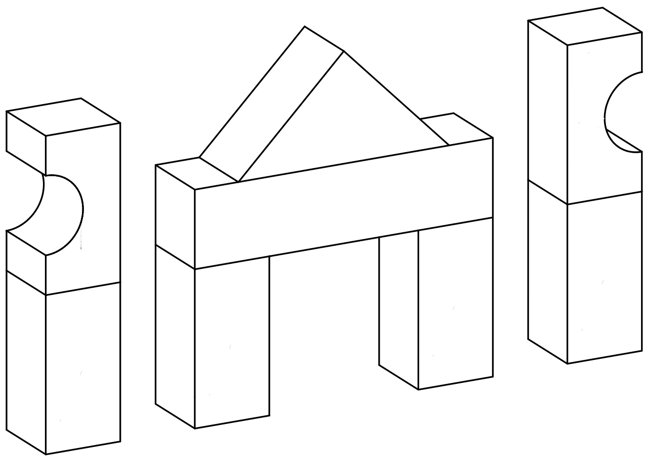
CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

UN ASPECT DE LA GÉOMÉTRIE

DE LA MATERNELLE JUSQU'À DIX-HUIT ANS



CREM a.s.b.l.

CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

Un aspect de la géométrie
de la maternelle jusqu'à dix-huit ans

Cette étude a été réalisée
dans le cadre des conventions de recherche 81, 95 à 98 passées avec le
Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation
de la Communauté française de Belgique.
Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère non confessionnel.
Un poste de chargé de mission a été affecté à temps partiel à cette recherche par le
Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère confessionnel.

Avertissement. – Cette étude devait au départ s'étaler sur trois ans. À la suite d'une décision administrative, elle a duré trois ans et huit mois. Le présent volume présente la partie de la recherche que nous avons pu faire en plus du projet initial, grâce à la prolongation de la période de recherche. Un autre volume, intitulé *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, rend compte de la partie de la recherche correspondant au projet initial.

Le présent volume, consacré essentiellement à des situations-problèmes conçues pour les élèves et commentées pour les enseignants, est divisé en trois parties correspondant aux tranches d'âge de deux et demi à dix ans, de dix à quinze et de quinze à dix-huit. Des feuillets intercalaires de couleur séparent les trois parties.

Ce document est bien entendu destiné à être diffusé auprès du public enseignant. Il le sera sous forme d'imprimé et aussi sur Internet. Avant diffusion, il sera complété par quelques situations-problèmes que nous n'avons pas eu le temps d'y inclure au cours des huit mois de sa composition. *Ces additions serons assurées par le CREM en dehors de tout contrat de recherche.*

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde B-1400-Nivelles
Tél. : 32 67 212527 Fax : 32 67 212202
Juin 1999

CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

UN ASPECT DE LA GÉOMÉTRIE

DE LA MATERNELLE JUSQU'À DIX-HUIT ANS

CREM a.s.b.l.

Préliminaire

La présente étude n'aurait pas été possible sans la collaboration active et attentive de toute une équipe constituée par Michel Ballieu, licencié en mathématiques, Bernard Honclaire, régent, Marie-France Guissard, licenciée en mathématiques, Luc Lismont, docteur en mathématiques, Nicolas Rouche, agrégé de l'enseignement supérieur, Thaïs Sander, institutrice primaire, Françoise Van Dieren, régente, Jacques Van Santvoort, régent et docteur en mathématiques et Marie-Françoise Van Troeye, régente. Partant de son expérience – considérable pour certains – et de ses propres points de vue, chacun a apporté à l'œuvre commune sa part d'idées et de critiques. Le travail a comporté, en grand nombre, des lectures, des expériences en classe, des exposés, des débats, des brouillons.

La responsabilité des chapitres se répartit comme suit. Les chapitres 1 à 4 sont dus principalement à Thaïs Sander, le chapitre 5 à Nicolas Rouche, le chapitre 6 à Thaïs Sander et Luc Lismont. Le chapitre 7 est dû à Françoise Van Dieren avec la collaboration de Luc Lismont, sauf la première section due à Thaïs Sander. Les chapitres 8 à 10 sont dus à Michel Ballieu et Marie-France Guissard. Les parties de l'étude relatives aux logiciels Cabri et Sections sont dues à Bernard Honclaire. Pour l'ensemble de l'étude, la surveillance critique de Bernard Honclaire, Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye et Jacques Van Santvoort a été particulièrement vigilante.

Luc Lismont et Nicolas Rouche ont coordonné l'ensemble du travail.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à toutes les personnes qui nous ont aidés par leurs idées et leurs critiques tout au long de l'élaboration de ce travail. Mentionnons tout particulièrement Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Michel Demal, Thérèse Gilbert, Louis Habran, Christiane Hauchart, Marisa Krysinska, Francis Michel, Guy Noël, Maggy Schneider ainsi que tous les membres des deux comités d'accompagnement, celui du CREM et celui du Ministère.

L'ensemble du texte a été saisi en LaTeX2$_\epsilon$ et les dessins ont été réalisés avec les logiciels Mathematica, Canvas, Corel Draw et Cabri.

Avant-Propos

Construire

Au fil des mois et des années, l'enfant manipule des objets avec une précision croissante : il porte son biberon à ses lèvres, pose un cube sur un autre et puis encore un, dépose une assiette sur la table, dispose parallèlement un couteau et une cuiller, lace ses souliers, construit une maison en briques Lego, reconstruit un puzzle, fait une cocotte en papier, monte une tente, dessine un rectangle, fait passer un cercle par deux points, puis par trois, construit une boîte en carton, un cône en papier, démonte et remonte son vélo, etc. C'est en assemblant ainsi des objets, en les ajustant les uns aux autres, en les emboîtant, ... que l'enfant se familiarise avec les formes et les grandeurs.

Assembler et construire sont des modalités d'une pensée géométrique qui se manifeste d'abord dans l'action. Il s'agit bien d'une pensée, car ces actions comportent des enchaînements que l'enfant maîtrise, adapte, garde en mémoire et peut répéter. Lorsque le langage apparaît, il fait plus qu'accompagner l'action : par son pouvoir d'évocation, il aide à la concevoir et à la corriger en cours de route. Quand les situations se compliquent, il étend son rôle jusqu'à devenir l'instrument du raisonnement. Cette évolution aboutit aux théorèmes qui fondent les constructions géométriques.

On le voit, le verbe *construire* désigne un thème important dans l'apprentissage de la géométrie de la prime enfance à l'âge adulte.

Représenter

On n'a pas de vue d'ensemble d'une montagne, d'un quartier de ville, d'un bâtiment, d'un navire. Mais on peut recourir à une maquette ou un modèle réduit pour mieux appréhender l'ensemble. On ne voit pas du tout une maille cristalline, une molécule. C'est pourquoi on crée de ces objets minuscules des modèles fortement agrandis.

On voit directement un objet plan de dimensions modérées tenu devant les yeux en position frontale. Bien entendu, s'il est opaque, on n'en voit qu'une face. On ne saisit jamais qu'en partie la forme d'un solide non plan opaque. Pour l'imaginer mieux, on le projette en plan dans diverses positions. Chaque projection est partielle et ambiguë, plusieurs projections se complètent. On fait des plans d'un objet existant pour le voir mieux, et d'un objet en projet pour montrer comment le construire.

Beaucoup d'objets et d'événements sont éphémères. On en conserve le souvenir sous forme de photographies ou autres représentations planes. Beaucoup d'objets sont intransportables, mais on en transmet des représentations planes sur du papier ou des écrans.

Ainsi les hommes se donnent, de beaucoup de choses qu'ils perçoivent malaisément, des modèles mieux à portée de leurs organes sensoriels. En particulier l'activité humaine s'appuie sur un va-et-vient fréquent entre les objets et leurs représentations, entre l'espace et le plan.

La théorie de la similitude fonde la conception des modèles réduits ou agrandis. La théorie des projections parallèles ou centrales donne la clef des représentations planes les plus communes.

On le voit, le verbe *représenter* désigne lui aussi un thème important de l'apprentissage de la géométrie.

Un parcours dans la géométrie

Nous proposons, sur le double thème de construire et représenter, des situations-problèmes pouvant servir à apprendre la géométrie, depuis ses racines perceptives et motrices jusqu'à son accomplissement théorique.

Dans le système scolaire, les situations-problèmes sont dorénavant présentées comme un moyen privilégié d'apprentissage. Elles consistent en questions auxquelles les élèves ne sauraient répondre complètement en s'appuyant seulement sur ce qu'ils savent. Des questions par conséquent qui les obligent à élaborer – avec l'aide indispensable du professeur – des éléments de théorie nouveaux pour eux. La pratique des situations-problèmes, qui n'est pas une panacée et ne devrait pas exclure d'autres formes d'enseignement, répond à une exigence de sens. En effet, tout savoir répond à des questions, aide à comprendre, et donc il ne faut pas occulter les questions.

Les situations que nous avons choisies traitent de nombreuses matières de géométrie, mais ne couvrent pas tout le programme. Elles n'épuisent pas non plus tout ce qu'on pourrait regrouper sous les deux thèmes de construire et représenter. Il ne s'agit donc ici ni d'un cours, ni d'un manuel, mais plutôt de matériaux proposés aux enseignants qui sont à la recherche de questions significatives pour leurs élèves... mais aussi et d'abord pour eux-mêmes. Chaque situation-problème est accompagnée de multiples commentaires.

Les trois volumes couvrent des tranches d'âges allant approximativement de deux ans et demi jusqu'à 10 ans, puis de 10 à 15 ans, et enfin de 15 à 18 ans. Bien que chaque volume puisse être lu indépendamment des deux autres, ils forment un tout et l'on s'est efforcé de montrer la continuité des matières traitées d'un bout à l'autre. Dans l'enseignement mathématique, on construit toujours sur des acquis antérieurs. Or une foule d'acquis de base sont fondamentaux. Mais ils sont tellement élémentaires et évidents pour les adultes que ceux-ci auraient tendance à oublier ce qu'ils sont pour les enfants : des étapes essentielles et parfois difficiles. Notre espoir est que d'assez nombreux enseignants, à quelque niveau qu'ils se trouvent, parcourent les trois volumes : ils réaliseront mieux ainsi d'où viennent et vers où vont leurs élèves. Ils comprendront mieux le cheminement passionnant qui va des balbutiements de l'enfance à la science constituée.

Esquissons maintenant le contenu des trois volumes.

De deux ans et demi à 10 ans. – Nous avons choisi de partir d'emblée « dans l'espace », en proposant de construire des solides. On peut en former dans la masse, par exemple en pâte à modeler. On peut aussi en construire en assemblant des faces polygonales, ce qui provoque le va-et-vient entre les développements et les solides. On peut enfin assembler seulement des tiges pour construire des squelettes de solides. Ces trois modalités requièrent des manœuvres distinctes et attirent l'attention sur des propriétés variées des solides.

Dans cette tranche d'âge, on peut dessiner des objets « de face et de profil », ce qui s'approche des projections orthogonales. On peut aussi dessiner des cubes et des assemblages de cubes sur du papier couvert d'un réseau régulier de points. On peut aussi jouer avec des ombres et enfin reconnaître, sans les analyser techniquement, des représentations diverses d'objets divers telles que des perspectives cavalières, des photographies, etc.

De 10 à 15 ans. – Le modelage d'objets géométriques simples ainsi que la fabrication de solides en papier, en carton et en tiges sont approfondis dans la tranche d'âge de 10 à 15 ans. Les constructions deviennent plus précises, elles entraînent des mises au point sur les grandeurs (problèmes d'échelles, de poids, d'aires et de volumes).

Les projections orthogonales d'objets simples nous ont paru possibles dès la fin de l'école primaire. Nous proposons au passage quelques représentations d'assemblages de cubes.

D'autre part, vers 14 ans, nous introduisons les développements comparés de pyramides et de cônes.

Les règles de la perspective parallèle – relatives à la conservation du parallélisme et des rapports – sont d'abord observées (conjecturées) sur des dessins, puis mises en œuvre pour produire des représentations. Leur étude s'imbrique avec celle de la géométrie plane. Le niveau des problèmes envisagés demande d'enrichir et préciser le langage utilisé jusque-là. D'autre part, apprendre ces règles de perspective ainsi que le va-et-vient entre les objets et leurs représentations, reconnaître et maîtriser les inévitables ambiguïtés de celles-ci, nous a paru déjà assez difficile. Nous avons remis à une étape ultérieure, vers quinze ans, l'interprétation des perspectives parallèles comme projections parallèles et la possibilité de les engendrer par des ombres au soleil.

De 15 à 18 ans. – L'étude des ombres au soleil fournit l'interprétation de la perspective parallèle comme projection parallèle. Cette étude, qui conduit aux propriétés d'incidence et de parallélisme dans l'espace, recouvre une partie substantielle du programme de géométrie de l'espace de quatrième année.

Les ombres à la lampe donnent l'occasion d'étudier les projections centrales. Celles-ci s'approfondissent dans une étude élémentaire de la perspective à point de fuite. Dans ce cadre, on aborde les sections coniques, y compris dans leur présentation analytique. Ces derniers développements sont destinés aux cours à beaucoup d'heures de mathématiques.

Quelques principes qui nous ont inspirés

Le présent ouvrage est inspiré sur le plan épistémologique par l'étude du CREM intitulée *Formes et mouvements*[1], dans laquelle nous avons tenté de dégager les matériaux et les moyens de l'apprentissage géométrique de la maternelle à l'âge adulte.

Une première observation est que le savoir géométrique s'enracine dans des perceptions et des activités de la première enfance, qui ne s'expriment sur le moment dans aucune théorie. La chose est évidente pour les enfants qui ne savent pas encore ou savent à peine parler. L'erreur serait de croire que dès la première primaire l'enseignement de la géométrie débouche nécessairement sur des éléments théoriques explicités. Une foule de gestes et de mouvements imprimés à des objets, une foule de manipulations, de constructions et de dessins, accompagnés, commandés, décrits dans un langage non théorique constituent progressivement l'*expérience spatiale* qui sera théorisée un jour.

L'intervention du langage – au début dans un registre non théorique, on vient de le voir –, est cruciale. C'est par le langage, venant compléter les représentations, les symboles et les signes, que les notions s'installent dans la pensée, et que se prépare la construction ultérieure d'une théorie. Il importe donc de favoriser les fonctions naturelles du langage dans l'action[2].

En ce qui concerne la construction de la théorie, nous nous sommes efforcés d'une part de proposer des situations-problèmes appropriées à chaque âge, ni trop faciles, ni trop difficiles, mais aussi de borner chaque fois la théorie à ce que la situation traitée requiert. En d'autres termes, nous pensons que pour passer à un niveau théorique plus difficile, il faut proposer aux élèves des questions plus difficiles, dont les solutions requièrent ce supplément de théorie.

Nous pensons avoir clairement montré dans *Formes et mouvements* que les régularités qui constituent l'objet d'étude de la géométrie sont la source d'un sentiment esthétique élémentaire mais vrai. Nous avons fait de notre mieux pour que la beauté des figures, des symétries, des patterns traverse notre texte, comme une source de motivation et d'inspiration.

[1] CREM [1999].

[2] Sur le passage de l'acte à la pensée et au langage, voir surtout, outre *Formes et mouvements*, H. Wallon [1970], et L. Vygotski [1997].

Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes proposées dans ce recueil ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables. Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera.

Chaque situation est conçue le plus souvent pour une ou deux heures de cours, souvent moins d'une heure pour les classes maternelles et primaires.

Ces situations sont présentées selon un plan uniforme[3] comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description en une ligne ou deux de l'activité proposée aux élèves.

Enjeux. – Matières couvertes et compétences visées. Références aux Programmes, aux Socles de compétences et aux Compétences terminales.

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Écho d'une ou plusieurs classes. – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

Prolongements possibles. – Nouvelles situations-problèmes plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place l'activité occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires. – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

[3] Ce plan est inspiré par E. C. Wittmann et G. Müller [1990 et 1994].

Première partie

Construire et représenter

Un aspect de la géométrie

de 2 ans et demi à 10 ans

Remerciements

Sauf mention contraire, les activités présentées dans ce recueil ont été expérimentées par Thaïs Sander à l'école « Les Tournesols » à Anderlecht. Nous remercions les instituteurs et institutrices qui nous ont accueillis un jour par semaine dans leurs classes : en 1$^{\text{ère}}$ maternelle Muriel Thirisayt ; en 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ maternelles, Evelyne Pouillard et Lara Berger ainsi que Belinda Aguilera ; en 1$^{\text{ère}}$ et 2$^{\text{e}}$ primaires, Michelle Wright et Michaël Chevalet ; en 3$^{\text{e}}$ et 4$^{\text{e}}$ primaires, Nancy Rooselear (directrice de l'établissement).

Pour l'activité *Construire un assemblage d'après des photos* (page 29), merci à Monique Meuret, institutrice en 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ maternelles à l'Institut Notre-Dame à Anderlecht.

Pour l'activité *Les assemblages de quatre cubes* (page 45), nous remercions Michelle Brizard et Véronique Piscaglia, institutrices en 1$^{\text{ère}}$ et 2$^{\text{e}}$ primaires à « l'Autre Ecole » à Auderghem.

Pour leur participation, merci à Rosette Claessens et Carole Beck, institutrices en 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ maternelles à l'école communale 16bis de Molenbeek, ainsi qu'à Sylvie Denis, institutrice maternelle dans les écoles communales de Court-Saint-Étienne.

1

Activités en première maternelle

1 Les bases du modelage

De quoi s'agit-il ?

Apprendre à modeler une boule et un colombin[1].

Enjeux

Cette activité nécessite une coordination des deux mains, une certaine souplesse dans les doigts et développe ainsi la motricité fine. Elle permet d'expérimenter l'invariance de la masse, les transformations du volume et les résultats obtenus par des gestes tels que rouler, taper, assembler, etc. La table est un support plan, utile pour créer des formes régulières. Modeler une boule et un colombin sera la base de beaucoup de réalisations ultérieures. Les enfants n'ont pas tous la même expérience. Certains découvrent le modelage, alors que d'autres sont déjà capables de modeler une forme précise. On pourra éventuellement proposer à ces derniers les activités présentées ci-après pour les 2e et 3e maternelles.

Cette activité est à faire souvent durant l'année, pour que chaque enfant améliore ses résultats et atteigne les objectifs visés.

De quoi a-t-on besoin ?

De la pâte à modeler au choix. L'annexe 1 à la page 68 explique les avantages et inconvénients des différents types de pâte.

Comment s'y prendre ?

Un thème à explorer, par exemple les fruits et légumes, apporte un support concret. Tout d'abord, les enfants découvrent par le toucher des fruits et des légumes cachés dans un sac. On décrit ensemble leur forme (rond, plat, long, qui roule, ...), leur couleur, et on compare leur grandeur (plus petit que, plus gros que, ...). Ensuite, après avoir découvert leur odeur, on les goûte et on caractérise leur saveur (sucré, amer, sûr, ...). Enfin, les enfants réalisent des modelages. Les fruits et légumes de forme oblongue (concombre, banane, carotte, aubergine, ...) sont des modèles pour réaliser des colombins et ceux de forme arrondie (mangue, pamplemousse, tomate, litchies, ...) pour réaliser des boules. On peut montrer aux enfants les gestes pour y parvenir. Pour modeler un colombin, on peut se servir de la table (c'est le plus commode) et de ses deux mains pour imprimer un mouvement uniforme de l'avant vers l'arrière. Quelle surprise lorsque le

[1] On appelle ainsi un rouleau de pâte à modeler.

colombin s'allonge ! La boule nécessite des mouvements en cercle des deux mains, ou d'une main si la boule est sur la table.
D'autres thèmes se prêtent aussi bien à ce genre de découvertes, par exemple les serpents, vers de terre et escargots (enrouler un colombin en spirale), les bonshommes (deux boules pour la tête et le corps et des colombins pour les bras et les jambes). Mais pour certains enfants, ces modelages sont plus difficiles, puisqu'ils demandent d'enchaîner des actions (on n'en reste pas simplement à une boule ou un colombin isolés).

Échos d'une classe

Le maniement de la pâte s'est avéré difficile au départ. Cette difficulté est utile car elle amène les enfants à développer leur motricité fine et la coordination de leurs mouvements dans l'espace. En raison de leur jeune âge, la plupart des enfants n'ont pas été capables de réaliser des compositions structurées. Bien souvent, ils ont émietté la pâte et l'ont collée de manière dispersée sur la table, ou ils ont assemblé de petits morceaux avec une pression insuffisante pour arriver à former une seule masse. Modeler boules et colombins en se servant des deux mains et/ou du support de la table les a conduits à prendre conscience de l'objet qui se transforme au gré des gestes imprimés.

Prolongements possibles

On propose aux enfants des modèles plus élaborés (bonshommes, arbres, etc) qui demandent d'assembler plusieurs parties. On insiste pour qu'ils les construisent dans l'espace et pas uniquement à plat sur la table.

Les modelages prennent un sens nouveau lorsqu'on les utilise dans d'autres activités comme des jeux de dénombrement, des partages, des réalisations de maquettes, etc.

Vers où cela va-t-il ?

Parmi toutes les notions qui sont en germe dans cette activité, relevons les plus apparentes : la conservation du volume d'une quantité de matière (incompressible) que l'on déforme ; les formes cylindrique et sphérique ; le disque (obtenu en applatissant une boule) ; le plan et le fait que deux plans s'ajustent exactement l'un sur l'autre.

2 Les ombres

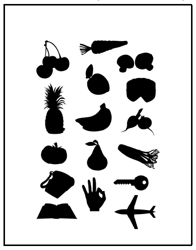
De quoi s'agit-il ?

Reconnaître un objet d'après son ombre ou sa silhouette .

Enjeux

La reconnaissance d'un dessin d'objet est une première confrontation avec les représentations géométriques . En effet, la distinction des lignes courbes et rectilignes, la structure même de l'objet, permettent de le reconnaître (parfois aussi les couleurs si elles sont présentes). Ce sont en quelque sorte des indices qui conduisent à associer un objet à sa représentation. Ainsi, à un niveau élémentaire, le jeune enfant qui dispose du dessin d'une tasse et doit choisir l'objet représenté entre une tasse réelle et un bol, interprète le dessin donné et fait des liens avec la morphologie de l'objet correspondant. Il en va de même avec la silhouette ou l'ombre d'un objet, bien que la stylisation du dessin ainsi que l'absence de détails rendent la tâche plus difficile. La forme est plus abstraite, les droites et les courbes sont plus prégnantes. L'orientation intervient dans la reconnaissance de certains objets. En effet, il arrive que l'interprétation d'une ombre change si on l'incline ou si on en inverse le dessus et le dessous. Ainsi, l'identification des ombres d'objets stimule l'observation des enfants, éveille leur esprit logique, les amène à émettre des hypothèses en comparant des choses connues (*c'est comme ...*), à verbaliser des formes (*c'est droit, c'est rond*).

Fiche 1 (page 75)



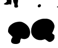
Compétences. *– Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.*

De quoi a-t-on besoin ?

– Des dessins unicolores d'objets de la vie courante (fiche 1 à la page 75) ou des livres[2] destinés aux tout petits, qui présentent de beaux dessins contrastés en blanc sur fond noir ou inversement ;
– des fiches individuelles (fiches 2 et 3, pages 76 et 77) ;
– des pochoirs[3] ou des gabarits à contourner ;
– du papier noir ;
– des pastels ou des craies ;
– des ciseaux et du matériel de picotage.

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, on raconte une histoire aux enfants, en remplaçant certains mots par des silhouettes qu'ils doivent identifier. Voici un exemple.

« Ce matin,  *part au marché. Mamy ferme bien sa porte à*  *. En chemin, elle voit un gros*  *dans le ciel. Mais, elle ne traîne pas, car il lui faut des légumes pour la soupe. Au marché, il y a beaucoup de*  *. Elle trouve des*  *bien rouges, du*  *et des*  *. Les*  *ont l'air frais. Grand-mère les achète et demande aussi au marchand un*  *, deux*  *et quatre*  *. Dès son retour à la maison, le*  *sonne. C'est Papy qui va bientôt rentrer. Grand-mère veut lui faire une surprise pour son anniversaire. Elle prend son*  *de recettes et prépare un bon repas. Le dessert sera un délicieux*  *aux*  *. »*

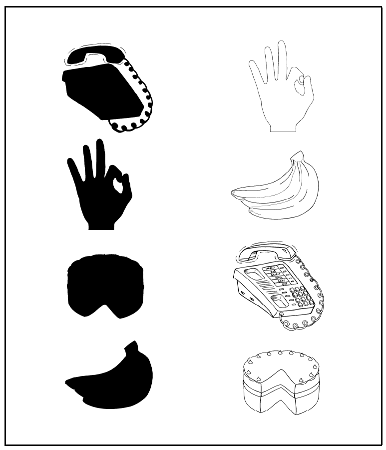
Pratiquement, l'enseignant présente le texte en grand sur une affiche et le lit ; ou encore il raconte l'histoire en montrant un par un les dessins agrandis sur des fiches.

[2] T. Hoban [1993], [1994] et [1996].
[3] On trouve d'intéressants pochoirs en carton qui, une fois détachés de leur support, permettent de contourner l'intérieur d'une forme vide ou l'extérieur d'une forme pleine. Par exemple, M. Boutan [1996].

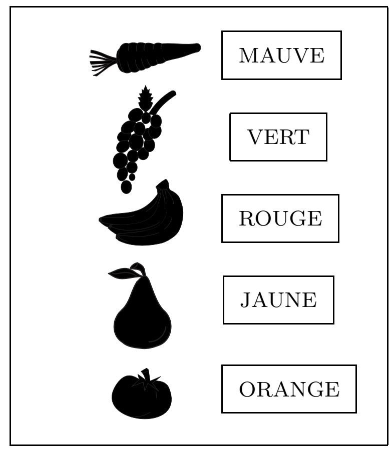
Une variante de l'activité consiste à montrer des silhouettes aux enfants et à leur faire trouver l'objet réel au sein d'un lot.

Ensuite, on donne des gabarits simples. Les enfants les contournent au pastel sur du papier noir et découpent ou picotent le contour pour obtenir des silhouettes figurant des ombres. Enfin, on peut proposer des exercices individuels . Par exemple, associer une ombre et un dessin plus détaillé (en les entourant d'une couleur par paire ou en les reliant), comme le montre la fiche 2 à la page 76. Un autre jeu est d'associer une couleur à chaque ombre. Par exemple relier l'ombre de la banane à la couleur jaune (voir fiche 3 à la page 77 à colorier à l'avance par l'enseignant).

Fiche 2 (page 76)



Fiche 3 (page 77)



Prolongements possibles

On propose des jeux d'encastrement traditionnels (entres autres, les jeux *OD-ED*, voir la section 8 de l'annexe 1 à la page 72) qui permettent également à l'enfant d'associer une forme, un dessin à son contour.

Il est intéressant de profiter du soleil pour observer son ombre. Ce sujet intrigue beaucoup les enfants. On peut se questionner sur ce qui se passe quand on bouge, essayer de marcher sur son ombre ou celle de son voisin, etc. Contourner son ombre sur un grand papier.

Vers où cela va-t-il ?

Ce jeu de va-et-vient entre les formes planes et des objets à trois dimensions, facilité ici par le caractère figuratif des objets, se développe plus tard vers des objets abstraits et des indices de reconnaissance de nature de plus en plus théorique. Les ombres seront rattachées plus tard à l'idée de projection.

Les ombres varient avec l'orientation des objets : cette observation prépare entres autres à la reconnaissance et la coordination des trois projections orthogonales classiques d'un objet.

3 La lecture d'une photo

De quoi s'agit-il ?

L'enseignant photographie les enfants lorsqu'ils jouent avec de grands blocs et des caisses. Chaque enfant apprend à imiter une position observée sur une des photos.

En équipe, les enfants réalisent une tour de blocs d'après une photo.

Enjeux

La photo est une image en deux dimensions qui fige une situation parfois dynamique en trois dimensions. Il s'agit de faire le lien entre les deux, de repérer les indices permettant de reproduire la situation. L'enfant apprend à se situer par rapport à un objet en respectant la photo.

Il est aussi amené à organiser les blocs pour réaliser une construction donnée, ce qui prépare à la lecture de schémas tels que les dessins en perspective ou les projections orthogonales.

Comme lors de tout jeu psychomoteur, utiliser de grands blocs ou des caisses favorise la prise de conscience de l'espace.

Pour cette activité nous avons choisi des photos de préférence à des dessins géométriques, parce que les photos sont plus faciles à interpréter. Elles sont plus réalistes que les dessins en perspective. En effet, on y voit des effets d'ombre et de lumière, on y distingue la texture des matériaux et les objets y sont souvent présentés dans un contexte.

De plus, les enfants aiment se reconnaître sur les photos, ce qui stimule l'observation.

Compétences. – *Se situer et situer des objets. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dénombrer. Organiser selon un critère.*

De quoi a-t-on besoin ?

– De grands blocs en mousse et des caisses en carton ;

– un appareil photographique ;

– un local spacieux.

Comment s'y prendre ?

L'activité se déroule en plusieurs séances. Durant la première, les enfants jouent librement avec le matériel. Les blocs en mousse peuvent avoir des formes et des couleurs variées, ce qui attire les enfants. Les caisses en carton offrent l'avantage qu'on peut entrer dedans.

L'enseignant demande de ne jouer pendant un moment qu'avec une seule caisse ou un seul bloc. Il photographie quelques enfants, à qui il demande de montrer ce qu'on peut inventer comme jeu avec un bloc.

Les enfants sont ensuite invités à s'associer pour réaliser des tours les plus hautes possibles. L'enseignant prend une photo de chaque construction, en veillant à cadrer pour qu'elle apparaisse en entier sur la photo.

Lors de la deuxième séance, on affiche au mur les photos des enfants seuls avec leur bloc. On se remémore les situations et l'envie est grande de reprendre les blocs. Chacun est invité à choisir une photo, à retrouver le bloc représenté ou la caisse, et à se mettre dans la position que montre le cliché. L'enseignant circule et suggère si nécessaire de corriger la position. Pour cela, il questionne l'enfant concerné à propos de ce qu'il voit sur la photo, sur ce que semble faire l'enfant photographié et comment il s'y prend.

Ensuite l'enseignant propose de regarder les photos des constructions collectives. Après un moment de parole, les enfants forment des équipes et reçoivent une photo avec une situation qu'ils doivent reproduire avec les blocs. L'enseignant passe dans chaque groupe, discute avec les enfants de leur réalisation et d'éventuelles corrections.

Échos d'une classe

Des activités analogues à celles-ci sont proposées dans un ouvrage[4] destiné à la formation des enseignants. On y trouve les récits d'expériences en classe.

Prolongements possibles

Réaliser des constructions avec de petits blocs en bois. Toujours librement d'abord, puis en se référant à un dessin en perspective (figure 1) ou une projection orthogonale de face (figure 2). Les images proposées présentent des constructions de façades, c'est-à-dire sans profondeur.

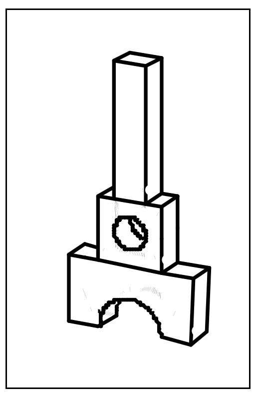


Fig. 1

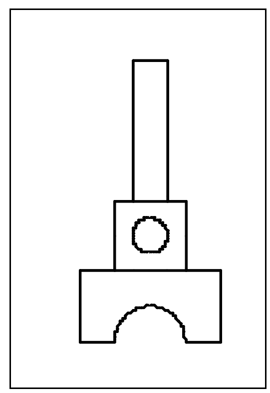


Fig. 2

Vers où cela va-t-il ?

Faire correspondre la photo d'un assemblage d'objets à l'assemblage réel développe la vision et l'orientation dans l'espace, sur laquelle s'appuie l'apprentissage ultérieur de la géométrie.

L'utilisation de blocs de forme géométrique prépare les enfants à argumenter sur les formes plutôt que sur des indices plus familiers.

La construction de tours prépare l'addition et la comparaison des grandeurs.

[4] C. Dubois *et al.* [1993].

2

Activités en deuxième et troisième maternelles

1 Le modelage d'objets

De quoi s'agit-il ?

Raconter une histoire aux enfants et leur proposer de modeler un sujet choisi librement en rapport avec l'histoire.

Enjeux

L'objectif principal est ici, comme en première maternelle, d'amener les enfants à sortir du plan pour occuper les trois dimensions de l'espace. Le modelage requiert des gestes précis tels que rouler, taper, plier, assembler des morceaux, ... On incite les enfants qui ont tendance à travailler à plat sur la table, à donner du volume à leur objet. Ils expérimentent également l'équilibre de l'objet, et lui donnent une orientation en situant le haut, le bas, l'avant, l'arrière, la gauche, la droite (ces deux dernières notions ne sont pas encore acquises).

D'autres objectifs sont en jeu tels que l'exploration élémentaire des grandeurs et des rapports (grand, petit, long, mince, ...), les dénombrements (combien de...), les correspondances terme à terme ainsi que la coordination entre les yeux et les mains.

Compétences. *– Construire des solides avec du matériel varié. Dénombrer. Organiser selon un critère. Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer.*

De quoi a-t-on besoin ?

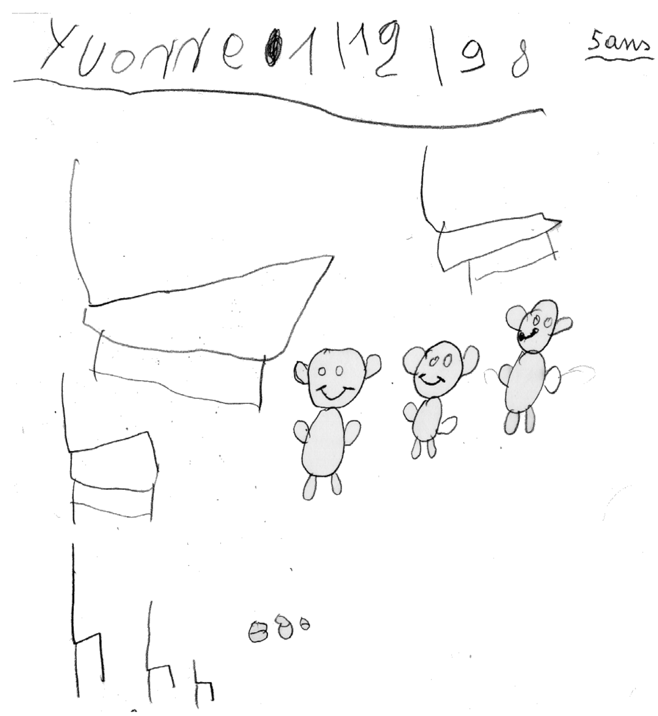
De la pâte à modeler au choix (voir annexe 1 à la page 68).

Comment s'y prendre ?

On lit un conte, par exemple le livre « Boucle d'Or et les trois ours[1] » qui met en scène un grand ours (le papa), un ours moyen (la maman) et un petit ours (l'enfant), ainsi que des objets (trois lits, trois bols, trois cuillères, trois chaises) qui correspondent à leur grandeur. On discute de l'histoire, du lieu, des personnages. On met l'accent sur les trois grandeurs qui interviennent dans l'histoire, à savoir *grand, moyen et petit*, et on

[1] Ce conte classique est disponible en de nombreuses éditions, notamment Roederer, Charlotte (illustratrice) [1997].

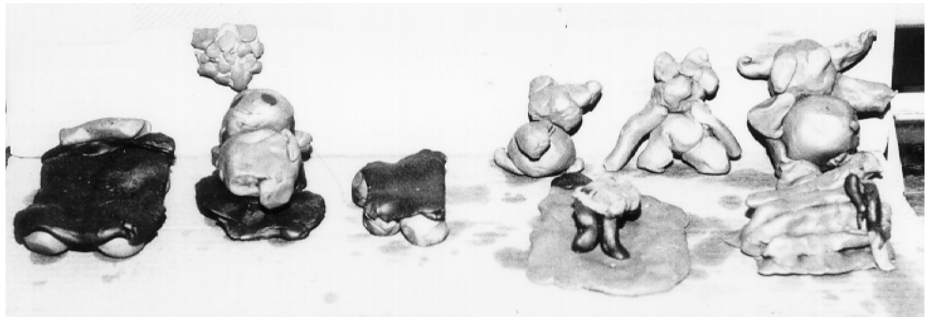
amène les enfants à faire des comparaisons et des correspondances. Par exemple, le papa ours est plus grand que la maman ours. Quelle taille a le bébé ours ? Pourquoi y a-t-il un grand bol, un bol moyen et un petit bol ? Qu'est-ce qui dans l'histoire était trop chaud, trop froid, très grand, tout petit, trop haut, trop dur, trop mou, ou juste comme il faut ? Qui a une grosse voix ? Comment est la voix du petit ours ? Pourquoi y a-t-il trois lits ? ... On peut aussi imiter les trois voix et mimer les trois ours, prendre les trois tailles différentes.



