CREM
Centre de Recherche sur
l'Enseignement des
Mathématiques

Université catholique
de Louvain

Enseigner et apprendre les nombres décimaux

Activités en 4e primaire

Ministère
de la Communauté
française

Document réalisé avec le soutien du Ministère de la Communauté française de Belgique.

Ce fascicule fait partie des documents à destination des enseignants relatifs à la recherche intitulée

L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux
(Période : 2007–2010).

Cette recherche a été menée par une équipe constituée de Nicolas Rouche (Dir., †), Christian Michaux (Dir.) , Jacques Grégoire (Dir.), Laetitia Desmet, Philippe Skilbecq, Julie Fanuel et Sylviane Soille.

La réalisation informatique du logiciel DECIVAL a été confiée à Geoffrey Pliez et Mickaël Randour (informaticiens).

Les éléments graphiques ont été créés par Anatole Donarier.

Nous remercions les directeurs des écoles suivantes pour nous avoir autorisés à expérimenter nos activités ou tester les élèves dans une ou plusieurs classes de leur établissement, ainsi que les enseignants de ces classes :

- l'École communale de Heure-en-Famenne (5377),
- l'Institut Sainte-Marie à Rèves (6210),
- l'Institut Saint-Michel à Nivelles (1400),
- l'Institut Saint-Aubain à Namur (5000),
- l'Institut Sainte-Thérèse à Nivelles (1400),
- le Collège Notre-Dame de Basse-Wavre (1300),
- l'Institut Notre-Dame des Hayeffes à Mont-Saint-Guibert (1435),
- l'Institut Sacré-Coeur Burnot (5170),
- l'Institut Saint-Anne à Gosselies (6041).

Le présent document a été rédigé en respectant les règles de la nouvelle orthographe. Nous avons cependant gardé l'orthographe utilisée par les auteurs dans les éventuelles citations.

CREM
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Université catholique de Louvain

Enseigner et apprendre les nombres décimaux

Activités en 4^e année primaire

Ministère de la Communauté française

Document réalisé avec le soutien du Ministère de la Communauté française de Belgique.


2

Table des matières

Table des matières

Destination les nombres décimaux

Enseigner les mathématiques ou les faire apprendre par les élèves d'école primaire n'est pas chose aisée, tout le monde en convient. Il faut ainsi faire en sorte que les élèves apprennent à dénombrer, mesurer, tracer, compter, calculer... et résoudre des problèmes.

Pour permettre d'effectuer ces apprentissages de façon optimale, les programmes des différents réseaux proposent de **contextualiser** les notions à acquérir. Ainsi, le plus souvent possible, des activités de **manipulation** sont proposées aux élèves.

> *Comparer, mesurer, reproduire des longueurs, des masses ou des volumes sont des activités considérées comme tout à fait fondamentales, et, en conséquence, elles doivent être apprises dès les premières années de la scolarité, tout de suite après celles qui consistent à classer, ranger, dénombrer ou reproduire des collections finies.*
>
> G. Brousseau. *Problèmes de l'enseignement des décimaux.*

Ces mises en **contextes réalistes** ont pour objectif que les notions à rencontrer aient un **sens** pour les élèves... que ces notions *fassent sens*. Et pourtant, ...

> *On n'oubliera pas que la mathématique se construit à partir de la réalité comme aussi à partir de la mathématique elle-même.*
>
> L. Grugnetti, S. Turnau. *Rôle et conceptions des programmes de mathématique.*

Ainsi, des activités ancrées dans des contextes purement mathématiques peuvent (doivent) aussi être proposées aux élèves afin que ceux-ci puissent percevoir les **liens** entre les notions à acquérir, les **continuités** entre les *anciens* et les nouveaux *apprentissages*.

Ce sont d'ailleurs bien souvent ces **nouveaux apprentissages**, venant modifier les *anciens* mais pas les rendre obsolètes, qui perturbent les élèves. La remise en question des connaissances est parfois brutale et déstabilisante, car...

> *La conscience se développe comme un tout, modifiant à chaque nouvelle étape toute sa structure interne et la liaison des parties, et non comme la somme des modifications partielles intervenant dans le développement de chaque fonction.*
>
> L. Vygotski. *Pensée et langage.*

C'est à un voyage qui prend en compte à la fois les nouveaux savoirs mathématiques à acquérir et la réorganisation des connaissances chez les élèves que nous vous invitons à travers les pages qui suivent. Ce voyage n'est pas aisé. Il n'est d'ailleurs peut-être pas aussi balisé que tout enseignant le souhaiterait. Bon voyage donc aux plus audacieux !

1 Mais avant de partir...

L'approche européenne actuelle de l'enseignement des mathématiques est très influencée par la résolution de problèmes. En Communauté française, les *Socles de compétences*[1] précisent par ailleurs dès l'introduction de la partie réservée aux mathématiques :

> « C'est par la résolution de problèmes que les élèves développent des aptitudes mathématiques, acquiert des connaissances profondes et se forge une personnalité confiante et active ».

La séquence d'activités que nous proposons pour rencontrer les nombres décimaux prend également appui sur la résolution de problèmes, parfois seul, parfois en petits groupes, parfois avec la classe entière. La résolution des problèmes prend ainsi bien souvent l'allure d'un débat durant lequel chacun peut exposer sa réponse ou sa stratégie de travail, la défendre, l'argumenter, la confronter à celles des autres élèves... L'objectif de ce travail reste à coup sûr la construction de connaissances relatives aux nombres décimaux, et au-delà au *système décimal de position*, à partir des connaissances numériques déjà acquises, celles relatives aux nombres naturels.

1.1 Les nombres : un univers à parcourir

Quel merveilleux voyage que celui que peuvent réaliser les enfants lors de leur découverte des nombres. Des premières rencontres avec les nombres naturels et de la fierté que chacun peut ressentir à pouvoir réciter la première litanie de nombres dès les premières années de l'école maternelle, à la découverte des nombres irrationnels au secondaire, en passant par les fractions et les nombres décimaux, « les nombres des grands » quand on est en quatrième primaire.

[1] Ministère de la Communauté française. (1999). *Socles de compétences*. Bruxelles.

1. Mais avant de partir. . .

C'est à ce voyage extraordinaire dans l'univers des nombres que nous vous invitons, enseignants et élèves. Voyage audacieux s'il en est, car après avoir voyagé quelque peu dans l'espace des nombres naturels, nous irons à la rencontre de quelques nombres irrationnels afin de mieux comprendre ces fractions et nombres décimaux à appréhender à l'école primaire.

Nos guides seront deux. D'un côté, le *système décimal de position* parce que. . .

> « la compétence essentielle, celle qui permet de justifier un grand nombre de procédures utilisées à propos des nombres décimaux [reste] la connaissance qu'a l'élève de la valeur prise par un chiffre en fonction du rang qu'il occupe dans l'écriture à virgule et des relations de valeurs qui existent entre les différents rangs »
>
> R. Charnay. *Quelle culture mathématique commune (ou partagée) au terme de la scolarité obligatoire ?*

de l'autre, la *mesure des grandeurs*, parce que. . .

> « Les mesures décimales nous conduirons aux fractions décimales et aux nombres décimaux à virgule, et aux contextes dans lesquels on les dote d'un ordre, d'une somme et d'un produit. »
>
> N. Rouche. *Le sens de la mesure.*

Cependant,

> « pour que la correspondance « grandeur-nombre » soit efficace, il faudra que toute grandeur (ici longueur ou aire) soit mesurable en une unité fixe. Il faudra qu'à toute opération sur les grandeurs corresponde une opération sur les nombres qui les mesurent de manière à pouvoir transformer un problème physique en un problème mathématique. Il restera à résoudre le problème mathématique et à interpréter physiquement le résultat ».
>
> R. Douady. *Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans).*

Ces deux guides prendront les commandes tour à tour. Les informations qu'ils apporteront pour notre voyage devraient être enrichissantes par leur complémentarité. Ces informations auront comme objectif de permettre aux voyageurs de mieux comprendre comment s'agence et fonctionne l'univers des nombres.

Alors, si vous êtes d'accord pour ce voyage, embarquement immédiat. . . et prise de connaissance de quelques points de repère :

– apprendre c'est modifier, mettre en lien, inhiber. . . , page 11 ;
– enseigner c'est faire apprendre et gérer les difficultés ou les erreurs. . . , page 12 ;

Destination les nombres décimaux

Apprendre : modifier, mettre en lien, inhiber. . .

Pédagogiquement, il faut mettre en œuvre une méthodologie d'apprentissage qui fasse apparaitre les mathématiques comme instruments.

R. Bkouche & al. *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.*

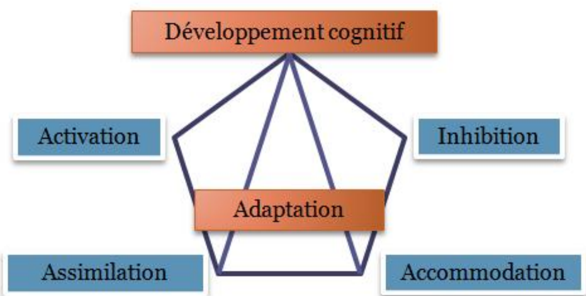
Notre approche s'appuie d'une part, sur l'approche piagétienne de l'apprentissage selon laquelle celui-ci s'effectue grâce à l'adaptation de l'apprenant à une situation nouvelle par *équilibration* et, d'autre part, sur l'approche de L. Vygotski selon laquelle toute modification d'un élément de la structure cognitive va apporter des modifications sur cette structure même et sur d'autres éléments de celle-ci.

Suite aux travaux de Piaget, O. Houdé a montré qu'apprendre c'était aussi *inhiber* des connaissances antérieures. Et ceci est particulièrement important dans le cadre de l'apprentissage des nombres décimaux. En effet, lorsque les élèves ont à construire les connaissances relatives aux nombres décimaux, ils investissent dans un premier temps leurs connaissances sur les nombres naturels. Cependant, parfois, ces connaissances deviennent inappropriées ! Par exemple, des élèves ont pu comprendre que les « zéros » à gauche ne comptent pas. Ce qui est vrai pour les nombres naturels, mais qui est faux pour les nombres décimaux : $0{,}002 \neq 0{,}2$!

Ainsi, nous proposons aux élèves une activité qui remet en cause leurs connaissances numériques construites à partir des nombres naturels. Pour résoudre le problème proposé, et en le résolvant, les élèves sont amenés à interroger leurs connaissances, à les remettre en cause, à les modifier, à les adapter (*équilibration*), ou à en construire de nouvelles.

« Quand il rencontre une connaissance nouvelle, l'élève dispose déjà de représentations, de modèles dans lesquels il va essayer d'intégrer la connaissance nouvelle de la façon la moins coûteuse possible [...] en remettant en question le moins de choses possible ».

M.-J. Perrin-Glorian. *Aires de surfaces planes et nombres décimaux.*



Selon O. Houdé.

Enseigner : faire apprendre et gérer les difficultés ou les erreurs. . .

Permettre aux élèves d'apprendre c'est les mettre dans des situations qui vont leur permettre de *modifier, mettre en lien, inhiber.* . . . L'activité d'enseignement nécessite donc de proposer des situations qui vont quelque peu les déstabiliser mais qui vont aussi leur permettre de surmonter les difficultés rencontrées, qui vont leur permettre d'intégrer le savoir en jeu en modifiant leurs connaissances précédentes.

Mais cet apprentissage ne va pas nécessairement de soi. Tout ne s'opère pas nécessairement sans heurts. En essayant de surmonter l'obstacle, on peut trébucher. En l'occurrence, l'élève peut se tromper. Le travail de l'enseignant consiste donc aussi à reconnaitre les erreurs commises, à les comprendre et à s'en servir pour proposer une ou des activités dans le cadre d'une *re-médiation* immédiate ou différée.

Mais peut-être qu'enseigner c'est aussi *montrer le chemin à parcourir !* Car, comme disent nos amis canadiens : « Si tu ne sais pas où tu veux aller, tu vas forcément aller ailleurs ! ». Nicolas Rouche exprimait cela de cette façon. . .

> « L'élève qui ne comprend pas pourquoi il calcule est comme un myope profond soudain transporté dans un paysage mathématique ».
> Et d'ajouter. . .
> « [L'élève] ne voit pas plus loin que ses souliers et n'a le projet d'aller nulle part. On lui demande d'avancer après lui avoir expliqué comment poser les pieds selon les règles. Quoi d'étonnant à ce que, souvent, il refuse d'avancer, et s'il avance, trébuche ».

L'objet de l'activité que nous proposons est de placer l'apprentissage des nombres décimaux dans cette perspective de *voyage*. Plus particulièrement, il s'agit de fixer le but du voyage, ou une partie en tout cas ; de susciter des pistes pour l'effectuer ; d'en situer les principaux obstacles.

Nous proposons ainsi aux élèves un problème pour lequel il est nécessaire d'*inventer* de nouveaux nombres, en l'occurrence des nombres à virgule. Ainsi, l'objet de l'activité est double : situer l'apprentissage des nombres décimaux dans une perspective plus lointaine et faire comprendre que les connaissances sur les nombres évoluent parce que de nouvelles situations apparaissent. Car. . .

> « S'il est vrai que toute théorie répond à une question, ne nous arrive-t-il pas trop souvent d'enseigner les réponses (c'est-à-dire les théories) avant les questions, avant que les élèves aient suffisamment éprouvé la nécessité de la théorie ».
>
> N. Rouche dans *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.*

Les conceptions ou les connaissances des élèves

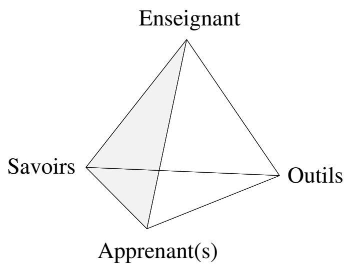
> « L'apprentissage peut être vu sous cet angle : apprendre, c'est savoir inhiber, savoir renoncer à telle ou telle position, démarche ou solution. D'où une nouvelle conception de l'erreur, comprise comme la conséquence d'une incapacité de renoncer à une solution déjà trouvée, une démarche déjà suivie, une possibilité déjà utilisée »
>
> H. Trochmé-Fabre, *Réinventer le métier d'apprendre*

Expliquons cette citation à l'aide d'un exemple. Lorsque les élèves rencontrent la division avec des nombres naturels, ils reconnaissent rapidement que le quotient est plus petit que le dividende, $28 : 4 = 7$ et 7 est bien plus petit que 28. Reconnaitre que le quotient est plus petit que le dividende constitue en quelque sorte une forme de validation du calcul et de la réponse. Dans la suite de leur parcours, les élèves rencontrent des divisions contenant des fractions ou des nombres décimaux. Et dans certains cas, l'assertion selon laquelle le quotient est plus petit que le dividende n'est plus vrai ! $28 : 0,7 = 40$. Apparait alors un conflit entre une conception antérieure et une situation nouvelle. La conception de la division est remise en question.

Mais d'autres conceptions issues de l'usage des nombres naturels existent chez les élèves, par exemple :
- les "zéros" à gauche ne comptent pas ; ce qui leur fait dire que 0,002 = 0,2 ;
- un nombre décimal c'est "un nombre naturel virgule un nombre naturel" ; ce qui leur fait dire que 0,25 est plus grand que 0,8, puisque 25 est plus grand que 8 ;
- de la même manière pour les fractions : $\frac{1}{5}$ est plus grand que $\frac{1}{3}$ puisque 5 est plus grand 3.

Les activités que nous avons préparées n'ont pas pour objectif d'éviter que les élèves ne commettent des erreurs, ni de leur éviter de devoir surmonter tout obstacle. Il serait par ailleurs difficile qu'il en soit ainsi puisque ces activités ont pour objet de confronter les élèves à de nouveaux nombres dans un processus de généralisation. *De facto*, les élèves vont être confrontés à des difficultés pour réaliser les tâches proposées et acquérir les nouveaux savoirs.

Dans ces activités, le rôle de l'enseignant est certainement très important : il lui revient à tout moment d'écouter les discours des élèves, de regarder leurs actions et interactions guidées le plus souvent par leurs conceptions, d'analyser discours et actions pour tenter de comprendre et d'interpréter les conceptions sous-jacentes. L'objectif de ce travail est de s'assurer que les élèves comprennent et apprennent les savoirs en jeu. Il est aussi de relancer l'activité des élèves par de nouveaux questionnements si nécessaire, par le rappel d'activités précédentes, par la modification de certains paramètres de l'activité, par l'explication de la consigne. . .



Son rôle est aussi de voir en quoi certains outils peuvent aider les élèves ou en quoi ces outils posent problèmes dans leur utilisation ou dans la compréhension des savoirs en jeu.
Nous rejoignons ici l'idée de l'enseignant stratégique énoncé par J. Tardif (1997), tout à la fois penseur, preneur de décisions. . . médiateur et entraineur.

Les nombres décimaux et les fractions

Les nombres décimaux tels qu'on les conçoit à l'école primaire concernent les nombres qui s'écrivent avec une virgule et sont limités au millième. Le document *Socles de compétences* et les programmes des différents réseaux sont explicites à ce niveau. Rappelons que les nombres décimaux s'inscrivent dans la structure des nombres, plus particulièrement ils appartiennent à l'ensemble des nombres rationnels. Si nous devions nous intéresser seulement aux nombres positifs (supérieurs ou égaux à 0) qui servent à mesurer, nous dirions. . .

> Les nombres pour mesurer sont, dans un ordre de généralité croissante, les naturels, les décimaux positifs, les rationnels positifs et les réels positifs. Parmi ceux-ci, les irrationnels sont également des nombres pour mesurer, bien qu'ils ne puissent généralement pas être obtenus par la manipulation d'appareils de mesure.

Par définition, un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction. Mais toute fraction peut aussi s'écrire sous la forme d'un nombre décimal. Ainsi, les nombres rationnels contiennent les fractions (ordinaires et décimales) et les nombres décimaux (limités et illimités périodiques) qui leurs correspondent. Une fraction et un nombre décimal équivalents sont ainsi deux écritures d'un même nombre. Par exemple : $\frac{1}{2} =$ 0,5 $= \frac{5}{10}$; $\frac{1}{3} =$ 0,333333. . . Ceci implique que si l'on utilise l'une ou l'autre écriture (« l'un ou l'autre nombre ») dans une opération, le résultat restera identique : $12 \times \frac{1}{2} = 6 = 12\times$ 0,5.

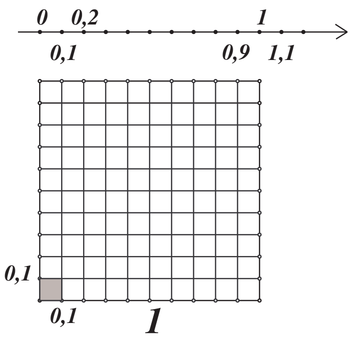
Une fraction peut être perçue comme le résultat d'un fractionnement ou d'un rapport entre deux choses. Ainsi, fractionner une tarte en 8 et en prélever 3 morceaux revient à prélever les $\frac{3}{8}$ de cette tarte. Ainsi encore, distribuer 15 crayons d'une boite qui en contient 45, c'est distribuer $\frac{15}{45}$ des crayons de la boite, soit le tiers des crayons. Mais une fraction peut aussi être considérée comme la division d'un nombre par un autre, du numérateur par le dénominateur. Ce qui en soit revient à chercher le rapport d'un nombre à un autre. Par exemple, $20 : 4 = 5$ peut aussi s'écrire $\frac{20}{4} = 5$, autrement dit le rapport de 4 à 20 est de 5. C'est là une autre conception de la fraction : celle de la fraction division. De telle sorte que l'on puisse écrire $\frac{1}{2} = 1 : 2 =$ 0,5.

> Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est un multiple de dix ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, . . .). Ces fractions sont facilement associées aux nombres décimaux : le lien entre le dénominateur de la fraction et le rang du nombre décimal équivalent apparait. Ce lien peut notamment se traduire au niveau de la lecture des nombres : $\frac{3}{10}$ se dit « trois dixièmes », 0,3 se dit aussi « trois dixièmes ».
>
> Pour les nombres décimaux, trois représentations peuvent être mises en évidence : quotient, addition et produit. Ainsi 0,25 peut se concevoir comme. . .
> – un quotient : 0,25 = $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$;
> – une somme : 0,25 = 0 unité + 2 dixièmes + 5 centièmes = 0 + 0,2 + 0,5 = 0 + $\frac{2}{10}$ + $\frac{5}{100}$;
> – un produit : 0,25 = 25 $\times 10^{-2}$.

Des représentations des nombres

S'il est aisé de représenter un nombre naturel de manières différentes, il n'en est pas ainsi pour les nombres décimaux. En effet, il n'est aisé de montrer 2,31 jetons. Mais on pourrait montrer 2,31 €. . . Reconnaissons cependant que l'usage de la monnaie ne confronte pas les élèves à l'usage des dixièmes ou au millièmes d'euro qui ne peuvent être concrétisés par une pièce spécifique.

Une représentation sous la forme d'une droite numérique ou d'une surface (aire) semble appropriée. Les mesures de grandeurs le sont également.



Mettons en évidence quelques caractéristiques de chacune de ces représentations.

- La droite numérique est ouverte au-delà de l'unité, on peut y situer des nombres au-delà de 1 ; une surface est refermée sur l'unité que représente la forme géométrique ;
- la droite numérique positionne directement les nombres rationnels parmi les nombres entiers ;
- la droite numérique est directement ordonnée, ce que n'est pas la représentation en 2 dimensions ;
- la surface offre plus de représentations d'un même nombre que la droite numérique ;
- la surface expose directement la multiplication de deux nombres (ceux des mesures de la longueur et de la largeur), par exemple 0,1 $\times$ 0,1 = 0,01 ;
- la surface suppose que l'on gère deux dimensions au lieu d'une seule ; la surface grisée (ici l'aire d'un carré) représente 0,01 parce que le côté du carré grisé vaut 0,1, et que 0,1 $\times$ 0,1 = 0,01.

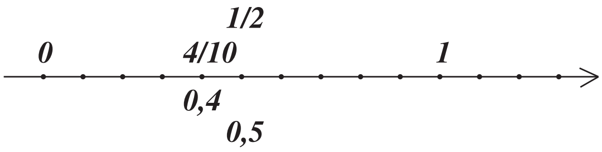
Mettons en évidence quelques difficultés rencontrées par les élèves pour utiliser la droite numérique comme outil de construction de savoirs numériques.

D'abord la problématique de l'*origine* : comprendre qu'une droite graduée possède une origine, 0, qui donne du sens à toutes les autres graduations[(2)].

Ensuite, la problématique de l'*inclusion* : comprendre que le nombre 2, situé par un point ou un trait sur la droite, représente la longueur comprise entre l'origine et ce point ou ce trait ; et que la longueur 1 est incluse deux fois dans la longueur 2 ; de même que la longueur 1 est incluse trois fois dans la longueur 3, et ainsi de suite. Ainsi, une droite graduée, ce n'est pas un simple chemin des nombres.

Enfin, la problématique de la *ponctualisation* : reconnaitre que le 3, situé par un point ou un trait sur la droite graduée, représente à la fois la longueur 3 depuis l'origine, mais aussi situe le nombre 3 dans une suite de nombres. De même, 3 peut être considéré comme un repère sur la droite, de la même manière que l'on pourrait se situer en x ou en y.

[(2)] Ajoutons que pour pouvoir graduer la droite, il est également nécessaire de situer 1, ou tout autre nombre.



La droite graduée est aussi souvent utilisée pour mettre en évidence des équivalences entre des fractions et des nombres décimaux. Reconnaissons que ces équivalences sont alors basées essentiellement sur des propriétés topologiques associées, parfois, à des mesures de longueurs.

Les élèves expriment souvent les équivalences comme suit : « $\frac{1}{2}$ est égal à 0,5 parce qu'ils sont tous les deux au même endroit sur la droite, ils sont tous les deux au milieu ». Comprenons que $\frac{1}{2}$ et 0,5 sont situés au milieu de l'intervalle entre 0 et 1, qu'ils sont situés tous les deux à la même distance de l'origine (zéro), que les deux intervalles qu'ils délimitent avec le zéro sont identiques. Ainsi, cette égalité se fonde sur une propriété liée aux grandeurs (en l'occurrence des longueurs) et non fondamentalement sur une propriété liée aux nombres eux-mêmes.

Pour parvenir à une construction de l'égalité au niveau numérique, une des pistes est d'utiliser ces nombres dans des opérations et de constater que l'effet opératoire de l'un est identique à l'effet de l'autre. En d'autres termes que 12 $\times\frac{1}{2} = 12\times$ 0,5, ou que 10 $\times\frac{1}{2} = 10\times$ 0,5.

Une autre piste est d'appréhender la fraction comme une division : $\frac{1}{2}$ = 1 : 2 = 0,5.

Nombres décimaux, grandeurs et mesures des grandeurs

Impossible de travailler sur les nombres sans les utiliser dans des mesures de grandeurs. Historiquement d'ailleurs, les nombres naissent du dénombrement d'objets ou de la mesure de grandeurs.

Cependant, il serait naïf de croire que des activités de mesure de grandeurs permettent à elles seules de construire les apprentissages numériques à l'école primaire, de la même manière qu'il ne suffit pas de manipuler pour apprendre. À l'inverse, croire que tout apprentissage serait possible sans manipulation serait tout aussi naïf. Et donc, mesurer des longueurs, peser des masses. . . sont des activités essentielles dans les classes, y compris pour apprendre les nombres décimaux.

En ce qui concerne l'euro, nous avons déjà émis quelques réserves, notamment le fait qu'il n'existe pas de pièce de dixième d'euro ou de millième d'euro. Pour les mesures, nous souhaiterions évoquer quelques difficultés pour les élèves à construire les nombres décimaux à partir des mesures. Nous prendrons nos exemples dans les mesures de longueurs, les plus usitées à l'école.

Prenons par exemple une ligne que l'on désire voire tracer dans le cahier des élèves. Nous dirons : « tracer une ligne de 8 virgule 5 centimètres », voire « tracer une ligne de 8 centimètres et 5 millimètres ». Quoiqu'il en soit, que feront les élèves ? Ils traceront une ligne jusqu'au "8" de la latte et puis poursuivront en comptant les 5 millimètres restants. De même, un mètre quatre-vingts s'écrit 1,80 m mais signifie souvent 1 m et 80 cm, soit la juxtaposition de deux mesures entières.

Ces deux exemples ont pour objet de montrer en quoi l'utilisation des mesures de grandeurs porte en elle la conception selon laquelle un nombre décimal est « un naturel virgule un naturel ». Il s'agit donc d'être prudent pour ne pas renforcer cette tendance souvent présente chez les élèves à considérer un nombre décimal comme la juxtaposition de deux nombres naturels séparés par une virgule ($D = N{,}N$).

Ce même obstacle apparait également avec notre monnaie, l'euro. En effet, cette conception $D = N{,}N$ est renforcée par la présence des pièces représentant les centimes d'euro. Payer 3,45 €, c'est donner 3 € et 45 centimes d'€.

Une autre situation peut aussi poser quelques soucis, tant aux élèves qu'à l'enseignant qui tente de comprendre les réponses et démarches des élèves. Faisons une expérience. Demandons aux élèves de tracer une ligne de 2,82 centimètres et voyons quelle est leur réaction. Pour avoir testé cette activité dans plusieurs classes, voici ce qui se passe généralement :

- une part minime des élèves disent que l'on peut mais que le 2 au rang des centièmes ne compte pas, on ne sait pas le dessiner ;
- une part importante des élèves hésitent, ou n'osent rien dire, ou . . . ;
- il y a souvent un élève qui dit : « moi je sais mais ça fait 10,2 cm ! »

Quel traitement de la mesure cet élève effectue-t-il pour obtenir 10,2 cm ?
Pour comprendre, il faut s'interroger pour savoir sur quelle partie de la mesure s'effectue le traitement. En effet, 2,82 cm comprend un nombre (2,82) et une unité de mesure (cm). En

l'occurrence, l'élève traite la mesure essentiellement à partir des unités, alors que la situation demande à traiter simultanément nombre et unité. Expliquons davantage.

Cet élève connait très bien le système de mesures décimales des longueurs : du mm au km. Il a bien en tête l'abaque des unités de longueur, il sait très bien qu'il ne faut qu'un chiffre par « colonne » ... Son seul souci est qu'il ne connait pas d'unités plus petites que le millimètre. Ainsi, incapable de situer le 8 dans la « colonne » des millimètres et le 2 dans une « colonne » qui n'existe pas, il place 82 dans la « colonne » des millimètres. Après traitement, 82 mm sont équivalents à 8,2 cm auxquels il ajoute 2 cm et obtient 10,2 cm !

dm	cm	mm
	2	82

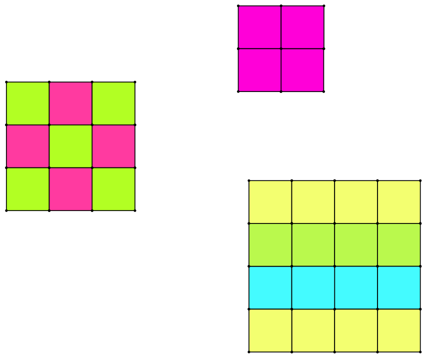
Une situation similaire a été vécue lorsque l'on a demandé aux élèves : « Combien devra-t-on payer à la pompe si l'on achète 17 litres de carburant à 1,2323€/l. Pour y répondre les élèves multiplient quantité et prix et obtiennent comme réponse 20,791. Mais quand on a demandé quel serait le prix à payer, c'est-à-dire de nous donner un nombre d'euros, une majorité d'élèves a répondu : 27,91€ ! Pour ce faire, ils ont considéré le nombre obtenu de la même manière que les élèves précédents avec la longueur : 20 € + 791 centimes d'euro = 20 € + 7,91 € = 27,91 €.

