et vice-versa

Dans un premier temps, demandons-nous quel est le principe même de la géométrie analytique. Autrement dit, comment passe-t-on sans ambiguïté des figures aux relations algébriques qui les représentent et inversement ? Voyons d'abord cela sur quelques exemples.

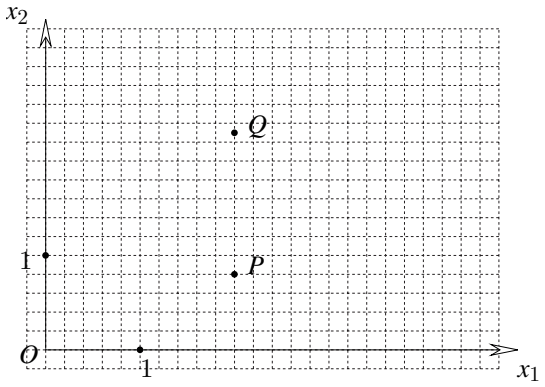


Fig. 1

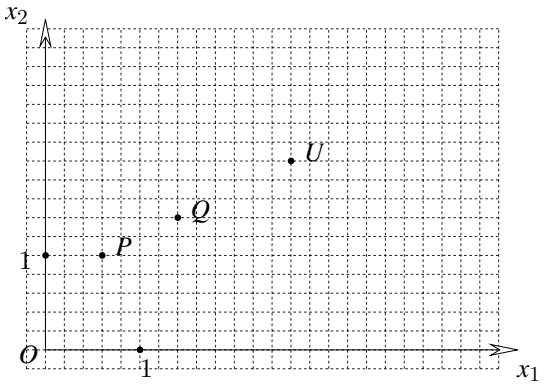


Fig. 2

Soit tout d'abord un repère orthonormé Ox_1x_2, comme celui de la figure 1. Et soient un point P de coordonnées (p_1, p_2) et un point Q de coordonnées (q_1, q_2). Imposons à ces deux points la propriété que la droite PQ soit parallèle à l'axe des x_2. Cette condition a pour expression algébrique

$$p_1 = q_1. \tag{1}$$

La figure formée des deux points P et Q satisfait à (1). Mais il y a une infinité de figures analogues qui satisfont à cette relation. En fait, toute figure formée de deux points situés sur une parallèle à l'axe des x_2 satisfait à (1), et toute figure formée de deux points satisfaisant à (1) est sur une parallèle à l'axe des x_2. Il revient exactement au même de se donner la relation (1) et de se donner l'ensemble de toutes les figures formées de deux points situés sur une parallèle à l'axe des x_2. Si on dessinait toutes ces figures, le plan serait noir de points et même chaque point appartiendrait à une infinité de figures. Le principe de la géométrie analytique est là : au lieu d'étudier une infinité de figures en regardant l'une d'elles (considérée comme typique), on étudie la relation algébrique qui représente fidèlement cet ensemble infini.

Ainsi d'un côté il y a une infinité de figures, et de l'autre seulement une égalité entre des symboles algébriques. Mais cette simplicité de l'algèbre ne doit pas faire illusion : en fait la relation (1) est équivalente à la donnée de l'ensemble infini de tous les quadruplets

$$(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

satisfaisant à (1). La relation algébrique, dans sa concision, ne nous délivre pas entièrement de l'infinité de situations qu'elle recouvre.

Considérons un autre exemple où la correspondance entre figures et expression algébrique s'avérera un peu plus difficile à établir. Soit, comme sur la figure 2, trois points P, Q et U alignés, de coordonnées respectives (p_1, p_2), (q_1, q_2) et (u_1, u_2). Pour exprimer que ces points sont alignés, appliquons le théorème de Thalès, qui nous donne

$$\frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2} = \frac{u_1 - p_1}{u_2 - p_2}. \tag{2}$$

Mais une telle relation ne représente pas toutes les figures constituées de trois points alignés. Elle ne s'applique en effet pas aux cas où P et Q seraient confondus, aux cas où P et U seraient confondus, aux cas où les trois points seraient confondus, et non plus aux cas où les points se trouveraient sur une parallèle à l'axe des abscisses.

Toutefois, il n'est pas difficile de remplacer la relation (2) par une autre qui prenne en compte tous ces cas particuliers. C'est la relation

$$(q_1 - p_1)(u_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(u_1 - p_1) = 0. \tag{3}$$

Tout triplet de points alignés a des coordonnées qui satisfont à (3), et si les coordonnées de trois points satisfont à (3), les points correspondants sont alignés. Nous avons ainsi une bonne correspondance entre la propriété géométrique d'alignement et son expression algébrique. Nous sommes donc sur une base saine pour commencer à étudier algébriquement la propriété géométrique d'alignement.

Les figures constituées de trois points alignés sont en nombre infini, et si on voulait les dessiner toutes, le plan serait ici aussi couvert de points. La relation (3) correspond à l'ensemble infini des sextuplets

$$(p_1, p_2, q_1, q_2, u_1, u_2)$$

de nombres réels qui satisfont à (3).

Voici un autre exemple de relation entre trois points :

$$(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = (u_1 - q_1)^2 + (u_2 - q_2)^2 = (p_1 - u_1)^2 + (p_2 - u_2)^2. \tag{4}$$

Cette relation représente toutes les figures constituées par trois points occupant les sommets d'un triangle équilatéral.

Il serait peu utile de multiplier les exemples. Nous voyons en effet maintenant comment transposer en algèbre les situations que nous rencontrons en géométrie, et comment revenir de l'algèbre à la géométrie. En géométrie, on n'étudie pas les figures mais, dans chaque cas, l'ensemble des figures qui ont telles ou telles propriétés (il revient au même de dire que l'on étudie ces propriétés). Nous appellerons de tels ensembles de figures des *configurations*. Se donner une configuration, c'est comme de se donner un ensemble de propriétés, ou aussi de se donner une relation algébrique[2], et une relation algébrique c'est aussi un ensemble de n-uples de nombres réels, chaque n-uple correspondant à une figure.

La différence entre les deux points de vue, c'est qu'on ne sait pas calculer avec des figures, tandis qu'on sait le faire avec des relations algébriques. Celles-ci ont hérité des règles de calcul sur les nombres réels.

Puisque notre intention est de faire de la géométrie par calcul, installons-nous donc, au moins provisoirement, dans l'univers des relations algébriques. Mais alors nous devons tout de suite nous souvenir que chacune de ces relations s'établit relativement à un repère donné. Et pourtant nous aimerions faire une géométrie générale, indépendante du choix d'un repère. Notre expérience de la

[2] Une relation peut être donnée par plusieurs équations, des inéquations, ...

géométrie analytique nous apprend qu'une relation algébrique peut complètement changer de visage dans un changement de repère. Par exemple une parabole qui s'écrit $y = x^2$ dans un repère donné s'écrira de façon plus compliquée dans un autre. Si nous découvrons des propriétés en raisonnant sur l'équation $y = x^2$, comment seront nous sûrs que ces propriétés seront celles de la configuration géométrique elle-même ?

Avant d'étudier cette question, rappelons comment on fait pour changer de repère. C'est l'objet de la section suivante.

3 Changer de repère

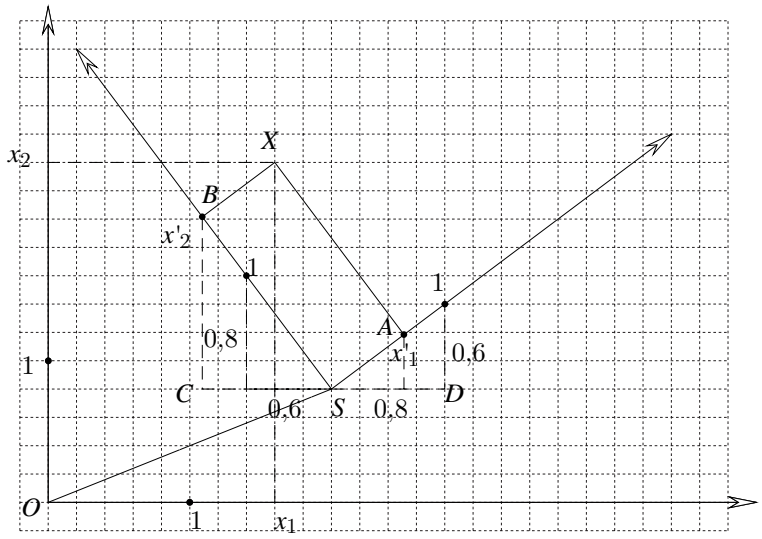


Fig. 3

La figure 3 montre deux repères orthonormés, l'un Ox_1x_2 et l'autre $Sx'_1x'_2$, muni des mêmes unités que le premier. Soit X un point quelconque de coordonnées (x_1, x_2) dans le premier repère et (x'_1, x'_2) dans le second.

Considérons d'abord la ligne brisée $OSAX$ que la figure suffit à définir, les points A et S ayant respectivement pour coordonnées dans le premier repère (a_1, a_2) et (s_1, s_2). Projetée sur l'axe des abscisses du premier repère, cette ligne brisée nous donne

$$x_1 = s_1 + (a_1 - s_1) + (x_1 - a_1). \tag{5}$$

Dans le cas de la figure 3, on a :

$$s_1 = 2. \tag{6}$$

D'autre part, en exprimant que deux triangles appropriés sont semblables, nous obtenons

$$\frac{x'_1}{1} = \frac{a_1 - s_1}{0,8}. \tag{7}$$

Et de même

$$\frac{x'_2}{1} = \frac{s_1 - c_1}{0,6} = \frac{a_1 - x_1}{0,6}. \tag{8}$$

En transformant le second membre de (5) grâce à (6), (7) et (8), nous obtenons que

$$x_1 = 2 + 0,8x'_1 - 0,6x'_2. \tag{9}$$

En partant ensuite de la ligne brisée $OSBX$, nous obtenons par des considérations analogues que

$$x_2 = 0,8 + 0,6x'_1 + 0,8x'_2. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) nous permettent de passer d'un repère à l'autre. D'autre part, le retour du second repère au premier est possible, puisque les équations (9) et (10) sont solubles pour x'_1 et x'_2. En effet, le déterminant formé par les coefficients de x'_1 et x'_2 est différent de 0. Il vaut $(0,8)^2 + (0,6)^2 = 1$.

Dans le cas général, et en nous aidant de la figure 4, nous voyons que les formules sont de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}x'_1 + r_{12}x'_2 + s_1, \\ x_2 &= r_{21}x'_1 + r_{22}x'_2 + s_2. \end{aligned} \tag{11}$$

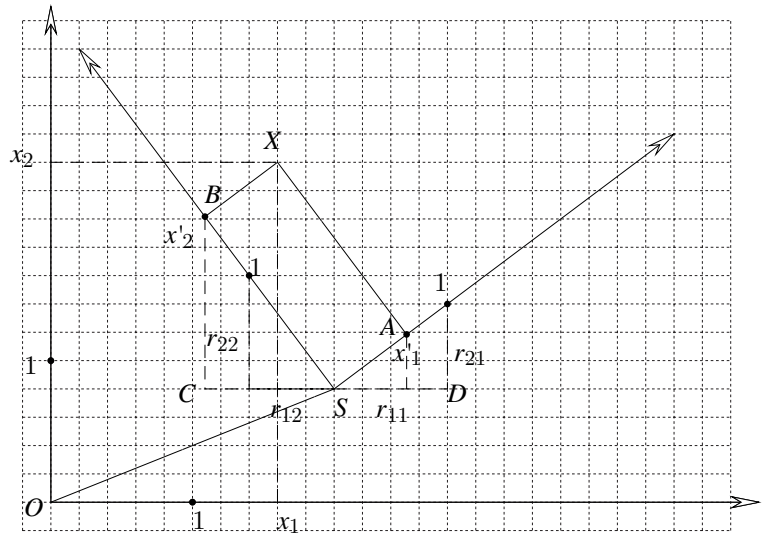


Fig. 4

Dans celles-ci (r_{11}, r_{21}) sont les projections dans le premier repère du segment orienté unitaire porté par Sx'_1 et (r_{12}, r_{22}) sont les projections dans ce repère du segment orienté unitaire porté par Sx'_2. Dans ces formules nous avons, selon l'usage, placé en dernier lieu les termes indépendants des coordonnées. Ici aussi, le déterminant des coefficients de x'_1 et x'_2 est différent de 0. En d'autres termes, nous avons

$$r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \neq 0. \tag{12}$$

En effet, en examinant les signes de r_{11}, r_{12}, r_{21} et r_{22} pour toutes les directions possibles du repère, nous réalisons que les deux produits $r_{11}r_{22}$ et $r_{12}r_{21}$ ne sont jamais tous les deux nuls, et s'ils sont tous deux non nuls, ils sont de signes opposés.

Bien que nous ne nous en servirons pas dans l'immédiat, exprimons algébriquement l'orthogonalité des axes. La figure 4 fait voir deux triangles rectangles isométriques qui nous permettent d'écrire que

$$\frac{r_{11}}{r_{21}} = -\frac{r_{22}}{r_{12}},$$

ou encore que

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0. \tag{13}$$

On vérifie que, sous cette dernière forme, cette équation exprime encore l'orthogonalité des axes $O'x'_1$ et $O'x'_2$, même si ceux-ci sont parallèles aux axes du premier repère.

Exprimons enfin, quitte à ne nous en servir que plus tard, le fait que les unités sont les mêmes sur les nouveaux axes que sur les anciens. Nous obtenons

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1 \tag{14}$$

$$\text{et} \quad r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1. \tag{15}$$

4 Des relations intrinsèques

Maintenant que nous disposons de la formule de changement de repère, revenons à notre propos qui était de voir comment les relations algébriques se comportent dans un tel changement. Et donc, pendant un bref moment, concentrons-nous davantage sur la forme algébrique des relations que sur leur signification géométrique.

Commençons par des exemples très simples. Et d'abord la relation (1), à savoir

$$p_1 = q_1. \tag{1}$$

En lui appliquant la formule (11) de changement de repère, nous obtenons

$$r_{11}p'_1 + r_{12}p'_2 = r_{11}q'_1 + r_{12}q'_2. \tag{16}$$

Cette relation est d'une toute autre forme que (1). Nous n'en tirerons sans doute pas grand chose.

Essayons

$$p_1 = p_2. \tag{17}$$

Nous obtenons de la même façon

$$r_{11}p'_1 + r_{12}p'_2 + s_1 = r_{21}p'_1 + r_{22}p'_2 + s_2,$$

ce qui s'écrit encore

$$(r_{11} - r_{21})p'_1 + (r_{12} - r_{22})p'_2 = s_2 - s_1. \tag{18}$$

Cette relation ne ressemble pas à (17) et ne nous inspire pas beaucoup. Essayons la relation (3), à savoir

$$(q_1 - p_1)(u_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(u_1 - p_1) = 0. \tag{3}$$

Pour y remplacer les anciennes coordonnées par les nouvelles, commençons par calculer

$$\begin{aligned} q_1 - p_1 &= (r_{11}q'_1 + r_{12}q'_2 + s_1) - (r_{11}p'_1 + r_{12}p'_2 + s_1) \\ &= r_{11}(q'_1 - p'_1) + r_{12}(q'_2 - p'_2), \end{aligned}$$

ainsi que les expressions analogues pour $u_2 - p_2$, $q_2 - p_2$ et $u_1 - p_1$. Substituons ensuite ces expressions dans (3), ce qui donne

$$\begin{aligned} &[r_{11}(q'_1 - p'_1) + r_{12}(q'_2 - p'_2)][r_{21}(u'_1 - p'_1) + r_{22}(u'_2 - p'_2)] - \\ &[r_{21}(q'_1 - p'_1) + r_{22}(q'_2 - p'_2)][r_{11}(u'_1 - p'_1) + r_{12}(u'_2 - p'_2)] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation devient après calcul

$$(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})[(q'_1 - p'_1)(u'_2 - p'_2) - (q'_2 - p'_2)(u'_1 - p'_1)] = 0,$$

et ensuite, grâce à (12),

$$(q'_1 - p'_1)(u'_2 - p'_2) - (q'_2 - p'_2)(u'_1 - p'_1) = 0. \tag{19}$$

La relation (19) a la même forme que (3). Elle s'exprime de la même façon dans tous les repères. D'une relation qui possède cette propriété, on dit qu'elle est *intrinsèque*.

Cette définition est de nature algébrique. Examinons-la maintenant d'un point de vue géométrique, en considérant à nouveau l'exemple de la relation (3).

Plaçons-nous dans le premier repère et pensons à tous les triplets satisfaisant à cette relation, c'est-à-dire à tous les triplets de points alignés. Bien sûr ils remplissent tout le plan, et même chaque point du plan appartient à une infinité de triplets. N'empêche, par un effort d'imagination, nous voyons que le plan est rempli de triplets de manière homogène et isotrope[3]. Aucune région du plan n'est privilégiée. On comprend alors pourquoi, si on recommence à construire les triplets à partir du second repère, on retombe sur les mêmes. C'est là ce qui caractérise une relation intrinsèque.

Éclairons encore davantage la définition en regardant comme contre-exemple la relation (1). Géométriquement, elle exprime que les couples de points P et Q sont sur une parallèle à l'axe des x_2. Ces couples en nombre infini noircissent aussi tout le plan, dans lequel ils sont répartis de manière homogène. Ceci explique qu'une translation du repère n'affecterait pas cette relation. On ne retrouve d'ailleurs ni s_1 ni s_2 dans (16). Mais les couples de points ne sont pas disposés dans le plan de manière isotrope. Ils appartiennent tous à la même direction. Ceci explique qu'une rotation des axes affecte la relation (1). Et de fait, dans (16) on retrouve les coefficients r_{11}, r_{12}, r_{21} et r_{22}.

La relation (17) est instructive aussi. Quand on la transforme, on trouve dans la relation transformée aussi bien r_{11}, r_{12}, r_{21} et r_{22} que s_1 et s_2. C'est que les points qui satisfont à (17) sont sur une bissectrice du premier repère, et que, dans la plupart des changements de repère que l'on peut envisager, cette droite n'est plus bissectrice du repère à l'arrivée.

Exercice. Imaginer une nouvelle relation qui ne change pas dans une rotation des axes autour de l'origine. Interpréter géométriquement le résultat. Réponse possible : $p_1q_2 - p_2q_1 = 0$.

D'un certain point de vue, on peut considérer un repère comme un poste d'observation. Les relations intrinsèques sont celles qui définissent des configurations (des ensembles de n-uples de points) que l'on voit de la même façon – que l'on ne peut pas discerner –, quel que soit le poste d'observation que l'on choisisse. Ces configurations sont proprement géométriques, au sens où la géométrie est la même dans tous les patelins du monde. Les relations non intrinsèques par contre définissent des configurations qui sont liées à un lieu donné, que l'on voit différemment lorsqu'on change de poste d'observation. On pourrait dire que ces configurations relèvent plutôt de la géographie que de la géométrie. Le mot est de F. Klein, mais il s'agit bien entendu d'une géographie quelque peu théorique, où les accidents de terrain ne sont ni des montagnes, ni des villes.

Pour en finir avec l'idée des relations intrinsèques, notons que le recours aux relations en géométrie nous a amenés à changer profondément notre perception des figures. En géométrie synthétique, on raisonne sur une figure typique, c'est-à-dire sur une figure qui représente toutes les figures répondant aux hypothèses que l'on s'est fixées. Mais souvent ces autres figures, dont l'ensemble constitue ce que nous avons appelé une configuration, se trouvent quelque peu reléguées dans notre subconscient.

[3] *Isotrope* veut dire qu'aucune direction du plan n'est privilégiée.

Au contraire, en regardant une configuration comme définie par une relation algébrique, nous sommes poussés à donner aux variables toutes les valeurs possibles, ne serait-ce qu'en imagination (c'est un infini potentiel) et à imaginer de ce fait toutes les figures possibles, quelle que soit leur situation dans le plan. Notre analyse des changements de coordonnées et des relations intrinsèques a amené dans le champ de la géométrie une chose qui ne s'y trouvait auparavant que de manière plus implicite : par delà les propriétés données, l'ensemble de toutes les figures possédant ces propriétés. On a souvent observé que la notion d'espace n'apparaissait pas dans EUCLIDE. Au point où nous en sommes, l'espace (en l'occurrence le plan) est bien là et il est bien occupé.

5 Naissance des vecteurs

Nous savons maintenant qu'il est équivalent de se donner une relation algébrique intrinsèque ou une configuration possédant les propriétés géométriques correspondantes. Une différence importante demeure pourtant : avec la relation algébrique, on peut calculer, avec la figure non. Mais notre propos est toujours d'introduire un calcul sur les figures, pas sur les coordonnées.

Nous ne pouvons pas espérer calculer avec toutes espèces de figures. Pour trouver celles qui nous permettront de fonder un calcul commode et de portée générale, cherchons des relations algébriques simples et intrinsèques.

5.1 Deux segments orientés équipollents

Prenons par exemple quatre points P, Q, U et V, tels que le segment orienté $[PQ]$ soit parallèle[4] au segment orienté $[UV]$ et de même sens et de même longueur que lui (figure 5). Cette propriété est exprimée par les deux équations

$$\begin{aligned} q_1 - p_1 &= v_1 - u_1, \\ q_2 - p_2 &= v_2 - u_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Celles-ci ne contiennent que des différences de coordonnées, ce qui nous laisse espérer que dans le changement de repère, au moins s_1 et s_2 disparaîtront.

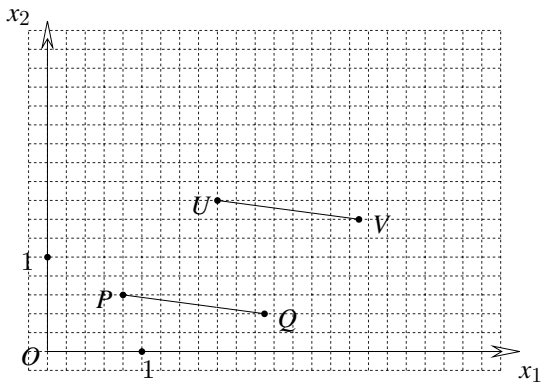


Fig. 5

[4] Abus de langage : ce sont les droites portant les deux segments qui sont parallèles.

De fait si on applique à (20) le changement de repère (11), on obtient

$$\begin{aligned} q'_1 - p'_1 &= v'_1 - u'_1, \\ q'_2 - p'_2 &= v'_2 - u'_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Par conséquent la relation est intrinsèque. Elle porte un nom : on dit que le segment orienté $[PQ]$ est *équipollent* au segment orienté $[UV]$.

5.2 Allonger ou raccourcir un segment orienté

Soient maintenant trois points P, Q et U tels que

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= \lambda(q_1 - p_1), \\ u_2 - p_2 &= \lambda(q_2 - p_2), \end{aligned} \tag{22}$$

où λ est un nombre réel quelconque (égal à 4/3 sur la figure 6).

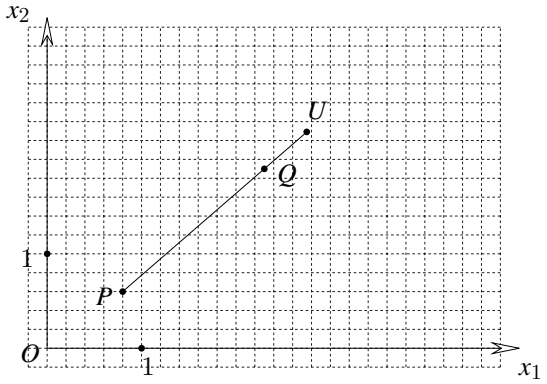


Fig. 6

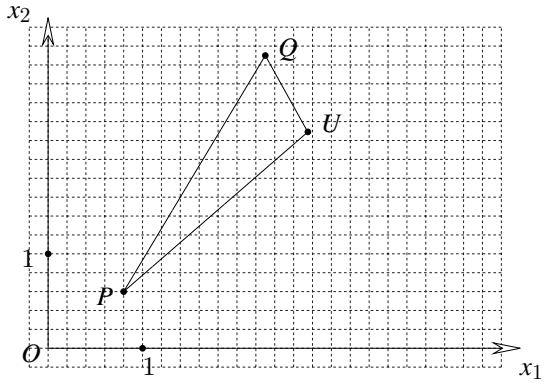


Fig. 7

Après changement de repère, on obtient

$$\begin{aligned} u'_1 - p'_1 &= \lambda(q'_1 - p'_1), \\ u'_2 - p'_2 &= \lambda(q'_2 - p'_2). \end{aligned} \tag{23}$$

Donc ici aussi, la relation est intrinsèque. C'est en fait une relation du premier degré qui exprime l'alignement des points P, Q et U.

5.3 Trois points

Soient P, Q et U trois points situés de façon quelconque (figure 7). Leurs coordonnées satisfont aux deux équations

$$\begin{aligned} (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1) + (p_1 - u_1) &= 0, \\ (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2) + (p_2 - u_2) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Ce sont des identités. La relation qu'elles déterminent est $\mathbb{R}^6$ tout entier. Il n'est pas besoin de leur appliquer explicitement le changement de repère pour savoir que l'on a aussi

$$\begin{aligned} (q'_1 - p'_1) + (u'_1 - q'_1) + (p'_1 - u'_1) &= 0, \\ (q'_2 - p'_2) + (u'_2 - q'_2) + (p'_2 - u'_2) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

La relation correspondante dans Π^3 n'est autre que Π^3 tout entier. Elle comprend tous les triplets de points possibles et imaginables.

On pensera peut-être qu'autant vaudrait ne pas parler d'une relation aussi triviale. Quoiqu'il en soit, nous verrons sous peu – chose étonnante – que les équations (24) récrites sous la forme

$$\begin{aligned}(u_1 - p_1) &= (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1),\\ (u_2 - p_2) &= (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2),\end{aligned} \tag{26}$$

nous seront fort utiles.

5.4 Se débarrasser des repères

Arrivés à ce stade de notre étude, nous savons qu'il existe des relations géométriques élémentaires qui, étant intrinsèques, s'écrivent de la même manière dans tous les repères orthonormés. D'où la question : pourquoi continuer à particulariser les notations, à écrire p_1 et p_2 si on est dans un premier repère, p'_1 et p'_2 si on est dans un autre, etc. ?

Par ailleurs, ce sont les points qui sont intéressants, pas les coordonnées. Celles-ci ne sont qu'un instrument pour accéder aux points, puisque ce que nous voulons, c'est faire de la géométrie. Essayons donc de privilégier les points par rapport aux coordonnées.

Récrivons nos trois relations (22), (24) et (26) dans la première colonne d'un tableau.

$q_1 - p_1 = v_1 - u_1$ $q_2 - p_2 = v_2 - u_2$	$Q - P = V - U$
$u_1 - p_1 = \lambda(q_1 - p_1)$ $u_2 - p_2 = \lambda(q_2 - p_2)$	$U - P = \lambda(Q - P)$
$u_1 - p_1 = (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1)$ $u_2 - p_2 = (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2)$	$U - P = (Q - P) + (U - Q)$

En nous laissant guider par l'analogie des formes, tentons dans la deuxième colonne une écriture en termes de points. Il s'agit d'une transposition d'écritures, sans aucune justification mathématique a priori. Pour nous rassurer, observons que les règles de passage sont bien définies et claires et que, par convention, ce que nous avons écrit dans la deuxième colonne ne veut rien dire d'autre que ce qui est écrit dans la première. Il ne s'agit dans ces conditions que d'une sténographie, une abréviation d'écriture.

Mais ce n'est pas là se débarrasser franchement des coordonnées, puisque l'on ne donne ainsi un sens à la colonne de droite qu'en retournant à celle de gauche. Essayons donc maintenant de donner aux formules exprimées en termes de points un sens mathématique autonome, c'est-à-dire qui s'exprime en termes de points. Pour cela, il faut accepter que les symboles

$$\text{« = », « · » (ou l'absence de symbole) et « + »}$$

changent de sens lorsque l'on passe d'une colonne à l'autre. Nous devrons redéfinir ces symboles pour l'usage que nous voulons en faire lorsque nous parlons non plus de coordonnées mais de points.

Revenons à la relation d'équipollence. Elle nous a suggéré d'écrire

$$Q - P = V - U.$$

Bien entendu, nous voulons maintenir au signe « = » sa valeur universelle en mathématiques, qui est de *désigner deux écritures distinctes pour un même objet*. Il faut donc que $Q - P$ soit la même chose que $V - U$. Et même que $Q - P$ soit la même chose que $Y - X$, où X et Y sont des points

quelconques tels que le segment orienté $Y - X$ soit équipollent à $Q - P$. Une solution audacieuse (y en a-t-il d'autres ?) consiste à dire que les écritures $Q - P$, $V - U$ et $Y - X$ renvoient toutes trois à *l'ensemble de tous les segments équipollents à* $Q - P$. Solution audacieuse, peu naturelle, car elle consiste à remplacer l'objet géométrique élémentaire que constitue le segment orienté par un objet multiple, infini, aussi peu quotidien que possible...

On appelle *vecteur libre* l'ensemble de tous les segments orientés équipollents à un segment orienté donné. Si un segment appartient à un vecteur libre, on dit qu'il le *représente*, qu'il en est un *représentant*. Ainsi la définition de vecteur nous permet d'évoquer la figure 5 dans des termes nouveaux : au lieu de dire qu'elle représente deux segments orientés équipollents, nous pouvons dire qu'elle montre deux représentants d'un même vecteur libre. Et effectivement, pour connaître un vecteur libre, il suffit de connaître un quelconque de ses représentants. Par abus de langage, nous dirons le plus souvent *vecteur* au lieu de *vecteur libre*.

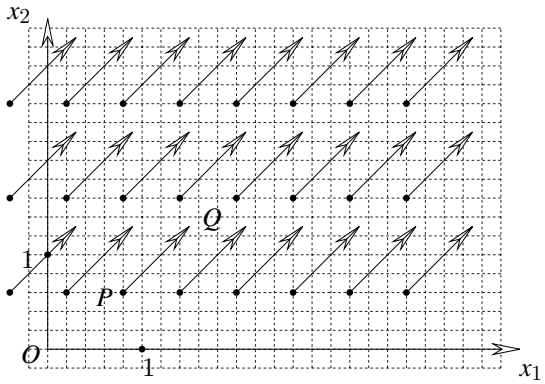


Fig. 8

La figure 8 montre quelques représentants d'un vecteur libre. Pour la facilité, nous avons dessiné une pointe de flèche à l'extrémité de chacun des segments orientés. Il va de soi que nous ne pouvons pas dessiner tous les représentants du vecteur, car alors le plan serait tout noir.

Comme nous l'avons vu, les notations $Q-P$, $Q'-P'$, ... désignent toutes le même vecteur. Chacune de ces notations a l'avantage de désigner un représentant du vecteur, mais elle a l'inconvénient de lier fortement celui-ci à l'un de ses représentants. Lorsqu'on rencontre une expression telle que $Q - P$, il faut donc bien se souvenir que le vecteur $Q - P$ n'est lié à aucun point du plan, et qu'en particulier il n'a aucune relation privilégiée avec Q, non plus qu'avec P.

Un vecteur étant par ailleurs un objet mathématique à part entière, rien n'empêche de le désigner par un symbole qui ne rappelle aucun point ni aucun segment particulier. La convention est d'utiliser une lettre surmontée d'une flèche, comme par exemple $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ... Notons aussi que l'on écrit souvent $\overrightarrow{PQ}$ au lieu de $Q - P$.

Passons ensuite à la deuxième ligne du tableau et à la figure 6. Sur cette dernière nous discernons maintenant les vecteurs $Q - P$ et $U - P$, que nous pouvons appeler $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. L'égalité

$$U - P = \lambda(Q - P) \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a},$$

définit ce que nous appellerons le *produit d'un vecteur par un réel* (on dit aussi par un *scalaire*). La définition de cette opération s'obtient, en termes de coordonnées, en retournant à la partie gauche du tableau. Et puisque nous savons que ce que nous y lisons, à savoir

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= \lambda(q_1 - p_1), \\ u_2 - p_2 &= \lambda(q_2 - p_2), \end{aligned}$$

est indépendant du repère choisi, nous sommes assurés que notre définition n'est pas ambiguë.