Ensuite, on propose aux enfants de modeler quelque chose en rapport avec l'histoire. On les laisse faire en veillant à leur donner suffisamment de pâte. Pendant qu'ils travaillent, on les observe et on les questionne individuellement. Qu'est-ce que tu as choisi de modeler ? Pourquoi aplatis-tu toute ta pâte sur la table ? Ton ours ne pourrait-il pas tenir debout sur ses pieds, la tête vers le plafond ? Comment faire pour qu'il tienne bien ? Ton ours n'a-t-il qu'une patte ? ... Il n'est pas nécessaire d'intervenir systématiquement chez tous les enfants, mais une verbalisation aide certains à identifier ce qu'ils veulent réaliser et à voir comment ils peuvent s'y prendre. La liberté de création par le modelage doit être respectée, même si des incohérences apparaissent. Par cette activité, l'enfant apprend à donner du volume, plutôt qu'à respecter des proportions, par exemple entre la tête et le corps. Beaucoup d'affectivité va d'ailleurs intervenir. C'est l'occasion d'observer les enfants sans intervenir dans leurs choix. Certains se projettent dans leur modelage, d'autres extrapolent et sortent du cadre strict de l'histoire.

À la fin de l'activité, on peut essayer de reconstituer l'histoire avec les éléments modelés, de les disposer sur un carton, de les compléter en modelant les éléments manquants, ...

Échos d'une classe



À gauche les trois lits, Boucle d'Or se repose dans celui du milieu.
À droite les trois ours, le petit, le moyen et le grand.

Les enfants ont bien saisi les différences de grandeurs entre les ours et entre leurs objets respectifs (bols, chaises, ...). Ils ont pris plaisir à imiter les trois ours. Les matériaux choisis pour les modelages étaient de la plasticine et de la pâte *Darwi*. Les enfants ont commencé en faisant une boule, parfois avec difficulté. Certains ont réalisé des colombins, d'autres ont aplati la plasticine en l'écrasant sur la table avec leurs doigts ou en tapant du poing. Ceux qui avaient fait une boule lui ont ajouté des oreilles ou une autre boule pour le corps, et ainsi sont apparus les premiers ours. Beaucoup d'enfants ont travaillé à plat sur la table, ne trouvant pas l'équilibre nécessaire, surtout lorsqu'ils ajoutaient des pattes aux ours.

Les plus jeunes enfants ont souvent modelé un seul ours, ressemblant au « bonhomme têtard ». Les enfants plus âgés ont modelé les trois ours avec des différences de grandeurs visibles surtout entre le petit et les deux autres. Quelques enfants ont modelé les arbres de la forêt de trois grandeurs différentes. Un seul enfant est resté en dehors du sujet, modelant un serpent et un avion. Les différentes couleurs de plasticine ont été utilisées indistinctement.

Une enfant de cinq ans a voulu modeler la maison des ours. Pour cela, elle a tracé le dessin d'une maison sur une plaque de plasticine. À la question de savoir si on pouvait entrer dans sa maison, elle a répondu que non, puisqu'il n'y avait pas de murs. L'enseignante lui a proposé d'observer les murs de la classe : l'enfant a dit que les murs étaient plats, qu'ils s'attachaient et elle en a dénombré douze, comptant chaque pan de mur séparé par une porte ou une fenêtre ! Sans la contredire, l'enseignante lui a simplement dit de faire « comme pour les murs de la classe ». L'enfant a aplati trois morceaux de plasticine (dont celui de sa précédente maison) et les a assemblés verticalement sur la table, selon une base triangulaire. Une quatrième plaquette a servi de toit et elle a ajouté une cheminée. Son petit voisin, très impressionné par le résultat, s'en est inspiré. Sa maison comportait quatre murs déposés verticalement sur la table. Il a ajouté plusieurs morceaux de plasticine à un mur pour qu'il ait la même longueur que le mur opposé et pour obtenir une base intentionnellement rectangulaire. Il a recouvert la moitié de sa maison d'un toit plat.

Prolongements possibles

On peut proposer des activités telles que :

– dessiner l'histoire (représentation plane) ;

– la faire raconter par les enfants en utilisant les termes appropriés et en s'aidant des modelages ;

– rassembler les éléments du décor (une vraie petite chaise, une vraie chaise moyenne , ...) pour jouer les rôles des personnages ;

– ordonner chronologiquement des illustrations de l'histoire (structuration spatio-temporelle) ;

– sérier des objets en fonction de leur grandeur : les hauteurs croissantes ou décroissantes, les comparaisons de poids, etc.

Vers où cela va-t-il ?

Comme lors des modelages en première maternelle (voir activité 1 à la page 11), on voit se préparer ici la conservation du volume et la connaissance des formes cylindrique, sphérique et circulaire.

La comparaison des grandeurs prépare à la comparaison des nombres (pour le moment où les mesures représenteront des grandeurs).

Expérimenter l'équilibre d'une figurine dressée renvoie pour plus tard aux notions, à la fois physiques et mathématiques, d'équilibre et de stabilité de l'équilibre.

2 Les ombres

2.1 Faire des ombres à la lampe

De quoi s'agit-il ?

Reconnaître les ombres de divers objets projetés par une lampe sur un drap. Créer des silhouettes pour faire des ombres chinoises.

Enjeux

L'ombre est un type de représentation plane des objets de l'espace. Reconnaître un objet caché derrière un drap, rien que par son ombre, amène l'enfant à se référer uniquement à une image plane sans couleur ni profondeur. Seuls certains détails et la forme globale permettent de reconnaître l'objet.

À l'inverse, créer une figure plane qui sera projetée pour représenter un objet en trois dimensions, demande à l'enfant de ne dessiner qu'un contour, le plus évocateur possible. Selon le point de vue, l'objet est plus ou moins reconnaissable : certains indices sont nécessaires pour le retrouver sans ambiguïté.

Au passage, on fait le lien entre la grandeur de l'ombre et la position de l'objet par rapport à la lampe. On utilise un vocabulaire en rapport avec les grandeurs et les positions (grand, petit, loin, près, long, plat, ...).

Compétences. – *Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement. Construire des figures avec du matériel varié. Reconnaître et construire des agrandissement et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

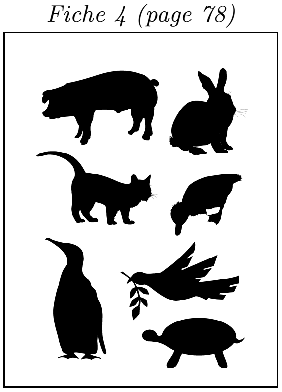
Le matériel et son installation sont décrit dans la section 6 de l'annexe 1 à la page 69.

- Un drap blanc tendu ;
- une source lumineuse ;
- des objets divers : petites figurines d'animaux, peluches, poupées, ustensiles de cuisines, fruits et légumes, objets de la classe, ... ;
- des gabarits noirs prédécoupés (fiche 4 à la page 78 et fiche 5 à la page 79) ;
- du papier cartonné noir ;
- des pastels ou des craies ;
- des ciseaux et du matériel de picotage ;
- des pailles ou des piques à brochettes ;
- des fiches de travail individuel (fiches 6 à 8, pages 80 à 82).

Comment s'y prendre ?

L'activité peut se dérouler en trois parties. Tout d'abord, les enfants sont spectateurs et l'enseignant présente derrière le drap (sous forme de petite histoire s'il le veut) différents objets et figurines d'animaux que les enfants sont invités à reconnaître. Les enfants constatent que l'ombre d'un même objet peut être plus ou moins grande. Plus l'objet est près du drap, plus son ombre est nette, ce qui facilite sa reconnaissance. L'enseignant peut jouer avec les différentes positions pour éveiller la curiosité et rendre cette reconnaissance plus difficile. Par exemple, si l'on présente une bouteille à la verticale, son ombre permet de l'identifier. Par contre, si l'on place le fond de la bouteille devant le drap, l'ombre est un cercle qui ne permet pas d'identifier l'objet.

Fiche 4 (page 78)



Ensuite, l'enseignant fait asseoir cinq enfants derrière le drap, en silence, et il désigne à tour de rôle celui qui peut se lever. L'enfant vient près du drap, se montre de face, puis de profil, et l'enseignant rectifie sa position pour que l'on voit nettement le contour de son visage. Les enfants spectateurs doivent deviner à qui appartient l'ombre qu'ils voient.

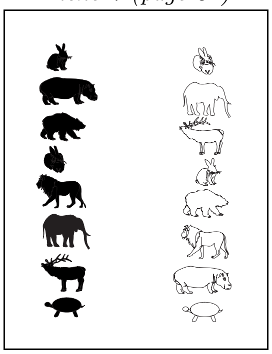
Arrivé à se stade, l'enseignant peut tirer une conclusion avec les enfants. L'ombre est une image plate d'un objet ou d'une personne et on peut la reconnaître à certains détails significatifs. Par exemple, le bec et les palmes du canard le différencient du coq qui a une crête sur la tête et des pattes crochues. C'est l'occasion de parler des formes, des grandeurs et des positions.

Cette image plate peut aussi être obtenue en découpant des formes dans du carton comme dans certains théâtres d'ombres chinoises. C'est ce que les enfants vont réaliser dans la troisième partie de l'activité. L'enseignant montre aux enfants des exemples de gabarits qu'il a créés[2] (quelques-uns sont proposés dans les fiches 4 et 5 : l'enseignant les aura découpés au préalable). L'enseignant les présente derrière le drap pour faire apparaître l'ombre.

[2] Il est également possible de réaliser des gabarits à l'aide de pochoirs à contourner. Les éditons Mila ont édité une série de pochoirs d'animaux dont les références se trouvent dans la bibliographie (voir M. Boutan [1996]).

Enfin, chaque enfant reçoit un morceau de papier cartonné noir et des pastels ou crayons qui marquent sur ce type de papier. La consigne est de dessiner quelque chose[3] qui va être découpé et présenté derrière le drap pour en faire reconnaître l'ombre. Il faut bien préciser de ne dessiner qu'une seule chose, assez grande et sans détails à l'intérieur du contour. Afin de mettre en évidence le contour qui doit être découpé, l'enseignant repasse à la craie blanche le contour extérieur de chaque dessin. Si le dessin est vraiment trop petit, l'enseignant peut aussi le reproduire en plus grand. Puis, les enfants découpent leur dessin ou, s'ils ne sont pas encore assez habiles, picotent avec un poinçon sur le trait pour le détacher de son support.

Fiche 7 (page 81)



Parfois les doigts peuvent gêner lors de la présentation. Il est possible de fixer sur une face du dessin découpé, une paille ou une baguette à l'aide de papier collant ou d'une agrafe. Lorsque tous les enfants sont prêts, ils viennent à tour de rôle présenter leur gabarit derrière le drap parallèlement à celui-ci, et la classe devine ce qui est présenté. On en profite alors pour faire vivre à chacun les effets d'agrandissement et de réduction de l'image lorsque l'on s'approche ou s'éloigne de la lampe.

Une activité complémentaire individuelle peut être proposée après ou pendant que chacun termine son dessin. Il s'agit d'une fiche d'exercices (fiches 6, 7, 8) présentant des silhouettes noires (figurant des ombres) et des dessins détaillés qui leur correspondent. L'enfant relie chaque ombre à son dessin. L'enseignant contrôle ainsi comment chacun identifie les ombres. Ce moyen non verbal permet aux enfants qui ne maîtrisent pas bien la langue de montrer leur compréhension. Certains enfants ont de la peine à relier une grande quantité de dessins. Ce problème n'est pas lié aux ombres, mais à l'organisation spatiale sur la feuille. Si tel est le cas, on simplifie la fiche en y plaçant moins de dessins.

Échos d'une classe

Les enfants ont été émerveillés de voir apparaître des ombres sur le drap et ont reconnu avec une facilité déconcertante tout ce que l'enseignant leur a proposé. Le passage derrière le drap a été un moment de joie très forte, surtout pour ceux qui devinaient quel était le camarade caché derrière ce drap.

Lorsque les enfants ont manipulé leur dessin devant la lampe, ils ont vite constaté les changements de grandeurs de l'ombre en fonction de la position de l'objet par rapport à la lampe.

Le dessin d'un gabarit a parfois demandé plusieurs essais et beaucoup d'enfants n'ont pu s'empêcher de dessiner des détails à l'intérieur du contour. Ils ont dessiné les yeux et la bouche d'un visage par exemple. L' enseignant ne les a pas fait recommencer pour autant, mais leur a simplement signalé que ces détails ne se verraient pas, une fois le gabarit caché derrière le drap. Les enfants l'ont réalisé lorsqu'ils ont vu les ombres. Ils étaient fiers de leur réalisation tout à fait personnalisée, surtout lorsque les autres les reconnaissaient.

[3] Il est important à ce stade que les enfants créent eux-mêmes leur dessin. Si on leur donne directement un pochoir à contourner, ils n'expérimentent pas la difficulté de réduire une figure à son seul contour.

Prolongements possibles

Les enfants peuvent jouer avec les mains devant la lampe pour faire apparaître un lapin, un oiseau, etc.

Une autre activité est d'extraire d'un lot d'objets réels celui dont on montre l'ombre sur une image.

On peut aussi cacher un objet dans un sac : l'enfant le tâte sans le regarder et choisit parmi plusieurs dessins l'ombre qui le représente. Par exemple, le jeu[4] *Touche et trouve* de *Eddu Toy* (figure 1) composé de figurines en bois présentant une face plate qui correspond exactement à l'ombre (figure2). Ainsi, l'enfant peut superposer la figurine à l'image.

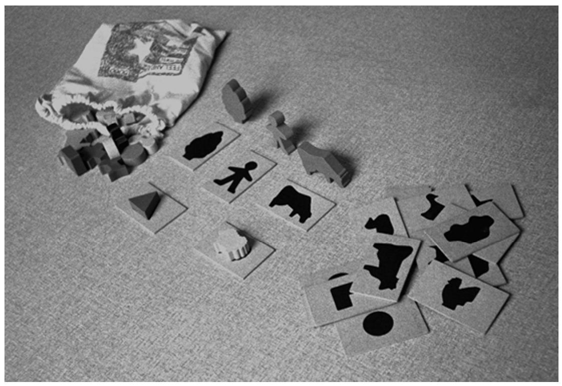


Fig. 1

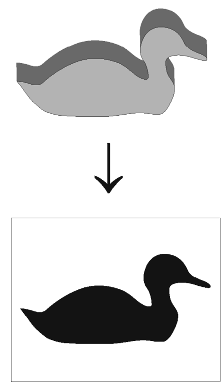
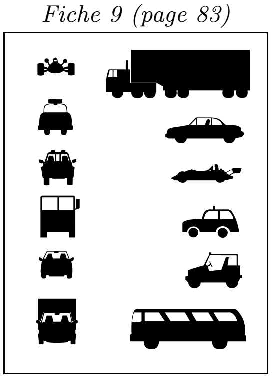


Fig. 2

Fiche 9 (page 83)



La partie de l'activité où l'on présente des silhouettes d'enfants peut être prolongée par l'étude de la vue de face et de profil d'une personne. Pour cela, on place sur le drap une grande nappe en papier. Un enfant y trace le contour du corps d'un autre enfant caché derrière le drap et dont on voit l'ombre par transparence. Comme le support n'est pas rigide, on utilise un gros marqueur ou un pinceau qu'il ne faut pas appuyer sur le support. De plus, l'enfant peut faire un dessin de face (jambes et bras légèrement écartés), puis de profil. On a ainsi des portraits grandeur nature. Chacun peut y dessiner des détails (les cheveux, le nez, ...) ou recouvrir le dessin de divers matériaux (laine, tissu, papier) pour faire des vêtements. On peut aussi réaliser le contournement de l'ombre au soleil et observer les différences avec l'ombre du même enfant devant une lampe.

On propose aussi de faire le lien entre la vue de face et la vue de profil d'objets orientés, par exemple des véhicules comme le montre la fiche 9.

Vers où cela va-t-il ?

Lorsqu'un objet plan est situé entre la lampe et l'écran, si en outre le plan de l'objet est parallèle à l'écran, alors l'objet et son ombre sont dits *homothétiques* l'un de l'autre. La relation d'homothétie est un cas particulier de la similitude, c'est-à-dire de la relation qu'ont entre eux deux objets de même forme, mais dont les dimensions ne sont pas forcément les mêmes. La similitude est à la base de la *géométrie euclidienne*, celle

[4] On peut le trouver, entre autres, chez *Planète Découverte* (voir la section 8 de l'annexe 1 à la page 72).

précisément qui étudie les propriétés qui ne changent pas lorsque l'on modifie les dimensions mais non les formes. Les ombres à la lampe donnent une première expérience de la similitude. On retrouve aussi celle-ci dans les modèles réduits, les agrandissements photographiques, etc.

2.2 Faire des ombres au soleil

De quoi s'agit-il ?

Observer l'ombre du corps au soleil. Mimer une ombre ou une silhouette de personnage.

Enjeux

Observer son ombre au soleil amène à remarquer que l'ombre reproduit les mouvements de la personne. De plus, l'ombre grandit ou diminue selon le moment de la journée. Des exercices corporels proposés en classe prolongent ces observations. Ils demandent de reconnaître des formes, de choisir des indices révélateurs, ils requièrent la précision des gestes et des mouvements dans l'espace.

Compétences. *– Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement. Se situer et situer des objets.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des silhouettes de personnages (fiches 10 à 16, pages 84 à 90).

Une journée ensoleillée !

Comment s'y prendre ?

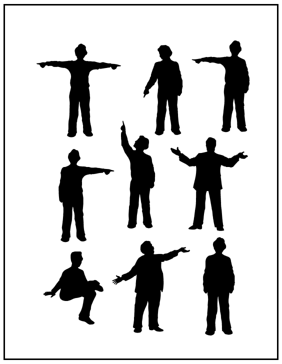
Tout d'abord, on emmène les enfants au soleil pour observer leur ombre sur le sol. Ensemble, on décrit les phénomènes liés aux mouvements en termes de grandeur et de positions relatives dans l'espace et dans le plan, en l'occurrence le sol où se projette l'ombre. En d'autres termes, on situe le haut et le bas sur le corps et sur l'ombre. On constate que le haut de l'ombre est le plus éloigné du corps, tandis que le bas touche les pieds. Que se passe-t-il alors si on lève un pied ou un bras ? Et lorsqu'on lève le bras gauche, de quel côté bouge l'ombre ? Etc.

On choisit un endroit assez dégagé pour pouvoir revenir à plusieurs moments de la journée si le soleil est toujours là. La moitié des enfants s'alignent côte à côte, en s'espaçant d'un mètre au moins, le long d'une bordure, d'une ligne tracée à la craie ou d'une corde fixée par deux piquets. Chacun retient sa place par rapport à ses deux voisins. Les autres enfants, aidés par l'enseignant, observent où se trouve le soleil par rapport à l'enfant. Ils marquent l'ombre par une flèche qui va des pieds à la tête. Ils repèrent ainsi la longueur de l'ombre et sa direction. Si le sol s'y prête, on peut faire contourner toute l'ombre à la craie. Puis, les enfants échangent les rôles.

Au passage, l'enseignant questionne les enfants sur la longueur de l'ombre : est-elle plus grande ou plus petite que l'enfant ? Est-elle plus large que l'enfant ? Si l'on a contourné l'ombre, l'enfant peut se coucher dessus pour comparer. Puis, on peut faire la comparaison des longueurs à l'aide d'un étalon, par exemple un manche de balai ou une règle pour tableau.

Plus tard dans la journée, ou un autre jour, on revient et on procède aux mêmes tracés. C'est l'occasion d'observer le changement de position du soleil et par conséquent de l'ombre, ainsi que la diminution ou l'étirement de l'ombre. L'objectif est de se rendre compte qu'à différents moments de la journée, le soleil change de place, l'ombre aussi, et sa grandeur varie. Cela enrichit les images que l'enfant se fait des ombres, un peu comme quand on observe l'agrandissement ou la réduction de l'ombre selon la position de l'objet par rapport à la lampe. On en reste au stade des découvertes et des constatations.

Fiche 15 (page 89)



Ensuite, dans une salle spacieuse, on dispose à divers endroits sur les murs des silhouettes de personnages (voir fiches citées ci-dessus, par exemple la fiche 15 à la page 89). Ensemble, on observe tour à tour chaque silhouette. Les enfants émettent des hypothèses que l'enseignant peut susciter par des questions. Est-ce un homme, une femme, un enfant ? A quoi le voit-on ? Que fait cette personne ? Exerce-t-elle une activité, un sport ou un métier précis ? Dans quelle position est-elle ? etc. Puis, au son d'une musique, les enfants se dispersent et se promènent dans la salle. Lorsque la musique s'interrompt, chacun doit s'arrêter devant une image et prendre la position du personnage, comme s'il était une statue. L'enseignant vérifie quelques positions et rectifie si nécessaire. On poursuit alors le jeu.

Après quelques tours, on propose une nouvelle activité qui se joue par deux. Un enfant est debout et l'autre couché de manière à ce que leurs pieds se touchent. L'enfant couché représente l'ombre de l'enfant debout. L'ombre suit le modèle dans tous ses mouvements[5]. Il va de soi que l'enfant debout ne change pas de place. On peut rythmer le jeu en frappant dans les mains chaque fois qu'il faut prendre une nouvelle position. Puis on échange les rôles.

Prolongements possibles

Par petits groupes, les enfants réalisent un tableau en collant des silhouettes sur une feuille. Ils les organisent de manière à représenter une histoire dynamique, qu'ils racontent ensuite aux autres enfants. Ils utilisent ainsi le matériau employé pour les ombres dans un contexte libre et interprètent les attitudes des personnages.

Vers où cela va-t-il ?

Les rayons du soleil étant à peu de chose près parallèles, l'ombre au soleil réalise ce que l'on appelle une *projection parallèle*. Il s'agit ici d'un tout premier contact avec ce type de projection, qui conduit entre autres à la perspective cavalière.

L'observation du soleil et du mouvement correspondant de l'ombre prépare l'étude des notions de cosmographie (les mouvements de la terre et du soleil, les saisons, etc.)

[5] Ce jeu ressemble un peu à celui du miroir, sauf qu'on ne peut pas bouger dans toutes les directions. Par exemple, si l'enfant debout élance sa jambe derrière lui, l'enfant au sol ne pourra pas le faire.

2.3 Reconnaître des ombres déformées

De quoi s'agit-il ?

Faire apparaître des ombres déformées et reconnaître l'objet représenté. Associer différentes ombres à un même objet.

Enjeux

Cette activité va un pas plus loin que les précédentes, puisque la forme n'est plus le seul critère de reconnaissance d'un objet. Il est nécessaire de raisonner sur des indices propres aux objets et de repérer leur identité, quelle que soit leur forme. Néanmoins, en proposant des objets distincts qui ne prêtent pas à confusion, on rend cet exercice accessible aux enfants et on leur donne la possibilité d'aiguiser leur esprit logique. De plus, la disposition en tableau à double entrée, qui n'est pas obligatoire, exerce la structuration spatiale et l'organisation des données.

Compétences. *– Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures. Organiser selon un critère.*

De quoi a-t-on besoin ?

L'installation du matériel est décrite dans la section 6 de l'annexe 1 à la page 69.

- Un drap blanc tendu ;
- une source lumineuse ;
- un local occultable partiellement ;
- des gabarits d'objets ou d'animaux (fiches 4 à la page 78 et 5 à la page 79 à agrandir lors de la photocopie) ;
- des dessins d'ombres déformées (fiches 17 à la page 91 et 18 à la page 92 à agrandir lors de la photocopie) ;
- les fiches 19 à la page 93 ou 20 à la page 94 (photocopier une fiche par enfant) et la fiche 21 à la page 95 (à photocopier pour chaque enfant sur un A3) ;
- un support pour faire un grand tableau à double entrée.

Comment s'y prendre ?

L'activité se déroule en deux parties. Pour la première, l'enseignant cache derrière le drap un gabarit (fiches 4 et 5 à la page 79) prédécoupé dans du papier cartonné. Il le place tout d'abord à la verticale, perpendiculairement au drap, de manière qu'on ne voit qu'une mince ligne d'ombre. Puis, en maintenant le gabarit vertical, il l'incline légèrement vers la gauche ou la droite, faisant apparaître une ombre qui va en s'élargissant. Les enfants doivent identifier le plus vite possible l'objet ou l'animal représenté.

Ensuite, l'enseignant montre un autre effet de déformation. Au départ, le gabarit est tenu horizontalement, puis tourné autour d'un axe horizontal pour le ramener en position parallèle au drap. Au cours de ce mouvement, la hauteur de l'ombre grandit. Une dernière variation est l'agrandissement ou la diminution de l'ombre en fonction de la distance du gabarit à la lampe.

Enfin, l'enseignant questionne les enfants sur les moyens utilisés pour obtenir ces ombres longues, minces, épaisses ou agrandies. Les enfants proposent quelques mouvements possibles de l'objet par rapport au drap et chacun vient essayer. L'enseignant leur donne, à tour de rôle, un gabarit qu'ils doivent présenter aux autres selon des critères précis. Par exemple, « montre-nous une ombre toute mince, ou très grande », etc. L'enfant caché derrière le drap, voit lui aussi l'ombre projetée devant lui et peut donc apprécier sa déformation. L'enseignant peut faire remarquer à l'enfant que ce qu'il voit est la même ombre que celle vue par la classe de l'autre côté du drap. Après avoir laissé chercher l'enfant, l'enseignant explique à chacun comment placer le gabarit et rectifie sa position.

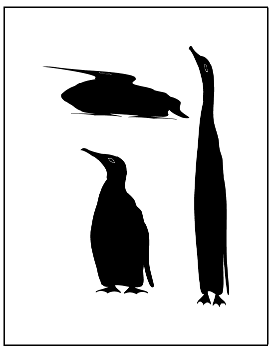


Fig. 3

La deuxième partie de l'activité consiste à associer trois ombres d'un même objet (fiches 17 et 18) : une ombre non déformée, une autre étirée verticalement et une dernière étirée horizontalement (figure 3). Avec les enfants, on peut parler d'une ombre de taille normale, d'une ombre mince et grande et d'une ombre basse et longue. En effet, le terme « grand » fait naturellement penser à quelque chose de haut et le terme « long » évoque d'avantage une distance horizontale[6]. La mise en œuvre proposée est la suivante. L'enseignant place les ombres de taille normale dans la première colonne d'un tableau à double entrée. Il distribue aux enfants les ombres déformées. Ceux-ci complètent alors le tableau (figure 4) en plaçant les « longues » ombres dans la deuxième colonne et les « grandes » dans la troisième. On peut, par exemple, procéder par ligne, en demandant qui a reçu le long kangourou, le grand kangourou, etc.

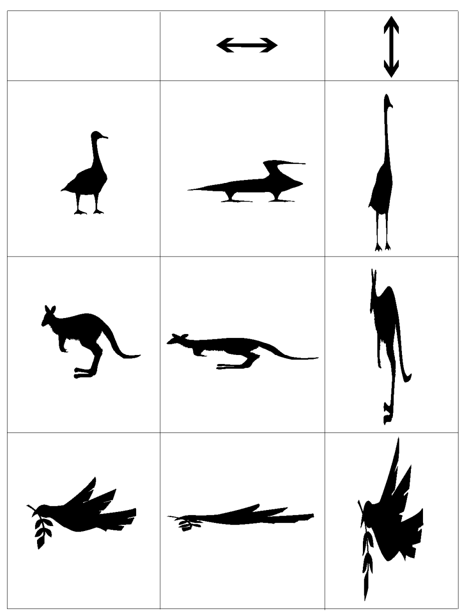


Fig. 4

On termine par un travail individuel. Chaque enfant reçoit une feuille (fiche 19 ou 20) où sont dessinés plusieurs lots de trois ombres différentes. Ces dessins d'ombres sont éparpillés au hasard sur la feuille. L'enfant les

[6] Chacun adaptera son vocabulaire au vécu des enfants. Par exemple, certains préfèrent utiliser les termes « gros » ou « large » pour l'effet d'élargissement de l'ombre.

découpe[7], les place au fur et à mesure dans un récipient pour ne pas en perdre, et puis les colle par groupes de trois représentant un même objet ou animal. Nous proposons sur le thème des animaux de rassembler dans chaque enclos du zoo (fiche 21 à la page 95) trois ombres d'animaux de formes différentes, par exemple, la famille des rhinocéros. L'enseignant peut également décider de placer lui-même une étiquette à chaque ensemble pour en désigner le contenu dès le départ. Les enfants n'ont alors pas le choix de l'emplacement des animaux.

Échos d'une classe

Les enfants ont reconnu très vite les ombres d'animaux présentées par l'enseignant, quelles que soient les déformations. Par contre, il leur a été plus difficile de produire une ombre déformée en tenant eux-mêmes un gabarit derrière le drap. Ils ont eu de la peine à coordonner le mouvement du gabarit et son effet sur l'ombre. Pour les aider, l'enseignant a rectifié les positions.

Lors des assemblages des ombres par famille, les enfants ont été surpris par certains dessins. Par exemple, la girafe très large et aplatie a perdu son long cou, qui permettait de l'identifier. Ils ont observé d'autres détails. La disposition en tableau à double entrée a donné une bonne vue d'ensemble. Les lignes font apparaître clairement les familles d'animaux de différentes formes. Chaque colonne met en évidence son critère : la grandeur (hauteur) ou la longueur (largeur).

Quelques enfants (souvent les plus âgés) ont réussi sans trop d'erreurs à rassembler dans le zoo, les animaux par famille. D'autres ont eu plus de difficulté à s'organiser. On leur a proposé une méthode de travail : commencer par coller une image dans chaque enclos pour désigner les différentes familles, puis identifier l'animal avant de choisir l'emplacement où il va être collé.

Vers où cela va-t-il ?

On observe ici comment l'ombre d'un objet peut changer de forme. Les transformations considérées sont, à peu de chose près[8], des transformations *affines*, plus précisément des compressions et des similitudes. Les transformations affines sont celles qui, entres autres, transforment les droites parallèles en droites parallèles. Bien entendu, il n'y a guère de parallèles dans les motifs observés ici. Il n'est toutefois pas indifférent que les élèves acquièrent une image intuitive des compressions et des similitudes. Celles-ci sont proches parentes des changements d'unité sur les axes en géométrie analytique.

[7] Il n'est pas nécessaire de découper précisément sur le contour, il suffit d'un découpage grossier laissant du blanc autour de la figure. L'enseignant peut aussi tracer autour des figures un cadre pour les découper.

[8] À peu de chose près, car les ombres sont projetées par une lampe, et en toute rigueur, les transformations sont du type projectif. Mais elles sont assimilables à des transformations affines parce que les objets sont tenus beaucoup plus près du drap que de la lampe.

3 Les représentations de blocs

3.1 Construire un assemblage d'après des photos

De quoi s'agit-il ?

On photographie une construction posée sur une table. Chacune des quatre photos a été prise d'un côté différent de la table. On donne la construction et les photos aux enfants en leur demandant de se placer aux endroits d'où les photos ont été prises. On demande de refaire la construction d'après les photos.

Enjeux

L'enfant apprend à se situer par rapport à des objets en respectant les indications d'une photo. Il est amené à décoder des indices et à faire le lien entre une vue en deux dimensions (la photo) et une situation réelle (la construction). Il doit prendre des repères pour choisir un point de vue.

Un autre objectif est de coordonner quatre vues d'un assemblage pour le construire. Pour cela, il faut situer des objets les uns par rapport aux autres et comprendre les vues de face et de profil d'un même objet. Les enfants doivent se concerter. Ils s'organisent, procèdent par essais et erreurs, anticipent, ordonnent une suite d'actions, argumentent leurs choix au sein du groupe.

Le dénombrement des blocs (aspect cardinal) et la position d'un bloc par rapport au autres (aspect ordinal) sont en jeu.

Compétences. – *Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement. Se situer et situer des objets. Dénombrer. Construire des solides avec du matériel varié.*

De quoi a-t-on besoin ?

- Diverses sortes de blocs de construction : des blocs attachables comme les *Lego* rendent les constructions plus stables ;
- un appareil photographique.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant réalise une construction de blocs comportant quatre côtés clairement identifiables. Chaque côté est caractérisé par des détails tels que des couleurs distinctes pour chaque mur, une fenêtre d'un côté, une porte d'un autre coté, un escalier, etc. L'enseignant pose, en dehors de la construction, des objets tels qu'une voiture, un arbre, un animal, etc. Il photographie de face les quatre côtés de la construction.

L'enseignant laisse les enfants découvrir la construction. Il donne les photos à quatre enfants en leur demandant de se placer chacun là où le photographe a pris la photo. D'autres enfants essayent à leur tour. Après cela, on défait la construction en plaçant les blocs dans une caisse à part. On lance le défi de la reconstruire le lendemain, exactement de la même manière, en se servant des photos.

Le lendemain, un groupe de quatre enfants reçoit les photos. Il s'organise pour reproduire la construction.

Échos d'une classe

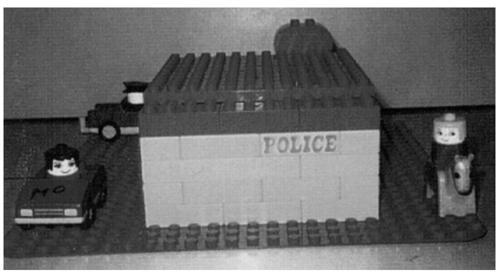
La construction était réalisée en *Lego* sur une plaque carrée[9].

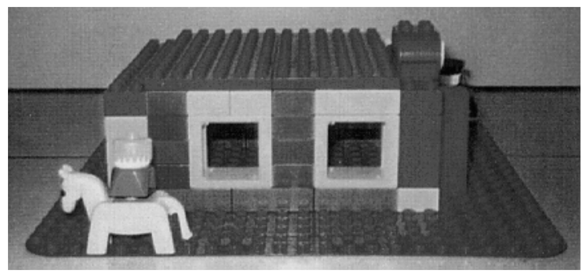
Lorsque les enfants ont dû retrouver le point de vue de la photo, plusieurs réactions sont apparues. Certains ont tourné plusieurs fois autour de la table avant d'être sûrs du point de vue à choisir. Ils ont eu besoin de beaucoup d'indices pour se repérer. D'autres se sont focalisés sur un détail particulier et se sont arrêtés quand ils l'ont trouvé.

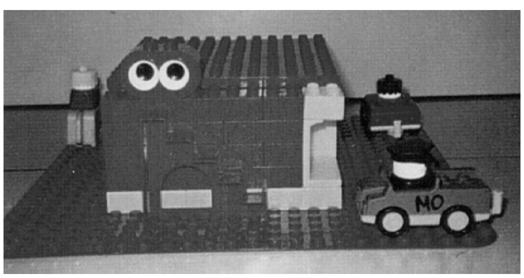
Quelques enfants ont procédé par élimination : « *Non, c'est pas ça, c'est pas ça, c'est ça !* ».

Un enfant a choisi le mauvais point de vue. La photo montrait un cheval de profil et lorsqu'il a vu le cheval de dos, il s'est arrêté là. Il n'a pas pris en compte l'orientation du cheval, ni d'autres indices.

Trois enfants n'ont pas compris ce qu'ils devaient faire.







Lors de la construction d'après les photos, il a fallu beaucoup d'organisation aux enfants. Chacun s'est emparé d'une photo, mais très vite ils ont travaillé ensemble. Tout d'abord, ils ont placé à trois coins de la plaque-support les accessoires extérieurs à la construction. Ils les ont posés à peu près correctement et n'ont réajusté les positions que tout à la fin. Ils ont trouvé facile de commencer par un mur tout jaune. Samy s'est érigé maître des travaux : « *Attends ! Donne-moi toutes les photos. On a déjà fait ça, et ça, et ça. Il faut mettre la fenêtre de ce côté-là* (un doigt sur la photo, un autre sur la construction). » Le mur jaune était terminé. Les autres murs avançaient, lorsque Thibault a décidé de mettre le toit. Samy a protesté que ça n'allait pas, car les murs n'étaient pas finis. « *D'ailleurs, tu vois bien que ça ne tient pas.* » La construction s'est poursuivie. Soudain, il n'y a plus eu de blocs jaunes et il en fallait encore. Les enfants ont pris conscience qu'ils les avaient tous utilisé pour le premier mur. Ils ont

[9] Monique Meuret a réalisé cette activité avec une classe de 15 élèves. Nous avons recueilli son compte-rendu.

consulté les photos et compté le nombre exact de blocs. « *Zut ! le mur est trop grand, il faut le casser et le refaire.* » Enfin, après avoir observé tous les murs, compté et recompté, vérifié sur les photos, il restait à poser le toit. Un dernier problème est apparu : les deux plaques du toit ne se rejoignaient pas. Les enfants ont retiré les plaques du toit, des parties de murs se sont alors déboîtées. Ils étaient partis pour reconstruire, mais avec assurance cette fois !

Prolongements possibles

Demander aux enfants de créer la construction de départ. Photographier celle-ci et la faire reproduire par d'autres enfants, d'après les photos. L'observation des photos est plus difficile en ce cas, car les constructions des enfants sont moins structurées que celles de l'enseignant. La figure 5 montre un exemple de construction d'enfants, photographiée selon deux points de vue.