Ceci explique en partie pourquoi la situation que nous proposons est dépourvue d'unité de mesure, au sens conventionnel. Bien sûr les élèves mesurent et expriment cette mesure. Toutefois, des changements d'unités ne sont pas possibles et des expressions du type « x unités et y sous-unités » ne sont pas non plus possibles. Ainsi, le traitement des nombres est obligatoirement situé au niveau des nombres décimaux et il n'est pas possible d'exprimer un nombre décimal à l'aide de deux nombres naturels.

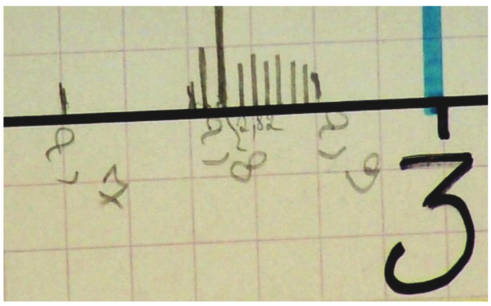
2 Le plan du voyage

Comme explicité précédemment, nous proposons une séquence d'activités qui s'appuie sur les mesures de grandeurs (aires) et sur le système décimal de position.

La première étape va nous mener dans l'univers de la géométrie. Les élèves construiront des carrés à l'aide d'un logiciel de géométrie : `Apprenti Géomètre`. Ce travail peut aussi être réalisé avec des figures en carton même s'il peut paraitre moins créatif pour les élèves à certains égards.



Ensuite, nous reviendrons dans l'univers des nombres, en utilisant la calculatrice, pour « inventer » des nouveaux nombres nécessaires à la résolution du problème proposé.



Ensuite, nous associerons ces deux univers pour ancrer les nombres décimaux dans les mesures conventionnelles et leur donner du sens dans des activités de dessin.

Au fil du voyage, nous ferons parfois appel aux fractions et ferons escale sur la droite numérique.

Enfin, nous reviendrons dans l'univers des nombres pour mieux comprendre le rôle de la virgule et du zéro, pour mieux comprendre le système décimal de position.

Le voyage proposé n'est cependant pas entièrement balisé. Il peut sans difficulté contenir de nouvelles escales. Ainsi, comme cela s'est présenté lors des expérimentations des activités dans les classes, chaque enseignant peut y inclure des activités propres qu'il juge utiles à l'un ou l'autre moment. Chaque enseignant peut ajouter également autant d'activités d'exercisation (ou de fixation) qu'il juge utile en fonction de ses élèves.

Bon voyage à vous et à vos élèves.

2.1 L'organisation des activités

Nous avons organisé la description des activités à partir de quelques points de repère que nous décrivons ci-dessous.

De quoi s'agit-il? Chaque activité est présentée succinctement en décrivant la tâche que les élèves ont à réaliser et les actions à mener pour y parvenir.

Enjeux Nous précisons les enjeux essentiels de l'activité. Ceci correspond globalement aux objectifs notionnels.

Compétences Nous citons les compétences que les élèves exercent durant l'activité. Ces compétences sont extraites du document *Socles de compétences* édité par le Ministère de la Communauté française (1999).

De quoi a-t-on besoin? Nous citons le matériel nécessaire pour réaliser l'activité. De manière générale, nous ne citons que le matériel pour lequel une préparation est nécessaire. Nous ne renseignons pas le matériel classique tel que les crayons, gomme, compas, ...

Analyse a priori Nous décrivons les différentes démarches nécessaires pour réaliser la tâche proposée. Lorsque l'usage du logiciel *Apprenti Géomètre* est requis, nous précisons les fonctionnalités à utiliser ainsi que la manière de les appliquer aux figures.

Comment s'y prendre? Nous décrivons la manière avec laquelle l'activité peut être menée par l'enseignant. Nous précisons le matériel et les fiches à utiliser ainsi que les actes et les questions que l'enseignant peut poser. Parfois, lorsque plusieurs cheminements sont possibles en fonction des réponses, questions ou difficultés des élèves, nous décrivons ces cheminements.

Synthèse de l'activité Nous décrivons la manière avec laquelle la synthèse de l'activité peut être construite. Nous précisons également le contenu de cette synthèse ainsi que les dépassements possibles.

Échos des classes Nous exposons quelques faits de classe observés durant les expérimentations des activités. Il s'agit soit de montrer quelques difficultés particulières d'élèves, soit d'exposer quelques réalisations particulièrement intéressantes.

Commentaires Parfois, lors de la description du cheminement d'une activité, il nous est nécessaire d'énoncer quelques commentaires souvent liés aux expérimentations réalisées dans les classes.

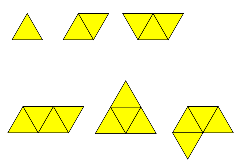
Utiliser Apprenti Géomètre

3 Pourquoi utiliser Apprenti Géomètre ?

Le logiciel *Apprenti Géomètre* est un logiciel de géométrie dynamique. Il a été conçu par le CREM et est téléchargeable gratuitement sur *http ://www.crem.be*. Il est disponible en deux versions. Les activités que nous proposons peuvent être réalisées avec chacune d'elles.

Ce logiciel permet de manipuler aisément des figures planes, de les découper, de les déplacer... Pour les activités que nous proposons, ses intérêts majeurs sont, d'une part, qu'il permet de *débarrasser* le travail sur les figures de la tentation de les mesurer, d'autre part, qu'il permet aisément de découper les figures et d'assembler les morceaux obtenus pour construire de nouvelles figures. Expliquons-nous.

En utilisant *Apprenti Géomètre*, demandons aux élèves de placer à l'écran des triangles équilatéraux. Et ensuite demandons-leur de rechercher les formes différentes que l'on peut construire en en assemblant deux, puis trois, puis quatre... Voici ce qu'ils pourraient construire.
Si nous leur demandons le même travail avec des triangles en carton, ils trouveront les mêmes assemblages. Mais peut-être ceux-ci seront moins précis.



Si nous leur demandons ensuite de comparer les périmètres de ces assemblages, des différences au niveau des démarches investies vont apparaitre selon le support de travail. Si les élèves travaillent avec des formes en carton, la plus grande majorité d'entre eux vont prendre leur latte et mesurer la longueur des côtés. Pour peu que les assemblages soient peu précis, les mesures obtenues seront différentes. Si ce travail est réalisé avec *Apprenti Géomètre*, la mesure avec une unité conventionnelle est impossible, sauf à mesurer sur l'écran, ce qui n'est pas aisé. Le travail de mesure tient compte à ce moment à la fois des figures en présence, des formes qui les composent et de la longueur de leurs côtés. La mesure est effectuée à partir d'une unité non conventionnelle (un côté) et le travail est réellement centré sur la mesure. Ajoutons que des changements d'unité ne sont pas possibles comme avec des unités conventionnelles.

Or, c'est précisément d'un travail centré sur des mesures à l'aide d'unités qui ne peuvent être changées dont nous avons besoin pour rencontrer les nombres décimaux.

Les activités que nous présentons ci-après permettent aux élèves de se familiariser avec le logiciel *Apprenti Géomètre*. Elles ne sont pas obligatoires pour les élèves qui l'auraient déjà utilisé. Toutefois, elles préparent également à la rencontre des notions de périmètre et d'aire à la base du travail sur les nombres décimaux.

Dans les activités que nous proposons tout au long de ce parcours qui va mener les élèves des nombres naturels aux nombres décimaux, celles qui concernent le périmètre et l'aire sont peu nombreuses. Toutefois, elles peuvent également servir de point de départ à un travail plus conséquent concernant ces notions.

4 Des séances de prise en main d'*Apprenti Géomètre*

Ces premières activités sont issues de séquences mises au point par le CREM au cours de différentes recherches, notamment *Apprenti Géomètre* (2003) et *Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages* (2007). Cependant, les activités relatives à l'exercisation et à la synthèse des savoirs en jeu (aire et périmètre) ne sont pas utilisées ici. Nous invitons le lecteur intéressé par cette partie à lire les rapports de ces recherches disponibles sur le site de la Communauté française à l'adresse : `http://www.enseignement.be`

Trois fiches accompagnent ces premières activités, elles sont présentées aux pages 85 à 89.

4.1 Découvrir Apprenti Géomètre

De quoi s'agit-il? Les élèves réalisent diverses figures à l'aide de formes directement disponibles dans les menus du logiciel. Pour certaines figures, une découpe de forme est nécessaire. Toutefois ces constructions restent assez simples. La fiche 1 (page 85) peut-être photocopiée ou imprimée en recto/verso et plastifiée pour une utilisation durable.

Enjeux Se familiariser avec le logiciel *Apprenti Géomètre*. Comprendre que des formes sont directement disponibles et qu'elles apparaissent à l'écran par un simple clic. Utiliser les premières fonctionnalités de base telles que *Glisser*, *Tourner*, *Découper*.

Comment s'y prendre? Les élèves travaillent avec le logiciel *Apprenti Géomètre*, en binôme ou trinôme si le nombre d'ordinateurs le nécessite. Ils choisissent un dessin à reproduire avec *Apprenti Géomètre*.
Une fiche reprenant les principales fonctionnalités peut être distribuée aux élèves. La fiche 2 est un exemple de ce type de fiche pour la première version d'*Apprenti Géomètre*.

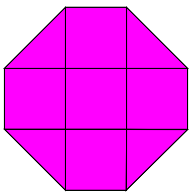
Synthèse de l'activité Une mise en commun des fonctionnalités utilisées et des difficultés rencontrées par les élèves peut être organisée. Si nécessaire une fiche type « mode d'emploi » peut être rédigée et utilisée au cours des séances suivantes.

Échos des classes De manière générale, les élèves réalisent facilement les constructions avec *Apprenti Géomètre*. L'utilisation du logiciel et la validation des constructions sont assez aisées et intuitives. De plus, l'emploi d'*Apprenti Géomètre* permet aux élèves de colorier leurs constructions à leur guise, ce qui a un effet sur leur motivation.

4.2 Construire une figure avec sept carrés

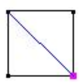
De quoi s'agit-il? Les élèves doivent construire une nouvelle figure composée de carrés et de triangles. Cependant ils n'ont à leur disposition que des carrés. Ils doivent en découper certains selon une diagonale et assembler les triangles obtenus aux carrés restants.
La fiche 4 (page 89) est à photocopier ou imprimer puis à distribuer aux élèves.

Enjeux Un des objectifs est de faire en sorte qu'au terme de l'activité les élèves puissent utiliser les fonctionnalités *Découper* et *Diviser*, ainsi que les fonctionnalités *Glisser* et *Tourner*.



Du point de vue des grandeurs, la distinction entre le nombre de « pièces » contenues dans une figure et le nombre de surfaces représentant l'unité de mesure est un enjeu majeur. La figure que les élèves doivent représenter contient 9 pièces (5 carrés et 4 triangles), cependant elle ne contient que 7 carrés (unités de mesure) : elle est grande de 7 carrés.

Analyse a priori Les élèves placent 7 carrés standards à l'écran. Deux d'entre eux doivent être découpés selon une diagonale. Pour ce faire, les élèves utilisent la fonctionnalité *Découper* et l'appliquent en sélectionnant deux sommets opposés d'un premier carré, comme le montrent les figures ci-dessous. Ils répètent la même opération sur un second carré.



Ensuite, ils assemblent les quatre triangles rectangles obtenus et les cinq carrés pour construire la figure proposée.
La difficulté essentielle pour les élèves est de respecter la consigne en n'utilisant que les sept carrés. Bien souvent, ils souhaitent utiliser les triangles disponibles dans le logiciel. Il faut alors les amener à *voir* que deux carrés ont été coupés en deux selon une diagonale.

Comment s'y prendre?

L'enseignant photocopie les fiches et les distribue aux élèves répartis en binômes ou en trinômes. Les élèves prennent connaissance de la consigne.

Comme annoncé ci-dessus, l'enseignant veille à ce que les élèves n'utilisent pas des triangles directement disponibles sur *Apprenti Géomètre*. Ils amènent les élèves à *voir* les découpes nécessaires. Si nécessaire, l'enseignant explique aux élèves comment découper une forme.

L'enseignant invite les élèves à expliquer comment ils ont réalisé leur construction (texte explicatif) au terme de celle-ci.

Une mise en commun des productions individuelles peut amener à la rédaction d'un texte collectif. Ceci devrait aider certains élèves ayant quelques difficultés à rédiger ce type de texte. L'enseignant veille notamment à l'emploi de termes propres à la géométrie.

Synthèse de l'activité

Lors de la synthèse, deux éléments peuvent être mis en évidence. Le premier concerne la fonctionnalité *Découper*. Il s'agit de s'assurer que chaque élève a compris comment découper une figure. Le deuxième concerne la notion d'aire. Sans nécessairement utiliser le terme « aire », l'enseignant peut attirer l'attention des élèves sur le fait que la figure construite contient sept carrés, même si l'on ne voit plus sept carrés entiers. L'enseignant peut ensuite demander aux élèves combien de triangles sont contenus dans la figure construite si l'on effectue le même comptage qu'avec les carrés. La réponse est cette fois 14, soit deux fois le nombre de carrés puisque chaque carré contient deux triangles.

Ce type de comptage peut aussi être mis en opposition avec un comptage des pièces, quelle que soit leur forme. Dans ce cas, il y a neuf pièces : cinq carrés et quatre triangles.

4.3 Construire une figure avec quatre carrés

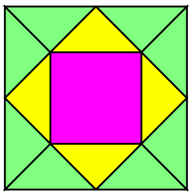
De quoi s'agit-il?

Les élèves doivent construire une nouvelle figure composée de carrés et de triangles. Cependant, ils n'ont à leur disposition que des carrés. Ils doivent en découper certains selon une diagonale, puis découper les triangles rectangles ainsi obtenus en ayant divisé au préalable leur hypoténuse en deux. Ils assemblent ensuite carrés et triangles pour obtenir la figure demandée.

La fiche 4 (page 89) est à photocopier ou imprimer puis à distribuer aux élèves.

Enjeux

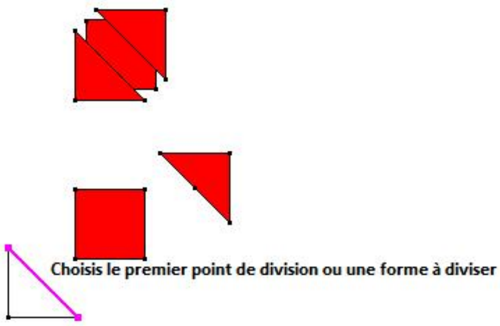
Un des objectifs est de faire en sorte qu'au terme de l'activité les élèves puissent utiliser les fonctionnalités *Découper* et *Diviser*. Du point de vue géométrique, un des objectifs est d'amener les élèves à mieux *voir* les décompositions possibles d'une même figure.



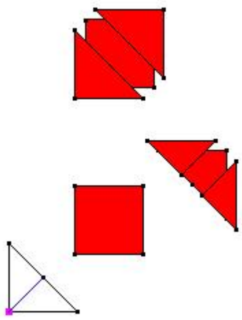
Du point de vue des grandeurs, la distinction entre le nombre de « pièces » contenues dans une figure et l'aire (c'est-à-dire le nombre de surfaces représentant l'unité de mesure) reste un enjeu majeur. La figure que les élèves doivent représenter contient 13 pièces (1 carré et 12 triangles), cependant elle ne contient que 4 carrés (unités de mesure d'aire).

Analyse a priori

Les élèves placent 4 carrés standards à l'écran. Trois d'entre eux doivent être découpés en quatre triangles rectangles. Pour ce faire, les élèves utilisent les fonctionnalités *Découper* et *Diviser*. D'abord, ils découpent un carré en deux selon une diagonale en sélectionnant deux sommets opposés d'un carré comme lors de l'activité précédente (a). Ensuite, chaque triangle obtenu doit encore être découpé en deux triangles rectangles. Pour y parvenir, les élèves doivent d'abord placer un point au milieu de l'hypoténuse des triangles rectangles. Cela se fait en divisant ce côté en deux. Ils utilisent pour ce faire la fonctionnalité *Diviser*. Ensuite, ils divisent les triangles en deux en sélectionnant ce point milieu de l'hypoténuse et le sommet qui lui est opposé (b).



(a)



(b)

Ils répètent la même opération pour deux autres carrés et ensuite ils assemblent les triangles obtenus et le carré en utilisant la fonctionnalité *Glisser* pour construire la figure proposée. Si nécessaire, ils utilisent la fonctionnalité *Tourner* pour orienter les triangles de façon à pouvoir les assembler.

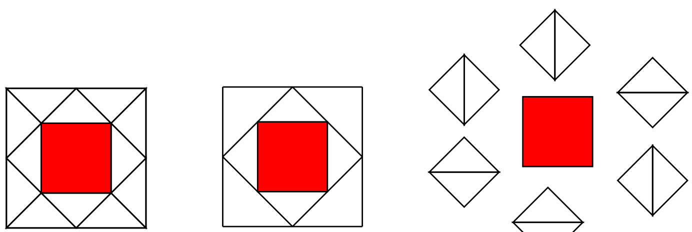
Comment s'y prendre?

L'enseignant photocopie la fiche et la distribue aux élèves répartis en binômes ou en trinômes. Ceux-ci prennent connaissance de la consigne. Comme annoncé ci-dessus, l'enseignant veille à ce que les élèves n'utilisent pas des triangles directement disponibles sur *Apprenti Géomètre*. Il amène les élèves à *voir* les découpes nécessaires. Si nécessaire, l'enseignant explique aux élèves comment découper une forme et diviser un côté.

Au terme des constructions, l'enseignant invite les élèves à expliquer comment ils ont réalisé la construction (texte explicatif). À nouveau, une mise en commun des productions individuelles peut amener à la rédaction d'un texte collectif.

Synthèse de l'activité

Lors de la synthèse, l'attention doit être portée sur les démarches techniques concernant les fonctionnalités *Diviser* et *Découper*.
Au cours de la synthèse, il est aussi important de vérifier comment les élèves perçoivent la figures construites en posant, par exemple, la question suivante :
« Combien de carrés voyez-vous dans la figure que nous venons de construire ? »
ou encore « Combien de carrés contient cette construction ? »
Il se peut que selon la question posée les réponses soient différentes. Cependant de manière générale, les élèves devraient proposer trois réponses différentes au moins : 3, 4 ou 7 carrés. Ces réponses dépendent de la manière avec laquelle les élèves « voient » ou « regardent » la figure.
Les élèves qui regardent la figure avec un « oeil géométrique » peuvent y voir 3 carrés (figure b ci-dessous). Dans ce cas, ces élèves tentent de reconnaitre des formes carrées. Ils s'attachent au pourtour des formes. Certains élèves pourraient d'ailleurs répondre qu'il n'y a qu'un seul carré ! Celui du centre de la figure. D'autres pourraient dire qu'il y en a deux, celui du centre et celui du pourtour extérieur.
Les élèves qui regardent la figure avec un « oeil de mesure » vont y voir 4 carrés, ceux que l'on a placés à l'écran au départ et qui ont, pour une part, été découpés. Le regard s'appuie sur la notion d'aire mesurée à l'aide d'une unité d'aire qui est ici le carré standard d'`Apprenti Géomètre`. Ces élèves recomposent donc les carrés de départ en réassemblant les triangles. Leur travail se situe effectivement au niveau des grandeurs et de leur mesure (figure a).
Des élèves pourraient aussi regarder la figure avec un « oeil géométrique » mais cette fois en réassemblant les triangles pour en faire des carrés, sans pour autant tenir compte de leur grandeur comme le montre la figure (c). Dans ce cas, leur réponse est 7 carrés.
Il est utile, tant pour l'enseignant que pour les élèves, de mettre à jour ces différentes façons de « voir » une figure. Au cours de la synthèse, l'enseignant portera ainsi l'attention des élèves sur le fait que si on regarde la figure pour en connaitre sa grandeur (son aire), il faut se mettre d'accord sur la forme (surface associée à une aire) qui va servir à mesurer cette grandeur. Il ne s'agit plus dans ce cas de « voir » des pièces de grandeurs différentes, ni seulement de s'attacher à la forme des pièces.



(a) (b) (c)

Utiliser la calculatrice

5 Introduction

Le débat sur l'usage de la calculatrice en classe vient régulièrement à l'avant-scène des débats pédagogiques ou didactiques. Pour notre part, nous pensons que cet outil doit être utilisé en classe, « non pas constamment, mais très tôt et très régulièrement » (CREM, 1995). Son usage doit bien sûr être raisonné. Il ne doit pas remplacer l'apprentissage des algorithmes de calcul. Cependant, utiliser la calculatrice, dans certaines circonstances, permet de débarrasser « l'esprit du fardeau des calculs [tout en permettant] de se concentrer sur le sens des opérations dans le problème proposé » (Op cit.).

De manière générale, comme nous l'avons montré dans l'introduction de ce livret, pour tout outil, une période de *prise en main* est nécessaire. La plupart du temps, il s'agit de savoir *comment ça marche*, de comprendre *à quoi ça peut servir* et de discerner *quand et comment il est opportun de l'utiliser*. Ainsi, en 1995, le CREM expliquait dans le *cadre global pour l'enseignement des mathématiques* que « les élèves doivent apprendre, dans chaque circonstance, à choisir opportunément un mode de calcul approprié : oral, écrit ou à la machine ».

Dans l'introduction, nous avons aussi tenté d'expliquer en quoi ces trois *moments* ne devaient pas être rencontrés successivement. Ceux-ci sont intimement liés. Le renforcement de la compréhension de l'un a des répercussions sur une meilleure compréhension des autres.

La calculatrice n'échappe pas à cette approche. Ainsi, dans chacune des quatre classes qui ont participé aux expérimentations, une séance de prise en main de cet outil a été réalisée. L'organisation de celle-ci a été laissée au libre choix des enseignants. Pour les aider dans leur tâche, un document relatant une expérience réalisée préalablement leur avait été soumis. Pour une part, cette expérience leur a servi de fil conducteur. Les activités proposées dans les quatre classes restent cependant sensiblement différentes dans leur organisation. Par contre, les constats réalisés par les élèves, leurs questionnements, leurs incertitudes, ... sont souvent semblables.

Pour mieux apprécier ces organisations différentes et ces ressemblances au niveau des activités des élèves, nous relatons le plus fidèlement possible deux de ces quatre activités. Notre souhait est que chaque enseignant puisse y retrouver soit des calculettes similaires à celles qu'il utilise en classe, soit des comportements d'élèves semblables à ceux qu'il va observer dans sa classe.

5.1 Des usages *didactiques* de la calculatrice

De manière générale, la calculatrice peut être utilisée dans trois contextes différents, mais complémentaires :
- pour **vérifier** un calcul,
- pour **effectuer** un calcul,
- pour **observer** des phénomènes arithmétiques.

Dans le premier contexte, l'utilisateur a déjà effectué son calcul et il souhaite vérifier si sa réponse est correcte. Notons que dans la vie courante, ce contexte est peu utilisé. En général, le calcul est effectué directement avec la calculatrice. En classe par contre, il est intéressant de demander aux élèves de vérifier leurs calculs à l'aide de la calculatrice. Cependant, comme nous le verrons pour la classe de Fibonacci, un aménagement des pratiques de correction est à réaliser.

Dans le deuxième contexte, il s'agit d'utiliser la calculatrice pour effectuer un calcul trop long, trop fastidieux ou pour lequel nous ne possédons pas de procédure rapide de calcul. Nous pensons particulièrement aux opérations sur les grands nombres ou à la recherche de la racine carrée. Ce contexte n'empêche cependant pas de faire apprendre les algorithmes du calcul mental ou du calcul écrit qui permettent de mieux comprendre, entre autre, le système décimal de position.

Dans le troisième contexte, il s'agit d'observer des phénomènes arithmétiques plus difficilement appréhendables à partir du calcul mental ou écrit, ou des connaissances des élèves à un moment donné de leur parcours scolaire. Ainsi, les nombres décimaux, les nombres négatifs, la multiplication par un facteur 10 ou 100, la multiplication par 0,5 ou 0,1... peuvent être appréhendés à partir de l'observation de ces phénomènes montrés par la calculatrice. Bien sûr, la calculatrice n'explique pas ce qui apparait à l'écran. Ce sont les élèves qui observent et, à partir de leurs connaissances, ébauchent des explications qu'ils vérifient à partir d'autres observations ou d'autres calculs.

5.2 Des usages *ludiques* de la calculatrice

À côté des usages décrits ci-dessus, coexistent des usages que nous qualifions de *ludiques*. En effet, qui n'a jamais essayé d'écrire un mot avec les chiffres du clavier ou de raconter une histoire en utilisant des nombres et des opérations... Ces usages font partie de ce qui est réalisable avec une calculette. Ils entretiennent certainement son caractère magique.

Mais d'autres usages peuvent aussi être considérés comme *ludiques* à cet âge. Il s'agit, pour certaines calculatrices, de l'usage des fonctionnalités telles que « racine carrée », ou encore « égal » qui, répété plusieurs fois après une opération, fait apparaitre à l'écran des nombres de plus en plus grands ou de plus en plus petits.

Ces activités, non prévues dans le cadre d'une activité organisée, peuvent être considérées comme *ludiques*. Elles ne sont cependant pas dépourvues d'intérêt. Au cours de ces manipulations, l'élève utilise la calculatrice, apprend à s'en servir et parfois se pose des questions sur le fonctionnement de la calculette. Parfois aussi, ces questionnements donnent lieu à une meilleure compréhension de certains algorithmes de calcul ou du système décimal de position.

5.3 Deux séances de *prise en main*

Nous relatons ci-dessous, deux séances de prise en main de la calculette, réalisées dans deux classes différentes. Pour des raisons de confidentialité, nous nommons ces classes de deux noms de mathématiciens : *Pythagore* et *Fibonacci*.

Ces activités ont pour objet l'initiation à l'usage de la calculatrice. Elles ont été préparées librement par les enseignants qui ont accepté de nous accueillir dans leur classe afin d'observer le travail des élèves. Nous les en remercions sincèrement.

Dans chacune des classes, les élèves possédaient tous la même calculatrice. Si ceci peut constituer un gain de temps et faciliter la gestion de l'activité lors la prise en main, ceci constitue parfois un frein pour comprendre certaines fonctionnalités ou certains affichages par confrontation avec d'autres calculettes. Si les contingences matérielles et financières imposent souvent qu'un seul type de calculatrices soit utilisé en classe, nous pensons qu'il serait intéressant qu'il n'en soit pas toujours ainsi. Nous proposons que l'enseignant possède une ou plusieurs autres calculatrices avec des fonctionnements différents. Nous pensons particulièrement à la persistance du « 0 » lors de l'écriture des nombres décimaux, ou à la répétition des opérations lorsque l'on presse sur le signe « $=$ » à plusieurs reprises.

La *prise en main* de la calculatrice concerne autant la compréhension de son fonctionnement (comment l'allumer, comment écrire un calcul et obtenir un résultat, ...) que la compréhension de son utilisation dans le cadre d'apprentissages numériques. Ainsi, comme nous le montrerons pour l'activité dans la classe *Fibonacci*, la calculatrice peut aussi servir à modifier les comportements des élèves, pour peu que ceux-ci soient conscients des phénomènes arithmétiques en jeu.

Pour mieux nous faire comprendre, prenons l'exemple du compas. Certes, amener les élèves à utiliser le compas n'est pas chose aisée : fixer correctement l'ouverture du compas, piquer la pointe sèche, tenir le compas par son extrémité et non par les deux branches, faire tourner la mine autour de la pointe sèche, ... Plusieurs mois sont parfois nécessaires pour que les élèves puissent utiliser correctement cet outil. Mais, amener les élèves à utiliser un compas *à bon escient* n'est pas plus aisé. Bien sûr, cet outil peut servir à tracer des cercles, mais il peut aussi servir à comparer ou reporter des longueurs, à construire des lignes parallèles ou perpendiculaires, à situer le milieu d'un segment, ... Et c'est surtout pour cette deuxième « partie » de la *prise en main* que les efforts de l'enseignant sont les plus conséquents. Et une fois encore, précisons qu'il n'est pas nécessaire d'attendre que les élèves maitrisent le maniement du compas pour rencontrer ses différents usages.

6 Classe Pythagore

La calculatrice utilisée. . .

En annexe 9.1 (page 43), nous présentons une copie du mode d'emploi de cette calculatrice. À plusieurs reprises, les élèves y ont fait référence, notamment lors des phases d'appropriation individuelle et de groupe.
Cette calculatrice est de type *bureautique*. L'affichage et le traitement des opérations sont ainsi parfois différents de ceux des calculettes de type *scolaire*. Par exemple, l'affichage du "0" en fin de nombre décimal reste effectif lorsque l'utilisateur appuie sur une touche d'opération. Ce qui n'est pas le cas généralement pour une calculatrice scolaire.

	Action sur le clavier	Affichage
Calculatrice "scolaire"	"$1,20$" "$+$" "$1,20$" "$=$"	$1,20$ $1,2$ $1,20$ $2,4$
Calculatrice "bureautique"	"$1,20$" "$+$" "$1,20$" "$=$"	$1,20$ $1,20$ $1,20$ $2,40$

Cet autre exemple concerne les opérations et leur répétitions : si l'élève affiche "$17+3$" puis presse sur la touche"$=$", la calculette affiche « 20 ». Si l'élève presse à nouveau sur la touche "$=$", la calculette affiche « 23 », puis « 26 », et ainsi de suite. Ceci est peu courant sur les calculettes de type *scolaire*.
Une autre particularité de la calculette utilisée dans cette classe est son affichage des nombres. Comme le montrent respectivement les figures 1 et 2, si l'affichage des nombres décimaux est similaire aux autres calculettes (emploi du point entre les unités et les décimales), celui des nombres à partir de mille est quelque peu différent : une apostrophe est utilisée pour séparer les groupes de trois chiffres.
Ceci possède un certain avantage : celui de faire comprendre que ces signes correspondent à des conventions. Ils peuvent donc différer d'un pays à l'autre, d'un fabricant à un autre. Ces signes sont là pour donner du sens aux chiffres assemblés pour former un nombre. Ils nous aident aussi pour lire ces nombres.