Mais nous pouvons aussi *définir géométriquement* le produit d'un vecteur par un réel. Soit le vecteur $\overrightarrow{a} = Q - P$. Multiplions la longueur du segment $[PQ]$ par λ et considérons le segment $[PU]$ ayant cette nouvelle longueur, et ayant le sens de $[PQ]$ ou le sens opposé selon que λ est > 0 ou < 0. Alors le segment $[PU]$ est un représentant de $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda(Q - P)$.

Enfin considérons la dernière ligne du tableau et la figure 7. Sur celle-ci nous voyons maintenant les trois vecteurs $Q - P$, $U - Q$ et $U - P$, que nous pouvons aussi appeler $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$. L'égalité

$$U - P = (Q - P) + (U - Q) \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

nous conduit à ce que nous appellerons naturellement la *somme* de deux vecteurs.

La définition de cette opération s'obtient, en termes de coordonnées, en retournant à la partie gauche du tableau. Et puisque nous savons que ce que nous y lisons, à savoir

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= (q_1 - p_1) + (u_1 - q_1), \\ u_2 - p_2 &= (q_2 - p_2) + (u_2 - q_2), \end{aligned}$$

est indépendant du repère choisi, nous sommes assurés que notre définition n'est pas ambiguë.

Mais nous pouvons aussi *définir géométriquement* la somme de deux vecteurs. Supposons que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ aient des représentants $[AA']$ et $[BB']$ situés n'importe où dans le plan. Considérons alors un représentant $[A'B]$ de $\overrightarrow{b}$ qui s'enchaîne avec $[AA']$. Alors le segment $[AB]$ est un représentant de la somme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (voir figure 9).

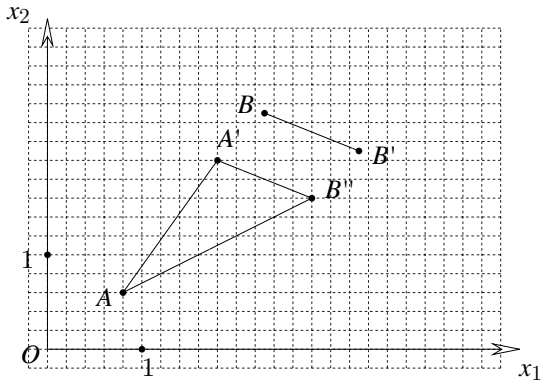


Fig. 9

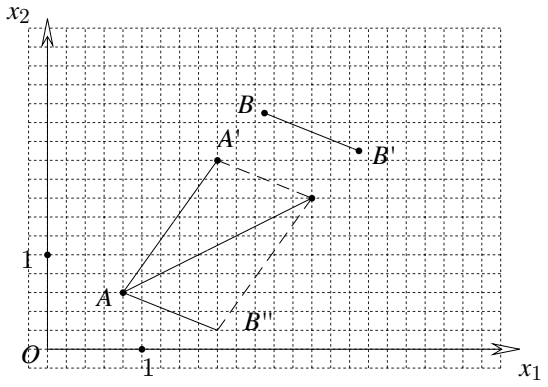


Fig. 10

Pour obtenir la somme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ à partir des deux représentants $[AA']$ et $[BB']$, nous aurions pu aussi considérer un représentant $[AB]$ de $\overrightarrow{b}$ issu de l'origine de $[AA']$, et ensuite construire la somme selon la diagonale du parallélogramme dont trois sommets consécutifs sont A, A' et B (voir figure 10). Cette façon d'engendrer la somme de deux vecteurs s'appelle *règle du parallélogramme*.

5.5 Des règles de calcul

Nous venons de définir les vecteurs et les deux premières opérations qu'on leur applique. On aura compris qu'il ne s'agit pas là d'un épisode banal de notre étude, mais bien d'un *véritable accouchement*. Toutefois nous ne sommes pas au bout de nos peines, car maintenant que nous avons deux opérations nouvelles, nous devons encore nous assurer qu'elles obéissent à des règles de calcul qui nous conviennent.

Nous n'avons plus vraiment le choix de ces règles, car elles découlent des définitions du vecteur et des deux opérations[5]. Ce sont celles qui constituent les axiomes d'un *espace vectoriel*. Rappelons-les.

(I) *L'addition des vecteurs est commutative :* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

(II) *l'addition est associative :* $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$;

(III) *il existe un unique vecteur* $\overrightarrow{0}$ *tel que* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ *pour tout* $\overrightarrow{a}$;

(IV) *à tout vecteur* $\overrightarrow{a}$ *correspond un unique vecteur* $-\overrightarrow{a}$ *tel que* $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$;

(V) *la multiplication par un scalaire est associative :* $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$;

(VI) $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ *pour tout* $\overrightarrow{a}$;

(VII) *la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :* $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$;

(VIII) *la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :* $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$.

On trouve les démonstrations de ces propriétés, par la voie des coordonnées ou par raisonnement géométrique direct, dans beaucoup d'introductions au calcul vectoriel : voir par exemple le chapitre 8 du présent ouvrage.

Ces règles de calcul sont satisfaisantes dans la mesure où elles ne nous obligent pas, lorsque nous en arrivons aux vecteurs, à changer trop les habitudes de calcul que nous avons acquises dans le champ des nombres.

Montrons maintenant a contrario que ces règles commodes, *qui découlent du tableau ci-dessus* (voir section 5.4), n'étaient pas acquises d'avance. Reprenons en effet notre projet à son début. Nous souhaitions introduire en géométrie un calcul intrinsèque, c'est-à-dire indépendant de tout système de coordonnées. Une idée qui aurait pu s'imposer à nous aurait été d'adopter directement les segments orientés comme objets géométriques élémentaires à soumettre au calcul. Ils sont des figures simples et commodes, moins compliquées que les classes d'équivalence de tels segments. Un regard sur les vitesses et les forces nous aurait aussi quelque peu poussés dans cette voie. Et nous aurions alors pu définir leur addition de deux façons. Soit deux segments $[AB]$ et $[BC]$ sont enchaînés et nous convenons que leur somme sera $[AC]$, mais alors la somme ne sera définie que pour des segments enchaînés ; soit deux segments $[AB]$ et $[AC]$ sont issus d'un même point A, et

[5] Dans le présent exposé, nous *constatons* que les règles de calcul se maintiennent pour l'essentiel. D'autres exposés aboutissent aux vecteurs en partant de l'*objectif* que les règles de calcul soient conservées. Un tel objectif correspond à ce que Freudenthal appelle le *principe de permanence algébrique* (voir par exemple Freudenthal [1973]).

nous définissons leur somme par la règle du parallélogramme, mais alors la somme n'est définie que pour les segments ayant même origine. Nous voyons que, dans l'un et l'autre cas, l'addition n'est pas définie sur l'ensemble des segments, ce qui est un désavantage évident.

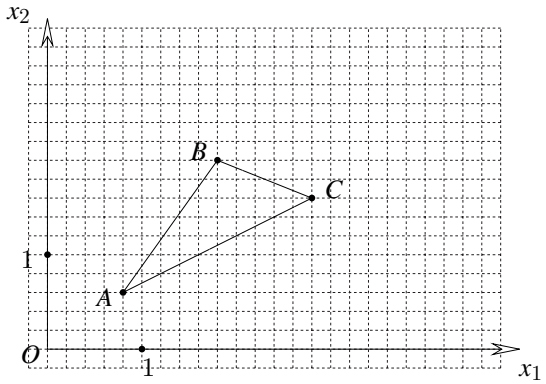


Fig. 11

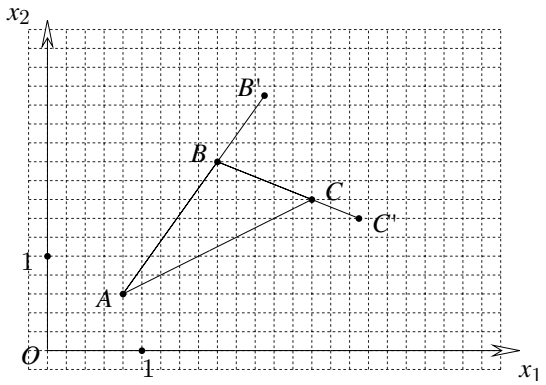


Fig. 12

D'autre part, si nous adoptons l'addition par enchaînement, nous observons que certaines des règles (I) à (VIII) ci-dessus ne sont pas satisfaites.

Par exemple, partons des deux segments $[AB]$ et $[BC]$ et de leur somme $[AB]+[BC]=[AC]$ (voir figure 11). Nous voudrions commuter cette somme et donc la remplacer par $[BC]+[AB]$. Mais ce n'est pas possible, parce que $[BC]$ et $[AB]$ (pris dans cet ordre bien entendu) n'étant pas enchaînés, leur somme n'est pas définie.

Autre exemple : soit comme sur la figure 12, les segments enchaînés $[AB]$ et $[BC]$ et leur somme $[AC]$. Multiplions les deux premiers par un scalaire λ, par exemple $\lambda = 1,5$. Nous obtenons ainsi $\lambda[AB] = [AB']$ et $\lambda[BC] = [BC']$. Nous voudrions pouvoir appliquer la règle de la distributivité sous la forme

$$\lambda([AB]+[BC]) = \lambda[AB]+\lambda[BC].$$

Mais malheureusement $[AB']$ et $[BC']$ ne sont plus enchaînés, et nous ne pouvons par conséquent pas les additionner.

Peut-être alors aurions nous plus de chance en considérant la somme tirée de la règle du parallélogramme. Dans cette hypothèse, considérons tous les segments orientés issus d'un seul point, de manière que la somme soit définie pour tout couple d'entre eux. On vérifie alors facilement que toutes les règles (I) à (VIII) sont satisfaites.

C'est un résultat intéressant. Ce qui est dommage par contre, c'est qu'au passage nous avons privilégié un point, à savoir l'origine commune de tous les segments. Nous nous interdisons de considérer a priori un segment situé n'importe où dans le plan, ce qui est une décision désagréable pour celui qui cherche à faire de la géométrie en un sens ordinaire, c'est-à-dire dans un espace homogène.

Exercice. Établir quelles sont les règles de calcul (I) à (VIII) que l'on peut transposer aux segments orientés additionnés par enchaînement, et quelles sont celles que l'on ne peut pas transposer.

Exercice. Vérifier explicitement que tous les segments orientés issus d'un point donné et additionnés par la règle du parallélogramme vérifient les règles (I) à (VIII).

6 Les géométries affine, euclidienne et métrique

6.1 La perpendicularité

Dans cette étude, nous n'avons pas encore abordé la propriété de perpendicularité. Rappelons donc d'abord comment elle s'exprime dans un système de coordonnées, et voyons ensuite comment elle se comporte dans un changement de repère. Soit donc, comme toujours jusqu'ici, un repère orthogonal muni de la même unité sur chacun des deux axes. Et soient deux segments orthogonaux $[PQ]$ et $[PU]$ (voir figure 13). À cause de la perpendicularité, les deux triangles rectangles PAQ et PBU sont semblables.

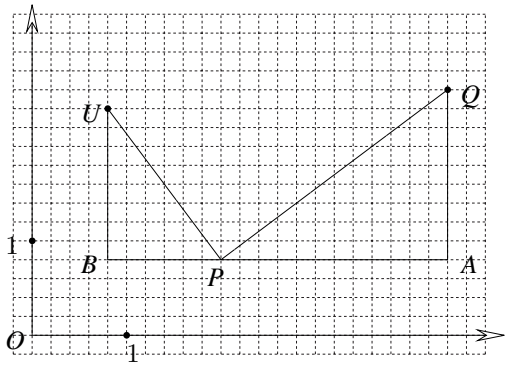


Fig. 13

Cette propriété s'exprime comme ceci

$$\frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2} = \frac{u_2 - p_2}{p_1 - u_1}.$$

Cette relation n'est évidemment valable que si les segments ne sont pas parallèles aux axes. Pour obtenir une expression générale de la perpendicularité, nous la remplacerons par

$$(q_1 - p_1)(u_1 - p_1) = -(q_2 - p_2)(u_2 - p_2),$$

que nous écrirons plus volontiers sous la forme

$$(q_1 - p_1)(u_1 - p_1) + (q_2 - p_2)(u_2 - p_2) = 0. \tag{27}$$

Par définition, nous comprendrons même, dans la propriété en question, les cas extrêmes où deux des points P, Q ou U sont confondus, et aussi le cas où les trois points sont confondus.

Il nous reste à voir maintenant ce que devient cette relation dans un changement de repère du type (11). Après calcul, nous obtenons

$$\begin{array}{l}(q'_1-p'_1)(u'_1-p'_1)(r_{11}^2+r_{21}^2)+(q'_2-p'_2\,)\,(u'_2-p'_2)(r_{12}^2+r_{22}^2)\\ +(q'_1-p'_1)(u'_2-p'_2)+(q'_2-p'_2)(u'_1-p'_1\,)\,](r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22})=0.\end{array} \tag{28}$$

Souvenons-nous alors que nos axes sont orthogonaux et sont tous munis de la même unité. Nous pouvons donc appliquer les formules (13) à (15), ce qui nous donne au lieu de (28) la formule simplifiée

$$(q'_1-p'_1)(u'_1-p'_1)+(q'_2-p'_2)(u'_2-p'_2)=0. \tag{29}$$

Ainsi, la relation de perpendicularité est intrinsèque.

Remarquons toutefois que, par comparaison avec les autres relations étudiées jusqu'à présent, pour établir que la relation de perpendicularité est intrinsèque, nous nous sommes appuyés sur la condition (13) d'orthogonalité des axes et sur les conditions (14) et (15) exprimant que l'unité choisie est la même sur tous les axes.

Mais regardons d'un peu plus près le passage de (28) à (29). En fait, au lieu de (14) et (15), nous aurions pu dans le calcul utiliser la condition moins restrictive qui s'écrit

$$r_{11}^2+r_{21}^2=r_{12}^2+r_{22}^2. \tag{30}$$

Celle-ci exprime que l'unité est la même sur les deux axes Sx'_1 et Sx'_2, mais pas forcément égale à celle choisie sur Ox_1 et Ox_2. Nous pourrions donc, en ce qui concerne la perpendicularité, recommencer la théorie en vérifiant que, lorsqu'on passe d'un repère orthonormé à un autre avec un éventuel changement d'unité, on a encore les relations (11), (12) et (13), et que l'on a en outre (30).

Ceci fait, on aurait montré que la relation de perpendicularité (17) est intrinsèque pour une classe de repères plus grande que celle considérée jusqu'ici, à savoir la classe de tous les repères ayant des unités identiques sur les deux axes, même si cette unité varie d'un repère à l'autre.

Notons enfin que, la relation d'orthogonalité ne dépendant que des projections des segments orientés, elle s'étend naturellement de ces derniers aux vecteurs. Et donc, si nous considérons que $[PQ]$ et $[PU]$ représentent respectivement deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, nous pouvons dire que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux si et seulement si on a la condition (27).

6.2 La distance

Soient P et Q deux points. Grâce au théorème de Pythagore, nous pouvons écrire pour le carré de la distance qui les sépare

$$d^2(P,Q)=(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2. \tag{31}$$

Vient ensuite bien entendu la question de savoir comment cette expression se transforme dans le changement de repère. Après calcul, nous obtenons

$$d(P,Q)=(q'_1-p'_1)^2(r_{11}^2+r_{21}^2)+(q'_2-p'_2)^2(r_{12}^2+r_{22}^2)+2(q'_1-p'_1)(q'_2-p'_2)(r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22}).$$

Mais en vertu de (13) à (15), nous obtenons aussi

$$d^2(P,Q)=(q'_1-p'_1)^2+(q'_2-p'_2)^2. \tag{32}$$

Ce que nous observons ici est non plus seulement une relation intrinsèque, mais une *fonction intrinsèque*. Nous pouvons la qualifier d'intrinsèque, car elle a la même expression dans tous les repères (orthogonaux et munis cette fois d'unités identiques sur tous les axes).

6.3 Trois ensembles de repères

Jetons un regard en arrière sur les repères que nous avons envisagés jusqu'ici. À la section 3, nous sommes partis avec des repères orthonormés et la même unité dans tous les repères. Comme nous venons de le voir, c'est par rapport à cette classe de repères que la distance est intrinsèque.

Nous avons montré par ailleurs que la perpendicularité était intrinsèque par rapport à la classe des repères orthonormés munis d'unités éventuellement différentes d'un repère à l'autre.

Mais tous comptes faits, pour prouver le caractère intrinsèque des relations (20), (22) et (24) qui fondent le calcul vectoriel, nous ne nous sommes appuyés sur aucune des conditions (13) à (15). D'où l'idée que, sans doute, les vecteurs et le calcul vectoriel sont intrinsèques par rapport à la classe de tous les repères, sans condition d'orthogonalité et sans qu'on exige rien des unités.

Pour s'assurer de cela, il suffit de vérifier que les formules (11) et (12) de changement de repère sont applicables dans cette classe de repères beaucoup plus générale. Nous laissons cette preuve en exercice.

Nous aboutissons ainsi à une conclusion importante : toutes les propriétés géométriques qui ne dépendent que de la somme des vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre sont intrinsèques dans la classe des repères les plus généraux. Ces propriétés sont regroupées sous la dénomination de *géométrie affine.*

Les propriétés qui sont intrinsèques pour la classe des repères satisfaisant à la condition (13) d'orthogonalité et à la condition (30) d'égalité des unités dans un même repère, sont connues comme formant la *géométrie euclidienne* ou *géométrie de la similitude.*

Enfin les propriétés qui sont intrinsèques pour la classe de repères la plus restreinte, celle qui exige les conditions (13) à (15), forment la *géométrie métrique.*

On dit que ces trois géométries sont *emboîtées*, car tout ce qui est affine est vérifié dans les géométries euclidienne et métrique, et tout ce qui est affine et euclidien est vérifié dans la géométrie métrique.

6.4 Des axes obliques

Pour illustrer ces résultats, donnons-nous deux repères non orthogonaux avec des unités différentes sur chaque axe. Une manière simple pour obtenir cela consiste à modifier la figure 3 pour remplacer le réseau de carrés par un réseau de parallélogrammes, ce qui est simple à faire à l'ordinateur. À ceci près, aucune des notations de la figure ne doit être changée.

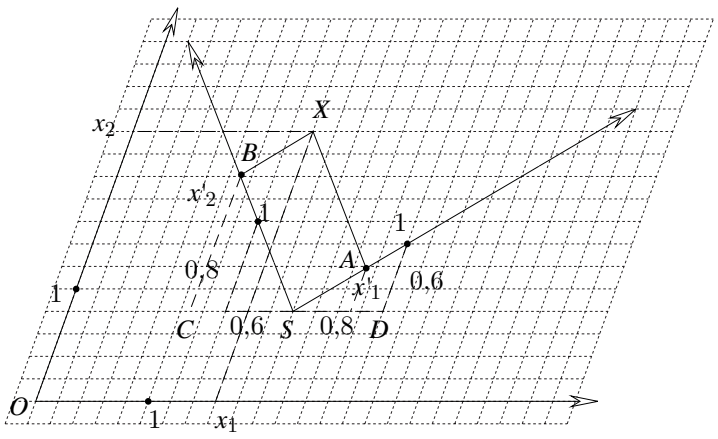


Fig. 14

Mais ceci nous amène une surprise. Aucun des points de la figure n'a changé de coordonnées. Les formules (11)

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}x'_1 + r_{12}x'_2 + s_1, \\ x_2 &= r_{21}x'_1 + r_{22}x'_2 + s_2. \end{aligned} \tag{11}$$

sont bien entendu toujours valables. Elles se particularisent en

$$x_1 = 2 + 0,8x'_1 - 0,6x'_2, \tag{9}$$

$$x_2 = 0,8 + 0,6x'_1 + 0,8x'_2. \tag{10}$$

Mais les formules (13) à (15), à savoir

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0, \tag{13}$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1, \tag{14}$$

$$r_{11}^2 + r_{22}^2 = 1, \tag{15}$$

sont, elles aussi, encore satisfaites !

Que se passe-t-il ? Nous voulions des repères non orthonormés et voilà que la relation d'orthogonalité et celle qui exprime l'égalité des unités sur tous les axes sont encore vérifiées. C'est choquant !

Il ne faut pas chercher l'explication trop loin. Ce qui diffère principalement d'un cas à l'autre, c'est qu'aux figures 3 et 4 le repère *de départ* était orthonormé. C'est donc dans un tel repère que les conditions (13) à (15) expriment l'orthogonalité des axes et l'égalité des unités dans les deux repères.

Dès que l'on passe à des axes obliques munis d'unités quelconques, les conditions (13) à (15) peuvent être satisfaites, mais peuvent aussi ne pas l'être, comme le montre la figure 15.

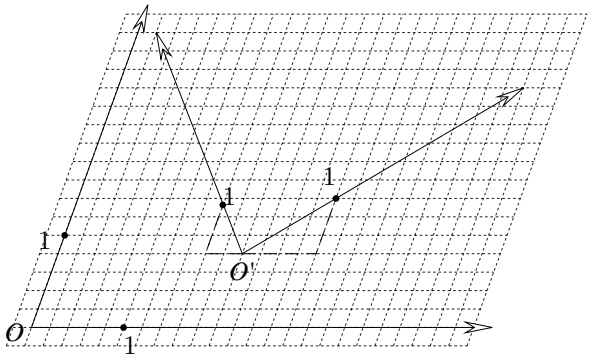


Fig. 15

Que conclure de cette situation intrigante ? Devant la difficulté que nous avons mise en évidence, nous pouvons prendre deux positions très différentes.

Première position. – Les axes des figures 3 et 4 sont perpendiculaires et portent tous les quatre la même unité. Mais d'abord, de quelle perpendicularité s'agit-il ? En regardant nos figures, nous voyons tout de suite qu'il s'agit de l'angle droit physique : c'est celui que l'on trouve en un lieu donné entre une verticale et une horizontale qui la coupe. C'est aussi celui que l'on obtient en pliant

soigneusement une feuille de papier en quatre. Nous avons des raisons de souhaiter que les angles droits soient ceux-là et seulement ceux-là.

Il en va de même pour l'égalité des unités portées sur les différents axes. Ces unités sont égales au sens où, si on porte physiquement le segment qui représente l'une d'elles sur chacune des autres, on arrive dans chaque cas à les faire coïncider.

Si nous *décidons* que, pour nous, la perpendicularité et l'isométrie des segments c'est cela, alors forcément, les conditions (13) à (15) n'expriment ces deux propriétés que si on les applique dans des axes de départ déjà orthonormés (au sens physique). Et si nos axes de départ sont autres, les conditions (13) à (15) expriment d'autres propriétés, qui resteraient à interpréter.

Deuxième position. – Mais nous pourrions prendre une autre décision : celle que, quel que soit le système d'axes de départ, les conditions (13) à (15) *définissent* la première la perpendicularité des nouveaux axes et les deux autres l'égalité des unités sur tous les axes. Dans cette perspective, on ne peut plus dire qu'un repère est orthonormé *absolument parlant*. Il faut dire au contraire qu'un repère est *orthonormé par rapport à un autre*. L'orthonormalité devient une propriété des couples de repères. Et en particulier alors, tout repère est orthonormé par rapport à lui-même, puisque les équations de passage sont du type

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, \\ x_2 &= x'_2, \end{aligned}$$

et qu'elles satisfont aux conditions d'orthonormalité (13) à (15).

Nous venons de voir que la relation « un repère est orthonormé par rapport à un autre » est réflexive. Elle est aussi symétrique et transitive. Donc c'est une équivalence.

Par conséquent, l'ensemble de tous les repères se répartit en classes d'équivalence, et au départ d'un repère quelconque, quelle que soit l'inclinaison (physique) de ses axes et les unités portées par ceux-ci, on peut définir une géométrie qui conserve entre autres les perpendiculaires et les distances. Bien entendu, il ne faut pas entendre par là les perpendiculaires et les distances au sens familier (ou physique), mais bien les perpendiculaires et les distances définies respectivement par les relations (27) et (30).

Éclairons ces constatations d'une autre manière. Ne parlons plus pendant un moment ni de plan, ni de droites, ni de points, et ne considérons plus que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x_1, x_2) de nombres réels. Installons-nous donc dans l'univers (l'espace ?) des nombres. Considérons ensuite tous les changements de variables définis par des équations du type (11), à savoir

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}x'_1 + r_{12}x'_2 + s_1, \\ x_2 &= r_{21}x'_1 + r_{22}x'_2 + s_2. \end{aligned} \tag{11}$$

avec la condition

$$r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} \neq 0.$$

Les relations intrinsèques pour ces changements seront dites *affines*. Nous avons ainsi défini une géométrie affine sans sortir du domaine des nombres.

Considérons maintenant l'ensemble des changements du même type, mais qui satisfont en outre aux conditions (13) à (15), à savoir

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0, \tag{13}$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1, \tag{14}$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1. \tag{15}$$

Ces changements de variables ne se mélangent pas aux autres : si on en compose deux, on obtient encore un changement du même type. Les relations et fonctions intrinsèques par ces changements moins généraux seront dites *métriques*. Nous avons ainsi défini une géométrie métrique sans sortir du domaine des nombres, et cette géométrie résulte d'une particularisation de la géométrie affine.

Le fond de l'histoire – mais nous ne développerons pas cette considération ici –, c'est que les changements de variables affines forment un groupe pour l'opération de composition, et que les changements de variables métriques forment un sous-groupe de ce groupe.

Là où les choses se compliquent, c'est lorsqu'on veut mettre ces changements de variables et ces relations en correspondance avec le plan Π de la géométrie ordinaire, celle où on parle de points et non plus de couples de nombres réels. Le fait est, comme nous l'avons vu, que la correspondance peut s'établir au moyen d'un repère de départ quelconque, et que tous les repères sont équivalents à cet égard. Il s'agit-là d'un authentique *principe de relativité*.

Il existe une infinité de géométries métriques, chacune définie par une classe de repères orthonormés les uns par rapport aux autres et tous munis de la même unité. Si on revient à l'univers physique, on retrouve les repères orthonormés au sens familier.

Une géométrie métrique construite au départ d'un repère non orthonormé au sens familier fournit des résultats assez étonnants pour le sens commun. C'est ainsi que la figure 16 montre deux triangles isométriques. Quant à la figure 17, elle exprime graphiquement le théorème de Pythagore.

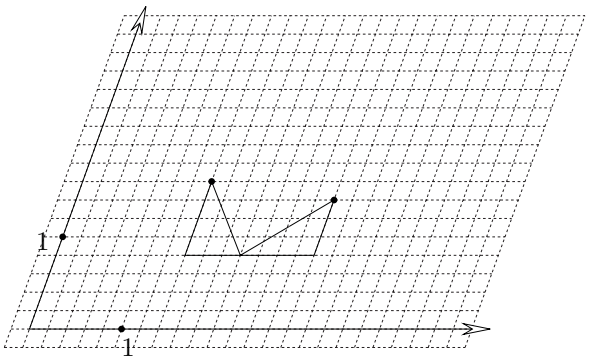


Fig. 16

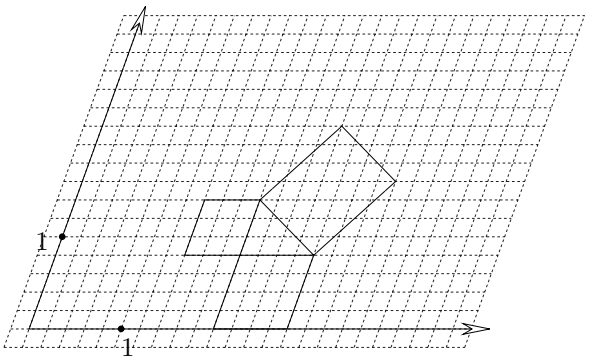


Fig. 17

Ces conclusions étonnantes s'éclairent si on se souvient de ce qui se passe à une dimension. Pour fixer un repère sur une droite, on peut choisir une unité arbitraire. Une fois ce choix fait, tout autre repère sera réputé normé s'il est construit sur la même unité. Bien entendu, à une dimension,

les angles n'interviennent pas. Ce que nous avons découvert ci-dessus, c'est qu'à deux dimensions comme à une, les repères sont relatifs. Mais à deux dimensions, les angles interviennent. Et la grande différence, c'est que la nature ne nous a pas donné une unité de longueur naturelle, qui s'impose plutôt que tout autre, tandis qu'elle nous a donné l'angle droit physique auquel notre imagination est très attachée.

Exercices.

1) Considérons quatre points P, Q, U, V disposés en parallélogramme comme à la figure 18, autrement dit les points P, Q, U, V vérifient la relation algébrique

$$\begin{aligned}(q_1 - p_1) + (u_1 - p_1) &= v_1 - p_1,\\ (q_2 - p_2) + (u_2 - p_2) &= v_2 - p_2.\end{aligned}$$

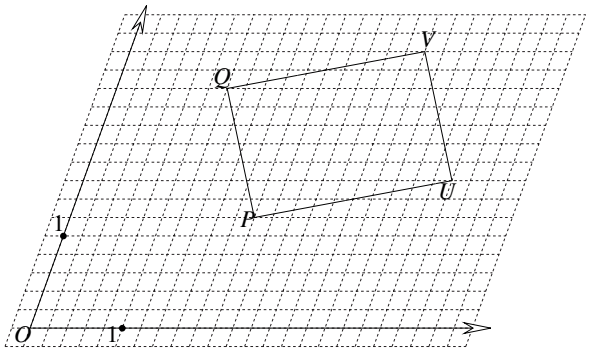


Fig. 18

Montrer que cette relation est intrinsèque pour n'importe quel changement de repère, autrement dit qu'elle relève de la géométrie affine.

2) Soient trois points P, Q, U vérifiant la relation algébrique

$$\begin{aligned}p_1 + q_1 &= u_1,\\ p_2 + q_2 &= u_2.\end{aligned}$$

Pour quel type de changement de repère cette relation est-elle intrinsèque ? Donner une interprétation géométrique du résultat.

7 Commentaires

7.1 Regard en arrière sur notre parcours

Pour apprendre ou enseigner les vecteurs, on peut songer à en parcourir la genèse historique. Mais on sait que celle-ci, à laquelle sont associés les noms d'Argand, Grassmann, Hamilton, Heaviside et beaucoup d'autres, a été extraordinairement longue et tortueuse. Les pionniers des vecteurs ont avancé sur un terrain accidenté, et l'historien ne peut qu'essayer de comprendre leur difficile progression, en s'interdisant tous les raccourcis que pourrait suggérer la théorie actuellement connue, mais inexistante alors. Ceci fait qu'en l'occurence l'histoire fidèlement relatée n'est pas appropriée à un premier enseignement.

Les exposés axiomatiques d'autre part, en s'accrochant à un petit nombre de propriétés de départ et en procédant par la seule déduction, occultent les questions qui ont engendré la théorie et les

difficultés essentielles qu'elle permet de vaincre. La pureté d'une théorie radicalement déductive est souvent aveuglante. Elle appelle un discours interprétatif laborieux.

Dans notre introduction aux vecteurs, nous n'avons suivi ni la voie de l'histoire fidèle, ni celle de l'axiomatique pure. Nous avons cherché une voie concise qui réponde au besoin de sens, qui montre à chaque étape, à chaque carrefour, les raisons qui l'ont fait choisir. S'agissant des vecteurs, on peut dire en schématisant quelque peu, que l'histoire est obscure mais pleine de sens, et que les exposés axiomatiques sont clairs mais souffrent d'une insuffisance de sens. Nous avons cherché ici à construire un exposé qui soit à la fois pourvu de sens et clair. Pourvu de sens parce qu'il évoque les questions motivantes et mobilise les démarches heuristiques autant que les preuves et les calculs, – et sur ce point il ressemble à l'histoire –, clair parce qu'il emprunte les chemins raccourcis qu'on peut aujourd'hui discerner dans l'histoire décantée.