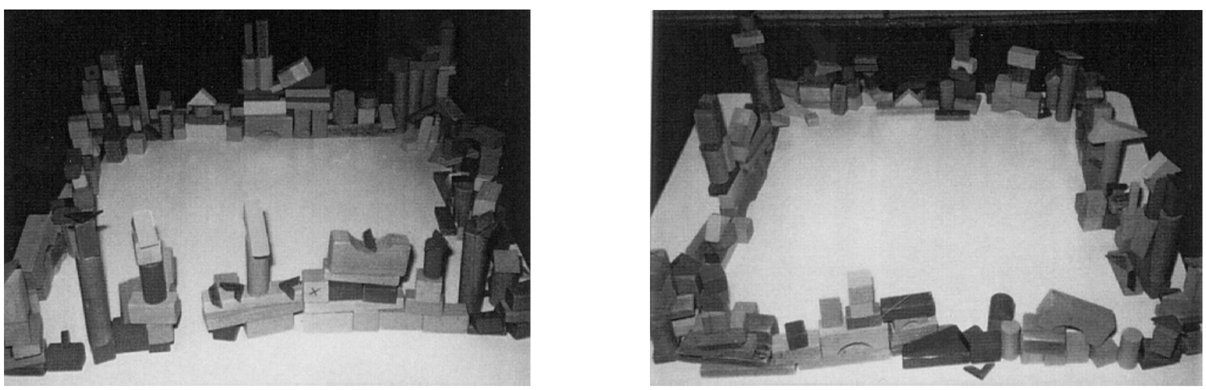


Fig. 5

Vers où cela va-t-il ?

Cette activité contribue à former la « vue dans l'espace », utile dans toute l'étude ultérieur de la géométrie. Elle prépare plus précisément à la coordination des projections orthogonales d'un même objet.

3.2 Associer des blocs à leurs dessins

De quoi s'agit-il ?

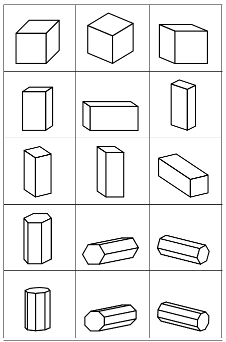
Après un moment de jeu libre avec des blocs, faire correspondre un bloc (solide géométrique) à un dessin en perspective parallèle sous forme d'un jeu de loto et d'un jeu de dé.

Enjeux

On propose aux jeunes enfants des représentations en perspective pour élargir leur bagage d'images mentales des objets de l'espace. Ce type de représentation semble très géométrique, mais on le rencontre pourtant couramment dans certaines illustrations, à la télévision, ... Il fait alors partie d'un contexte riche qui facilite la reconnaissance. Néanmoins, l'enfant suppose parfois, sans en être sûr, avoir reconnu un objet. L'objectif est ici d'explorer consciemment le rapport entre un dessin et un objet réel. Les blocs de forme géométrique constituent un matériau simple, qui suscite l'imagination des enfants. Ils les combinent pour en faire des constructions.

L'objectif est de reconnaître l'objet représenté par un dessin et non de détailler la représentation de ses faces.

Fiche 22 (page 96)



Les activités proposées, même si elles font implicitement appel à l'esprit logique, ont pour objectif principal d'éveiller les capacités de perception. Une phase de discussion entre les enfants les amène à expliquer pourquoi ils associent tel dessin à tel solide. Ils utilisent pour cela un vocabulaire imagé qui se précisera avec le temps. On vise à installer une attitude d'observateur, une forme élémentaire de critique des images, de recherche d'indices : au cours de l'activité, on choisit certains dessins, on en exclut d'autres et on se justifie s'il y a contestation. Par après, cela aidera les enfants lorsqu'ils se retrouveront seuls face à des images inconnues.

Compétences. – *Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement. Reconnaître, comparer des solides, les différencier.*

De quoi a-t-on besoin ?

– Des blocs pleins, du type blocs de construction en bois, en mousse, solides géométriques (voir la section 7 de l'annexe 1 à la page 70) ;
– des dessins en perspective parallèle de ces blocs dans plusieurs positions (fiches 22 à 24, pages 96 à 98) ;
– un dé dont chaque face présente le dessin d'un bloc différent (fiche 25 à la page 99).

Comment s'y prendre ?

Cette activité se déroule en deux phases qui peuvent être proposées à des moments différents. Durant la première (jeu de loto), l'enseignant prend en charge un groupe de six à huit enfants placés autour d'une table. La deuxième phase (jeu de dé) est une sorte d'application où les enfants se débrouillent seuls.

Jeu de loto – Tout d'abord, les enfants jouent librement avec les blocs. Après un moment, on met à leur disposition une série d'images représentant ces blocs. Ils les examinent et discutent entre eux : « *ce dessin, on dirait ton bloc ; ça, c'est moi qui l'ai* ».

Ensuite, l'enseignant donne la première consigne : sur chaque image vous est parfois associé au dessin d'un parallélépipède rectangle (figure 6). Ces confusions ne sont pas graves, et le sont d'autant moins que l'enfant peut s'exprimer librement. Il utilise petit à petit un vocabulaire géométrique qui se précise avec l'aide de l'enseignant. Il ne faut toutefois pas aller jusqu'à une description complète des blocs. Simplement, chacun explique ce qui pour lui, à ce moment là, guide ses choix.

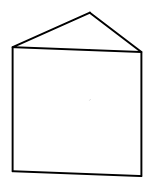


Fig. 6

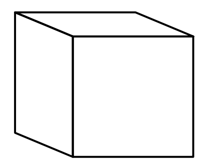


Fig. 7

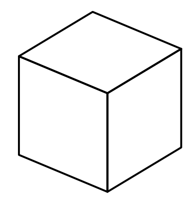


Fig. 8

Par ailleurs, certains dessins différents peuvent représenter un même bloc. Par exemple, un cube s'associe à son dessin avec une face frontale (figure 7) ou de biais (figure 8). On peut éviter cette difficulté en ne proposant que des dessins de blocs clairement distincts. Néanmoins, cette diversité des dessins ouvre l'esprit.

Un autre manière d'associer un bloc et un dessin fait intervenir les proportions de l'objet. C'est ce que font certains enfants. Ils excluent certaines représentations en expliquant qu'elles ne ressemblent pas au modèle. La figure 9, par exemple, montre le bloc en gris et le dessin choisi. Les deux autres dessins sont qualifiés respectivement de « *trop bas* » et « *trop mince* ». Par contre, certains enfants prennent en compte la forme globale et associent un bloc à des dessins de proportions variées comme le montre la figure 10.

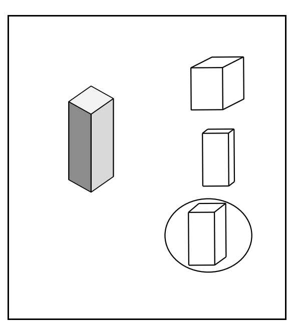


Fig. 9

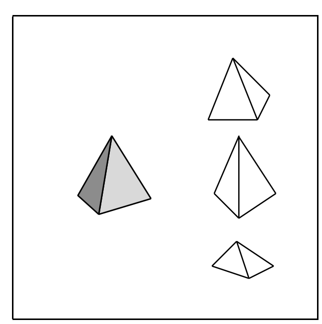


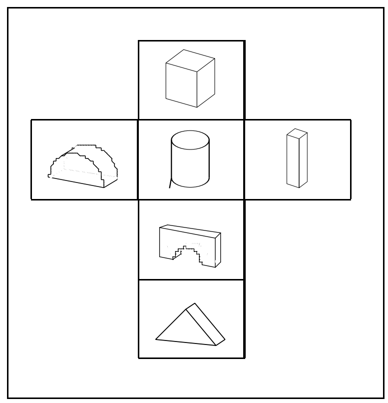
Fig. 10

Enfin, l'enseignant demande à chaque enfant de prendre trois blocs et de les déposer côte à côte devant lui. Les dessins sont mélangés et disposés faces cachées, au centre de la table. À tour de rôle, chacun prend un dessin et regarde si cette image correspond à un de ses blocs. Si oui, il la place devant le bloc représenté. Sinon, il la donne à l'enfant qui possède le bloc en question ou il la replace face cachée sur la table.

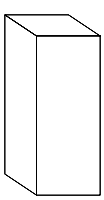
Une variante est de disposer les dessins de manière ordonnée sur la table. Ainsi, lorsqu'un enfant tire une carte pour laquelle il n'a pas de bloc, il la montre à tous et la replace à l'endroit exact où il l'avait prise. Ceci permet aux suivants de faire appel à leur mémoire pour retrouver une carte dont ils ont besoin. Le jeu se termine quand tous les blocs sont illustrés par un dessin.

Jeu de dé. – Cette deuxième phase de l'activité se déroule par équipes de quelques enfants. Ils jouent d'abord librement avec les blocs. Puis on leur propose le jeu de coopération suivant : à tour de rôle, chacun lance le dé dont les faces comportent les dessins des blocs (fiche 25 à la page 99). Le premier enfant choisit parmi les blocs celui représenté par le dé et commence une construction. Le suivant lance le dé et place le bloc correspondant sur le premier bloc. On continue ainsi de manière à réaliser la construction la plus haute possible, sans qu'elle s'effondre.

Fiche 25 (page 99)



Échos d'une classe



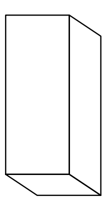


Fig. 11 *Fig. 12*

Mettre des blocs entre les mains des enfants a suscité des constructions et des palabres pour obtenir le bloc du voisin. Certains ont décidé de s'associer pour réaliser de plus grandes constructions. En général, ils ont spontanément assemblé les parallélépipèdes rectangles avec les pyramides ou les prismes à base triangulaire pour obtenir des maisons au toit pointu ou rectiligne. Ils ont fait de même pour le cylindre et le cône, le cylindre et une demi-sphère de même diamètre, un prisme posé sur sa base triangulaire et un tétraèdre. Certains enfants ont aussi complété les solides tronqués.

Lorsque les images ont été posées sur la table, certains s'y sont tout de suite intéressés, cherchant à reconnaître des blocs qu'ils avaient eu entre les mains. D'autres ont poursuivi leur construction, puis se sont intéressés aux dessins en voyant leurs camarades les manipuler. Les images ont été regardées dans tous les sens. Un même dessin pouvait alors représenter un bloc vu du dessus ou du dessous selon son orientation (figures 11 et 12), ce qui n'a pas gêné la reconnaissance. Pourtant, lorsqu'ils ont placé les images devant le bloc représenté, les enfants les ont spontanément orientés dans le sens de leur bloc. Ils les ont souvent posés en position dressée.

Quelques enfants ont associé au cône le dessin d'une pyramide et inversement. Le caractère pointu était prégnant. Certains ont associé le cylindre et le prisme à base octogonale. Plusieurs enfants ont rectifié en disant que

« *les vrais blocs* (allusion au cône et au cylindre en bois par opposition aux dessins) *n'ont pas de lignes* ». De rares confusions sont apparues entre les prismes qui présentaient des faces frontales rectangulaires, quelle que soit leur base (carrée, hexagonale, triangulaire). La majorité des enfants a directement reconnu le cube dans plusieurs positions.

Dans l'ensemble, les enfants ont manifesté une très bonne vue des objets de l'espace et ont reconnu sans difficulté la plupart des dessins proposés.

Prolongements possibles

Chercher parmi un lot d'images (dessins et photos) toutes les représentations d'un bloc donné.

Faire dessiner librement les blocs aux enfants.

Initier les enfants aux projections orthogonales en leur faisant identifier des objets à partir de dessins vus de face. Par exemple, enfiler des perles sur une tige en suivant les indications d'un schéma[10] comme celui de la figure 13.

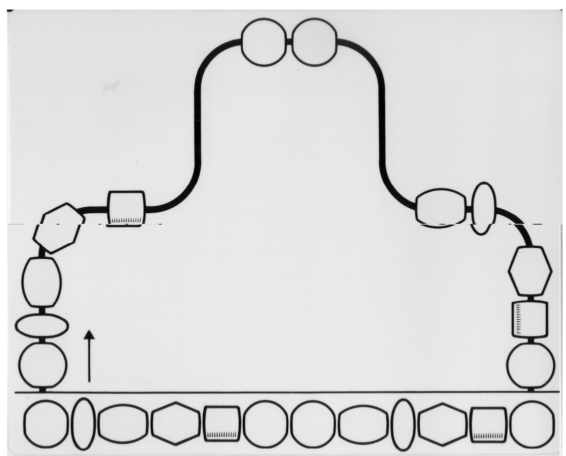


Fig. 13

Vers où cela va-t-il ?

Il s'agit ici d'un premier apprentissage de la lecture des représentations d'objets géométriques en perspective parallèle. Diverses démarches seront approfondies par la suite, comme bases nécessaires de la communication sur les objets géométriques : la reconnaissance des représentations multiples d'un même objet ; l'analyse des ambiguïtés des représentations. Ici les élèves s'appuient sur des indices globaux ou des arguments géométriques encore souvent assez sommaires. La discussion des représentations en perspective parallèle s'appuiera, dans la suite de la scolarité, sur des arguments géométriques de plus en plus précis.

3.3 Construire avec des blocs à partir de dessins

De quoi s'agit-il ?

Réaliser des constructions à partir de dessins d'assemblages de blocs. Reconnaître des dessins d'un même bloc en positions diverses.

[10] Ce jeu existe en divers modèles. On peut le trouver notamment chez les distributeurs de matériel éducatif (voir la section 8 de l'annexe 1 à la page 72).

Enjeux

Les objectifs généraux sont identiques à ceux de l'activité 3.2 à la page 31. Dans cette activité-ci, les enfants, seuls ou à plusieurs, travaillent sans intervention directe de l'enseignant. Cette autonomie permet de voir comment chacun chemine dans son rapport à l'image. Un objectif supplémentaire est de développer la capacité à s'organiser dans l'espace pour reproduire des assemblages complexes. De plus, l'association de dessins d'un même bloc dans plusieurs positions suscite l'observation et la déduction.

Compétences. – *Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement. Reconnaître, comparer des solides, les différencier. Se situer et situer des objets. Dénombrer. Construire des solides avec du matériel varié. Organiser selon un critère.*

De quoi a-t-on besoin ?

- Des blocs pleins, du type blocs de construction en bois, en mousse, solides géométriques (voir la section 7 de l'annexe 1 à la page 70) ;
- des dessins d'assemblages de blocs (fiches 26 et 27, pages 100 et 101) ;
- des fiches de travail individuel (en choisissant un seul dessin des fiches mentionnées ci-dessus).

Comment s'y prendre ?

Les enfants construisent des assemblages de blocs en se référant à un dessin en perspective. Soit les dessins ne comportent pas de couleurs et le choix des blocs se fait uniquement au niveau des formes, soit les représentations sont coloriées comme les blocs. La couleur apporte une facilité à certains, car elle permet de bien distinguer les blocs les uns des autres. Mais elle provoque parfois une difficulté supplémentaire, car la couleur fait intervenir une variable de plus.

L'enseignant peut également proposer aux enfants de colorier eux-mêmes les dessins avant ou après la construction. Dans le premier cas, l'enfant colorie le dessin modèle et construit son assemblage en respectant les couleurs qu'il s'est données. Dans le second cas, il assemble d'abord ses blocs conformément au dessin, puis colorie celui-ci en respectant la place des couleurs.

Le niveau de difficulté varie selon le nombre de blocs en jeu et la position de ceux-ci. Ce dernier point est important, car il recouvre plusieurs aspects. D'une part, la reconnaissance est plus facile lorsque tous les blocs dessinés sont orientés dans une même direction. C'est ce que montre la figure 14 à la page suivante contrairement à la figure 15 où certains blocs sont dessinés plus en biais que d'autres. Le changement de direction d'une pièce à l'autre est difficile à respecter lors de la construction.

D'autre part, la situation est plus simple lorsque tous les blocs forment une sorte de façade. La figure 16 à la page suivante est à contraster avec la figure 17 où quelques blocs sont à l'avant-plan et d'autres à l'arrière-plan, partiellement cachés. Par ailleurs, les enfants sont sensibles à la disposition symétrique des blocs (figure 16). La symétrie[11] rend la reconnaissance plus aisée et facilite l'organisation de l'espace.

[11] Sur le rôle de la symétrie, voir CREM [1999].

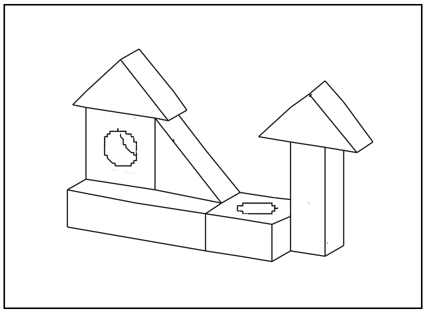


Fig. 14

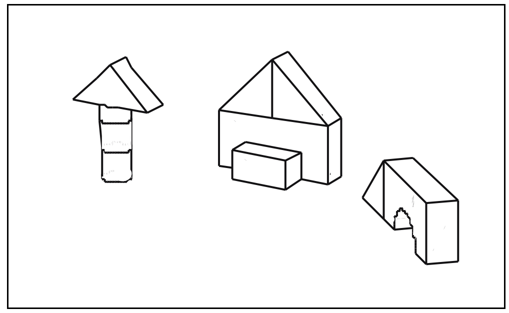


Fig. 15

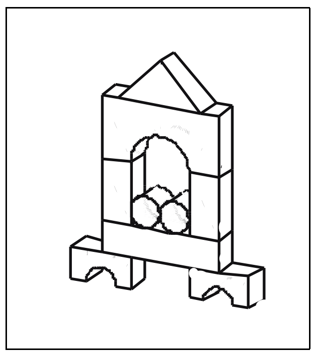


Fig. 16

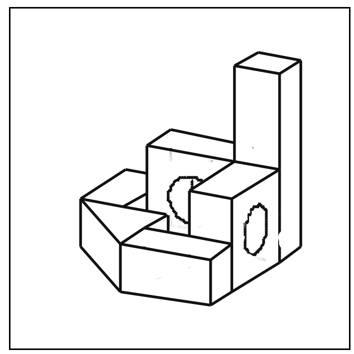


Fig. 17

Ces réflexions nous amènent directement à la suite de l'activité. L'exercice est le suivant : un dessin présente un ensemble de blocs, un autre dessin montre les mêmes blocs dispersés dans plusieurs orientations et parfois partiellement cachés (figures 18 et 19). C'est ce que présentent les fiches 26 et 27 (pages 100 et 101).

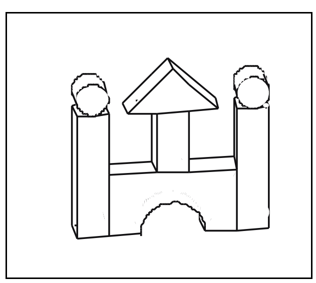


Fig. 18

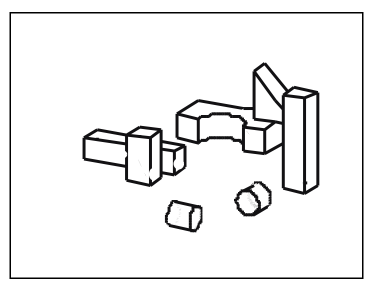


Fig. 19

L'enfant réalise la construction selon le premier dessin, puis colorie de la même façon les blocs se correspondant dans les deux dessins. Après, lorsqu'il est à l'aise avec ce type de reconnaissance, on lui soumet des dessins de plusieurs assemblages. Ces dessins vont par paire, l'un présentant les blocs assemblés, l'autre les même blocs en désordre. Tous les dessins sont mélangés et on demande à l'enfant de les apparier. La consigne est de réunir les assemblages constitués exactement des mêmes blocs (figure 20). Il s'agit d'une reconnaissance globale qui repose sur des indices. Par exemple, si l'enfant repère un bloc particulier n'apparaissant que dans deux dessins, il peut en déduire que ceux-ci vont ensemble.

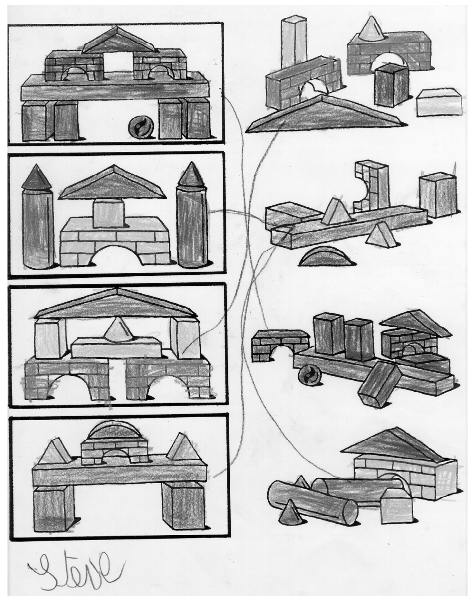


Fig. 20

Échos d'une classe

Les enfants ont été capables de réaliser des constructions à partir de dessins en perspective, du moins lorsque les blocs n'étaient pas trop nombreux (moins de vingt), ni trop cachés les uns derrière les autres. Ils ont été particulièrement sensibles au caractère figuratif des dessins. Ils se sont alors exprimés à propos de leur construction avec un vocabulaire imagé : « *ça c'est la porte et au-dessus je mets le toit, ici c'est un enfant qui joue sur un pont, ...* ». Une fois terminée la construction présentée sur l'image, ils poursuivaient la réalisation à leur guise, car l'envie de créer était forte. Ils s'inspiraient parfois partiellement de l'un ou l'autre dessin qui avait attiré leur attention.

Les constructions symétriques ont été réalisées rapidement, comme si les enfants avaient plus de facilité à en comprendre l'organisation.

Quant à la reconnaissance des blocs dans diverses positions[12], elle n'a pas posé de difficulté majeure. Même si le coloriage était grossier, les enfants avaient saisi le principe de choisir la même couleur pour les blocs identiques. Certains se sont focalisés sur leur couleur préférée et ont colorié presque tous les blocs de la même couleur, mais ils pouvaient désigner du doigt ceux qui étaient les mêmes.

Quelques enfants sont allés jusqu'à colorier un bloc de plusieurs couleurs ou dessiner un détail sur une face. Dans ce cas, ils ont transposé leurs couleurs ou dessins, parfois dans un ordre différent, sur les deux représentations du

[12] Lors de l'expérimentation, les dessins étaient extraits d'une ancienne revue *Dorémi*, illustrée par Annette Boisnard. Nous avons créé de nouveaux dessins.

même bloc. Par exemple, la figure 21 montre un petit trait sur un bloc reproduit dans les deux dessins.

Nous avons observé des enfants qui coloriaient l'espace entre deux blocs, sans pour autant penser qu'il s'agissait d'un objet à part entière (figure 22).

Pour associer parmi plusieurs dessins ceux de constructions faites des mêmes blocs, les enfants repéraient des objets particuliers. Par exemple, à la figure 20 à la page précédente, la bille du premier assemblage était un indice, de même que les deux cylindres du deuxième dessin. Après, les enfants procédaient par élimination. Ils reliaient par un trait les dessins se correspondant et ensuite ils commençaient le coloriage.

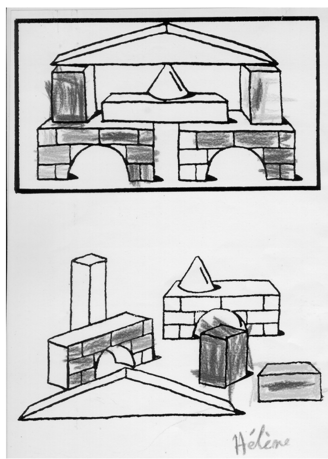


Fig. 21

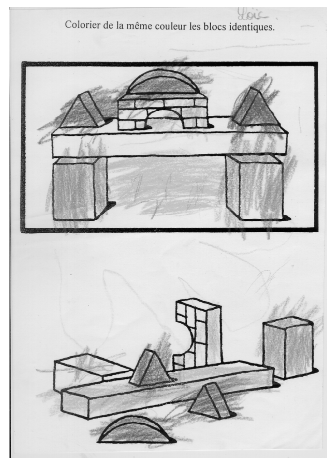


Fig. 22

Prolongements possibles

Il existe une multitude d'autres activités à proposer aux enfants. En voici quelques exemples.

On peut réaliser des exercices similaires dans une salle spacieuse avec de grands blocs en mousse ou des caisses (voir activité 3 à la page 14). On ajoute un exercice de langage. Un enfant se sert d'une photo pour décrire la position que doit prendre un camarade par rapport à un grand bloc ou une caisse. À partir de deux photos d'un même enfant, l'une de face et l'autre de dos, on retrouve le point de vue pris par le photographe.

On peut aussi créer des circuits de psychomotricité[13] codés par une sorte de plan avec des dessins des engins à utiliser.

On peut faire construire aux enfants un labyrinthe avec de grands blocs. Puis, on demande de reproduire l'ensemble avec des petits blocs à l'échelle. Les enfants réalisent une maquette qui servira à reconstruire le grand labyrinthe lors d'une autre séance. Enfin, on remplace les petits blocs par des rectangles qui permettent à l'enfant de constituer un plan des grands blocs vus de haut. Les enfants s'en serviront également pour recréer le labyrinthe à partir de cette représentation en deux dimensions.

[13] Ce genre d'exercices se trouve dans B. De Lièvre et L. Staes [1993].

On peut proposer de réaliser une construction, puis de la représenter sur la table avec des figures géométriques planes adaptées. Il existe un jeu[14] nommé *Architek*[15] qui propose des blocs et des fiches adéquates pour réaliser des constructions d'après des vues de face.

D'autres activités que nous avons expérimentées concernent les représentations de cubes sur papier pointé. Les fiches 30 et 31 (pages 104-105) en donnent quelques exemples. L'enfant fait le va-et-vient entre des constructions qu'il réalise avec des cubes et des dessins de cubes qu'il apprend à comprendre et à organiser lui-même (figure 23).

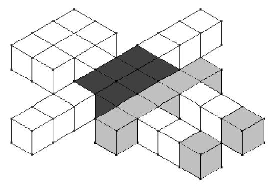


Fig. 23

Vers où cela va-t-il ?

Voir la section « *Vers où cela va-t-il ?* » de l'activité 3.2 à la page 35.

[14] Ce jeu est aussi proposé dans l'activité 3 à la page 48.
[15] M. Lyons et R. Lyons [sans date].

3

Activités en $1^{\text{ère}}$ et 2^{e} primaire

1 Le modelage d'après un objet

1.1 Styliser un objet

De quoi s'agit-il ?

Réaliser un modelage en prenant pour modèle un objet choisi par l'enfant, en veillant à respecter globalement la forme, les surfaces courbes et les plans.

Enjeux

L'objectif principal est de respecter globalement la forme de l'objet choisi comme modèle. Pour cela, l'enfant en observe et analyse les composantes, discrimine les parties courbes et plates qu'il doit reproduire par le modelage, sans s'attacher aux détails. De plus, il doit implicitement choisir une échelle pour respecter en gros les proportions du modèle.

D'autres objectifs sont visés. Le modelage fait apparaître l'organisation dans l'espace : il faut observer l'orientation, doter le modèle d'un haut et d'un bas, parfois d'un avant et d'un arrière, d'une gauche et d'une droite. L'équilibre est en jeu : l'objet modelé doit tenir debout. Les rapports de grandeurs interviennent tant au niveau des proportions internes à l'objet que dans l'échelle choisie pour la diminution ou l'agrandissement. Les surfaces courbes et les plans s'obtiennent par des gestes précis qu'il est intéressant de verbaliser : rouler, taper sur la table, aplatir, lisser, etc. Enfin, le modelage exerce la motricité fine, importante pour la précision des gestes et plus tard l'utilisation des instruments.

Compétences. *– Construire des solides avec du matériel varié. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.*

De quoi a-t-on besoin ?

De la pâte à modeler au choix parmi les matériaux proposés dans l'annexe 1 à la page 68.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant prévient les enfants qu'ils doivent chacun choisir un bel objet à apporter en classe pour en faire une copie en modelage, en quelque sorte pour faire une sculpture. L'enseignant leur suggère de ne pas choisir un objet trop compliqué. Le caractère esthétique doit motiver le choix.

Muni de son modèle, chacun commence son modelage avec une certaine quantité de pâte, la même pour chaque enfant. La consigne est : « réalise avec toute la pâte que tu as reçue, un modelage qui ressemble le plus possible à l'objet. Les détails ne sont pas le plus important, mais ton modelage doit être beau et on doit pouvoir reconnaître ce qu'il représente. » Après les premiers essais, certains enfants auront peut-être trop de pâte et d'autres en redemanderont. La quantité imposée au départ est une contrainte qui les oblige à gérer les proportions entre les différentes parties de l'objet, à miniaturiser celui-ci si nécessaire ou à l'agrandir. Le fait de styliser la forme en allant à l'essentiel fait apparaître distinctement des parties courbes ou plates.

Une fois le modelage terminé, chacun le présente à la classe et s'explique sur la façon dont il a procédé. Comment a-t-il commencé ? Par quelle forme : une boule, un colombin, une plaque de pâte ? Y a-t-il des parties courbes et des parties plates, quelles sont-elles ? Comment l'enfant les a-t-il obtenues, quels gestes ont été importants ? Par ce dialogue proche du langage de l'enfant, l'enseignant met en avant les notions de surface courbe ou plane, les formes et les phénomènes liés aux gestes du modelage.

1.2 Distinguer des surfaces courbes et planes

De quoi s'agit-il ?

Réaliser deux modelages de solides géométriques, l'un avec des surfaces planes et l'autre avec une ou des surfaces courbes, en prenant pour modèle des boîtes apportées par les enfants.

Enjeux

L'objectif est de distinguer les surfaces courbes des surfaces planes. Les gestes du modelage sont associés aux formes : les surfaces courbes sont associées au roulement de la pâte sur la table et les surfaces planes aux tapotements sur ou avec un objet plat (table, latte, paume de la main). De plus, la reproduction, fût-elle approximative, de la boîte qui sert de modèle fait intervenir des rapports de grandeurs entre les faces. Les notions de faces parallèles et perpendiculaires sont implicitement abordées lors de la réalisation, de même que la notion d'arête en tant que limite d'une face. Un autre objectif est de verbaliser ces notions : désigner une surface courbe et une surface plane, nommer les formes des faces (disque, demi-disque, carré, rectangle, triangle,...) et parfois aussi nommer le type de solide (pyramide, cylindre, cube, boîte « rectangulaire »). La motricité fine est toujours en jeu.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer. Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie. Construire des solides simples avec du matériel varié.*

De quoi a-t-on besoin ?

– De la pâte à modeler au choix parmi les matériaux proposés dans l'annexe 1 à la page 68 ;

– des boîtes avec des faces courbes et/ou plates (l'enseignant doit en prévoir au cas où les enfants n'en apporteraient pas une assez grande diversité).

Comment s'y prendre ?

Au préalable, l'enseignant demande aux enfants d'apporter des boîtes de formes variées. Une fois celles-ci rassemblées devant la classe, chacun en choisit deux, l'une avec toutes ses faces plates et l'autre avec au moins une surface courbe, ou autrement dit une boîte qui roule. L'enseignant donne à chacun deux parts de terre à modeler. Les enfants reproduisent en modelage, avec toute la terre, les deux boîtes choisies. Ils essaient de respecter les proportions entre les faces, malgré l'agrandissement ou la réduction par rapport au modèle.

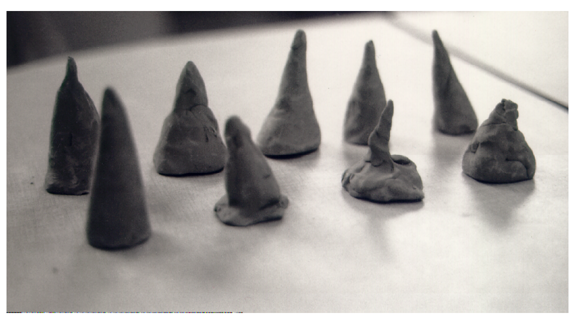
Puis on replace tous les modèles (les boîtes apportées) devant la classe et les enfants viennent un à un présenter leurs modelages. Pour chaque modelage, la classe essaie de retrouver parmi les boîtes, celle qui a servi de modèle. L'enfant devant la classe indique les surfaces courbes et les surfaces plates de ses boîtes, nomme s'il le peut la forme des faces (disque, demi-disque, carré, rectangle, triangle, ...) et donne éventuellement un nom aux boîtes (pyramide, cylindre, cube, boîte « rectangulaire »). Il peut aussi expliquer comment il s'y est pris pour modeler les deux types de faces.

Échos d'une classe

Les enfants ont apporté beaucoup de boîtes en forme de parallélépipède rectangle (emballages en carton, boîtes de rangement, ...) et de cylindres (boîtes à conserve, boîtes à biscuits, boîtes à fromage, ...). L'enseignant avait songé à compléter le lot avec d'autres boîtes en forme de pyramide, de sphère ou d'œuf (boîtes de désodorisant pour maison, boîtes de dragées), de cube, de prisme, etc.

Lors du modelage, les enfants ont utilisé toute la terre donnée, bien qu'ils n'en aient pas reçu la consigne. Ils sont partis d'une forme approximative qu'ils ont affinée et non de plaques de terre à assembler.

Ils ont utilisé spontanément la table pour faire rouler le cylindre, mais bien que l'enseignant l'ait suggéré, seuls quelques-uns ont tapé sur la table pour obtenir les parties plates. Les faces obtenues n'étaient pas parfaitement planes, mais les enfants estimaient qu'elles se distinguaient suffisamment des surfaces courbes. Ils se sont contentés d'une forme ressemblant globalement au modèle et n'ont pas perfectionné les arêtes et les coins. Ils sont arrivés sans compter au nombre correct de faces. Ils ont respecté naturellement le parallélisme.



Prolongements possibles

Confronter ses perceptions tactiles avec la réalité en associant un objet à une représentation (en deux ou trois dimensions) choisie parmi un lot.

1. Cacher un solide géométrique dans un sac, le palper sans le regarder et désigner parmi les boîtes celle qui lui ressemble le plus.
2. Cacher un des modelages dans un sac, le palper sans le regarder et désigner parmi une série de dessins de solides géométriques celui qui lui ressemble le plus.

Vers où cela va-t-il ?

Cette activité et la précédente introduisent les enfants dans l'univers de la géométrie et dans un monde de concepts qui ne cesseront de se perfectionner par la suite. En outre, certaines expériences élémentaires préfigurent des propriétés telles que : deux plans se coupent suivant une droite (on le voit là où deux faces d'un parallélépipède se rencontrent), trois plans se coupent habituelllement en un point (on le voit là où trois faces d'un parallélépipède se rencontrent), ou encore : si un plan coupe deux plans parallèles, il les coupe suivant deux parallèles. Rien de tout cela n'est théorisé dans l'immédiat, mais les intuitions qui se créent au cours de ces activités formeront le moment venu le support de la théorie.

2 Les assemblages de quatre cubes

De quoi s'agit-il ?

Construire le plus possible d'assemblages différents de quatre cubes.

Enjeux

L'enfant apprend à créer des objets en assemblant des cubes identiques. Il raisonne sur les combinaisons possibles dans les trois directions de l'espace et doit exclure les assemblages identiques. Il existe huit assemblages distincts. Ils posent un problème d'orientation. En effet, deux d'entre eux sont images l'un de l'autre dans un miroir (figure 1). Ils sont ici considérés comme distincts. L'enfant ne trouvera peut-être pas les huit assemblages. Il apprend à ne pas prendre en compte la position de l'objet sur la table. Il compare les assemblages en les orientant de la même façon.

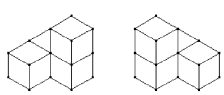


Fig. 1

Compétences. – *Construire des solides avec du matériel varié. Organiser selon un critère. Se situer et situer des objets.*

De quoi a-t-on besoin ?

Pour chaque enfant, 36 cubes en bois, en carton, ou mieux, des cubes attachables tels que les *multicubes*[1].

Comment s'y prendre ?

Les enfants travaillent individuellement à partir de cubes en vrac. Ils doivent construire le plus possible d'assemblages différents de quatre cubes. Dans un premier temps, on ne précise pas davantage la consigne, pour laisser l'interprétation du problème aux enfants. L'enseignant circule et observe chacun, il intervient si nécessaire.

Les situations qui peuvent se présenter sont les suivantes :

Si les cubes s'attachent les uns aux autres, ils sont toujours en contact par une face entière. S'ils ne sont pas attachables, on précise aux enfants que les cubes doivent se toucher par une face entière.

Si un enfant combine ses quatre cubes en fonction de leurs couleurs, l'enseignant lui précise que les couleurs n'ont pas d'importance, et que les assemblages doivent seulement avoir des formes différentes.

Une autre situation est celle où les élèves prennent comme critère de différence la position de l'assemblage sur la table. Dans ce cas, un assemblage

[1] Voir la section 7 de l'annexe 1 à la page 70.

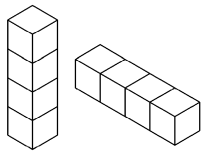


Fig. 2

en ligne droite placé horizontalement est différent d'un autre placé verticalement (figure 2). Il est nécessaire, à ce stade, de faire expliquer par les enfants pourquoi ils estiment que ces assemblages sont différents et il vaut mieux ne pas essayer de les convaincre à tout prix qu'ils sont identiques. On explique qu'on ne veut pas faire attention à la position, mais seulement à l'objet lui-même, qui demeure inchangé quand on le déplace. L'enseignant peut prendre deux assemblages identiques et les amener dans une position similaire pour faire voir à l'enfant qu'ils sont effectivement identiques.