Fig. 1 – Affichage d'un nombre décimal.

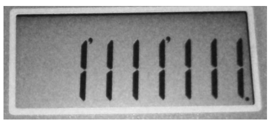


Fig. 2 – Affichage d'un nombre supérieur à mille.

6.1 Activité en classe

Moment 1

Découverte individuelle – L'enseignante présente l'activité comme la découverte d'un nouvel objet magique. Les calculettes sont distribuées aux élèves, ainsi que le mode d'emploi. L'enseignante invite les élèves à écrire leurs observations, individuellement, dans leur cahier de travail.

Un des élèves s'interroge sur le fonctionnement même de la calculatrice : « J'aimerais bien savoir comment elle [*la calculatrice*] fait pour avoir la réponse aussi vite ! » ... « Qu'est-ce qu'il y a dedans ? Il y a une puce mais comment ça marche ?... Comment elle sait la réponse ? »

Moment 2

Partage des découvertes par groupe de 4 – Après quelques minutes de travail, l'enseignante rassemble les élèves par groupe de trois ou quatre. Elle leur demande de réaliser une synthèse des travaux individuels. Celle-ci sera présentée aux autres groupes par la suite.

> ***Un peu de recul...***
>
> Ces deux premiers moments permettent à chacun d'exposer ce qu'il sait de cet objet. Cependant, ces *connaissances* n'appartiennent pas toutes au même *registre* comme le montrent les copies ci-dessous (figures 3 à 6). Ceci a une influence sur l'activité de l'enseignante qui doit au préalable gérer les différents registres. Toutes les informations ne sont pas pertinentes dans le cadre de l'utilisation de la calculette. Cependant, dans un premier temps d'analyse, l'enseignante ne peut ne pas les prendre en compte .
> Certaines *connaissances* appartiennent à la *zone d'usage* de la calculatrice, ce que nous pourrions nommer le *cadre fonctionnel*. Pour une bonne part, ces informations se trouvent dans le mode d'emploi. D'autres informations appartiennent à ce que nous pourrions nommer le *cadre juridique* (garantie, ...), d'autres encore au *cadre technique* (type de calculatrice, pile, ...).

Moment 3

Mise en commun des découvertes – L'enseignante organise la mise en commun orale des observations des élèves. Le porte-parole de chaque groupe expose les *informations* recueillies, sans distinction entre les différents types d'informations. Ci-dessous, nous exposons une copie de chacun des comptes rendus des groupes (figures 3 à 6).

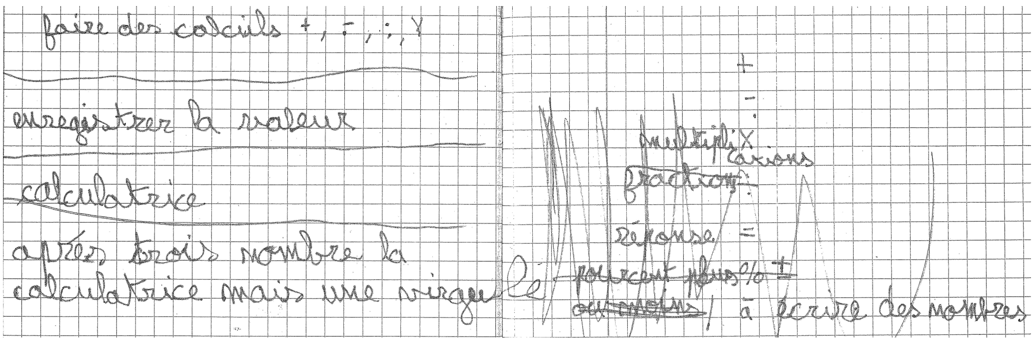


Fig. 3 – Que sait-on de cet objet ? Groupe 1

Force, puissance d'un son.
Baisse un peu le volume
de la télévision.
calculer, memoriser et rappeler
le tour de tasce, diviser,
connaître la réponse d'un
calcul, faire des pourcentages,
additioner, soustraire, multi-
plier

Fig. 4 – Que sait-on de cet objet ? Groupe 2

C'est une calculatrice
on peut diviser (÷), multiplier (x), additioner (+),
soustraire (-)
Il ya des chiffre
Il y a un € pour dire que sa contine et errau
il faut appuyer sur on
Elle pèse moins de 100g
Il y a une puce électronique
Il ya ~~deux~~ une pille

Fig. 5 – Que sait-on de cet objet ? Groupe 3

	MC	UD	UM	C	D	U
			9	6	3	5
-			1	4	0	8
			4	9	2	7

J'estime :
9600 - 1400 =
8200

Preuve
  4927
+ 1408
  9635

pas sûr
calculer, opération, display
percentage, memory, currency
conversion, tax calculation
overflow, mixed

alimentation, calcul de tax,
conversation de devise,
fonction de dépassement de
capacité, spécification.

Fig. 6 – Que sait-on de cet objet ? Groupe 4

Un peu de recul...

Les élèves ont donc énuméré une série d'informations ou de connaissances relatives à la calculatrice. Cependant, jusqu'à présent le manière d'utiliser cet outil (mode d'emploi) et son utilité ont été peu évoquées.

Moment 4

Exploitation des informations données par les élèves – L'enseignante explique aux élèves que leurs constatations, bien que correctes, appartiennent à des *types* d'informations différents. Il faut noter que pour certains élèves toutes ces informations sont du même type :

> [El.] « Moi je dirais que c'est la même chose... parce que c'est toutes sur la calculatrice ».

La comparaison avec les informations exposées, par exemple, dans un journal radiodiffusé ou dans un périodique permet de faire comprendre aux élèves que toutes les informations ne sont pas du même type. Dans un périodique, certaines informations concernent la politique, d'autres le sport, d'autres encore les faits divers locaux, les avancées de la science, ... Notons à nouveau qu'une élève s'est exprimée pour dire que ces informations « étaient toutes sur le monde ».

Un peu de recul...

Quelques informations classées.

Cadre fonctionnel	Cadre juridique	Cadre technique
◦ Faire des calculs ◦ Connaitre la réponse d'un calcul ◦ Faire des pourcentages ◦ Additionner, soustraire, multiplier, diviser ◦ Calcul de taxes ◦ Conversion de devises	◦ Garantie de 3 ans	◦ Calculatrice solaire ◦ Il y a des chiffres ◦ Il y a une puce électronique ◦ Elle pèse moins de 100 grammes ◦ Il y a une pile

L'enseignante recentre ensuite le débat sur la question suivante :

> « Que peut-on en faire de cette calculette ? À quoi peut-elle servir ? ».
> [El.] « À aider pour les pourcentages, et par exemple pour les euros... pour faire des calculs ».
> [Esgt] « Quel(s) type(s) de calculs ? »
> [El.] « Des divisions, des fois, des multiplications, des moins, des soustractions, des additions, des plus ».

L'enseignante demande ensuite si les élèves savent comment se servir de la calculette. Les élèves énoncent qu'ils ne savent pas se servir de toutes les touches. Par exemple la touche "$M+$".

> [El.] « Ca veut dire "1000 et +" ! »

Tous les élèves ne sont pas d'accord avec cette affirmation. L'enseignante les invite à se référer au mode d'emploi. Ceci permet de comprendre que cette touche a trait à la mise en mémoire d'informations, tout comme pour le cerveau humain. L'enseignante poursuit :

> [Esgt] « Par exemple si vous devez réaliser un calcul mentalement, imaginons 17×50, vous pouvez faire d'abord 10×50, et retenir le 500, et puis faire 7×50, 350. Et enfin, vous devez vous souvenir de 500 et l'ajouter à 350. Ce qui fait... Faites le calcul à l'aide de la calculatrice. »

Un peu de recul...

La calculatrice est utilisée comme outil de *vérification* d'un calcul réalisé mentalement. Cependant le calcul à effectuer va également servir de test pour savoir si les élèves savent manipuler la calculatrice.

> [El.] « 850 ... Il y a plusieurs réponses qui apparaissent. Quand on appuie plusieurs fois sur "$=$" et bien il y a plusieurs réponses qui apparaissent... Par exemple, si on fait 17 $fois$ 50 ça fait... il y a plusieurs réponses ! »
>
> [Esgt] « Non, il n'y a qu'une seule réponse à ce calcul. La calculatrice affiche 850... Mais que fais-tu après ? »
>
> [El.] « J'appuie plusieurs fois sur le "$=$". »
>
> [Esgt] « Tu appuies une nouvelle fois sur "$=$" et cela fait combien ? »
>
> [El.] « 14450 ... avec une virgule ! » (affichage : 14'450)

Un peu de recul...

Des élèves ont mis en évidence un phénomène propre à ce type de calculatrice : presser à plusieurs reprises sur le signe "$=$" après une opération, itère cette opération. Cependant, les élèves n'ont pas encore découvert à ce moment la véritable opération itérée.
La dernière déclaration d'une élève met aussi en évidence un fonctionnement particulier de la calculette au niveau de son affichage : l'apparition d'une apostrophe pour séparer les unités, des milliers, des millions... Demander aux élèves d'expliquer à quoi peut servir ce signe, les oblige à questionner leurs connaissances du système d'écriture des nombres, en lien avec le système décimal de position.

L'enseignante demande si l'on écrit comme cela habituellement. Une élève répond négativement, mais la majorité des élèves observent toujours le phénomène de la poursuite du calcul en pressant sur "=". L'enseignante note au tableau le nombre affiché par la calculette après que les élèves aient à nouveau utilisé la touche "=" : $245'650$.

Un élève (que nous nommerons Pierre) s'exclame :

> « Mais c'est la réponse de quoi cela ? »

Une autre élève s'exclame :

> « Cela ne s'arrête jamais ! »

Un peu de recul. . .

La calculatrice comme outil d'exploration d'un phénomène ou d'un concept mathématique. . . en l'occurrence l'infini. Bien sûr que l'on en parle en classe, bien sûr que l'*infini* est abordé lorsque l'on parle de la suite des nombres naturels. Mais voir que l'on peut toujours multiplier un nombre et obtenir une réponse, cela surprend et marque réellement les esprits.

Pour répondre à la question de Pierre, une hypothèse est émise par une autre élève :

> « On prend le 17 et on fait $fois$ la réponse ».

Les élèves utilisent la calculatrice pour vérifier : $17 \times 850 = 14450$; $17 \times 14450 = 245650$.

L'enseignante demande aux élèves ce que fait réellement la calculette. Une élève répond :

> « Elle fait la première. . . le premier chiffre. . . le premier terme, avec le signe, . . . Si on fait $17 + 50$, ça fait 67, et si on fait "=", ça fait 84. . . euh non elle met 117 ! Puis 157, 207. »

L'enseignante met en évidence que dans ce cas, la calculatrice ajoute 50. Mais que dans le cas de la multiplication, elle multiplie par 17. Cette particularité est mise en évidence au tableau également.

17	x	50	=	850
			=	14 450
			=	245 650

17	+	50	=	67
			=	117
			=	167

Une élève s'exclame :

> « Ah, ça c'est un souci ! »

Cette élève a perçu que la calculatrice n'utilisait pas toujours le premier nombre ou le second pour itérer l'opération. L'enseignante précise que dans le cas de multiplications, l'opérateur est le premier nombre. L'enseignante propose ensuite d'effectuer 50×17. Une élève lui répond que cela fera « toujours 850 ». La commutativité de la multiplication sur les naturels est utilisée pour justifier cette réponse. Mais au même moment, un élève s'exclame :

> [El.] « 42500 ».
> [Esgt] « On n'obtient pas la même chose qu'avec 17×50 »
> [El.] « Ici, on fait $fois$ 50 chaque fois qu'on appuie sur "$=$" ».

L'enseignante attire à nouveau l'attention des élèves sur l'affichage des nombres par la calculette, particulièrement sur l'apparition d'une apostrophe dans les grands nombres. Les élèves expliquent que c'est pour séparer les groupes de trois chiffres. L'enseignante explique qu'auparavant, le point était aussi utilisé comme signe de séparation. Une élève précise que maintenant le point est utilisé pour remplacé le $fois$ (multiplication).

Un peu de recul. . .

Cet intérêt pour le code d'écriture n'est pas anodin. Nous retrouverons ce souci avec l'écriture des nombres décimaux. Selon les pays ou les outils, le signe utilisé pour séparer la partie entière de la partie décimale est un point ou une virgule.
Il est intéressant de montrer différentes écritures d'un même nombre aux élèves afin qu'ils comprennent le rôle du code d'écriture, et au-delà qu'ils appréhendent le *système décimal de position*. Ainsi est-il favorable de leur faire remarquer que les quatre écritures suivantes, bien que différentes au niveau de leur forme, indiquent le même nombre. Tout est ici question de convention et de facilité de lecture des nombres.

$14'450$ $\qquad$ 14450 $\qquad$ 14.450 $\qquad$ $14\ 450$

L'activité se termine. Une autre est prévue pour utiliser la calculatrice comme outil de vérification lors d'une activité de calcul mental.

7 Classe Fibonacci

La calculatrice utilisée...

Nous présentons une partie du mode d'emploi de la calculatrice employée par les élèves en annexe 9.2 (page 44).
Cette calculatrice est de type *scolaire*, et contrairement à la calculatrice précédente, elle possède les fonctionnalités relatives à l'*élévation au carré* et au calcul de la *racine carrée*.
Le calcul de fractions simples est également possible.
Comme pour beaucoup de calculatrices de ce type, le "0" en fin de partie décimale d'un nombre n'apparait pas lors de l'affichage d'une réponse, ou disparait lorsqu'une touche d'opération est pressée.

7.1 Activité en classe

Moment 1

Découverte individuelle – L'enseignante présente l'activité comme la découverte d'un *nouvel outil magique*. Les calculettes sont distribuées dans leur boitier. Les élèves les ouvrent et s'exclament : « ah ! c'est une calculette ! »

Au tableau, l'enseignante note

1. Découvre la magie de cet outil.
2. Écris tes découvertes pour pouvoir les partager avec les autres enfants.

Puis, elle invite les élèves à écrire leurs observations dans leur cahier de travail.

Moment 2

Partage des découvertes par groupe de 4 – L'enseignante regroupe ensuite les élèves par 3 ou 4. Nous relatons ci-dessous quelques échanges observés au sein d'un des groupes pour montrer des usages *ludiques* de la calculatrice.

> Michel (M.) « Comment on s'en sert ? »
> Les autres élèves lui expliquent à partir d'un calcul...
>
> Honorine (H.) lui dit : « Attends, je vais te faire un gage... Elle affiche à l'écran "$92 + 120 =$". La réponse apparait : « 212 ». Mais ceci ne donne lieu à aucune autre intervention.
>
> M. s'exclame « C'est une calculatrice scientifique ! », en montrant l'affichage sur le haut de la calculatrice.

S. affiche "3838" à l'écran de sa calculatrice, puis la retourne et montre que le mot « bébé » est affiché.

Un peu de recul. . .

Ces deux premiers moments permettent à chacun d'exposer ses usages de la calculatrice. Ceux-ci comprennent des usages que l'on pourrait qualifier de *scolaires* ou *didactiques* mais aussi des usages que l'on peut qualifier de *ludiques*, tels que celui d'H. (faire un gage) ou de S. (afficher des mots).

Moment 3

Mise en commun des découvertes – L'enseignante organise la mise en commun orale des découvertes. Chaque porte-parole expose une *découverte* du groupe, sans distinction entre les informations qui concernent son fonctionnement et celles qui concernent son utilité.

Dans l'ordre de citations par les élèves :

> « C'est une calculette, ou calculatrice. »
>
> « Il y a plusieurs boutons, avec des boutons qui ne sont pas sur toutes les calculatrices ; on peut faire des opérations, il y a des chiffres, il y a une touche pourcentage. »

L'élève montre la touche et l'enseignante la dessine au tableau.

> [El.] « Quand on a les bulletins, les points c'est des pourcentages ! »
>
> [El.] « Oui mais il ne faut pas se tromper avec diviser, c'est presque la même touche, mais là c'est le symbole des fractions. »

L'élève montre la touche, l'enseignante dessine au tableau.

> « Elle sert à multiplier des grands nombres qu'on ne sait pas multiplier dans sa tête. »
>
> « Il y a aussi un bouton pour faire des racines carrées, c'est mon grand frère qui me l'a appris !. . . C'est un petit "v" avec une barre au-dessus. . . mais je ne sais pas à quoi ça sert ! Mais c'est comme les nombres au carré. »

Une autre élève :

> « Il y a aussi les racines cubiques, c'est ma grande sœur et ma maman qui me l'ont dit ! »

Un peu de recul. . .

Ces quelques citations montrent combien les élèves, ensemble, possèdent une connaissance *floue* de cet outil. Certains élèves ne l'ont même jamais utilisé. Pour d'aucuns, leur connaissance provient d'autres utilisateurs qui ont partagé avec eux des usages auxquels ces élèves ne peuvent encore avoir vraiment accès, comme le calcul de la racine cubique.

Moment 4

Calculer avec la calculatrice – L'enseignante reprend la conduite des discussions et demande :

« Comment faire pour allumer la calculatrice ? »

Les élèves proposent d'utiliser la touche "ON" pour allumer et "OFF" pour éteindre la calculatrice. La touche "AC" est aussi proposée pour l'allumer. L'enseignante demande aux élèves de proposer un calcul afin de tester si chacun sait utiliser la calculatrice. Un élève propose « 1150×2500 ». Les élèves effectuent ce calcul et lorsque la réponse s'affiche, plusieurs élèves s'étonnent de la réponse affichée : « 2875000 » ! Reconnaissons qu'en quatrième primaire, les nombres rencontrés en classe ne dépassent guère les dizaines de mille.

[Esgt] « Je vous propose de commencer par un calcul que nous pourrions faire mentalement pour pouvoir vérifier si l'on a bien fait le calcul avec la calculette. »

Un peu de recul...

Remarquons que ce que propose l'enseignante est à l'inverse de ce qui se fait généralement. Cette fois, ce sont les connaissances des élèves en calcul mental qui permettent de vérifier et de valider l'utilisation de la calculatrice.

Les élèves proposent différents calculs, l'enseignante note au tableau : 250×1000. Les élèves calculent mentalement, la réponse est notée au tableau : 250000. Les élèves réalisent ensuite le calcul à l'aide de la calculatrice. L'enseignante propose de comparer ce qui est écrit au tableau avec la réponse affichée par la calculatrice.

« Ils ne mettent pas les espaces ! » s'écrie une élève.
Une autre : « Il y a un point à la fin ! »
Un autre encore : « Ca veut dire que le nombre se termine là ! »
[Esgt] « À quoi sert ce point ? »
[El.] « Pour remplacer la virgule ! »
[El.] « Pour dire que le nombre se termine. »
[El.] « Ici, on écrit le nombre, puis quand on appuie sur le "$fois$", pouf, le nombre devient 0 et on peut écrire le nouveau nombre. »

Les dernières remarques émises par les élèves incitent l'enseignante à s'intéresser davantage à l'affichage des nombres sur l'écran de la calculatrice. Elle propose donc un nouveau calcul que les élèves réalisent d'abord mentalement. Lors de l'écriture du calcul sur la calculette, l'enseignante insiste pour que les élèves observent ce qui se passe sur l'écran de la calculatrice. Les constats émis au préalable sont confirmés et expliqués à nouveau.

Moment 5

La calculatrice comme outil de vérification – L'observation de la calculatrice se termine. L'enseignante propose aux élèves d'effectuer individuellement une série de calculs mentalement (feuille A4). Elle leur annonce que la calculatrice servira d'outil d'autocorrection. Les élèves semblent apprécier ce travail.

Les calculs proposés sont du type :

Trouve le nombre manquant pour obtenir 100...

$44 + ...$
$37 + ...$
$65 + ...$
$81 + ...$

Après avoir résolu une série de 10 calculs, les élèves utilisent la calculatrice pour vérifier leurs réponses.

Un peu de recul...

Analysons les comportements des élèves.

Prenons comme exemple le premier calcul : « $44 + ...$ » pour obtenir 100, et supposons que des élèves aient répondu 56. Observons les élèves... Comment se servent-ils de la calculatrice ?
Tout d'abord les élèves encodent les calculs comme ils sont écrits sur leur feuille, selon la chronologie de l'écriture : "$44+56 =$". Ensuite, ils vérifient si l'affichage est bien « 100 ». Nous n'avons observé aucun élève qui vérifiait si leur réponse (56) était correcte à partir d'une technique soustractive, correspondant mieux au calcul proposé par l'institutrice. Par exemple : "$100 - 44 =$", ou encore "$100 - 56 =$".

Gardons encore notre exemple, mais supposons que des élèves aient répondu « 66 ». En utilisant la calculatrice de la même manière qu'exposée ci-dessus, les élèves obtiennent « 110 » comme réponse : "$44 + 66 = 110$". Ils constatent alors que leur réponse n'est pas correcte puisque la calculatrice n'affiche pas 100 ! Comment réagissent-ils ?
Tous les élèves observés ont effacé leur réponse et ont recommencé le calcul. Aucun n'a utilisé la réponse donnée par la calculatrice pour *adapter* sa réponse.
En effet, si la calculette affiche 110, l'élève peut constater que la réponse au calcul est de 10 supérieure à celle attendue (100). Il peut conclure que sa proposition est d'autant supérieure à la solution et peut adapter sa réponse en conséquence, soit "$64 - 10 = 54$". En étant confronté à plusieurs reprises à ce phénomène, avec l'aide de l'enseignant, l'élève peut modifier sa technique de calcul.

L'activité se termine lorsque les élèves ont terminé d'effectuer les calculs et de les vérifier avec la calculatrice.

7.2 Commentaires

Cette activité avait pour objectif principal de faire découvrir la calculatrice, nouvel outil pour d'aucuns, et d'apprendre à l'utiliser, notamment à partir de pratiques d'autocorrection de calculs effectués mentalement.

À nouveau au cours des phases individuelle et de groupe, nous avons pu observer que les connaissances des élèves par rapport à la calculatrice sont très variées et essentiellement influencées par les expériences de pairs :

> « C'est ma soeur/mon grand frère qui m'a dit que... »
> « Ma maman pour son travail elle utilise... ».

Pour ces élèves, cette rencontre avec la calculette semble bien être la première en milieu scolaire.

8 En synthèse

Notre postulat de départ est que l'enseignement et l'apprentissage des nombres et des opérations ont à gagner avec l'usage de la calculatrice en classe.

Des recherches antérieures sur l'usage des calculatrices(3) mais également les expérimentations que nous avons réalisées en classe ont montré combien il était nécessaire de découvrir l'utilisation de la calculatrice.

Plusieurs voies peuvent être suivies pour introduire cet outil et apprendre à l'utiliser. Bien sûr, une seule activité ne suffira pas. Et l'apprentissage de son usage se réalisera également au fur et à mesure que les élèves seront confrontés à des situations diverses, comme pour tout autre outil.

Pour notre part, il nous semble que dans une première phase, il est sans nul doute utile de *faire émerger les connaissances préalables des élèves* par rapport à cet outil. Ce qui a par ailleurs été réalisé dans les deux classes d'expérimentation. Durant cette phase, l'enseignant réagit en fonction des interventions des élèves, de leurs apports, de leurs questionnements. Il met en relation les questionnements de certains élèves avec les connaissances d'autres.

Cette première phase peut aussi donner lieu à des activités de lecture du mode d'emploi(4), à la comparaison du fonctionnement de calculatrices différentes, ...

Ensuite, dans une deuxième phase, utiliser la calculatrice pour *réaliser des calculs que les élèves peuvent résoudre mentalement* permet d'une part de vérifier si la calculatrice affiche bien les « bonnes réponses » (« si elle calcule bien »), et d'autre part de vérifier si les élèves manipulent correctement la calculatrice, s'ils sont capables d'encoder correctement les calculs.

Enfin, dans une troisième phase, utiliser la calculatrice pour *vérifier des calculs plus complexes réalisés mentalement* permet aux élèves de réfléchir à de nouveaux algorithmes de vérification ou de correction des calculs effectués.

(3) Notamment Del Notaro, L. & Floris, R. (2005), M. Artaud (2003).

(4) Cette activité peut se prolonger par un travail sur ce type de texte en relation avec des compétences en français, telles que *Dégager l'organisation d'un texte*, ... (Socles de compétences, 1999).

Utiliser la calculatrice

9 Annexes

9.1 Annexe 1 - Mode d'emploi de la calculatrice de la classe Pythagore

Canon **LS-8TCG**

INSTRUCTIONS
BEDIENUNGSANLEITUNG
MODE D'EMPLOI
INSTRUCCIONES
ISTRUZIONI
BRUGSANVISNING
BRUKSANVISNING

KÄYTTÖOHJE
INSTRUCTIES
INSTRUÇÕES
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ

PRINTED IN CHINA
PUB E-IM-2253

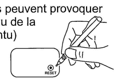
Calculation	Operation	Display
▼ Mixed		
	[ON/CA]	(0.)
140–35+22=127	140 [−] 35 [+] 22 [=]	(127.)
2x ~~2~~ 3=6	2 [×] 2 [CI/C] 3 [=]	(6.)
–7x 9=–63	[CA] [−] 7 [×] 9 [=]	(– 63.)
(2+4)÷3x8.1=16.2	2 [+] 4 [÷] 3 [×] 8 [•] 1 [=]	(16.2)
▼ Percentage		
1200x $\frac{12}{100}$ =144	1200 [×] 12 [%±]	(144.)
1200x $\frac{15}{100}$ =180	15 [%±]	(180.)
1200+(1200x20%)=1,440	1200 [+] 20 [%±]	(1'440.)
1200–(1200x20%)=960	1200 [−] 20 [%±]	(960.)
▼ Memory		
	[CA]	(0.)
3x4= 12	3 [×] 4 [M±]	(M 12.)
–) 6÷0.2= 30	6 [÷] 0 [•] 2 [M=]	(M 30.)
–18	[RM/CM]	(M – 18.)
+) 200	200 [M±]	(M 200.)
182	[RM/CM] (Recall Memory)	(M 182.)
	[RM/CM] (Clear Memory)	(182.)
▼ Currency Conversion		
Currency Rate Store [▭] = 1.35 (US$)	[ON/CA] [▭]	([▭] 1.)
Local = 1 (Euro)	1 [•] 35 [▭]	([▭] 1.35)
Recall Currency Rate	[ON/CA] [LOCAL]	([▭] 1.35)
Convert Currency Euro 78 = US$? (US$105.3)	78 [LOCAL]	([▭] 105.3)
US$ 48 = Euro? (35.555555)	48 [▭]	(LOCAL 35.555555)
▼ Tax Calculation		
Tax Rate Set	[CA] [SET TAX+]	(TAX% 0.)
Rate: 5%	5 [SET TAX+]	(TAX% 5.)
Recall Tax Rate	[CA] [RECALL TAX−]	(TAX% 5.)
Add the Tax Amount		
Price $2,000 without tax	2000	(2'000.)
Selling Price with tax = ? ($2,100)	[TAX+]	(TAX+ 2'100.)
Tax= ? ($100)	[TAX+]	(TAX 100.)
Deduct the Tax Amount		
Selling Price $3,150 with tax	3150	(3'150.)
Price without Tax = ? ($3,000)	[TAX−]	(TAX− 3'000.)
Tax = ? ($150)	[TAX−]	(TAX 150.)
▼ Overflow		
1) 123456 x 7890	123456 [×] 7890 [=]	(E 9.7406784)
=974067840 (Error)	[CI/C]	(9.7406784)
2) 99999999 (Add to Memory)	99999999 [M±]	(M 99'999'999.)
123 (Add to Memory)	123 [M±]	(M E 1.0000012)
	[CI/C]	(M 1.0000012)
	[CA]	(0.)
3) 6÷0=0 (Error)	6 [÷] 0 [=]	(E 0.)
	[CI/C]	(0.)

FRANÇAIS

ALIMENTATION

Cette calculatrice est dotée d'une double source d'alimentation. L'autonomie de la batterie au lithium dépend de l'utilisation de l'appareil.

■ Les interférences électromagnétiques ou les décharges électrostatiques peuvent provoquer un dysfonctionnement de l'affichage ou la perte ou l'altération du contenu de la mémoire. Si cela se produit, utilisez la pointe d'un stylo (ou un objet pointu) pour appuyer sur le bouton [RESET] au dos de la calculatrice. Une fois la réinitialisation effectuée, veillez à entrer à nouveau le taux de calcul de taxe et le taux de conversion.



CALCUL DE TAXE

[CA] [SET TAX+] **Pour mémoriser un taux de taxe :** Appuyez sur les touches [CA] [SET TAX+] et entrez la valeur. Appuyez ensuite sur [SET TAX+] pour l'enregistrer.

[CA] [RECALL TAX−] **Pour rappeler le taux de taxe :** Appuyez sur les touches [CA] [RECALL TAX−] pour rappeler la valeur.

[TAX+] **Touche d'addition de taxe :** Permet d'ajouter le montant des taxes à la valeur affichée.

[TAX−] **Touche de soustraction de taxe :** Permet de déduire le montant des taxes de la valeur affichée.

CONVERSION DE DEVISE

[ON/CA] [▭] **Pour enregistrer le taux de change :** Appuyez sur le bouton [ON/CA] [▭] et entrez la valeur. Appuyez ensuite sur [▭] pour l'enregistrer. (Vous pouvez entrer un taux contenant 8 chiffres au maximum.)

[ON/CA] [LOCAL] **Pour rappeler le taux de change :** Appuyez sur le bouton [ON/CA] [LOCAL] pour rappeler le taux de change.

[▭] [LOCAL] **Touche de devise :** Permet de convertir l'unité entre [▭] et la devise [LOCAL].