Avons-nous réussi cette entreprise ? Le lecteur en jugera. Quoiqu'il en soit, pour approfondir notre réflexion sur les vecteurs tout en réfléchissant sur notre type de démarche, rappelons les épisodes principaux du parcours, en en soulignant au passage les significations heuristiques et théoriques.

Notre point de départ a été la géométrie analytique naïve en axes orthonormés. Cette géométrie répond au besoin d'étudier les figures par calcul. Mais elle impose l'usage d'un repère, en principe arbitraire.

Les figures géométriques que l'on veut étudier sont là avant qu'on introduise le repère. Pour les étudier analytiquement, on les représente par des relations algébriques. Mais une fois qu'elles sont ainsi représentées en coordonnées, à quoi voit-on encore qu'elles sont indépendantes du repère ? C'est là *une première question*.

Ensuite, après avoir représenté algébriquement des figures familières, connues au préalable, on peut partir de relations algébriques quelconques (et c'est bien une *curiosité* qui est apparue dans l'histoire). Chacune représente une figure. Mais parmi cette foule de figures, n'y en a-t-il pas qui changent quand le repère change ? C'est une *deuxième question*.

À ces questions répond la distinction entre relations intrinsèques ou non. Il existe des relations non intrinsèques (et c'est sans doute une *surprise*). Nous avons dit qu'elles étaient plutôt géographiques que géométriques. Elles sont attachées à un repère, à un lieu donné.

On compare volontiers le repère à un observateur, ou plus modestement à un instrument d'observation (muni de deux échelles de mesure). Il est naturel de chercher, comme nous venons de l'évoquer, quelles sont les propriétés géométriques qui ne dépendent pas du repère, celles qui ont de ce fait une valeur universelle[6].

Nous avons testé quelques figures élémentaires – quelques relations algébriques simples –, pour leur caractère intrinsèque. C'étaient les couples de points équipollents, puis un segment et un autre de même origine et même direction mais de longueur différente, et troisièmement la configuration triangulaire.

Ceci fait, la reconnaissance du caractère intrinsèque nous *poussait* à échapper aux coordonnées pour ne plus calculer qu'avec des points, éléments géométriques indépendants du repère. Pour y arriver, nous avons introduit *un calcul purement formel*, en nous réservant la possibilité de le justifier pleinement plus tard. C'est là une démarche heuristique, injustifiée sur le plan déductif, mais qu'on trouve plusieurs fois dans l'histoire des mathématiques[7].

La seule exigence de maintenir le sens du signe égal nous a alors conduits aux vecteurs libres. Nous avons été *forcés* d'accepter cet objet insolite. Ceci fait, le symbole pour le produit d'un

[6] Par raison de simplicité, nous n'avons pas évoqué la question de l'orientation des repères.

[7] Par exemple lors de l'introduction des nombres négatifs, des nombres complexes, du calcul symbolique de Heaviside.

vecteur par un nombre (en l'occurrence l'absence de symbole) et le symbole pour la somme, non seulement prenaient d'office une signification nouvelle parce qu'ils étaient appliqués à des objets nouveaux, mais cette signification nous était imposée, et nous arrivions à décrire ces opérations géométriquement (c'est-à-dire sans plus retourner aux repères). Et pour la somme, nous avions même deux constructions équivalentes. Nous tenions donc les éléments d'un calcul intrinsèque appliqué aux vecteurs libres.

Le pas suivant a consisté à *nous libérer*, dans la notation adoptée pour les vecteurs, de toute référence à un couple de points représentant celui-ci. Le vecteur, ensemble infini de couples de points équipollents, se voyait ainsi attribuer un symbole simple, reconnaissant son existence d'objet mathématique indépendant.

Bien entendu, nous devions alors nous poser la *question* des règles de ce nouveau calcul. Heureuse *surprise*, toutes les règles que nous espérions (parce qu'elles nous étaient familières dans le cas des nombres) se trouvent d'office vérifiées. Elle sont démontrables par retour aux coordonnées, mais aussi directement par la géométrie élémentaire. Pour ceux qui le connaissaient déjà, un espace vectoriel était ainsi reconstruit.

Tout cela par la vertu du seul signe « = ». Mais le vecteur libre avec son infinité de segments est un monstre. D'où la *question* : pourquoi ne pas chercher à construire un calcul géométrique au départ des seuls segments ? Cette idée nous a conduits à une première *déconvenue* : avec la somme des segments par enchaînement, on n'obtient pas de règles de calcul commodes, car la somme n'est pas définie assez souvent. Par contre une *bonne surprise* avec la somme par la règle du parallélogramme : si on ne considère que les segments issus d'un seul point, toutes les règles de calcul sont réalisées. On retrouve un autre espace vectoriel. *Malheureusement*, pour faire de la géométrie, le lien obligé à un point est une contrainte gênante.

Ceci fait, nous voyions comment se comportent quelques relations simples dans des changements de repère. Mais certaines propriétés géométriques, par exemple la perpendicularité et la distance, s'expriment par des relations ou des fonctions que nous n'avions pas encore examinées. D'où la *question* du caractère intrinsèque de ces dernières.

Or nous nous sommes aperçus que la perpendicularité et la distance étaient bien intrinsèques pour la catégorie de repères que nous avions choisie, à savoir celle des repères orthonormés munis d'une même unité de longueur. Mais *notre attention était attirée* sur le fait que, pour établir ce caractère intrinsèque, nous devions nous appuyer sur les conditions d'orthonormalité. *Observation curieuse*, car pour les relations étudiées jusque-là, il n'en avait rien été.

D'où une *nouvelle question* : ne pouvions-nous pas nous attendre à ce que l'équipollence des segments, la multiplication des segments par un nombre et la configuration triangulaire, soient intrinsèques pour des changements de repères non orthonormés ? Et supposons même que nous n'ayons pas fait cette observation sur le rôle des conditions d'orthonormalité. Après tout, pour donner des coordonnées aux points, un repère oblique muni d'unités quelconques fait aussi bien l'affaire qu'un repère orthonormé. Et donc il est assez *naturel* de *se demander* jusqu'où on peut fonder la géométrie si on considère d'emblée tous ces repères.

La réponse à cette question ne nous demandait pour commencer qu'un *simple travail de vérification*. Et nous avons eu la *satisfaction* de constater que tout ce que nous avions démontré et défini pour des relations du premier degré pouvait être conservé sans changement.

Mais une *grosse surprise* nous attendait. En effet, pour le premier exemple que nous avions choisi montrant le passage d'un repère oblique à un autre, celui de la figure 14, nous constations que les conditions d'orthonormalité étaient vérifiées. D'où *une véritable (re)découverte*, à savoir que l'orthonormalité n'est la propriété d'aucun repère particulier, mais bien qu'elle est une relation

entre deux repères. L'angle droit n'était-il donc pas ce que nous pensions ? C'était une nouvelle *question*.

Enfin, voyant que certaines relations algébriques (certaines propriétés) résistaient à certains changements de repère, mais non à tous, nous avons cherché pour chacune des propriétés de base étudiées jusque-là, à quelle classe de changements de repère elle résistait. Cela nous a permis de définir la géométrie affine, la géométrie des similitudes et la géométrie métrique.

Nous pouvons certes conclure qu'aller à la recherche des vecteurs n'était ni un cheminement déductif, ni une démarche de routine.

7.2 Le vecteur : un monstre commode !

Lorsque nous pensons à la géométrie au sens le plus ordinaire, nous voyons au départ des points, des droites (et des plans si nous considérons la troisième dimension). Or dans notre exposé, il y avait bien des points au départ, mais nous n'avons pas évoqué les droites. Même la condition d'alignement concernait une relation entre trois points et ne s'appuyait pas sur la connaissance des droites. Ce n'est pas un mal car on peut considérer, du point de vue du bon sens, que la droite est un monstre tellement grand qu'il est difficile à imaginer. Qui plus est, au fur et à mesure de notre exposé, les points sont passés au deuxième plan, et ont cédé la place aux vecteurs libres[8].

D'un certain point de vue, les vecteurs libres sont moins monstrueux que les droites, car on les construit avec des segments, qui sont des figures bornées. Encore qu'il existe des segments aussi grands que l'on veut... Mais si le vecteur échappe jusqu'à un certain point au handicap de la longueur infinie, par contre il est monstrueux parce qu'il est infini du côté des nombres : chaque vecteur libre est un ensemble infini de segments. Que gagne-t-on à passer ainsi d'une monstruosité à une autre ?

Un élément de réponse est assez clair : avec les vecteurs on peut calculer, avec les droites non. Avec les points représentés par des coordonnées on peut aussi calculer, mais les coordonnées ne sont pas intrinsèques, et la géométrie analytique conduit souvent à calculer en aveugle. Le vecteur est libre d'abord parce qu'en le créant, on l'a libéré des coordonnées. Mais il est doublement libre, parce qu'on l'a aussi libéré des couples de points. En fait – nous l'avons dit à suffisance –, si on devait le voir strictement comme l'ensemble de tous les couples de points équipollents à un couple donné, un seul vecteur noircirait tout le plan et on n'y verrait rien du tout. Mais l'imagination de l'être humain a des ressources indispensables à la pensée mathématique. On peut voir le vecteur comme une infinité seulement potentielle de couples de points, se dire qu'*on peut* représenter un tel couple n'importe où, mais qu'on n'est pas obligé de le faire. Le vecteur libre est partout, il a le don d'ubiquité, mais on le manifeste où on veut. Le plus intéressant est de le voir au bon endroit dans la figure que l'on étudie. Il y *apparaît* comme un segment orienté, une flèche que l'on combine à d'autres flèches, en général sans perdre de vue ce que l'on fait, ni ce que l'on veut faire. Et on conserve par devers soi la certitude que ces pseudo-flèches ont un statut théorique qui légitime ce que l'on fait. Mais on sait que dans beaucoup de cas, à la fin il va falloir revenir aux nombres. Face à une situation géométrique donnée, et comme l'écrivent G. Noël *et al.* [1998], on réalise un *véritable plan de calcul* en allant placer les vecteurs là où ils manifestent le plus clairement les propriétés données, en les combinant par calcul pour arriver au résultat escompté, et finalement en les projetant dans un repère choisi de façon à minimiser les calculs lors du nécessaire retour au numérique.

[8] Les vecteurs ont la vocation de se substituer totalement aux points comme termes de base de la géométrie. En effet, les exposés modernes de la géométrie commencent souvent comme ceci : soit un espace vectoriel sur un corps. Et à partir de là, on construit la notion d'espace affine, ce qui ramène l'imagination vers les points. Pour un bel exemple de cela, proposé pour les classes avancées du secondaire, voir E. Artin [1960].

Tant qu'à parler du vecteur tel que nous le percevons maintenant, notons enfin qu'il n'est pas un concept isolé, et c'est là sans doute une observation d'une grande portée pour l'enseignement. Nous l'avons vu : le vecteur est né dans le champ des coordonnées, des changements de repère, de la recherche du caractère intrinsèque, des géométries affine, euclidienne et métrique. Il est vrai que face à un problème géométrique, on peut choisir de le traiter, selon l'avantage que l'on y voit, analytiquement, vectoriellement, par transformations... Mais d'après ce que nous avons vu, il y aurait une perte de sens à décider que, dans l'apprentissage de la géométrie, on privilégiera l'analytique, ou les transformations, ou les vecteurs.

7.3 Et sur le plan philosophique ?

Notre étude a abouti à des conclusions mathématiques précises. Mais elle provoque aussi au passage plusieurs questions de nature philosophique. En voici deux, parmi les plus visibles. Le lecteur que la philosophie ennuie peut sauter cette section.

Premièrement, nous avons importé un calcul formel *dans l'univers des différences de points* : c'était un parachutage de symboles sur des choses dont nous ne savions pas a priori si elles pouvaient accepter cette violence. Or elles ne l'acceptaient pas. Le signe « = » était immédiatement mis en cause. Ou bien nous maintenions que notre calcul portait sur des différences de points, mais alors le signe « = » tel que nous l'avions introduit était absurde ; ou bien nous maintenions le sens habituel du signe « = », mais alors il nous fallait redéfinir ce sur quoi portait notre calcul. C'est ce que nous avons fait. Un *être* nouveau est né là. Lorsque le signe « = » est en cause, on touche à une question ontologique.

Et quelle est la nature de cet être nouveau ? C'est un être collectif, une collection infinie des choses de départ (les couples de points). Pourquoi ? C'est étrange, mais cela s'explique sans doute. Un couple de points est une chose particulière, trop particulière. On voudrait qu'il demeure lui-même quand on le déplace (par équipollence), comme une chaise ne cesse pas d'être elle-même lorsqu'on la déplace. Mais un couple de points déplacé est un *autre* couple de points. Notre géométrie familière ne nous permet pas de telles identifications. Des points distincts sont des points distincts. Quelle est la solution ? C'est de dire que notre nouvel objet sera, non pas un couple de points déplaçable à gré, puisque nous ne pouvons pas faire cela, mais l'ensemble de tous les couples de points équipollents à un couple donné. L'objectivation, la fabrication du nouvel objet est une *collectivisation*. Le sens commun en prend un coup. Tant pis s'il s'y trouve assez d'avantages par ailleurs[9].

Un autre point intrigant de notre étude concerne les repères orthonormés, et plus généralement la géométrie métrique. Nous vivons dans un monde où les angles droits sont aisément reconnaissables et où nous pouvons aller mesurer des longueurs n'importe où et dans n'importe quelle direction, à l'aide d'une règle graduée indéformable. Mais réfléchissons un moment : comment savons-nous que notre règle est indéformable ? Est-ce parce que nous pouvons vérifier qu'elle ne change pas de longueur, en nous servant d'une *autre règle* ? Mais alors, comment vérifier cette dernière ? Nous sommes dans l'impasse. De deux choses l'une : ou bien notre règle change de longueur, mais nous ne pourrons jamais le vérifier, ou bien la question n'a pas de sens.

[9] Ce procédé de collectivisation n'est pas propre aux mathématiques. Par exemple, M. Merleau-Ponty [1945] observe que notre perception visuelle ou tactile d'un objet quelconque est essentiellement variable, instable, et qu'elle dépend des situations de l'objet par rapport à nous. Il se demande alors ce qui en fonde le caractère objectif, quelle est cette chose stable, invariable, à laquelle nous identifions l'objet. Et sa réponse est qu'il s'agit de *l'ensemble structuré de ses apparences possibles*. En passant des apparences particulières et fortuites à l'ensemble des apparences connues par l'expérience, il échappe au caractère particulier et fortuit. Cet ensemble d'apparences est partagé (ou au moins partageable) par tous les êtres humains. Il est objectif. Il s'agit bien ici aussi d'un procédé de collectivisation. Pour échapper au particulier, on regroupe adéquatement assez de choses particulières.

Examinons les choses un peu autrement. Dans le plan qui nous est familier, à chaque repère même oblique et muni d'unités quelconques, nous pouvons faire correspondre un modèle de la géométrie métrique. Dans un tel modèle, tous les repères sont orthogonaux les uns par rapport aux autres, bien que nous ne leur trouvions, *par rapport à nos critères familiers*, ni angles droits, ni mêmes unités sur les axes. Mais supposons que débarque chez nous un arpenteur venu d'ailleurs avec ses instruments. Et supposons que son équerre – vue par nous –, change son angle principal de sorte qu'il déclare droits certains angles que nous ne voyons pas tels. Et supposons que sa règle graduée – vue par nous –, change de longueur lorsqu'il la tourne, de sorte en particulier qu'il vérifie l'égalité des unités sur ses deux axes. Cet arpenteur estimera que nos repères orthonormés ne le sont pas. Aura-t-il raison ? Une commission d'enquête de l'Académie des Sciences pourra-t-elle trancher ? Qui nous dit qu'il existe bien dans la nature un prototype d'angle droit différent de tous les autres ? Un angle qui serait droit par essence ? Et non pas par rapport à d'autres ? Nous croyons volontiers que les choses existent par elle-mêmes avec leurs propriétés familières, et que nous les *percevons* objectivement. Le malheur veut que, dès que nous voulons les *penser*, nous sommes obligés de les penser par rapport à d'autres, de les expliquer en nous appuyant sur d'autres. Mais est-ce bien un malheur ? Ou est-ce seulement la nature de l'esprit qui veut que l'on pense non les choses, mais les relations ? Platon pensait que les choses existaient dans un paradis des idées, lieu de la réalité éternelle. Mais au cours des siècles, les mathématiques ont dit de moins en moins ce qu'étaient les choses, pour se concentrer sur leurs relations, pour étudier des structures. Elles ont en outre contribué, au cours du XXe siècle, à l'émergence d'un courant structuraliste dans des disciplines aussi diverses que la linguistique, l'anthropologie et l'analyse de textes en littérature.

8 Appendice : les transformations

Nous avons introduit les géométries affine, euclidienne et métrique par le truchement des changements de repère et des relations intrinsèques. Or souvent on aborde ces mêmes théories en parlant de transformations du plan et de relations ou de propriétés invariantes pour des tranformations. Montrons maintenant que les deux approches sont équivalentes. En fait, même si changer de repère et transformer le plan sont deux opérations très différentes dans la pratique et pour l'intuition, elles se correspondent parfaitement, comme nous allons le montrer.

Reprenons le changement de repère illustré par la figure 3 et exprimé par les équations (9) et (10). Dans cette situation, il y a *un* plan (et *un seul*) et deux façons d'en coder les points.

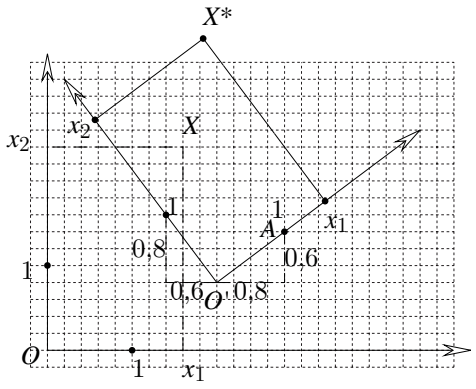


Fig. 19

Regardons maintenant la figure autrement (cf. figure 19). Imaginons que nous fassions bouger le premier repère et qu'il entraîne avec lui tous les points du plan. Envoyons le sur le second repère.

Ainsi tout le plan est déplacé. Et un point X de coordonnées (x_1, x_2) dans le premier repère est envoyé sur le point X^* de coordonnées également (x_1, x_2) dans le second (qui coïncide avec le premier déplacé). Nous venons de définir ce que l'on appelle techniquement un *déplacement* du plan.

Exprimons maintenant, dans le premier repère, les coordonnées (x_1^*, x_2^*) de X^* en fonction de celles (x_1, x_2) de X. En considérant tout d'abord les abscisses, nous voyons que

$$x_1^* = s_1 + (a_1 - s_1) + (x_1^* - a_1). \tag{34}$$

En remplaçant s_1 ainsi que les différences $(a_1 - s_1)$ et $(x_1^* - a_1)$ par leurs valeurs calculées de la même façon qu'à la section 3, nous obtenons

$$x_1^* = 2 + 0,8x_1 - 0,6x_2. \tag{35}$$

Et nous obtenons de même pour les ordonnées

$$x_2^* = 0,8 + 0,6x_1 + 0,8x_2. \tag{36}$$

De manière générale, les formules qui traduisent un tel déplacement s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1^* &= r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + s_1, \\ x_2^* &= r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + s_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Ces égalités sont de la même forme que (11), à ceci près qu'on y trouve aux premiers membres les coordonnées (dans le premier repère) du point image X^*, et aux seconds membres celles du point X de départ.

Nous appellerons le déplacement du plan que nous venons de définir ainsi *déplacement associé au changement de repère*.

Démontrons maintenant de manière générale l'identité de forme des équations de changement de repère et des équations du déplacement associé.

Pour cela considérons d'abord le changement de repère. On part d'un point quelconque P du plan. Soient $r(P)$ ses coordonnées dans le premier repère et $r'(P)$ ses coordonnées dans le second. Comment passe-t-on de $r'(P)$ à $r(P)$? On a

$$r(P) = r \circ r'^{-1} \circ r'(P)$$

et donc la fonction qui envoie $r'(P)$ sur $r(P)$ est $r \circ r'^{-1}$. Nous savons par ailleurs que cette fonction est décrite par les équations (6), mais en l'occurrence, cela n'a pas d'importance.

Regardons maintenant le déplacement. On part d'un point P. Ses coordonnées dans le premier repère sont $r(P)$. Mais, par définition même du déplacement, l'image P^* de P est le point qui a $r(P)$ pour coordonnées dans le deuxième repère. Donc on a

$$P^* = r'^{-1} \circ r(P).$$

Prenons l'image de chacun des deux membres de cette équation par la fonction r ou, en d'autres termes, passons aux coordonnées dans le premier repère. Il vient

$$r(P^*) = r \circ r'^{-1} \circ r(P),$$

ou encore

$$r(P^*) = (r \circ r'^{-1}) \circ r(P).$$

Ainsi, la fonction qui envoie $r(P)$ sur $r(P^*)$ est bien également $r \circ r'^{-1}$.

Pour expliquer la notion de relation invariante, partons de l'exemple de la relation (3), à savoir

$$(q_1 - p_1)(u_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(u_1 - p_1) = 0. \tag{3}$$

En nous plaçant dans le *premier* repère, nous avons construit les triplets de points satisfaisant à cette relation (voir figure 2). En nous plaçant dans le *second*, nous pouvons construire les triplets satisfaisant à (19). Mais comme (3) et (19) sont de la même forme, ces triplets ne seront rien d'autre que les triplets associés au premier repère, mais transportés un peu plus loin, entrainés dans le déplacement qui a porté le premier repère sur le second (voir figure 20).

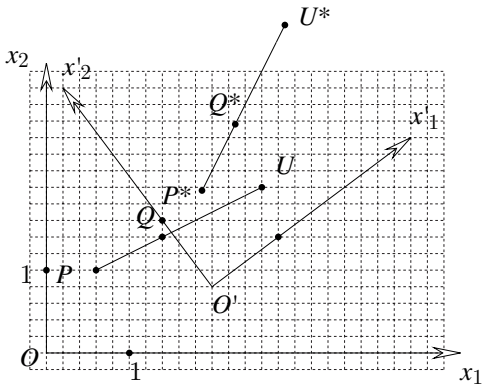


Fig. 20

D'autre part, nous savons aussi que les triplets de points satisfaisant à (19) sont les triplets construits dans le premier repère, mais vus du second, c'est-à-dire exprimés au moyen des coordonnées dans le second repère. Et par conséquent, l'ensemble des triplets transportés est identique à l'ensemble des triplets de départ. Nous pouvons donc remplacer dans (3) les coordonnées de départ par les coordonnées des points déplacés, ce qui nous donne

$$(q_1^* - p_1^*)(u_2^* - p_2^*) - (q_2^* - p_2^*)(u_1^* - p_1^*) = 0. \tag{38}$$

Nous pouvons confirmer ce résultat de la manière suivante. Passons dans (3) des coordonnées de départ aux coordonnées des points déplacés, ce qui se fait grâce aux équations (37). Nous retrouvons l'égalité (38). Celle-ci montre donc bien que les points déplacés satisfont à la même relation que les points de départ. D'une telle relation, on dit qu'elle est *invariante*.

Le type de raisonnement que nous venons de faire peut être appliqué à une relation quelconque. Et donc nous avons montré qu'*une relation est invariante si et seulement si elle est intrinsèque*.

À un changement de repère tout à fait général (avec des axes obliques) caractérisé par les équations (11), est associé une transformation du plan caractérisée par les mêmes équations. Une telle transformation est dite *affine*. Les relations intrinsèques par les changements de repère quelconques sont donc des invariants pour les transformations affines. Par exemple, on dira que les transformations affines conservent l'alignement de trois points, l'équipollence de deux segments orientés, ou le rapport des longeurs de deux segments orientés parallèles.

Si par contre l'on passe d'un repère orthonormé à un autre en gardant la même unité de longueur, les déplacements associés sont des isométries. Nous avons donc vu que la distance entre deux points est conservée par isométrie. À la section 6.4, nous avons également remarqué que la perpendicularité occupait une position inermédiaire, puisqu'elle est intrinsèque pour une classe de changements de repère correspondant à la géométrie euclidienne. Les transformations associées à ces changements de repère sont des similitudes, et la perpendicularité est donc un invariant des similitudes.

Annexe VII

Extraits de textes originaux

CHAP. LXVI.

Of Negative Squares, *and their* Imaginary Roots *in Algebra.*

. . .

These *Imaginary* Quantities (as they are commonly called) arising from the *Supposed* Root of a Negative Square, (when they happen,) are reputed to imply that the Case proposed is Impossible. And so indeed it is, as to the first and strict notion of what is proposed. For it is not possible, that any Number (Negative or Affirmative) Multiplied into itself, can produce, (for instance) -4. Since that Like Signs (whether $+$ or $-$) will produce $+$; and therefore not -4.

But it is also Impossible, that any Quantity (though not a Supposed Square) can be *Negative*. Since that it is not possible that any *Magnitude* can be *Less than Nothing*, or any *Number Fewer than None*.

Yet is not that Supposition (of Negative Quantities,) either Unuseful or Absurd; when rightly understood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity less than nothing: Yet, when it comes to a Physical Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were $+$; but to be interpreted in a contrary sense.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and than to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? I find (by Subducting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5-2=+3$.)



But if, having Advanced 5 Yards to B, he thence Retreat 8 Yards to D; and it be then asked How much he is Advanced when at D, or how much Forwarder then when he was at A: I say -3 Yards. (Because $+5-8=-3$.) That is to say, he is advanced 3 Yards less than nothing.

Which in propriety of Speech, cannot be, (thince there cannot be less than nothing.) And therefore as to the Line AB *Forward*, the case is Impossible.

But if (contrary to the Supposition,) the Line from A, be continued *Backward*, we shall find D, 3 Yards *Behind* A. (Which was presumed to be *Before* it.)

And thus to say, he is *Advanced* -3 Yards; is but what we should say (in ordinary form of Speech), he is *Retreated* 3 Yards; or he wants 3 Yards of being so Forward as he was at A.

Which doth not only answer Negatively to the Question asked. That he is not (as was supposed,) Advanced at all: But tells moreover, he is so far from being advanced, (as was supposed) that he is Retreated 3 Yards; or that he is at D, more Backward by 3 Yards, than he was at A.

And consequently -3, doth as truly design the Point D; as $+3$ designed the Point C. Not Forward, as was supposed; But Backward from A.

So that $+3$, signifies 3 Yards Forward; and -3, signifies 3 Yards Backward: But still in the same Streight Line. And each designs (at least in the same Infinite Line,) one Single Point: And but one. And thus it is in all Lateral Equations; as having but one Single Root.

Now what is admitted in Lines, must on the same Reason, be allowed in Plains also.
As for instance: Supposing that in one Place, we Gain from the Sea, 30 Acres, but Lose in another Place, 20 Acres: If it be now asked, How many Acres we have gained upon the whole: The Answer is, 10 Acres, or +10. (Because of $30 - 20 = 10$.) Or, which is all one 1600 Square Perches. (For the *English* Acre being Equal to a Plain of 40 Perches in length, and 4 in breadth, whose Area is 160; 10 Acres will be 1600 Square Perches.) Which if it lye in a Square Form, the Side of that Square will be 40 Perches in length; or (admitting of a Negative Root,) −40.
But if then in a third Place, we lose 20 Acres more; and the same Question be again asked, How much we have gained in the whole; the Answer must be −10 Acres. (Because $30-20-20 = -10$.) That is to say, The Gain is 10 Acres less than nothing. Which is the same as to say, there is a Loss of 10 Acres: or of 1600 Square Perches.
Anf hitherto, there is now new Difficulty arising, nor any other Impossibility than what we met with before, (in supposing a Negative Quantity, or somewhat Less than nothing:) Save only that $\sqrt{1600}$ is ambiguous; and may be +40, or −40. And from such Ambiguity it is, that Quadratick Equations admit of Two Roots.
But now (supposing this Negative Plain, −1600 Perches, to be in the form of a Square;) must not this Supposed Square be supposed to have a Side? Anf if so, What shall this Side be?
We cannot say it is 40, nor that it is −40. (Because either of these Multiplyed into itself, will make +1600; not −1600).
But thus rather, that it is $\sqrt{-1600}$, (the Supposed Root of a Negative Square;) or (which is Equivalent thereunto) $10\sqrt{-16}$, or $20\sqrt{-4}$, or $40\sqrt{-1}$.
Where $\sqrt{}$ implies a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity. For like as $\sqrt{b\,c}$ signifies a Mean Proportional between $+b$ and $+c$; or between $-b$, and $-c$; either of which, by Multiplication, makes $+bc$:) So doth $\sqrt{-b\,c}$ signify a Mean Proportional between $+b$ and $-c$, or between $-b$ and $+c$; either of which being Multiplied, make $-bc$. And this as to Algebraick consideration, is the true notion of such Imaginary Root, $\sqrt{-bc}$.

Ces quantités, dites *imaginaires*, provenant des racines supposées de carrés négatifs, sont censées impliquer que la situation est impossible. Et il en est effectivement ainsi si l'on s'en tient strictement à ce qui est communément admis. Car il est impossible qu'un nombre (négatif ou positif), multiplié par lui-même puisse produire (par exemple) -4, en vertu de la règle des signes. Mais il est tout aussi impossible qu'une quantité quelconque, même non supposée carrée, puisse être négative. En effet, il n'est pas possible qu'une grandeur puisse être *moindre que rien*, ou qu'un nombre soit *plus petit que zéro*.

Mais cette supposition (de l'existence de quantités négatives) n'est ni inutile, ni absurde, lorsqu'elle est bien comprise. Et si, du point de vue de la notation algébrique pure, cela amène une quantité inférieure à zéro, lorsqu'on l'applique à la physique, elle représente une quantité tout aussi réelle que si le signe était $+$, mais il faut l'interpréter en sens contraire.

Ainsi, par exemple : supposons qu'un homme ait avancé (de A vers B) de 5 yards, et qu'ensuite, il ait reculé (de B vers C) de 2 yards. Si on demande de combien il a avancé (quand il est en C), ou à combien de yards il est devant A, je trouve (en soustrayant 2 de 5) qu'il a avancé de 3 yards (parce que $5 - 2 = 3$).



Mais si, ayant avancé de 5 yards vers B, il recule ensuite de 8 yards vers D, et qu'on demande de combien il a avancé quand il est en D, ou combien plus en avant il est de A, je dis -3 yards (parce que $5 - 8 = -3$). C'est-à-dire qu'il a avancé de 3 yards de moins que rien.

Ce qui, du point de vue de la justesse de l'expression ne peut être, puisqu'il ne peut exister moins que rien. Ainsi, si on se limite à la ligne AB vers l'*avant*, la situation est impossible.

Mais si (contrairement à notre supposition) la ligne partant de A peut être prolongée vers l'arrière, nous trouverons D 3 yards derrière A (ce qui est supposé être avant lui).

Et donc, dire qu'il a *avancé* de -3 yards représente ce que nous exprimerions, en langage ordinaire, par : il a reculé de 3 yards, ou il manque 3 yards pour être aussi en avant qu'il l'était en A.

Ceci ne répond pas seulement par un nombre négatif à la question posée, car il n'a pas (comme on l'avait supposé) avancé du tout, mais au contraire, il est si loin d'avoir avancé, qu'il a reculé de 3 yards, et qu'il est en D, 3 yards plus en arrière que lorsqu'il était en A.

Et, par conséquent, -3 désigne le point D aussi réellement que $+3$ désigne le point C. Non pas en avant, comme on l'avait supposé, mais en arrière de A. Ainsi, $+3$ signifie 3 yards en avant et -3, 3 yards en arrière, mais toujours sur la même ligne droite. Et chacun désigne (en tout cas sur la même ligne droite infinie) un et un seul point. Et il en va ainsi pour toute équation du premier degré qui n'admet qu'une seule racine.