Une dernière situation est celle d'un enfant qui pense avoir terminé, alors qu'il existe encore des assemblages à faire. Là, l'enseignant l'encourage à chercher d'autres solutions en lui assurant qu'il en existe encore, ou que tel élève en a trouvé d'autres. Néanmoins, il ne faut pas attendre que tous les enfants aient trouvé les huit assemblages. Chacun avance à son rythme dans la résolution du problème et les enfants ne sont pas encore prêts à comprendre pourquoi il en existe huit et pas plus.

La dernière phase est une sorte d'auto-correction collective. On suggère aux enfants de comparer entre eux leurs réalisations et de construire les assemblages manquants. Cette démarche les amène à placer leurs constructions respectives côte-à-côte dans des orientations similaires et à reproduire les structures manquantes par observation d'un modèle, celui d'un autre enfant. C'est l'occasion d'échanges intéressants, chacun expliquant à l'autre ce qu'il a fait et comment.

Échos d'une classe

Les enfants ont accordé beaucoup d'importance à la position des assemblages sur la table. Ils se sont expliqués en disant « une tour, ce n'est pas la même chose qu'un mur ».

Au travers de leurs mots, on a senti la prégnance de l'horizontale et de la verticale, qui interfèrent avec leur vision globale de l'objet dans l'espace.

Le fait le plus significatif est sans doute la découverte des trois assemblages qui occupent les trois directions de l'espace. En effet, beaucoup d'enfants ont obtenu en premier lieu les cinq assemblages de la figure 3 à la page suivante. Il leur a fallu un certain temps pour « sortir dans la troisième dimension », c'est-à-dire pour assembler leurs cubes dans les trois directions de l'espace (figures 4 à la page suivante et 5 à la page suivante). Le problème s'est alors posé de différencier les deux assemblages (figure 5) qui sont image l'un de l'autre dans un miroir. Les enfants les ont retournés dans tous les sens, les ont emboîtés pour en faire un cube. Certains pensaient les mettre dans une position adéquate pour montrer qu'ils étaient les mêmes, mais n'y sont pas parvenus. Ils ont continué à dire que ces deux assemblages étaient « les mêmes ». Néanmoins, la découverte de cette difficulté était déjà en soi une étape importante.

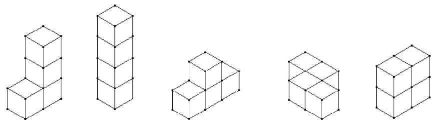


Fig. 3

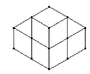


Fig. 4

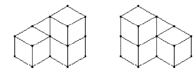


Fig. 5

Prolongements possibles

Faire des constructions avec des cubes de différentes couleurs, de manière à ce que deux cubes qui se touchent par une face ne soient pas de la même couleur.

Vers où cela va-t-il ?

On dit que deux objets sont *isométriques* si on peut les mettre en correspondance point par point, et si la distance entre deux points sur l'un est toujours égale à la distance entre les deux points correspondants de l'autre. Cette activité prépare la notion importante d'isométrie des solides. La découverte des deux solides images l'un de l'autre dans un miroir et non superposables mentalement prépare la notion de figure orientée. Les figures orientées les plus importantes sur le plan théorique sont les repères utilisés en géométrie vectorielle et analytique. L'orientation intervient aussi en physique, entre autres dans la théorie des courants électriques. Elle est associée à des moyens de visualisation comme le tire-bouchon, la règle des trois doigts de la main droite, le bonhomme d'Ampère, etc.

3 La lecture de représentations en perspective

De quoi s'agit-il ?

Reconnaître des objets d'après des représentations en perspective. Réaliser des constructions de blocs en suivant les indications de représentations planes.

Enjeux

L'objectif est d'apprendre à aller et venir entre le plan et l'espace, d'abord à partir de photos et ensuite de dessins géométriques en perspective parallèle. L'utilisation de photographies est une bonne entrée en matière pour l'étude des représentations planes des objets de l'espace (voir les enjeux de l'activité 3 à la page 14).

L'enfant apprend à reconnaître un même objet présenté selon différents points de vue ou dans diverses positions. Il associe certaines caractéristiques du dessin à celles qui lui correspondent dans l'objet à trois dimensions. Il compare, déduit et apprend à s'exprimer avec un langage approprié.

Enfin, la structuration spatiale intervient lorsque l'enfant organise une construction en trois dimensions d'après les indications d'un schéma.

Compétences. – *Se situer et situer des objets. Associer un solide à sa représentation et réciproquement. Organiser selon un critère.*

De quoi a-t-on besoin ?

- De grands blocs en mousse ou des caisses ;
- des petits blocs de construction en bois ou en mousse (voir la section 7 de l'annexe 1 à la page 70) ;
- un appareil photographique ;
- des dessins en perspective parallèle de blocs et d'assemblages (par exemple, les fiches 22 à 24, pages 96 à 98, et les fiches 26 et 27, pages 100 et 101) ;
- des cubes unis de différentes couleurs ;
- des cubes multicolores (six couleurs ou trois couleurs, une par paire de faces opposées) ;
- des dessins en perspective d'assemblages de cubes sur papier quadrillé et sur papier pointé (par exemple, les fiches 30 et 31, pages 104 et 105).

Comment s'y prendre ?

Lien avec le maternel. – La première proposition est de réaliser les mêmes activités qu'en maternelle si elles n'ont pas été faites auparavant.

Il s'agit d'abord de prendre une position ou de faire une construction en s'inspirant d'une photo (voir activité 3 à la page 14).

Puis, on retrouve les quatre points de vue présentés par quatre photos d'un assemblage, et on réalise la construction à partir des quatre photos (voir activité 3.1 à la page 29) .

Ensuite, on passe des photos aux dessins en perspective. Au travers de jeux, l'enseignant demande de reconnaître des blocs géométriques d'après des dessins qui les présentent selon différents points de vue et dans diverses positions (voir activité 3.2 à la page 31).

Après cela, on passe aux assemblages de blocs selon des dessins. Les constructions se font avec de grands blocs en mousse et de petits blocs en bois. Dans le premier cas, l'enfant s'organise dans un espace plus grand que lui. Dans le second cas, il apprend à maîtriser un espace dont il a une vue globale immédiate (voir activité 3.3 à la page 35).

Enfin, on aborde des projections orthogonales. On construit des assemblages de blocs d'après des vues de face (voir le jeu *Architek*[2] abordé dans les prolongements de l'activité 3.3 à la page 39). On enchaîne avec des vues de haut d'assemblages « en une couche ». Il s'agit de rassembler les blocs désignés par des dessins en perspective, puis de les combiner à la façon d'un puzzle pour remplir une forme donnée (contour) (voir le jeu *Architek*[3] dont la figure 6 à la page suivante montre une photo).

[2] M. Lyons et R. Lyons [sans date].
[3] M. Lyons et R. Lyons [sans date].

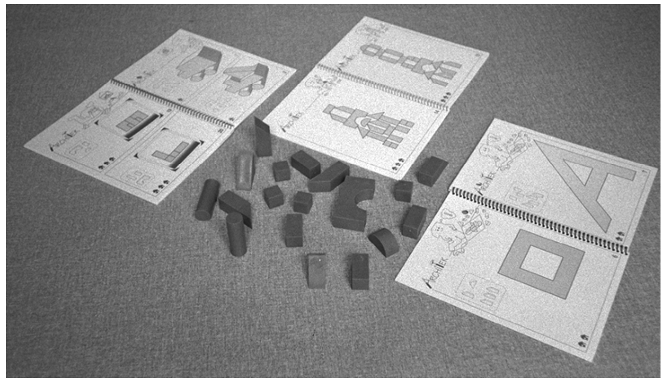


Fig. 6

Propositions nouvelles. – La deuxième proposition est de travailler avec des cubes. Des représentations en perspective montrent les blocs sur un quadrillage avec une face carrée à l'avant-plan (figures 7) et sur papier pointé avec une arête devant (figures 8).

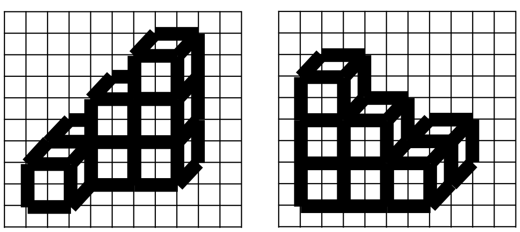


Fig. 7

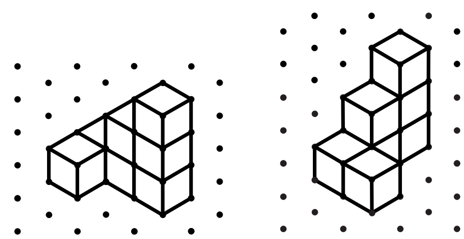


Fig. 8

Ces deux types de vue enrichissent les images mentales que l'on se fait du cube. On peut proposer de faire le va-et-vient entre les deux. Il s'agit alors d'associer un ou plusieurs dessins sur quadrillage et sur papier pointé à un assemblage donné.

Les enfants réalisent également des assemblages à partir de tels dessins. Soit les cubes sont unis et chacun d'une couleur différente. On travaille alors sur les possibilités de combinaisons et les rythmes de couleurs. Soit les cubes sont multicolores, ils présentent les six faces de couleurs distinctes ou les paires de faces parallèles de même couleur[4].

Vers où cela va-t-il ?

Cette activité approfondit la capacité de va-et-vient entre les solides géométriques et leurs représentations en perspective parallèle et en projection orthogonale. Elle prépare, après d'autres, à l'étude des projections dans l'espace. Elle est en outre une étape d'un apprentissage qui sera sans cesse développé dans la suite : celui de la capacité à voir dans l'espace et de se servir des représentations planes comme moyen de communication en géométrie et plus généralement dans les sciences.

[4] Voir le jeu *Structuro* de *Nathan*.

4

ACTIVITÉS EN 3e ET 4e PRIMAIRE

1 Le modelage d'un parallélépipède rectangle et d'un cylindre

De quoi s'agit-il ?

Réaliser deux modelages en prenant pour modèles une boîte à faces rectangulaires et une boîte cylindrique.

Enjeux

Un objectif est de distinguer les solides à faces planes des autres. Un autre objectif est d'étudier la famille des parallélépipèdes rectangles et celle des cylindres. On parle de familles puisque l'enfant doit pouvoir reconnaître tous les parallélépipèdes rectangles (en y incluant le cube), quelles que soient les dimensions de ses faces, ainsi que tous les cylindres, quelles que soient les variations de la hauteur et de la circonférence. L'enfant donne, en modelant, une forme précise aux faces, il les rend lisses ou courbes de manière régulière, les proportionne, marque des arêtes et expérimente les notions de parallélisme et de perpendicularité. Un objectif complémentaire réside dans la précision des gestes et l'exactitude des observations.

Compétences. *– Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer. Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie. Construire des solides simples avec du matériel varié. Fractionner des objets en vue de les comparer.*

De quoi a-t-on besoin ?

– De la pâte à modeler au choix parmi les matériaux proposés dans l'annexe 1 à la page 68 ;
– des boîtes cylindriques et parallélépipédiques apportées par les enfants.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant donne pour consigne d'apporter « des boîtes rectangulaires et des boîtes rondes ». Ces termes ne sont pas trop savants, ce qui permet aux enfants de les interpréter.

Une fois les boîtes en classe, l'enseignant engage une discussion sur les choix des enfants. En effet, chacun présente ses boîtes aux autres et explique son choix. Il s'agit là d'une description des surfaces, de leur morphologie (forme, lisse, courbe, plat) et des mouvements qui en découlent (ne roule pas, roule en ligne droite, etc). Les divergences de point de vue doivent amener des comparaisons, puis une définition des boîtes rectangulaires (parallélépipèdes rectangles) et des boîtes rondes (cylindres). Les enfants opèrent une sélection et excluent les boîtes non conformes (par exemple, les prismes à bases hexagonale qui pourtant comportaient des faces rectangulaires, les boîtes à base ovale, etc.). Il ne doit rester en définitive que deux familles de boîtes : les parallélépipèdes rectangles et les cylindres. S'il reste trop peu de boîtes, l'enseignant laisse aux enfants du temps supplémentaire pour en apporter d'autres, ils devront alors se souvenir des critères définis ensemble.

Ensuite, on passe au modelage : l'enfant prend pour modèles deux boîtes, une de chaque type et en réalise une copie avec les deux parts de terre reçues. Notons que l'on peut profiter du partage de la pâte à modeler pour poser aux enfants un problème de fractionnement et de masse à peser. L'enseignant charge les enfants de trouver une solution pour que chacun reçoive la même part à diviser en deux. Ce sont les enfants qui réalisent le partage en s'aidant de balances.

Échos d'une classe

Lors de l'observation des boîtes, les enfant ont cité spontanément les formes des faces comme critère de choix. Les mouvements naturels des boîtes leur ont paru évidents : les faces courbes roulent plus ou moins bien selon les cas et ils s'en sont expliqués avec leurs mots. Par exemple, ils ont différencié les mouvements d'une boîte à base ovale « qui ne roule pas bien, qui va plus vite et après plus doucement » , d'un cylindre « qui roule tout droit » et d'un cône « qui tourne en rond ». Par contre, les comparaisons de grandeurs de faces ont bien été présentes. Ils ont par exemple constaté que les faces opposées de tous les parallélépipèdes rectangles étaient de même grandeur. Pour le cylindre, ils ont fait remarquer que les deux extrémités étaient des disques de même grandeur.

Les enfants ont débuté le modelage avec toute la terre reçue et ont réalisé une forme ressemblant globalement au modèle. Mais très vite, sans que l'enseignant le leur ait suggéré (ils ne disposaient de rien sur leur table), ils ont tapé la masse sur la table pour obtenir des faces les plus planes possible, ils se sont servi de règles plates ou de ciseaux pour retrancher des parties et obtenir des extrémités de cylindres ou des faces rectangulaires plus nettes. On a senti un souci du détail et un certain respect du modèle.

Prolongements possibles

Réaliser des modelages en prenant pour modèles d'autres solides tels que des pyramides, des cônes, des prismes, etc. Les figures 1 et 2 montrent des cônes et des pyramides réalisés en 3e année. La figure 3 présente les deux types de modelages réalisés en 4e année.

Fig. 1

Fig. 2

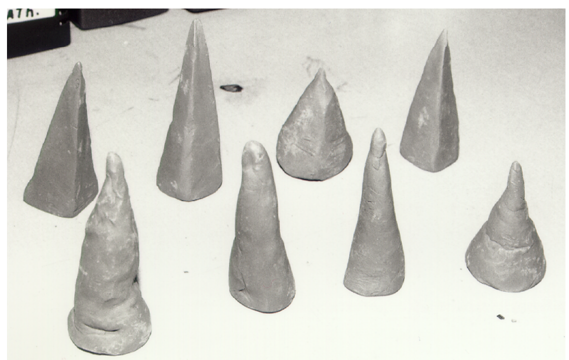


Fig. 3

Vers où cela va-t-il ?

Cette première rencontre de deux familles de solides (les parallélépipèdes rectangles et les cylindres) contrastées à d'autres (les pyramides, les cônes, ...) conduit pour plus tard à la multitude des solides et des surfaces qui sont parmi les objets principaux qu'étudie la géométrie. Le parallélépipède conduit aux polyèdres. Le cylindre et le cône débouchent à la fin du secondaire sur les sections coniques : l'ellipse, l'hyperbole et la parabole. Ces solides sont aussi parmi ceux dont on établira le volume et l'aire des surfaces en calcul intégral.

2 Une approche des développements

2.1 Construire une boîte

De quoi s'agit-il ?

Construire une boîte parallélépipédique en carton.

Enjeux

La construction d'une boîte en carton introduit les premières notions de développement : l'égalité des faces opposées et l'égalité des côtés qui doivent se rejoindre. On utilise pour ce faire du papier non quadrillé. L'enfant opère un va-et-vient entre l'espace et le plan, entre l'objet modèle et le développement de la boîte. Il utilise les mesures de grandeurs et les instruments de dessin pour réaliser des figures planes. Enfin, en dessinant des rectangles, les enfants se familiarisent avec les parallèles et les perpendiculaires même s'ils les tracent à main levée.

Compétences. – *Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation et réciproquement. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons conventionnels et en exprimer le résultat.*

De quoi a-t-on besoin ?

– Des parallélépipèdes rectangles de dimensions variées (blocs pleins) ;
– un crayon, une gomme et une règle graduée ;
– du papier de brouillon ;
– du papier cartonné ;
– des ciseaux et du papier collant.

Comment s'y prendre ?

Suite à l'observation de boîtes existantes et au modelage d'un parallélépipède rectangle lors de l'activité 1, les élèves réalisent une boîte parallélépipédique. On met à leur disposition des blocs pleins qui peuvent (ce n'est pas obligatoire) servir de modèle pour l'agencement des faces. L'approche du problème est libre, de manière à permettre aux enfants de trouver une stratégie de construction efficace. La notion de développement est sous-jacente, mais l'enseignant ne l'impose pas, il la laisse découvrir. Il ne fait pas non plus l'inventaire des caractéristiques d'une telle boîte (nombre et forme des faces). Les élèves doivent découvrir dans l'action ces propriétés de l'objet.

Une étape consiste à ouvrir mentalement la boîte pour en faire un plan de construction en deux dimensions. Il s'agit d'un va-et-vient entre l'espace et le plan : il faut prévoir l'emplacement des différentes faces et coordonner les mesures des côtés. Ceci se fait par tâtonnements, l'enfant dessine un premier projet au brouillon, le rectifie et l'ajuste encore lors de l'assemblage de la boîte. L'idée du développement (même si son exécution n'est pas exacte) permet de travailler à l'économie : moins de lignes à tracer, moins de morceaux à assembler, par comparaison avec la réalisation des faces une à une. Les enfants y sont sensibles. Certains éprouvent le besoin de découper leur brouillon pour vérifier s'il est réalisable.

Une fois la boîte grossièrement réalisées en papier (pas besoin de coller), l'enseignant donne du papier cartonné pour recopier le développement avec précision. Puis, les enfants découpent le ou les morceaux et les assemblent avec du papier collant. Si nécessaire, ils réajustent, plient ou recoupent les morceaux trop grands.

Échos d'une classe

Beaucoup d'enfants se sont directement lancés dans un dessin qui ressemblait à un développement, bien qu'ils n'en aient jamais abordés explicitement dans leur parcours scolaire. Leur premier projet a été fait à main levée ou en utilisant la règle pour tracer des lignes droites, quoique sans mesurer. Cette manière de dessiner au jugé a engendré beaucoup de développements irréalisables en raison des mauvaises proportions des faces les unes par rapport aux autres (figure 4). Cela n'a pas été un obstacle pour les enfants, qui ont redécoupé les morceaux superflus au moment de l'assemblage. Lors du projet définitif, la règle a été largement utilisée, mais toujours sans mesurer.

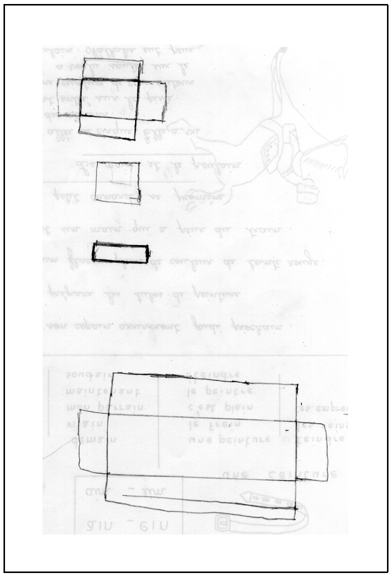


Fig. 4

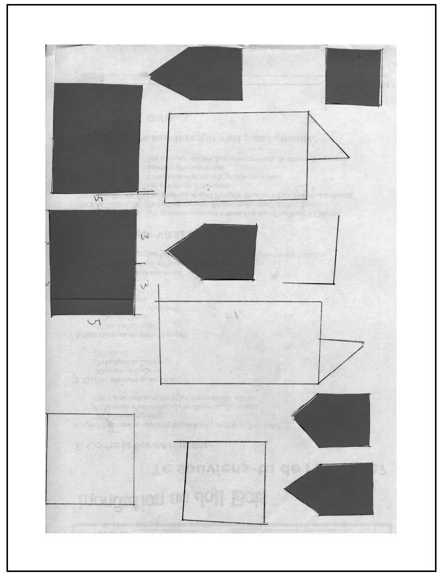


Fig. 5

La réalisation du développement s'est faite de différentes manières. Certains ont contourné les faces du bloc modèle. D'autres ont dessiné les faces séparément. C'est que montre la figure 5, où l'enfant a noté des mesures en les respectant approximativement et a prévu des languettes triangulaires pour le collage. Pourtant, lors de la réalisation finale, ces mêmes enfants ont redessiné les faces en les assemblant comme dans un développement. Seul un enfant a continué à traiter les faces une par une. Il avait dessiné plusieurs boîtes en perspective. Fier de son résultat, il ne parvenait pourtant pas à faire un projet à plat (figures 6 et 7 à la page suivante : un détail agrandi montrant l'essai de développement). Finalement, il a assemblé six carrés pour obtenir un cube, dont il avait la maîtrise.

La plupart des projets présentaient des développements en croix. Certains avaient choisi quatre faces adjacentes de même grandeur. Parfois, les bases étaient dessinées à part. Parfois, elles étaient placées à un mauvais endroit sur le développement, ce qui a entraîné des surprises lors de la construction.

Le projet de Sébastien à la figure 8 à la page suivante montre des faces latérales plus ou moins identiques et des bases ajoutées sans rapport de mesures entre les côtés. Quant à la figure 9 à la page suivante, un élève avait dessiné la face hachurée à part. Un premier assemblage lui a permis de repérer l'endroit où devait venir cette face, il l'a alors ajoutée sans réaliser que le collage lui imposait un empiétement de faces qui modifiait les dimensions. Comme dans beaucoup de cas, cet enfant avait une idée exacte de la réalisation du développement, mais une mise en pratique maladroite a faussé le résultat.

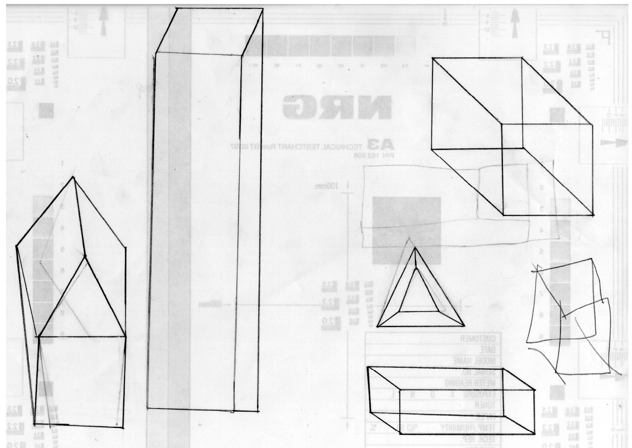


Fig. 6

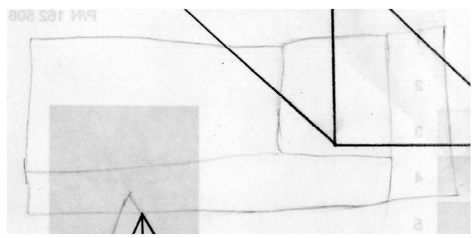


Fig. 7

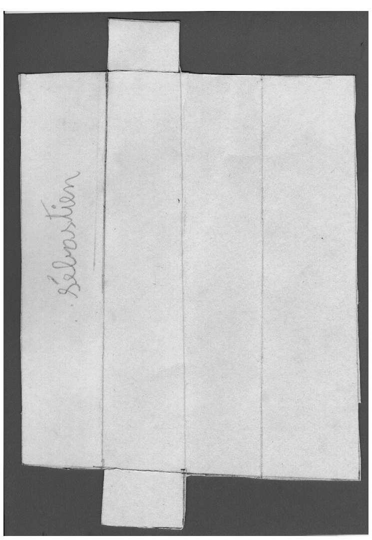


Fig. 8

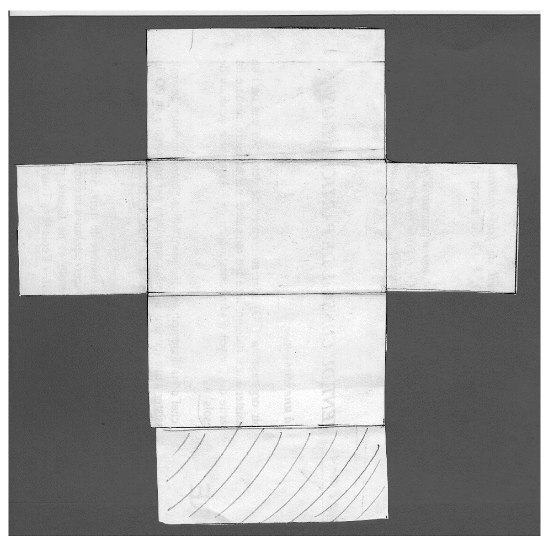


Fig. 9

Un problème parfois rencontré a été le manque de place sur la feuille. Soit les enfants avaient commencé à un endroit inadéquat, soit ils avaient fait plusieurs essais successifs et le dernier débordait de la page.

Quelques enfants ont procédé par pliage de la feuille et ont rabattu les morceaux en excédent ou les ont coupés. La figure 10 présente un pliage de la feuille, suivi du découpage de deux rectangles (en noir sur la figure). Les bases carrées trop nombreuses ont été superposées lors du collage.

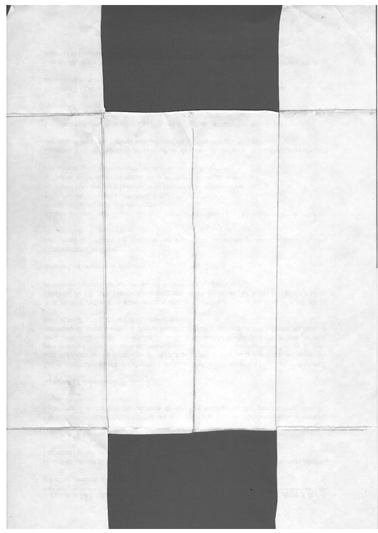


Fig. 10

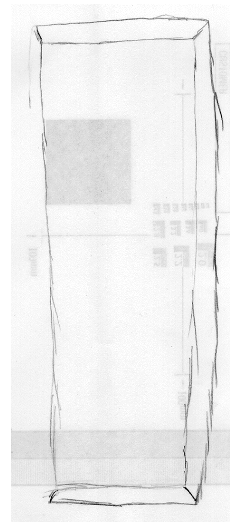


Fig. 11

Certains ont été incapables de réaliser un dessin préparatoire adéquat comme le montre la figure 11.

Un enfant a dessiné cinq faces (figure 12). Il a assemblé les trois faces rectangulaires et a obtenu la surface latérale d'un prisme triangulaire auquel les bases carrées ne s'adaptaient pas. Il lui semblait bien que quelque chose n'allait pas, il a alors rabattu deux coins des faces carrées à l'intérieur de la boîte. Sa boîte était finie mais il n'était pas satisfait, elle ne ressemblait pas au modèle ! Il lui a fallu un long moment de réflexion pour se rendre compte du problème et recommencer son développement.

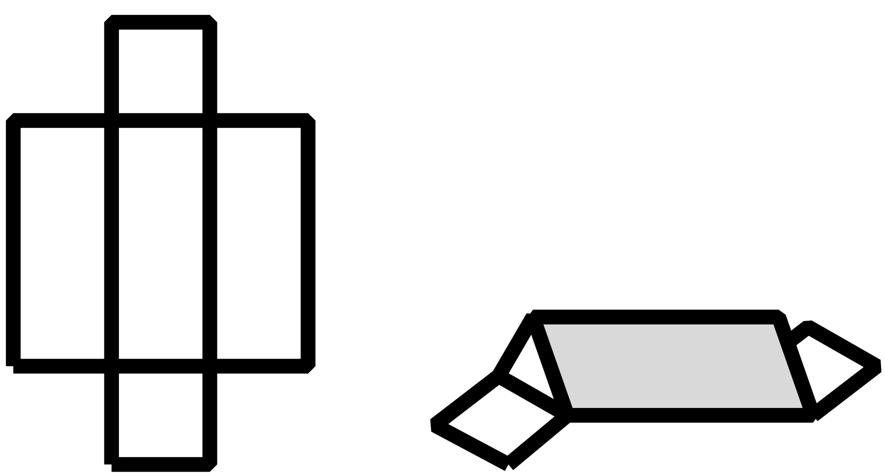


Fig. 12

Un dernier cas est celui présenté à la figure 13. On y trouve un cheminement intéressant. L'enfant, qui voulait réaliser un cube, a débuté par un dessin en perspective dont il s'est servi pour compter les faces. Il a réalisé un premier essai à main levée, puis a utilisé sa règle pour le dessin final.

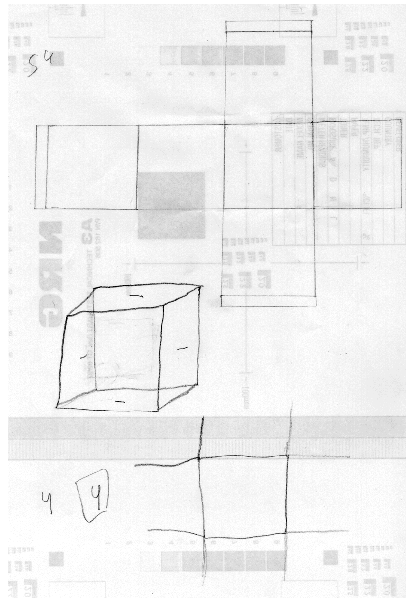


Fig. 13

Soulignons pour finir que l'assemblage des différents morceaux par collage n'a pas été évident. Les enfants se sont entraidés : l'un tenait les faces jointes, l'autre posait le papier collant. Certains avaient prévu des empiècements supplémentaires pour le collage. La figure 14 montre quelques parallélépipèdes construits par les élèves.

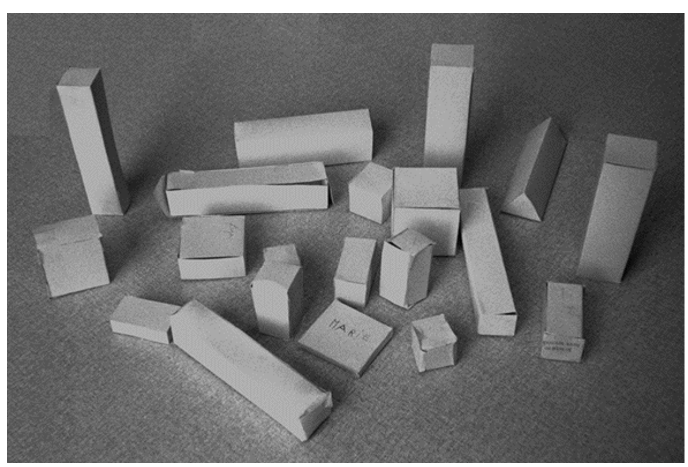


Fig. 14

Prolongements possibles

Réaliser d'autre types de boîtes (pyramides, cônes, cylindres, ...).

2.2 Reproduire un développement

De quoi s'agit-il ?

Réaliser une boîte parallélépipédique dont les dimensions sont données sur un schéma. Décorer les faces selon des consignes précises avant de construire la boîte.

Compétences. – *Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation et réciproquement. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons conventionnels et en exprimer le résultat.*

Enjeux

Pour construire une boîte de dimensions données, l'enfant doit décoder des informations indiquées sur un développement. Il reporte avec précision des longueurs en utilisant sa règle graduée. Afin de décorer la boîte, il doit prévoir l'emplacement dans l'espace des différentes faces, ce qui stimule son imagination spatiale.

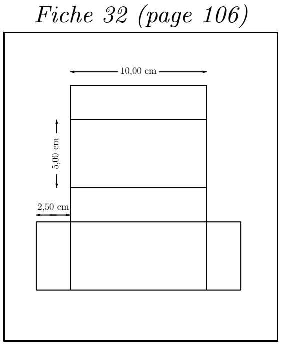
Prérequis : avoir construit une boîte librement (voir activité 2.1 à la page 52).

De quoi a-t-on besoin ?

- Le développement d'un parallélépipède rectangle à l'échelle, avec des indications de dimensions (fiche 32 à la page 106 à photocopier agrandi) ;
- du papier quadrillé d'un seul côté (fiche 33 à la page 107 à photocopier sur papier cartonné) ;
- un crayon ordinaire et des crayons de couleur, une gomme et une règle graduée ;
- des ciseaux et du papier collant.

Comment s'y prendre ?

Fiche 32 (page 106)



L'enseignant demande à quelques enfants de venir tracer au tableau le développement de la boîte qu'ils avaient construite librement. Il fait remarquer les difficultés rencontrées, telles que le manque de place sur la feuille, les faces opposées qui doivent avoir la même grandeur, etc. Il souligne qu'un développement est plus efficace que le tracé séparé de chaque face. Il donne le développement prévu (fiche 32), que les enfants doivent reproduire précisément. Celui-ci est présenté agrandi sur une feuille (au tableau, ou une feuille par équipe), et les dimensions y sont notées telles qu'elles doivent être réellement. Les différentes mesures n'apparaissent qu'une seule fois, de manière à ce que l'élève les transpose aux segments de même longueur. L'enseignant ne fournit pas d'explication, afin de laisser le décodage du développement comme un problème à résoudre. Les enfants disposent d'un quadrillage pour les aider à dessiner des rectangles précis. Ils ne connaissent pas les dimensions des carrés du quadrillage. Celles-ci sont dans des rapports simples avec celles du développement.

L'enseignant vérifie les dessins et indique s'il y a des erreurs à corriger. Puis, les enfants découpent leur développement et marquent les plis. Ainsi les faces sont déterminées et on peut décorer la boîte sur le côté du papier qui n'est pas quadrillé.

La décoration doit se faire avant la fermeture de la boîte. Ainsi, les élèves sont amenés à prévoir, sur le développement, l'orientation des dessins en position finale. Pour la décoration, on laisse le choix entre les deux consignes[1] suivantes. Soit la boîte est une maison et les enfants tracent aux bons endroits les portes, les fenêtres, une plante grimpant sur la façade, le revêtement du toit plat, etc. Soit il s'agit d'une boîte colorée et les enfants décorent d'une même couleur les faces opposées. L'enseignant illustre cette dernière consigne en montrant sur une boîte fermée ce que sont les faces opposées. On peut dire qu'elles sont l'une en face de l'autre, qu'elles sont parallèles. Pour les boîtes colorées, les enfants doivent choisir à l'avance les faces qui auront même couleur.

La dernière étape est de refermer la boîte et de coller les faces. Deux élèves ne sont pas trop pour cela !

Échos d'une classe

Parce qu'ils voulaient construire une belle boîte, les enfants ont trouvé stimulant de décoder les informations du développement. Ils ont réinvesti leurs connaissances sur les nombres décimaux et les mesures de longueur. Toutefois, certains ont eu de la peine à trouver 2,5 cm sur leur règle graduée et à reporter cette mesure sur le quadrillage. Quelques-uns n'ont pas tenu compte du quadrillage. Ils n'ont pas fait correspondre l'origine et l'extrémité des segments aux nœuds du quadrillage. Leur tâche s'est compliquée lors du tracé des parallèles et des perpendiculaires. Le résultat ne fut pas satisfaisant et la multitude de traits surchargeant le quadrillage rendait le découpage très hasardeux.

Beaucoup d'élèves n'ont pas pensé à organiser l'espace de leur feuille et leur dessin n'étant pas centré, ils ont manqué de place. Une solution a été de commencer par les bords les plus longs du développement.

Pour arriver à une vue globale, certains ont délaissé des détails et leur développement n'était plus conforme au résultat attendu.

C'est par une analyse des données et une exécution méthodique que les meilleurs résultats ont été obtenus. Tout d'abord, les enfants ont cherché à quoi correspondaient les mesures indiquées. Ils ont ensuite cherché à quels segments correspondaient ces mesures. Un enfant s'est posé la question de savoir pourquoi tous les côtés ne portaient pas de mesure et il les a tous vérifiés avec sa règle graduée.

La plupart ont tracé les rectangles indépendamment les uns des autres, sans pourtant repasser sur les côtés adjacents confondus dans le dessin. Quelques-uns ont reproduit toute la longueur du développement d'un seul trait en comptant les carrés du quadrillage. Parfois des faces ont été oubliées.

Certains élèves ont désiré faire plusieurs essais ou ont réajusté leur dessin jusqu'à l'obtention d'un développement exact.

Lors de la décoration, quelques-uns ont relevé les pans latéraux pour vérifier si les dessins étaient bien orientés. Un toit s'est retrouvé comme fondation de la maison !

[1] On peut décider qu'à la séance suivante les enfants réalisent l'autre consigne.

Prolongements possibles

Construire des boîtes de dimensions et de formes variées pour réaliser une maquette.

Utiliser les boîtes décorées pour faire des dessins de différents points de vue (voir l'activité 3 qui suit).

Vers où cela va-t-il ?

L'étude des développements débouche plus tard sur la distinction entre surfaces développables (les surfaces polyédrales, les cônes, les cylindres, ...) et non développables (par exemple, la sphère).

Les développements de polyèdres fournissent un exemple de graphe : des objets (en l'occurence les faces, les arêtes) sont connectés entre eux, on discerne des chemins qui vont d'un objet à un autre en traversant diverses connexions. Ce type de structure porte le nom de *graphe*. Les graphes forment un chapitre de la topologie. Ils ont de multiples usages pratiques. Pour ne citer qu'un seul exemple : les plans de métro qui fournissent les connexions entre les liqnes sans donner le tracé géographiquement exact de celles-ci.