FONCTION DE DÉPASSEMENT DE CAPACITÉ

Dans les situations suivantes, lorsque « E » s'affiche, le clavier est verrouillé électroniquement et toute opération supplémentaire est impossible. Appuyez sur [CI/C] pour annuler le dépassement de capacité. La fonction de dépassement de capacité a lieu lorsque :
1) Le résultat ou le contenu de la mémoire est supérieur à 8 chiffres avant la virgule.
2) La division par « 0 ».

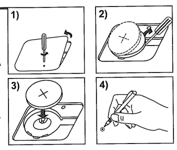
SPÉCIFICATIONS

Source d'alimentation : Voir dos de l'appareil.
Garantie : 3 ans
Mise hors tension automatique : approx. **7 minutes**
Température d'utilisation : de 0 °C à 40 °C
Dimensions : 10,35 mm (P) x 63,5 mm (L) x 9 mm(H)
Gewicht : 47 g
(Sujet à des modifications sans préavis)

BATTERIE

Batterie : 1 batterie au lithium (Type : CR2016)
Remplacement de la batterie
Après avoir remplacé la batterie, appuyez sur le bouton [RESET]. Une fois la calculatrice réinitialisée, veillez à redéfinir le taux d'imposition.

Avertissement Le remplacement de la batterie par un type incorrect peut entraîner un risque d'explosion. Veillez à éliminer les batteries usagées conformément aux instructions.



ESPAÑOL

FUENTE DE ALIMENTACIÓN

Esta calculadora se suministra con una fuente de alimentación doble. La duración de la batería de litio depende específicamente del uso individual.

■ Las interferencias electromagnéticas o las descargas electrostáticas pueden dañar la pantalla o provocar la pérdida o alteración del contenido de la memoria. Si esto ocurriera, utilice la punta de un bolígrafo (o un objeto afilado similar) para pulsar el botón [RESET] en la parte posterior de la calculadora. Después de ello, no olvide que deberá establecer de nuevo los tipos impositivo y de conversión.

CÁLCULO DE IMPUESTOS

[CA] [SET TAX+] **Almacenar el tipo impositivo:** pulse [CA] [SET TAX+] especifique el tipo impositivo y, a continuación, pulse [SET TAX+] para almacenarlo.

[CA] [RECALL TAX−] **Recuperar el tipo impositivo:** pulse [CA] [RECALL TAX−] para recuperar el tipo impositivo actual.

[TAX+] **Tecla de adición de impuesto:** utilizada para agregar el importe del impuesto al número que se muestra.

[TAX−] **Tecla de deducción de impuesto:** utilizada para restar el importe del impuesto del número que se muestra.

CÁLCULO DE CONVERSIÓN DE DIVISAS

[ON/CA] [▭] **Almacenar el tipo de conversión de divisas:** pulse [ON/CA] [▭] especifique el tipo de conversión de divisas y, a continuación, pulse [▭] para almacenarlo. (Para el tipo de conversión, se pueden introducir hasta 8 dígitos.)

[ON/CA] [LOCAL] **Recuperar el tipo de conversión de divisas:** pulse [ON/CA] [LOCAL] para recuperar el tipo de conversión de divisas.

[▭] [LOCAL] **Tecla de divisa:** para cambiar la unidad de divisa entre [▭] y [LOCAL].

FUNCIÓN DE DESBORDAMIENTO

En los siguientes casos, cuando se muestre una "E" en la pantalla, el teclado estará bloqueado electrónicamente y no podrán realizarse más operaciones. Pulse [CI/C] para quitar el desbordamiento.
La función de desbordamiento ocurre cuando:
1) El resultado o el contenido de la memoria supera los 8 dígitos a la izquierda del punto decimal.
2) Al dividir entre "0".

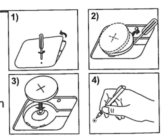
ESPECIFICACIONES

Fuente de alimentación: consulte la parte posterior del producto.
Garantía: 3 años
Apagado automático: aprox. **7 minutos**
Temperatura operativa: entre 0 y 40 °C
Dimensiones: 10.35mm (largo) x 63.5mm (ancho) x 9mm (alto)
Peso: 47g
(sujeto a cambios sin previo aviso)

BATERÍAS

Baterías: 1 batería de litio (tipo: CR2016)
Reemplazar la batería
Después de reemplazar la batería, pulse el botón [RESET]. Después de reiniciar, asegúrese de volver a establecer la tasa de impuesto.

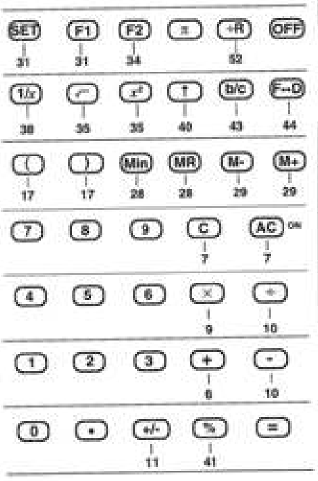
Precaución Existe riesgo de explosión si la batería se reemplaza con un tipo de batería incorrecto. Deseche las baterías gastadas según se especifica en las instrucciones.



9.2 Annexe 2 - Extraits du mode d'emploi de la calculatrice de la classe Fibonacci

LES TOUCHES

Vous trouverez les informations concernant les touches, aux pages indiquées au regard des tirets.



4

AFFICHER UN NOMBRE

AFFICHAGE D'UN NOMBRE ENTIER

La caractéristique de votre calculatrice est de conserver sur l'écran d'affichage les chiffres successifs qu'on introduit à l'aide des touches numériques. C'est ainsi que l'on peut reconstituer l'écriture d'un nombre.
PRESSEZ **AC** POUR "ALLUMER" VOTRE CALCULATRICE.

affichage	touche
0.	AC
1.	1
12.	2
123.	3
1234.	4
12345.	5
123456.	6
1234567.	7
12345678.	8
123456789.	9
1234567891.	1

Suivez sur votre machine l'exemple proposé dans le tableau, après avoir "allumé" votre calculatrice. Le tableau se lit de haut en bas. Nous notons dans la colonne TOUCHE, les touches que nous pressons, et dans la colonne AFFICHAGE, en vis-à-vis, l'affichage correspondant qui est lu.
Vous remarquerez que l'enregistrement du nombre est limité par la capacité de l'affichage qui est de dix chiffres. A partir du dixième chiffre, elle n'accepte plus la frappe de touche numérique supplémentaire. Essayez de frapper la touche 2; rien ne se passe.

L'affichage de la calculatrice est limité à 10 chiffres.

5

AFFICHAGE D'UN NOMBRE DECIMAL

La calculatrice utilise le POINT DECIMAL et non la virgule.

Ce point est caractéristique de l'écriture américaine (et anglaise) des nombres décimaux.
Dans le premier tableau, nous voulons écrire le nombre décimal 34,58. Nous frappons 34.58

affichage	touche
0.	AC
3.	3
34.	4
34.	•
34.5	5
34.58	8

affichage	touche
0.	AC
0.	•
0.6	6
0.63	3

Si le nombre à afficher est inférieur à 1, (par exemple 0,63), on peut ne pas afficher le zéro qui précède le point décimal. (Exemple du second tableau).

Remarque:
- Pressez AC puis affichez 1.234567891. Le point décimal n'occupe pas la place d'un chiffre. Vous pouvez donc afficher des décimaux qui s'écrivent avec 10 chiffres.
- Pressez AC puis affichez 0.123456789. Vous constatez que ZERO occupe la place d'un chiffre. C'est normal puisque ZERO est un chiffre.

ADDITION DE DEUX NOMBRES

Essayons de découvrir comment la calculatrice s'organise pour effectuer une addition. Prenons par exemple 3+2=5. Une calculatrice n'est d'ailleurs pas nécessaire pour connaître le résultat! Mais nous nous intéressons seulement au fonctionnement de la machine.

6

aff	touche	
0.	ON	On "allume" la calculatrice.
3.	3	On presse la touche 3; 3 s'affiche.
3.	+	On presse la touche +, rien ne semble se passer. La machine a-t-elle compris le +?
2.	2	On presse la touche 2; 2 s'affiche. Le 3 a disparu de l'affichage. La machine aurait-elle perdu le 3?
5.	=	On presse la touche =; 5 s'affiche. La machine a effectué l'addition demandée, elle avait tout enregistré.

La calculatrice avait compris le + et elle n'avait pas perdu le 3 ... heureusement! Donc, il a bien fallu qu'elle enregistre les données quelque part dans des "réserves". Le tableau suivant explique l'utilisation de la réserve de nombre X (c'est-à-dire l'affichage), de la réserve de signe et de la réserve de nombre Y.

rés Y	rés sign	aff X	touche	
0		0.	AC	On "allume" la calculatrice. Les réserves X et Y contiennent 0.
0		3.	3	On presse 3; 3 s'affiche.
3	+	3.	+	On presse +, 3 est enregistré dans la réserve Y et + dans la réserve de signe.
3	+	2.	2	On presse 2; 2 s'affiche à la place de 3 qui était resté à l'affichage.
0		5.	=	On presse =, 5 s'affiche. L'opération en attente a été effectuée. La réserve Y est remise à 0.

EFFACER UN NOMBRE UNE OPERATION

EFFACER UN NOMBRE

Au cours de l'exécution d'une opération, on peut faire une erreur dans la frappe d'un des nombres. Si l'on s'en rend compte à temps, il y a moyen de rectifier sans devoir tout retaper.

7

Activités géométriques

Embarquement vers les nombres à virgule...

> *Paradoxalement, c'est un problème qui n'a pas de solution dans $\mathbb{D}^+$ qui amène à la construction de $\mathbb{D}^+$. C'est en fait moins étonnant qu'il n'y paraît. Le rôle de $\mathbb{D}$ est d'être une approximation techniquement pratique de $\mathbb{R}$.*
>
> R. Douady, 1980

Comme nous l'avons montré dans l'introduction de ce fascicule, la rencontre avec les nombres décimaux positifs participe du phénomène de généralisation de l'ensemble des nombres, soutenu par le *système décimal de position*.

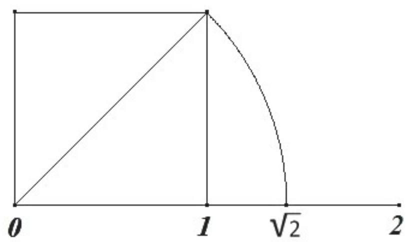
Les activités ci-dessous ont pour objectif de confronter les élèves avec cette généralisation et avec l'extension de l'ensemble des nombres. Cependant, plutôt que de leur présenter les nombres décimaux dans des situations de vie courante, nous avons choisi de confronter les élèves à la nécessité de posséder de *nouveaux nombres* pour pouvoir résoudre une situation qui leur est présentée. Bien sûr, les élèves n'*inventent* pas ces *nouveaux nombres*, en l'occurrence les nombres décimaux. Pour une part, ils les ont déjà rencontrés dans différents contextes. Les paiements en euro en sont un, mais sans doute ont-ils déjà tracé des lignes de 6,5 cm ou dû mesurer des longueurs qui nécessitaient l'utilisation d'une fraction décimale de l'unité de mesure. Sans doute ont-ils déjà lu sur des bouteilles ou des berlingots des capacités exprimées à l'aide d'un nombre décimal (1,5 l). Mais entre rencontrer des nombres décimaux dans des situations de vie et faire sens avec ces nombres comme éléments participant du système décimal de position, il y a un pas que certains élèves ont quelques difficultés à franchir.

La série d'activités que nous proposons ne remplace pas ce qui se fait déjà dans les classes, ni ce que peuvent proposer les collections de manuels scolaires. Nous pensons que l'apport principal des activités qui suivent se situe au niveau de la première rencontre avec les nombres décimaux durant laquelle les élèves « inventent » ou *découvrent* des nombres décimaux dans un contexte de mesure avec une unité non conventionnelle.

10 D'un environnement physique vers un environnement mathématique

La séquence que nous proposons peut paraitre audacieuse pour plusieurs raisons.

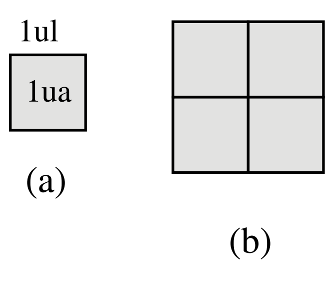
D'abord, il y est fait appel à des concepts qui ne sont pas encore entièrement accessibles aux élèves de quatrième primaire : un nombre irrationnel, l'infini, le continu,... Mais n'est-ce pas là ce qui fonde en partie l'enseignement ?



Ensuite, cette situation ne possède pas de réponse *finie*, au sens où il n'est pas possible de déterminer un nombre décimal qui sera la réponse au problème. Expliquons-nous davantage. Cette situation fait appel à la notion d'*incommensurabilité* de la diagonale du carré. Ainsi, pour un carré de côté de longueur unitaire (1), la longueur de sa diagonale est $\sqrt{2}$, un *nombre irrationnel*. Elle ne peut donc être mesurée exactement comme il est courant à l'école primaire ni exprimée de manière précise avec un nombre décimal.

Notre objectif n'est bien sûr pas de faire apprendre ce qu'est $\sqrt{2}$ aux élèves de 4e primaire. Il s'agit de justifier l'intérêt des nombres décimaux et, plus encore, de montrer l'*horizon* vers lequel les apprentissages numériques tendent, plutôt que d'exposer une théorie réduite à assimiler et à appliquer. Ajoutons que les nombres décimaux que les élèves « inventent » pour résoudre la situation proposée sont utilisés pour encadrer le nombre irrationnel $2\sqrt{2}$, ce qui se justifie pleinement d'un point de vue épistémologique.

Dans notre chapitre d'introduction, nous avons aussi montré en quoi les nombres et les grandeurs étaient intimement liés. Mais, nous avons également essayé de montrer en quoi les grandeurs et leurs mesures à partir d'unités conventionnelles pouvaient « *parasiter* » le travail des élèves dans des situations numériques. Ainsi, la situation que nous proposons aux élèves est débarrassée de ses attributs *physiques*, au sens commun du terme, et la mesure des grandeurs se réalise à l'aide d'un étalon autre que ceux conventionnellement utilisés, comprenons le cm ou le mm.



Si nous utilisons le carré a comme étalon de mesure,

- acceptons que la longueur d'un de ses côtés soit l'unité de mesure de longueur, dans ce cas, son périmètre vaut 4 unités de longueur (ul) ;
- acceptons ensuite que son aire soit l'unité d'aire, dans ce cas, son aire vaut 1 unité d'aire (ua).

Pour le carré b, si nous acceptons encore que le carré a est étalon de mesure, son périmètre équivaut à $8\,ul$, son aire à $4\,ua$.

Le travail sur les mesures est ainsi « débarrassé » des problèmes liés à l'utilisation d'une unité conventionnelle de mesure et à la possibilité d'utiliser une sous-unité. En quelque sorte, la situation est située dans le domaine mathématique et non plus dans le domaine physique. Ce sont des nombres que les élèves manipulent et non des mesures de grandeur définies par un nombre et une unité de mesure. Cependant, le recours à la manipulation d’objets et de grandeurs est toujours possible.

11 L’organisation des activités

De manière générale, les activités de cette première séquence s’organisent à partir d’un travail en groupe d’élèves puis en groupe classe. Les élèves sont ainsi invités à résoudre une situation à deux ou trois, puis à expliquer par écrit comment ils ont réalisé la tâche demandée, enfin à présenter et défendre leur réponse et leur démarche en groupe classe.

Le rôle de l’enseignant est alors de permettre à chacun ou à chaque groupe de pouvoir s’exprimer, mais aussi d’encourager chacun à expliquer ses démarches et à argumenter réponse et démarche. Son rôle est aussi de faire évoluer les arguments utilisés. En effet, au fur et à mesure des apprentissages, l’argumentation doit évoluer. D’arguments d’ordre intuitif, progressivement les élèves vont devoir s’appuyer sur le système décimal de position pour justifier, valider ou invalider certaines réponses et démarches.

Les activités que nous avons menées dans les classes nous amènent à distinguer 6 types d’arguments que nous présentons succinctement ci-dessous et que nous situerons dans les activités par la suite.

- L’intuition : lorsqu’en début d’apprentissage les élèves considèrent que 7,9806 est plus éloigné de 8 que 7,980625 sans pouvoir réellement le justifier. Ils disent que cela doit être ainsi parce qu’« on a 25 en plus donc on se rapproche ».
- L’argument d’autorité : lorsque la proposition des élèves est validée par l’enseignant détenteur du savoir, sans justification ou explication ; ce qui est parfois le cas au début des activités.
- L’argument de la représentation symbolique associé aux connaissances intuitives sur les nombres : par exemple lorsqu’un élève remet en cause la division de l’intervalle entre 2 et 3 en expliquant que 2,8 n’est pas bien situé sur la droite parce qu’il devrait être plus proche de 3 que de 2. En effet, dans la *litanie* des nombres, « on a 2 ; 2,1 ; 2,2 ; 2,3... 2,7 ; 2,8 ; 2,9 et 3. Donc 2,8 doit être plus près de 3 sur la ligne ».
- L’argument opératoire : lorsqu’un élève utilise le calcul mental, le calcul écrit ou la calculette pour justifier, par exemple, que le zéro à droite d’un nombre décimal ne change pas la valeur du nombre. Il montre par exemple que $2{,}8 \times 2{,}8 = 7{,}84 = 2{,}80 \times 2{,}80$.
- L’argument technique opératoire : lorsqu’un élève explique à un autre élève que $2{,}2 \times 2{,}2$ n’est pas égal à 4,4 (2×2 dans la partie entière et 2×2 dans la partie décimale) de la même manière que 22×22 n’est pas égal à 404 ($20 \times 20 + 2 \times 2$).
- L’argument technologique : lorsqu’un élève utilise le *système décimal de position* pour justifier certains choix. Par exemple lorsque l’élève dit qu’il peut ajouter autant de zéros qu’il veut après le dernier chiffre d’un nombre décimal et que la valeur de ce nombre ne sera pas changé parce que les zéros ajoutés n’ont pas modifié la valeur de chacun des chiffres de ce nombre.

De manière globale, les premières démarches citées ci-dessus ont plutôt tendance à disparaitre au fur et à mesure des activités. Alors que les dernières apparaissent progressivement.

12 La séquence d'activités

12.1 Cinq activités complémentaires

Cette séquence est constituée de cinq activités complémentaires, toutes d'une durée approximative de 50 minutes.

La première activité a pour objectif essentiel d'ancrer le travail des élèves dans le domaine de la géométrie, ainsi que des grandeurs et de leur mesure à partir d'unités non conventionnelles. Pour ce faire, les élèves manipulent le logiciel *Apprenti Géomètre* pour construire des carrés de différentes grandeurs. Au cours de cette activité, les élèves utilisent les notions de périmètre et d'aire. Ils mesurent ces grandeurs et les différencient. Cette activité peut être prolongée pour approfondir ces notions.

La deuxième activité constitue le cœur du dispositif. Il est proposé aux élèves de construire un carré d'aire égale à 8 unités d'aire. Cette deuxième activité a pour objectif de « faire exister géométriquement » le carré d'aire 8.

Au cours de la troisième activité, il est proposé aux élèves de rechercher la longueur du coté de ce carré d'aire 8. Pour ce faire, les élèves recherchent un nombre qui multiplié par lui-même donne un produit égal à 8. Pour réaliser les calculs nécessaires, les élèves utilisent une calculatrice. Celle-ci effectue les calculs que les élèves ne peuvent encore réaliser, particulièrement la multiplication de nombres décimaux. Elle est aussi un outil d'expérimentation et de validation des hypothèses formulées.

La quatrième activité renoue avec la géométrie. Il s'agit à présent de dessiner les carrés construits à l'aide d'*Apprenti Géomètre* sur de grandes feuilles quadrillées ($50cm \times 70cm$). L'objectif de cette activité est de permettre aux élèves de rencontrer l'extension du *système décimal de position*.

La cinquième activité emmène les élèves dans le monde *physique*. Il s'agit de dessiner les carrés sur une feuille quadrillée de format A4, en utilisant les unités conventionnelles de mesure, en l'occurrence le centimètre. La confrontation des environnements mathématique (nombres décimaux ou irrationnels) et physique (unités de mesure) servira de moteur à un débat au sein de la classe.

12.2 Les activités de synthèse

Tout au long des activités, des synthèses sont organisées. Celles-ci ne sont pas guidées essentiellement par la matière à enseigner. Elles le sont aussi par les découvertes et les questionnements des enfants. Il se peut que ces synthèses soient différentes d'une classe à l'autre.

13 Activité 1 — Assembler des carrés - Périmètre et aire

Cette première activité est issue d'une séquence mise au point par le CREM au cours de la recherche « Impact du logiciel *Apprenti Géomètre* sur certains apprentissages » (2007). Cependant, les activités relatives à l'institutionnalisation des savoirs en jeu (aire et périmètre) ne sont pas utilisées. Nous invitons le lecteur intéressé par cette partie à lire le rapport de cette recherche disponible à l'*url* suivante : `http://www.enseignement.be`

Enjeux

Pour une exploitation dans les domaines de la géométrie et des grandeurs :
Construire le concept de mesure. Construire le concept d'*aire*, le différencier du concept de *périmètre*. À partir de démarches quantitatives, comparer les caractéristiques de deux grandeurs associées aux carrés : le périmètre et l'aire. Constater que ces deux grandeurs progressent numériquement différemment l'une de l'autre.
Pour une exploitation dans le cadre numérique :
Observer des suites de nombres.

Compétences

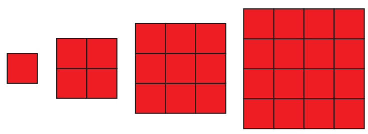
Comparer des grandeurs de même nature, et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.
Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat.
Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.
Relever des régularités dans des suites de nombres.

Analyse a priori

Après avoir choisi le niveau A du logiciel *Apprenti Géomètre*, les élèves peuvent utiliser différentes démarches pour réaliser la tâche proposée.

- Soit ils juxtaposent un par un les carrés standards en construisant directement les carrés.
- Soit ils amènent d'abord plusieurs carrés standards à l'écran puis les assemblent. Par la suite, ils en amènent de nouveaux si nécessaire.
- Soit ils déterminent à l'avance le nombre de carrés standards nécessaires pour construire un carré, les amènent à l'écran puis les assemblent. Ils réitèrent l'opération autant de fois qu'ils le souhaitent.
- Certains élèves peuvent également emprunter une démarche intermédiaire, signe d'une conceptualisation en marche : ils amènent à l'écran un certain nombre de carrés qu'ils assemblent. Puis, s'il leur en manque, ils déterminent le nombre de carrés manquants et amènent à l'écran exactement ce nombre de carrés.

Ces deux dernières démarches témoignent déjà d'une certaine forme de compréhension et d'acquisition des concepts d'aire et de recouvrement.
Des constructions possibles :



Plusieurs démarches peuvent servir à valider les constructions.

- La première consiste à observer les figures et à valider leur forme carrée à partir de leurs caractéristiques visuelles.
- La deuxième consiste à compter le nombre de carrés sur un des côtés de chaque carré construit pour déterminer que les figures sont bien différentes en grandeur.
  Certains élèves compteront plutôt le nombre de carrés unités compris dans chaque construction. Dans ce cas, ce sont les aires des carrés qu'ils vont comparer.
- Notons que la procédure de comptage permet également de valider les constructions comme étant des carrés. En effet, en acceptant, implicitement souvent, que les côtés de ces figures sont perpendiculaires puisqu'elles sont construites à partir de la juxtaposition de carrés unité, vérifier que la longueur de chaque côté est identique suffit à s'assurer que les figures sont carrées.

Comment s'y prendre?

L'enseignant photocopie puis distribue les fiches 5 et 6. Les élèves travaillent avec le logiciel *Apprenti Géomètre*, seuls, en binômes ou trinômes, pour réaliser la tâche proposée :

> Assemble plusieurs exemplaires de carrés standards pour construire 3 carrés de grandeurs différentes.
> Dessine ces carrés sur le quadrillage ci-dessous, ou imprime-les et colle-les au verso de cette fiche.

L'enseignant peut intervenir auprès des élèves avec des questions du type :

- Combien de carrés contient cette construction-ci ?
  Il vérifie alors comment l'élève détermine l'aire des carrés construits : par comptage de tous les carrés unité, par multiplication de la longueur de deux côtés, par l'addition du nombre de carrés contenus dans chaque ligne ou dans chaque colonne...
- Combien de carrés te manque-t-il encore pour terminer cette construction ? Pourrais-tu les mettre tous sur l'écran plutôt que de les amener un par un ?

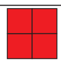
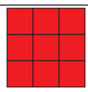
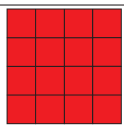
Lorsque les élèves ont terminé de construire les carrés, ils les reproduisent sur le quadrillage.

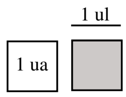
Synthèse de l'activité

La mise en commun est organisée par l'enseignant. Les élèves dessinent sur la trame quadrillée de la fiche de synthèse (fiche 6) les carrés construits avec *Apprenti Géomètre*. Ensuite le tableau est complété. Les termes « tour, pourtour, périmètre, bord... » et « intérieur, contenu, aire... » sont à utiliser en fonction des connaissances des élèves et de la programmation des enseignements que l'enseignant a prévu.

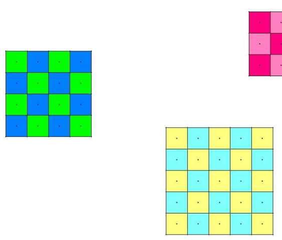
Le tableau ci-dessous, où les notations « ul » et « ua » désignent respectivement les « unité de longueur » et « unité d'aire », expose quelques résultats à mettre en évidence avec les élèves. Au cours de l'élaboration collective de la synthèse, les unités de mesure doivent être précisées. Mais il n'est nullement besoin d'utiliser les notations ci-dessous. Dans un premier temps, il est intéressant d'utiliser les expressions des élèves pour autant qu'elles soient appropriées à la situation et comprises de tous.
Au cours de cette synthèse, l'enseignant peut proposer aux élèves, sans les dessiner, de déterminer le périmètre et l'aire d'autres carrés. Par exemple, le carré qui aurait 7 comme mesure de côté, ou celui de 8, ou de 9... Ceci permet d'amener les élèves à réfléchir sur la manière de calculer le périmètre et l'aire d'un carré, et de distinguer ces deux notions, tant au niveau géométrique (l'un correspond à une ligne, l'autre à une surface) qu'au niveau numérique (pour l'un on additionne, pour l'autre on multiplie).

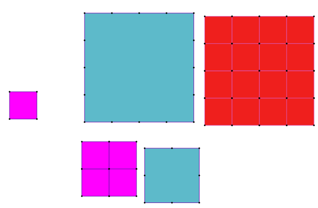
Tabl. 1 – Tableau de synthèse

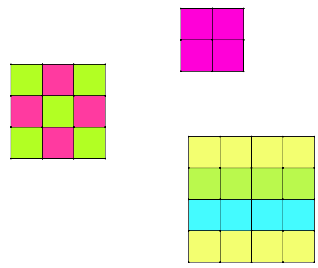
Longueur du côté du carré	Dessin	Périmètre (ou contour...)	Aire (ou intérieur...)
1 ul		4 ul	1 ua
2 ul		8 ul	4 ua
3 ul		12 ul	9 ua
4 ul		16 ul	16 ua
5 ul		20 ul	25 ua
...	...	...	...



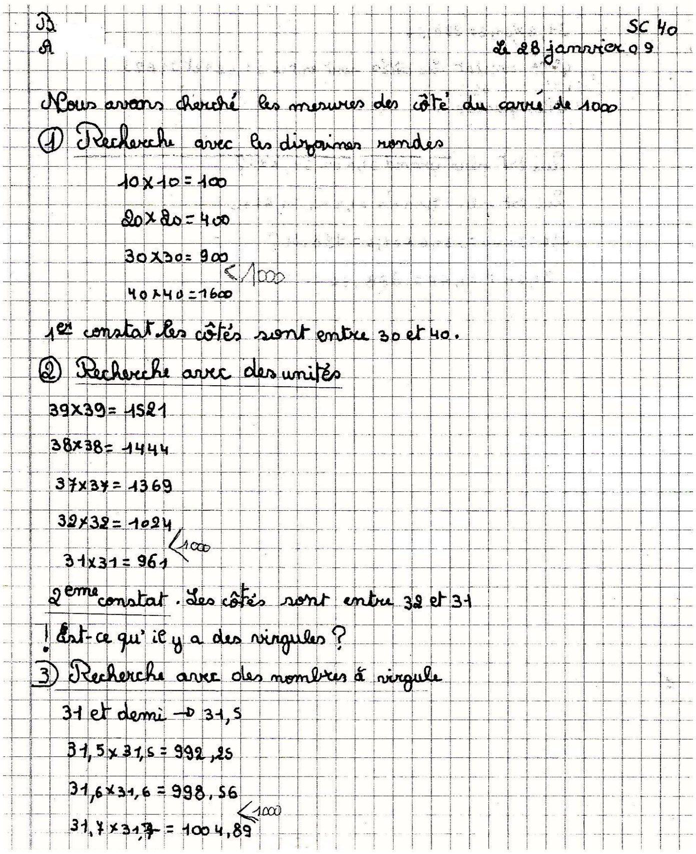
Échos des classes De manière générale, les élèves réalisent facilement les constructions avec *Apprenti Géomètre*. L'utilisation du logiciel et la validation des constructions sont assez aisées et intuitives. De plus, l'emploi d'*Apprenti Géomètre* permet aux élèves de colorier leurs constructions. Outre l'intérêt pour la motivation et l'aspect esthétique, le coloriage permet d'obtenir certaines représentations assez intéressantes qui peuvent être exploitées par la suite. Nous invitons l'enseignant à imprimer ces réalisations d'élèves et à placer celles-ci dans leur cahier.


a


b


c

Certains coloriages (figure (c)) permettent par exemple de représenter et d'initier l'algorithme de calcul de l'aire (compter x lignes de y carrés). D'autres (figure (b)) montrent une même surface à partir de deux représentations différentes. L'une « pleine », l'autre « quadrillée » à l'aide de l'unité d'aire.
Dans un autre registre, dans plusieurs classes, les élèves ont poursuivi les suites de nombres, tant pour le périmètre (ajouter 4), que pour l'aire (ajouter un nombre impair). Dans certaines classes, nous avons nous-mêmes suscité cette réflexion.
Dans une classe, alors que nous poursuivions le travail sur la suite des nombres « carrés », un élève a fait remarquer que le carré de côté 1 possède une aire égale à 1, le carré de côté 10 a une aire de 100. Il se demandait quelle était l'aire du carré dont le côté valait 100. Intuitivement, un élève a répondu : « Mille ! ». Un débat s'en est suivi et un calcul fait au tableau en calcul écrit accompagné d'une vérification à la calculatrice. Au grand étonnement de l'élève, qui n'était pas le seul, le carré de côté 100 n'était pas le carré de 1000 mais celui de 10000 (100 $\times$ 100). La question de la longueur de ce carré de 1000 se posa alors. La recherche a été organisée par les élèves eux-mêmes. Elle a donné lieu à une synthèse que nous reproduisons ci-dessous.