Maintenant, ce qu'on admet sur les droites doit, pour la même raison, être admis dans les plans. Et par exemple, supposons qu'en un endroit, nous gagnons 30 acres sur la mer, mais que nous en perdons 20 en un autre lieu, et qu'on demande combien d'acres nous avons gagné en tout ; la réponse est 10 acres ou +10 (parce que $30 - 20 = 10$). Ceci représente aussi 1600 perches carrées (car l'acre anglais est une surface rectangulaire de 40 perches de longueur sur 4 perches de largeur dont l'aire est 160 ; 10 acres valent donc 1600 perches carrées).
Si cette surface est un carré, son côté sera long de 40 perches ou (si on admet la racine négative) -40. Mais si en un troisième endroit, on perd 20 acres de plus, et qu'on pose la même question : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être -10 acres (car $30 - 20 - 20 = -10$) c'est-à-dire que le gain est de 10 acres moins que rien. Ce qui revient à dire qu'il y a une perte de 10 acres ou de 1600 perches carrées.
Et de là naît une nouvelle difficulté, qui n'est pas plus une impossibilité que celle que nous avons rencontrée précédemment (en supposant une quantité négative ou moindre que rien). Ne considérer que $\sqrt{1600}$ est ambigu, cela peut être 40 ou -40. Et de cette ambiguïté, il ressort que les équations quadratiques ont deux racines.
Maintenant (en supposant que cette surface négative -1600 perches a la forme d'un carré), ne doit-on pas admettre que ce supposé carré possède un côté ? Et si oui, que sera ce côté ?
Nous ne pouvons pas dire qu'il vaut 40, ni -40 (parce que l'une ou l'autre de ces valeurs, multipliée par elle-même, donnera +1600, pas -1600). Mais plus vraisemblablement, sa valeur est $\sqrt{-1600}$ (la supposée racine d'un carré négatif) ou (ce qui est équivalent) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ suggère une moyenne proportionnelle entre une quantité positive et une quantité négative. Car, de la même manière que $\sqrt{bc}$ représente une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ et $-c$ (dont le produit vaut bc dans les deux cas), $\sqrt{-bc}$ indique une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$, ou entre $-b$ et $+c$ (dont le produit vaut $-bc$). Et ceci, sur le plan algébrique, fournit la véritable interprétation d'une telle racine imaginaire $\sqrt{-bc}$.

6. Si l'on opère sur le symbole $a+b\sqrt{-1}$ par le moyen du facteur $\sqrt{-1}$, on obtient $-b+a\sqrt{-1}$; ce résultat établit que les coordonnées x, y du point représenté sont respectivement $-b$ et a ; mais, d'après la seconde manière de voir, $-b+a\sqrt{-1}$ représente la droite menée de l'origine au point $(-b, a)$. La longueur de cette droite est demeurée égale à $\sqrt{a^2+b^2}$, mais la direction de la droite fait avec l'axe des x un angle égal à $\text{tang}^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$, angle qui dépasse de 90° l'angle $\text{tang}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, comme il est facile de s'en assurer.

7. Le théorème de Moivre nous aidera à avancer d'un pas de plus en avant dans la voie. En effet, si nous multiplions, non plus par $\sqrt{-1}$ mais par un facteur plus général égal à $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, ce facteur, opérant sur une droite quelconque dans le plan des xy, aura pour effet de la faire tourner, dans le sens positif, d'un angle égal à α. [On s'aperçoit du reste que le facteur $\sqrt{-1}$ employé en premier lieu ne représente qu'un cas particulier de $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, correspondant à $\alpha=\frac{1}{2}\pi$.]

Nous aurons ainsi, en effectuant la multiplication d'après les règles ordinaires,

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(a+b\sqrt{-1})=a\cos\alpha-b\sin\alpha+\sqrt{-1}(a\sin\alpha+b\cos\alpha).$$

On s'aperçoit, par la forme même du résultat, que le produit indique l'effet de la rotation d'un angle α, et l'on peut vérifier le fait en faisant tourner les axes de coordonnées d'un angle α (mais dans le sens contraire), à l'aide des formules connues pour le changement d'axes. Nous pouvons aussi vérifier le fait de la rotation de la manière suivante : en premier lieu, la longueur sera

$$[(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

ce qu'elle était auparavant ; en second lieu, l'inclinaison sur l'axe des Ox est égale à

$$\text{tang}^{-1}\left(\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{a\cos\alpha-b\sin\alpha}\right)=\text{tang}^{-1}\frac{\left(\text{tang}\,\alpha+\frac{b}{a}\right)}{\left(1-\frac{b}{a}\text{tang}\,\alpha\right)}=\alpha+\text{tang}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

8. Par ce qui précède nous pouvons maintenant nous rendre compte du sens de la formule

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^m=\cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha.$$

En effet, le premier membre représente un opérateur qui produit m rotations successives, d'un angle α chacune ; le second membre exprime l'opérateur d'une rotation unique d'un angle $m\alpha$ d'un seul trait.

Arrivés à ce point de la question, nous avons intérêt à constater, par anticipation, qu'un quaternion est généralement susceptible d'être mis sous la forme

$$N(\cos\theta+\varpi\sin\theta),$$

N étant une quantité purement numérique, θ un angle réel et ϖ répondant à

$$\varpi^2=-1.$$

Cette forme de représentation d'un quaternion et les formes d'expression qui entrent dans la formule de Moivre ont entre elles une grande ressemblance ; mais il y a entre elles une différence essentielle (et c'est en elle que réside le point capital de l'invention de Hamilton), savoir que ϖ n'est pas l'équivalent de l'élément algébrique $\sqrt{-1}$, mais qu'il représente l'unité de longueur *dirigée dans une direction* DONNÉE *quelconque dans l'espace.*

Two right lines are added if we unite them in such a way that the second line begins where the first one ends, and then pass a right line from the first to the last point of the united lines. This line is the sum of the united lines.
For example, if a point moves forward three feet and backward two feet, the sum of these two paths is not the first three and the last two feet combined ; the sum is one foot forward. For this path, described by the same point, gives the same effect as both the other paths.

Questo metodo soddisfa un desiderio del Carnot di trovare un algoritmo, che rappresenti nello stesso tempo e la grandezza e la posizione delle varie parti di una figura ; ne risultano quindi, per via diretta, eleganti e semplici soluzioni grafiche dei problemi geometrici. Il metodo delle equipollenze comprende come casi particolari i metodi delle coordinate parallele o polari, il calcolo baricentrico ecc. : i problemi sulle curve vi si risolvono in generale senza preferire una maniera di rappresentazione ad un' altra ; perlochè i calcoli sono più spediti di quelli della Geometria analitica, ed i risultamenti sono espressi sotto forma più semplice.
È essenziale nel metodo delle equipollenze la distinzione delle parti positive dalle negative, sicchè la *correlazione* delle figure è una conseguenza necessaria dell' algoritmo, senza che vi sia bisogno di alcuna speciale osservazione, perlochè viena tolta ogni tema di errore. Chi sia abituato ai principj della *Géometrie de Position* troverà facile seguirmi nelle poche convenzioni su cui si appogia il metodo ; forse si potrebbero rendere ancora più conformi all' uso ordinario ; ma non trovo conveniente di posporre la brevità delle formule ad una leggerissima facilità. Le convenzioni saranno facili da ritenersi a memoria, perchè alcune conformi alle solite regole relative alle quantità positive e negative, altre conformi alla notissima composizione delle forze. Le equipollenze esprimono relazioni di rette considerate non solo rispetto alla direzione (o inclinazione che voglia dirsi) ; sicchè esse sono essenzialmente differenti dalle equazioni, che esprimono relazioni di sole quantità reali ; nulladimeno il calcolo delle equipollenze segue precisamente le stesse regole, che valgono nel calcolo delle equazioni, il che torna non poco vantaggioso.
...

CHAPITRE II
Multiplication et division des droites.

Produit de deux droites.–Produits de plusieurs droites.

28. Jusqu'à présent, dans les calculs que nous avons effectués sur les droites, nous n'avons fait intervenir que la multiplication *par un nombre réel*. Nous avons maintenant à considérer des produits de droites multipliées les unes par les autres, et pour cela, nous devons tout d'abord définir le produit de deux droites, que nous supposerons ramenées à la même origine O.

Le produit de deux droites OA, OB *est une droite* OC *dont la* longueur *est égale au* produit *des longueurs de* OA *et* OB*, et dont l'*inclinaison *est égale à la* somme *des inclinaisons de* OA *et* OB.

Il suit de là que l'équipollence[10] OA.OB = OC entraîne les deux égalités[11]

$$\text{gr.OA} \times \text{gr.OB} = \text{gr.OC} \quad \text{et} \quad \text{inc.OA} + \text{inc.OB} = \text{inc.OC}.$$

Une première remarque, indispensable à faire, c'est que, tandis que la somme de deux droites était tout à fait indépendante de tout autre élément du plan, leur produit dépend au contraire de l'origine des inclinaisons que l'on a choisie.

Malgré la multiplicité des inclinaisons d'une droite donnée, il ne peut y avoir aucune indécision sur la direction du produit, puisque l'inclinaison de celui-ci ne peut jamais être altérée que d'un nombre entier de circonférences, ce qui ne change rien à sa direction.

Sans contester ce qu'une définition comme celle que nous venons de donner peut en apparence présenter d'arbitraire *a priori*, il est bon de montrer cependant qu'elle se justifie assez naturellement, à la condition qu'on admette pour unité la droite OI de longueur égale à l'unité et dirigée suivant l'origine des inclinaisons.

D'après la définition de la multiplication admise en Arithmétique, on doit former le produit OC, au moyen du multiplicande OA, comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI. Or, quelles opérations a-t-on fait subir à OI pour l'amener en OB ? On a modifié la longueur dans le rapport $\dfrac{\text{gr.OB}}{\text{gr.OI}} = \text{gr.OB}$, puis on a fait tourner la droite ainsi obtenue, dans le sens convenable, de l'angle $\beta = \text{inc.OB}$. L'analogie nous conduit donc à dire, que pour avoir le produit OA.OB, nous devons modifier la longueur de OA dans le rapport gr.OB, ce qui donnera une droite de longueur gr.OA x gr.OB dirigée suivant OA, puis faire tourner cette droite de l'angle β. Or, elle avait pour inclinaison $\alpha = \text{inc.OA}$. Son inclinaison après la rotation sera donc $\alpha + \beta$; c'est-à-dire que nous retombons précisément sur la droite OC, telle que nous l'avons définie plus haut.

[10] Il faut entendre l'égalité.

[11] La notation gr.AB désigne la longueur (grandeur) d'une droite AB, indépendamment de la direction de cette droite.

La notation inc.AB désigne l'inclinaison d'une droire AB. C'est l'angle formé par la droite OM (OM=AB) et une droite OX appelée *origine des inclinaisons*. L'inclinaison est *positive* si la rotation qui amène OX sur OM s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, sinon elle est négative.

Cinquième partie

Aspects épistémologiques de la linéarité en général

16

La linéarité comme fil conducteur

> ... on trouve à l'origine des mathématiques des problèmes qui se résolvent par une seule multiplication ou division, c'est-à-dire par le calcul d'une valeur d'une fonction $f(x) = ax$, ou la résolution d'une équation $ax = b$: ce sont là des problèmes typiques d'algèbre linéaire, et il n'est pas possible de les traiter, ni même de les poser correctement sans « penser linéairement ».
>
> ... on s'est aperçu du caractère essentiellement linéaire de presque toute l'algèbre moderne, dont cette « linéarisation » est elle-même l'un des traits marquants.
>
> N. Bourbaki

1 Introduction

Tout notre travail jusqu'ici a consisté à illustrer la notion de structure linéaire à travers l'ensemble de la scolarité. Ce dernier chapitre, de nature plus théorique, esquisse le développement de cette structure depuis les grandeurs jusqu'aux espaces vectoriels et permet ainsi de situer tous les autres chapitres.

Plus précisément, nous essayons de montrer d'abord comment naît la notion de *rapport* entre deux grandeurs, avant même que celles-ci soient mesurées, et ensuite ce que devient cette notion dès qu'il est question de mesures, la mesure d'une grandeur étant un nombre positif. Après nous regardons ce que deviennent les rapports lorsqu'on en arrive aux grandeurs orientées, c'est-à-dire celles dont les mesures sont des nombres relatifs. Et enfin nous étudions les mutations considérables que subit la notion de rapport lorsqu'on essaie de l'appliquer aux grandeurs vectorielles, ce qui nous amène jusqu'aux deux concepts de *combinaison linéaire* et de *transformation linéaire*.

Ce qui s'appelle *rapport* au départ d'une telle étude ne peut plus, après quelques mutations, continuer à porter le même nom. C'est pourquoi nous désignons du nom de *structure linéaire* ou de *linéarité* cette plante dont la semence est le rapport entre deux grandeurs et qui, sans cesser jamais d'être elle-même, se développe et finit par produire des fruits qui s'appellent combinaisons et transformations linéaires.

Soulignons un choix méthodologique important. Qui dit *rapport* évoque une certaine relation entre deux choses. Qui dit *proportion* évoque l'égalité de deux rapports et renvoie donc à quatre choses. Nous adoptons ici de bout en bout un point de vue que nous croyons beaucoup plus éclairant, à savoir celui de *fonction linéaire*, renvoyant d'emblée à une multitude de rapports égaux. Notre idée est de partir des tableaux de proportionnalité entre grandeurs – ces tableaux expriment des fonctions –, et de voir comment il faut adapter de tels tableaux pour passer des grandeurs aux mesures des grandeurs, puis aux grandeurs orientées et enfin aux vecteurs.

Notre parcours est un survol. À aucun moment nous ne nous attardons aux détails sans grande portée. À chaque étape, nous essayons de montrer les contextes significatifs où naît une théorie et les grands axes de celle-ci, qui expliquent son efficacité. Nous essayons de montrer sur quelles difficultés bute chaque théorie lorsqu'on tente de l'appliquer dans de nouveaux contextes, et comment il faut la plupart du temps la restructurer pour dépasser les obstacles. La restructurer plutôt que la retoucher, car une théorie est une construction logique, et dès qu'on change un axiome ou une définition, tout ce qui en résulte est à refaire. Ce qui nous intéresse, c'est l'enchaînement des idées, le développement d'une pensée qui augmente sa puissance, c'est-à-dire sa généralité, par bonds successifs.

Au terme du parcours, la théorie la plus générale et la plus abstraite puise son sens dans tous les contextes, tous les champs de phénomènes et de problèmes qu'elle a traversés, tous les obstacles qu'elle a surmontés pour se constituer en instrument de pensée efficace. La théorie abstraite exposée comme un monument logique isolé provoque l'admiration et fige la pensée. La théorie abstraite conquise au terme d'un parcours de questions significatives et de révisions motivées[1], provoque les transferts d'intuition, la mobilité de la pensée, la capacité de résoudre des problèmes. Elle a des racines pour l'alimenter.

Voyons maintenant à quels lecteurs cette étude est destinée. L'idée d'analyser l'évolution d'une notion à travers une succession de contextes problématiques de plus en plus généraux *ne peut évidemment pas inspirer directement un enseignement d'initiation*. La motivation d'un premier enseignement se trouve en effet dans les phénomènes intrigants, les questions curieuses, et non dans les concepts qui servent d'instruments pour en parler et y répondre. L'intérêt pour les concepts eux-mêmes, que ce soit sur un plan mathématique ou épistémologique, ne vient qu'après. Il est le fait d'une pensée qui réfléchit sur elle-même.

Mais une telle réflexion peut fournir un fil conducteur pour l'enseignement. En particulier, parcourir les étapes de généralisation successives d'une théorie peut inspirer un enseignement en spirale. On dit souvent – à raison –, que les enseignants doivent en savoir plus que leurs élèves. Toutefois, si les choses qu'ils savent en plus ne sont que des théories sans racines, fussent-elles brillantes, ils en seront embarrassés. Le savoir supplémentaire dont les enseignants ont un pressant besoin, c'est un savoir à la fois mathématique et épistémologique, ce sont des mathématiques alimentées par l'expérience.

2 Un exemple élémentaire

Comme nous l'avons dit, toute cette étude porte sur la proportionnalité et les phénomènes apparentés. Notre propos sera simplifié si nous commençons par un exemple familier qui illustre les diverses facettes de l'idée de proportionnalité. Presque tous les matériaux dont sont faits les objets usuels peuvent nous fournir un tel exemple. Pour fixer les idées, considérons l'aluminium.

(1) Une fonction. Supposons que nous disposions d'un certain nombre d'objets en aluminium, des gros, des moyens, des petits, dans le désordre. Mesurons le volume et la masse de chacun et disposons nos résultats en tableau, le volume d'un objet à gauche et sa masse en regard sur la même ligne (voir tableau 1). Ce tableau comporte autant de lignes que nous avons d'objets. Mais nous pouvons toujours l'étendre en y écrivant le volume et la masse d'un nouvel objet en aluminium absolument quelconque.

[1] On parle beaucoup aujourd'hui du *constructivisme* comme philosophie de l'enseignement. Mais si ce que l'on enseigne est, par nécessité, soumis à des révisions, cela signifie que le savoir ne se construit pas comme une maison, au départ d'un plan préétabli, et en ajoutant à chaque étape de nouvelles briques à la partie déjà définitivement en place. Dans la construction du savoir, il faut au contraire refaire le plan à diverses reprises.

On dit qu'il existe une *fonction* qui à tout volume d'aluminium fait correspondre sa masse et réciproquement. Le tableau 1 représente une petite partie de cette fonction.

volume	masse
1 dm^3	$2,7$ kg
2 dm^3	$5,4$ kg
5 dm^3	$13,5$ kg
20 dm^3	54 kg
12 dm^3	$32,4$ kg
15 dm^3	$40,5$ kg
8 dm^3	$21,6$ kg
3 dm^3	$8,1$ kg
...	...

Tableau 1.

(2) Deux additions. On peut additionner les volumes : par exemple rassembler 5 dm^3 et 2 dm^3. On peut aussi additionner les masses : par exemple ajouter 4 kg à 10 kg. Ainsi la fonction en question fait correspondre une grandeur munie d'une somme (le volume) à une autre grandeur munie elle aussi d'une somme (la masse).

(3) Les sommes se correspondent. Prenons deux éléments dans la première colonne du tableau et faisons-en la somme :

$$2\ \mathrm{dm}^3 + 3\ \mathrm{dm}^3 = 5\ \mathrm{dm}^3.$$

Celle-ci se trouve dans le tableau en regard de la somme des masses correspondantes :

$$5,4\ \mathrm{kg} + 8,1\ \mathrm{kg} = 13,5\ \mathrm{kg}.$$

Ainsi, une somme de volumes a pour masse la somme des masses correspondantes et réciproquement.

(4) La proportionnalité. Deux volumes quelconques sont entre eux comme les masses correspondantes. Par exemple 2 dm^3 est à 3 dm^3 comme $5,4$ kg est à $8,1$ kg. On exprime souvent cela en abrégé sous la forme

$$\frac{2}{3} = \frac{5,4}{8,1}.$$

(5) Égalité des rapports internes. On exprime aussi cette dernière propriété autrement, à savoir en parlant de *rapports internes*. On passe de 2 à 3 dm^3 en multipliant 3 dm^3 par 1,5 ou 3/2. Le rapport est le même entre les masses correspondantes : on passe de $5,4$ kg à $8,1$ kg en multipliant $5,4$ kg par 1,5 ou 3/2. L'adjectif *interne* exprime le fait que les rapports considérés sont internes à une colonne du tableau.

(6) La règle de trois. La règle de trois est une expression calculatoire de la même situation. Si 2 dm^3 pèsent $5,4$ kg, alors 1 dm^3 pèse 2 fois moins, c'est-à-dire $2,7$ kg. Mais alors 3 dm^3 pèsent 3 fois plus, c'est-à-dire $8,1$ kg.

(7) Le rapport externe. Dans notre exemple, ce que l'on désigne du nom de *rapport externe* est la masse volumique, qui est de $2,7$ kg/dm^3. On passe d'un volume quelconque à la masse correspondante en multipliant le volume par la masse volumique. Par exemple :

$$3\ \mathrm{dm}^3 \times 2,7\ \mathrm{kg/dm}^3 = 8,1\ \mathrm{kg}.$$

L'adjectif *externe* exprime le fait que le rapport en question fait sortir d'une colonne pour aller vers l'autre.

(8) Des accroissements constants. Si dans la première colonne du tableau on passe de chaque ligne à la suivante en ajoutant toujours la même quantité, il en va de même dans la deuxième colonne, et réciproquement. C'est ce qu'illustre le tableau 2.

volume	masse
1 dm^3	$2,7$ kg
2 dm^3	$5,4$ kg
3 dm^3	$8,1$ kg
4 dm^3	$10,8$ kg
5 dm^3	$13,5$ kg
6 dm^3	$16,2$ kg
7 dm^3	$18,9$ kg
8 dm^3	$21,6$ kg
...	...

Tableau 2.

(9) Un graphique en ligne droite. Si on porte les masses en fonction des volumes dans un système d'axes gradués régulièrement, on obtient un graphique en ligne droite.

(10) Une pente constante. Ce graphique monte avec une pente constante. Cette pente peut être identifiée à la masse volumique.

(11) Une formule, une fonction du premier degré. La masse m s'exprime en fonction du volume v par la formule $m = av$, dans laquelle a représente la masse volumique. La fonction qui se trouve au second membre de cette égalité est du premier degré.

Ce sont-là onze facettes de la linéarité, observées sur un exemple particulier et à un niveau d'abstraction modéré. Elles nous serviront de référence – par analogie et constraste –, pour parler ci-après de la linéarité à d'autres niveaux, plus élémentaires ou plus avancés. La multiplicité même de ces facettes montre que le concept de linéarité est moins immédiat qu'on n'aurait tendance à le croire.

Sur les tableaux de proportionnalité en général , voir le chapitre 5.

3 Les rapports de grandeurs

Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, entre deux grandeurs du même genre.
EUCLIDE

3.1 Avant les rapports, les grandeurs elles-mêmes

La proportionnalité (ou la linéarité) a des antécédents. Tout commence avec les grandeurs. Rappelons donc brièvement comment celles-ci apparaissent dans l'expérience commune.

Les objets ont, selon le cas, une longueur, une hauteur, une aire, un volume, une masse, ... Ce sont là divers types de grandeurs. S'intéresser à un type de grandeur, c'est donc regarder les objets d'un certain point de vue.

Une fois que l'on a fixé son attention sur un type de grandeur, la première démarche consiste à vérifier si deux objets ont ou non la même grandeur. S'il s'agit de la longueur de baguettes, de tiges ou de segments, c'est facile : on les juxtapose. Pour les masses de deux objets, on les met sur les plateaux d'une balance. L'égalité ou l'inégalité des aires est souvent plus difficile à vérifier, même pour des surfaces planes. En effet, leur forme empêche souvent lorsqu'on les superpose, soit de les mettre en coïncidence, soit d'inclure l'une dans l'autre. Toutefois on vérifie sans peine par superposition que deux figures planes sont isométriques et donc de même aire. Vérifier l'égalité ou l'inégalité de deux volumes est aussi bien souvent difficile. Une exception toutefois : celle des « capacités », qui sont des volumes de liquide remplissant des récipients. Dans ces cas, on procède par transvasements. Les inégalités de grandeurs conduisent naturellement à ce que PIAGET appelle des *sériations*, opérations qui consistent à classer des objets par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes.

Un dernier préliminaire de la linéarité, c'est l'addition des grandeurs. Elle est le plus souvent une opération simple : on met deux tiges bout à bout pour additionner leurs longueurs, on rassemble deux objets pour additionner leurs masses, et de même on rapproche deux surfaces pour additionner leurs aires et deux solides pour additionner leurs volumes.

Jusqu'ici nous avons parlé de diverses grandeurs que peuvent avoir des objets. Mais les intervalles de temps, qui ne sont pas des objets au sens immédiat de ce terme, ont aussi une grandeur (leur durée), et l'on est amené à les comparer, sérier, additionner. Ils posent un problème particulier du fait qu'ils

ne se transportent pas dans le temps comme les objets se transportent dans l'espace. Pour manipuler des intervalles de temps, il faut identifier des phénomènes de même durée et reproductibles.

L'observation suivante est évidente, mais elle jouera un grand rôle dans la suite de ce travail : *on ne peut jamais comparer ou additionner que deux grandeurs de même espèce* : cela n'a pas de sens de comparer ou additionner par exemple une longueur et une masse, ou une surface et un temps.

Sur les grandeurs en général, voir les chapitres 1, 2 et 3.

3.2 Deux grandeurs de natures différentes

Observons quelques phénomènes familiers. Pour peindre une surface deux fois plus grande qu'une autre, on a besoin de deux fois plus de peinture. Si on marche deux fois plus longtemps – d'un même pas –, on va deux fois plus loin. Avec deux fois plus d'essence, on va deux fois plus loin. Si on ensemence un champ deux fois plus grand, on obtient sauf exception une récolte deux fois plus abondante. Deux fois plus de longueur d'un câble pèse deux fois plus lourd. Deux fois plus de surface découpée dans une tôle pèse deux fois plus lourd.

Mais les choses ne sont pas toujours aussi régulières. Un être humain deux fois plus âgé qu'un autre n'est ni deux fois plus haut, ni deux fois plus lourd que le premier. Un carré de côté double d'un autre n'a pas une aire double, mais bien une aire quadruple. Quand une voiture va deux fois plus vite, sa distance de freinage en cas d'urgence est plus que deux fois plus longue.

Quoiqu'il en soit, dans beaucoup de phénomènes, *deux fois* d'un côté correspond à *deux fois* de l'autre.

Et d'autre part, le rapport le plus simple à saisir est celui *du simple au double*. Mais si on double le double, on obtient le rapport *de un à quatre*. Le rapport *de un à un demi* est aussi un rapport facile. Par exemple, couper une ficelle ou une bandelette en deux parts égales est une opération élémentaire. La diviser exactement en trois exige par contre un tâtonnement. Ensuite couper deux fois en deux amène à *un quart*. Lorsqu'on dispose d'un demi, on arrive facilement à *un et un demi*. Il existe ainsi un petit nombre de rapports que nous concevons facilement. Nous n'envisagerons que ceux-là pour commencer et nous n'introduirons des rappports plus compliqués qu'à la section 4.

Dans chacune des situations évoquées ci-dessus, nous avons mis deux grandeurs en correspondance. Par exemple, toute surface à peindre exigeait un volume déterminé de peinture, et avec un volume donné de peinture, on peut peindre une surface bien déterminée. Nous pouvons représenter cela par un tableau en deux colonnes. Dans la première nous inscrivons les aires a_1, a_2, a_3, ... des surfaces à peindre, et en face les volumes de peinture v_1, v_2, v_3, ... correspondants. Bien entendu, un tel tableau n'aura jamais qu'un nombre fini de lignes, mais on peut toujours l'allonger en y inscrivant de nouvelles aires et de nouveaux volumes.

aire	vol.
a_1	v_1
a_2	v_2
a_3	v_3
a_4	v_4
a_5	v_5
a_6	v_6
...	...

Tableau 3.

Ce tableau est l'expression d'une *fonction*. La notion de fonction est très importante pour nous : en effet, toutes les situations que nous envisagerons dans la suite auront pour première expression une fonction, représentable par un tableau en deux colonnes.

Le tableau 3 possède *la propriété des rapports internes* au sens où, comme nous l'avons vu, si on passe, dans la colonne de gauche, d'une certaine aire à une autre deux fois plus grande (ou quatre fois, ou une fois et demie plus grande, ou deux fois plus petite, ...) on trouve dans la colonne de droite un volume double (ou, selon le cas, quatre fois, ou une fois et demie plus grand, ou deux fois

plus petit, ...). On exprime aussi cela en disant que les aires et les volumes sont proportionnels. On dit également, en choisissant à titre d'exemple deux couples de valeurs correspondantes, que

$$a_1 \text{ est à } a_2 \text{ comme } v_1 \text{ est à } v_2.$$

À cause de cette propriété, on dit que le tableau 3 est un *tableau de proportionnalité*. Rappelons que les rapports en question sont appelés *rapports internes* parce qu'ils concernent deux grandeurs situées à l'intérieur d'une même colonne.

Ce tableau possède aussi *la propriété de la somme*. En effet, pour peindre deux surfaces, on peut – mais cela va sans dire ! –, rassembler les deux volumes de peinture préparés pour chacune d'elles. En se référant au tableau, on exprime cela de la manière suivante : à la somme de deux éléments de gauche (par exemple a_1 et a_2, et nous noterons leur somme $a_1 \oplus a_2$) correspond la somme des deux éléments correspondants de droite (ici $v_1 \oplus v_2$). Nous utilisons le symbole $\oplus$ pour désigner la somme de deux grandeurs, pour éviter la confusion avec la somme de deux nombres.

3.3 Deux grandeurs de même nature

Passons maintenant à la proportionnalité entre deux grandeurs de même nature. Elle va nous apporter tout un lot de propriétés nouvelles. Nous commencerons par quelques situations concrètes qui font voir des proportions entre longueurs. Les figures habituellement associées au théorème de Thalès pourraient en inspirer d'autres, que le lecteur évoquera sans peine. Nous passerons ensuite aux masses. Pour être complet, il faudrait aussi évoquer les aires, les volumes, les durées, ...

Les objets semblables

Très jeunes, les enfants s'aperçoivent que deux objets ont la même forme, même si leurs dimensions sont différentes. Par exemple, ils voient bien qu'un petit bateau est un modèle réduit d'un grand, ou qu'une photographie est un agrandissement d'une autre. Considérons donc, à titre d'exemple, le dessin d'un tangram et sa reproduction en deux fois plus grand (voir figure 1).

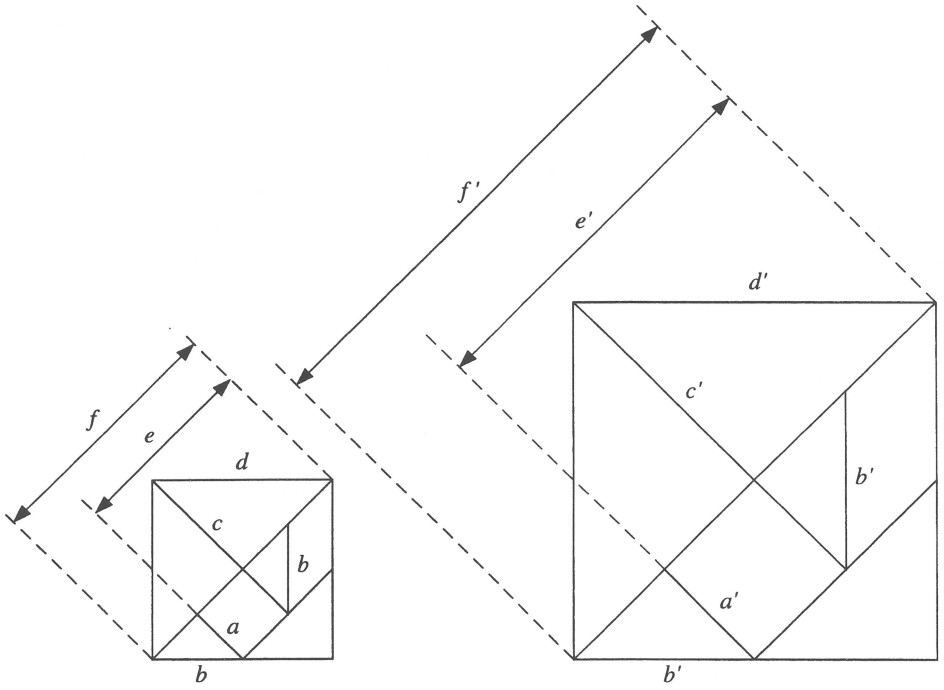


Fig. 1

À tout segment tel que a de la figure de gauche correspond un segment a' deux fois plus grand dans la figure de droite. Disposons dans la première colonne d'un tableau les segments (ou plutôt les lettres qui les représentent) relevés dans le petit tangram. Il y en a de six longueurs différentes. Écrivons en regard les segments du tangram agrandi (voir tableau 4). Ce tableau représente une fonction, en l'occurrence avec un nombre fini de lignes. On passe d'un segment de gauche au segment correspondant de droite en multipliant la longueur par deux.

a	a'
b	b'
c	c'
d	d'
e	e'
f	f'

Tableau 4.