3 Des parallélépipèdes rectangles dessinés de face et du dessus

De quoi s'agit-il ?

Dessiner, d'abord librement et ensuite sur papier quadrillé, les vues orthogonales de parallélépipèdes rectangles disposés sur la table. Faire reconstituer l'assemblage par quelqu'un ou retrouver le point de vue d'un dessin particulier.

Enjeux

Il s'agit de se familiariser avec les vues de face et du dessus de solides géométriques en explorant les conventions de tels dessins. Les activités mettent en jeu les positions relatives des objets, les distances et les mesures.

Compétences. – *Se situer et situer des objets. Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation et réciproquement.*

De quoi a-t-on besoin ?

– Trois grands blocs en mousse ou des caisses parallélépipédiques de différentes couleurs (arêtes de l'ordre de 50 à 80 cm) ;
– des petits parallélépipèdes rectangles de couleurs différentes, par exemple ceux réalisés par les enfants (voir activité précédente) ;
– du papier quadrillé d'un centimètre de côté ;
– du matériel de dessin.

Comment s'y prendre ?

La première phase consiste à dessiner les grands blocs posés au milieu des enfants. Pour cela, on dispose les élèves en carré autour d'une grande table sur laquelle sont posés les blocs à hauteur des yeux. La vue des faces rectangulaires est ainsi prégnante. Les blocs sont disposés parallèlement aux bords de la table, comme le montre la vue aérienne de la figure 15 à la page suivante. Ils sont espacés les uns des autres, chacun posé sur une base différente (figure 16), et vus de face, ils se cachent partiellement les uns les autres (figures 17 à 20). La consigne est de dessiner les blocs (et de les colorier) chacun de son point de vue, c'est-à-dire de représenter uniquement les faces que l'on a devant soi[2]. On suggère aux enfants assis de biais de se déplacer pour voir l'assemblage bien en face.

Les dessins ne seront pas aussi précis que ceux des figures 17 à 20. Les enfants peuvent dessiner à main levée, mais il faut qu'un autre puisse identifier leur dessin. En effet, une fois les dessins terminés, on les mélange et les distribue au hasard en demandant à chacun de se placer à l'endroit d'où le dessin qu'il a reçu a été fait. L'enseignant relève l'ambiguïté ou le manque de précision de certains dessins.

Ensuite, on procède autrement. Les enfants proposent par un dessin qu'ils réalisent librement, une certaine disposition des blocs. Ils échangent leurs projets, puis construisent ce qui a été dessiné.

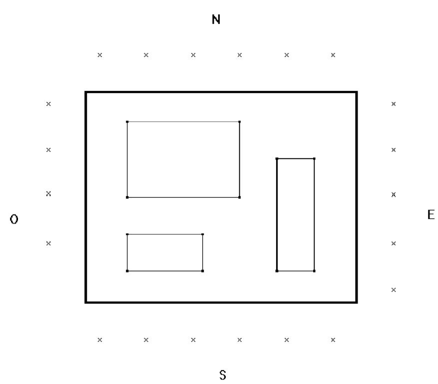


Fig. 15

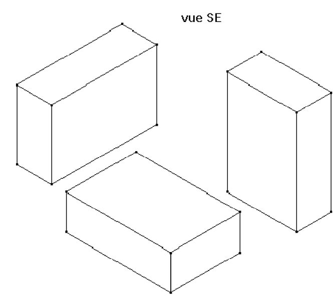


Fig. 16

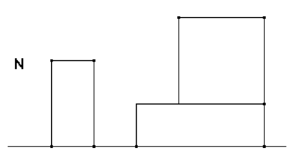


Fig. 17

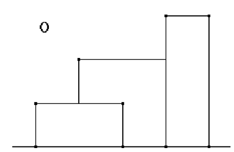


Fig. 18

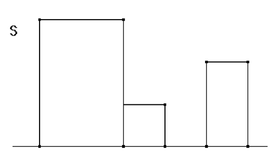


Fig. 19

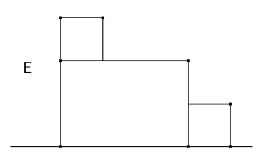


Fig. 20

La deuxième phase de l'activité consiste à travailler avec des petits modèles de parallélépipèdes rectangles, par groupes de quatre autour d'une table. Un enfant dans chaque groupe choisit une disposition pour les blocs, en veillant à les placer parallèlement aux bords de la table. Ensuite, au recto d'une feuille, les quatre enfants dessinent l'assemblage de leur point de vue

[2] Aux enfants qui éprouvent des difficultés à déterminer les faces à dessiner, on propose de venir placer un signe à la craie sur toutes les faces qui sont juste devant eux.

c'est-à-dire de face. Au verso de leur feuille, ils dessinent la vue du dessus de l'assemblage. Ils mettent un signe identique sur les feuilles de cette série de manière à les identifier facilement plus tard.

On recommence les mêmes opérations en donnant, à chaque enfant successivement, l'initiative de placer les blocs. Lorsque l'on possède les quatre séries de dessins (soit seize en tout), on essaye de reconstruire chaque assemblage à partir des dessins et on vérifie à partir de la vue du dessus.

L'enseignant fait le point avec les enfants sur les difficultés rencontrées, qui ont trait le plus souvent aux positions relatives des blocs et aux modes de représentation. On suggère alors de disposer les blocs sur un quadrillage de 1 cm sur 1 cm et de faire une série de dessins sur papier quadrillé en respectant les écarts entre les blocs. Cette convention permet de désigner précisément les positions relatives des blocs. Il devient alors possible d'échanger les dessins entre les équipes et de construire assez facilement de multiples assemblages que l'on a pas dessinés soi-même.

Échos d'une classe

Nous n'avons pas eu l'occasion d'expérimenter cette activité en 3e et 4e années. Voici à défaut un écho d'une expérimentation en 1ère et 2e années. Elle a porté uniquement sur les dessins libres de grands blocs, l'introduction du quadrillage étant plutôt destinée à des plus grands, car elle demande une structuration de l'espace plus précise que lorsqu'on est libre de positionner les blocs à sa guise.

L'enseignant a utilisé des prismes à base carrée d'une hauteur de 70 cm sur une base de 35 cm. Ces dimensions étaient suffisantes pour que la vision des faces rectangulaires soit prédominante. Néanmoins, les blocs ont d'abord été posés sur le sol. Ceci a entraîné une vue en surplomb qui a faussé les dessins. Par exemple, les trois dessins suivants ont été faits d'un même côté de l'assemblage. Le premier (figure 21) semble être le plus proche de la consigne, si on ne tient pas compte du mauvais alignement au sol. Le deuxième dessin (figure 22) montre le bloc de gauche avec trois faces comme le voyait l'enfant de son point de vue. Quant au troisième dessin (figure 23), on peut dire que l'enfant surplombait l'assemblage. Il n'a donc pas vu que le bloc central était partiellement caché par le bloc couché. De plus, il a représenté le bloc de gauche par un rectangle (et non un carré) car il voyait la face du dessus. L'enseignant a atténué ces difficultés en plaçant les blocs sur une table à hauteur des yeux.

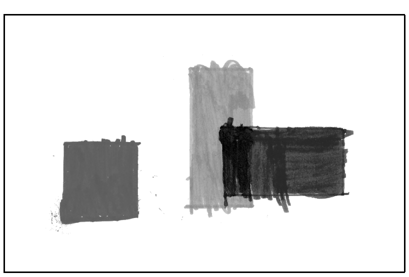


Fig. 21

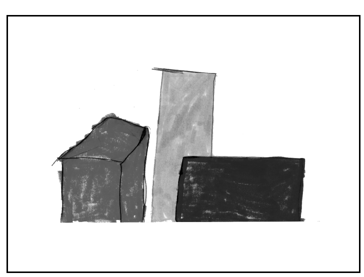


Fig. 22

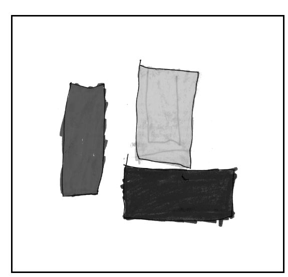


Fig. 23

Par contre, un problème persistant a été de proportionner les blocs les uns par rapport aux autres et d'évaluer les écarts entre eux. Voici pour un assemblage donné, trois dessins (figures 24 à 26) réalisés du même côté et qui illustrent cela.

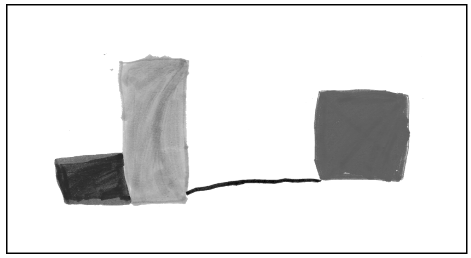


Fig. 24

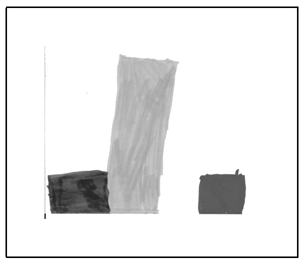


Fig. 25

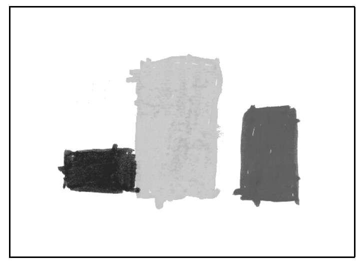


Fig. 26

Chez les plus grands (7-8 ans), on a vu apparaître des dessins en perspective comme ceux des figures 27 et 28.

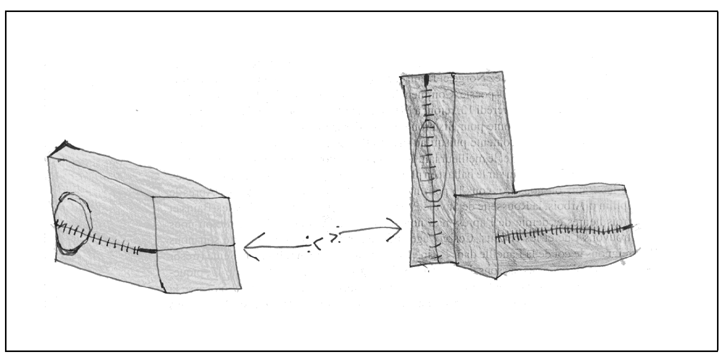


Fig. 27

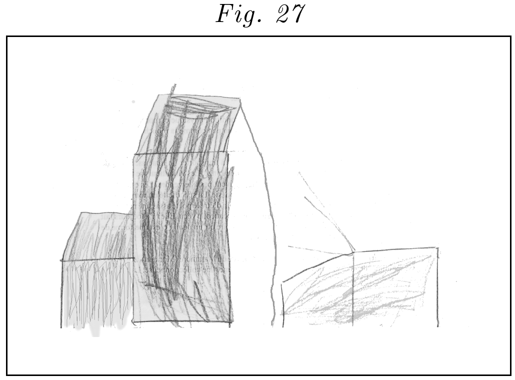


Fig. 28

Enfin, l'enseignant a proposé de dessiner un projet d'assemblage. Alors qu'ils n'avaient pas eu l'occasion de le faire précédemment, beaucoup d'enfants ont imaginé des assemblages en équilibre, comme le montrent les figures 29 à 34).

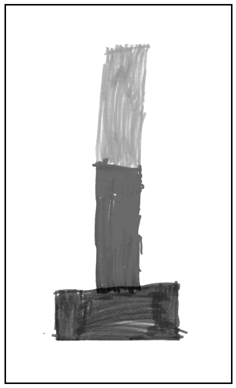


Fig. 29

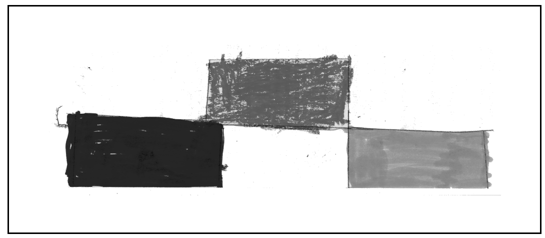


Fig. 30

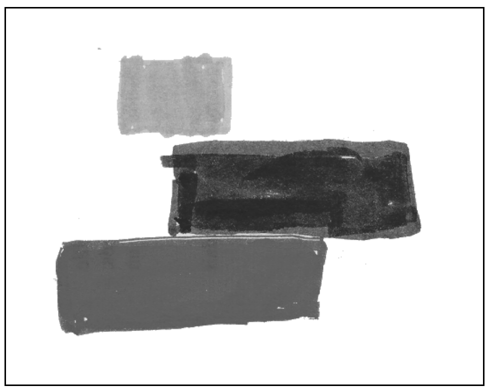


Fig. 31

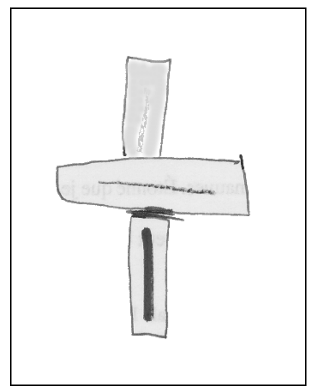


Fig. 32

Fig. 33

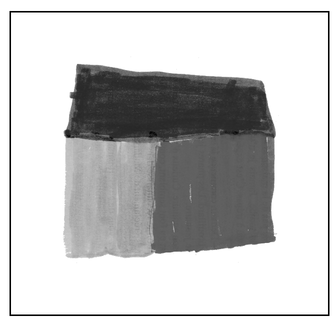


Fig. 34

Prolongements possibles

Le jeu[3] *Regarder et construire* dont voici une brève description. Il s'agit essentiellement de coordonner des points de vue présentés sur des cartes, et non plus de dessiner.

[3] E. C. Wittmann *et al.* [1997].

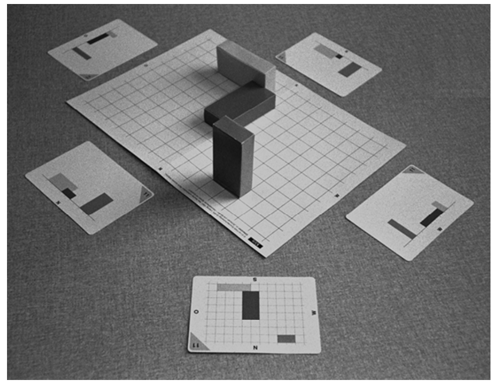


Fig. 35

Le jeu se compose de (voir figure 35) :

– un plateau de jeu quadrillé muni des points cardinaux ;

– trois parallélépipèdes rectangles de même grandeur (rapport des arêtes 1:2:4), chacun d'une couleur différente ;

– des cartes présentant des vues du dessus (avec et sans indication des points cardinaux) ;

– des cartes présentant des vues de profil (avec et sans indication des points cardinaux).

Regarder et construire se joue par équipes de quatre enfants répartis des quatre côtés d'une table. Les parallélépipèdes représentent des bâtiments. Ce jeu propose quatre sortes de problèmes :

1. On dispose d'une vue du dessus marquée par les quatre points cardinaux, pour placer les bâtiments sur le quadrillage. On associe à chacun des côtés une vue de profil sans indication des points cardinaux.
2. Chacun reçoit une vue de profil correspondant à son point cardinal, à sa place devant le quadrillage. Les enfants doivent placer les bâtiments correctement en se concertant. Ils y arrivent par essais successifs. La vue du dessus sert à la vérification.
3. Aucune carte n'indique les points cardinaux. On oriente la vue du dessus en se référant à une première vue de profil. On dispose les bâtiments sur le quadrillage selon la vue du dessus. Puis, on cherche à placer correctement les trois autres vues de profil.
4. On dispose des quatre vues de profil sans indication des points cardinaux, pour placer correctement les bâtiments sur le quadrillage. La vue du dessus sert à la vérification.

L'auteur de ce jeu s'est inspiré de l'étude de Jean Piaget (J. Piaget et B. Inhelder [1947]) dite *recherche des trois montagnes*. Il s'agissait de faire correspondre à une maquette des images présentant différents points de vue, ou bien de placer des objets de manière à respecter des vues coordonnées.

Vers où cela va-t-il ?

Cette actvité située à mi-chemin entre les perceptions d'objets disposés frontalement et les projections orthogonales de ces mêmes objets, prépare à l'étude des projections orthogonales coordonnées.

4 Tous les assemblages de quatre cubes

De quoi s'agit-il ?

Réaliser tous les assemblages différents de quatre cubes. Associer chaque assemblage à plusieurs dessins en perspective parallèle.

Enjeux

Les objectifs généraux sont identiques à ceux de l'activité 2 à la page 45. Un objectif supplémentaire est d'identifier des dessins en perspective d'assemblages de cubes selon divers points de vue, en les associant aux assemblages réels.

Compétences. – *Construire des solides avec du matériel varié. Organiser selon un critère. Associer un solide à sa représentation et réciproquement.*

De quoi a-t-on besoin ?

- Pour chaque enfant, 36 cubes en bois, en carton, ou mieux, des cubes attachables tels que les *multicubes*[4] ;
- des dessins des huit assemblages présentés séparément sur de petites fiches (découper les dessins des fiches 34 à 36 à la page 110).

Comment s'y prendre ?

L'activité reprend et prolonge celle proposée pour les 1ère et 2e (voir activité 2 à la page 45). La consigne est ici de trouver *tous* les assemblages différents de quatre cubes.

Lorsqu'un enfant pense avoir fini, l'enseignant place côte à côte, dans la même orientation, les assemblages identiques. L'enfant comprend alors qu'il a construit des assemblages en surnombre et les élimine. Ensuite, on l'invite à en chercher d'autres. Pour les enfants très rapides et sûrs d'eux, on laisse planer le doute en leur demandant s'ils sont bien certains de ne plus trouver d'autres assemblages. L'excédent de cubes pousse alors souvent l'enfant à se remettre en recherche et à affiner ses constatations. Finalement, les enfants se corrigent entre eux en comparant leurs constructions.

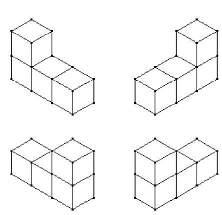


Fig. 36

On ajoute à l'activité une lecture de dessins en perspective parallèle. Chaque enfant reçoit un lot de 10 à 15 petits dessins différents (fiches 34 à 36 à la page 110, à découper). Pourtant dans un même lot de dessins, un même assemblage peut être représenté de différents points de vue (figure 36). Il faut donc placer devant chaque assemblage un ou plusieurs dessins qui lui correspondent. Tous les enfants ne reçoivent pas forcément les mêmes dessins.

[4] Voir la section 7 de l'annexe 1 à la page 70.

Échos d'une classe

Les enfants n'ont pas tous choisi les mêmes critères pour différencier les assemblages. Par exemple, certains ont pris la table comme point de repère et différencient les constructions verticales des horizontales, de même que les assemblages orientés vers des points cardinaux différents (figure 36 à la page précédente). Néanmoins, ils sont parvenus à construire les huit assemblages.

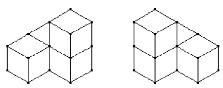


Fig. 37

Les deux assemblages présentés à la figure 37 leur ont posé question. En effet, il existe des objets qu'on ne peut pas mettre l'un à côté de l'autre dans une même position. Pourtant, l'image de l'un dans un miroir est identique à l'autre. La présence d'un vrai miroir clarifie la situation. Les enfants n'ont pas tous considéré que ces deux assemblages étaient différents. Certains ont dit « c'est le même assemblage mais dans un autre sens » !

La reconnaissance des dessins en perspective a été rapide. Les enfants ont bien décodé les informations données par chaque vue et ont associé sans difficulté plusieurs dessins à un même assemblage.

Prolongements possibles

On peut proposer des activités identiques à celles décrites à la section 3.3 à la page 35 et au chapitre 3 à la page 47. Ces activités concernent les jeux *Architek* et *Structuro* dont la figure 38 montre une photo. Pour poursuivre, on peut aborder le troisième volume d'*Architek*[5]. Il s'agit de réaliser des sortes de puzzles en deux et trois dimensions d'après des vues en plan et en perspective.

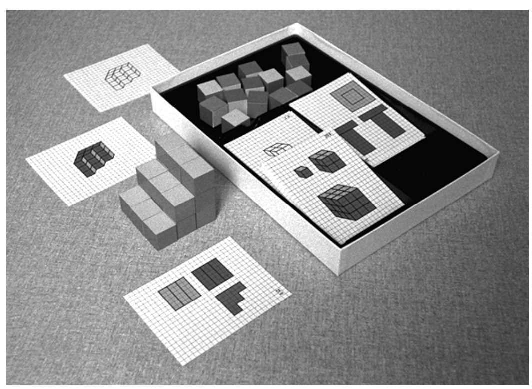


Fig. 38

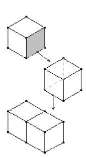


Fig. 39

Une autre activité est possible. On dispose de dessins représentant chacun un seul cube. On assemble de tels dessins pour représenter des assemblages de cubes (figure 39), que l'on réalise ensuite avec de vrais cubes. On peut aussi faire le jeu inverse.

Vers où cela va-t-il ?

Voir la section « *Vers où cela va-t-il ?* » à l'activité 2 à la page 45.

[5] M. Lyons et R. Lyons [sans date].

Annexe I

Description du matériel d'application générale

1 Matériel pour le modelage

Voici quelques matériaux qui peuvent être utilisés pour les activités de modelage, exposés avec leurs avantages et inconvénients.

La plasticine est courante dans toutes les écoles. Elle présente l'avantage de permettre l'utilisation de couleurs différentes. L'inconvénient est qu'elle est souvent assez dure au départ et doit être travaillée en petites quantités.

La terre glaise (ou terre de potier), même si certains la trouvent salissante, a des avantages. Elle est peu onéreuse et par conséquent peut être utilisée en grande quantité et même réutilisée si, une fois séchée, on la remet dans l'eau. C'est une matière naturelle qui est agréable à manipuler et dont on peut modifier la souplesse à sa guise en rajoutant de l'eau. Elle a l'inconvénient d'être lourde et difficile à modeler au début.

La cire d'abeille est parfaite pour les petits enfants. Elle devient vite malléable au contact de la chaleur des mains, puis durcit bien. Ce matériau entièrement naturel est agréable au toucher et ne tache pas. Il existe en plusieurs couleurs. Seul inconvénient, la cire est difficile à trouver dans les circuits de distribution habituels (il faut plutôt s'adresser à des magasins de produits naturels) et coûte relativement cher.

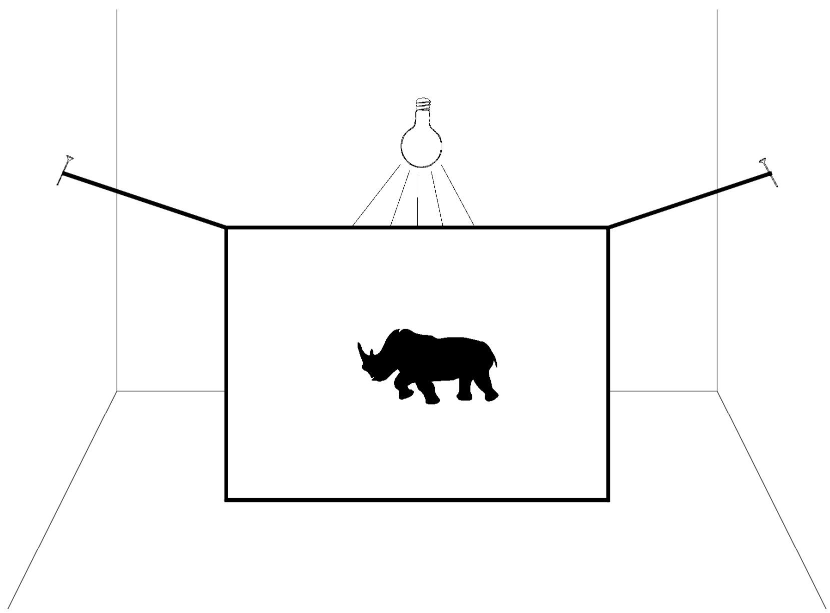
La pâte Darwi est plus souple que les autres matériaux, mais sèche vite et devient craquante lors de la manipulation. On peut alors l'assouplir avec de l'eau. Un avantage est qu'on la peint facilement une fois séchée. Elle coûte relativement cher si l'on en veut de grandes quantités.

La pâte à sel peut être réalisée en classe avec les enfants, colorée à la craie ou à la gouache lors de la préparation de la pâte, ou peinte par après. Les inconvénients sont qu'il est difficile de la sculpter en détail et qu'elle se déforme à la cuisson (elle gonfle ou s'aplatit). On peut aussi la laisser sécher sans la cuire mais alors... patience !

La pâte à créer soi-même est un secret artisanal à partager. On la prépare comme une pâte à sel (mi-sel, mi-farine et de l'eau) en lui ajoutant un peu d'huile, du colorant alimentaire et de la poudre de levure chimique. On la cuit dans une casserole tout en tournant sans arrêt jusqu'à ce qu'elle durcisse (assez pour qu'il ne soit plus possible de tourner la cuillère aisément : environ 10 minutes pour un kilo). Le résultat est surprenant : elle a l'aspect d'une pâte à modeler digne du commerce. Pour la conserver, on la met dans un récipient hermétique et même mieux, au frigo. Elle est facile à modeler et à nettoyer une fois séchée. De plus, elle est totalement inoffensive pour nos élèves gourmands ! Un petit inconvénient si on veut s'en servir pour modeler des parallélépipèdes rectangles : lorsque que l'on tape la pâte sur la table pour obtenir des faces planes, les arêtes ne se marquent pas nettement et les faces latérales ont tendance à se bomber.

2 Matériel pour les ombres

Un moyen très simple pour faire des ombres est de se servir d'un drap comme écran et d'une lampe. On tend le drap à l'aide de deux cordes fixées aux coins supérieurs du drap et à une étagère ou un clou dans le mur. On veille à ce que le bas du drap repose sur le sol de sorte qu'une personne puisse se cacher complètement derrière. On laisse un bon mètre pour se mouvoir derrière le drap .



La source lumineuse peut être un projecteur de dias, un rétroprojecteur, une lampe de bureau ou simplement une ampoule. Plus la source lumineuse est intense plus les ombres apparaissent foncées par rapport aux plages éclairées. Si on utilise une ampoule, il faut veiller à la placer assez haut pour qu'elle éclaire une bonne partie du drap et aussi pour que les enfants n'y touchent pas.

Si on désire contourner les ombres telles qu'elles apparaissent sur le drap, on peut fixer y (du côté des spectateurs) une nappe en papier blanc sur laquelle on dessinera (ou garder le papier sans le drap). Il faut alors prévoir une lampe puissante et des gros marqueurs ou de la peinture qui marquent le papier sans que l'on doive appuyer.

Quant aux objets à cacher derrière le drap, ils peuvent être de toute nature et de toute dimension, aussi bien des objets courants que des découpages de silhouettes ou des personnes réelles. Les figurines en plastique ou en bois de quelques centrimètres de haut représentant des personnes ou des animaux donnent de bons résultats pour animer une histoire. Leur ombre est nette et détaillée, ce qui facilite la reconnaissance. Il faut les tenir par une extrémité pour que l'ombre des doigts ne soit pas gênante. Sinon, on peut imaginer de les suspendre à des fils comme des marionnettes.

3 Matériel pour les constructions

Les blocs utilisés pour les assemblages et les représentations en perspective peuvent être des solides géométriques en bois (figure 40) comme ceux que l'on trouve chez *Nathan* (voir la section 8 à la page 72). On dispose alors généralement de parallélépipèdes rectangles et non-rectangles, de prismes à base triangulaire, trapézoïdale, hexagonale, octogonale, de pyramides, d'une sphère, d'une demi-sphère, d'un cône, d'un cône tronqué et d'un cylindre.

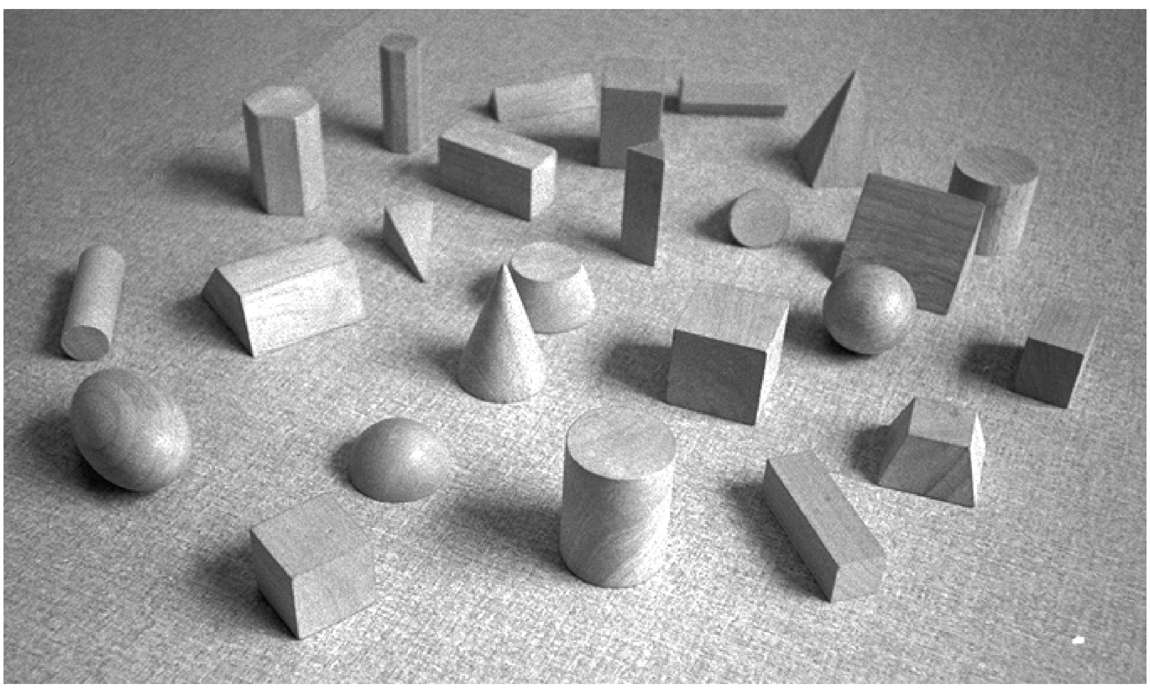


Fig. 40

Dans les magasins de jouets, on trouve également des blocs de construction. Les ensembles sont couramment composés de parallélépipèdes rectangles de diverses dimensions, de prismes à base triangulaire, de cylindres, de ponts. Certains sont en mousse (figure 41 à la page suivante) comme ceux que nous avons choisis pour les activités de construction. Ils présentent les avantages d'être doux et légers mais aussi rigides et stables. De plus, les dimensions des différents blocs se correspondent dans un rapport simple : certains sont le double ou le quadruple des autres, ou bien ils s'emboîtent les uns dans les autres. On peut par exemple les acheter chez *Christiansens* et *Ikea* pour ne citer que les magasins où nous les avons trouvés.

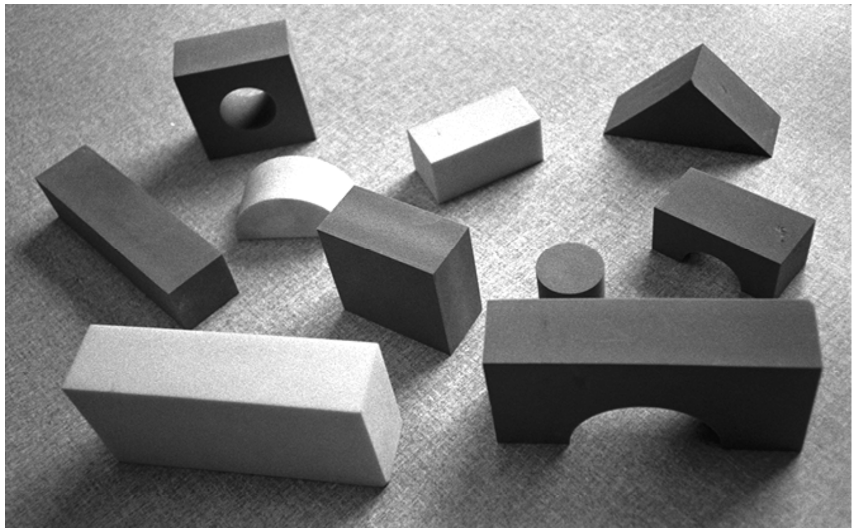


Fig. 41

En ce qui concerne les cubes attachables, on les trouve entre autres chez *Viroux* (voir la section 8 à la page suivante). Les cubes d'un centimètre d'arête (figure 42) sont appelés *centicubes*, ceux de deux centimètres d'arête, les *multicubes*. Ils existent tous en 10 couleurs différentes. Les *centicubes* sont vendus par lot de mille et les *multicubes* par cinq cents. Il en faut au moins mille pour travailler avec une classe entière.