B
A
SC 40
Le 28 janvier 09

Nous avons cherché les mesures des côté du carré de 1000

① Recherche avec les dizaines rondes

10 x 10 = 100
20 x 20 = 400
30 x 30 = 900
< 1000
40 x 40 = 1600

1er constat les côtés sont entre 30 et 40.

② Recherche avec des unités

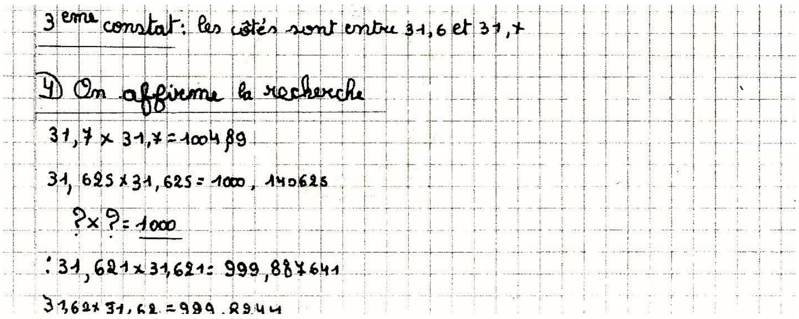
39 x 39 = 1521
38 x 38 = 1444
37 x 37 = 1369
32 x 32 = 1024
< 1000
31 x 31 = 961

2ème constat. Les côtés sont entre 32 et 31

! Est-ce qu'il y a des virgules ?

3) Recherche avec des nombres à virgule

31 et demi → 31,5
31,5 x 31,5 = 992,25
31,6 x 31,6 = 998,56
< 1000
31,7 x 31,7 = 1004,89



3ème constat : les côtés sont entre 31,6 et 31,7

4) On affirme la recherche

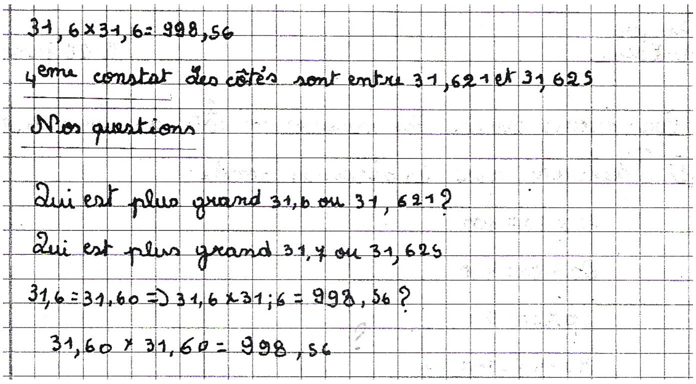
31,7 × 31,7 = 1004,89

31,625 × 31,625 = 1000,140625

? × ? = 1000

31,621 × 31,621 = 999,887641

3162 × 31,62 = 999,8244



31,6 × 31,6 = 998,56

4ème constat Les côtés sont entre 31,621 et 31,625

Nos questions

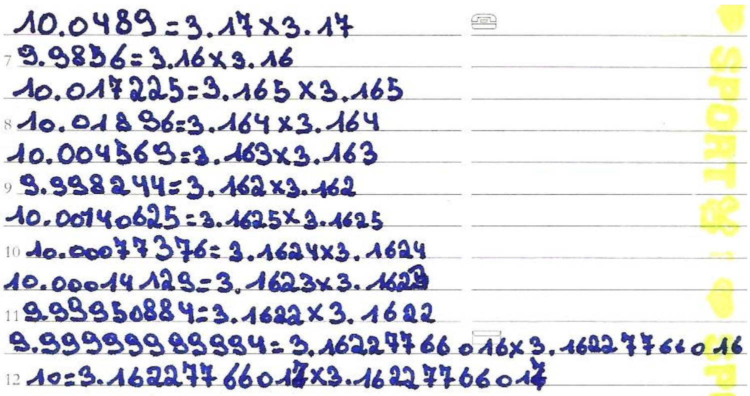
Qui est plus grand 31,6 ou 31,621 ?

Qui est plus grand 31,7 ou 31,625

31,6 = 31,60 => 31,6 × 31;6 = 998,56 ?

31,60 × 31,60 = 998,56

L'engouement pour cette situation fut tel que la même réflexion fut posée pour le carré de 10… Le lendemain, une élève arriva à l'école avec cette réflexion : « J'ai essayé toute l'après-midi avec ma grand-mère, et nous n'avons pas trouvé ! ». Nous présentons ci-après la fiche rapportée par cette élève.



10.0489 = 3.17 × 3.17
9.9856 = 3.16 × 3.16
10.017225 = 3.165 × 3.165
10.01896 = 3.164 × 3.164
10.004569 = 3.163 × 3.163
9.998244 = 3.162 × 3.162
10.00140625 = 3.1625 × 3.1625
10.00077376 = 3.1624 × 3.1624
10.00014129 = 3.1623 × 3.1623
9.99950884 = 3.1622 × 3.1622
9.9999999999994 = 3.16227766016 × 3.16227766016
10 = 3.16227766017 × 3.16227766017

Les constats effectués durant cette activité (rôle de la virgule et du zéro, densité des nombres décimaux, comparaison de nombres, représentations des nombres naturels et des opérations sur ces nombres…) sont communs à ceux que nous avons pu réaliser avec les activités que nous proposons.

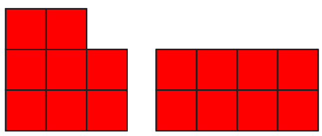
14 Construire un carré de 8 unités

De quoi s'agit-il? Après avoir construit des carrés d'aire 1, 4, 9, 16... et avoir compris que l'on pourrait facilement poursuivre la suite numérique 25, 36, 49... 100, les élèves construisent un carré d'aire 8. Pour ce faire, ils investissent les connaissances techniques relatives aux fonctionnalités *Découper* et *Diviser*.

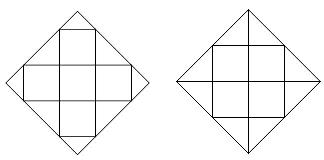
Enjeux Pour une exploitation dans les domaines de la géométrie et des grandeurs :
Construire le concept de mesure. Construire le concept d'*aire*, le différencier du concept de *périmètre*. À partir de démarches quantitatives, comparer les caractéristiques de deux grandeurs associées aux carrés : le périmètre et l'aire. Constater que ces deux grandeurs progressent numériquement différemment l'une de l'autre.
Pour une exploitation dans le cadre numérique :
Observer des suites de nombres.

Compétences *Comparer des grandeurs de même nature, et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*
Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat.
Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.

Analyse a priori Les élèves doivent comprendre qu'il ne suffit pas d'enlever un carré à la construction du carré de 9 ni de juxtaposer deux rangées de 4 carrés, car dans ces cas l'aire des figures est bien de 8 mais ce ne sont pas des carrés.



Pour construire un carré d'aire 8, deux possibilités au moins s'offrent aux élèves. Elles sont présentées ci-dessous par les figures (a) et (b). La figure (a) s'appuie sur la construction réalisée précédemment lors de la prise en main du logiciel (voir page 23). À cette construction, les élèves viennent juxtaposer quatre petits triangles rectangles.

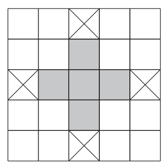


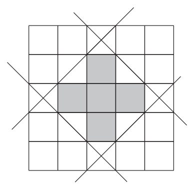
(a) (b)

Quelle que soit la construction, les élèves doivent découper des carrés pour obtenir des triangles rectangles.

Comment s'y prendre?

L'enseignant photocopie la fiche 7 et la distribue aux élèves qui travaillent en binômes ou trinômes. L'enseignant veille à ce que les élèves placent bien les huit carrés standards à l'écran et n'utilisent pas d'autres formes directement disponibles dans les menus standard ou libre.
L'enseignant rappelle si nécessaire les constructions précédentes avec *Apprenti Géomètre*, ainsi que l'usage des fonctionnalités *Découper* et *Diviser*.
Lorsque les constructions sont terminées, les élèves dessinent le carré de 8 sur la fiche. Le dessin de certains triangles ou de la forme générale du carré de 8 peut être difficile car il nécessite de situer des points au centre de certains quadrillages. L'enseignant propose ainsi aux élèves de réfléchir à comment situer exactement ces points. La construction de diagonale sur le quadrillage permet de situer les sommets de triangles ou du carré.





Échos des classes

Le travail à l'échelle que les élèves doivent effectuer pour reproduire leur construction sur le quadrillage est parfois complexe pour les élèves. Cependant, ceci représente le véritable enjeu du travail géométrique : se centrer sur les relations entre les objets et sur leurs positions relatives, sans se soucier de l'échelle de grandeur.
Il en va de même pour le travail sur les mesures : quelle que soit l'échelle de grandeur, le carré construit contiendra toujours 8 carrés unités.
Certains enseignants ont proposé aux élèves de reproduire le carré de 8 sur une feuille quadrillée en utilisant le petit carré du quadrillage comme carré unité. Ce dessin a été collé au verso de la fiche.

15 Calculer la longueur du côté du carré de 8

Les élèves ont pu construire le carré d'aire 8 avec le logiciel *Apprenti Géomètre* et ils l'ont aussi dessiné sur la feuille de synthèse 7. Ce carré existe bel et bien ! Cependant, contrairement aux autres carrés construits et dessinés, les élèves ne connaissent pas la longueur du côté de ce carré. Il leur est proposé de la rechercher.

Notons que cette activité peut être organisée dans la foulée de la précédente. Pour notre part, elle a cependant à chaque fois fait l'objet d'une activité séparée. La raison principale est que dans chaque école où nous avons expérimenté nos activités, le local informatique était séparé de la classe et n'était pas suffisamment grand pour permettre aux élèves d'effectuer d'autres travaux que ceux à l'aide du matériel informatique.

Pour réaliser la tâche proposée, les élèves doivent disposer d'une calculatrice. Il est sans doute nécessaire qu'ils soient familiarisés avec son usage. Nous avons décrit aux pages 27 et suivantes quelques activités avec la calculatrice qui devraient permettre aux élèves d'appréhender cet outil.

Nous proposons plusieurs fiches de travail pour cette activité : la fiche 8 et, en recto/verso, la fiche 9. L'enseignant choisira celle qui correspondant le mieux au travail effectué en classe. Pour des raisons de lisibilité, la fiche 9 comprend les termes *périmètre* et *aire*. Ceux-ci peuvent changer en fonction de l'organisation des apprentissages dans la classe. L'enseignant est également libre de s'inspirer de ces fiches pour en composer d'autres plus appropriées aux travaux réalisés par ses élèves.

De quoi s'agit-il? Les élèves recherchent la longueur du côté du carré d'aire 8 en utilisant la calculatrice. Ils ont recours aux nombres décimaux pour approcher cette mesure par encadrements successifs.

Enjeux Comprendre que les nombres naturels ne permettent pas de répondre à certaines situations et qu'il est nécessaire de connaitre de nouveaux nombres, en l'occurrence les nombres décimaux. Comparer des nombres décimaux. Comprendre les rôles de la virgule et du zéro.
Pour l'enseignant.
Déceler les représentations des élèves sur les nombres naturels qui vont influer sur la construction de connaissances relatives aux nombres décimaux, au-delà au *système décimal de position*. Mettre à jour certaines difficultés d'élèves concernant les nombres décimaux. Mettre à jour certaines questions qui seront à rencontrer par la suite, notamment celles qui concernent les rôles du zéro et de la virgule, la densité sur les nombres décimaux, la comparaison de nombres décimaux.

Compétences *Dire, lire et écrire des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième dans la numération décimale de position en comprenant son principe.*
Classer, situer, comparer des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième.
Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième.
Choisir et utiliser avec pertinence le calcul mental, le calcul écrit ou la calculatrice en fonction de la situation.
Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence.

Analyse a priori Pour connaître la longueur du côté du carré d'aire 8, les élèves doivent s'appuyer sur ce qu'ils connaissent des carrés et du calcul de l'aire d'un carré : un carré possède quatre côtés égaux ; pour calculer l'aire d'un carré on multiplie la longueur des côtés par elle-même.
Une façon de déterminer cette longueur serait de la mesurer avec une latte par exemple. Les différents travaux réalisés jusqu'à présent ne favorisent pas cette démarche. D'abord, plusieurs carrés de 8 ont été dessinés à plusieurs reprises à des échelles différentes. La mesure de son côté avec des unités conventionnelles a donc varié.

Ensuite, les activités réalisées jusqu'à présent ont été ancrées dans un cadre sans mesure conventionnelle. La longueur des côtés des carrés construits a été mesurée à l'aide d'une unité de longueur correspondant à la longueur du côté du carré standard.
Ainsi, la question est de savoir quel nombre multiplié par lui-même donne un produit égal à 8. Pour y répondre, les élèves utilisent la calculatrice et effectuent des essais pour trouver ce nombre. Celui-ci est cependant un nombre irrationnel $\sqrt{8}$ $(2\sqrt{2})$ soit 2,8284271247461900976033774484194... ! Il n'est donc pas possible de le déterminer avec précision en utilisant un nombre décimal. Le travail des élèves consiste donc à s'approcher au plus près de ce nombre irrationnel par encadrements successifs. Pour chaque proposition, le résultat de la multiplication est comparé à 8.

Comment s'y prendre?

L'enseignant photocopie et distribue les fiches 8 et/ou 9. Le travail consiste à compléter la fiche de synthèse et donc à réfléchir à la longueur du côté du carré d'aire 8.
La question est posée à l'ensemble de la classe et la recherche s'organise également avec l'ensemble des élèves. Toutefois, il est possible de réaliser cette recherche, en tout ou en partie, en groupes de 3 ou 4 élèves.
L'enseignant a pour tâche de gérer les interactions entre les élèves, de relancer la recherche lorsque celle-ci s'interrompt, de guider les élèves dans leurs réflexions, de leur rappeler certains savoirs qui pourraient les aider dans leur recherche.
Une autre tâche essentielle est de noter les propositions des élèves au tableau, ou mieux sur des supports papier (feuille 50/70 par exemple) qui pourront être représentés à la classe par la suite.

Commentaires

À plusieurs reprises, au cours des expérimentations dans les classes, nous avons constaté que revenir sur les propositions des élèves était nécessaire et enrichissant. Ces retours servaient soit à se souvenir d'une question que des élèves s'étaient posée, soit à revenir sur une difficulté que les élèves n'avaient pu surmonter.

Comment s'y prendre?

(Suite). La question est donc posée à la classe : quelle est la longueur du côté du carré de 8 ? Pour pouvoir y répondre, les élèves recherchent le nombre qui multiplié par lui-même donne un produit égal à 8.
Les premières propositions des élèves sont généralement soutenues par leurs connaissances numériques : celles des nombres naturels. De plus, dans un premier temps, les élèves se focalisent sur le calcul en ne tenant pas compte du cadre géométrique : les deux nombres doivent être égaux puisqu'il s'agit d'un carré. Ainsi, les élèves proposent des calculs comme 2×4 ou 1×8 qui correspondent à des rectangles. L'enseignant note ces calculs et demande aux élèves de réfléchir si ces calculs correspondent à des carrés ? Il précise à nouveau que la multiplication doit contenir deux termes identiques comme dans le cas de $2 \times 2 = 4$ ou $3 \times 3 = 9$. L'enseignant note ces calculs au tableau ou sur les feuilles.

Il fait remarquer aux élèves si nécessaire que 8 est entre 4 et 9, donc que le nombre à trouver est situé également entre 2 et 3.
Les élèves proposent alors de nouveaux nombres. Le premier qu'ils citent est le plus probablement 2,5. Le calcul à effectuer est alors 2,5 $\times$ 2,5. Si les élèves ne le demandent pas, l'enseignant propose d'utiliser la calculatrice. Le calcul et le résultat sont notés au tableau : 2,5 $\times$ 2,5 = 6,25. Le constat est fait que la réponse obtenue n'est pas égale à 8 et qu'il est nécessaire d'essayer avec un autre nombre plus grand que 2,5 mais plus petit que 3.
Intuitivement, toujours en se basant sur leurs connaissances des nombres naturels, les élèves proposent généralement 2,6 du fait que 6 vient après 5. Le calcul effectué à la calculatrice donne comme réponse 6,76. Calcul et réponse sont à nouveau notés au tableau. Ainsi de suite jusque 2,9 qui donne une réponse supérieure à 8 : 2,9 $\times$ 2,9 = 8,41. Il est alors à constater que 2,8 est trop petit et que 2,9 est trop grand. Il est donc nécessaire de proposer un nombre compris entre 2,8 et 2,9.
Nous présentons ci-après les nombres généralement cités par les élèves.

Terme	Produit
2,5	6,25
2,6	6,76
2,7	7,29
2,8	7,84
2,9	8,41
2,85	8,1225
2,80	7,84
2,81	7,8961
2,82	7,9524
2,83	8,0089
2,825	7,980625
2,826	7,986276
2,827	7,991929
2,828	7,997584
2,830	8,0089

Notons que le nombre 2,5 est souvent énoncé dans un premier temps comme « deux et demi », de même pour 2,85 : « deux virgule huit et demi » ou parfois « deux virgule huit virgule cinq ». Pour cette dernière proposition, l'enseignant peut gérer la situation de deux manières au moins. Soit il corrige lui-même les élèves en leur annonçant la règle d'usage de la virgule. Soit il propose aux élèves d'effectuer leur calcul à l'aide de la calculette. Dans ce cas, les élèves constateront qu'ils ne peuvent noter deux virgules dans un même nombre. Une réflexion sur le sens de la virgule peut succinctement être entamée à ce stade. Cette réflexion sera reprise par la suite dans une activité spécifique au cours de laquelle la problématique du zéro sera également rencontrée (fiche13).
Durant l'activité, la problématique du zéro apparait également lorsque les élèves proposent des nombres contenant un zéro à l'extrémité droite du nombre, par exemple 2,80. Cette proposition intervient souvent après que les élèves aient essayé 2,8 (7,84) et 2,85 (8,1225). L'un est trop petit, l'autre trop grand.

La proposition 2,80 se base sur le fait que 80 est plus petit que 85. À nouveau, l'enseignant peut réagir de différentes manières face à cette proposition. Soit, il n'accepte pas la proposition et explique que 2,80 = 2,8. Soit il laisse les élèves effectuer le calcul à l'aide de la calculatrice, note la réponse obtenue au tableau et observe leurs réactions. Très rapidement les élèves vont exprimer le fait que la réponse de 2,8 $\times$ 2,8 est égale à celle de 2,80 $\times$ 2,80. Une de leurs réactions est de dire qu'ils se sont trompés en effectuant le calcul. Ils recommencent le calcul et s'aperçoivent qu'ils obtiennent à nouveau la même réponse. Surpris par ce phénomène, ils essaient alors avec d'autres nombres comme par exemple 2,5 et 2,50 et constatent une récurrence du phénomène.

Commentaires

Les deux attitudes de non intervention immédiate de l'enseignant que nous venons de décrire pour la virgule et le zéro ont pour objectif de permettre aux élèves d'observer des phénomènes numériques, de s'en étonner et par la suite de tenter de les expliquer et de les comprendre. Ce qui ne dispense pas l'enseignant de toute attention envers les élèves. Son attitude est plutôt celle d'un accompagnateur qui permet à l'élève de s'étonner et de comprendre des phénomènes.
Pour ces deux situations, le recours au système décimal de position est nécessaire. Ce recours permet de montrer aux élèves la généralisation du système décimal de position aux nombres décimaux.

Comment s'y prendre?

(Suite). Progressivement, les élèves vont s'approcher de 8 sans jamais l'atteindre. De la même manière qu'il vont se rapprocher de la mesure du côté du carré de 8 sans jamais la déterminer avec précision à l'aide d'un nombre décimal. La décision de s'arrêter doit donc être prise et le constat que l'on ne parvient pas dans l'état actuel à déterminer la valeur exacte de la longueur du côté doit être posé.
Dans la majorité des cas, les élèves demandent si une solution exacte existe. La réponse de l'enseignant peut à nouveau prendre différentes formes.

- Une première réponse peut prendre la forme d'un argument d'autorité : l'enseignant annonce qu'il n'y pas de réponse finie à ce problème, on ne peut trouver une réponse à l'aide d'un nombre décimal. Mais c'est là peut-être une démarche un peu brutale.
- Une autre réponse est de feindre de ne pas savoir. Mais nous pensons que cette attitude peut aussi être discutable si elle s'arrête là.
- Une autre attitude encore est de proposer aux élèves de réfléchir s'il peut y avoir une réponse exacte. C'est cette attitude que nous avons eue chaque fois que cela a été possible.

Expliquons comment procéder.
Supposons que les deux dernières propositions des élèves soit 2,828 et 2,829. Les multiplications donnent respectivement comme produits 7,997584 et 8,003241. Observons ces deux réponses et voyons quels *liens immédiats* on peut trouver : la première réponse se termine par 4, ce qui correspond au dernier chiffre du produit de 8 par 8 (64), les deux derniers chiffres des nombres à multiplier (2,828) ; de la même manière que la deuxième réponse se termine par 1, le dernier chiffre du produit de 9 par 9 (81), les deux derniers chiffres des nombres à multiplier (2,829).
C'est un phénomène arithmétique assez accessible pour des élèves de 4^{e} primaire. Peut-être l'ont-ils déjà rencontré. Si pas, il est possible d'exploiter ce phénomène comme méthode rapide de vérification d'un produit. En effet, si je dois multiplier un nombre qui se termine par 4 et un nombre qui se termine par 7, le produit doit se terminer par 8 ($4 \times 7 = 28$). Ainsi, 2**4** × 13**7** = 328**8**.
Mais revenons à notre souci de savoir si l'on peut trouver une réponse finie. Quelles sont les solutions possibles :

- soit les nombres se terminent par 0 et dans ce cas le produit se termine par 0. Ce qui serait assez satisfaisant si l'on obtenait 8,0 par exemple. Or, un nombre décimal qui se termine par 0 est égal au même nombre décimal sans le zéro (2, 2820 = 2,282). Ce cas n'est donc pas à retenir.
- Si les nombres se terminent par 1, leur produit se terminera par 1. Nous aurons donc 8,1 ou 8,...1.
- Si les nombres se terminent par 2, le produit se terminera par 4. Nous aurons donc 8,4 ou 8,...4.
- De la manière pour 3 qui donnera un produit qui se termine par 9 (8,9 ou 8,...9).
- Ainsi de suite pour 4 qui donnera 6 (16) ; 5 qui donnera 5 (25) ; 6 qui donnera 6 (36) ; 7 qui donnera 9 (49) ; 8 qui donnera 4 (64) et 9 qui donnera 1 (91).

Ainsi, en aucun cas, on ne pourra obtenir comme réponse un nombre décimal qui se termine par un ou des 0 (8,...0) ou qui donne 8 immédiatement.

Quel que soit le choix de l'enseignant pour justifier que l'on ne peut trouver une réponse finie, certains élèves se trouveront dépités de savoir qu'ils ont fait tout ce travail « pour rien » ! D'autres seront « fâchés » qu'un tel problème leur ait été proposé : « Comment vous nous avez fait faire tout ça et il n'y a pas de réponse ! ». Peut-être cette attitude s'explique-t-elle par le fait que pour certains élèves, les mathématiques, mais plus particulièrement l'arithmétique (ou le calcul) est une science exacte où il y a toujours une et une seule solution. Leur attitude est peut-être l'expression de la remise en question de cette conception des mathématiques. D'autres élèves encore seront intrigués et peu persuadés qu'une solution exacte ne soit pas possible. Ils poursuivront le travail de recherche au-delà de cette heure de classe, voire au-delà des heures d'école (voir notamment le travail exposé en page 53).

Synthèse de l'activité

Lors de la synthèse, il est mis en évidence que pour résoudre le problème posé, les élèves ont dû utiliser de nouveaux nombres, qu'ils avaient peut-être déjà rencontrés auparavant. Les situations où les élèves ont rencontré les nombres décimaux peuvent ici être évoquées (mesures, paiements,. . .).
La fiche de synthèse 8 ou 9 est complétée et il est précisé que la longueur du côté et le périmètre sont des mesures approximatives. Si nécessaire, il est (ré)expliqué pourquoi on ne peut trouver une réponse finie à l'aide d'un nombre décimal.
Les différentes questions que les élèves se posent ou les incompréhensions qui subsistent sont exprimées et notées sur le tableau ou sur une feuille. Elles seront reprises par la suite. Ces questions peuvent être :

– Entre deux nombres décimaux, comment savoir lequel est le plus grand ?
– Existe-t-il toujours un ou plusieurs nombres décimaux entre deux nombres décimaux ?
– À quoi servent les zéros dans les nombres ?
– Pourquoi 2,5 est-il égal à 2,50 ?
– Pourquoi après 2,9 ce n'est pas 2,10 ?
– . . .

Toutes ces questions ont été évoquées durant l'activité de recherche menée par les élèves. Il s'agira de les reprendre par la suite et d'y répondre.

Échos des classes

De manière globale, les élèves sont très motivés par cette situation de recherche où ils peuvent proposer des solutions et les valider eux-mêmes. L'utilisation de la calculatrice ajoute à cette motivation. *A contrario*, certains élèves sont déçus ou fâchés au terme de l'activité quand ils apprennent et/ou comprennent que l'on ne peut obtenir une réponse finie sous la forme d'un nombre décimal.
Au cours de cette activité, quantité d'informations circulent entre les élèves et il n'est pas toujours aisé pour l'enseignant de les percevoir et de s'en servir. Nous relatons ci-dessous quelques conversations d'enfants dont nous avons pu prendre connaissance grâce aux enregistrements vidéos réalisés.

– Extrait 1 - En début d'activité.

  - « Il faut faire avec des nombres à virgule. »
  - « 2,2 $\times$ 2,2 »
  - « 2,5 $\times$ 2,5 »
  - « 2,5 car 2,2 $\times$ 2,2 ça fait 4,4 ! »
  - « Oui parce que 2 $\times$ 2 égale 4 et encore 2 $\times$ 2 égale 4 ».

La dernière intervention de l'élève montre combien la conception selon laquelle *un nombre décimal est un naturel virgule un naturel* est présente chez les enfants de manière intuitive au début de l'apprentissage sur les nombres décimaux. En réalité, il serait difficile d'en être autrement. Les nombres naturels sont les seuls nombres qu'ils

ont exercés jusqu'alors durant leur scolarité.
Ajoutons que dans cette conception, la virgule ne joue pas son rôle de signe exprimant que les chiffres qui suivent à sa droite se situent dans des rangs inférieurs à l'unité (mais plus grand que zéro). Un des enjeux de l'apprentissage des nombres décimaux se situe là : comprendre le sens du signe « virgule ».

– Extrait 2 - En début d'activité dans une autre classe.

  - « Il n'y a pas de nombre ! »
  - [Enseignant] « Il n'y aurait pas de nombre pour le côté du carré de 8 ? »
  - « Non »
  - [Enseignant] « On a juste 2 et 3, et entre ces deux nombres il n'y a pas de nombres ? »
  - « Oui, c'est ça »
  - « J'allais dire deux et demi mais je sais que c'est faux. »
  - [Enseignant] « Ah, pour toi huit serait égal à deux et demi fois deux et demi ? Comment écris-tu deux et demi ? »
  - « C'est deux virgule... je ne sais pas combien... »

  Dans ce deuxième extrait, nous sommes confrontés à un élève qui affirme qu'il n'y a pas de nombres entre 2 et 3. Et pourtant soyons persuadés que cet élève a déjà reçu une note de 8,5 (entre 8 et 9) ou a déjà dû tracer une ligne de 4,4 cm par exemple. Ceci pour montrer que le lien entre les situations de la « vie », les situations de manipulation et les situations plus abstraites ne se fait pas automatiquement chez les élèves. Ou que les situations étant différentes, le sens que les élèves donnent à un même objet, ici un nombre décimal, est différent.
  Il en va sensiblement de même pour le deuxième élève qui ne sait comment écrire « deux et demi ». Il est conscient qu'il doit écrire un nombre décimal, soit un nombre avec une virgule, mais il ne sait par quel chiffre exprimer le « demi ». Or cet élève a sans doute aussi déjà obtenu une note de « 8 et demi » écrite sous la forme 8,5.

– Extrait 3 - Au cours de l'activité de recherche.
  Le calcul $2{,}9 \times 2{,}9$ a déjà été effectué. Il est noté au tableau : $2{,}9 \times 2{,}9 = 8{,}41$.