L'existence d'un rapport entre les deux éléments d'une même ligne du tableau est une propriété nouvelle pour nous : en effet, à la section précédente, nos fonctions mettaient en relation deux grandeurs de natures différentes, et il n'existe aucun rapport, aucune comparaison possible entre de telles grandeurs. Lorsque comme ici il existe toujours un même rapport entre éléments correspondants de la fonction, nous appelons ce rapport le *rapport externe*.

D'autre part, le tableau 4 possède aussi la *propriété des rapports internes*, comme on le vérifie sur quelques exemples : ainsi, c vaut deux fois a, et c' vaut deux fois a' ; de même f vaut deux fois c, et f' vaut deux fois c' ; ou encore e vaut une fois et demie c, et de l'autre côté e' vaut une fois et demie c'. Ce dernier cas relève aussi, si on veut, de la *propriété de la somme* : on peut dire en effet que e, qui vaut $a \oplus c$, correspond dans le tableau à e', qui vaut $a' \oplus c'$.

Nous avons donc maintenant affaire à un tableau qui possède les trois propriétés respectivement du rapport externe, des rapports internes et de la somme. Bien entendu, nous n'avons vérifié ces deux dernières propriétés que sur quelques cas, mais nous nous satisferons pour l'instant de cette vérification partielle. D'autre part, il y dans le tangram au moins un rapport plus compliqué que les quelques rapports simples que nous avons identifiés jusqu'ici. En effet, le rapport de a à b n'est ni le rapport de un à deux, ni le rapport de un à un et demi. Il en va de même du rapport de b à c, et de celui de c à d. C'est un rapport inconnu comme nous en trouverons quelques-uns sur notre chemin[2].

Les formats de papier

Nous venons d'engendrer un tableau de proportionnalité à partir de deux figures semblables. Restons dans le domaine des longueurs et construisons une fonction à partir d'une toute autre expérience.

Si on plie une feuille de format A3 en deux dans le sens de sa largeur, on obtient le format A4. Si on fait de même avec ce dernier, on obtient le format A5. Et on peut continuer de même. Chose remarquable, si on dispose toutes les feuilles rectangulaires obtenues comme sur la figure 2 qui les représente à l'échelle, on s'aperçoit que les diagonales de tous les rectangles sont alignées. On n'observe pas ce curieux phénomène avec tous les formats de papier. Par exemple, si on part du format Quarto, on obtient des rectangles dont les diagonales ne se superposent qu'une fois sur deux. C'est ce qu'on voit sur la figure 3, qui les montre elle aussi à l'échelle.

[2] Notre propos est de *construire* la notion de proportionnalité. Dans un exposé déductif, on ne laisse pas traîner de difficulté non résolue. Par contre lorsqu'on construit un concept en cherchant une voie d'accès pas trop difficile, on est amené non pas à ignorer, mais à renvoyer à plus tard certaines questions inaccessibles à un stade donné de la construction. Comment croire en effet que l'on pourrait régler d'emblée le problème des rapports irrationnels, ou même celui des rapports exprimés par des fractions compliquées ? La connaissance de quelques rapports simples nous semble être un soutien assez clair à ce stade de la construction.

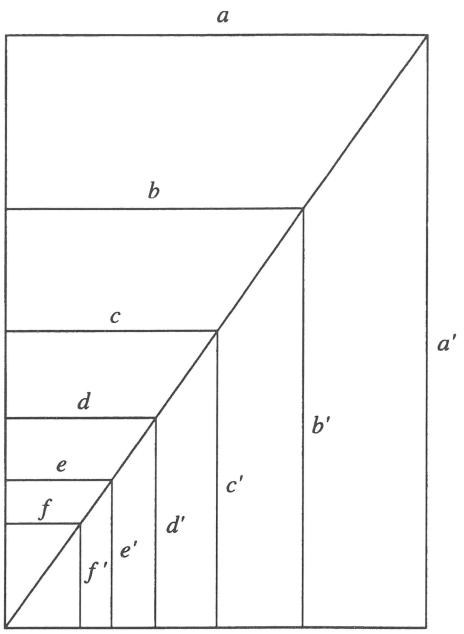


Fig. 2

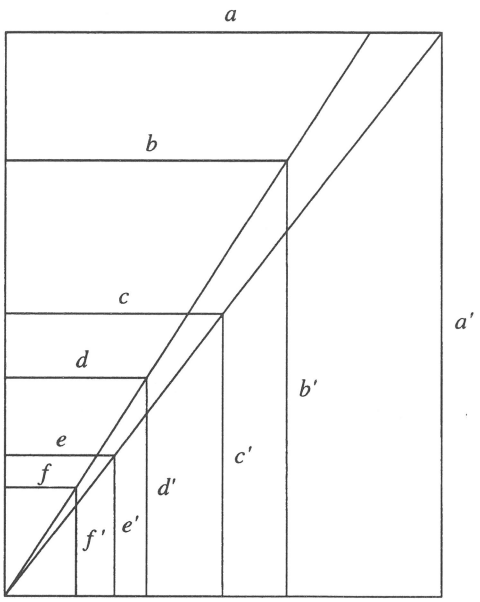


Fig. 3

Revenons à la figure 2, et disposons dans la première colonne d'un tableau tous les petits côtés des rectangles, et dans la seconde colonne tous les grands côtés (voir tableau 5). On dirait que ce tableau est comme le précédent constitué sur la base d'un même rapport entre a et a', b et b', etc. Mais alors que, dans le cas du tangram agrandi, ce rapport externe était de un à deux, ici ce n'est aucun des rapports simples qui nous sont familiers. En effet a ne va dans a' ni deux fois, ni une fois et demie, ni une fois et un quart... Mais il semble pourtant, à vue, que a va dans a' autant de fois que b dans b', c dans c', etc. Laissons en suspens la détermination exacte de ce rapport.

a	a'
b	b'
c	c'
d	d'
e	e'
f	f'

Tableau 5.

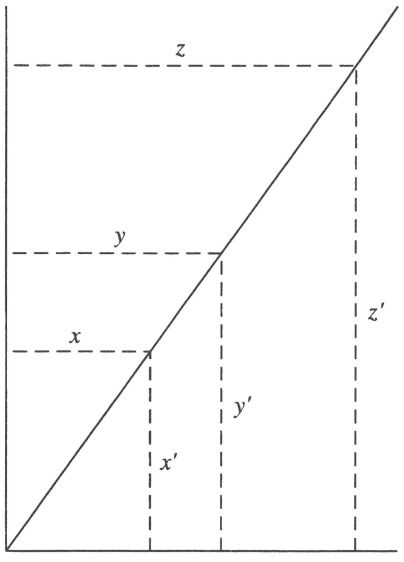


Fig. 4

Quoiqu'il en soit, nous reconnaissons dans le tableau 5 l'égalité de quelques rapports internes. En effet, étant donné la façon dont nous avons obtenu nos rectangles par pliage, nous voyons par exemple que c va deux fois dans a et c' deux fois dans a', que e va deux fois dans c et e' deux fois dans c'. De même f va quatre fois dans b, et f' quatre fois dans b'. Ces quelques exemples nous portent à croire que le tableau 4 satisfait à la propriété des rapports internes.

En définitive, ce que la figure 2 suggère, c'est que si l'on assemble des rectangles de manière que leurs diagonales se superposent de la manière indiquée, les côtés de ces rectangles sont proportionnels. Ainsi, pour créer des couples de segments de même rapport, il suffit de dessiner, comme sur la figure 4, une demi-droite dans un angle droit et d'ajouter à la figure des segments tels que x, x', y, y', etc. C'est là une sorte de machine à fabriquer des segments proportionnels.

Sur les figures semblables, voir le chapitre 2. Sur le théorème de Thalès, qui est la clef des similitudes, voir chapitre 6.

La balance

Avec une balance ordinaire, on peut par tâtonnement créer une masse égale à une masse donnée, et donc ensuite doubler une masse. Il faut pour cela disposer d'une matière qui, telle la plasticine, se laisse couper en morceaux quelconques. On peut aussi diviser une masse en deux parts égales. On arrive ainsi à prendre une fois et demie une masse donnée. On voit qu'on peut dans le domaine des masses, réaliser les quelques rapports simples auxquels nous nous sommes bornés jusqu'ici. Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer comment l'on peut non seulement réaliser ces rapports, mais aussi, lorsque deux masses sont données, vérifier si elles ont entre elles un de ces rapports simples.

Il existe d'ailleurs une façon commode de réaliser ou de vérifier un rapport de masses donné. Par exemple, pour réaliser le rapport de deux à trois, qui est aussi le rapport de un à un et demi, on construit une balance dont les longueurs des bras sont entre elles comme deux est à trois (voir figure 5). Une telle balance est en équilibre lorsque les masses posées sur ses plateaux sont entre elles comme deux est à trois, la masse deux étant du côté du bras de longueur trois et la masse trois du côté du bras de longueur deux. On a là une sorte de machine à fabriquer des masses proportionnelles.

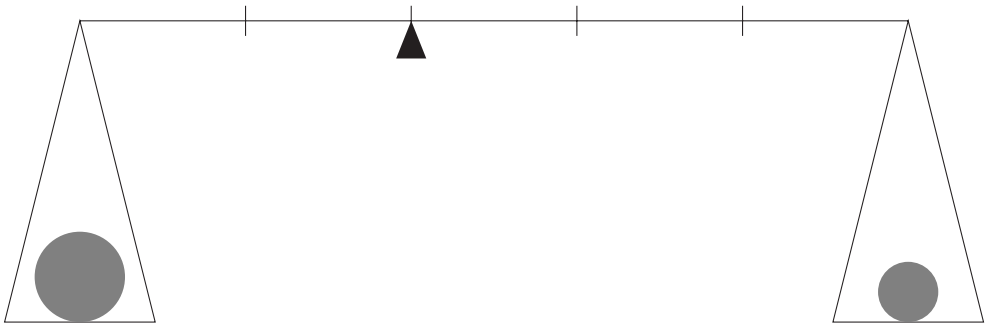


Fig. 5

Créons donc à l'aide d'une telle balance un ensemble de couples de masses (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), etc. et mettons-les en tableau (voir tableau 6). Ce tableau possède la propriété des rapports internes. Cela signifie que si la balance de la figure 5 est équilibrée, elle le demeurera si on double les deux masses, ou si on les multiplie par un et demi, etc. Le tableau 5 possède aussi la propriété de la somme, dont il est facile de se donner un exemple.

m_1	m'_1
m_2	m'_2
m_3	m'_3
m_4	m'_4
m_5	m'_5
m_6	m'_6
...	...

Tableau 6.

Sur les poids et les balances, voir chapitre 2.

4 Numérisation des rapports, mesures

> MESURE. s. fem. Ce qui sert à connoître la grandeur, l'étenduë, la quantité de quelque corps. La *mesure* des longueurs est la ligne ou grain d'orge, le pouce contenant douze lignes, le pied douze pouces, le pas geometrique cinq pieds, la toise six pieds, la perche des Geometres dix pieds ; en quelques lieux elle va jusqu'à vingt-deux pieds ; le stade cent vingt-cinq pas ; le mille huit stades ; la lieue Françoise trois mille.
>
> A. Furetiere (1694)

Reprenons les choses à la base. Deux grandeurs de même espèce peuvent être comparées pour voir si elles sont égales, ou si l'une est plus grande que l'autre (voir 3.1). Souvent dans le quotidien on ne se contente pas de constater l'inégalité : on la qualifie en disant que telle grandeur est un peu plus grande que telle autre, ou beaucoup plus grande, ou énormément plus grande, etc. En s'exprimant ainsi, on compare certes dans chaque cas deux grandeurs, mais on va vers la comparaison des rapports. En effet, si une grandeur est beaucoup plus grande qu'une autre, le rapport entre les deux est plus grand que si la première est seulement un peu plus grande que l'autre.

Pour dépasser cette vue qualitative des rapports, nous avons chiffré quelques rapports simples. Les tout premiers, ceux de un à deux, de un à un demi, et de un à un et demi, étaient parfois simples à *percevoir*. Par exemple on voit à peu près bien qu'un objet est deux fois plus long qu'un autre lorsque les deux ne sont ni trop grands ni trop petits et qu'ils sont disposés parallèlement dans un plan frontal par rapport à l'observateur. Il est déjà beaucoup plus difficile d'estimer si un objet est deux fois plus lourd qu'un autre, en les soupesant l'un dans une main et l'autre dans l'autre. Estimer qu'un intervalle de temps est deux fois plus long qu'un autre ne peut se faire à peu près correctement que pour des intervalles situés dans une gamme de durées assez restreinte et proches l'un de l'autre dans le temps.

S'il est vrai que les rapports de grandeurs ne peuvent être *perçus* que dans de tels cas simples, par contre des rapports un peu plus compliqués peuvent être *construits* ou *vérifiés* par des opérations mécaniques. Comme nous l'avons vu, on engendre par itération du doublement les rapports de un à quatre, ou de un à huit, et par itération du partage en deux parts égales, les rapports de un à un quart ou un huitième. Par reports successifs, on vérifie sans peine qu'une tige est trois ou quatre ou cinq fois plus grande qu'une autre. Par contre un rapport de quatre à sept par exemple est déjà beaucoup plus difficile à vérifier.

Ainsi, caractériser numériquement tous les rapports possibles n'est pas une question triviale. Il s'agit du problème de la mesure, qui est l'objet de cette nouvelle section. Ce sera un voyage comportant un bon nombre d'étapes.

4.1 Fixer une unité de mesure

Nous pourrions attaquer la question sous l'angle le plus général possible, en nous demandant comment attacher un nombre au rapport de deux grandeurs quelconques. Mais l'intérêt principal de pouvoir chiffrer les rapports réside dans la possibilité, pour chaque domaine de grandeur (les longueurs, les masses, etc.) de rapporter chaque grandeur à une grandeur particulière choisie pour unité. Faire cela, c'est ramener la comparaison des grandeurs d'une même espèce à la comparaison de leur rapport chiffré à l'unité, c'est-à-dire de leur mesure. Très tôt dans l'histoire, les communautés humaines ont découvert cette pratique extraordinairement féconde qui consiste à choisir dans chaque domaine une grandeur de référence (ou un petit nombre de telles grandeurs). Nous plaçons la suite de notre exposé dans cette perspective-là.

Sur le choix d'une unité, qu'elle soit de rencontre ou conventionnelle, voir les chapitres 1, 2.

4.2 Mesure en nombre entier et encadrement

Multiplier une grandeur a par un nombre naturel[3] n, c'est faire la somme de n grandeurs égales à a, ce qui se note na.

[3] Nous supposons les nombres naturels connus, au moins dans leurs propriétés les plus élémentaires. Par ailleurs, ce n'est pas ici le lieu de rappeler en détail comment on les construit, que ce soit dans leur aspect cardinal, ou dans leur aspect ordinal. Cette construction a des analogies avec celle des grandeurs. On trouvera quelques compléments d'information à ce sujet dans N. Rouche [1992]. Bien entendu, dans la réalité, les enfants n'apprennent pas d'abord

Soient deux grandeurs u et a, et n un nombre naturel. Si u multipliée par n est égale à a, autrement dit si $a = nu$, alors on dit que n est la *mesure* de a dans l'unité u. On dit aussi que u *va* n *fois dans* a, ou encore que u *est contenue* n *fois dans* a. Le rapport entre les grandeurs u et a est ainsi caractérisé par le seul nombre n.

Il arrive souvent, lorsqu'on a deux grandeurs u et a, avec u plus petite que a, que pour un certain nombre n, nu soit plus petite que a, et que par contre $(n+1)u$ soit plus grande que a. On dit alors que la grandeur a est *encadrée* par nu et $(n+1)u$.

Dans un tel cas, la mesure de a n'est connue qu'approximativement. Une première façon d'affiner la mesure consiste simplement à choisir une unité plus petite. Mais on voit tout de suite combien une telle décision est peu commode. En effet si, pour chaque mesure que l'on veut faire, on choisit une unité assurant la précision que l'on désire, on obtiendra des mesures rapportées à toutes sortes d'unités, qui ne seront pas facilement comparables entre elles. Il faut donc chercher des solutions plus commodes.

Sur les mesures en nombres entiers et les encadrements, voir les chapitres 1, 2.

4.3 Les unités de commune mesure

Lorsque l'unité u n'est pas contenue un nombre naturel de fois dans une grandeur a, il arrive qu'il existe une troisième grandeur c qui soit contenue un nombre entier m de fois dans u, et aussi un nombre entier n de fois dans a. Autrement dit, on a alors

$$u = mc \quad \text{et} \quad a = nc.$$

La grandeur c est appelée *unité de commune mesure* entre a et b. On dit alors que

$$u \text{ est à } a \text{ comme } m \text{ est à } n.$$

Le rapport entre les deux grandeurs u et a est dans ces conditions caractérisé par deux nombres.

On se demande naturellement si, étant donné deux grandeurs, il en existe toujours une troisième qui soit unité de commune mesure pour les deux autres. La réponse n'a rien d'évident. On la doit aux Pythagoriciens vers les VIe ou Ve siècles avant J.-C. Et cette réponse est *non*. Parfois il y a une unité de commune mesure, et parfois il n'y en a pas. Dans le premier cas, on dit que le rapport des deux grandeurs est *rationnel*, et dans le second qu'il est *irrationnel*[4].

4.4 Les mesures fractionnaires

Ramener la comparaison de deux grandeurs à celle de deux nombres est une idée intéressante, quoique recourir à un seul nombre est évidemment plus pratique. Mais nous avons vu ci-dessus qu'étant donné deux grandeurs u et a, u étant la plus petite, on ne peut pas toujours trouver un nombre naturel n qui soit la mesure de a dans l'unité u. Toutefois si on ne peut pas trouver un nombre naturel, peut-être peut-on trouver un nombre d'un autre type ? Ou alors, si on n'a pas encore de nombre adéquat, *comment étendre la notion de nombre* pour que, quelles que soient deux grandeurs u et a, on trouve un nombre μ tel que $a = \mu u$? Pour arriver à ce résultat, l'humanité est passée par plusieurs étapes.

---

les naturels, et ensuite les grandeurs : ces deux apprentissages non seulement progressent simultanément, mais encore s'épaulent fortement l'un l'autre. Cette remarque suffit à montrer que notre étude ne saurait être considérée comme un projet d'enseignement. En dissociant ici dans une certaine mesure les naturels des grandeurs, nous avons pour seul objectif de montrer le plus clairement possible comment les mesures dépendent des naturels.

[4] L'adjectif *irrationnel* renvoie à la difficulté de rendre raison de tous les rapports entre grandeurs en recourant aux seuls nombres naturels. Il est remarquable d'ailleurs que le mot *raison* vienne du latin *ratio*, qui veut dire *rapport*.

Repartons du fait que toute grandeur peut-être multipliée par un nombre naturel n quelconque. Cette opération de multiplication possède une réciproque : toute grandeur peut être partagée (divisée) en n parts égales, quel que soit le nombre naturel n. Diviser une grandeur a par n, c'est trouver une grandeur b telle que $a = nb$. Le résultat de la division de a par n s'écrit $b = \frac{a}{n}$ ou $b = \frac{1}{n}a$.

On peut aussi enchaîner une division d'une grandeur a par un nombre naturel n, ce qui donne $\frac{1}{n}a$, et une multiplication du résultat par un nombre naturel m, ce qui donne $m(\frac{1}{n}a)$. Comme on obtient le même résultat en exécutant les deux opérations dans l'ordre inverse[5], on peut supprimer les parenthèses et écrire simplement $\frac{m}{n}a$. On dit alors que $\frac{m}{n}$ est un *opérateur fractionnaire* agissant sur a.

Rappelons que, si deux grandeurs u et a sont telles que $a = nu$, nous disons que n est la *mesure de a dans l'unité u*. Si maintenant deux grandeurs a et u sont telles que $a = \frac{m}{n}u$, nous dirons que $\frac{m}{n}$ est la *mesure de a dans l'unité u*. Il s'agit cette fois d'une *mesure fractionnaire.* La fraction comme opérateur composé (deux opérations enchaînées) se mue ici en un nombre qui exprime un rapport. Ce changement de statut de la fraction n'est pas facile à admettre, les enseignants en savent quelque chose.

Étant donné deux grandeurs u et a, existe-t-il toujours deux nombres naturels m et n tels que $a = \frac{m}{n}u$? La réponse est *non*, comme tout à l'heure, lorsque nous nous interrogions sur l'existence d'une commune mesure entre deux grandeurs quelconques. Nous ne nous attarderons pas ici sur cette impossibilité.

Dans la pratique, on trouve toujours une mesure exprimable par une fraction (sachant bien par ailleurs que toute mesure est approximative). C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous supposerons qu'étant donné deux grandeurs u et a de même nature, il existe toujours un nombre α tel que $a = \alpha u$. Ce nombre α est l'expression numérique du rapport entre u et a.

Quoiqu'il en soit, les mesures fractionnaires ont été très communément utilisées au cours de l'histoire. Mais elles ont un inconvénient grave. En effet, lorsqu'on a mesuré des grandeurs, on est souvent amené à calculer avec les mesures. L'ennui est que le calcul sur les fractions n'est pas facile, comme en témoignent les écoliers.

Examinons maintenant un autre perfectionnement de l'idée de mesure.

Sur les mesures fractionnaires, voir chapitre 2.

4.5 Les mesures décimales

Une démarche importante dans l'histoire de l'humanité a consisté à mesurer toute grandeur non seulement dans une unité convenue, mais encore en utilisant ses sous-unités décimales, de sorte que le nombre exprimant la mesure soit décimal, avec toutes les facilités de calcul que cela comporte. Ceci fait, on dispose de la notion la plus répandue de mesure d'une grandeur. Soit u l'unité convenue : à toute grandeur a nous pouvons associer le nombre décimal α tel que $a = \alpha u$. Le nombre α peut être un décimal très long. Il peut même être de longueur infinie, et être périodique ou non. Nous n'examinerons pas ces phénomènes ici, d'autant que, dans la pratique, toute mesure est approximative et s'arrête à quelques chiffres après la virgule.

Sur les mesures décimales, voir chapitre 3.

[5] Ce qui n'a rien d'évident : couper une tarte en 4 et prendre 3 morceaux, c'est bien autre chose que de partager 3 tartes entre 4 personnes. Sur cette difficulté, cf. N. Rouche [1992].

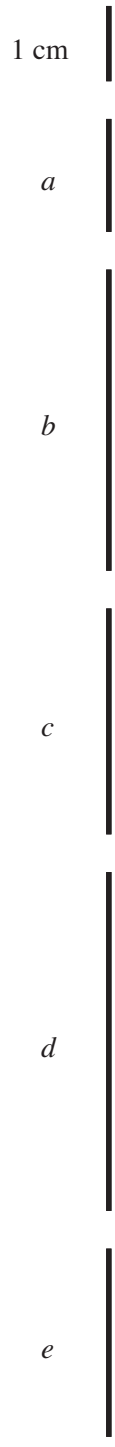


Fig. 6

4.6 Le rapport entre deux nombres

Nous venons de voir, très sommairement, comment les nombres fractionnaires et décimaux peuvent naître des rapports entre grandeurs[6]. Mais les nombres eux-mêmes[7], munis des opérations que nous connaissons, se comportent à beaucoup d'égards comme des grandeurs. En particulier, entre deux nombres quelconques, nous pouvons définir un rapport. Soient α et β deux nombres (α non nul). Il existe un nombre ρ tel que $\beta = \rho\alpha$. Or, nous savons que $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$. En gros, le nombre ρ dit combien de fois α va dans β. Nous dirons que ρ est le *rapport* entre α et β.

4.7 Un tableau de mesures

Considérons maintenant un tableau dans la première colonne duquel nous disposons des segments, avec chaque fois leur mesure en regard dans la deuxième colonne : voir figure 6. Il n'y a pas de *rapport* (au sens technique du terme rapport) entre un segment et sa mesure : on ne peut pas augmenter ou diminuer un segment en espérant obtenir un nombre. Le tableau en question ne comporte pas de rapport externe. Le principe qui a permis de le constituer est la mesure des longueurs de la première colonne.

Par contre il existe évidemment des rapports internes à la première colonne, et aussi – nous venons de le voir –, des rapports internes entre les nombres de la deuxième colonne. Il résulte des propriétés de la mesure que ces rapports sont égaux. Montrons-le sur un exemple. Les grandeurs a et b de la figure 6 sont telles que $a = 1,5$ cm et $b = 4$ cm. Le rapport des deux mesures est ici $\frac{1,5}{4}$. Par ailleurs $\frac{b}{4} = 1$ cm. Il vient donc que $a = 1,5(\frac{b}{4}) = \frac{1,5}{4}b$, et le rapport de a à b est donc bien de $\frac{1,5}{4}$.

Enfin nous retrouvons ici la propriété de la somme. En effet, la mesure de la somme de deux longueurs est égale à la somme de leurs mesures.

Ces résultats, que nous venons de montrer sur un tableau de longueurs, sont valables pour une grandeur de nature quelconque. Quel est l'avantage d'avoir ainsi mis des mesures (des nombres) en regard des grandeurs ? Cet avantage est décisif. Comparer des grandeurs, les additionner, les multiplier par un nombre, les diviser en parts égales sont des opérations souvent malaisées, voire impossibles dès qu'elles mettent en œuvre des objets difficiles à manipuler vu leur encombrement ou leur poids. Les mesures ont pour vocation, pour fonction essentielle, de se substituer aux grandeurs chaque fois que c'est possible. Les mesures sont « les grandeurs passées sur le papier et dans la tête ». Elles représentent *fidèlement* les grandeurs parce que, comme nous venons de le voir, entre les grandeurs et leurs mesures, il y a proportionnalité : les sommes et les rapports se conservent : on peut manipuler les mesures au lieu des grandeurs elles-mêmes.

[6] C'est bien aussi comme cela qu'ils sont nés dans l'histoire, même si, depuis la fin du XIXe siècle, la plupart des traités construisent les nombres dans la théorie des ensembles, ce qui fait que, dans ce cas, ils précèdent la géométrie et les rapports géométriques.

[7] Remarquons que les nombres dont nous parlons sont les réels positifs. Nous nous occuperons des nombres relatifs

cm	pouces
1	0,3937
1,5	0,5906
4	1,5748
3	1,1811
4,5	1,7717
2,5	0,9843

Fig. 7

4.8 Changer d'unité

L'unité que l'on choisit pour mesurer des grandeurs est arbitraire : le choix n'obéit qu'à des motifs de commodité. Qu'arrive-t-il si on change d'unité ? Revenons à notre tableau de longueurs de la figure 6. Les longueurs y sont mesurées en centimètres. La figure 7 montre les mêmes longueurs mesurées en pouces : 1 pouce vaut 2,54 cm. Les nouvelles mesures s'obtiennent à partir des anciennes en multipliant celles-ci par la mesure de l'ancienne unité dans la nouvelle. Un phénomène paradoxal déroute beaucoup de gens : c'est que plus l'unité est petite, plus les mesures sont grandes. Les deux dernières colonnes de la figure 7 constituent elles aussi un tableau de proportionnalité.

Sur les changements d'unité, voir le chapitre 3.

4.9 Les représentations de données

S'il est vrai, comme nous l'avons souligné à la section 4.7, qu'il est souvent avantageux de substituer les mesures aux grandeurs, il est parfois utile de revenir des mesures à des grandeurs faciles à percevoir, telles que des longueurs, des secteurs circulaires, etc. Ainsi lorsqu'on dispose d'un ensemble de données sous forme de mesures, on peut les représenter graphiquement, ce qui a l'avantage, par rapport à la consultation d'un tableau de nombres, d'offrir une vue d'ensemble des données et de faciliter les comparaisons.

Montrons sur un exemple qu'une représentation graphique s'obtient à la suite de deux opérations. Le tableau 7 montre les consommations journalières d'eau d'une famille.

alimentation	5 l
vaisselle	8 l
hygiène corporelle	38 l
WC	43 l
lessive	16 l
entretien	10 l

Tableau 7.

D'abord, on choisit une échelle de 1 cm pour 10 litres, en vue de représenter les quantités par des bâtonnets. Le tableau 8 montre dans sa troisième colonne, les longueurs obtenues. Les deux dernières colonnes du tableau expriment une proportionnalité.

à la section 6.

Ensuite il faut construire le graphique, c'est-à-dire dessiner (par exemple) des bâtonnets dont les hauteurs aient les mesures calculées. C'est de nouveau l'expression d'une proportionnalité. La figure 8 montre le diagramme.
On peut aussi transformer ces données en pourcentages de la consommation totale, comme le montre le tableau 9. La réduction à la base 100, si on la fait pour plusieurs familles, facilite la comparaison des proportions d'eau consacrées par ces familles aux différents usages. Par contre elle fait disparaître la communication des valeurs réellement consommées.

alimentation	5 l	0,5 cm
vaisselle	8 l	0,8 cm
hygiène corporelle	38 l	3,8 cm
WC	43 l	4,3 cm
lessive	16 l	1,6 cm
entretien	10 l	1 cm

Tableau 8.

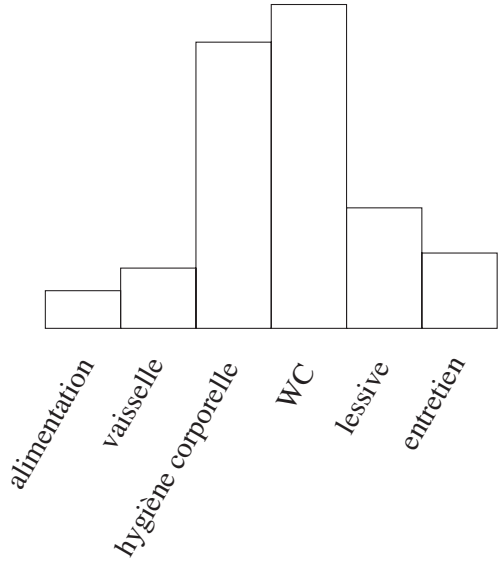


Fig. 8

alimentation	5 l	4,1 %
vaisselle	8 l	6,7 %
hygiène corporelle	38 l	31,6 %
WC	43 l	35,8 %
lessive	16 l	13,3 %
entretien	10 l	8,3 %

Tableau 9.

Les pourcentages peuvent se traduire en diagrammes circulaires. Il faut pour cela les convertir en secteurs circulaires, ce qui est encore une opération de proportionnalité.

Sur divers modes de représentation de données, voir les chapitres 4 et 5.

5 Les rapports de mesures

> L'espace et le temps sont des quantités de nature différente, ... on sent bien qu'on ne peut diviser l'espace par le temps ; ainsi quand on dit que *les vitesses sont comme les espaces divisés par les temps*, c'est une expression abrégée qui signifie que les vitessses sont comme les rapports des espaces à une même commune mesure, divisés par les rapports des temps à une même commune mesure ; c'est-à-dire que si l'on prend, par exemple, le pied pour la mesure des espaces, et la minute pour la mesure des temps, les vitesses de deux corps qui se meuvent uniformément sont entre elles comme les nombres de pieds parcourus divisés par les nombres de minutes employées à les parcourir, et non pas comme les pieds divisés par les minutes.
>
> J. d'Alembert

Voyons maintenant ce que deviennent les tableaux de proportionnalité lorsqu'on passe des grandeurs aux mesures. L'effet le plus notable de ce passage sera de nous faire retrouver un rapport externe pour les tableaux de proportionnalité entre grandeurs d'espèces différentes.

5.1 Grandeurs de même nature

Commençons toutefois par des grandeurs de même nature, et retournons au tableau 4 qui mettait en regard les longueurs des segments visibles sur un petit tangram et sur un autre deux fois plus grand. Complétons ce tableau en lui adjoignant à gauche une colonne reprenant les longueurs des segments du petit tangram, et à droite une colonne avec les longueurs des segments du grand (voir tableau 10). Pour toutes les mesures, nous avons choisi pour unité la longueur du segment a.