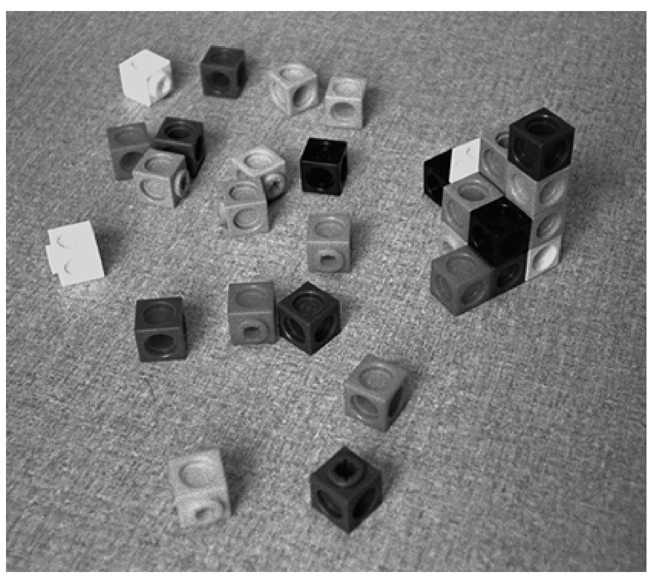


Fig. 42

4 Références commerciales

OD-ED , jeux en bois
9, Hameau les Bois - 6230 Buzet - tél. (067) 21 90 24

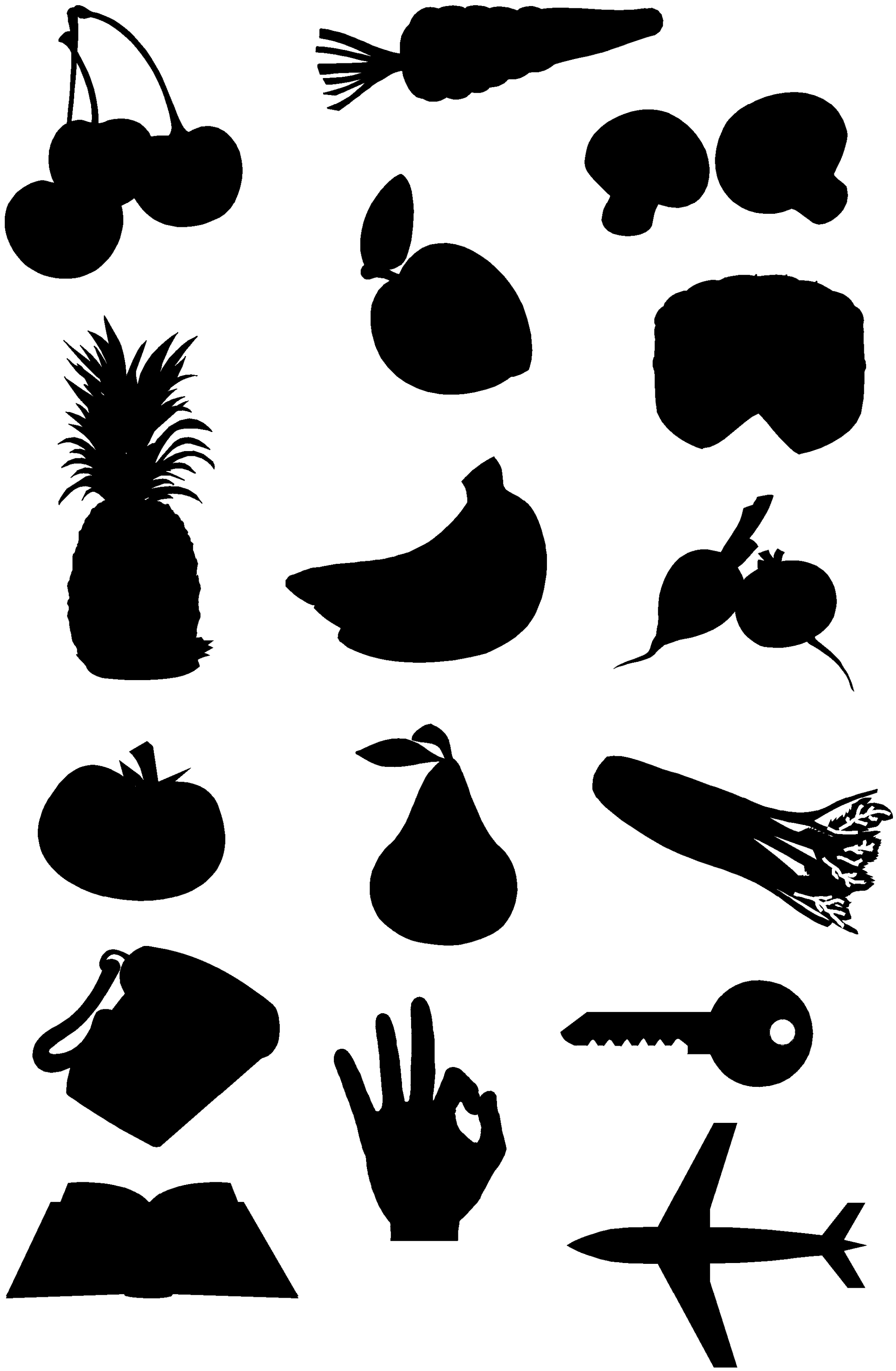
La Découverte (distributeur par correspondance du matériel *Nathan* et *Viroux*)
49, Place communale - 1332 Genval - tél./fax (02) 652 07 62

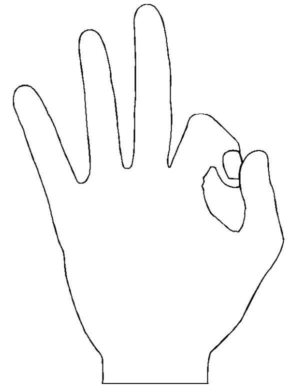
Viroux (matériel éducatif)
20, Rue Wauthier - 5060 Sambreville - tél. magasin (071) 77 81 80 - fax (071) 76 10 90

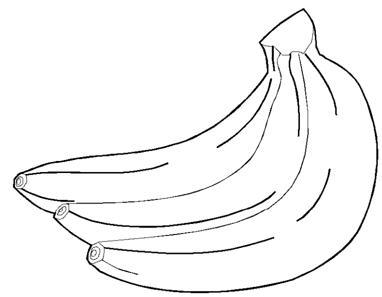
Planète Découverte (vente de jeux par correspondance)
BP 35 - 1060 Ixelles 6 - tél. (02) 626 14 30