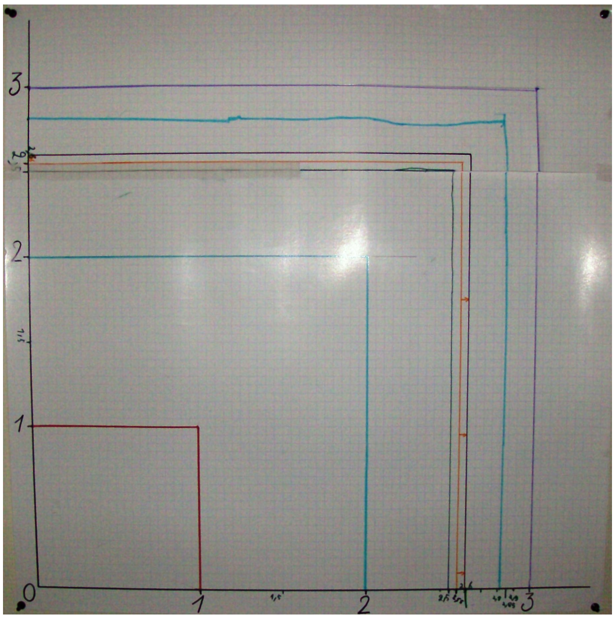
  - « J'ai fait $2{,}900 \times 2{,}900 = 8{,}41$. Comment est-il possible que ça soit égal ? »
  - « C'est la même chose si on met dix zéros derrière »
  - « Moi j'ai fait $2{,}0 \times 4{,}0$ et ça a fait 8. »

  Cet extrait nous permet de nous rendre compte combien les zéros intriguent les élèves. De fait, avec les nombres naturels, si l'on « ajoute » un zéro à la droite du nombre, le nombre est multiplié par dix. Ainsi, 25 n'est pas égal à 250 et 3×25 n'est pas égal à 3×250. Cet extrait montre également que les élèves n'ont pas encore compris le(s) rôle(s) des zéros dans le système décimal de position. Ce qu'ils ont compris c'est qu'« ajouter » un zéro à la droite d'un nombre naturel multiplie ce nombre par 10. Certes, ceci est l'expression du fait que chaque chiffre du nombre est maintenant situé dans un rang supérieur. Dans notre exemple précédent (25), le chiffre 2 est passé du rang des dizaines au rang des centaines. Dans le cas de 2,0 le chiffre 2 ne change pas de rang et effectivement même en y « ajoutant » dix zéros, le chiffre 2 ne changerait pas de rang non plus.

16 Dessiner des carrés

Lors de l'activité précédente, les élèves ont perçu la nécessité de connaitre de nouveaux nombres : les nombres décimaux. Ils en ont proposé plusieurs, ils les ont comparés, ils ont opéré avec eux (addition et multiplication), ils ont repéré des égalités… Il s'agit maintenant de répondre aux questions que les élèves se posent, de les aider à surmonter les obstacles qui s'érigent devant eux et de progressivement structurer les apprentissages relatifs aux nombres décimaux, au-delà du système décimal de position.

De quoi s'agit-il? Les élèves dessinent les carrés de 1, 4, 8 et 9 sur une grande feuille quadrillée (70 cm × 70 cm). Ils graduent les axes prédessinés pour pouvoir repérer la longueur des côtés des carrés.



Enjeux Comparer des nombres décimaux et les ordonner sur une droite numérique. Graduer la droite numérique en dixièmes et centièmes. Se rendre compte que l'on ne peut pas toujours graduer physiquement en millième, … mais être conscient que ces graduations existent. Réfléchir au rôle de la virgule et du zéro.

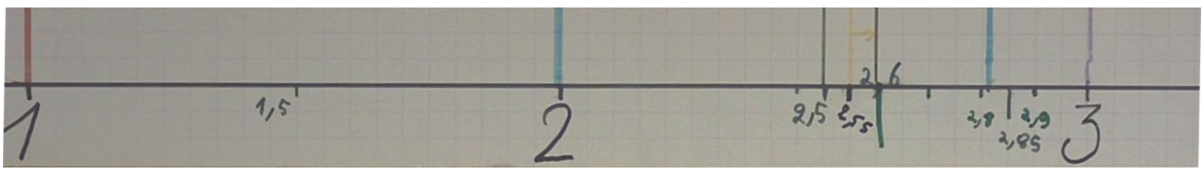
Compétences *Dire, lire et écrire des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième dans la numération décimale de position en comprenant son principe.*
Classer, situer, comparer des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième.

De quoi a-t-on besoin? Grandes feuilles quadrillées de dimensions 70 × 70 (approximativement), sur lesquelles sont tracés deux axes perpendiculaires gradués en unités (voir figure ci-dessus). Une unité correspond à 20 carrés du quadrillage. Pour les élèves : latte, crayon, gomme, marqueurs de couleurs.

Le choix de laisser un intervalle de 20 carrés du quadrillage entre deux nombres naturels consécutifs n'est pas anodin. D'abord il permet à l'enseignant de savoir immédiatement si les élèves ont compris comment fractionner un intervalle dans un contexte de numération décimale. En effet, si les élèves associent un carré à un dixième, cela signifiera qu'ils n'ont pas encore compris qu'il fallait associer le fractionnement de la longueur des intervalles au fractionnement décimal de la numération.
Ensuite, si seulement 10 carrés du quadrillage séparent deux nombres naturels consécutifs, nous ne pourrons savoir si les élèves ont compris le fractionnement en 10 ou s'ils ont simplement utilisé le matériel à leur disposition sans faire sens avec celui-ci.

Analyse a priori

Les élèves dessinent aux marqueurs de différentes couleurs les carrés de côté 1, 2 et 3, respectivement d'aire 1, 4 et 9, comme le montre la figure précédente. Ils peuvent, s'ils le souhaitent, dessiner au crayon les carrés unités à l'intérieur de ces carrés.
Ils dessinent ensuite le carré de 8. Pour y parvenir, ils doivent situer la mesure de son côté, soit selon le choix des élèves : 2,82 ou 2,828 ou 2,8284. . .
Pour situer par exemple 2,82 les élèves doivent se rappeler que ce nombre est situé entre 2 et 3. Ensuite, ils doivent décomposer la distance entre 2 et 3 d'abord en dix pour pouvoir situer 2,8 et décomposer chaque sous-graduation en dix à nouveau pour pouvoir situer 2,82. En fonction de la feuille donnée et de la grandeur des sous-graduations au centième, il n'est physiquement pas possible de situer avec précision un nombre possédant plus de décimales.
Pour graduer en dixièmes entre 2 et 3, les élèves doivent comprendre qu'il y a 20 carrés entre deux et trois et que chaque dixième correspond donc à deux carrés. Ensuite, pour graduer en centième, les élèves doivent comprendre que chaque dixième doit être divisé en dix. Ils doivent donc diviser en dix la longueur de 2 carrés. Pour ce faire, ils doivent mesurer la longueur de deux côtés de carré et la diviser en dix. Ensuite, ils doivent reporter cette longueur sur la droite numérique.

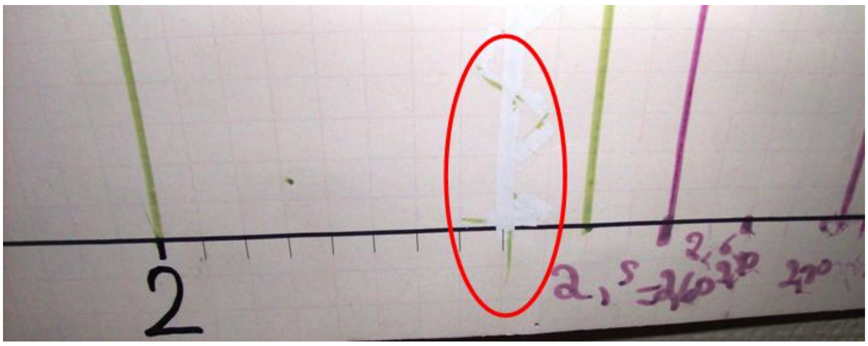


Comment s'y prendre?

L'enseignant compose des groupes de 3 ou 4 élèves et distribue à chaque groupe une grande feuille quadrillée. Les élèves préparent leurs marqueurs et leur matériel de dessin. L'enseignant donne la consigne : « Pour garder trace de nos travaux au mur de la classe, nous allons dessiner les carrés que nous avons tracé avec le logiciel. Pourriez-vous donc dessiner les carrés d'aire (ou de grandeur ou . . .) 1, 4, 8 et 9 sur cette feuille ? »

Tout au long de l'activité, l'enseignant écoute les interactions des élèves dans les groupes, particulièrement celles qui apparaitront au moment de la sous-graduation des axes. Différentes difficultés peuvent apparaître.

– D'abord, ne pas savoir où placer 2,82 de manière générale. L'enseignant rappelle alors, en s'aidant si nécessaire des panneaux constitués lors de l'activité précédente, comment le nombre 2,82 avait été trouvé. La démarche de travail est rappelée et le nombre décimal est resitué entre 2 et 3.
– Ensuite, les élèves ne savent pas comment situer 2,82. Une réponse, toujours en s'aidant des panneaux, est de demander aux élèves de situer des nombres « plus simples » comme 2,5 par exemple. Intuitivement les élèves vont situer 2,5 au milieu de l'intervalle entre 2 et 3. Pour y parvenir, ils vont sans doute mesurer cet intervalle ou compter le nombre de carrés et diviser par 2. L'enseignant peut ensuite demander de situer les autres nombres du même type que 2,5 : 2,1 puis 2,2 puis 2,3 puis . . . jusque 3. L'enseignant propose ensuite aux élèves de situer 2,82. Pour ce faire, les élèves doivent se souvenir que 2,82 est situé entre 2,8 et 2,9. Ensuite, ils doivent diviser l'intervalle entre ces deux nombres en 10.
– Enfin, les élèves ne savent pas comment graduer dans l'intervalle entre 2 et 3 : ils attribuent un carré à chaque dixième comme le montre la figure ci-dessous. À nouveau, l'enseignant peut demander aux élèves de situer 2,5. Intuitivement, ils vont le situer au milieu de l'intervalle entre 2 et 3. Ils constateront alors que 2,8 qui est plus grand que 2,5 ne peut être situé là où ils l'ont mis. Une réflexion sur la manière de graduer l'intervalle entre 2 et 3 s'ensuit.



Synthèse de l'activité

La synthèse a pour objet de mettre en évidence la procédure de graduation entre deux unités ou sous-unités et mettre en place quelques savoirs relatifs au *système décimal de position*.

D'abord, la procédure de graduation.

Il est nécessaire de mettre en évidence que les intervalles doivent être égaux. Dans le cas présent, il y a 20 petits carrés entre 2 et 3, il faut deux petits carrés entre chaque nouvelle graduation. En même temps, il s'agit d'expliquer pourquoi on a divisé l'intervalle entre 2 et 3 en dix.

Cela se fait en faisant référence à la numération connue à partir des nombres naturels : il faut 10 unités pour avoir une dizaine, dix dizaines pour faire une centaine... Cela s'explique aussi par le fait qu'il n'y a que 10 chiffres, et qu'après ces dix chiffres, on passe forcément à l'unité décimale supérieure. Il en va de même pour les nombres décimaux et, au-delà, pour tous les nombres qui s'écrivent dans le *système décimal de position*.
Ensuite, le *système décimal de position*.
Les dix chiffres et l'organisation des unités décimales ont été rappelés auparavant. L'enseignant peut ensuite attirer l'attention des élèves sur deux autres éléments importants du *système décimal de position* : la virgule et le zéro.
La virgule est le signe qui permet de préciser que les chiffres à sa droite expriment des rangs inférieurs à l'unité. Ce signe ne sépare pas deux nombres naturels.
Le zéro peut bien sûr être le résultat d'une opération, mais il est aussi le signe qui signifie un rang vide, l'absence d'un chiffre non nul dans le rang considéré. Ainsi, dans notre numération, placer un zéro à la droite ou à la gauche d'un nombre peut avoir ou non une influence, selon qu'il modifie ou non la valeur des autres chiffres. Par contre, s'il est placé à l'intérieur d'un nombre, il modifie ce nombre car il modifie assurément la place des autres chiffres dans le nombre.
Ainsi pour savoir si un zéro « compte » ou ne « compte pas » comme disent les élèves, il faut vérifier si son ajout ou son retrait va modifier la valeur des autres chiffres du nombre, si des chiffres vont changer de rang.
En partant d'exemples et en s'appuyant sur les opérations de fractionnement nécessaires pour graduer la droite numérique, l'enseignant complète la numération décimale connue des élèves à partir des nombres décimaux et situent les dixièmes, les centièmes, les millièmes,... À ce stade, l'enseignant peut aussi faire référence aux fractions, plus particulièrement aux fractions décimales ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ...). Fractionner en dix, c'est obtenir un dixième qui peut s'écrire $\frac{1}{10}$.
Une synthèse écrite peut être rédigée institutionnalisant les savoirs qui viennent d'être énoncés.

Échos des classes Nous reproduisons à nouveau ci-dessous quelques extraits des enregistrements vidéos effectués lors des expérimentations.

– Extrait 1 - Au cours de l'activité de dessin.
Ci-dessus, nous avons explicité qu'il est possible que dans un premier temps, pour graduer la droite numérique, les élèves associent chaque dixième à un petit carré du quadrillage et placent ainsi 2,8 à la mauvaise graduation.
Dans une autre classe, un cas similaire est apparu. Les élèves ont d'abord situé 2,5 au milieu de l'intervalle entre 2 et 3. Ils ont ensuite situé 2,6 à un carré juste au-dessus, de même pour 2,7 et 2,8. De sorte que 2,8 était en réalité situé à 2,75. Comme pour les élèves précédents, ils n'avaient pas tenu compte de l'intervalle et du fractionnement

de celui-ci en intervalles égaux.

- [Enseignant] « Tout le monde a mis 2,5 au milieu ? »
- « Oui ».
- [Enseignant] « Vous avez situé 2,6 ? »
- « On l'a mis deux crans au-dessus. »
- [Enseignant] « Vous l'avez mis tout de suite à deux crans au-dessus ? »
- « Non, on avait mis à un petit carré. »
- [Enseignant] « Vous aviez mis d'abord 2,5 puis à un petit carré après 2,6 puis à un petit carré après 2,7. »
- « Et après, on a été à 2,8 quelque part ici et on a trouvé que ce n'était pas juste parce que c'était trop loin de 3. C'était trop grand. »

Comprenons que les élèves, en se basant sur les intervalles, ont constaté que 2,8 était mal situé. La distance physique entre 2,8 et 3 sur leur feuille leur paraissait « trop grande » par rapport à la « distance numérique » entre 2,8 et 3.

– Extrait 2 - Lors de la synthèse.
Le nombre 2,5 a déjà été placé sur la droite numérique. L'enseignant s'informe pour savoir comment les élèves ont procédé :

- « C'est entre le 2 et le 3. C'est la moitié. »
- [Enseignant] « C'est la moitié, comment est-ce que vous avez fait pour partager en 2 ? »
- « On mesure entre 2 et 3. »
- [Enseignant] « On pourrait mesurer. Et qu'est-ce que vous avez vu quand vous avez mesuré ? »
- « 20 centimètres. »
- « On fait le trait à 10. »

Ensuite, il s'informe pour savoir comment ils ont placé les autres nombres :
« On prend deux carrés sinon c'est trop petit. »
- « Il faut prendre 2 carrés car si on prend 1 carré, on arrive beaucoup trop tôt à 5 [comprenons 5 dixièmes, soit 2,5]. Si on prend un carré, le 5 est là. »

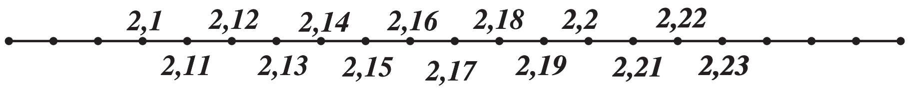
– Extrait 3 - Lors de la synthèse dans une autre classe.

- [Enseignant] « Comment appelle-t-on également ces nombres à virgule ? »
- « Les nombres décimaux. »
- « Décimètre, ... déci ! »
- « Parce qu'entre 2 et 3, il y a 10 choses qu'on peut mettre. »
- [Enseignant] « Oui, entre 2 et 3, on peut partager en 10 parties : 2,1 ; 2,2 ; 2,3 ... 2,9 et 3. Et entre 2,8 et 2,9 ? »
- « Il y a encore 10. »

17 Dessiner des carrés

Cette activité ne doit pas nécessairement être située juste après celle durant laquelle les élèves tracent des carrés sur la grande feuille quadrillée. L'enseignant peut la situer au sein d'une séquence qui comprend la fiche 11 et la fiche 12. Cette activité peut aussi s'inscrire dans une séquence relative aux notions d'aires et de périmètre.

Cette activité permet d'utiliser dans une nouvelle situation le procédé d'encadrement déjà rencontré lors de la recherche de la longueur du côté du carré d'aire 8. L'appui sur la droite numérique construite par les élèves est aussi utile. Celle-ci matérialise en termes topologiques (intervalle et distance) l'encadrement d'un nombre entre deux autres.



De quoi s'agit-il? Les élèves dessinent sur une feuille A4 les carrés construits avec *Apprenti Géomètre*. Ils doivent notamment dessiner le carré de 8 à partir de son côté. Ainsi, ils sont amenés à tracer une ligne de 2,82 ou 2,828 cm.

Commentaires Une activité similaire comprenant la même problématique peut être proposée aux élèves en leur demandant de tracer un rectangle dont longueur et largeur mesurent respectivement 4 et 2,25 centimètres. Ou encore proposer aux élèves le problème de la fiche 11 qui concerne des paiements en euros.

Enjeux Associer le système décimal de position et le système de mesures décimales de longueurs. Comprendre que pour interpréter une longueur, il faut tenir compte à la fois des unités de longueur mais aussi du système décimal de position. Encadrer un nombre décimal (et au-delà tout nombre exprimé dans le système décimal de position).

Compétences *Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.*
Connaitre le sens des préfixes déca, déci, hecto, kilo, centi, milli.

Analyse a priori Le centimètre étant fixé comme unité de mesure de référence, les élèves dessinent les carrés d'aire 1 (côté = 1 cm), 4 (côté 2 cm), ...
Pour dessiner le carré d'aire 8, il leur est nécessaire d'interpréter la mesure 2,82 cm. Pour ce faire, il leur faut donner sens à cette mesure dans le système de mesures décimales et comprendre qu'il faut associer les 2 unités aux centimètres, les 8 dixièmes aux millimètres et le 2 centièmes à une unité de longueur qu'ils ne connaissent pas mais qui est dix fois plus petite que le millimètre.
Ainsi, pour tracer le côté de 2,82 cm, ils ne doivent tenir compte que de 2,8 cm et accepter que le carré dessiné sera « presque » le carré d'aire 8.
Il en sera de même s'ils viennent à dessiner le carré d'aire 2 dont la mesure du côté est 1,41421 ...

Comment s'y prendre?

Chaque élève dispose d'une feuille quadrillée A4 et de son matériel de dessin. L'enseignant invite les élèves à tracer les carrés d'aire 1, 4, 9, 16 et 25. Il demande ensuite de dessiner le carré d'aire 8 à partir d'une approximation déjà utilisée de la longueur de son côté, par exemple 2,82 cm.

L'enseignant observe les réactions des élèves, et si nécessaire demande si cela est possible. Il se peut que suite aux activités déjà réalisées et en fonction des connaissances des élèves à propos du système de mesures décimales, cette situation ne pose pas problème aux élèves. Toutefois, dans les classes où nous avons expérimenté cette situation, pour une part des élèves, l'obstacle de l'interprétation de la mesure était bien réel.

Voici ce qui est arrivé dans une classe après que l'enseignant ait constaté que plusieurs élèves étaient en difficulté pour tracer le côté du carré de 8.

- (Enseignant) « Comment va-t-on représenter 2,82 cm ? Pourriez-vous mettre votre crayon ou votre doigt sur la latte où se trouve 2,82 cm ? »
- Des élèves répondent : « Non ... Moi si !... Non. »
- L'enseignant s'étonne : « On ne sait pas l'avoir sur la latte ? Qu'est-ce qu'on sait avoir sur la latte ? »
- Un élève répond : « 2,8 ou 2,80. »
- (Enseignant) « Mais est-ce qu'on saurait mettre 2,82 sur la latte ? »
- Certains élèves répondent « Oui », d'autres « Non ».
- Un élève qui avait répondu affirmativement et que nous nommerons Gaspard dit : « Parce que 82, c'est 8 cm et 2 mm. »
- L'enseignant s'étonne et demande : « Dans 2,82 cm, le deux de gauche c'est quoi ? Des centimètres ou des millimètres ? »
- Les élèves répondent : « Des centimètres ».
- (Enseignant) « Et le 8 ? »
- « Des millimètres »
- (Enseignant) « Et le 2 de droite ? »
- Un élève répond : « Des millimètres... C'est rien... C'est des millièmes de millimètre. »
- (Enseignant) « C'est quoi 2,82 cm ? »
- Un élève dit : « C'est 2 cm et 8 mm. »
- D'autres élèves expriment le fait qu'on ne peut prendre en compte le 2 de droite : « Le dernier 2 on ne sait pas le mettre. »
- Gaspard intervient de nouveau : « J'y arrive parce que c'est 82 mm et que 82 mm ça fait 8 cm et 2 mm »
- Un élève lui répond : « Donc pour toi, c'est 10,2 ? »
- Gaspard répond « Oui ! »
- D'autres élèves disent « Non. »
- Un autre élève : « Parce que 2,82 c'est 2,82. Ce n'est pas 10,2. Ca ne peut pas être autre chose. »
- Un autre élève surenchérit : « Moi je dis que je ne sais pas écrire le 2. C'est

comme les euros, il y en a après la virgule mais on ne sait pas payer. »

– Gaspard reprend : « Si parce 2,82 c'est 82 mm et ça fait 8,2 cm et si je le mets avec le 2, ça nous donne 10,2 cm. »

Cet extrait montre combien l'esprit des enfants peine à prendre en compte à la fois le système décimal de position et les unités de mesures décimales. Pour Gaspard, une longueur de 2,82 cm est égale à une longueur de 10,2 cm. Cependant, Gaspard sait bien que du point de vue numérique 2,82 n'est pas égal à 10,2.

Dans la suite de l'activité, il va falloir faire comprendre à Gaspard mais aussi aux autres élèves qui sont en difficulté mais qui ne le font pas savoir, que le système de mesures décimales fonctionne, à certains égards, de la même manière que le système décimal de position. Ainsi, tout comme on peut sans cesse diviser par 10 un rang (dizaine, unité, dixième...), il est possible de diviser par 10 toute unité de longueur (décimètre, centimètre, millimètre,...). Il existe donc des unités de mesure plus petites que le millimètre, même si on ne peut les marquer sur la latte, même si elles ne sont pas encore apparues dans les leçons ou dans les activités de classe.

Au terme du débat, il est nécessaire de prendre décision pour tracer cette ligne de 2,82 cm. Que va-t-on tracer ? 2,8 cm ou 2,9 cm puisque 2,82 est entre les deux, puisque 2,82 cm est situé entre 2,8 cm et 2,9 cm sur la latte ? L'enseignant invite les élèves à observer leur grande feuille quadrillée et de situer 2,82. Il est alors aisé par visualisation des distances de comprendre que 2,82 est plus proche de 2,8 que de 2,9. Il s'agit ensuite d'interpréter ces distances en termes numériques. Ainsi entre 2,8 et 2,82 la distance est de 0,02 (deux centièmes) alors qu'entre 2,82 et 2,9 la distance est de 0,08 (8 centièmes). Pour connaitre ces valeurs numériques, les élèves peuvent procéder par comptage sur la droite. Ces comptages sont ensuite traduits en calculs, effectués si nécessaire à la calculatrice :

$$2{,}82 - 2{,}8 = 0{,}02$$
$$2{,}9 - 2{,}82 = 0{,}08$$

Synthèse de l'activité

La synthèse aura pour objet de mettre en évidence les liens entre système décimal de position et système de mesures décimales. Il y sera précisé les désignations *déci*, *déca*, *centi*, *hecto*, ... et sera rappelé que les abaques utilisés ne sont pas limités, qu'il existe d'autres unités de longueur plus grandes que le kilomètre et plus petite que le millimètre.

Cette synthèse peut se poursuivre par un travail de recherche sur les unités de mesure de longueurs, de capacités ou de masses afin que les élèves prennent conscience que des unités plus grandes ou plus petites que celles exercées en classes existent. Bien sûr il sera sans doute difficile pour eux de donner sens à ces unités à partir de manipulations. Il n'est évidemment pas facile de se rendre compte de ce qu'est un micron ! L'objet est seulement qu'ils sachent que ces unités existent.

Activités numériques

À la rencontre des nombres décimaux. . .

> « Il n'existe pas de civilisation sans arithmétique rudimentaire concernant les nombres, dégagés des objets qu'ils comptent. »
>
> J. Dhombres

Les activités de la séquence précédente ont permis aux élèves de rencontrer les nombres décimaux. Pour l'enseignant, elles ont permis de mieux connaître comment les élèves appliquaient à ces nouveaux nombres des connaissances acquises, d'une part, lors des activités scolaires relatives aux nombres naturels, et, d'autre part, lors d'activités de leur vie quotidienne.

Les activités ont également permis de mettre à jour plusieurs questions auxquelles il est maintenant nécessaire de répondre, ou plusieurs difficultés auxquelles il faut porter attention pour que les élèves puissent les surmonter.

Les activités que nous présentons ci-après ne constituent pas vraiment une séquence structurée. Il s'agit plutôt d'un ensemble d'activités qui ont pour objectifs de répondre à certaines questions d'élèves ou de confronter ceux-ci aux difficultés mises à jour. L'enseignant a ainsi le choix de leur programmation en fonction de ses élèves.

Comme pour les activités de la séquence précédente, au terme de leur travail, les élèves doivent, d'une part, exposer leur réponse et expliquer leur démarche et, d'autre part, justifier leur réponse ou leur démarche à la classe. Au cours des débats qui peuvent s'ensuivre, l'enseignant est attentif à l'évolution de l'argumentation chez les élèves. Cette évolution est aussi un témoin de leurs apprentissages. Progressivement, les réponses et les démarches des élèves seront justifiées à l'aide du *système décimal de position*.

Les activités ne présentent pas de séances d'exercisation systématique. Or ces séances permettent aux élèves d'éprouver leurs connaissances sur une série plus importante d'exercices et d'ancrer les apprentissages. Pour ce faire, l'enseignant trouvera aisément, dans les manuels par exemple, des séries d'exercices de fixation.

18 Des nombres décimaux

La fiche 10 (pages 96 et 97) présente les premiers exercices structurés sur les nombres décimaux. Il s'agit de préciser certaines des notions rencontrées lors de l'activité de recherche de la longueur du côté du carré de 8, notamment la démarche de comparaison de nombres décimaux et les rôles du zéro dans le *système décimal de position*.

De quoi s'agit-il? Les élèves classent des nombres décimaux utilisés dans les activités précédentes. Ils les situent également sur une droite graduée.

Enjeux

– Classer des nombres décimaux en se référant au système décimal de position.
– Comprendre les rôles des zéros dans le système décimal de position.

Compétences *Dire, lire et écrire des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième dans la numération décimale de position en comprenant son principe.*
Classer, situer, comparer des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième.

De quoi a-t-on besoin? La fiche 10 est à photocopier recto-verso en autant d'exemplaires que d'élèves. Les fiches de nombres aux pages 98 et 99 sont à photocopier et si possible à plastifier avant d'être découpées pour une utilisation durable.

Analyse a priori Pour classer deux nombres décimaux qui possèdent la même partie entière, il faut d'abord comparer les chiffres des dixièmes, en cas d'égalité, il faut comparer les chiffres des centièmes,... Ainsi de suite jusqu'au moment où une différence apparait et permet de déterminer le nombre le plus grand.
Pour ranger une suite de nombres décimaux, il s'agit d'abord de vérifier si les parties entières sont identiques. Dans ce cas, il faut ensuite effectuer le même travail qu'exposé ci-dessus mais pour une série de nombres plus grande. Dans le cas où les parties entières ne sont pas égales, il faut d'abord appliquer sur la partie entière, le même algorithme que celui défini sur les parties décimales.
Notons que dans le cas de parties entières différentes, les élèves vont souvent appliquer une procédure construite sur l'apparence des nombres. En effet, si des élèves doivent comparer 24 et 224, ils vont directement dire que 224 est plus grand que 24 en justifiant qu'il y a plus de chiffres dans 224 ou que 224 est plus long que 24. La comparaison ne s'effectue pas en ayant recours au système décimal de position et en disant que le chiffre des centaines dans 224 est plus grand que celui de 24. Dans bien des cas, cette procédure de comparaison basée sur l'apparence des nombres va être appliquée aux nombres décimaux. Amener les élèves à construire une règle générale applicable à tous les nombres s'écrivant à l'aide du *système décimal de position* participe du processus de généralisation des nombres.

Comment s'y prendre?

L'enseignant distribue les feuilles aux élèves. Si nécessaire, il distribue également les fiches de nombres. Ces fiches aident les élèves à ranger les nombres décimaux en les intercalant aisément avant de noter le rangement final sur la fiche d'exercices.
Des nombres sont écrits avec un zéro comme dernier chiffre à droite. Le rôle du zéro peut à nouveau être mis en évidence. Il est souhaitable que la formule type « les zéros ne comptent pas » soit remplacée, en tout cas dans un premier temps, par une formule du type « le(s) zéro(s) qui se trouve(nt) ici ne modifie(nt) pas la valeur des autres chiffres, il(s) n'est (ne sont) pas à prendre en considération ». L'objet est que les élèves construisent une règle qui soit applicable dans tous les cas, y compris donc pour les naturels. Rappelons à nouveau que la rencontre des nombres décimaux s'inscrit dans un processus de généralisation et non dans un processus qui va ajouter des cas particuliers à des cas particuliers déjà présents.
Les nombres proposés sont issus des activités réalisées préalablement. Les élèves résolvent seuls les exercices. La correction est collective. Durant la correction la lecture des nombres décimaux sous la forme d'une somme est aussi envisageable. Cette façon de lire les nombres aide à la comparaison et au rangement.