1	a	a'	2
1,41...	b	b'	2,82...
2	c	c'	4
2,82...	d	d'	5,64...
3	e	e'	6
4	f	f'	8

Tableau 10.

Entre la première et la quatrième colonnes du tableau, il y proportionnalité, avec 2 pour rapport externe. On vérifie sans peine pour ces colonnes de mesures la propriété des rapports internes et celle de la somme.

Sur les tableaux de proportionnalité entre grandeurs de même nature, voir le chapitre 5. Dans le même chapitre, on étudie un dessin à l'échelle.

5.2 Grandeurs de natures différentes

Revenons maintenant aux tableaux qui établissent une correspondance entre grandeurs de natures différentes, telles par exemple que des volumes et des masses de solides d'une même matière. Choisissons l'aluminium comme à la section 2 et reprenons dans un tableau quelques volumes et quelques masses (voir tableau 11). Ajoutons à ce tableau deux nouvelles colonnes : une à gauche des volumes et qui représente leurs mesures en dm^3, et une à droite des masses et qui représente leurs mesures dans l'unité kg : voir tableau 12. Ce qui est intéressant maintenant, c'est que la première et la quatrième colonnes sont deux colonnes de nombres. Or nous avons vu qu'entre deux nombres (non nuls), il y a un rapport. Si nous enjambons les deux colonnes centrales, *nous retrouvons un rapport externe* (que nous n'avions pas entre les grandeurs elles-mêmes), et qui se trouve être le même pour tous les couples. Nous avons donc construit un *tableau de proportionnalité entre les mesures*.

vol.	masse
v_1	m_1
v_2	m_2
v_3	m_3
v_4	m_4
v_5	m_5
v_6	m_6
...	...

Tableau 11.

dm^3	vol.	masse	kg
2	v_1	m_1	5,4
3	v_2	m_2	8,1
5	v_3	m_3	13,5
12	v_4	m_4	32,4
15	v_5	m_5	40,5
8	v_6	m_6	21,6
...	...	...	...

Tableau 12.

Ce rapport constant est appelé la *masse volumique* de la matière dont sont faits les corps que nous étudions. Évidemment, cette masse volumique dépend des unités que nous avons choisies. Dans notre exemple, et puisque nous avons choisi pour unité de volume le dm^3 et pour unité de masse le kg, la masse volumique vaut 2,7 $\mathrm{kg/dm}^3$.

Sur le tableau de proportionnalité des mesures, nous retrouvons aussi la propriété des rapports internes : le rapport des mesures de volumes de deux corps est toujours égal au rapport des mesures de leurs masses.

Et enfin, nous retrouvons aussi la propriété de la somme : la somme de deux mesures de volumes correspond à la somme des mesures des masses correspondantes.

En conclusion, lorsque nous avons affaire à un tableau de proportionnalité qui met en correspondance deux grandeurs de deux natures différentes, le tableau de leurs mesures possède les trois propriétés de l'existence d'un rapport externe, de l'égalité des rapports internes et de la correspondance des sommes.

Voir au chapitre 5 un exemple de proportionnalité entre massse et volume.

5.3 Graphiques de fonctions linéaires

À titre d'exemple, repartons du tableau 12. Nous voulons le mettre en graphique, ce qui aboutira à la figure 9. Montrons que cette opération se décompose en plusieurs autres.

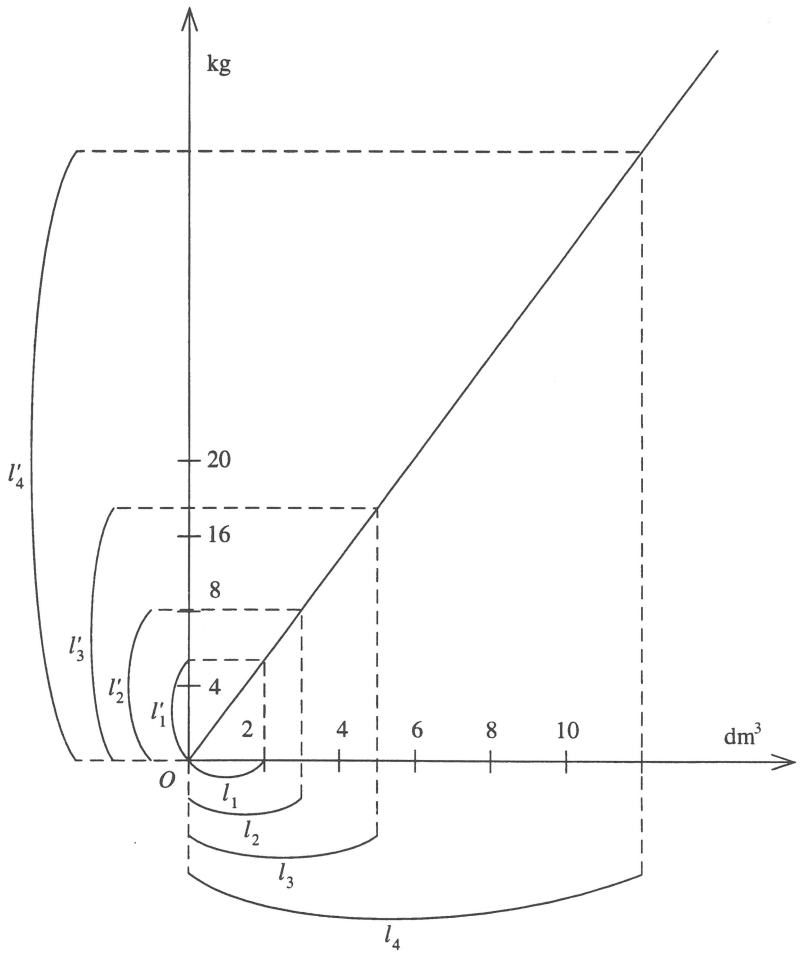


Fig. 9

Ayant décidé de représenter les volumes par des segments, nous devons choisir la longueur du segment qui représentera l'unité de volume : disons 0,5 cm pour 1 dm^3. Nous devons choisir ensuite une longueur de segment pour représenter l'unité de masse : disons 0,25 cm pour 1 kg. Ceci fait, nous pouvons comme le montre le tableau 13 faire correspondre des mesures de longueurs aux volumes et aux masses. Mais ce n'est pas tout, car nous devons encore convertir ces longueurs en segments, pour pouvoir les reporter sur le graphique. C'est ce que montre le tableau 14.

On retrouve dans la figure 9 les rectangles à côtés proportionnels avec leurs diagonales superposées, que nous avons déjà rencontrés à la section 3.3. Le tableau 14 montre comment on recourt de façon répétée à des proportionnalités pour représenter une fonction de façon commode. Remarquons que le choix de deux échelles et le retour aux grandeurs par le tracé des axes gradués sont des opérations de routine pour représenter des fonctions quelconques, et donc pas seulement des fonctions linéaires.

cm	dm^3	vol.	masse	kg	cm
1	2	v_1	m_1	5,4	1,35
1,5	3	v_2	m_2	8,1	2,025
2,5	5	v_3	m_3	13,5	3,375
6	12	v_4	m_4	32,4	8,1
7,5	15	v_5	m_5	40,5	10,125
4	8	v_6	m_6	21,6	5,4
...	...	...	...	...	...

Tableau 13.

long.	cm	dm^3	vol.	masse	kg	cm	long.
l_1	1	2	v_1	m_1	5,4	1,35	l'_1
l_2	1,5	3	v_2	m_2	8,1	2,025	l'_2
l_3	2,5	5	v_3	m_3	13,5	3,375	l'_3
l_4	6	12	v_4	m_4	32,4	8,1	l'_4
l_5	7,5	15	v_5	m_5	40,5	10,125	l'_5
l_6	4	8	v_6	m_6	21,6	5,4	l'_6
...	...	...	...	...	...	...	...

Tableau 14.

Voir des exemples et contre-exemples de fonctions linéaires aux chapitres 5 et 6.

5.4 Des objets et des opérateurs

Pour faire le point, à ce stade de notre étude, réexaminons les divers rôles qu'y ont joués les grandeurs et les nombres.

Au début nous n'avions pratiquement que des grandeurs. Nous ne nous sommes servis à ce stade initial que de nombres très simples tels que 2, $\frac{1}{2}$ ou 1 et $\frac{1}{2}$.

Puis nous avons *opéré* sur les grandeurs en nous servant des nombres : nous avons multiplié une grandeur par un naturel, divisé une grandeur par un naturel, puis combiné ces deux opérations pour arriver à multiplier une grandeur par une fraction (un rationnel). Et nous avons soupçonné au passage l'arrivée de nouveaux nombres, les irrationnels, mais avec une fonction analogue, celle d'opérer sur une grandeur en la « multipliant ».

À ce stade, nous nous intéressions donc à deux sortes de choses : les grandeurs (et leurs rapports) d'une part, et les nombres *opérant* sur les grandeurs de l'autre. Les grandeurs étaient plutôt de l'ordre des choses que l'on *perçoit*, et les nombres de l'ordre des choses qui *guident une action*, des choses avec lesquelles on *agit*, des sortes d'*outils*.

Les opérateurs numériques nous ont amenés à exprimer les rapports par des nombres. Et, moyennant le choix d'une unité standard, nous sommes arrivés à associer à chaque grandeur sa mesure, et à toute mesure la grandeur correspondante. Nous pouvions alors, et c'était bien commode, substituer le plus souvent les mesures aux grandeurs. Mais à partir de là, les nombres jouaient un double rôle : d'une part à travers les mesures, ils prenaient la place des grandeurs, mais d'autre part ils continuaient à jouer le rôle d'opérateurs, non plus sur les grandeurs mais sur leurs mesures.

De là viennent des distinctions plus ou moins éclairantes comme celle des *nombres concrets* (par exemple 4 dans « 4 mètres ») et des *nombres abstraits* (par exemple 3 dans « 3 fois 4 mètres », ou encore 3 et 4 dans « 3×4 » lorsque les nombres ne renvoient qu'à eux-mêmes). Ou encore la distinction entre *multiplicande* et *multiplicateur* puisque dans un produit, les deux facteurs ne jouent pas toujours le même rôle[8].

Pour la suite de l'exposé, retenons principalement qu'à ce stade, *un seul et même type d'objet mental, à savoir les nombres,* joue deux rôles. Plus tard, dans le développement de la structure linéaire, ces deux rôles seront assumés par des objets mentaux distincts.

6 Les rapports de grandeurs orientées

> Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs ; et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire, aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce.
>
> A.-L. Cauchy

Jusqu'ici tout notre exposé a porté sur les grandeurs et la mesure des grandeurs. La mesure d'une grandeur est toujours un nombre positif. Nous n'avons donc à aucun moment éprouvé le besoin de recourir à des nombres négatifs. Mais il y a des situations où apparaissent des « grandeurs » de deux types, que l'on pourrait dire *antagonistes*, et qui conduisent à des mesures tant négatives que positives. Tel est le cas par exemple des abscisses sur une droite, des temps sur l'échelle des durées, des vitesses, des charges électriques et de bien d'autres. Nous regroupons ces types de grandeurs sous la dénomination commune de *grandeurs orientées*[9].

Commençons par étudier deux d'entre elles qui sont apparentées aux longueurs, à savoir les positions et variations de position sur une droite.

Au début de cet exposé, nous avons étudié les *grandeurs en elles-mêmes*, munies d'un ordre et d'une somme (cf. 3.1) avant d'étudier les *rapports de grandeurs* et les tableaux de proportionnalité (cf. 3.2 et 3.3). Nous procéderons ici dans le même ordre, en rappelant d'abord ce que sont ces grandeurs orientées munies d'un ordre et d'une somme, puis en nous occupant à leur propos des rapports et proportions.

6.1 Les positions et les variations de position

Pour situer un point sur une droite, on choisit une origine sur celle-ci, on se donne la longueur du segment entre le point et l'origine et on marque cette longueur par un symbole arbitraire exprimant le fait que le point se trouve d'un côté ou de l'autre de l'origine. Le symbole peut être un + ou un −, mais remarquons que nous ne parlons pas encore ici de mesures. Ces longueurs marquées sont ordonnées, mais pas du tout comme les longueurs ordinaires. En ce qui les concerne, les symboles

[8] Et qu'en outre lorsqu'on les dispose l'un en dessous de l'autre pour effectuer l'algorithme de la multiplication, il faut bien en mettre un au dessus et l'autre en dessous, et que l'algorithme n'est pas le même selon le choix que l'on fait.

[9] Dans cette étude, nous réservons le nom de *grandeur orientée* aux « grandeurs » qui sont mesurées par *un* nombre relatif. Nous n'utiliserons donc pas cette expression pour les grandeurs de nature vectorielle à deux dimensions ou davantage.

$<$ et $>$ veulent dire respectivement non pas *plus petit* et *plus grand*, mais bien *avant* et *après* dans le sens choisi sur la droite.

Une longueur marquée a pour fonction première de repérer un point sur la droite, de dire où il est. À cause de cela, on voit mal a priori le sens qu'il y aurait à définir une addition sur ces longueurs.

Passons maintenant aux variations de position sur une droite. Ce sont les distances (plus précisément les longueurs) dont on peut déplacer un point sur la droite, mais affectées d'un signe (par exemple $+$ ou $-$) selon que le point est déplacé dans un sens ou l'autre sur la droite. On ordonne les variations de position en disant que

1) si deux variations de position sont positives, l'une est plus petite que l'autre si la distance (au sens ordinaire) correspondant à la première est plus petite que la distance correspondant à la seconde ;

2) si les deux variations sont l'une positive et l'autre négative, la négative est plus petite que la positive ;

3) et enfin si les deux variations sont négatives, celle qui correspond à la plus grande distance est plus petite que l'autre.

Comme on met deux baguettes ou deux segments bout à bout pour les additionner, il semble naturel de convenir qu'additionner deux variations de position, c'est les exécuter l'une après l'autre, les enchaîner. Mais cette définition souffre d'une limitation gênante. En effet, pour pouvoir enchaîner deux variations de position, il faut que le point d'arrivée de la première coïncide avec le point de départ de la seconde. Or on voudrait pouvoir additionner deux variations de position quelconques. Il nous faut pour cela adapter la notion de variation de position.

Répétons que pour additionner deux longueurs, représentées par deux baguettes, nous mettons ces dernières bout à bout en les alignant. Et pour ce faire, il nous faut le plus souvent déplacer les baguettes pour les amener dans la position voulue. Une baguette (un segment) donnée représente toujours la même longueur, où qu'elle se trouve dans l'espace, ce qui nous laisse la liberté de l'amener où nous voulons.

Pour pouvoir additionner deux variations de position quelconques sur une droite, il nous suffit de donner aux variations de position sur la droite la même liberté de mouvement que nous donnons aux baguettes dans l'espace. Autrement dit, deux déplacements d'un point sur la droite (ou deux segments orientés) seront considérés comme représentant la même variation de position pour autant qu'ils aient même longueur et même sens. Il faut un effort d'imagination pour assimiler ce nouveau concept de variation de position.

Jusqu'ici nous avons associé aux positions et variations de position des longueurs munies d'un signe. Nous n'avons donc pas encore parlé de mesurer ces longueurs. Si nous les mesurons (comme on mesure des longueurs ordinaires), mais affectons les nombres trouvés, selon le cas, d'un signe $+$ ou d'un signe $-$, nous obtenons les nombres relatifs. En outre, l'ordre sur les positions et les variations de position nous fournit l'ordre sur les nombres relatifs. Et enfin l'addition des variations de position nous fournit les règles applicables à l'addition des nombres relatifs.

Jusqu'ici également nous n'avons considéré que des grandeurs orientées qui se ramènent à des longueurs munies d'un signe. Quant aux autres, les temps, vitesses, etc., elles se ramènent aux précédentes moyennant des opérations de mesure et des choix d'échelles de représentation analogues à ceux que l'on rencontre dans les grandeurs ordinaires (cf. section 4). Nous n'en parlerons donc pas davantage.

6.2 Les tableaux de proportionnalité entre nombres relatifs

Fixons maintenant notre attention sur les grandeurs orientées mesurées, et donc sur les nombres relatifs. Nous voudrions étendre à ceux-ci la notion de tableau de proportionnalité. Pour cela, nous devons convenir de ce que sera un rapport entre deux nombres relatifs. Supposons pour un moment que les règles de la multiplication des relatifs aient été élaborées, et justifiées de l'une ou l'autre façon, comme on le fait dans l'enseignement secondaire. Nous dirons alors que si y et x sont deux nombres relatifs quelconques, le rapport de x à y est le nombre (relatif) a qui est tel que $y = ax$. Ceci fait, nous pouvons dresser des tableaux de proportionnalité correspondant à des rapports externes a quelconques.

−3	−6
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tableau 15.

−3	6
−2	4
−1	2
0	0
1	−2
2	−4
3	−6
4	−8
5	−10

Tableau 16.

Les tableaux 15 et 16 sont caractérisés respectivement par les rapports externes 2 et −2.

On vérifie sans peine que dans de tels tableaux, la propriété de la somme et celle des rapports internes sont vérifiées, ce qui est rassurant. Ces tableaux sont illustrés par les figures 10 et 11.

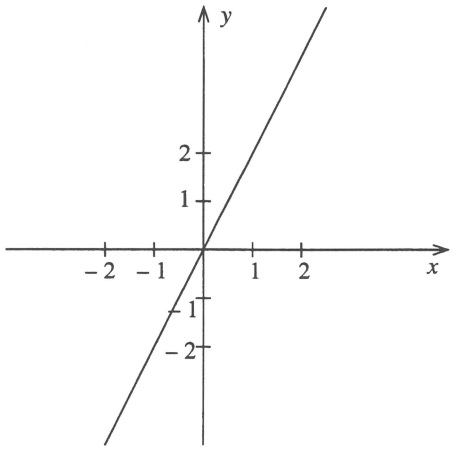


Fig. 10

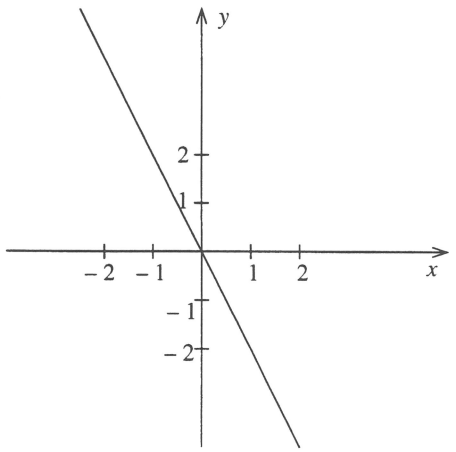


Fig. 11

Supposons maintenant que nous ayons choisi pour la multiplication des relatifs une règle des signes différant de la règle ordinaire. Par exemple que *moins par moins donne moins* et que les autres cas de la règle des signes demeurent inchangés. Nous devons alors remplacer le tableau 16 par le tableau 17 et la figure 11 par la figure 12.

−3	−6
−2	−4
−1	−2
0	0
1	−2
2	−4
3	−6
4	−8
5	−10

Tableau 17.

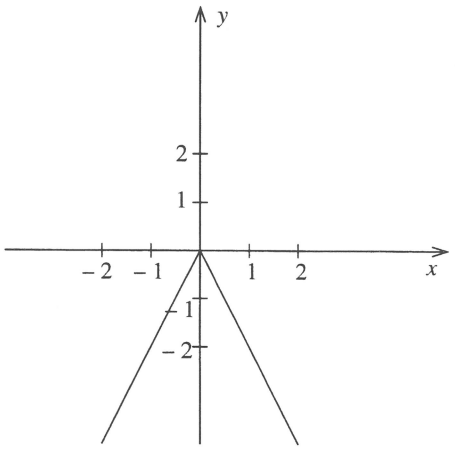


Fig. 12

Le tableau 17 ne vérifie plus ni la propriété de la somme, ni celle des rapports internes. La figure 12 ne représente plus une droite.

Nous pourrions vérifier de même les perturbations qu'introduiraient d'autres modifications à la règle des signes. La conclusion est que celle-ci a un effet majeur : elle permet l'extension aux nombres relatifs de la notion de tableau de proportionnalité, c'est-à-dire de la notion de fonction linéaire. Elle permet la représentation de chaque droite passant par l'origine par une équation simple. Toute autre règle bouleverserait la géométrie analytique[10].

Sur l'extension des tableaux de proportionnalité aux nombres relatifs, voir le chapitre 5.

6.3 Nouveaux objets, nouveaux opérateurs

Jetons maintenant un coup d'œil d'ensemble sur cette sixième section. Nos avons vu que la notion de tableau de proportionnalité résiste au passage des grandeurs ordinaires aux grandeurs orientées, des rapports et mesures positifs aux rapports et mesures exprimés par des nombres relatifs, de la somme des mesures positives à la somme des mesures exprimées par des nombres relatifs. Toutefois, dans les nouveaux tableaux de proportionnalité, les rapports externe et internes et la propriété de la somme ont évidemment changé de visage. Heureusement ce changement est une généralisation : ce que nous avons dit avant le passage aux nombres relatifs demeure applicable aux situations nouvelles lorsque celles-ci ne font apparaître, parmi les nombres relatifs, que des nombres positifs.

Lorsque nous considérions les grandeurs ordinaires, nous avons remarqué que les mesures et les opérateurs étaient tous deux des nombres, positifs en l'occurrence (voir 5.4). Ceci demeure vrai dans le cadre des grandeurs orientées : les mesures et les opérateurs sont encore tous deux des nombres, à ceci près qu'il s'agit maintenant de nombres relatifs. C'est seulement à la section 7 que nous verrons les mesures et les opérateurs prendre des visages différents.

6.4 Les fonctions affines

Les fonctions linéaires, représentées par des tableaux de proportionnalité, ont pour graphiques des droites passant par l'origine (voir figures 10 et 11). Mais dans de nombreuses circonstances, d'autres types de fonctions se présentent naturellement. Par exemple, un mouvement uniforme sur un axe des x répond à une équation du type

$$x(t) = x_0 + vt,$$

t	$x(t)$
-3	$-3,5$
-2	-2
-1	$-0,5$
0	1
1	$2,5$
2	4
3	$5,5$
4	7
5	$8,5$

Tableau 18.

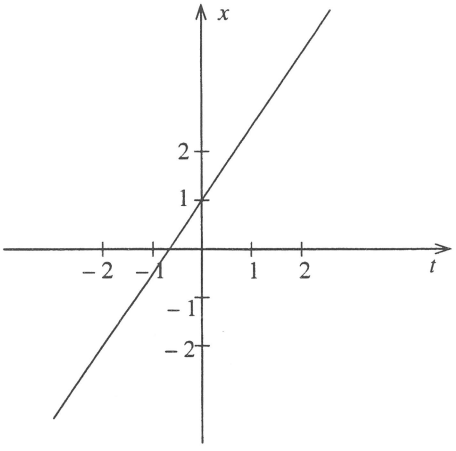


Fig. 13

où t est le temps, v la vitesse et x_0 l'abscisse du point au temps $t = 0$. Un exemple d'une telle fonction (que l'on n'obtient bien entendu qu'après avoir choisi des unités pour les abscisses, les

[10] H. FREUDENTHAL [1983] a observé que c'est à partir du moment où la géométrie analytique est entrée dans la pratique mathématique courante, c'est-à-dire dans la deuxième moitié du XVIIe siècle, que les nombres relatifs ont été utilisés constamment.

les temps et la vitesse) est $x(t) = 1 + 1,5t$. Le tableau 18 et la figure 13 sont deux expressions de cette fonction.

Le tableau 18 n'est pas défini par un rapport externe, et il ne possède ni la propriété de la somme, ni celle des rapports internes. Il ne représente donc pas une fonction linéaire. Toutefois, si on met en regard la différence entre deux termes de la première colonne et la différence entre les deux termes correspondants de la seconde colonne, et que l'on fait cela autant de fois que l'on veut, on obtient un tableau de proportionnalité. Le tableau 19 illustre cette propriété en montrant les différences entre éléments successifs de chaque colonne.
Cette proportionnalité des différences n'exprime rien d'autre, dans le cas du mouvement uniforme, que la propriété que résume la formule : *même durée, même distance parcourue.*

	t	$x(t)$	
	-3	$-3,5$	
1	-2	-2	1,5
1	-1	$-0,5$	1,5
1	0	1	1,5
1	1	2,5	1,5
1	2	4	1,5
1	3	5,5	1,5
1	4	6	1,5
1	5	7,7	1,5

Tableau 19.

Sur les fonctions affines, voir entre autres le chapitre 6.

7 Les vecteurs et les transformations

> Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas la voie d'accès la plus courte aux plus belles constructions de la géométrie. C'est pourquoi je pense qu'en ce qui concerne la géométrie, nous avons besoin d'une autre analyse encore qui soit clairement géométrique ou linéaire et qui exprime directement les *situations* comme l'algèbre exprime directement les *grandeurs*.
>
> G. Leibniz

Dans cette étude, nous avons d'abord examiné les grandeurs au sens ordinaire, dont les mesures étaient des nombres positifs. Nous avons ensuite étudié les grandeurs orientées, dont les mesures étaient des nombres relatifs. Mais les grandeurs ordinaires et les grandeurs orientées n'épuisent pas le champ des grandeurs, si on accepte de donner à ce mot une signification assez étendue. En effet, les changements de position dans l'espace (et non plus seulement sur une droite), les translations, les forces, les vitesses, les champs électriques et magnétiques, etc. sont autant de choses qui peuvent être plus ou moins grandes, plus ou moins intenses, et qui sont par conséquent douées de grandeur. Mais en outre elles ont une direction dans l'espace, et un sens sur cette direction. On les qualifie de *vectorielles*.

Nous n'essaierons pas d'étendre la notion de tableau de proportionnalité successivement aux changements de position, translations, forces, vitesses, etc., car cela nous conduirait trop loin, et dans certains cas n'aurait guère de sens[11]. Nous ne ferons ici cette tentative d'extension que pour les *changements de position* d'un point dans un plan (et dans l'espace ce serait la même chose), ce qui nous conduira aux combinaisons et transformations linéaires. Ensuite, à la section 8, nous reprendrons un par un les autres types de grandeurs vectorielles pour indiquer la spécificité de chacun.

7.1 De la droite au plan

À la section 6.1, nous avons étudié les variations de position sur une droite. Passons maintenant au plan et à l'espace.

[11] Voir à ce sujet la section 8.

Considérons un mobile ponctuel passant d'un point à un autre. Le mouvement le plus simple qui réalise cela suit le segment qui a pour origine le point de départ du mobile et pour extrémité son point d'arrivée. Cette variation de la position est ainsi caractérisée par un segment orienté qui va du point de départ au point d'arrivée. Ce segment possède une longueur, une direction et un sens.

Si nous voulons étendre la notion de tableau de proportionnalité, ou – si on préfère –, de fonction linéaire, à ces objets nouveaux, nous devrons d'abord définir, en ce qui les concerne, les notions de *somme* et de *rapport*.

Pour la *somme*, inspirons nous des variations de position sur une droite. Par définition, additionner deux variations de position dans un plan ou l'espace consistera à enchaîner les deux segments orientés qui les représentent. Mais pour que cette addition soit définie pour deux variations de position quelconques, il faut que nous puissions toujours déplacer les segments orientés pour les amener en position enchaînée. Et donc, de même – rappelons-le –, que nous pouvions déplacer deux baguettes quelconques pour additionner leurs longueurs, nous nous donnerons la liberté de déplacer n'importe quel segment orienté, en prenant toutefois la précaution de lui conserver toujours même longueur, même direction et même sens. Nous désignerons les segments orientés ainsi libérés, du nom de *vecteurs libres*, ou en abrégé de *vecteurs*.

Venons-en maintenant au *rapport* de deux vecteurs. On pense tout de suite à ce que peut vouloir dire *multiplier un vecteur par un nombre relatif*. C'est multiplier sa longueur par la valeur absolue de ce nombre et, tout en maintenant sa direction, changer son sens ou non selon que le nombre par lequel on multiplie est négatif ou positif. Et on est tenté alors de dire que deux vecteurs ont entre eux le *rapport* α, où α est un nombre relatif, si en multipliant le premier par α on obtient le second.

Mais une telle définition du rapport n'est pas vraiment satisfaisante. En effet, selon cette définition, deux vecteurs ne peuvent avoir un rapport entre eux que s'ils ont même direction. Or nous voudrions assez naturellement que deux vecteurs quelconques, même de directions différentes, aient entre eux un rapport, ce qui n'est pas possible avec notre définition. Que faire ?

7.2 Un tableau de proportionnalité étriqué

Malgré cette restriction, essayons de construire un tableau de proportionnalité qui s'appuie sur cette notion de rapport. Juste pour voir. Commençons par deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'} = \lambda\overrightarrow{a}$, de rapport λ (voir tableau 20).
Inscrivons ensuite dans notre tableau n'importe quels couples $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c'})$ tels que

$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{a'} = \lambda\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b} = \mu\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{b'} = \mu\overrightarrow{a'}$
$\overrightarrow{c} = \nu\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{c'} = \nu\overrightarrow{a'}$
$\dots$	$\dots$
$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'}$
$\dots$	$\dots$

Tableau 20.

$$\overrightarrow{b} = \mu\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \mu\overrightarrow{a'},$$
$$\overrightarrow{c} = \nu\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c'} = \nu\overrightarrow{a'},$$

où μ et ν sont deux nombres quelconques, et aussi tout couple de la forme

$$(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'}) \tag{1}$$

à condition que $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c'})$ soient déjà dans le tableau.

On vérifie sans peine que dans un tel tableau, tout vecteur de droite est égal au vecteur correspondant de gauche multiplié par λ. Ainsi λ est le *rapport externe* du tableau. On vérifie aussi que ce tableau possède les deux propriétés des rapports internes et de la somme.

Toutefois, l'objection que nous pouvions craindre est bien là : $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'}$ étant choisis au départ dans une certaine direction, tous les autres vecteurs du tableau ont cette même direction. Et donc nous ne sommes pas arrivés à construire un tableau de proportionnalité dans la première colonne duquel nous puissions inscrire n'importe quel vecteur, avec en face celui qui lui correspondrait dans un rapport donné à l'avance.

À nouveau, que faire ? Nous devons certainement remplacer notre notion trop étroite de rapport. Il nous faudrait une notion de rapport qui permette le passage d'un vecteur quelconque à un autre vecteur quelconque. Existe-t-il une telle notion ? Pour l'instant, mystère...

7.3 Une généralisation du rapport interne

Ce qui est possible par contre, c'est de passer de *deux* vecteurs quelconques à *un* vecteur quelconque, à condition que les deux premiers soient non nuls et de directions différentes. Soient en effet deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de ce type. Alors, n'importe quel autre vecteur $\overrightarrow{c}$ peut être représenté sous la forme

$$\overrightarrow{c} = \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\,\overrightarrow{b}, \tag{2}$$

où α et β sont deux nombres appropriés (rappelons que nous travaillons dans le plan). On dit dans ces conditions que $\overrightarrow{c}$ est une *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Une combinaison linéaire n'est pas un rapport, mais elle généralise la notion de rapport du fait qu'elle s'y ramène lorsqu'on revient du plan à la droite.

Pouvons-nous, à partir de là, construire quelque chose qui ressemble à un tableau de proportionnalité ? Essayons de *remplacer les rapports internes par des combinaisons linéaires.* Commençons par inscrire dans la première colonne deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non nuls et dans la deuxième colonne les vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ tels que (voir tableau 21)

$$\overrightarrow{a'} = \lambda\,\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \lambda\,\overrightarrow{b}, \tag{3}$$

où λ est un nombre non nul. On le voit, nous essayons de maintenir pour le *rapport externe* notre ancienne notion de rapport.

Ajoutons ensuite, dans la première colonne, toutes les combinaisons linéaires que nous voulons des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, par exemple $\alpha_1\,\overrightarrow{a} + \beta_1\,\overrightarrow{b}$ ou encore $\alpha_2\,\overrightarrow{a} + \beta_2\,\overrightarrow{b}$. Nous pouvons par ce procédé inscrire dans cette première colonne n'importe quel vecteur choisi au hasard. Décidons d'inscrire en face les combinaisons linéaires correspondantes (c'est-à-dire de mêmes coefficients) de $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$.