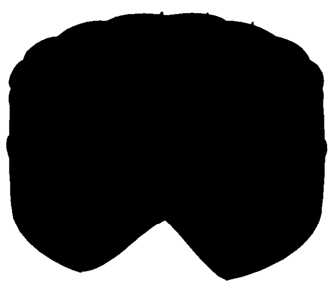
Annexe II

Documents photocopiables

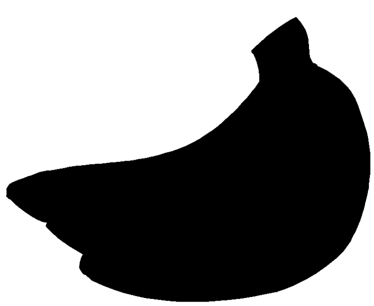


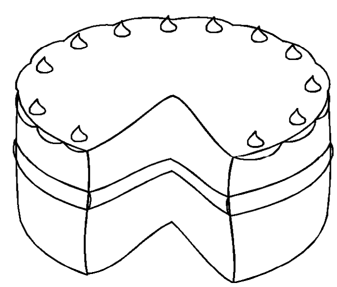


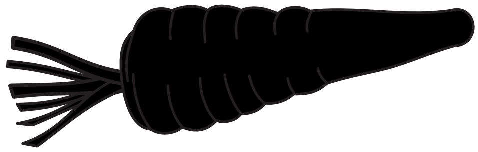




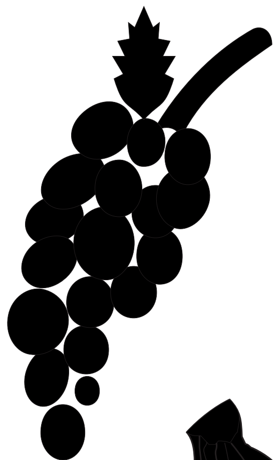

HARRY
BOB
GLORIA
PATTI
GREG
GOD



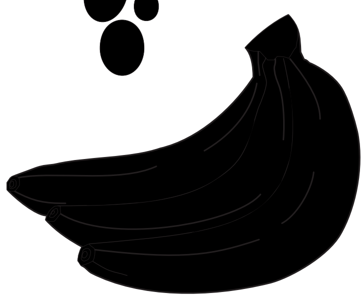




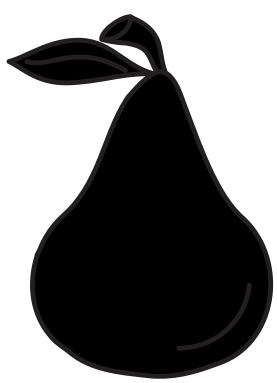
MAUVE



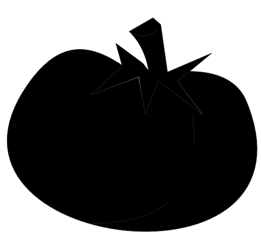
VERT



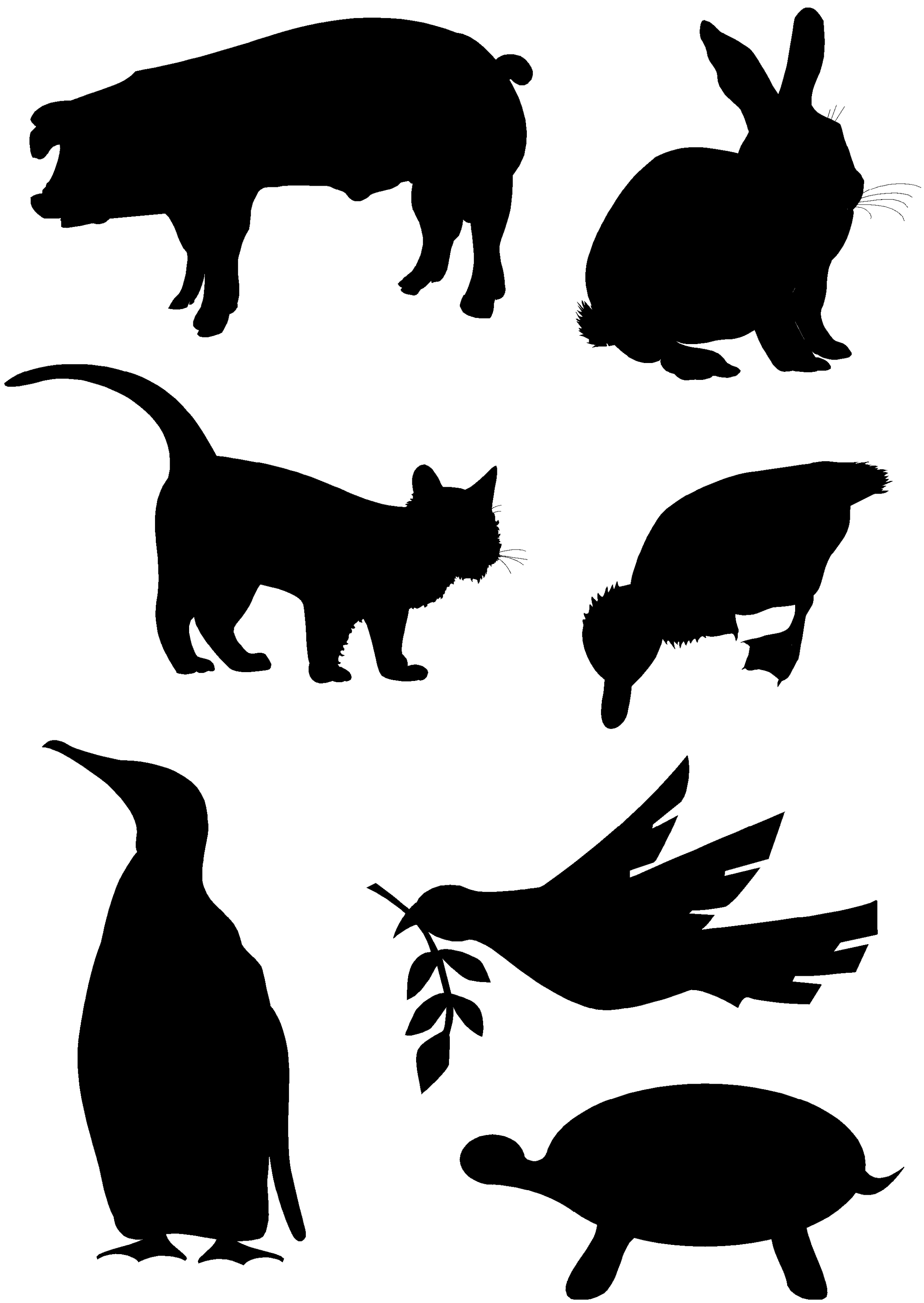
ROUGE

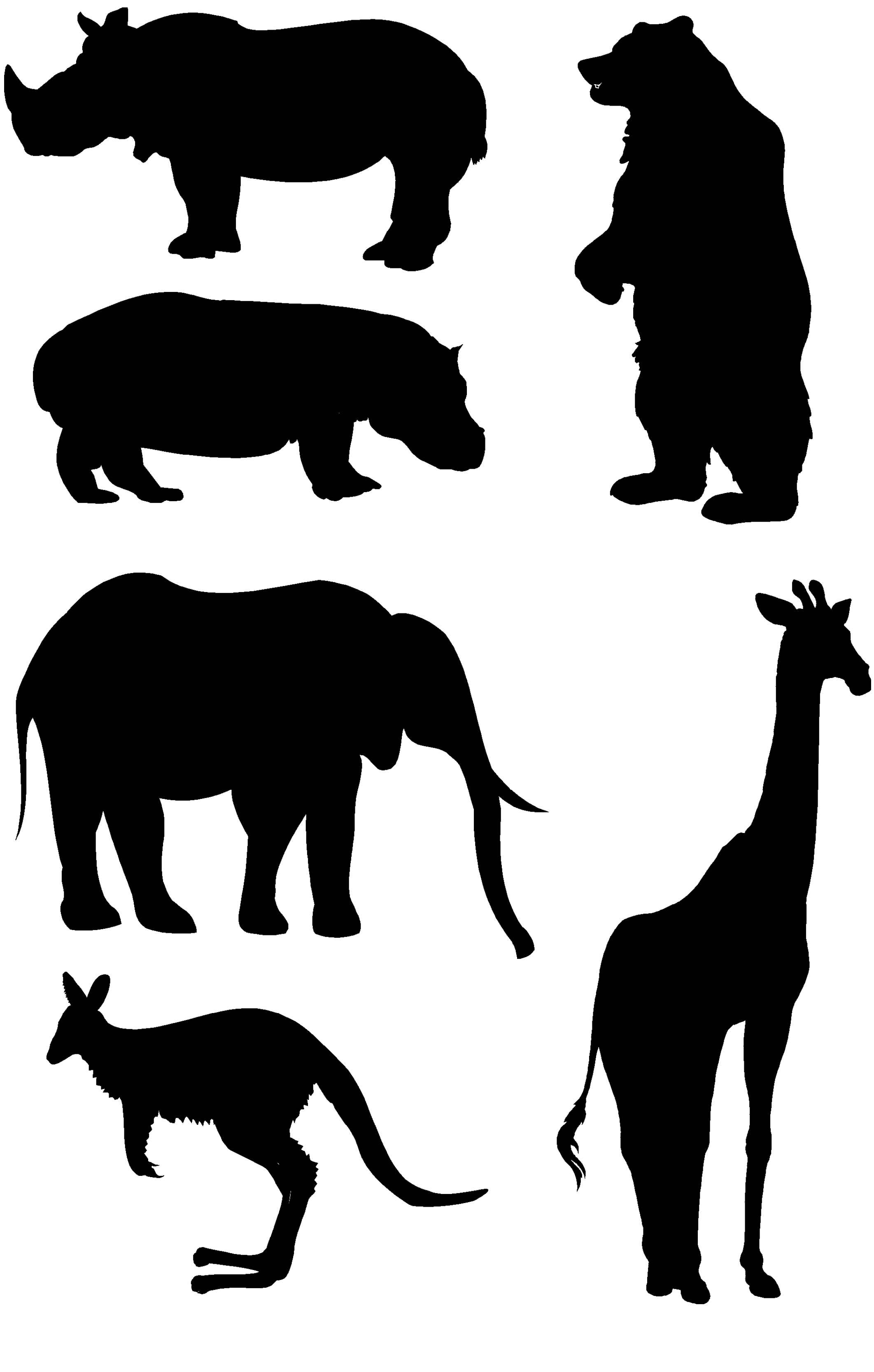


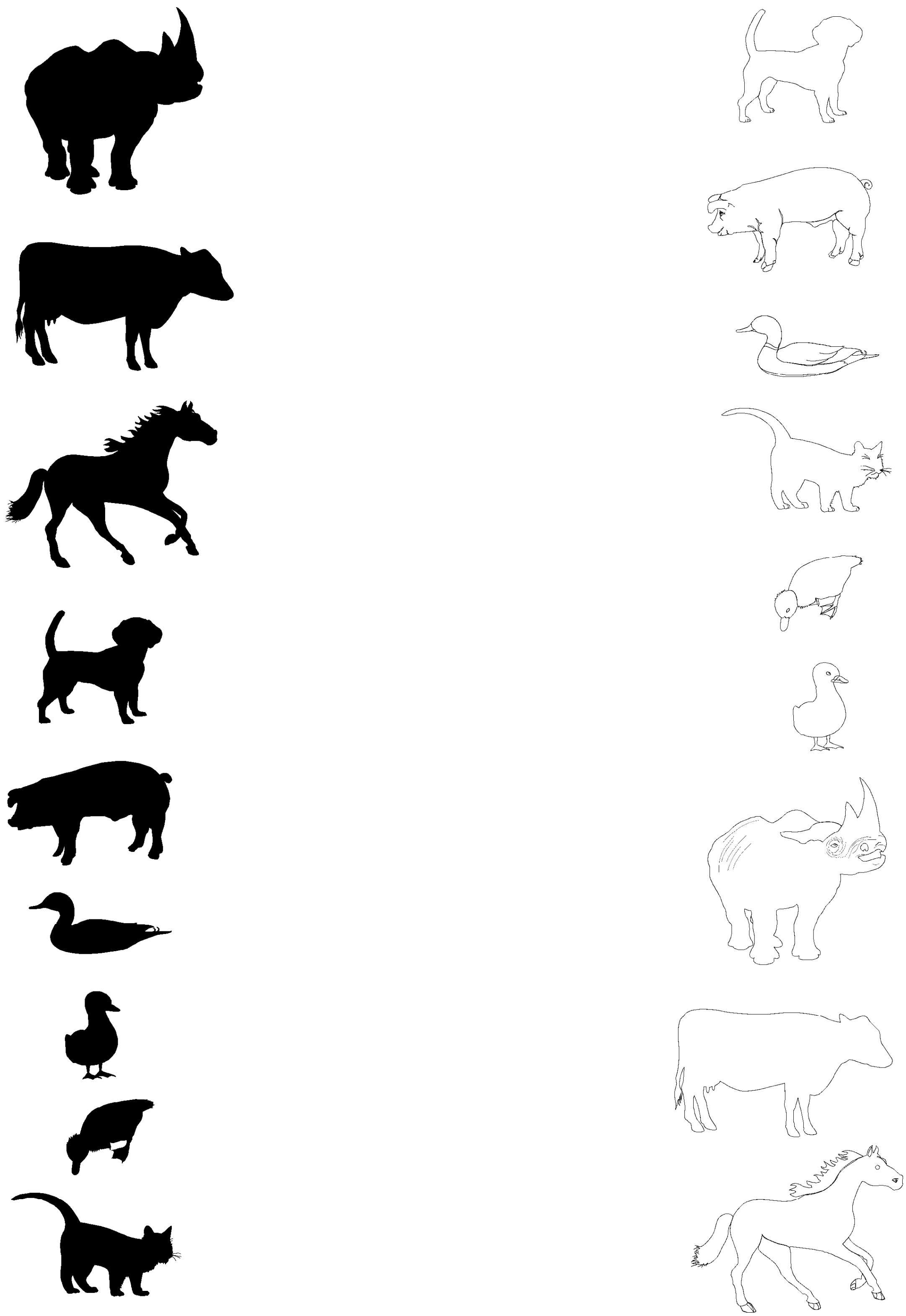
JAUNE

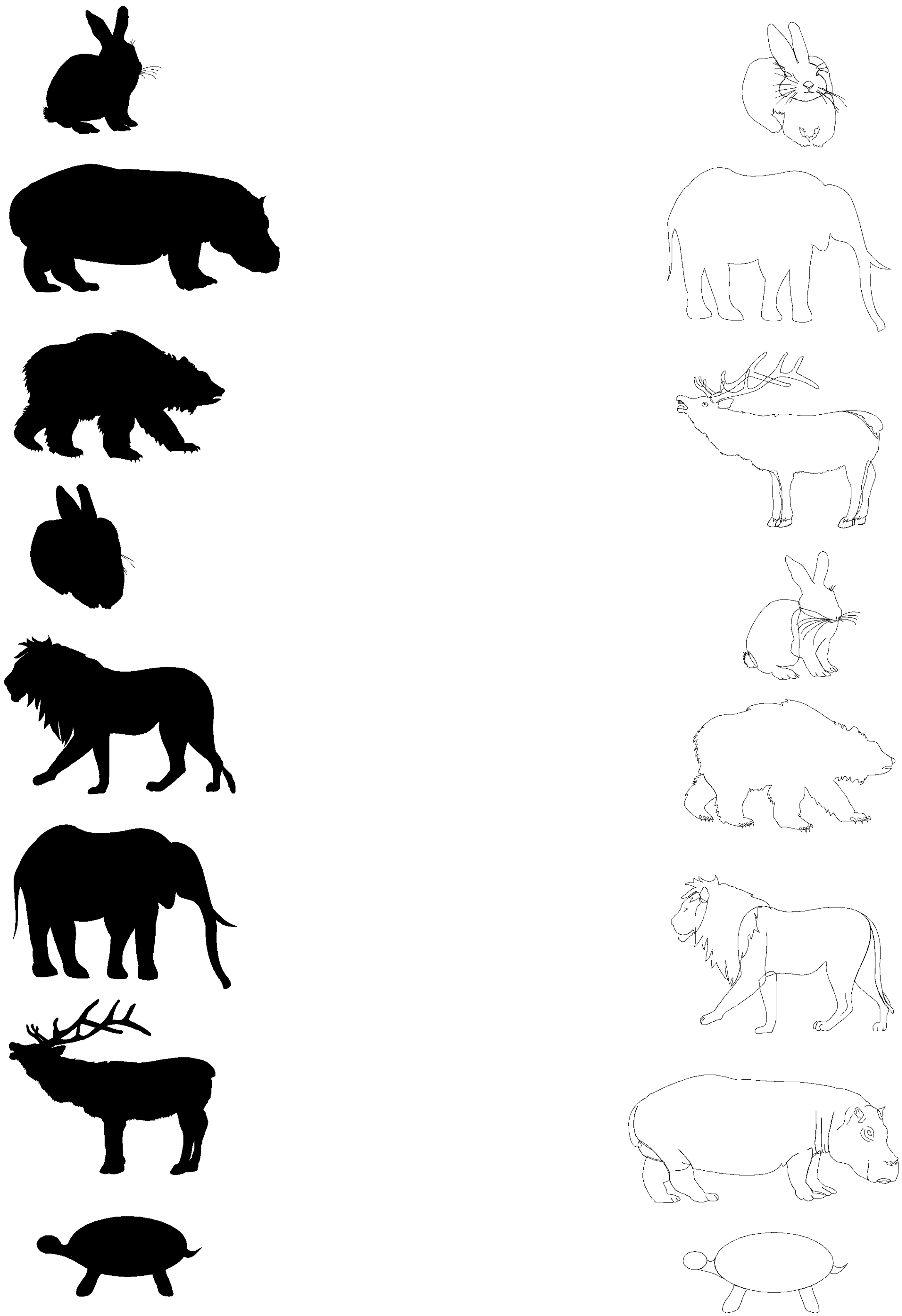


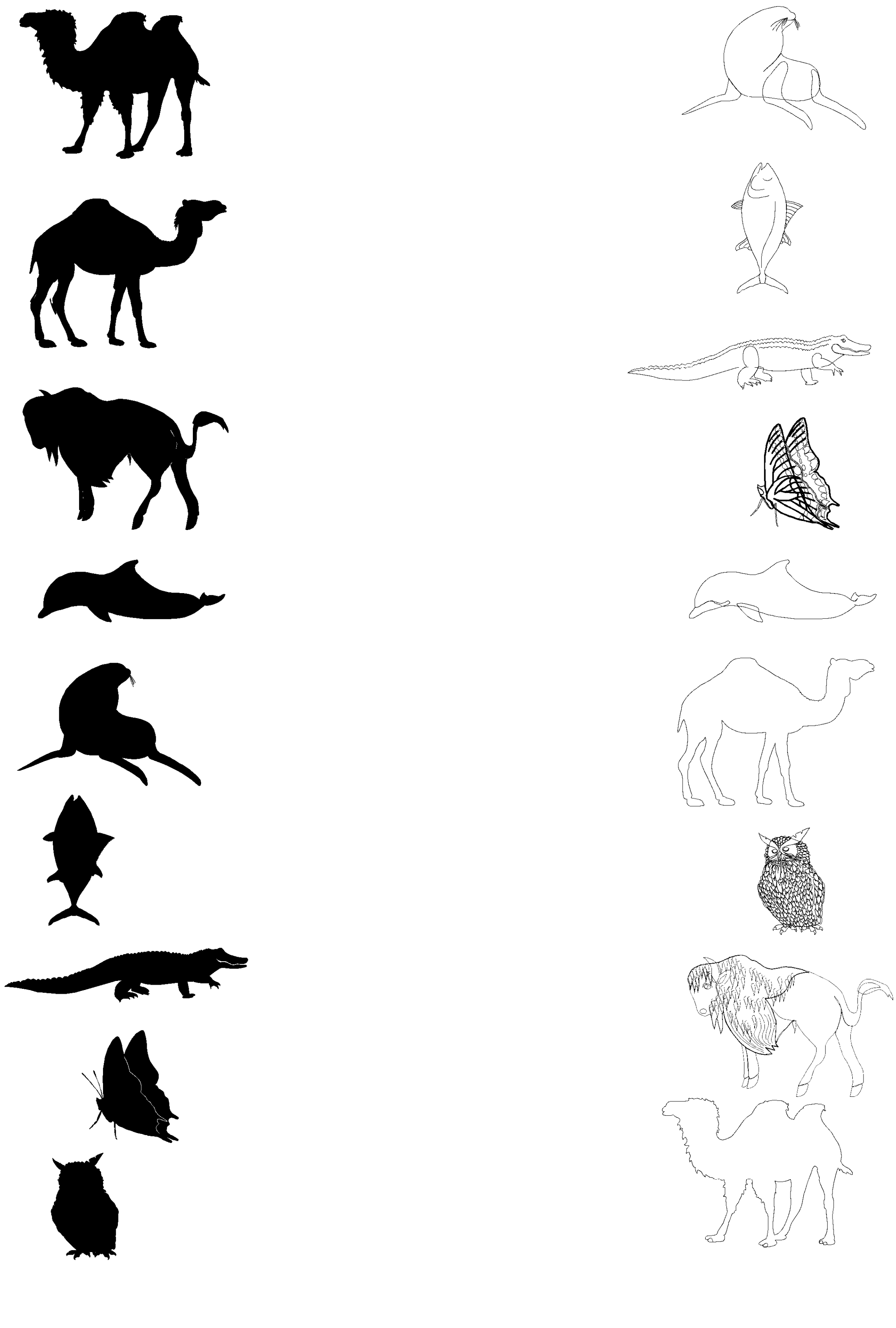
ORANGE

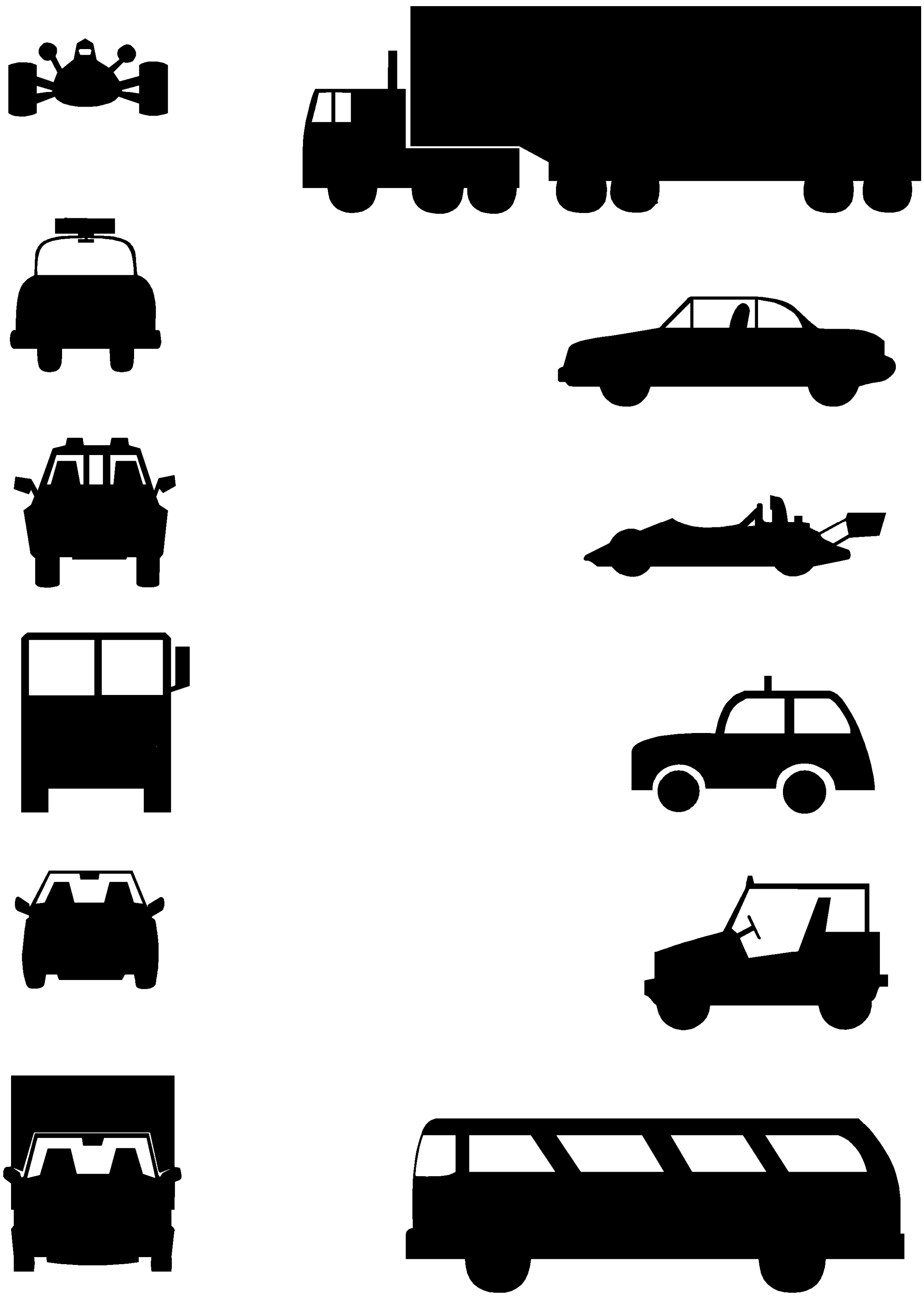


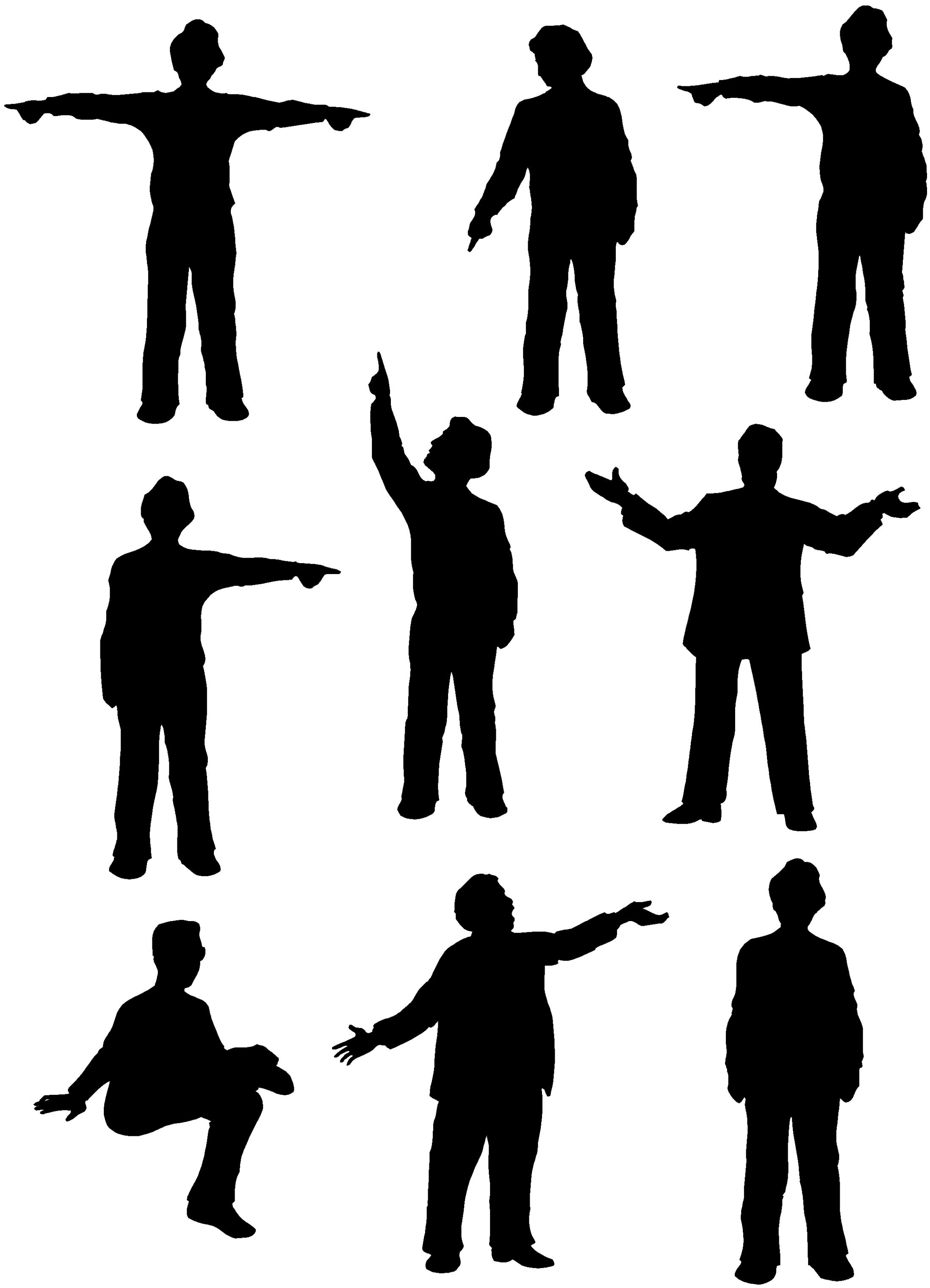


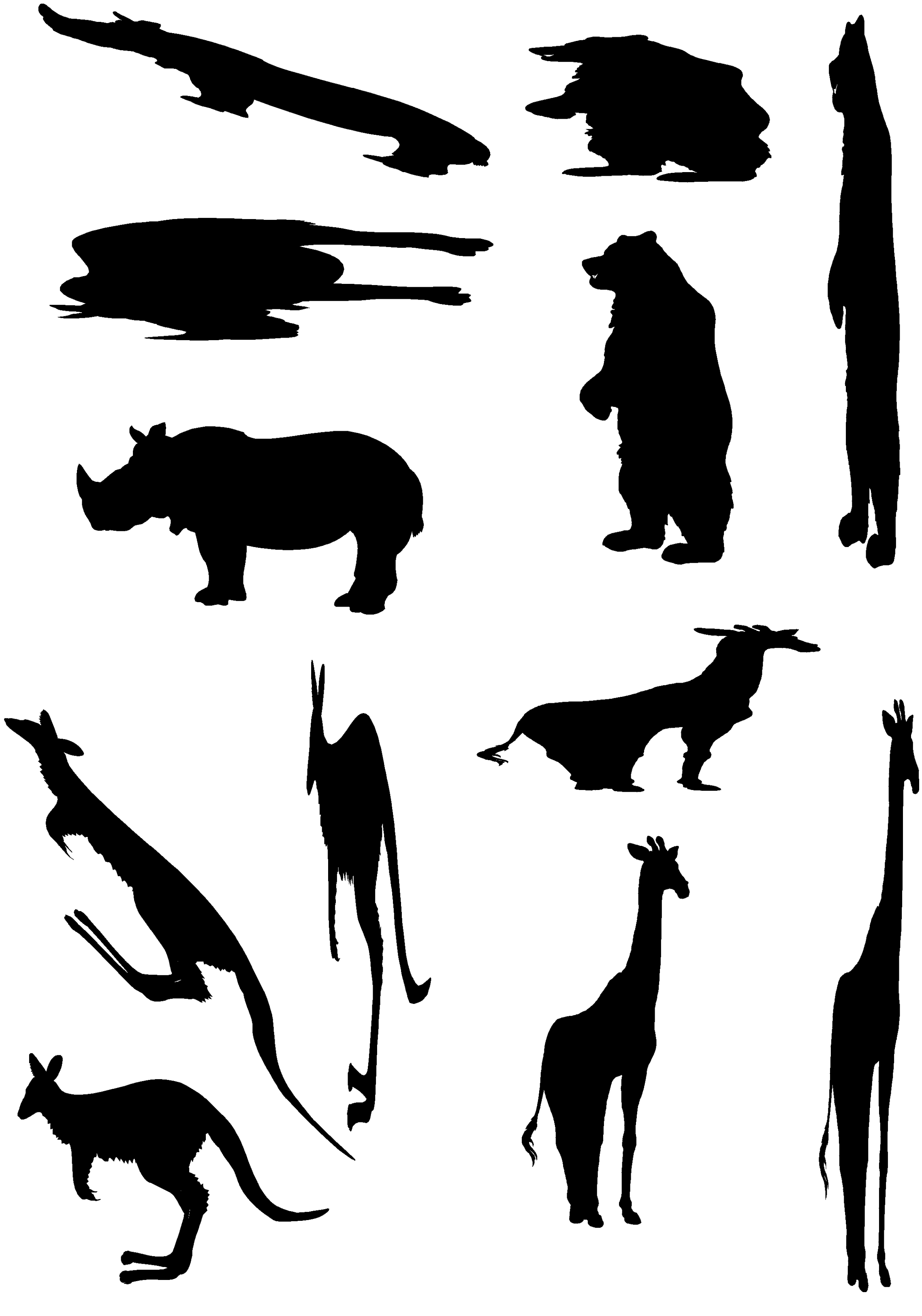


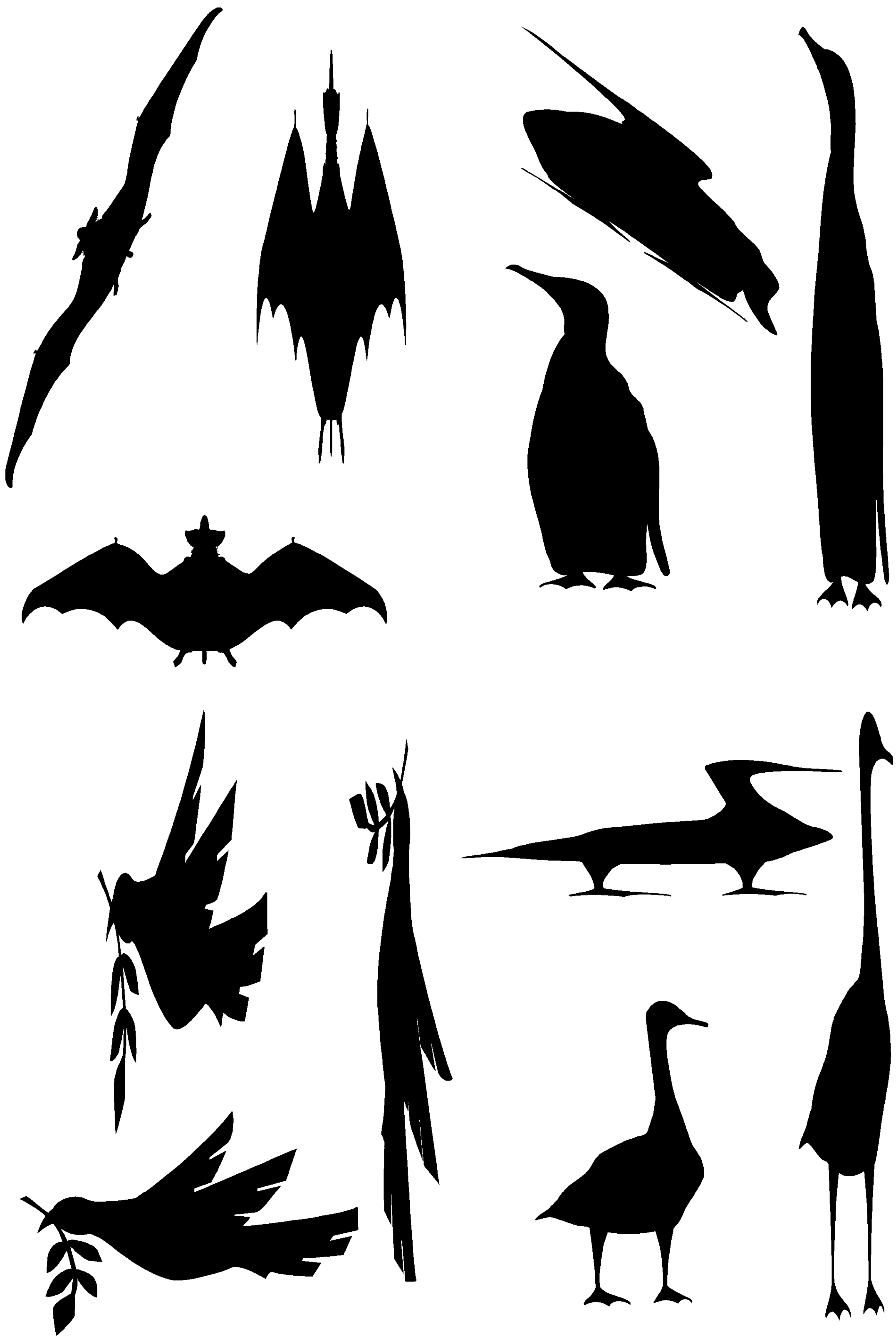


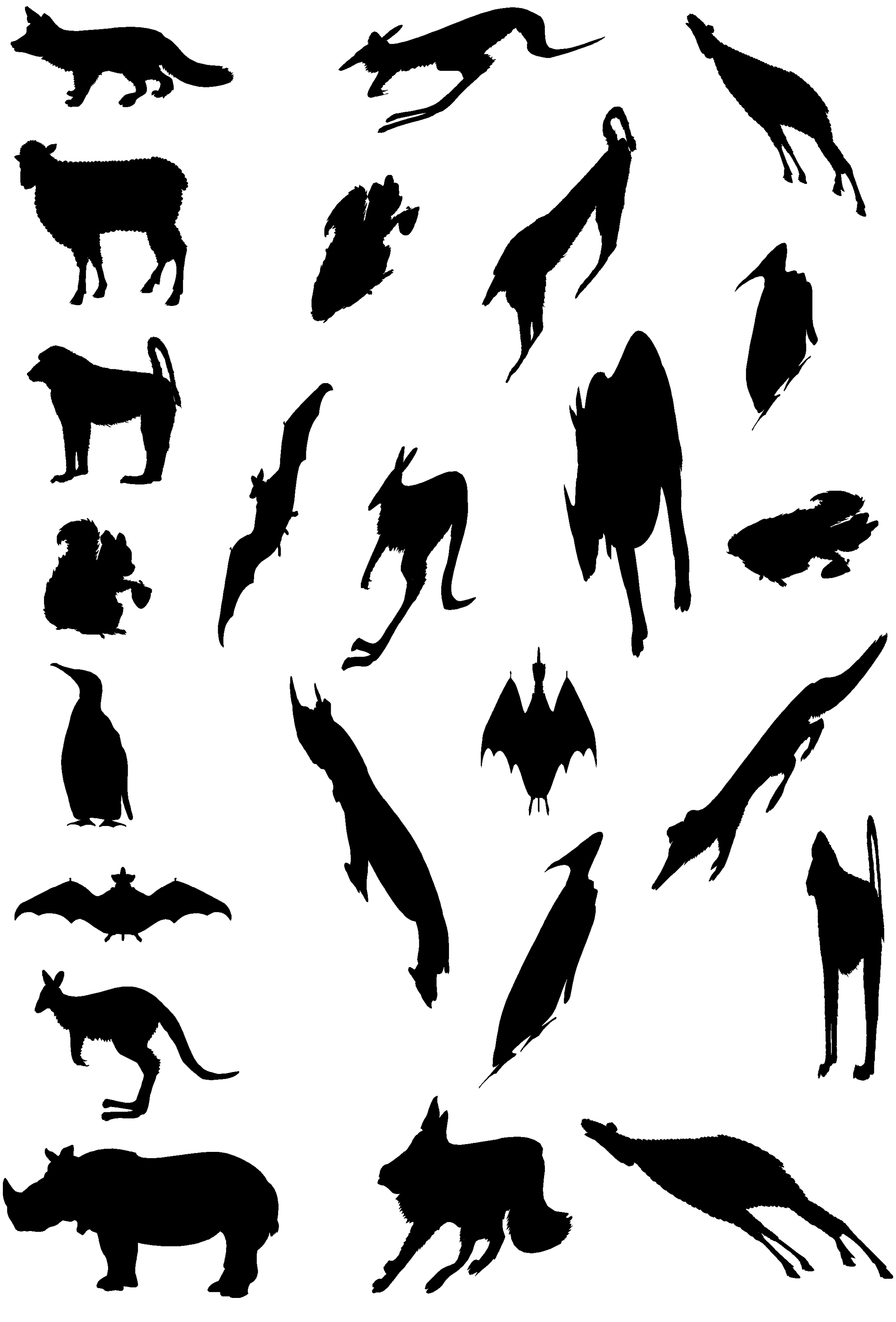


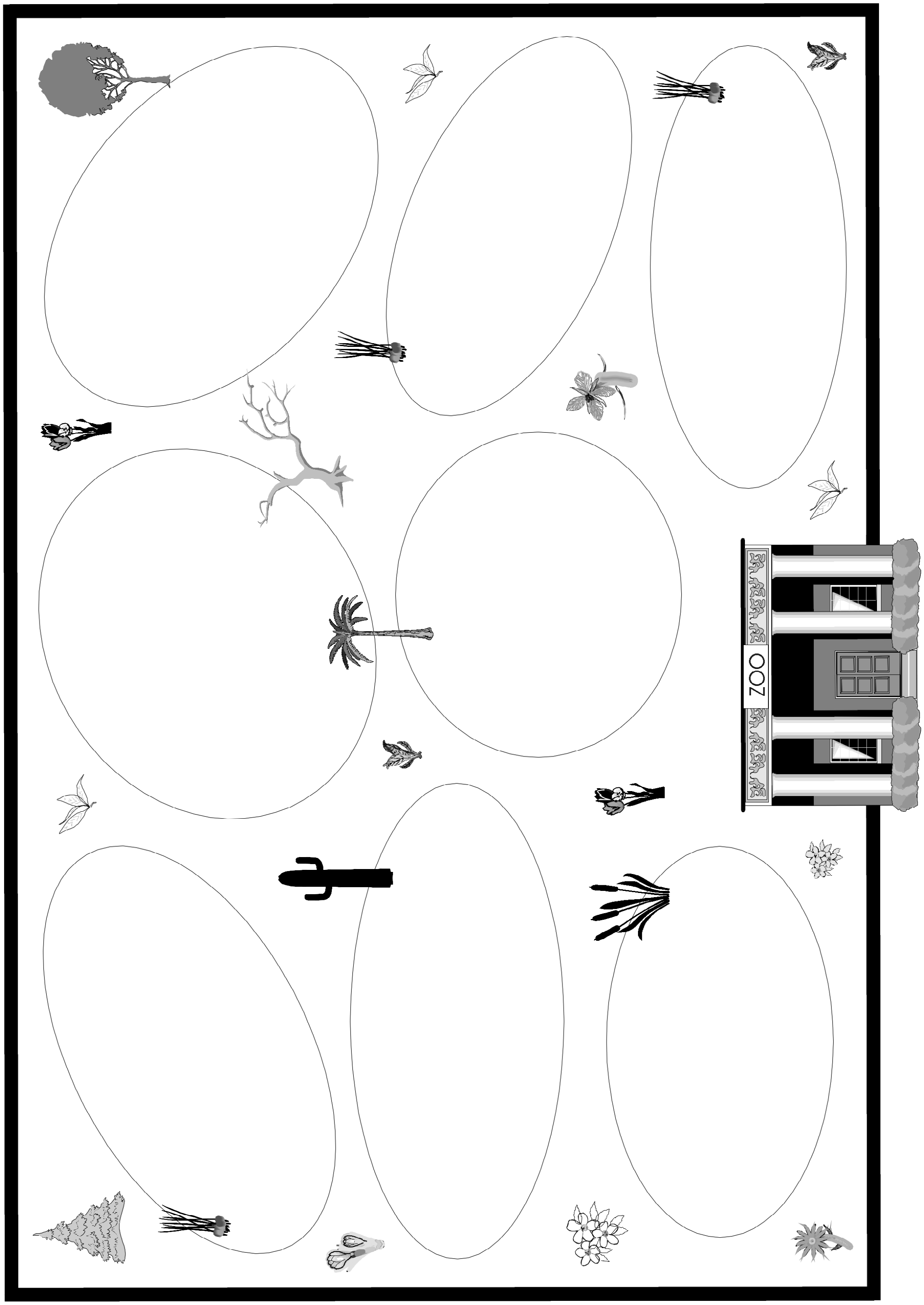


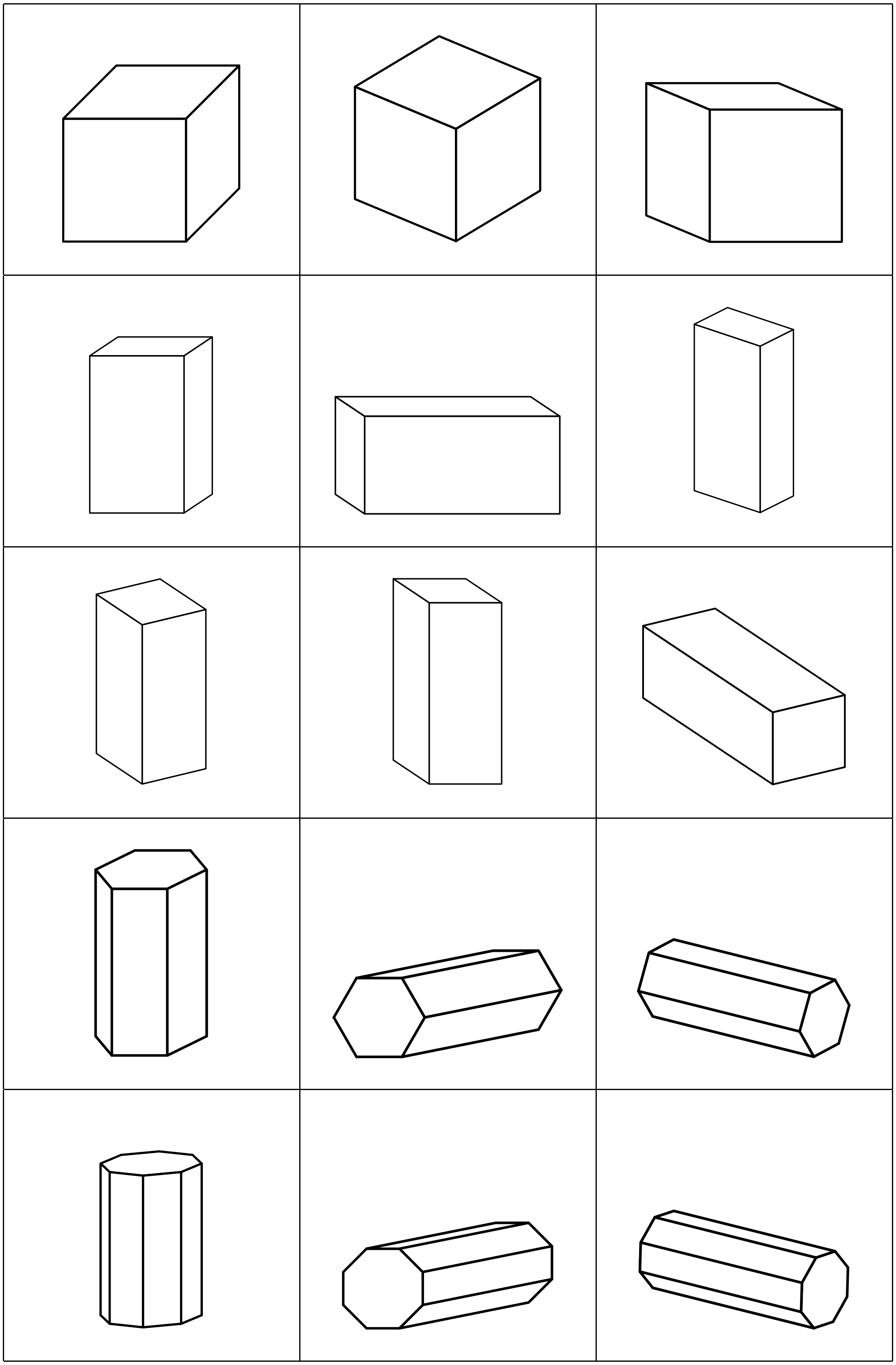


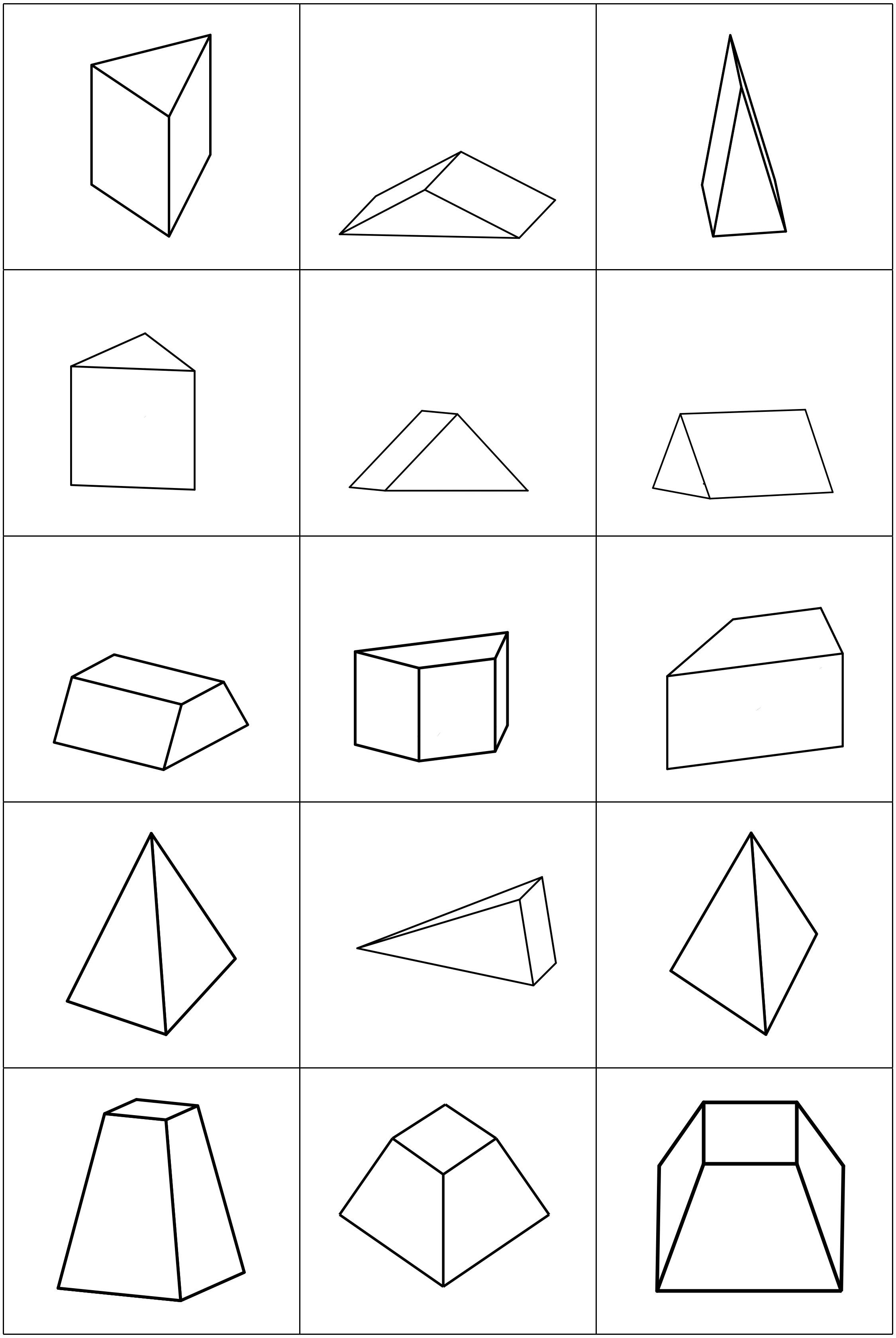


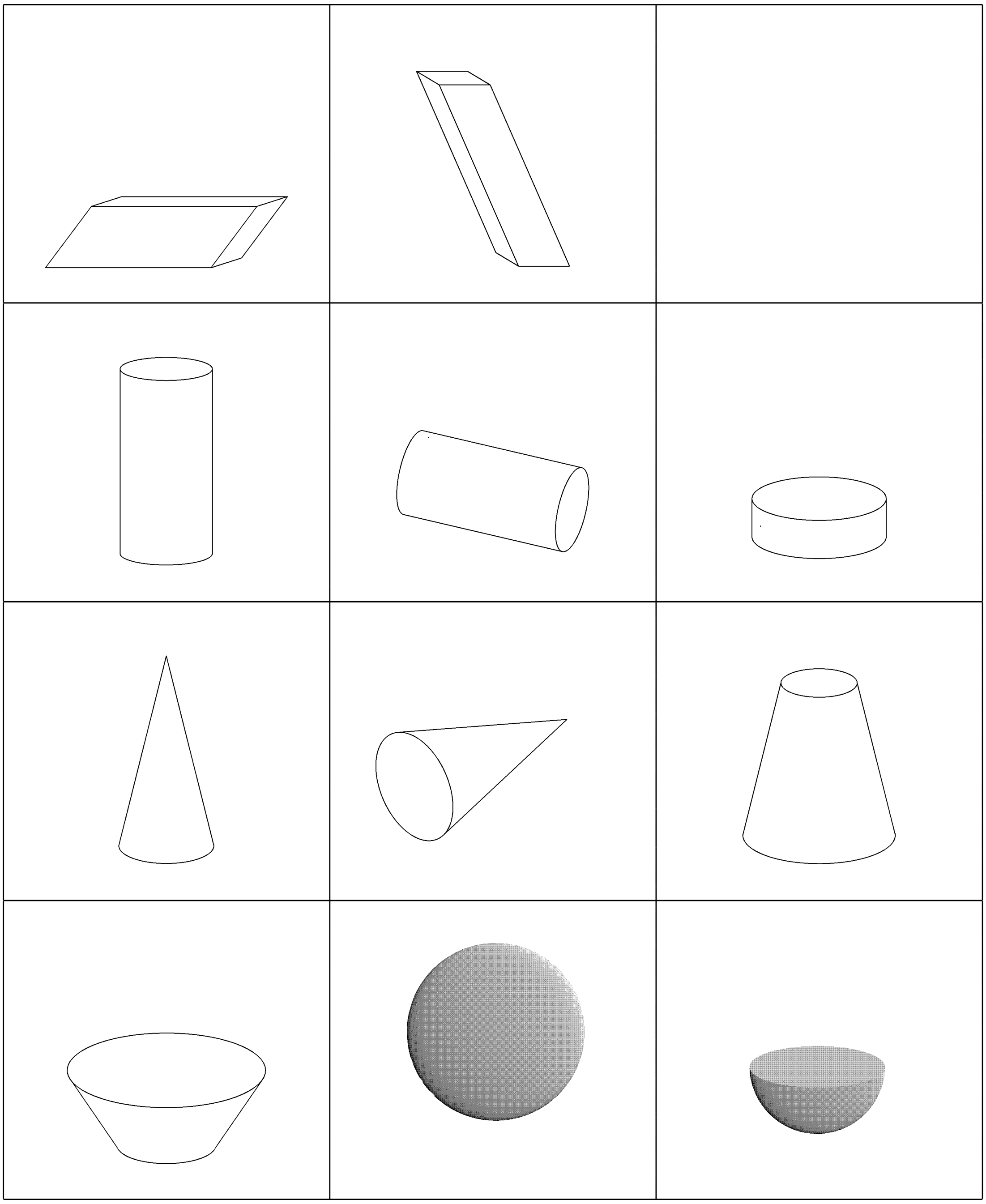


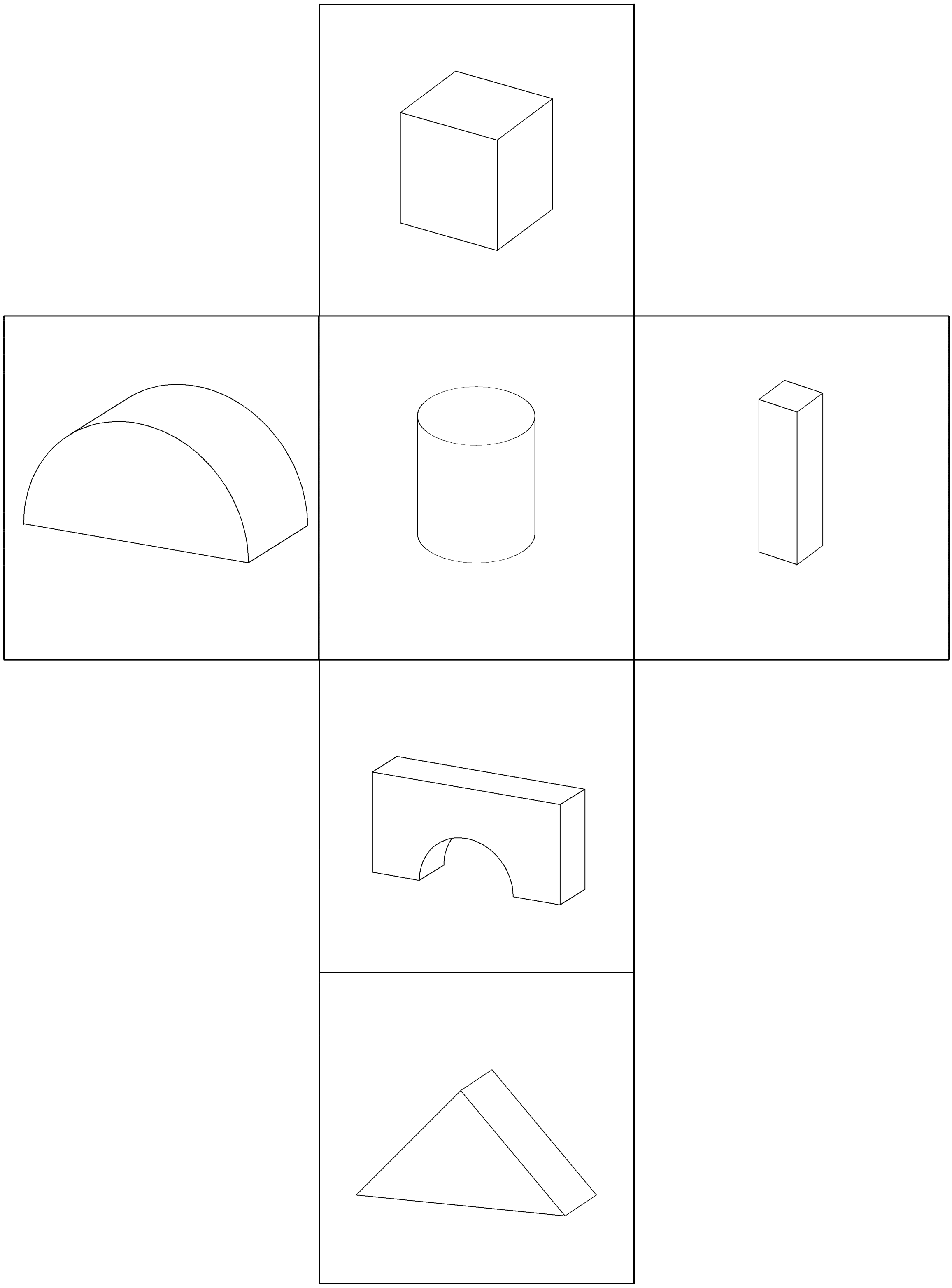


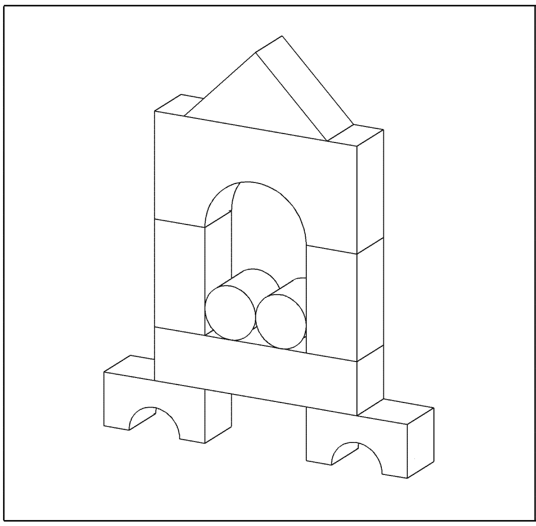
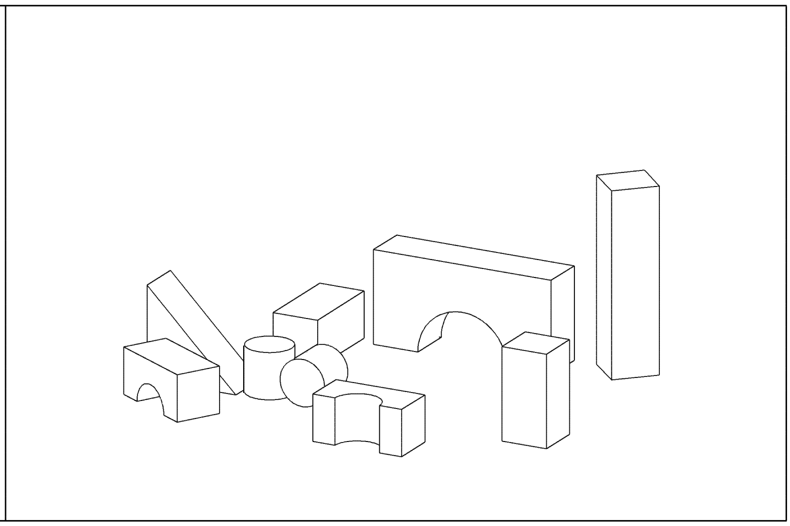

ZOO

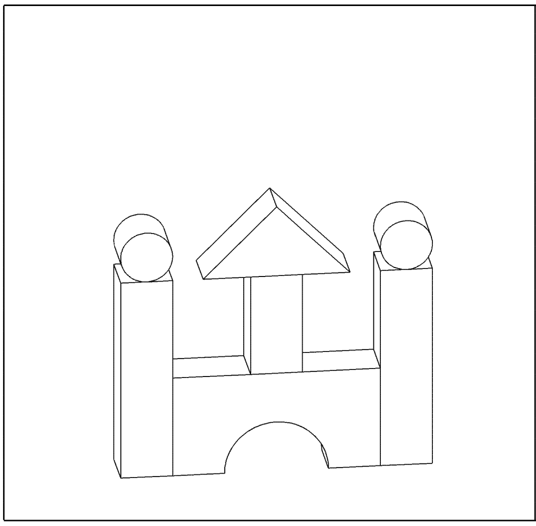
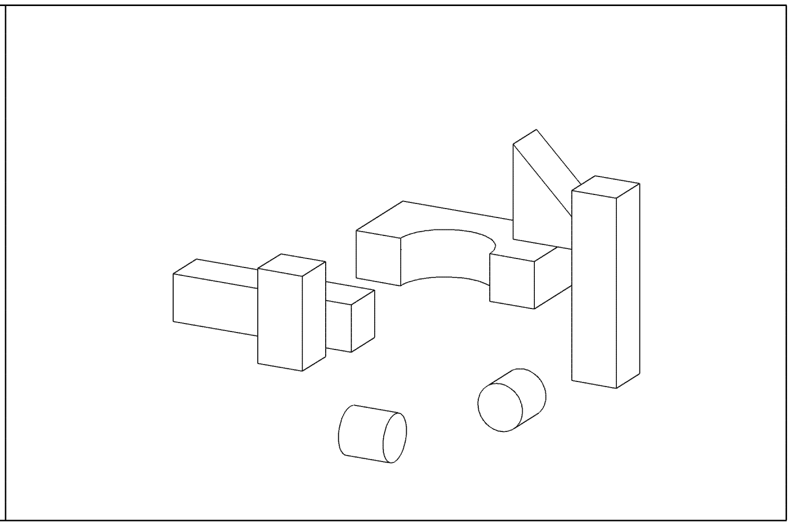


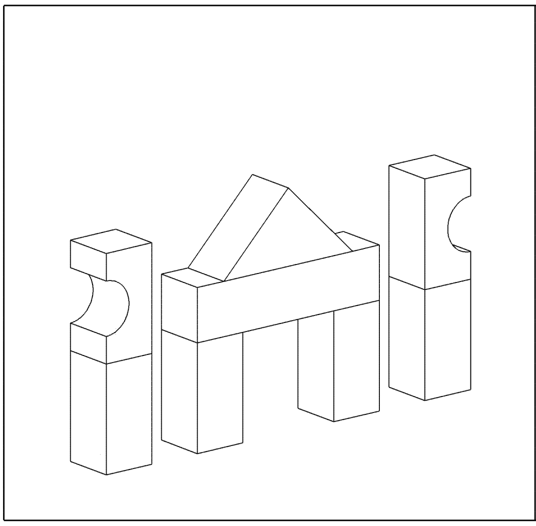
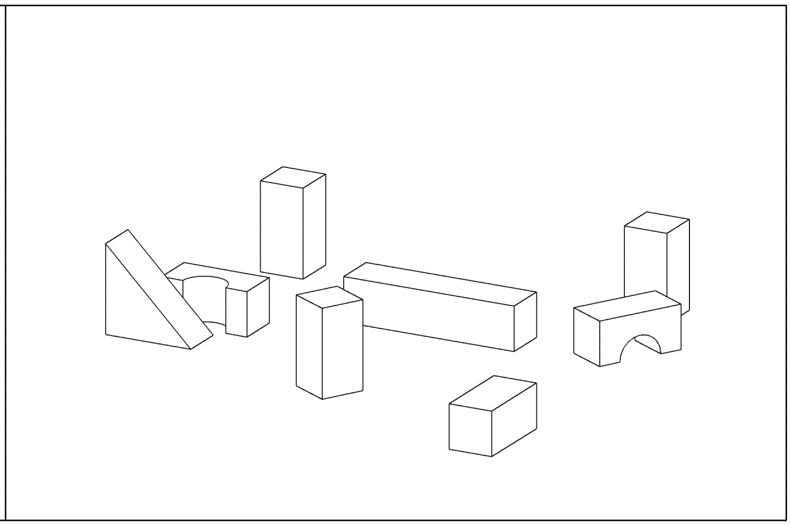


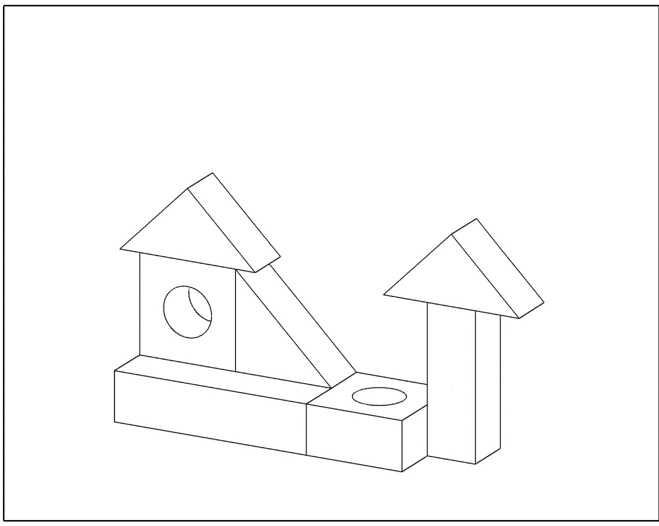
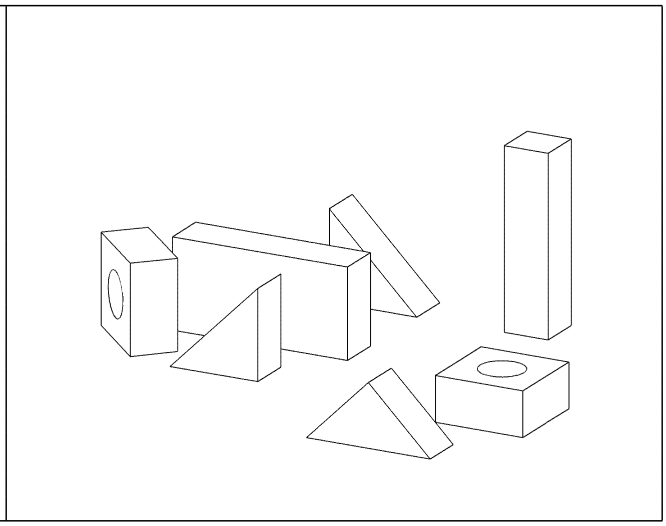
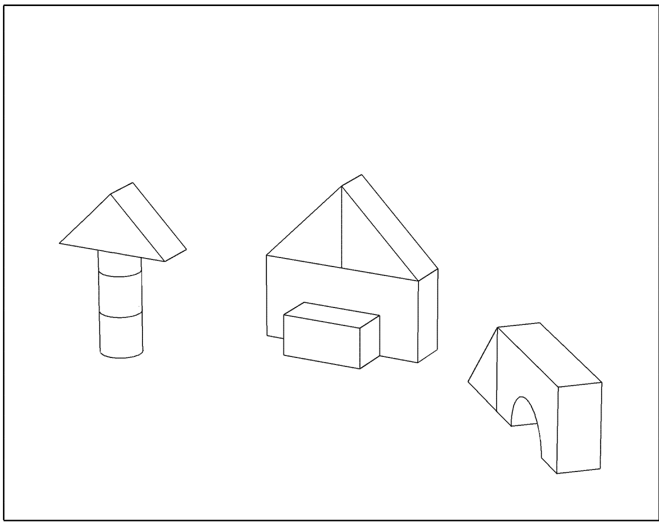
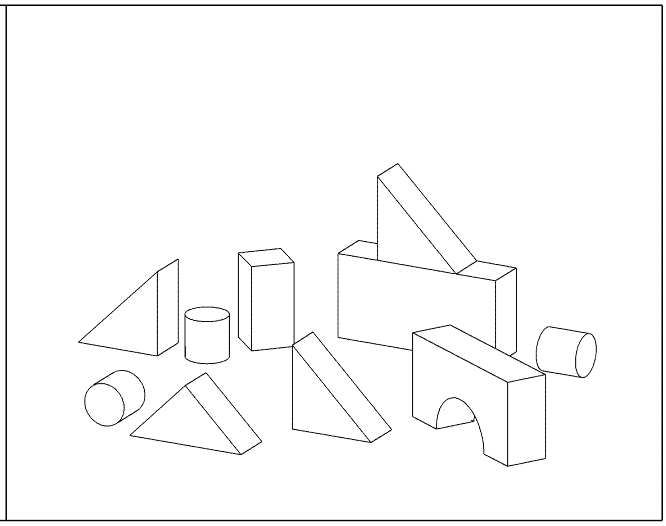
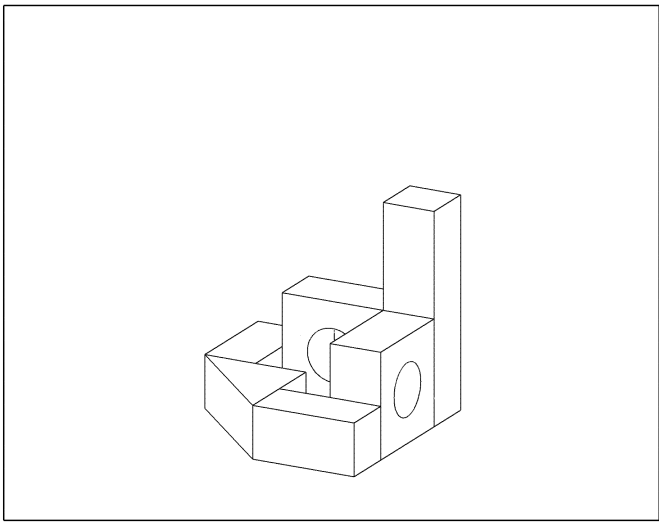
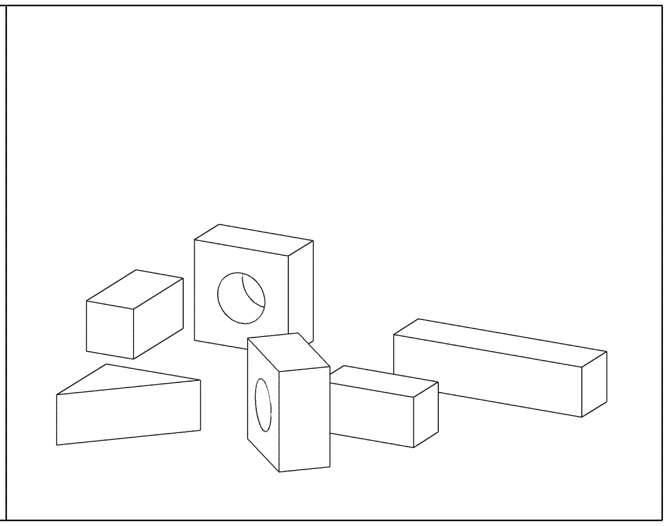