2,85 se dit « deux unités, huit dixièmes et cinq centièmes ».

À ce stade, d'autres exercices de fixation peuvent aussi être introduits comme ceux de l'écriture de nombres décimaux sous la forme d'un quotient ou d'une somme de fractions décimales en lien avec la lecture des nombres et l'écriture fractionnaire. Le lien avec les fractions peut aussi être établi à partir du fractionnement de la droite numérique.

$$2{,}85 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} = \frac{285}{100}$$

Ces exercices seront présentés en fonction des apprentissages déjà réalisés au niveau des fractions.

Synthèse de l'activité

Au terme de l'activité, la fiche est complétée en décrivant une méthode de comparaison des nombres décimaux. Cette méthode peut aussi être décrite pour n'importe quelle paire de nombres, notamment en mettant en évidence les limites des procédures que les élèves auraient pu construire pour les nombres naturels.
Une synthèse écrite sur le(s) rôle(s) du zéro peut aussi être ajoutée à la fiche.

19 Monsieur Virgule a perdu la tête !

L'objet de cette activité est de replacer les nombres décimaux dans un contexte réel, celui des paiements en euros. Cette activité s'inscrit dans une séquence qui peut aussi comprendre l'activité de dessin sur feuille quadrillée (page 67) et l'activité de paiement en euros à la pompe (fiche 11).

De quoi s'agit-il? Les élèves additionnent et multiplient des nombres décimaux et des nombres naturels à partir d'un contexte de paiement en euros. Ils traitent la situation en tenant compte tant du système particulier de cette monnaie que du système décimal de position. Ils déterminent quel(s) personnage(s) indique(nt) la somme correcte.

Enjeux Associer le système décimal de numération de position et le système monétaire en euros.

Compétences *Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.*
Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

De quoi a-t-on besoin? Fiche 12 à photocopier.

Analyse a priori Les élèves calculent chaque *somme* intermédiaire. Pour pouvoir calculer la somme totale correspondant à la vente de galettes, il est nécessaire que les élèves connaissent le rapport entre les unités et les sous-unités au sein du système de la monnaie euro : 1 € = 100 centimes d'euro.

- 42 pièces d'1 centime d'euro = 42 centimes,
- 17 pièces de 10 centimes d'euro = 170 centimes,
- 23 pièces de 20 centimes d'euro = 460 centimes,
- 170 pièces d'1 euro = 170 euros,
- 3 billets de 10 euros = 30 euros.

Les élèves additionnent ensuite ces *sommes* intermédiaires pour obtenir la *somme totale*. Pour y parvenir, il peut être nécessaire qu'ils puissent transformer les nombres de centimes d'euro en nombres d'euros.

- Si on tient compte des contextes monétaires et numériques :
  0,42 € + 1,70 € + 4,60 € + 170 € + 30 € = 206,71 €
  ou 42 centimes + 170 centimes + 460 centimes = 672 centimes
  et 170 € + 30 € = 200 €
- ou si l'on ne tient compte que du contexte numérique :
  0,42 + 1,70 + 4,60 + 170 + 30 = 206,72
  ou 0,42 + 1,7 + 4,6 + 170 + 30 = 206,72
  ou 42 + 170 + 460 = 672
  et 170 + 30 = 200

Au terme des calculs, les élèves doivent lire la *somme totale* obtenue en tenant compte du système de la monnaie pour pouvoir déterminer quel personnage exprime la bonne *somme*. Cette lecture correspond à une lecture décimale classique (deux cent six virgule septante et un euros), peu pratiquée reconnaissons-le, et une lecture de type *somme* (deux cent six euros et septante et un centimes d'euro). Notons que la réponse de Monsieur Chiffre est également correcte (200 euros et 672 centimes). Elle est cependant peu pratiquée dans la réalité !

Comment s'y prendre? L'enseignant distribue la fiche aux élèves qui travaillent seuls. Une mise en commun par groupe peut être envisagée au cours de l'activité, avant la correction collective et la synthèse.
Comme décrit dans l'analyse *a priori*, les élèves doivent additionner les *sommes* intermédiaires. Pour ce faire, ils peuvent utiliser trois écritures différentes selon qu'ils gardent ou non l'unité monétaire. L'enseignant peut accepter ces trois écritures, cependant il s'agit de vérifier que les élèves les utilisent en sachant passer de l'une à l'autre et en sachant expliquer pourquoi des zéros sont nécessaires dans l'une et pas dans l'autre. Pour ce faire, lors de la correction, les différentes écritures sont notées au tableau et des comparaisons sont effectuées et expliquées.

Il s'agit notamment d'expliquer que pour la notation en euros, il est préférable d'exprimer chaque *somme* d'argent en tenant compte des pièces et billets disponibles. Et en l'occurrence, il n'existe pas de billet ou de pièce symbolisant les dixièmes d'euros. Ainsi, 10 centimes d'euro s'écrit 0,10 €.
Lors de la correction, outre les bonnes réponses à énoncer (Monsieur Chiffre, Monsieur Zéro et Monsieur Virgule), la réponse proposée par Monsieur Nombre doit être explicitée.

Synthèse de l'activité Après la correction, les liens entre le système monétaire en euros et le système décimal de position peuvent être mis en évidence. Ainsi, les centimes d'euro seront mis en lien avec les centièmes d'unité dans notre numération.
Le rôle du zéro sera aussi mis en évidence ainsi que son utilité dans l'écriture de *sommes* d'argent en euros.

20 Martin joue avec sa date d'anniversaire

L'objectif de cette activité est de mettre en évidence et d'institutionnaliser le rôle que le zéro peut avoir dans le *système décimal de position*. Il s'agit en outre de faire en sorte que les élèves « abandonnent » la conception selon laquelle « les zéros à droite ne comptent pas », conception particulière construite à partir de l'observation de nombres naturels uniquement. Le référent n'est donc plus des cas particuliers sur les nombres naturels, mais le *système décimal de position*.

Cette activité peut être employée dans le cadre de la remédiation différée et proposée uniquement à quelques élèves pour qui la gestion du zéro pose encore quelques difficultés.

De quoi s'agit-il? Les élèves composent plus de 10 nombres à partir de 4 chiffres donnés : 6, 3, 0, 0.

Enjeux

Comprendre le rôle du zéro dans le *système décimal de position* comme signe placé pour exprimer le fait qu'il n'y a pas de valeur pour le rang considéré. Comprendre que l'effet réel d'un zéro dépend du fait qu'il modifie ou non la valeur des autres chiffres dans le nombre et donc qu'il modifie le nombre. Comprendre les rôles des zéros ajoutés notamment pour le calcul écrit ou la lecture des compteurs. Différencier chiffre et nombre.
Cette activité fait aussi appel à la combinatoire (arrangement) mais cette notion n'est pas un objectif en soi.

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres naturels et des nombres décimaux limités au millième dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

De quoi a-t-on besoin?

La fiche 13. L'enseignant peut aussi donner aux élèves des affiches et des marqueurs pour noter leurs réponses. Ces affiches sont affichées au tableau lors de la correction collective.

Analyse a priori

Les élèves doivent composer des nombres à partir des quatre chiffres donnés. Ceux-ci sont choisis de telle manière qu'il est nécessaire de composer des nombres décimaux pour avoir au moins dix nombres.
Les deux zéros obligent les élèves à traiter ceux-ci tant pour les nombres naturels composés que pour les nombres décimaux.
Les solutions sont

- pour les nombres naturels : 6300 ; 6030 ; 6003 ; 3600 ; 3060 ; 3006
- pour les nombres décimaux : 60,03 ; 6,003 ; 30,06 ; 3,006 ; 0,603 ; 0,063 ; 0,306 ; 0,036

Comment s'y prendre?

L'enseignant distribue la fiche 13 aux élèves. Le travail peut s'effectuer seul ou par groupe de 2 élèves.
Les élèves lisent la consigne. L'enseignant l'explique si nécessaire. Au cours de la recherche, l'enseignant observe les compositions des élèves et intervient pour demander aux élèves d'expliquer leur démarche.
Par exemple, des élèves pourraient proposer pour les nombres naturels des réponses du type 0063 et pour les nombres décimaux des réponses du type 00,63 ou 0,630. Si l'on se réfère uniquement au *système décimal de position*, il est possible de refuser ces réponses puisque effectivement 0063 est égal à 63 qui ne contient pas les quatre chiffres. Cependant, avant de refuser ces réponses, il est utile de demander aux élèves pourquoi ils les proposent. Plusieurs explications peuvent être fournies par les élèves, dont :

- les élèves travaillent plutôt comme dans un jeu d'assemblage de signes quelconques sans faire sens avec ces signes et ces assemblages.
- Ou, ils sont conscients que certains zéros n'ont pas d'effet sur les nombres mais ils composent des nombres comme dans un compteur.
- Ou encore, ils comprennent que ce sont des nombres qu'ils composent mais ils ne sont pas « attentifs » à l'effet du zéro sur ces nombres.

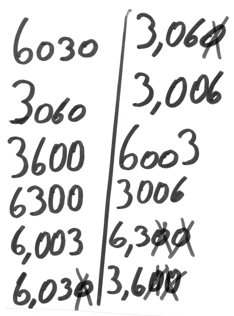
Après avoir entendu les explications des élèves, l'intervention de l'enseignant consiste à faire prendre conscience aux élèves de l'effet du zéro et de leur demander de ne composer que des nombres dans lesquels tous les chiffres ont un effet sur le nombre.
Au terme de l'activité, les réponses sont affichées au tableau et le rejet de certaines réponses est précisé en s'appuyant sur le système décimal de position.

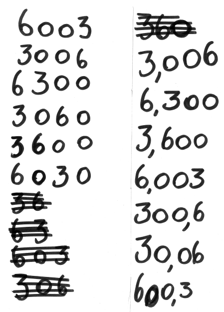
Synthèse de l'activité

Les rôles du zéro dans la système décimal de position sont précisés : il est un chiffre au même titre que les neuf autres chiffres (de 1 à 9) mais il a pour rôle de préciser que le rang dans lequel il se trouve ne possède pas de valeur. Ainsi, selon le rang où on l'ajoute, il modifie ou non la valeur des autres chiffres du nombre.
Quelques conventions d'écriture sont aussi à préciser. Par exemple, il est convenu que l'on n'écrit pas de zéros à la gauche de la partie entière d'un nombre et à la droite de la partie décimale.
Cependant, pour faciliter certaines opérations (comparaison, addition, ...), on peut « ajouter » un ou plusieurs zéros. De même que des zéros à gauche ou à droite peuvent apparaitre dans le compteur kilométrique d'une voiture ou d'un compteur à eau par exemple.

Échos des classes

Nous exposons ci-dessous quelques affiches réalisées dans les classes d'expérimentation.





Ces copies montrent que les élèves ont parfois hésité sur les nombres à écrire et qu'ils ont certainement débattu pour savoir s'ils acceptaient ces nombres ou pas.

21 Catastrophe pour Monsieur Virgule !

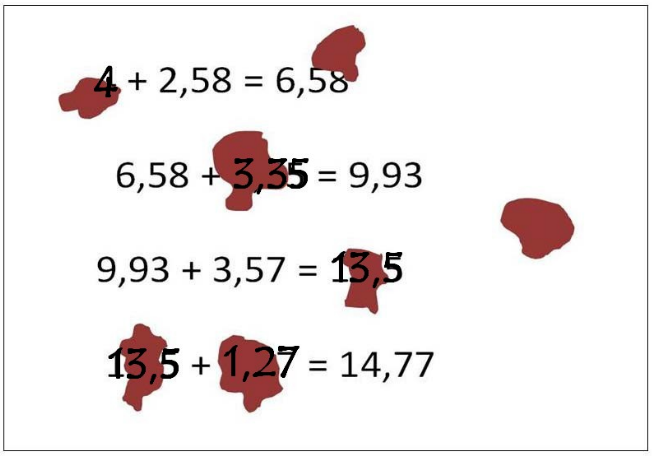
L'activité a pour objet de mettre en évidence que les propriétés et les techniques de l'addition et de la soustraction rencontrées avec les nombres naturels sont aussi applicables aux nombres décimaux (commutativité, inverse, report, ...). Le système décimal de position est aussi au coeur de l'activité (les rangs, le rôle du zéro).

De quoi s'agit-il?	Les élèves résolvent les calculs proposés (additions et soustractions). Ils utilisent des techniques de calcul et des propriétés des opérations apprises avec les nombres naturels.
Enjeux	Comprendre que les opérations d'addition et de soustraction s'appliquent de la même manière aux nombres naturels et aux nombres décimaux. Comprendre notamment que les processus de report au rang supérieur (addition) ou d'emprunt (soustraction) révélés lors de l'étude des nombres naturels sont aussi d'application pour les nombres décimaux. Comprendre que tout autant pour les naturels que pour les nombres décimaux, la soustraction est l'opération réciproque de l'addition.
Compétences	*Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.* *Utiliser la soustraction comme la réciproque de l'addition.*
De quoi a-t-on besoin?	La fiche 14.
Analyse a priori	Le travail des élèves est synthétisé dans le tableau ci-dessous.

21. Catastrophe pour Monsieur Virgule !

Opération	Résolution
. . . + 2,58 = 6,58	Le premier calcul est assez simple à compléter. Il fait appel à un nombre naturel. Pour compléter, observer que le deuxième terme de l'addition et la solution possède la même partie décimale et opérer soit par la recherche d'un complément (. + 2 = 6) soit par soustraction (6 - 2 = 4).
6,58 + . . . 5 = 9,93	Plusieurs démarches peuvent être utilisées pour compléter le calcul. – Noter le calcul comme un calcul écrit et trouver ce qui manque. Pour pouvoir aligner les chiffres des trois nombres, comprendre que le 5 du deuxième terme est situé au rang des centièmes. En effet, pour obtenir 3 au rang des centièmes dans la réponse, il faut ajouter 5 centièmes au 8 centièmes du premier terme. $\begin{array}{r} \mathbf{6{,}58} \\ +\quad \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{9{,}93} \end{array}$ – Effectuer le calcul en utilisant la soustraction comme réciproque de l'addition et poser le calcul : 9,93 - 6,58.
9,93 + 3,57 = 1. . . 5	Effectuer l'addition et comprendre que le zéro au rang des centièmes n'est pas affiché dans la réponse du calcul.
1. . . 5 + . . . 7 = 14,77	Comprendre que comme pour les autres additions, il faut reprendre la solution du calcul précédent pour obtenir le premier terme de l'addition, soit 13,5. Ensuite procéder soit par la recherche d'un complément (peut-être en calcul écrit comme ci-dessus) soit en utilisant une soustraction (14,77 - 13,5). Si la soustraction est effectuée par écrit, un zéro au rang des centièmes peut être ajouté à 13,5.

Solution



Comment s'y prendre?

L'enseignant distribue la fiche 14 aux élèves qui travaillent individuellement ou en binômes. Ceux-ci lisent la consigne et si nécessaire l'enseignant l'explique à partir d'un exemple contenant des nombres naturels.

<table>
<tr><td>1★3 + 1★ = 145</td><td>Pour compléter les nombres, il est nécessaire d'associer les chiffres de même rang.
Ainsi, si l'on commence par le rang des unités, il faut résoudre l'addition : 3 + ★ = 5,
soit 3 + 2 = 5.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Le calcul de départ devient alors 1★3 + 12 = 145</td></tr>
<tr><td>1★3 + 12 = 145</td><td>Ensuite, il est nécessaire de poursuivre de même pour le rang des dizaines ou pour deux rangs successifs, les unités et les dizaines :

★ + 1 = 4 ,

★3 + 12 = 45,

de telle sorte que le calcul est
133 + 12 = 145.</td></tr>
</table>

L'enseignant est attentif aux élèves qui seraient en difficulté par rapport aux techniques de calcul. Ces difficultés auront une influence sur l'apprentissage des opérations sur les nombres décimaux. Il faut veiller à ce que ces difficultés ne s'ajoutent pas à des difficultés liées à la connaissance du système décimal de position. Des explications spécifiques pour certains élèves sont peut-être nécessaires. Nous invitons les enseignants à prendre connaissance des activités de remédiation décrites dans le fascicule intitulé « Re-médiation en 5^e^ et 6^e^ primaire ». Lors de la correction collective, les procédés d'addition et de soustraction sont rappelés : alignement des chiffres de même rang, report au rang supérieur, emprunt au rang supérieur. Il en est de même pour la propriété de la soustraction comme réciproque de l'addition.

Synthèse de l'activité

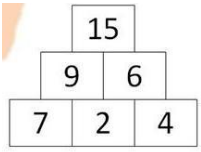
Une synthèse écrite reprenant techniques et propriétés de l'addition et de la soustraction peut être rédigée, en lien avec une synthèse existante sur les nombres naturels. Il est sans doute important de faire prendre conscience aux élèves que ce sont les mêmes opérations.

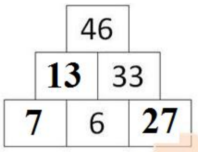
Commentaires

La fiche 15, à photocopier recto/verso, est une autre activité qui rencontre les mêmes enjeux et compétences. Elle peut être proposée à la suite de la présente activité.

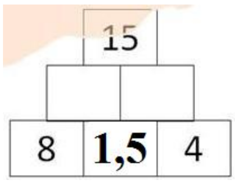
21. Catastrophe pour Monsieur Virgule !

Pour compléter les pyramides, les élèves, en observant la première pyramide déjà complétée, doivent comprendre qu'un nombre occupant une case supérieure est le résultat de la somme des nombres inscrits dans les deux cases inférieures.





Certaines pyramides du même type que celle affichée ci-dessous ne se complètent pas avec une simple addition ou soustraction. En effet, sous la case de tête se trouvent deux cases vides. On pourrait ainsi croire que l'on peut indiquer n'importe quels nombres à la condition que leur somme soit égale au nombre de la case de tête. Il n'en est rien car le lien avec les cases du fond de la pyramide doit être possible. Il est donc nécessaire de faire directement le lien entre la case de tête et les cases de fond. En l'occurrence pour l'exemple ci-dessous, il faut comprendre que le nombre manquant dans la case de fond doit compléter 8 et 4 pour obtenir 15, mais que ce nombre doit être ajouté tant à 8 qu'à 4. Pour trouver ce nombre, il faut donc soustraire 12 (8 + 4) de 15, et diviser la réponse par 2, soit 1,5.



Les premières pyramides ne concernent que des nombres naturels. Le suivantes contiennent à la fois des nombres naturels et des nombres décimaux.

Nous ne proposons pas dans cette séquence de fiches d'exercisation des opérations d'addition et de soustraction. Ces exercices sont toutefois utiles pour garantir un apprentissage efficace et durable.

Fiches d'activité

Vous trouverez ci-après les fiches correspondant aux activités précédemment décrites. Celles-ci peuvent être photocopiées à volonté. Une version informatique est également disponible si vous souhaitez les imprimer en couleurs.

Une vue synthétique de ces fiches est proposée par le tableau ci-après.

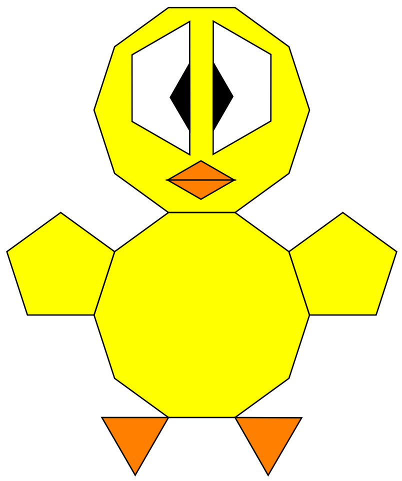
Fiche	Page	Titre	Description
1	85	Découvrir Apprenti Géomètre	Cette première activité propose aux élèves de réaliser diverses figures à l'aide de formes directement disponibles. Pour certaines figures, une découpe de forme sera nécessaire. Fiche recto/verso à plastifier si possible pour une utilisation durable.
2	87	Découvrir Apprenti Géomètre	Fiche technique que l'on peut distribuer aux élèves pour leur première utilisation du logiciel. Elle peut aussi être plastifiée pour une utilisation durable. La fiche présentée ici correspond à la première version du logiciel. Elle peut être construite également par les élèves après une première utilisation.
3	88	Apprenti Géomètre : reproduire une figure	L'objectif instrumental de cette activité est de faire en sorte qu'au terme de l'activité les élèves puissent utiliser la fonctionnalité *Découper*.
4	89	Apprenti Géomètre : construire une figure	L'objectif instrumental de cette activité est de faire en sorte qu'au terme de l'activité les élèves puissent utiliser les fonctionnalités *Découper* et *Diviser*. Du point de vue géométrique, un des objectifs est d'amener les élèves à mieux *voir* les décompositions possibles d'une même figure.
5	90	Apprenti Géomètre : assembler des carrés	L'objectif est de rencontrer les notions de *périmètre* et d'*aire* de manière intuitive après avoir construit des carrés. Un travail sur des suites de nombres peut être ensuite envisagé.

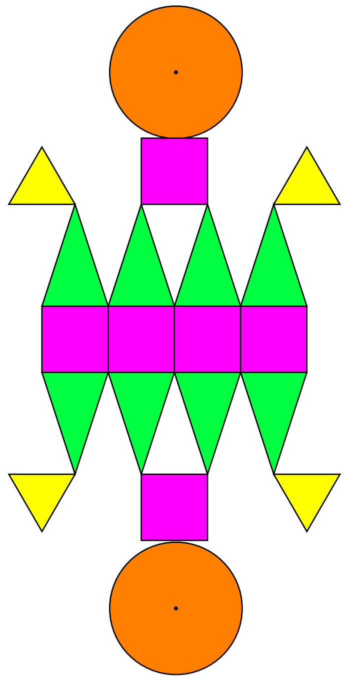
Fiches d'activité

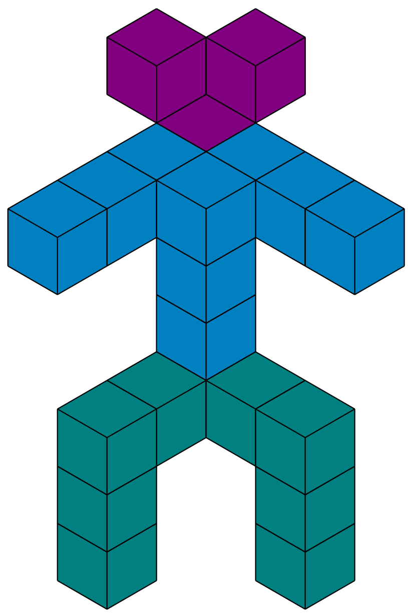
Fiche	Page	Titre	Description
6	91	Assembler des carrés : synthèse	Fiche de synthèse du travail effectué à la fiche 5.
7	92	Construire un carré avec 8 carrés standards !	Cette fiche correspond à l'activité centrale du dispositif que nous proposons. Il s'agit de chercher à construire un carré avec 8 carrés standards.
8	93	Construire un carré de 8 : synthèse (1)	C'est au cours de cette synthèse que l'on va mettre en évidence que l'on ne connait pas la longueur du carré de 8, ni son pourtour. Par contre, on en connait l'aire. C'est sur ce manque d'informations que se fonde l'activité qui va amener à la « construction » des nombres décimaux.
9	94 et 95	Construire un carré de 8 : synthèse (2)	Même synthèse présentée de façon différente.
10	96 et 97	Des nombres décimaux	Premiers exercices structurés sur les nombres décimaux. Il s'agit de préciser les différentes notions rencontrées lors de l'activité précédente (déterminer la longueur du côté du carré de 8), notamment comment classer des nombres décimaux, mais aussi un des rôles du zéro.
	98 et 99		Fiches à photocopier contenant des nombres décimaux utilisés dans la fiches 10. Fiche à plastifier si possible pour une utilisation durable.
11	100	Des nombres décimaux, des paiements en euros	Donner du sens aux nombres décimaux dans un contexte de paiements en euros.
12	101	Monsieur Virgule a perdu la tête !	L'objet de cette activité est de replacer les nombres décimaux dans un contexte réel, celui des paiements en euros. Cette activité se situe après ou avant celle qui consiste à dessiner des carrés sur une feuille quadrillée, en utilisant le centimètre comme unité principale de mesure.
13	102	Martin joue avec sa date d'anniversaire	L'objectif de cette activité est de mettre en évidence les rôles que les zéros peuvent jouer dans le système décimal de position. Il est ainsi demandé aux élèves de construire des nombres naturels et des nombres décimaux avec les mêmes chiffres.
14	103	Catastrophe pour Monsieur Virgule !	L'activité a pour objet de mettre en évidence que les propriétés et les techniques de l'addition et de la soustraction rencontrées avec les nombres naturels sont aussi applicables aux nombres décimaux (commutativité, inverse, report,. . .). Le système décimal de position est aussi au coeur de l'activité (les rangs, le rôle du zéro).
15	104	Monsieur Virgule ne trouve pas !	Exercices sur l'addition et la soustraction de nombres décimaux.

Fiche 1 – Apprenti Géomètre : comment ça marche ?

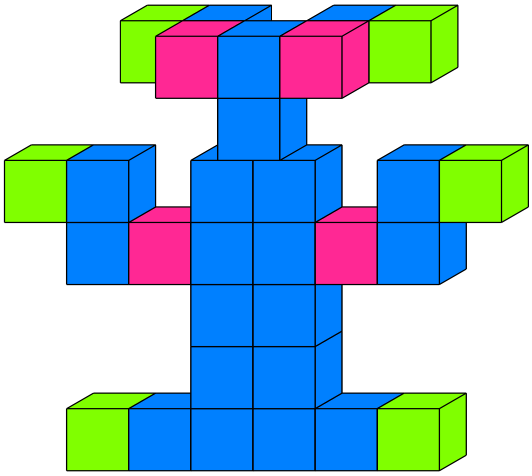
En utilisant les formes du niveau A, reproduis un des dessins proposés.

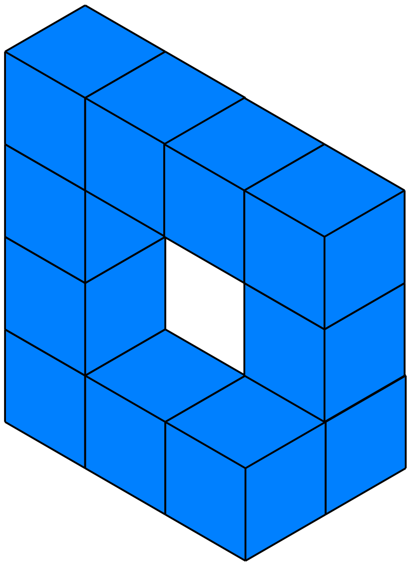


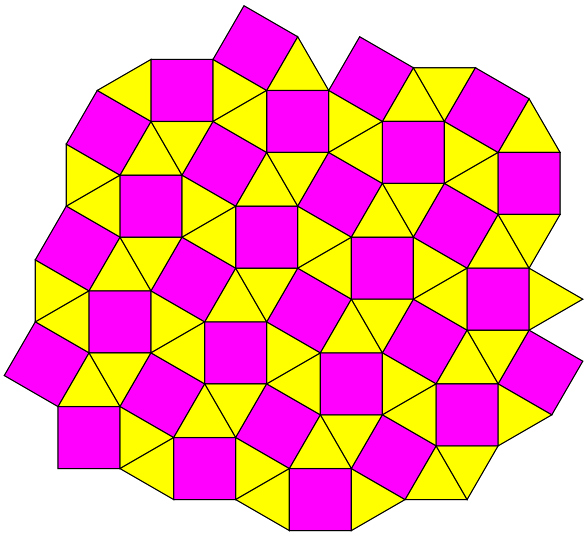




Fiche 1– Apprenti Géomètre : comment ça marche ?