$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{a'} = \lambda\,\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{b'} = \lambda\,\overrightarrow{b}$
$\alpha_1\,\overrightarrow{a} + \beta_1\,\overrightarrow{b}$	$\alpha_1\,\overrightarrow{a'} + \beta_1\,\overrightarrow{b'}$
$\alpha_2\,\overrightarrow{a} + \beta_2\,\overrightarrow{b}$	$\alpha_2\,\overrightarrow{a'} + \beta_2\,\overrightarrow{b'}$
...	...

Tableau 21.

De cette façon, les combinaisons linéaires de gauche – qui nous servent de rapports internes –, correspondent bien à celles de droite. Notre tableau ainsi constitué peut contenir autant de couples que nous voulons.

Assurons-nous maintenant que notre tableau vérifie la propriété des rapports internes, en prenant *rapport interne* au sens nouveau de combinaison linéaire. Soit une combinaison linéaire de deux éléments quelconques de gauche, par exemple

$$\mu(\alpha_1\,\overrightarrow{a} + \beta_1\,\overrightarrow{b}) + \nu(\alpha_2\,\overrightarrow{a} + \beta_2\,\overrightarrow{b}), \tag{4}$$

ce qui revient aussi à

$$(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2)\,\overrightarrow{a} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2)\,\overrightarrow{b}. \tag{5}$$

La même opération exécutée dans la colonne de droite nous amène à

$$\mu(\alpha_1 \overrightarrow{a'} + \beta_1 \overrightarrow{b'}) + \nu(\alpha_2 \overrightarrow{a'} + \beta_2 \overrightarrow{b'}), \tag{6}$$

et ensuite à

$$(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2) \overrightarrow{a'} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2) \overrightarrow{b'}. \tag{7}$$

Cette expression s'écrit aussi

$$\lambda[(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2) \overrightarrow{a} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2) \overrightarrow{b}]. \tag{8}$$

On voit ainsi qu'entre (4) et (6) on retrouve le rapport externe λ.

Par ailleurs, nous n'avons pas à contrôler que notre tableau vérifie la propriété de la somme, puisque la somme est un cas particulier de combinaison linéaire.

Nous avons donc bien construit un tableau de proportionnalité, si nous acceptons d'appeler ainsi un tableau dans lequel les combinaisons linéaires ont pris la place des rapports internes.

La nature même du rapport externe de ce tableau est telle que tout vecteur de droite est égal au vecteur correspondant de gauche multiplié par un nombre λ. Une telle transformation des vecteurs du plan porte le nom d'*homothétie*. Voilà donc l'aboutissement de notre recherche à ce stade : nous voyons les homothéties comme pouvant être exprimée par des « tableaux de proportionnalité », en un sens convenablement adapté.

Un commentaire s'impose toutefois. Dans le cadre conceptuel où nous nous trouvons, une homothétie transforme les vecteurs *libres*, c'est-à-dire ces variations de position que nous pouvons transporter n'importe où, sans autre contrainte que de respecter leur grandeur, leur direction et leur sens. Mais le terme *homothétie* est plus souvent utilisé en un sens différent. Il désigne alors une transformation du plan dans laquelle un point origine reste fixe tandis que tous les autres s'écartent ou se rapprochent de l'origine dans une proportion donnée. Dans ce sens, une homothétie *n'agit pas sur des vecteurs libres, mais bien sur des points*. Nous reviendrons sur cette distinction à la section 8.1.

7.4 Une généralisation du rapport externe

Mais revoyons maintenant attentivement le développement qui nous a conduits aux homothéties. Pour constituer le tableau 21, nous avons d'abord inscrit à gauche des combinaisons linéaires quelconques de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, puis des combinaisons linéaires des vecteurs ainsi obtenus. Ceci fait, nous avons constaté que nous obtenions en face les mêmes combinaisons linéaires, mais cette fois des vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$. Or, et c'est cela qui est curieux, pour prouver ce résultat (la correspondance bien régulière des combinaisons linéaires entre la gauche et la droite, voir l'expression (7)), nous ne nous sommes pas du tout servis de la condition

$$\overrightarrow{a'} = \lambda \overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \lambda \overrightarrow{b}. \tag{9}$$

Nous n'avions imposé cette dernière condition que pour préserver cette forme de rapport externe pour notre tableau (ce qui a d'ailleurs réussi).

Donc, si nous voulons, nous pouvons choisir les vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ arbitrairement, et la propriété des rapports internes (des combinaisons linéaires) sera encore vérifiée. Celle de la somme aussi.

Mais, ceci fait, se pose une question cruciale. En effet, dans ces nouvelles conditions, notre rapport externe est perdu dans la forme que nous lui avions souhaitée. Alors, existe-t-il encore entre les

deux colonnes quelque chose que nous puissions appeler *rapport externe* ? Ou en termes plus imagés, quel peut bien être le contenu géométrique du passage de la colonne de gauche à celle de droite ?

Regardons cela de près. Tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de gauche peut être écrit sous la forme

$$\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{a} + x_2 \overrightarrow{b}. \tag{10}$$

Le vecteur correspondant de droite est alors de la forme

$$\overrightarrow{x'} = x_1 \overrightarrow{a'} + x_2 \overrightarrow{b'}. \tag{11}$$

Mais $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ peuvent aussi être écrits comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, par exemple sous la forme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a'} &= r_{11} \overrightarrow{a} + r_{12} \overrightarrow{b}, \\ \overrightarrow{b'} &= r_{21} \overrightarrow{a} + r_{22} \overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (11), nous obtenons encore

$$\overrightarrow{x'} = (x_1 r_{11} + x_2 r_{21}) \overrightarrow{a} + (x_1 r_{12} + x_2 r_{22}) \overrightarrow{b}. \tag{12}$$

Autrement dit, si le vecteur $\overrightarrow{x}$ s'exprime en fonction des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par le couple (x_1, x_2), son image $\overrightarrow{x'}$ s'exprime par rapport aux même vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par le couple $(x_1 r_{11} + x_2 r_{21}, x_1 r_{12} + x_2 r_{22})$. Pour le lecteur qui connaît déjà un peu le calcul vectoriel, on peut reformuler cela en disant que la transformation qui envoie $\overrightarrow{x}$ sur $\overrightarrow{x'}$ a pour expression dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$,

$$\begin{aligned} x'_1 &= r_{11} x_1 + r_{21} x_2, \\ x'_2 &= r_{12} x_1 + r_{22} x_2. \end{aligned}$$

Telle est donc la loi de passage des $\overrightarrow{x}$ aux $\overrightarrow{x'}$ ou, en d'autres termes, voilà ce qui nous tient lieu de *rapport externe*.

En réalité, nous arrivons là à des tableaux de proportionnalité (considérablement) généralisés qui expriment ce que l'on appelle les *transformations linéaires du plan*, pour la découverte desquelles nous renvoyons le lecteur à des exposés plus complets. Par delà les homothéties, on y trouve les isométries, les similitudes, les compressions, les cisaillements, ...

Notons toutefois une difficulté. Ces transformations sont habituellement vues comme expédiant chaque point du plan sur un autre (et parfois le même). Or un vecteur libre n'est pas a priori associé à un point. L'intuition le perçoit soit comme un segment orienté transportable, soit comme l'ensemble des segments orientés de même longueur, direction et sens qu'un segment donné. Dans les deux cas, cela exige un travail que d'associer tout vecteur libre à un et un seul point du plan et réciproquement.

7.5 Nouveaux objets, nouveaux opérateurs

Pour en revenir à la mutation à laquelle nous venons d'assister, insistons sur sa signification profonde. Dans nos tableaux de proportionnalité relatifs aux grandeurs, aux mesures de grandeurs et aux grandeurs orientées, nous avions des rapports internes et externes, mais ces rapports avec des noms différents étaient de la même nature et avaient tous le même contenu géométrique simple. Par contre, en passant aux « rapports » entre grandeurs à deux dimensions, nous assistons à une

bifurcation de la notion : les rapports internes deviennent des combinaisons linéaires (notion au contenu géométrique encore assez simple, caractérisée par deux nombres), mais les rapports externes deviennent des relations au contenu géométrique divers, impossibles à saisir d'un seul coup d'œil intuitif, et caractérisées par quatre nombres.

Remarquons pour en finir avec les variations de position que nous pourrions aussi les étudier dans l'espace. Les conclusions seraient analogues, quoique nous aurions alors à faire à des combinaisons linéaires de trois vecteurs, et le substitut des rapports externes serait représenté non plus par quatre nombres mais par neuf.

Le chapitre 8 introduit au calcul vectoriel en termes de déplacements. Il est complété par le chapitre 9 qui introduit le produit scalaire, expression de la bilinéarité. Voir aussi sur ces deux sujets, le chapitre 15.

7.6 Le plan quadrillé

Une comparaison peut éclairer la façon dont nous avons introduit les variations de position au début de cette section 7. Lors d'une leçon de gymnastique, un professeur dit à ses élèves : « Faites un pas en avant. » Les élèves peuvent exécuter ce mouvement parce qu'ils ont un *avant* et un *arrière* : chacun d'eux est un corps orienté. Tel n'est pas le cas d'un point dans un plan, et il n'est donc pas possible de décrire de cette façon une variation de position d'un point. Mais le professeur peut dire aussi : « Faites un pas vers le mur de gauche, ou vers le nord. » En disant cela, il se réfère à un repère déjà présent dans l'environnement. Nous aurions pu procéder de manière analogue, mais ce n'est pas ce que nous avons fait. Enfin le professeur peut faire lui-même un pas dans une direction choisie au hasard, puis dire à ses élèves : « Faites comme moi », voulant dire par là : « Faites un pas de la même longueur que le mien, dans la même direction et le même sens. » C'est comme cela que nous avons procédé, en évoquant un mobile ponctuel qui passe d'un point à un autre, puis en considérant que nous pouvions envisager un mouvement identique à partir de n'importe quel autre point.

En procédant ainsi, nous avons pu poser, sans avoir à tenir compte de quoi que ce soit d'autre, d'aucun repère préexistant, la question de ce que pourrait bien être un rapport entre deux variations de position. En échouant à définir un tel rapport dans le cas général, mais en reconnaissant ensuite la possibilité d'une sorte de rapport entre deux variations de position (non nulles et de directions différentes) et une troisième, nous avons fait naître la notion de *combinaison linéaire* et, implicitement, celle de base du plan vectoriel. En mettant ensuite au point un « tableau de proportionnalité » qui respecte cette sorte de rapport nouveau, nous avons fait naître la notion de *transformation linéaire*, autre et dernier avatar du rapport. Tout cela était conforme à l'objectif annoncé au début de cette étude et qui était de faire apparaître diverses mutations de la notion de rapport.

Il va de soi pourtant que dans la pratique, lorsqu'on veut spécifier une variation de position dans un plan, celui-ci est souvent déjà occupé par des objets ou des figures pouvant servir de repère. Par exemple sur les plans de villes, on peut se référer à un quadrillage. Celui-ci tient lieu de repère et permet d'emblée la décomposition des variations de position en deux composantes : avancer de tant, dans tel sens, dans une direction du quadrillage, puis de tant, dans tel sens, dans l'autre direction, le côté du carré servant d'unité de mesure. Cette façon plus concrète d'introduire les variations de position est mieux adaptée à une première approche de la linéarité que notre recherche des avatars de la notion de rapport. C'est le moment de rappeler que nous ne proposons pas du tout cette recherche comme thème d'un enseignement élémentaire.

Sur l'utilisation du plan quadrillé pour introduire les vecteurs géométriques, voir le chapitre 8.

8 Quelques sources de vecteurs

> ... Toute grandeur vectorielle dépend de deux éléments hétérogènes, l'un de nature arithmétique et l'autre de nature géométrique, qui sont un nombre et une direction. On peut lui attacher un *vecteur*, abstraction mathématique qui est à la grandeur vectorielle ce que le nombre est à la grandeur scalaire et, de même que l'étude des grandeurs scalaires se ramène à des raisonnements sur les nombres, celle des grandeurs vectorielles se ramène à des raisonnements sur les vecteurs.
>
> R. Bricard

8.1 Repérer les points d'un plan

À la section 6.1, nous avons étudié le repérage des points sur une droite. Examinons maintenant le repérage des points d'un plan. On ne peut pas spécifier la position d'un point si ce n'est par rapport à quelque chose. Et donc il faut au départ se donner un repère. Alors on part d'un point (que l'on appelle *l'origine*) dans une direction donnée, ce qui ne conduit qu'aux points d'une seule droite. Pour balayer les autres points du plan, il faut changer de direction. On peut par exemple tourner la droite choisie au départ, ce qui engendre les coordonnées polaires. Ici nous choisissons plutôt une deuxième droite passant par l'origine et partant dans une autre direction que la première. En munissant chacune des deux droites d'une unité orientée, nous obtenons un repère au sens bien connu en géométrie.

Si le plan que l'on considère est déjà muni d'un quadrillage (ou d'un pavage de parallélogrammes identiques entre eux), on installe un repère en choisissant deux droites sécantes du quadrillage, puis en orientant celles-ci.

La position d'un point par rapport à un repère est donnée par l'enchaînement de deux variations de position : on avance de tant depuis l'origine le long du premier axe, puis on avance de tant parallèlement au second axe. C'est là une combinaison linéaire des deux variations de position représentées par les deux unités orientées. Elle va de l'origine au point que l'on veut situer. Appelons-la *vecteur-position* de ce point. Ses deux coefficients sont appelés les *coordonnées* du point. Les vecteurs-positions sont aussi parfois appelés *vecteurs liés*.

Ce procédé fait jouer aux deux axes des rôles différents. Pour leur faire jouer le même rôle, on peut construire le parallélogramme défini par les deux axes et les parallèles à ceux-ci passant par le point à situer, puis considérer la variation de position qui, en suivant la diagonale, va de l'origine au sommet opposé de ce parallélogramme.

Et maintenant pourquoi s'intéresser au produit d'un vecteur-position par un nombre et à la somme de deux vecteurs-positions ? Car à première vue un tel vecteur semble avoir rempli son office dès qu'il a montré où est un point.

Toutefois, multiplier les vecteurs-positions de tous les points d'une figure par un même nombre aboutit à agrandir ou rapetisser la figure sans changer sa forme, ce qui a beaucoup de sens. En faisant cela, on réalise une *homothétie*.

D'autre part, si certains points du plan sont affectés d'une masse, pour déterminer le centre d'inertie de ce système de points, on est amené à faire la somme de tous les vecteurs-positions de ces points multipliés chacun par la masse correspondante. Cette application justifie amplement le produit d'un vecteur-position par un nombre et la somme de deux vecteurs-positions.

Ces deux opérations s'introduisent d'ailleurs de façon naturelle, puisque pour multiplier un vecteur-position par un nombre, il suffit de multiplier chacune de ses coordonnées par le nombre, et pour additionner deux vecteurs-positions, il suffit d'additionner deux à deux leurs coordonnées.

Comparés aux variations de position, les vecteurs-positions ont l'avantage de correspondre chacun à un point du plan et réciproquement. Ils semblent donc particulièrement adaptés à l'étude des transformations linéaires du plan : ce sont des transformations dans lesquelles chaque point est envoyé sur un autre point (ou sur lui-même). L'homothétie mentionnée ci-dessus en est un exemple, mais il y a aussi les rotations, les symétries orthogonales et bien d'autres.

Parmi ces transformations, certaines sont linéaires, c'est-à-dire conservent les combinaisons linéaires, et d'autres non. Mais c'est là un résultat théorique qui ne sera habituellement rencontré que bien après l'étude des transformations familières.

8.2 Les translations

Soit une figure dans un plan. Si on la fait glisser sans la tourner vers un autre endroit du plan, on obtient une deuxième figure identique à la première. En répétant ce mouvement (un glissement dans la même direction et sur la même distance) à partir de la deuxième figure, on en crée une troisième. On peut en créer de même une quatrième, une cinquième, etc. On voit ainsi se constituer une frise. En repartant de la première figure et par des mouvements identiques, quoique de sens opposé, on allonge la frise de l'autre côté. On peut imaginer une frise infinie dans les deux sens.

On peut aussi passer de la frise à un papier peint (un réseau plan). Il suffit de choisir un deuxième mouvement, dans une direction différente du premier, et de reproduire la frise autant de fois que l'on voudra par application réitérée de ce mouvement dans les deux sens.

On peut étudier, sur le papier peint, les passages d'un motif de base quelconque à un autre, de la même manière que l'on étudiait le passage d'un point à un autre par une variation de position. Les motifs du papier peint ont simplement pris la place des points. Le passage d'un motif à un autre, caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens, peut être reproduit au départ de n'importe quel motif. C'est intuitivement l'analogue du vecteur libre.

Dans ce cadre, la multiplication d'un mouvement par un nombre (en l'occurrence un entier) apparaît naturellement : on envoie le motif tant de fois plus loin dans un sens ou l'autre. La somme de deux mouvements procède par enchaînement, comme dans le cas des variations de position.

D'autre part, on ne doit pas ici introduire la notion de repère : elle se dégage en quelque sorte d'elle même, puisque n'importe quel mouvement peut être exprimé comme la somme de deux mouvements de directions différentes, multipliés chacun par un nombre approprié.

De ces considérations sur les papiers peints, on peut passer par analogie aux vecteurs libres du plan.

Changeons maintenant de point de vue. On peut engendrer une frise tout autrement que ci-dessus, à condition que l'on ait déjà acquis le concept de translation du plan entier (sans aller nécessairement jusqu'à la composition des translations). On part d'une figure. On translate le plan, de manière à envoyer la figure à un autre endroit. Puis on pose la question : comment faudrait-il compléter la figure de départ pour qu'elle retombe sur elle-même (qu'elle soit invariante) à la suite de la seule translation envisagée ? La figure complétée est une frise.

On peut alors engendrer un papier peint en demandant simplement de compléter la figure de départ de sorte qu'elle se transforme en une figure invariante par application de deux translations du plan de directions différentes.

On peut ensuite explorer toutes les translations du plan qui laissent le papier peint invariant. Et on voit bien comment l'on retrouve ainsi le produit d'une translation par un nombre, la somme (la composée) de deux translations, et comment on choisit deux translations de directions différentes dont les combinaisons linéaires permettent de retrouver toutes les autres.

Quelles que soient par ailleurs les façons de procéder pour créer une frise ou un papier peint, les vecteurs mis au point dans de tels contextes sont plus proches des vecteurs libres que des vecteurs-positions. Comme expliqué ci-dessus, cela demande un effort d'associer chacun d'eux à un point du plan pour pouvoir ensuite envisager les transformations du plan d'un point de vue vectoriel.

Un avantage toutefois des frises et papiers peints, c'est que si le motif de base est lui-même invariant pour certaines symétries orthogonales ou rotations, ces symétries se transmettent au plan entier et conduisent donc naturellement aux isométries du plan entier (mais non à d'autres transformations).

L'extension des isométries au plan entier est un caractère intéressant pour ceux qui étudient – ce que nous ne ferons pas ici –, les propriétés de groupe de ces tranformations et les théorèmes de réduction : toute isométrie directe est une translation ou une rotation, et toute isométrie inverse est une symétrie glissée.

8.3 Les vitesses

Les vecteurs se rencontrent dans d'autres champs que la géométrie. Considérons maintenant les vitesses, qui relèvent d'abord de la cinématique, avant de jouer un rôle en dynamique, là où les forces interviennent. Concentrons-nous dans un premier temps sur les mouvements rectilignes et uniformes d'un mobile ponctuel.

La vitesse d'un tel mobile possède une grandeur, une direction et un sens. Il est par conséquent tentant de la représenter par un vecteur. Mais tout d'abord on ne peut la représenter par un segment orienté qu'après avoir fait un double choix, nécessaire pour fixer la longueur du segment : premièrement on doit se donner une unité de longueur et une unité de temps, par exemple le mètre et la seconde, ce qui fixe l'unité de vitesse, dans notre exemple le mètre par seconde ; deuxièmement, on doit se donner une échelle de représentation des vitesses, en convenant par exemple de faire correspondre un centimètre à un centimètre par seconde.

Ceci fait, la vitesse correspond-elle à un vecteur libre ou à un vecteur lié ? A priori pas à un vecteur libre, car elle est attachée à un point, à savoir le mobile. Il serait donc très artificiel d'associer à la vitesse un segment transportable en tout point de l'espace, et encore moins à un ensemble infini de segments orientés de mêmes longueur, direction et sens. Mais si on veut faire correspondre la vitesse à un vecteur lié, on tombe sur une autre difficulté, à savoir que le segment orienté-vitesse doit être attaché à un point mobile, et non à une origine fixe, comme c'était le cas pour les vecteurs-positions. Ainsi, si la vitesse est représentable par un vecteur, il s'agit d'un vecteur très particulier, peut-être une variété de vecteur que nous n'avons pas encore rencontrée. Nous reviendrons sur cette difficulté.

Ceci dit, pour que la vitesse soit représentée fidèlement par un vecteur, il faut encore que cela ait un sens de la multiplier par un nombre. Aucune difficulté à cela, car doubler, tripler, ... une vitesse, en changeant ou non son sens, sont des opérations raisonnables et utiles.

Ensuite, quel sens y a-t-il à additionner deux vitesses ? On peut se faire une idée, mais ce n'est pas si facile, d'un mobile susceptible de prendre deux mouvements (nous en sommes toujours aux mouvements rectilignes et uniformes) et qui les prendrait tous les deux en même temps. Par exemple, il pourrait aller vers le nord à telle vitesse, et pourrait aussi aller vers l'ouest à telle autre vitesse. Les deux mouvements ensemble le porteraient vers le nord-ouest. Mais qu'est-ce que cela veut dire *les deux mouvements ensemble ?* Pour réaliser cela pratiquement, il faut se souvenir qu'un mobile se meut toujours par rapport à quelque chose. Soit par exemple un nageur qui nage vers le nord en eau dormante. Remplaçons ensuite, fut-ce mentalement, l'eau dormante par un fleuve qui coule vers l'ouest. Il se fait que la vitesse du nageur par rapport à la rive s'obtient en ajoutant, par la règle du parallélogramme, sa vitesse initiale vers le nord et la vitesse du fleuve.

La question ainsi posée débouche à terme sur celle du *mouvement relatif*. La vitesse du nageur par rapport au fleuve est sa *vitesse relative*. La vitesse du fleuve est sa *vitesse d'entraînement*. Enfin, la vitesse du nageur par rapport à la rive (repère fixe ou réputé tel) est sa *vitesse absolue*. La vitesse absolue est la somme de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative[12].

Étant donné ce que nous avons dit de la manière de faire correspondre des segments orientés aux vitesses, la façon la plus naturelle d'additionner les vitesses est bien la règle du parallélogramme. On ne voit pas en effet à quoi correspondrait le fait d'enchaîner deux vecteurs vitesses.

En ce qui concerne par ailleurs les transformations linéaires, si étroitement liées aux vecteurs géométriques, on ne voit guère *a priori* pourquoi on s'en occuperait du côté des vitesses.

Si maintenant nous passons des mouvements rectilignes et uniformes aux mouvements quelconques, la définition de la vitesse se complique. Elle devient ce que l'on appelle la *vitesse instantanée*. Sa direction (la tangente à la trajectoire) et sa grandeur sont déterminées au terme d'un processus de limite appelé *dérivation*. Non seulement, comme dans le cas précédent, elle est attachée à un point mobile, mais encore elle ne conserve le plus souvent ni sa grandeur et ni sa direction, elle en change à chaque instant. Il n'empêche, ce que nous avons dit ci-dessus du caractère vectoriel de la vitesse demeure vrai. Mais cela nous entrainerait trop loin de le montrer ici.

La relation entre les vitesses et les vecteurs est étudiée au chapitre 13.

8.4 Les forces

Comme les vitesses, les forces sont candidates pour être représentées par des vecteurs, puisqu'elles ont comme ces dernières une grandeur, une direction et un sens. Mais elles partagent avec les vitesses la propriété que pour les représenter par des segments orientés, il faut d'abord les mesurer dans une unité à choisir (par exemple le kilogramme-force qui est la plus disponible) et ensuite choisir une échelle de représentation, par exemple un centimètre par kilogramme-force.

Ensuite est-ce qu'une force serait représentable plutôt par un vecteur lié, ou plutôt par un vecteur libre ? Il ne serait guère possible de répondre à cette question sans examiner les circonstances où des forces entrent en jeu. Dans un premier temps, bornons-nous au problème le plus simple : celui où quelques forces tirent sur un point et où on s'intéresse à l'équilibre de celui-ci. Les forces sont appliquées au point, et par conséquent le bon modèle est plutôt celui des vecteurs liés. Toutefois, on peut tirer sur le point par l'intermédiaire de cordes dont la longueur n'a a priori pas d'importance. Et donc on pourrait admettre que la force soit accrochée en un point quelconque de la corde. Cette remarque n'a pas pour l'instant de grande conséquence, et donc oublions-la provisoirement. Nous y reviendrons un peu plus tard.

En ce qui concerne la somme des forces, c'est clairement la loi du parallélogramme qui joue, car on voit mal ce que pourrait vouloir dire l'action d'enchaîner deux segments orientés représentant des forces. La condition d'équilibre du point est que la somme des forces, calculée par la loi du parallélogramme, soit nulle.

Multiplier les forces par un nombre est une opération qui a aussi un sens dans le problème de l'équilibre d'un point. En effet, par exemple, si un point est en équilibre sous l'action de quelques forces, il demeure en équilibre si toutes ces forces sont multipliées par un même nombre.

[12] Cette loi ne va pas de soi, comme on s'en rend compte jusqu'à un certain point en considérant les accélérations. Quittons momentanément le cadre des mouvements uniformes, et supposons que le nageur ait un mouvement accéléré par rapport au fleuve et que le fleuve lui-même ait un mouvement accéléré par rapport à la rive. Dans un tel cadre, on définit pour le nageur une accélération relative, une accélération d'entraînement et une accélération absolue. Mais il est généralement faux que la somme des deux premières soit égale à la troisième.

Multiplier, comme nous venons de le faire, toutes les forces appliquées en un point par un même nombre revient à soumettre les vecteurs-forces à une homothétie. Par delà cette remarque, on voit mal *a priori* pourquoi on développerait une théorie des tranformations linéaires à propos des forces.

Dépassons maintenant le problème élémentaire de l'équilibre d'un point, et jetons un coup d'œil sur les questions plus générales où des forces interviennent. Bornons-nous aux questions de statique, car la dynamique nous entraînerait trop loin. Un problème fondamental est celui de l'équilibre d'un solide soumis à quelques forces. Ces forces tirent ou poussent sur le solide *en des points bien déterminés*. La condition (nécessaire et suffisante) d'équilibre est double : la somme (vectorielle) des forces doit être nulle, et la somme des moments des forces par rapport à un point fixe quelconque doit aussi être nulle[13]. Pour faire la somme des forces, le plus simple est de les imaginer toutes appliquées à un point quelconque donné et de procéder comme pour l'équilibre d'un point. Lorsqu'on fait cela, on libère en pensée les forces de leur point d'application sur le solide. Elles deviennent des vecteurs libres pour le temps du calcul. Par contre, pour faire la somme des moments des forces, on ne peut plus déplacer celles-ci, sauf éventuellement que chacune peut glisser sur sa *ligne d'action*, c'est-à-dire sur la droite déterminée par son point d'application et sa direction. En raison de cette contrainte, les mécaniciens ont introduit la notion de *système de vecteurs glissants*, aussi appelé *torseurs*. Ce n'est pas ici le lieu d'en faire la théorie.

Ceci suffit sans doute à montrer que les forces sont représentées fidèlement par des vecteurs, au sens où on leur applique les règles de calcul introduites pour les vecteurs géométriques (ou plus généralement pour les éléments des espaces vectoriels). Les vecteurs sont un outil de représentation des forces et donnent la clé de nombreux calculs qu'on leur applique, mais ils ne disent pas tout sur les forces. Un peu comme les nombres sont des outils de représentation pour celui qui pèse et paie des marchandises, mais les nombres ne disent pas tout sur les marchandises.

Sur la relation entre les forces et les vecteurs, voir le chapitre 12.

8.5 Les nombres complexes

Les nombres complexes sont parmi les objets mathématiques qui ont historiquement le plus contribué à l'émergence des vecteurs. Contentons-nous ici de montrer ce que devient la notion de tableau de proportionnalité lorsqu'on tente de l'étendre aux complexes. Disposons dans une première colonne tous les nombres complexes que nous voulons. Écrivons en face les mêmes nombres multipliés par un nombre complexe ζ, qui jouera le rôle de rapport externe. Un tel tableau satisfait aux deux propriétés de la somme et des rapports internes, les notions de somme et de rapport étant prises ici au sens des complexes. Ces propriétés résultent simplement du fait que les complexes forment un corps.

Il est intéressant de noter que la fonction linéaire à laquelle renvoie un tel tableau n'est autre qu'une similitude du plan complexe. À la section 7 notre généralisation des tableaux de proportionnalité engendrait toutes les transformations linéaires du plan. Ici nous n'atteignons que les similitudes. Par ailleurs, notre analyse de la section 7 s'étend sans peine aux espaces à n dimensions. Les nombres complexes eux ne s'appliquent qu'au plan. Quoiqu'il en soit, la représentation des similitudes par les complexes fait de ceux-ci un instrument très efficace d'étude des problèmes euclidiens plans.

Sur la relation entre les nombres complexes et les vecteurs, voir le chapitre 10.

[13] Nous sommes obligés ici de déborder un peu le cadre théorique de la présente étude. Le lecteur qui ne comprendrait pas ce paragraphe ne perdra pas grand chose de l'ensemble.

9 Conclusions

Jetons un dernier regard sur notre parcours. Nous sommes partis de la proportionnalité entre deux grandeurs. Nous avons envisagé d'emblée la proportionnalité, non sous la forme de l'égalité de *deux* rapports, mais sous la forme des tableaux de proportionnalité. Nous avons donc privilégié les *familles* – toujours extensibles –, de rapports égaux, ou plus généralement les fonctions linéaires. Penser les choses par familles stimule davantage la pensée que de les envisager une par une[14].

Regarder cette matière sous l'angle des tableaux et des fonctions nous a permis de mettre en évidence d'emblée les trois propriétés fondamentales : celles du rapport externe, de la somme et des rapports internes. Tout notre travail a consisté ensuite à voir comment ces notions s'adaptaient à des contextes divers, sucessivement les mesures, les grandeurs mesurées, les grandeurs orientées et leurs mesures, et enfin les grandeurs vectorielles. Nous avons étudié plusieurs généralisations du concept de somme, qui a pourtant conservé le même nom d'un bout à l'autre, et plusieurs généralisations du concept de rapport, celles-ci tellement profondes que le nom même de rapport a dû être remplacé, selon la matière traitée, par ceux de combinaison linéaire et de quotient de deux nombres complexes.

Au terme de ce parcours, nous avons un double espoir. C'est d'abord que le fil conducteur de la linéarité (il n'est pas le seul, mais il est important) soutienne la conception d'un enseignement en spirale, aide à en assurer la cohérence, et ramène l'attention sur les structures dans l'enseignement des mathématiques. À l'époque des mathématiques modernes, on a cru possible d'exhiber très tôt dans l'enseignement, et de manière axiomatique, certaines structures importantes. Du fait que cela s'est avéré difficile, certains ont eu tendance à conclure qu'il fallait accorder moins d'importance aux structures. Cela nous semble contraire à la nature même des mathématiques et préjudiciable à l'enseignement. Nous proposons plutôt *d'envisager les structures autrement*, à savoir en étant attentif à leur émergence et à leur maturation à travers toute la scolarité, quoique *sans vouloir les inculquer prématurément dans une forme abstraite.*

Notre deuxième espoir est qu'un enseignant qui aurait compris les connexions importantes qui relient tant de matières, serait mieux armé pour interpréter les difficultés rencontrées par les élèves dans les circonstances toujours pressantes d'une classe au travail.

[14] C'était une des conclusions méthodologiques de CREM [1995]

Bibliographie

Argand J.-R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* A. Blanchard, Paris. 1806, Rééd. 1971.

Artigues C., Bellecave Y., Bellemin J.-M., Ferachoglou R. et Terracher P.-H. *Math. Algèbre et Géométrie, Terminales C et E.* Hachette, Paris. 1992.

Artin E. *Geometric algebra.* Interscience, New York. 1957.

Association Nationale des Services d'Eau. *Eau source de vie.* ANSEAU (Belgaqua). 1985, Brochure destinée à l'enseignement secondaire.

Bair J. *Algèbre linéaire pour l'économie et les sciences sociales.* De Boeck, Bruxelles. 1990.

Bajart A. *Nombres complexes et géométrie plane.* 1998, Document polycopié. Journées pédagogiques de l'Enseignement de la Communauté Française.

Ballieu M. Le liber abbaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement.... *Nouvelles tendances en histoire et philosophie des sciences*, pages 123–133. 1993, Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Comité National de Logique, d'Histoire et de Philosophie des Sciences. R. Halleux et A.-C. Bernès (coordinateurs), Bruxelles.

Beklémichev. *Cours de géométrie analytique et d'algèbre linéaire.* MIR, Moscou. 1988.

Bellavitis G. Sposizione del metodo delle equipollenze. *Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze residente in Modena*, tomo XXV (parte II) : 225–309. 1854.

Benson H. *Physique I. Mécanique.* Renouveau Pédagogique, Saint Laurent (Québec). 1993.

Berggren J. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* Springer-Verlag, Berlin. 1986.

Bertotto A. et Hélayel J. *Enseigner la géométrie, Cycle des apprentissages fondamentaux, GS, CP, CE1.* Bordas, Paris. 1996.

Bkouche R., Charlot B. et Rouche N. *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.* Armand Colin, Paris. 1991.

Boisnard D., Houdebine J., Julo J., Kerboeuf M.-P. et Merri M. *La proportionnalité et ses problèmes.* Hachette, Paris. 1994.

Boncompagni B. *Scritti di Leonardo Pisano, vol. 1 (Liber Abbaci).* Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, Roma. 1857.

Bourlet C. *Cours abrégé de géométrie,* vol. I : Géométrie plane. Hachette, Paris. 1906.

Boyer C. B. et Merzbach U. C. *A History of Mathematics.* Wiley, New York. 1989.

Bretton J. et al. *Problèmes isopérimétriques élémentaires.* GEM, Louvain-la-Neuve. 1991.

Buekenhout F. La spirale de la similitude. 1999, Document polycopié. UREM, Université Libre de Bruxelles.

Buekenhout F. et Doyen J. *Espaces vectoriels.* Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques. 1980.

Cazzaro J.-P., Noël G., Pourbaix F. et Tilleuil P. *Structurer l'enseignement des mathématiques par problèmes.* De Boeck, Bruxelles. 2001.

Chace A., Bull L., Manning H. et Archibald R. *The Rhind Mathematical Papyrus* (2 vol.). Mathematical Association of America, Providence, RI. 1927-1929, Rééd. 1979.

Chevalier A. et Masy H. *L'outil vectoriel.* 1981, mémoire de licence, Université Catholique de Louvain.

Choquet G. *L'enseignement de la géométrie.* Hermann, Paris. 1964.

Coméliau M.-N. *La naissance de la linéarité, l'apprentissage des fractions et proportions d'après Hans Freudenthal.* Mémoire de licence, Université Catholique de Louvain. 1988.

Couchoud S. *Mathématiques égyptiennes. Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique.* Le Léopard d'Or, Paris. 1993.

Coxeter H. *Introduction to Geometry.* Wiley, New York. 1989.

CREM. *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. 1995.

CREM. *Formes et Mouvements.* Lismont L. et Rouche N. coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. 2001a.

CREM. *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans.* Lismont L. et Rouche N. coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. 2001b.

Deaux R. *Introduction à la géométrie des nombres complexes.* De Boeck, Bruxelles. 1947.

Demal M. *Géométrie des transformations à l'école primaire.* 1998, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles et Groupe d'Étude des Premiers Éléments de Mathématiques, Université de Mons-Hainaut.

Depamelaere R. *Livre bleu. Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur l'eau potable.* Belgaqua. Sans date, Fédération belge du Secteur de l'Eau.

Desmet I. et Vandepoel E. *Traité de géométrie,* 1e partie : Géométrie plane. Élan. 1965.

Dieudonné J. *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.* Hermann, Paris. 1968.

Djebbar A. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe d'Orient. In *Actes de l'Université d'été,* IREM de Toulouse, pages 259–286. 1988a.

Djebbar A. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman. In *Actes du Premier Colloque Maghrébin d'Alger,* Maison du Livre, Alger, pages 99–123. 1988b.

Dorier J.-L. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* La Pensée Sauvage, Grenoble. 1997.

du Saussois N. *Les activités en ateliers, cycle des apprentissages premiers, cycle des apprentissages fondamentaux. Une pédagogie différenciée de deux à six ans.* Armand Colin, Paris. 1991.

Dubois C., Fénichel M. et Pauvert M. *Se former pour enseigner les mathématiques. Nombres et opérations, fonctions numériques,* (Vol. 4). Armand Colin, Paris. 1993.

Dumarqué J. et Renaud L. *Le calcul au cours supérieur et dans la classe de fin d'études.* Delagrange, Paris. 1961.

Eminet B.-P. *Le livre de PostScript.* P.S.I. Micro Édition, Paris. 1987.

Enriques F. *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* Nicola Zanichelli, Bologna. 1924–1927, Rééd. 1983.

ERMEL. *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire,* cycle moyen, tome 2. SERMAP-Hatier, Paris. 1982.

ERMEL. *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire,* cycle moyen, tome 3. SERMAP-Hatier, Paris. 1982.

ERMEL. *Apprentissages mathématiques en sixième.* Hatier, Paris. 1991.

ERMEL. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Hatier, Paris. 1997.

Euclide. *The thirteen books of the Elements.* Dover, New York. 1956, transl. by Sir Thomas L. Heath.

Euclide. *Les Éléments,* volume 1. Introduction générale et Livres I à IV. Presses Universitaires de France, Paris. 1990, introduction générale par Maurice Caveing et traduction et commentaires du texte de Heiberg par Bernard Vitrac.

Euclide. *Elementa, in Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version* (2 vol). Hubert L.L. Busard and Menso Folkert coordinateurs, Birkhaüser, Basel. 1992.

Fauvel J., Flood R. et Wilson R., éd. *Oxford Figures (800 Years of the Mathematical Sciences).* Oxford University Press. 1999.

FESeC. *Document d'accompagnement du programme de mathématiques, 2e degré de transition, 3e année.* Licap, Bruxelles. 1996, Référence de l'ouvrage : 1996/0279/041 B.

FESeC. *Document d'accompagnement du programme de mathématiques, 2e degré de transition, 4e année.* Licap, Bruxelles. 1997, Référence de l'ouvrage : 1997/0279/075 A.

Fibonacci L. *Liber abaci.* Sans date, Manuscrit *Conversi Soppressi C.1.* n° 27 2616 *codice Magliabechiano (Badia Fiorentina)*, Biblioteca Nazionale, Firenze.

Fletcher T. *L'algèbre linéaire par ses applications.* CEDIC, Paris-Lyon. 1972, Adapté de l'anglais par M. et V. Glaymann.

Freudenthal H. *Mathematics as an educational task.* D. Reidel, Dordrecht. 1973.

Freudenthal H. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel, Dordrecht. 1983.

Gagnebin A., Guignard N. et Jaquet F. *Apprentissage et enseignement des mathématiques, Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire.* Commission Romande des Moyens d'enseignement, Lausanne. 1998.

Gillings R. *Mathematics in the Time of the Pharaohs.* Dover, New York. 1982.

Godenir A. et Descy P. *Agir en atelier.* Labor, Bruxelles. 1998.

Grassmann H. G. *La science de la grandeur extensive.* A. Blanchard, Paris. 1844, Rééd. 1994. Traduction de. D. Flament.

Halmos P. *Finite-Dimensional Vector Spaces.* Van Nostrand, Princeton, NJ. 1958.

Hamilton W. R. *Elements of Quaternions.* Charles Jasper Joly, Chelsea, New York. 1866, Rééd. 1969.

Hecht E. *Physique.* De Boeck, Paris-Bruxelles. 1999.

Heilbron J. *Geometry Civilized.* Oxford University Press. 2000.

Hill F. S. *Computer Graphics.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 1990.

Hjelmslev. La géométrie sensible (2epartie). *L'enseignement mathématique*, 38 : 294–322. 1940.

Irem de la Réunion. *Fonctions numériques et proportionnalité au CM.* `http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/DocPE/PropPE.html`. Sans date.

Irem des Pays de Loire. Centre du Mans. *Enseignement par situations-problèmes. La proportionnalité du CM2 à la seconde.* 1991.

Jedrzejewski F. *Le nombre et la mesure.* Diderot, Paris. 1999.

Joseph G. G. *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics).* Penguin Books, London. 1994.

Kangshen S., Crossley J. N. et Lun A. W.-C. *The Nine Chapters on the Mathematical Art.* Oxford University Press. 1999.

Klein F. *Le programme d'Erlangen (Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes).* Jacques Gabay, Paris. 1872, Rééd. 1991.

Klein F. *Elementary mathematics from an advanced standpoint,* vol. 2 : Geometry. Dover, New York. 1908, Rééd. 1939.

Laisant C.-A. *Théorie et applications des Équipollences.* Gauthier-Villars, Paris. 1887, Trad. de l'*Exposition de la méthode des Équipollences* de G. Bellavitis.

Lang S. *Algèbre linéaire 1.* InterÉditions, Paris. 1976.

Legros C. *L'eau est un trésor.* Belgaqua. 1996, Brochure destinée à l'enseignement primaire.

Libri G. *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (vol. 1). G. Olms, Hildesheim. 1838-1841, Rééd. 1967.

Lismont L. *Où l'on s'acharne sur un problème pour mettre en évidence diverses démarches géométriques.* 1997, document interne au CREM.

Loria G. *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX.* Ulrico Hoepli, Milano. 1950.

Lüneburg H. *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Leservergnügen eines Mathematikers.* B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim. 1993.

Martin P. *Les aventures de l'eau.* Centre Nature de l'ASBL Vacances et Santé de Borzée. Sans date, Brochure pédagogique sur l'eau disponible auprès de Belgaqua.

Massot C., éd. *Autour de Thalès.* Commission Inter-IREM Premier Cycle, Paris. 1995.

Meessen A. *Mécanique 1.* Cabay, Louvain-la-Neuve. 1984.

Merleau-Ponty M. *Phénoménologie de la perception.* Gallimard, Paris. 1945.

Mitsumasa A. *Compter... de l'eau.* Jeux mathématiques, Vol. 11. Flammarion, Paris. 1994.

Noël G., Pourbaix F. et Tilleuil P. *L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire.* Université de Mons-Hainaut. 1997.

O.E.C.E. *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire.* O.E.C.E., Paris. 1961.

Orhan J.-P. et Papin R. *Math 3, classe préparatoire aux certificats d'aptitude professionnelle du secteur tertiaire.* Technique et Vulgarisation. 1982.

Pacioli L. *Summa de Aritmetica.* Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma. 1494, Rééd. 1994. Édition fac-similé du cinq centième anniversaire.

Papy G. *Mathématique moderne* (1 et 2). Didier, Bruxelles. 1970.

Physical Science Study Committee. *La physique.* Dunod, Paris. 1970.

Piaget J. *La construction du réel chez l'enfant.* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel. 1967.

Piaget J. et Inhelder B. *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Deuxième édition, Presses Universitaires de France, Paris. 1947, Rééd. 1972.

PIAGET J. et INHELDER B. *Le développement des quantités physiques chez l'enfant.* Quatrième édition, Delachaux et Niestlé, Paris. 1978.

PIAGET J. et SZEMINSKA A. *La genèse du nombre chez l'enfant.* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel. 1941.

PICON D. *Tangram.* Mango Jeunesse. 1997.

POINCARÉ H. *Science et méthode.* Flammarion, Paris. 1908.

POSTNIKOV M. *Leçons de géométrie : 1^{er}semestre, géométrie analytique.* MIR, Moscou. 1981.

POSTNIKOV M. *Leçons de géométrie : 2e semestre, algèbre linéaire et géométrie différentielle.* MIR, Moscou. 1981.

ROBINS G. et SHUTE C. *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text.* British Museum, London. 1987.

ROUCHE N. *Le sens de la mesure.* Didier-Hatier, Bruxelles. 1992.

SADOC J.-F. et MOSSERI R. *Frustration géométrique.* Eyrolles, Paris. 1997.

SCHOOL MATHEMATICS PROJECT. *SMP 11-16, A6.* Cambridge University Press. 1997.

SÉNÉCHAL B. *Groupes et géométries.* Hermann, Paris. 1979.

SERRA M. *Discovering Geometry, An Inductive Approach.* Key Curriculum Press, Emeryville, Ca. 1997.

SESIANO J. *Une introduction à l'histoire de l'algèbre.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne. 1999.

S.M.B.. Bulletin de la Société Mathématique de Belgique (Série A), vol. 36. 1984.

SMITH D. *History of Mathematics* (2 vol.). Dover, New York. 1958.

SMITH D. *A Source Book in Mathematics.* Dover, New York. 1959.

SMITH R. *Learning PostScript, a visual approach.* Peachpit, Berkeley. 1990.

SOCIÉTÉ WALLONNE DES DISTRIBUTIONS D'EAU. *Rapport annuel 1999.* 2000.

SOUTTER-PERROT A. et DELESSERT E. *L'eau. Où ? Pourquoi ? Quand ? Comment ?* Gallimard, Paris. 1979.

TAIT P.-G. *Traité élémentaire des quaternions.* Gauthier-Villars, Paris. 1882, Traduction de G. Plarr.

TANNERY P. *Mémoires scientifiques (tome 5).* J. Gabay, Paris. 1912, Rééd. 1996.

TERRYN P. *La loi du parallélogramme, un bout de chemin vers les vecteurs.* Mémoire de licence, Université Catholique de Louvain. 1982.

VAN DEN BORRE A. *La mathématique en français. Contez d'abord, comptez ensuite !* Labor, Bruxelles. 2000.

VAN DIEREN-THOMAS F., ROUCHE N., OTTEVAERE J. et VILANOY-SCHUL M. *De question en question 1.* Didier Hatier, Bruxelles. 1993.

VAN LINT S. et HEMMERYCKX N. *Cracks en maths 1. Guide méthodologique et fichier d'apprentissages.* De Boeck, Bruxelles. 2000.

VOÏÉDINE V. *Principes numériques d'algèbre linéaire.* MIR, Moscou. 1980.

WARNOCK J. et GESCHKE C. *PostScript, language reference,* third edition (Adobe Systems Incorporated). Addison-Wesley, Reading, Ma. 1999.

WEBER M. *Essai sur la théorie de la science.* Pocket, Paris. 1992.

YOUSCHKEVITCH A. *Les mathématiques arabes (VIIIe–XVe siècles).* Vrin, Paris. 1976.

Index

abaque, 103
Abraham ibn Ezra, 209, 210, 211, 214
accélération, 451
accélération d'un mouvement circulaire uniforme, 464
accélération de la pesanteur, 421
addition, 567
addition de déplacements, 228, 235, 240
addition des entiers, 145
addition des grandeurs, 13, 568
addition des nombres réels, 220
addition vectorielle, 218
affixe, 325
agrandissement, 42, 47, 49
aire, 54
al-Karaǧī , 210
alignement, 125, 154, 254, 255, 331
Almageste de Ptolémée, 321
Alpha, 237, 351
Argand, J.-R., 515, 517, 521, 545
Artin, E., 548
associativité, 248, 536
associativité mixte, 248
axes obliques, 540

balance, 18, 573
balance à plateaux suspendus, 18
balance de Roberval, 18
barycentre, 381, 387
Bataille, 25
Bellavitis, G., 3, 320, 323, 515, 517, 521, 522, 561
bilinéarité du produit scalaire, 294
Bkouche, R., 11
Bourbaki, N., 8, 10, 11, 565
Bricard, R., 593

Cabri, 333, 342
calcul symbolique de Heaviside, 546
capacité, 57, 63, 122
carré, 332, 343, 345
Cauchy, A.-L., 583
Cazzaro, J.-P., 12
centre de gravité, 259, 261, 309
centre de gravité d'un ensemble de points, 265
centre de gravité d'un quadrilatère, 263
centre de gravité d'un tétraèdre, 263
centre de gravité d'un triangle, 262
centre de gravité d'une pyramide, 265
cercle gradué en centièmes, 103
changement d'unité, 63, 578
changement de repère, 527
chemin, 352
Choquet, G., 11
chronophotographie, 421, 426, 440
combinaison linéaire, 215, 381, 565, 589
Communauté française de Belgique, 14
commutativité, 248, 536
comparaison de figures, 30
comparaison de grandeurs, 17
composantes d'un vecteur, 251–253
composition des forces, 390
configuration, 526
conjugaison de deux mouvements, 426
constructivisme, 566
coordonnées, 251, 252, 351
CREM, 1, 2, 4, 12, 333, 356
cube, 361
cube de Rubik, 168

d'Alembert, J., 579
dépendance linéaire, 227
déplacement, 222
déplacements dans l'espace, 239
Descartes, R., 5, 523
dessin à l'échelle, 43
deux forces d'égale intensité, 391
deux forces d'intensités inégales, 395
diagramme circulaire, 103
diagramme en bandes, 103
Dieudonné, J., 11
dimension, 249
distance, 539
distributivité, 248, 536

double fausse position, 209

échelle, 49
Eco, U., 523
égalité d'aires, 40
égalité de longueurs, 40
Éléments d'Euclide, 7, 203, 295, 297, 321, 491–493
encadrement, 574
Ensanche, 219
épargne, 116
équation du premier degré, 204
équations du mouvement, 408
équilibre, 381
équilibre d'un point, 390
équipollence, 323, 522, 531
espace de configuration, 418
espace parcouru, 421
estimation, 17
étalon conventionnel, 17
étalon de rencontre, 63
étalon familier, 17
Euclide, 7, 10–12, 295, 297, 531, 568
EXCEL, 405, 421, 452, 458
extrinsèque, 523

facteur externe, 115
facteur interne, 115
famille génératrice, 227
famille libre, 227
Fermat, P. de, 523
Fibonacci, L., 209, 210, 215, 217, 320
fil conducteur, 14
fonction, 566, 569
fonction affine, 122, 154, 586
fonction du premier degré, 568
fonction linéaire, 122, 154, 565
force, 596
formule, 103, 136
fraction, 54
fréquence, 453
Freudenthal, H., 536, 586
frontière, 40
Furetiere, A., 573

Gauss, C. F., 333
géométrie affine, 9, 538
géométrie analytique, 351, 523
géométrie de la similitude, 540
géométrie euclidienne, 8, 538, 540
géométrie métrique, 538, 540
géométrie projective, 9
géométries emboîtées, 540
grandeur, 568
grandeur orientée, 583
grandeur vectorielle, 404, 409, 418
grandeurs de natures différentes, 580
grandeurs de même espèce, 569
grandeurs de même nature, 570, 580
grandeurs de natures différentes, 569
grandeurs de types différents, 122
graphique, 103, 137
graphique circulaire, 70
graphique de fonction linéaire, 581
graphique en bâtonnets, 69
Grassmann, H. G., 545
guide ligné, 108

Hamilton, W. R., 3, 231, 323, 515, 517, 518, 545
Heaviside, O., 545
hiéroglyphe, 205
Hilbert, D., 7
homothétie, 327, 590, 593
hypothèse d'uniformité, 406
hypothèse de décomposition, 443

idéal type, 6
illusion de simplicité, 10
image, 325
incidence, 266
indépendance linéaire, 227
interpréteur PostScript, 351
invariance de la masse, 23
inverse, 536
isotrope, 530

jet d'eau articulé, 422
Jiuzhang Suanshu, 210

Kelvin (Lord), 515
Klein, F., 524, 525, 530

Laisant, C.-A., 320, 323, 515, 517, 521, 562
léger, 19
Lehman, E., 525
Leibniz, G. W., 523, 587
Léonard de Pise, 215
Liber abaci, 215, 320
limite visuelle, 458

linéarité, 565
lourd, 19

Mach, E., 390
Macintosh, 237, 351
Manhattan, 219
masse, 122
masse volumique, 580
mathématiques égyptiennes, 204
« mathématiques modernes », 1, 11
Memory, 26
Merleau-Ponty, M., 549
mesurage, 17
mesure, 573
mesure décimale, 576
mesure en nombre entier, 57, 574
mesure par encadrement, 23
méthode de fausse position simple, 204
milieu d'un segment, 259, 260
Moivre, A. de, 517
mouvement circulaire, 452
mouvement circulaire uniforme, 452
mouvement de chute libre, 427
mouvement rectiligne idéal, 404
mouvement relatif, 596
Müller, G., 4
multiplication d'un vecteur par un nombre relatif, 588
multiplication d'une grandeur par un nombre, 13
multiplication de déplacements par un nombre, 230
multiplication de déplacements par un scalaire, 241
multiplication des entiers, 150
multiplication des nombres réels, 221
multiplication par un scalaire, 218, 235

Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul, 210
Newton, I., 321
Noël, G., 548
nombre complexe, 320, 325
nombre décimal, 120
nombre imaginaire, 320
nombre négatif, 320
nombre entier, 139
norme d'un vecteur, 290, 292
notation polonaise inverse, 239
NotePad.exe, 351

O.E.C.E., 11
objet, 582, 586, 591
objets semblables, 570
opérateur, 582, 586, 591
opérations sur les n-uples, 249
opérations sur les nombres complexes, 326
opposé, 248
orientation, 29

Pacioli, L., 209, 210
Papy, G., 11
papyrus Rhind, 204, 207, 209
parallélisme, 254, 255, 356
pattern de cubes, 128
pente constante, 568
périmètre, 154
perpendicularité, 331, 538
perspective parallèle, 168
photographie stroboscopique, 404, 421
Piaget, J., 11, 13, 568
plan quadrillé, 592
poids égaux, 23
Poincaré, H., 5, 7, 523
point courant, 352
point d'équilibre, 381, 386, 389
point fixe, 334
point représentatif, 325
points alignés, 139
poisson-archer, 446
polygone régulier, 280
polygones de même forme, 31
polygones semblables, 42
polynôme, 242
position, 583
PostScript, 236, 351
pourcentage, 69, 103
principe de compensation, 63, 66
principe de discrétisation, 404
principe de permanence algébrique, 536
produit d'un vecteur par un réel, 534
produit de deux droites, 323
produit scalaire, 280
Programme d'Erlangen, 524
projective, 10
proportionnalité, 111, 112, 567
propriétés de comparaison, 419
propriétés de composition, 418
propriétés de la multiplication par un scalaire, 248

propriétés de la somme, 247, 570, 571
propriété du rapport interne, 571

quadrillage, 219
quantité imaginaire, 521
quaternion, 515

rapport, 565, 573
rapport de grandeurs orientées, 583
rapport de mesures, 579
rapport entre deux nombres, 577
rapport externe, 49, 567, 571, 590
rapport interne, 49, 567, 569, 570, 589
rapport irrationnel, 575
rapport rationnel, 575
rectangle magique, 436
rectangles de même aire, 165
rectangles de même périmètre, 160
réduction, 42, 49
règle de trois, 567
règle des cosinus, 295, 297
règle des plateaux de la balance, 210
règle des signes, 153
règle du parallélogramme, 390, 419, 536
relation de Chasles, 218, 228
relation intrinsèque, 529, 530, 552
relation invariante, 552
repère orthonormé par rapport à un autre, 542
représentation de données, 578
représentation géométrique, 418
réseau de parallélogrammes, 219
réseau de triangles, 219
réservoir d'essence, 122
Revuz, A., 11
rotation, 328
Rouche, N., 574, 576

S.M.B., 11
Savile, H., 321
scalaire, 231, 534
section dans un cube, 269, 299, 362
Sénéchal, B., 525
sens étroit, 5, 6
sens large, 6, 7
sériation, 57, 568
sériation de capacités, 67
similitude, 33
similitude directe, 328
situation non proportionnelle, 118, 126
situation proportionnelle, 126
situation-problème, 12
socles de compétences, 14
soupeser, 19
soustraction des entiers, 146
structure algébrique et topologique, 10
structure d'espace vectoriel, 246
structure d'ordre, 10
structure linéaire, 1, 565
structure mère, 10
structure pauvre, 8
structure riche, 8
suite arithmétique, 243
suite de nombres, 243
symétrie orthogonale, 329
système décimal, 18
système décimal de mesures, 66
système de vecteurs glissants, 597

tableau, 103
tableau de proportionnalité, 112, 135, 204, 570
tableau de proportionnalité entre les mesures, 580
tableau de proportionnalité entre nombres relatifs, 585
Tait, P.-G., 3, 323, 515–518, 559
Tangram, 28
tétraèdre régulier, 316
théorème de Pythagore généralisé, 280, 288, 295
théorème de Thalès, 168, 219, 572
théorie des ensembles, 10
Thomson, W., 515
tir oblique, 440
topologie, 9, 10
torseur, 597
trajectoire, 445
transformation, 550, 587
transformation de l'espace, 275
transformation du plan, 275, 324
transformation linéaire, 565
translation, 327, 594
triangle équilatéral, 332, 338
triangle rectangle isocèle, 332, 336
troc, 113

unité de commune mesure, 575
unité de mesure, 574

variation de position, 583
vecteur, 587, 588

vecteur déplacement, 218
vecteur libre, 588
vecteur nul, 248, 536
vitesse, 404, 430, 595
vitesse absolue, 596
vitesse angulaire, 452, 454
vitesse d'entraînement, 596
vitesse d'un mouvement circulaire uniforme, 459
vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme, 409
vitesse instantanée, 404
vitesse linéaire, 452
vitesse relative, 596
Vitrac, B., 295, 492, 493
vraie grandeur, 314, 316
vu et caché, 370

Wallis, J., 320–322, 516, 517, 555–558
Warren, J., 517
Weber, M., 6
Wessel, C., 515, 521, 560
Windows, 237, 351
Wittmann, E. C., 4
Word, 237

Table des matières

Avant-propos 1

1 La linéarité, une idée de base . . . 1
2 De la prime enfance à l'âge adulte . . . 2
3 Creuser profond mais aussi servir en classe . . . 2
4 Contenu de l'ouvrage . . . 2
5 Présentation type des situations-problèmes . . . 4

Introduction 5

1 Logique et rigueur : le sens étroit . . . 5
2 Intuition et créativité : le sens large . . . 6
3 La déduction comme fil conducteur . . . 7
4 Les structures pauvres et les structures riches . . . 8
5 Voir et concevoir . . . 9
6 Les fils conducteurs de l'enseignement jusqu'en 1980 . . . 10
7 La situation actuelle . . . 12
8 Que faire maintenant ? . . . 13
9 Pourquoi un fil conducteur ? . . . 14

Première partie

Un aspect de la linéarité de 2 et demi à 12 ans

Chapitre 1. Les poids à l'école maternelle 17

1 Introduction . . . 17
2 Manipulations libres des balances . . . 18
3 Soupeser des objets . . . 19
4 Comparer avec les balances . . . 20
5 Équilibrer une balance . . . 23
6 Jeux pour deux joueurs . . . 25

Chapitre 2. Le Tangram à l'école primaire **28**

1 Introduction 28
2 Découverte des pièces du Tangram 29
3 Reproduction d'un modèle 31
4 Mémorisation d'une configuration 36
5 Silhouettes de Tangram 40
6 Dessin à l'échelle d'un modèle simple 43
7 Dessin à l'échelle de modèles plus compliqués 47
8 Fractions et aires 54

Chapitre 3. Les mesures de capacité **57**

1 Comparer des récipients (de 6 à 10 ans) 57
2 Mesurer des capacités (de 8 à 10 ans) 63
3 Vers le système décimal : comparer deux étalons (de 8 à 10 ans) 66
4 Lecture d'étiquettes de récipients (de 10 à 12 ans) 67

Chapitre 4. Grandeurs, pourcentages et représentations graphiques **69**

1 Quelle part d'eau dans nos organes ? (de 10 à 12 ans) 69
2 Quelle consommation d'eau par famille ? (de 10 à 12 ans) 70

Fiches à photocopier **73**

Deuxième partie

Un aspect de la linéarité de 12 à 15 ans

Chapitre 5. Tableaux, graphiques, formules **103**

1 Des abaques et des graphiques pour calculer 103
2 Proportionnalité : divers contextes 112
3 Patterns de cubes et proportionnalité 128
4 Points alignés et calcul avec les entiers 139

Chapitre 6. Proportionnalité et non-proportionnalité en géométrie **154**

1 Quand un triangle rencontre un carré 154
2 Des rectangles de même périmètre 160
3 Des rectangles de même aire 165
4 De la perspective au théorème de Thalès 168

Documents à photocopier **179**

Troisième partie

Un aspect de la linéarité de 15 à 18 ans

Chapitre 7. La linéarité à travers quelques siècles **203**

1 La fausse position simple chez les Égyptiens 204
2 La double fausse position chez les Arabes 209
3 Les combinaisons linéaires chez Léonard de Pise 215

Chapitre 8. Introduction au calcul vectoriel **218**

1 Vers un nouveau mode de calcul 218
2 Géométrie analytique et calcul vectoriel 250

Chapitre 9. Le produit scalaire **280**

1 Des polygones réguliers au produit scalaire 280
2 Géométrie analytique et produit scalaire 298

Chapitre 10. Nombres complexes et géométrie **320**

1 Introduction historique 320
2 Nombres complexes et transformations du plan 324
3 Faire de la géométrie avec les nombres complexes 333

Chapitre 11. Dessins en PostScript et géométrie analytique **351**

1 Utiliser les coordonnées pour dessiner 351
2 Parallélisme 356
3 Vu et caché 370

Chapitre 12. Problèmes d'équilibre **381**

1 Le levier 381
2 Barycentres dans un plan 387
3 Équilibre d'un point 390

Chapitre 13. Les mouvements et les vitesses **404**

1 Marcher ou nager, c'est la même chose ? 405
2 Comment immobiliser le temps ? 421
3 Le tir oblique 440
4 Lent ou rapide ? 451

Documents à photocopier **467**

Ce qu'il faut savoir du PostScript **501**

1 Calculer . . . 501
2 Opérateurs pour le dessin . . . 503
3 Définir des variables et de nouveaux opérateurs . . . 504
4 Les listes . . . 506
5 Opérateurs de contrôle . . . 507

Macros PostScript pour les vecteurs **509**

Point de percée d'une droite dans un plan **511**

Quatrième partie

Aspects historiques et épistémologiques des vecteurs

Chapitre 14. La naissance des vecteurs **515**

Chapitre 15. De la géométrie analytique aux vecteurs **523**

1 Pourquoi les vecteurs à la base de la géométrie ? . . . 523
2 De la géométrie à l'algèbre et vice-versa . . . 525
3 Changer de repère . . . 527
4 Des relations intrinsèques . . . 529
5 Naissance des vecteurs . . . 531
6 Les géométries affine, euclidienne et métrique . . . 538
7 Commentaires . . . 544
8 Appendice : les transformations . . . 549

Extraits de textes originaux **553**

Cinquième partie

Aspects épistémologiques de la linéarité en général

Chapitre 16. La linéarité comme fil conducteur **565**

1 Introduction . . . 565
2 Un exemple élémentaire . . . 566
3 Les rapports de grandeurs . . . 568
4 Numérisation des rapports, mesures . . . 573

5 Les rapports de mesures 579
6 Les rapports de grandeurs orientées 583
7 Les vecteurs et les transformations 587
8 Quelques sources de vecteurs 593
9 Conclusions 598

Bibliographie 599

Index 604