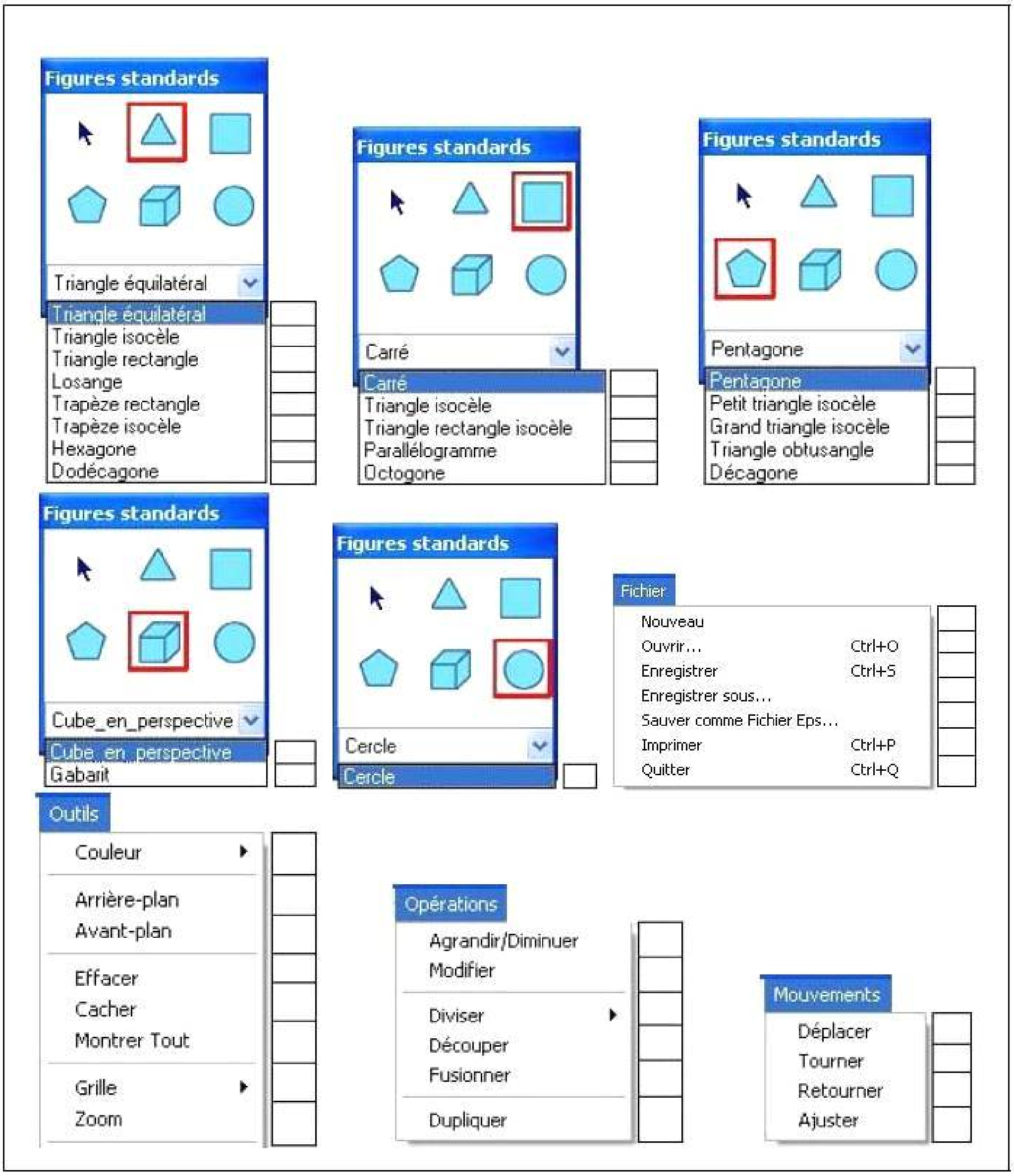






Fiche 2 – Apprenti Géomètre : comment ça marche ? Fiche technique

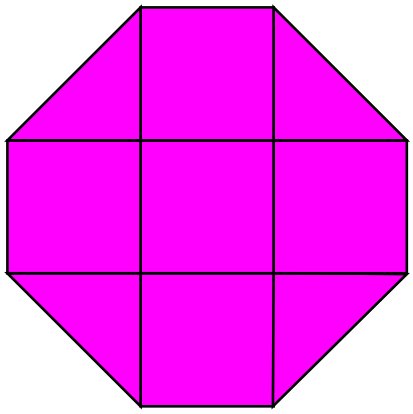
Quelques outils à ta disposition...



Fiche 3 – Apprenti Géomètre : reproduire une figure

Place sept carrés standards à l'écran.

Avec seulement ces sept carrés, reproduis la figure ci-dessous à l'écran.

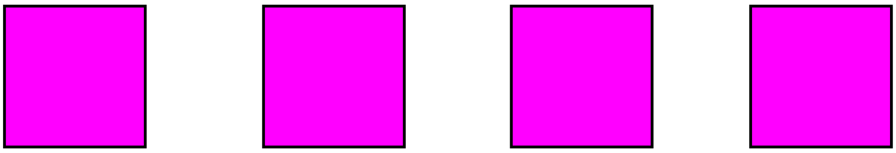


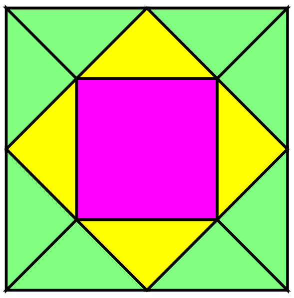
Explique comment tu as procédé pour reproduire cette figure. Tu peux aussi dessiner pour mieux expliquer.

Fiche 4 – Apprenti Géomètre : construire une figure

Place quatre carrés standards à l'écran.

Avec seulement ces quatre carrés, reproduis la figure ci-dessous à l'écran.



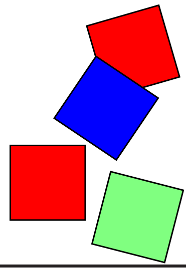


Explique comment tu as procédé pour reproduire cette figure. Tu peux aussi dessiner pour mieux expliquer.

Fiche 5 – Apprenti Géomètre : assembler des carrés

Assemble plusieurs exemplaires de carrés standards pour construire 3 carrés de grandeurs différentes.

Dessine ces carrés sur le quadrillage ci-dessous, ou imprime-les et colle-les verso de cette fiche.



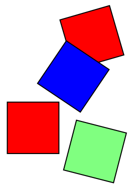
Fiche 6 – Assembler des carrés : synthèse

Nous avons assemblé des carrés standards pour construire d'autres carrés.

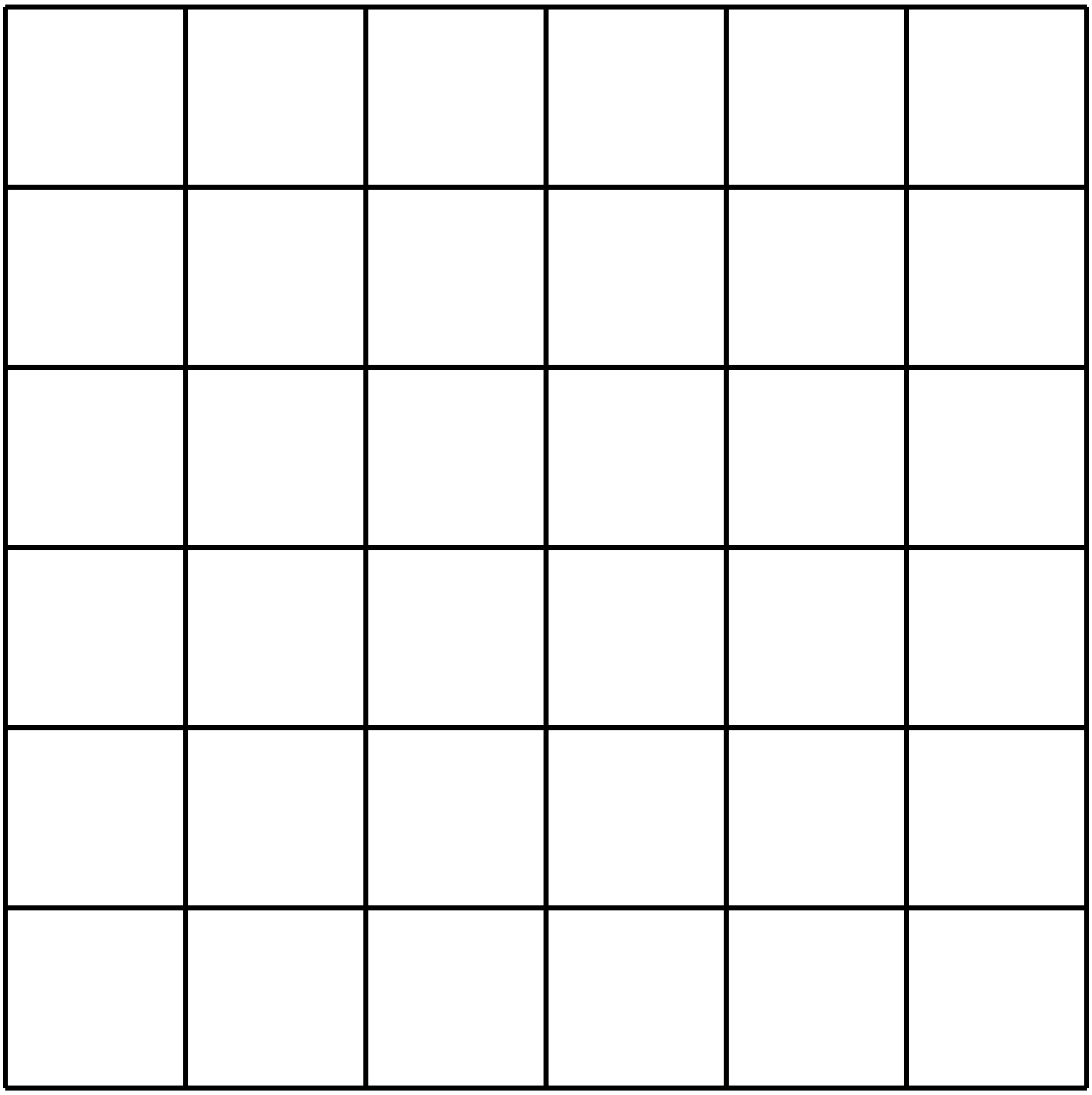
Longueur du côté	Dessin	Longueur du pourtour	Intérieur

Fiche 7 – Construire un carré avec 8 carrés standards !

Nous avons assemblé des carrés standards pour construire des carrés de 1, 4, 9, 16, 25. . . Mais serait-il possible de construire un carré avec 8 carrés standards ?

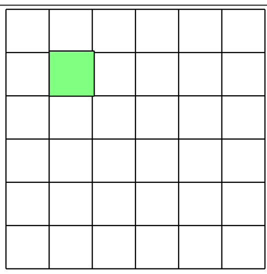
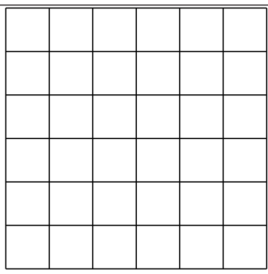
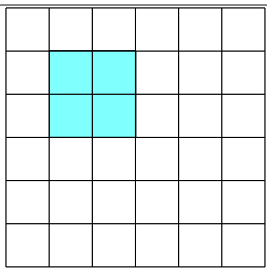
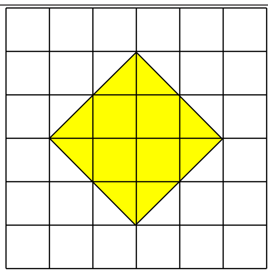
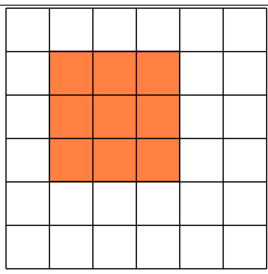


Essaie puis dessine ton carré de 8 sur le quadrillage ci-dessous.



Fiche 8 – Construire un carré de 8 : synthèse (1)

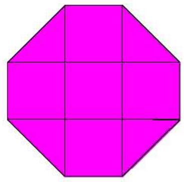
Nous avons construit différents carrés. Complétons le tableau de synthèse précédent.

Longueur du côté	Dessin	Longueur du pourtour	Intérieur
			
			
			
			
			

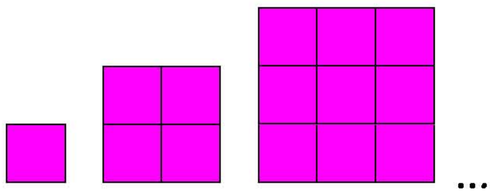
Fiche 9 – Construire un carré de 8 : synthèse (2)

Un carré d'aire de 8 petits carrés

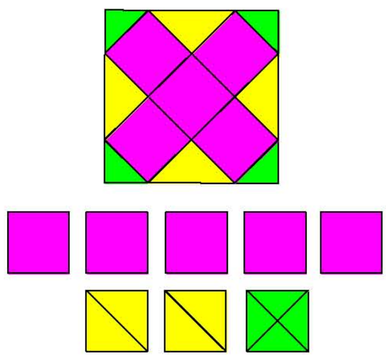
- Nous avions construit une forme d'aire égale à 7 petits carrés...



- Ensuite, nous avons construit des carrés d'aires égales à 1, 4, 9, 16... petits carrés.

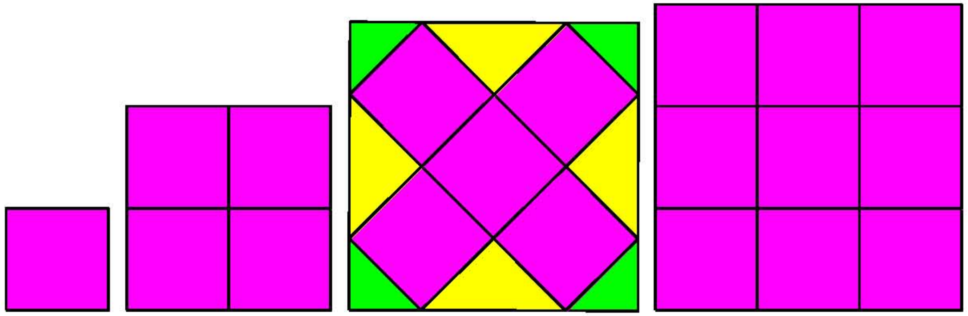


- Enfin, nous avons construit un carré d'aire égale à 8 petits carrés...

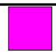
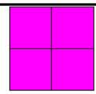
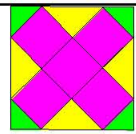
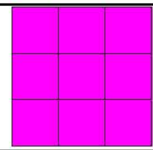


Des longueurs et des aires de carrés

■ Voici une copie des carrés construits avec Apprenti Géomètre.



■ Pour trois de ces carrés, nous connaissons la longueur du côté et l'aire. Pour un, le carré de 8, nous ne connaissons que l'aire…

				
Aire	1 (1 x 1)	4 (2 x 2)	8	9 (3 x 3)
Longueur du côté	1	2		3
Périmètre	4 (1+1+1+1)	8 (2+2+2+2)		12 (3+3+3+3)

Fiche 10 – Des nombres décimaux

Des nombres décimaux...

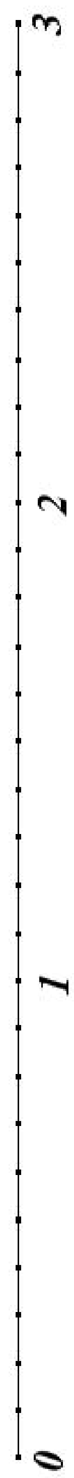
Nous avons utilisé des nombres décimaux...

■ 2 ■ 2,85 ■ 3 ■ 2,86 ■ 2,5 ■ 2,50 ■ 2,8 ■ 2,7 ■ 2,9 ■ 2,10

Pourrais-tu les classer du plus petit au plus grand ?

...plus petits... → ...plus grands...

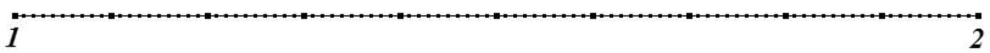
Pourrais-tu les situer sur la ligne ci-dessous?



Réalise la même tâche avec d'autres nombres…

1.

■ 1 ■ 2 ■ 1,50 ■ 1,7 ■ 1,95 ■ 1,73 ■ 1,9 ■ 1,8 ■ 1,90 ■ 2,0



2.

■ 0 ■ 0,8 ■ 0,87 ■ 0,9 ■ 0,34 ■ 0,4 ■ 0,90 ■ 0,50 ■ 0,05 ■ 1

Comment classer des nombres décimaux ?…

2,828	2,826
2	2,50
2,83	3,0
3	2,82
2,86	2,85
2,5	2,8

2,825	2,7
2,10	2,9
1	1,50
1,7	1,95
1,90	1,73
1,9	1,8

Fiche 11 – Des nombres décimaux, des paiements en euros

Des nombres décimaux, des paiements en euros

Après avoir fait le plein de carburant, voici le ticket qu'a rendu le pompiste à Monsieur Virgule.

Pompe ALUILE

Prix essence	1,397 €/l
Nombre de litres	12 l
Prix à payer	**16,76 €**

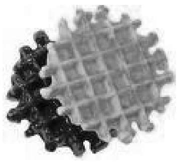
Quand Monsieur Virgule fait son compte à la calculette, il n'obtient pas le même résultat ! Et il ne comprend pas le compte écrit sur le ticket !

1,397 x 12 = 16,764

Et toi, peux-tu expliquer à Monsieur Virgule pourquoi le nombre obtenu à la calculette ne correspond pas à celui du ticket de caisse ? Explique comment tu fais.

Fiche 12 – Monsieur Virgule a perdu la tête !

Avec tous les comptes pour les ventes de galettes, Monsieur Virgule perd la tête ! Il a déjà vérifié trois fois l'argent déposé dans la caisse de vente mais il obtient à chaque fois un compte différent.



Voici ce que contient la caisse :
– 42 pièces d'1 centime d'euro,
– 17 pièces de 10 centimes d'euro,
– 23 pièces de 20 centimes d'euro,
– 170 pièces d'1 euro,
– 3 billets de 10 euros.

Ses amis, Monsieur Chiffre, Monsieur Nombre et Monsieur Zéro sont venus l'aider pour faire ses comptes. Mais ils ne sont pas d'accord entre eux !

– Monsieur Chiffre affirme qu'en tout, il y a 200 € et 672 centimes d'euro dans la caisse,
– Monsieur Nombre affirme qu'il y a plutôt 200,672 € dans la caisse,
– Monsieur Zéro dit que c'est faux, il y a en réalité 206 € et 72 centimes d'euro dans la caisse,
– et Monsieur Virgule, après avoir recompté une quatrième fois dit qu'il y 206,72 € dans la caisse.

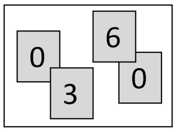
Pourrais-tu aider Monsieur Virgule à savoir qui dit vrai ?
Explique comment tu as fait.

Fiche 13 – Martin joue avec sa date d'anniversaire

Martin est né le 6 mars 1999. Il a vu que son institutrice a écrit sa date de naissance dans son registre comme ceci : 06.03.99. Il recopie cette date dans son cahier de brouillon. Il essaie ensuite de former des nombres en utilisant à chaque fois tous les chiffres qu'il a recopiés.

- D'abord, il écrit sa date de naissance à l'envers : 993 060 (neuf cent nonante trois mille soixante) !
- Ensuite, il veut l'écrire à l'endroit : 060399. Mais il s'aperçoit qu'habituellement on n'écrit pas de 0 devant un nombre ! Il doit alors écrire 60399, mais il n'utilise pas tous les chiffres, il n'utilise qu'un seul des deux 0.
- Il essaie alors un autre nombre en mélangeant tous les chiffres : 690 093.

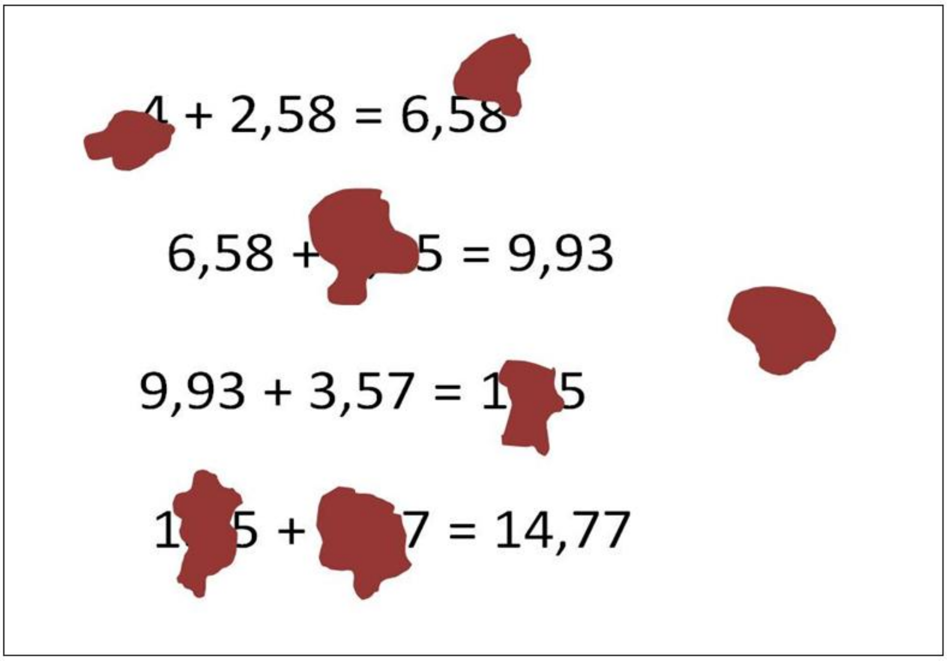
Il s'arrête à nouveau car il trouve qu'il y a trop de chiffres et trop de possibilités d'écrire des nombres. Il décide alors d'utiliser seulement les chiffres du jour et du mois : 0, 3, 0 et 6. En réfléchissant un peu avant de commencer, il se dit qu'il pourra écrire plus de 10 nombres différents en utilisant à chaque fois les quatre chiffres !



Pourrais-tu trouver plus de dix nombres différents en utilisant ces quatre chiffres (0, 0, 3 et 6) dans chaque nombre ?
Explique comment tu as fait pour trouver ces nombres.

Fiche 14 – Catastrophe pour Monsieur Virgule !

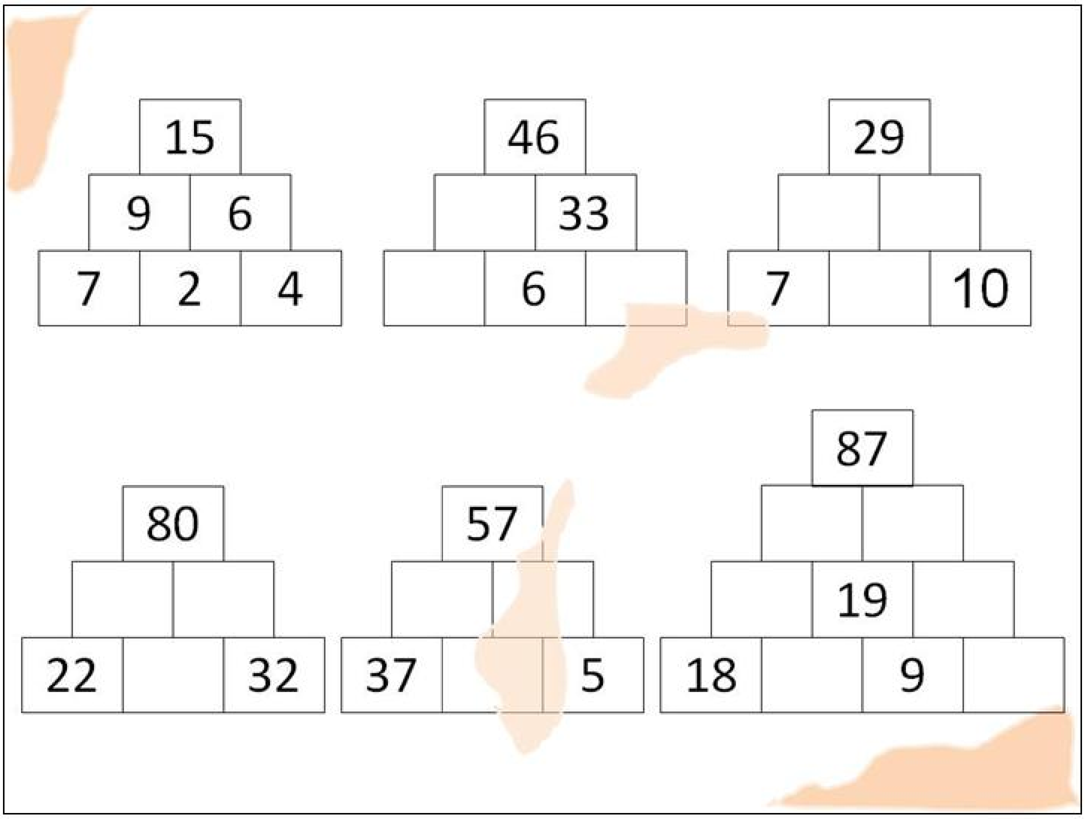
Monsieur Virgule n'était pas bien réveillé ce matin et il a renversé du café sur son ticket de compte.
Pourrais-tu aider Monsieur Virgule à compléter son ticket ?
Explique comment tu as fait.



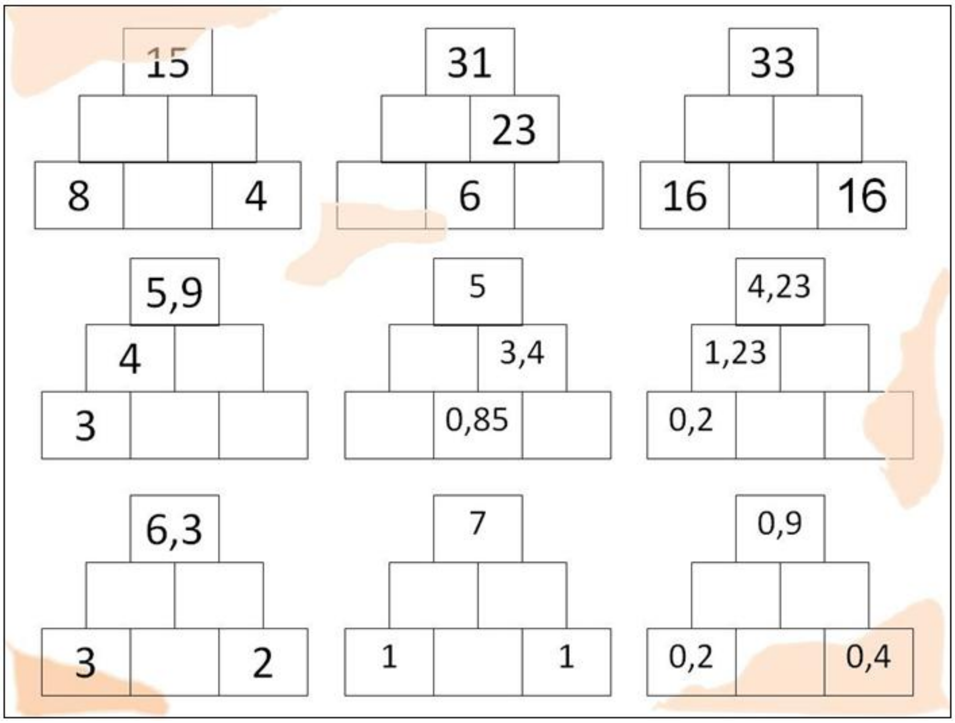
Fiche 15 – Monsieur Virgule ne trouve pas !

Monsieur Virgule a retrouvé un vieux livre suisse de mathématiques. Il a choisi deux pages de problèmes avec des pyramides de nombres. Il a essayé de les compléter mais il n'y arrive pas.

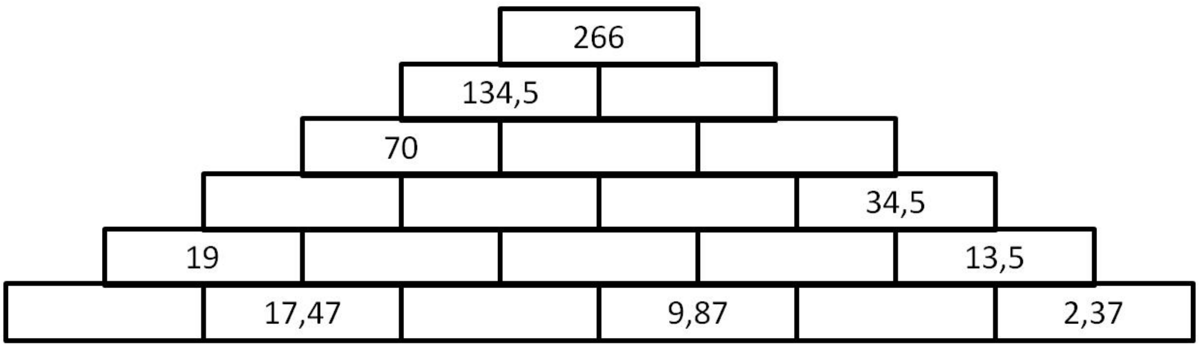
Pourrais-tu aider Monsieur Virgule à résoudre ces problèmes ?



Fiche 15– Monsieur Virgule ne trouve pas !



Monsieur Virgule a enfin compris. merci pour lui.
Il a d'ailleurs préparé lui-même une *super pyramide* qu'il te propose de compléter.
Et puis toi aussi, tu peux en préparer une !



Fiche 15– Monsieur Virgule ne trouve pas !

Si l'on a le temps de poursuivre le voyage. . .

Artaud, M.. (2003). *Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques "à calculatrice" et leur écologie. http ://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001315/en/.* Consulté le 14 mars 2007.

Bkouche, R., Charlot, B. & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.* Paris : Presses Universitaires de France.

Charnay, R. (2006). Quelle culture mathématique commune (ou partagée) au terme de la scolarité obligatoire ? Éléments de réflexion et contribution à un nécessaire débat. *Repères-IREM.* 64. Juillet 2006. Topiques Éditions.

CREM. (1995). *Les mathématiques de la maternelle à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.* Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Del Notaro, L. & Floris, R.. (2006). L'utilisation de la calculatrice dans l'enseignement de la numération à l'école primaire. *Actes du colloque EMF 2006.* Sherbroke : Université de Sherbroke.

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherche en didactique des mathématiques.* 1/1. 77–109.

Grugnetti, L. & Turnau, S. (1989). Rapport du groupe A. In *Rôle et conceptions des programmes de mathématique.* Actes de la 41e Rencontre internationale de la CIEAEM. Bruxelles. Namur : Alfred Warbecq. 484.

Houdé, O. (2006). *10 leçons de psychologie et pédagogie.* Paris : PUF.

Perrin-Glorian, M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions* *didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-sixièmes*. Thèse de doctorat. IREM de Paris. Université de Paris 7.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

Tardif, J. (1997). *Pour un enseignement stratégique, L'apport de la psychologie cognitive*. Montréal : Éditions Logiques.

Trochmé-Fabre, H. (1999). *Réinventer le métier d'apprendre*. Paris : Éditions d'Organisation.

Ce premier fascicule de

Enseigner et apprendre les nombres décimaux

propose une séquence d'activités pour la quatrième primaire. Dans cette séquence, une situation mettant en oeuvre les mesure de longueur et d'aire confronte les élèves à la nécessité d'aller au-delà des nombres naturels et leur permet de découvrir les nombres décimaux.