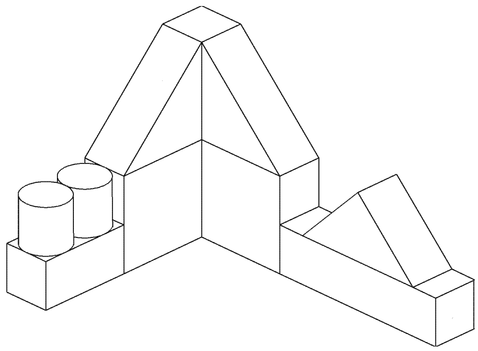


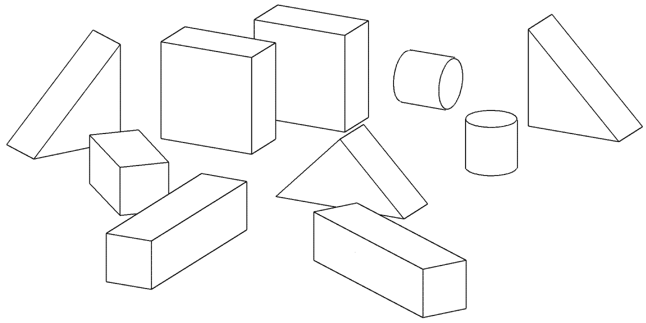



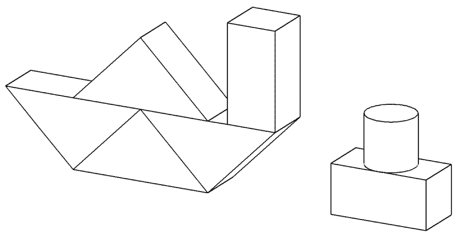



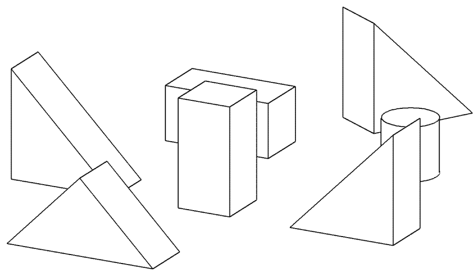



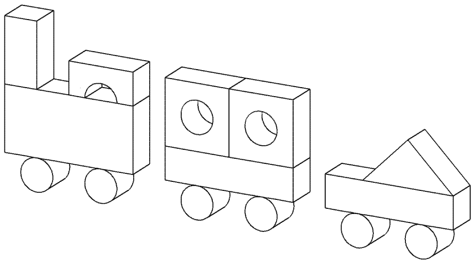







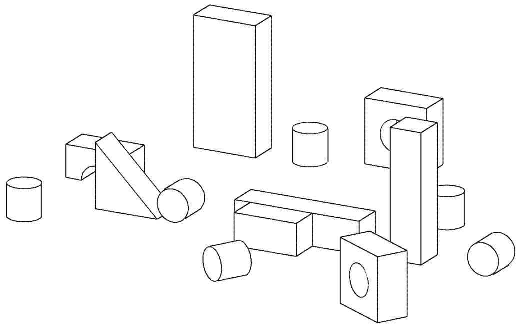


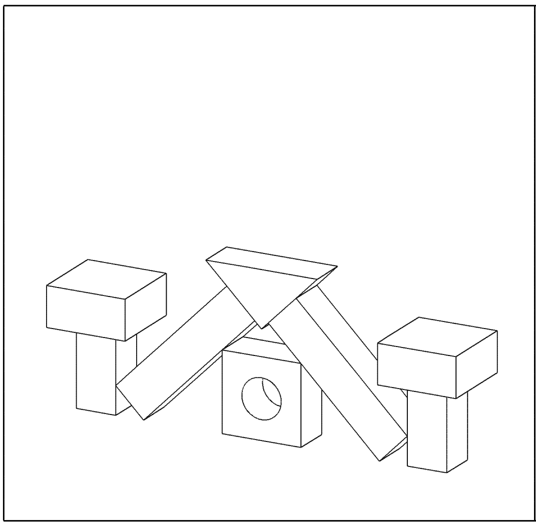
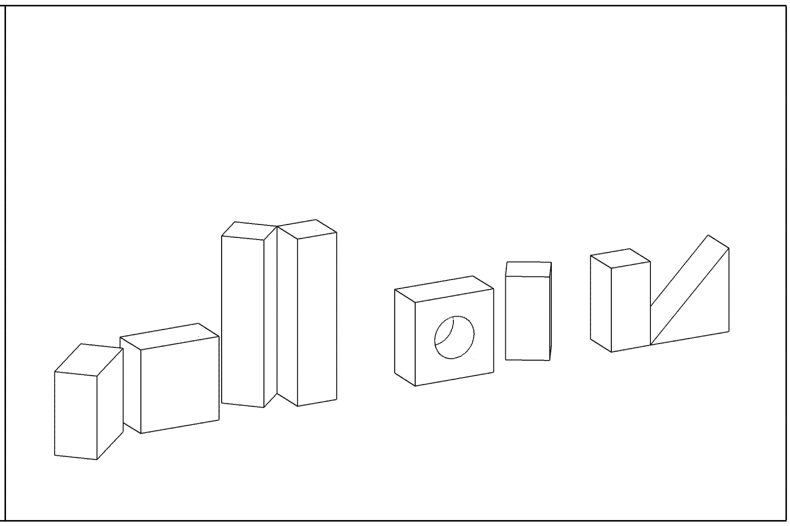
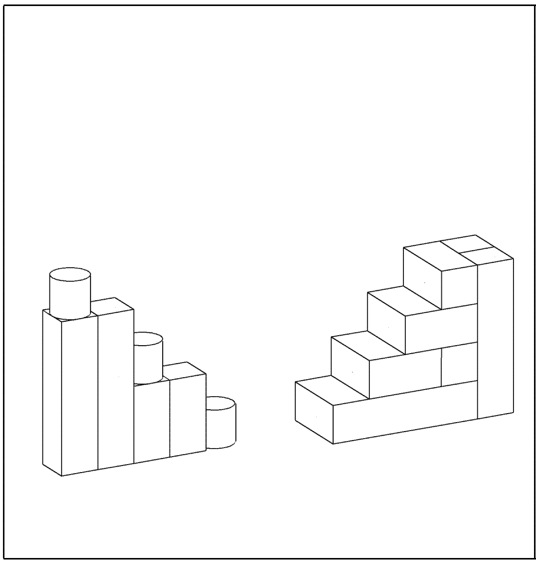
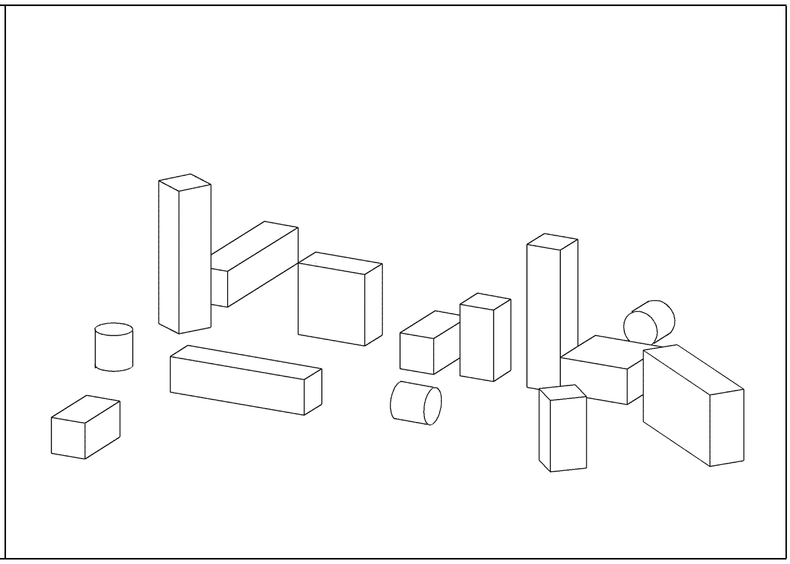
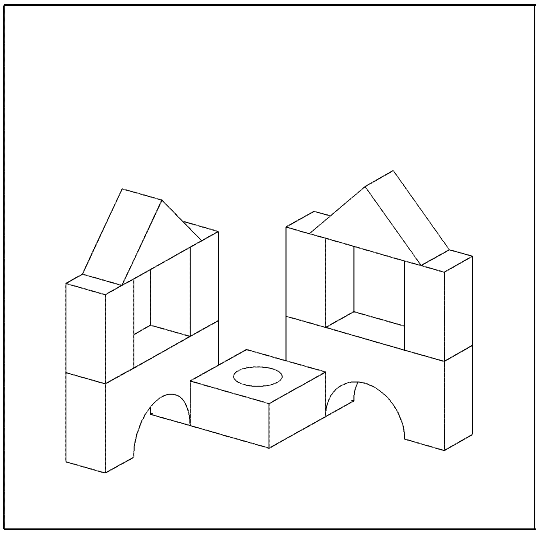
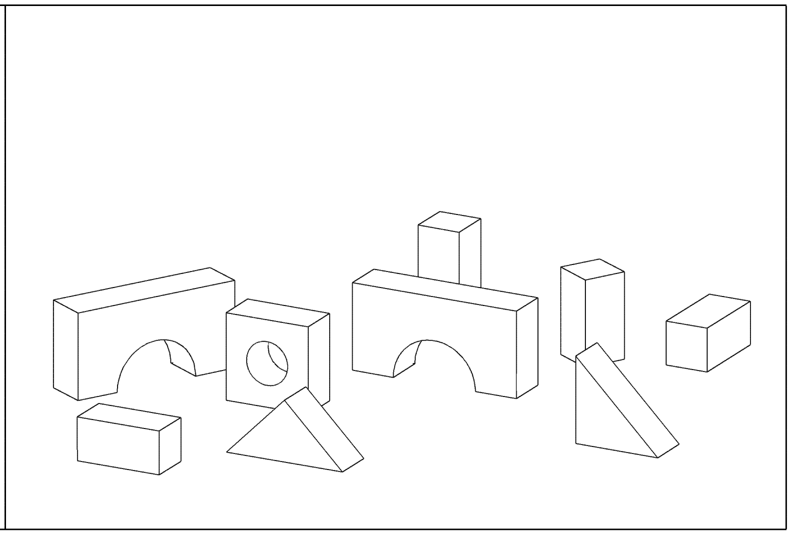


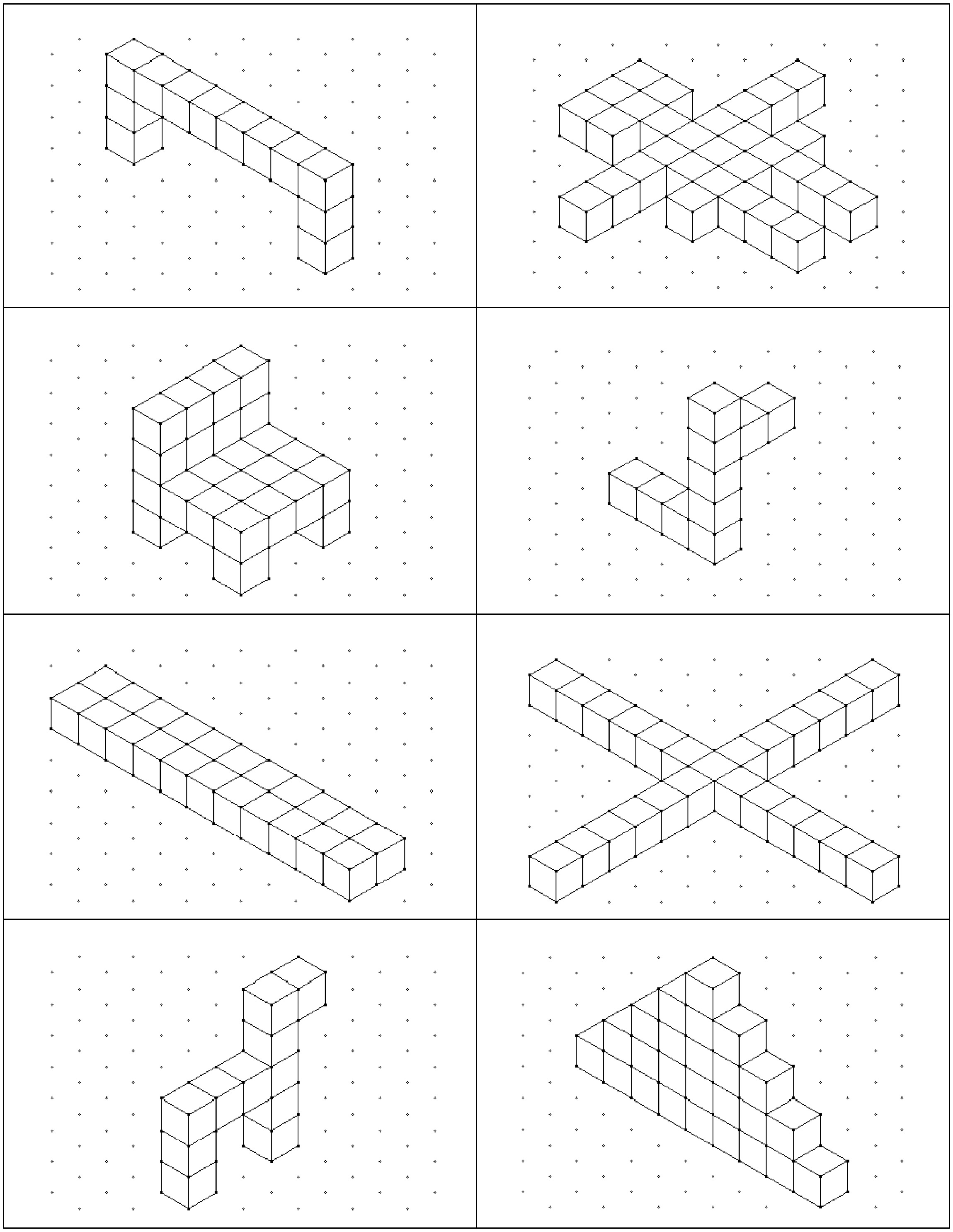


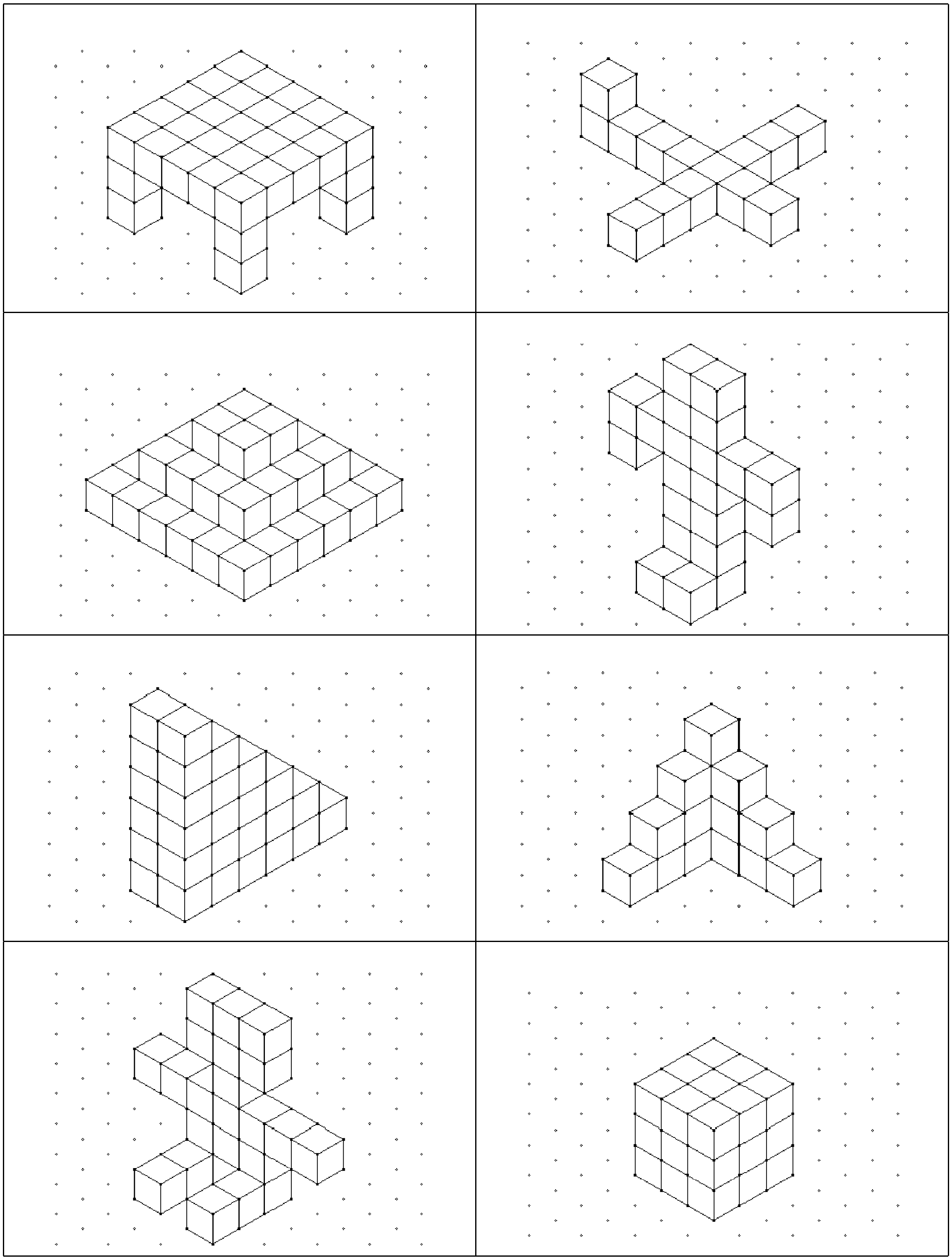


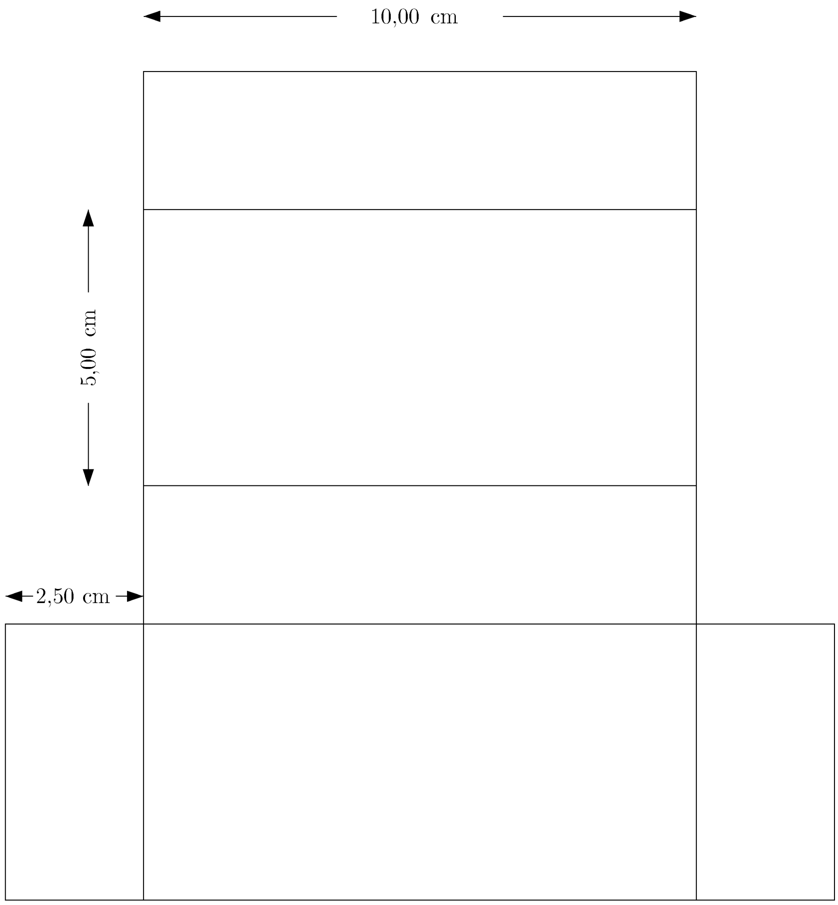


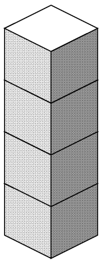
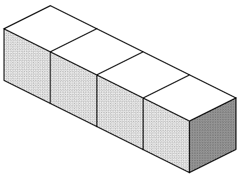
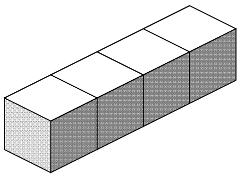
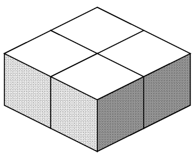
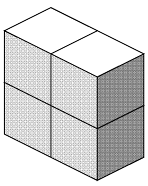
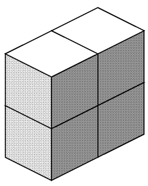
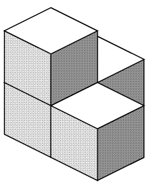
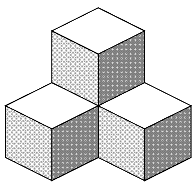
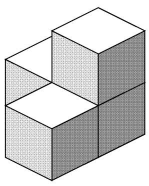
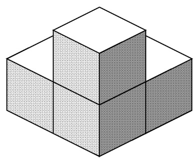


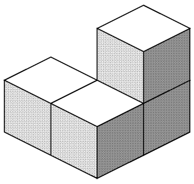
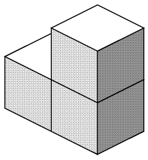
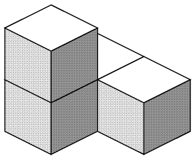
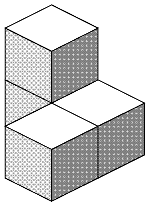
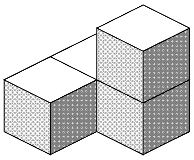
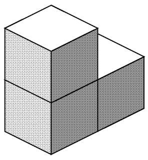
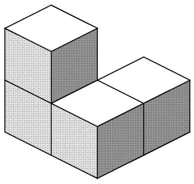
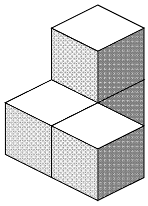
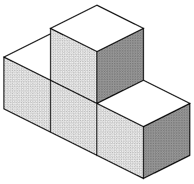
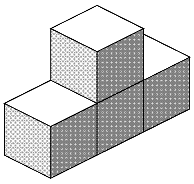
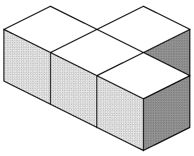
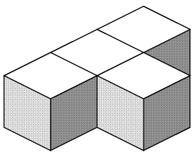
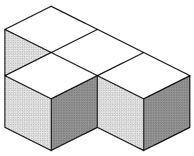
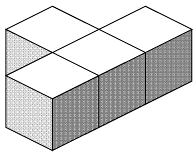
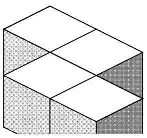
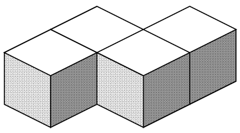







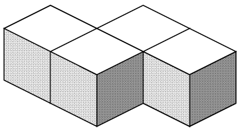
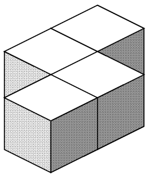
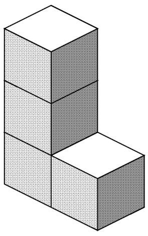
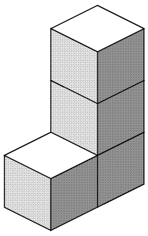
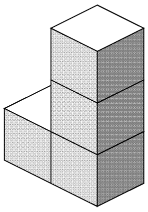
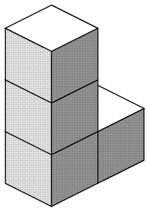
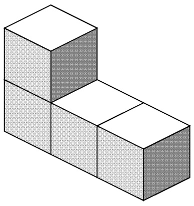
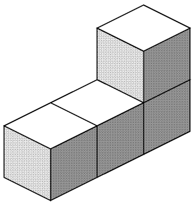
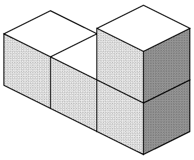
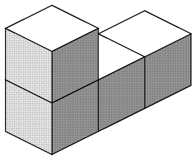
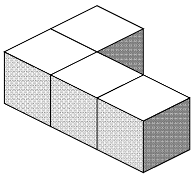
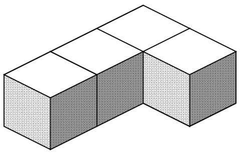
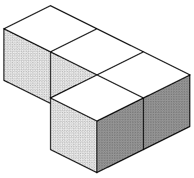
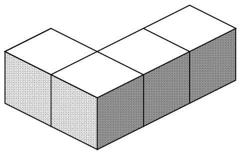
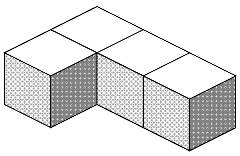
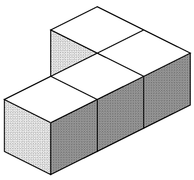
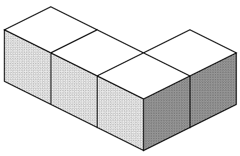
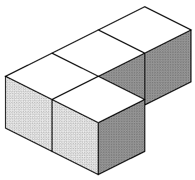





10,00 cm
5,00 cm
2,50 cm

1.				
				
2.				
				
3.				

4.				
5.				
6.				
				
7.				

				
8.				
				
				
7.				

Deuxième partie

Construire et représenter

Un aspect de la géométrie de 10 à 15 ans

Remerciements

Les activités présentées dans les trois premières sections du chapitre 6 et dans la première section du chapitre 7 ont été expérimentées par Thaïs Sander à l'école « Les Tournesols » à Anderlecht. Nous remercions Frédéric Gérard, instituteur en 5^{e} et 6^{e} primaire, qui nous a accueillis pour cette expérimentation.

Les autres activités du chapitre 7 ont été expérimentées par Françoise Van Dieren à l'Institut Saint-Dominique à Schaerbeek dans les classes de Paul Vandeleene, en 2^{e} c et, pour l'activité *Quel milieu ?*, dans la classe de Chantal Marchand, en 3^{e} d. Nous remercions ces enseignants pour leurs avis et remarques ainsi que les élèves pour leur collaboration dynamique.

Les activités des sections 2 à 4 du chapitre 7 ont été expérimentées par Marie-Françoise Van Troeye dans sa classe de 1ère a3 à l'Institut d'enseignement technique secondaire de l'Université du travail Paul Pastur à Charleroi.

5

Autour des projections orthogonales

1 Des solides vus de tous les côtés

De quoi s'agit-il ?

Reconnaître des projections orthogonales d'un assemblage d'objets. Dessiner des assemblages de cubes de plusieurs points de vue.

Enjeux

Se familiariser avec plusieurs vues d'un même objet ou ensemble d'objets. Apprendre à lire de tels dessins et à les faire correspondre à un objet ou ensemble d'objets déterminés, dans des positions données. Exercer sa faculté d'orientation, prendre mentalement le point de vue d'une autre personne.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer. Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments en vraie grandeur.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des maquettes, par exemple d'une maison, une tour et un arbre, que l'on assemble comme sur la figure 1 à la page suivante pour former un petit paysage. Les fiches 1 et 2 (pages 201–202) fournissent des documents à photocopier sur du bristol et qui permettent de créer rapidement ces maquettes.

Des vues du paysage (projections orthogonales), prises aux quatre points cardinaux[1] (figures 2 à 5). L'enseignant devra préparer autant de jeux de quatre vues qu'il aura de groupes d'élèves.

Quelques cubes pleins, par exemple de 10 cm de côté.

De quoi dessiner à main levée sur du papier quadrillé.

Prérequis. – Les élèves qui ont pratiqué l'activité *Les dessins de parallélépipèdes rectangles vus de face et du dessus*[2] auront moins de difficulté que les autres.

[1] Les points cardinaux sont utilisés ici pour repérer commodément les quatre côtés de la table. L'idée n'est pas de les faire correspondre aux points cardinaux géographiques.

[2] *Construire et représenter. Un aspect de la géométrie de 2 ans et demi à 10 ans*, CREM, 1999.

Comment s'y prendre ?

Du paysage aux projections, aller et retour. – Dans un premier temps, le paysage avec la maison, la tour et l'arbre, est disposé sur une table. On veille à disposer les murs de la maison et de la tour parallèlement aux bords de la table. On donne les quatre vues aux élèves, et on leur demande de déterminer de quel côté de la table chacune d'elles a été prise. Ils peuvent tourner autour de la table, ou encore, avec un peu d'habitude, répondre à la question sans se déplacer.

Fig. 1

Fig. 2

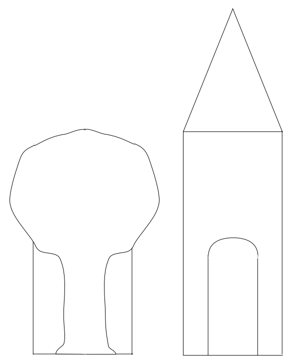


Fig. 3

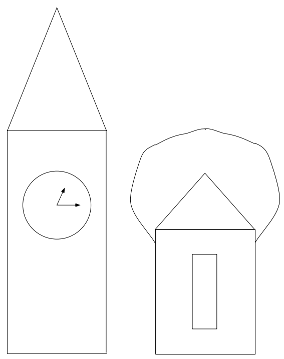


Fig. 4

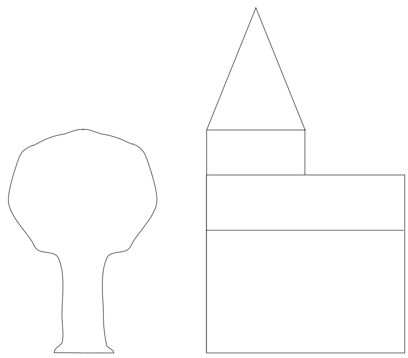


Fig. 5

Dans un deuxième temps, la table est d'abord nue. On donne quatre vues aux élèves (pas nécessairement les mêmes que les précédentes). Ces vues sont marquées par les points cardinaux. On demande aux élèves de reconstituer le paysage.

Dessiner des assemblages de cubes. – On rassemble quelques cubes au milieu d'une table, de sorte que leurs arêtes horizontales soient parallèles aux bords de la table. On les dispose par exemple comme le montre la figure 6, et en tout cas de sorte qu'on en ait une vue différente selon le côté de la table d'où on les regarde. On demande à chaque élève de dessiner l'assemblage à main levée, tel qu'il le voit des quatre côtés de la table, puis du dessus. On explique que pour réaliser ce genre de dessin, on se met bien en face de la construction, de sorte que chaque cube soit représenté par un carré. Ou alors on ne voit pas un cube parce qu'il est caché par un autre.

Il est commode de désigner les côtés de la table par les points cardinaux N, E, S et O. Le résultat du dessin est constitué de bandes de cinq dessins comme celle que montre la figure 7. Les points cardinaux sont indiqués sur chaque bande.

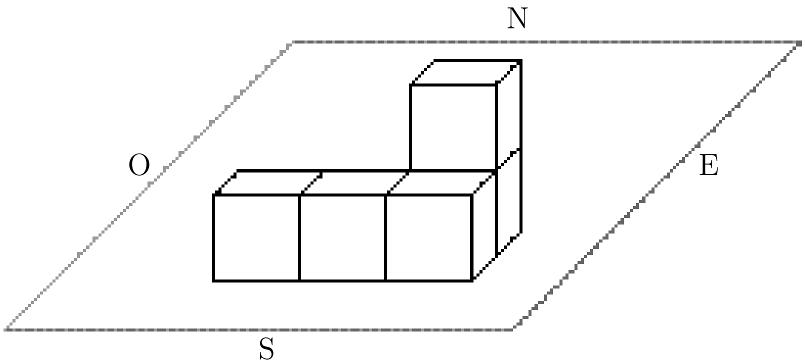


Fig. 6

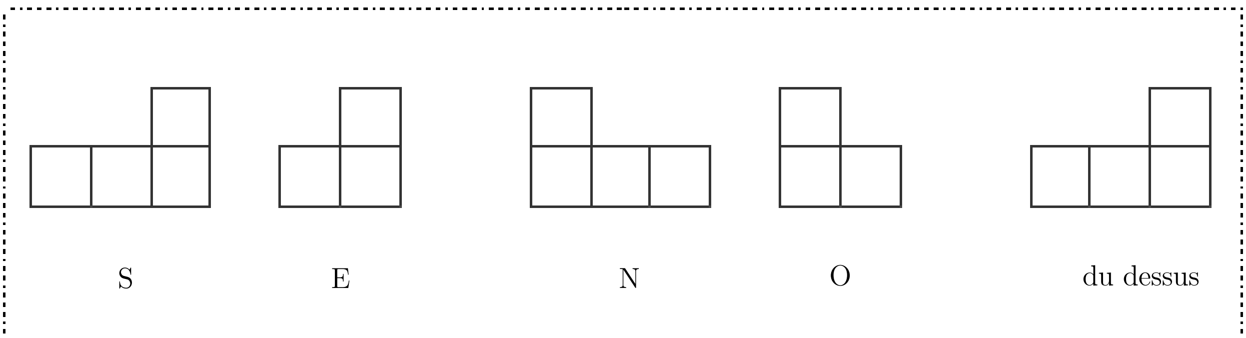


Fig. 7

Ceci fait, on échange les bandes entre élèves, et on leur demande de reconstituer sur une table l'assemblage correspondant.

Prolongements possibles

On peut augmenter le nombre de cubes, varier les assemblages de cubes ou les maquettes, assembler d'autres objets tels que des boîtes d'allumettes, des boîtes à conserve cylindriques, etc. On peut disposer les objets plus symétriquement, de sorte que l'assemblage soit vu de la même façon de divers points cardinaux.

Commentaires

Les représentations du paysage sont des projections orthogonales. Elles sont pourtant présentées aux élèves comme des « vues ». Nous proposons donc de ne pas faire ici la distinction. Si des élèves observent que ce qui est dessiné n'est pas toujours exactement ce qu'ils voient, même en se plaçant soigneusement face au paysage, on pourra commencer à leur expliquer les principes du dessin en projection orthogonale. On peut pour cela montrer avec des tiges ou des aiguilles à tricoter comment chaque point est projeté sur le plan du dessin.

De même, en ce qui concerne les dessins d'assemblages de cubes, on insiste sur le fait que chaque cube vu de face ou du dessus est représenté par un carré. Le dessin est alors une projection orthogonale, mais on l'a obtenue sans recourir explicitement aux règles qui définissent ces projections. Le choix d'assemblages de cubes comme objets à représenter aboutit donc à une première familiarisation, avant tout intuitive, avec les projections orthogonales.

2 Lire des projections orthogonales

De quoi s'agit-il ?

Observer des projections orthogonales de trois hélicoptères. Obtenir des renseignements, y compris des mesures, à partir de quatre projections orthogonales d'une auto.

Enjeux

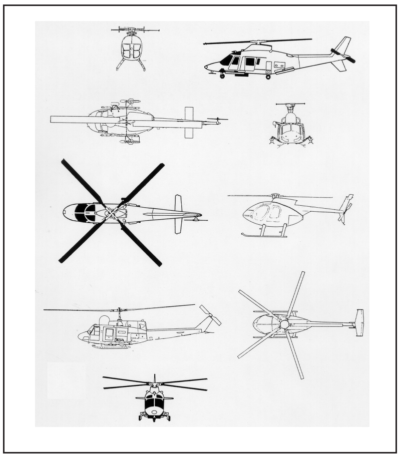
Apprendre à faire le lien entre les projections orthogonales coordonnées d'un même objet en s'appuyant sur des indices. Décrire un objet d'après des projections. Se familiariser avec la notion d'échelle.

Compétences. – Voir compétences à la page 113. En outre : *Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures. Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.*

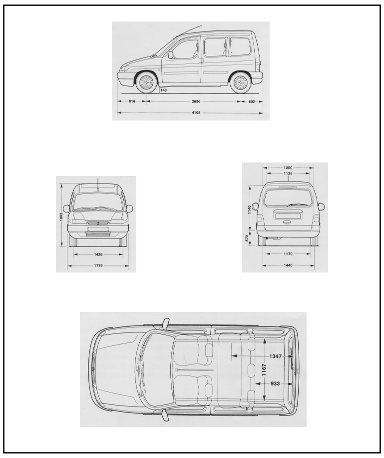
De quoi a-t-on besoin ?

Les fiches 8 et 9.

Fiche 8 (page 208)



Fiche 9 (page 209)



La fiche 8 représente trois hélicoptères, avec trois vues pour chacun, mais toutes ces vues sont présentées en désordre[3]. La fiche 9 présente quatre projections orthogonales d'une auto.

Comment s'y prendre ?

Trier des vues d'hélicoptères. – On donne la fiche 8 aux élèves, en leur expliquant qu'il s'agit de trois hélicoptères qui ont été représentés chacun par trois vues. Le problème consiste à rassembler chaque fois trois vues correspondant à un même hélicoptère.

Les figures 8 à 10 présentent la solution du problème. Évidemment, on repère sans trop de peine que l'un des hélicoptères a été dessiné en traits plus épais que les deux autres, avec les pales de l'hélice noircies, de même que les vitres. Ce sont là des indices extérieurs qui permettent de rassembler ces trois vues (figure 8).

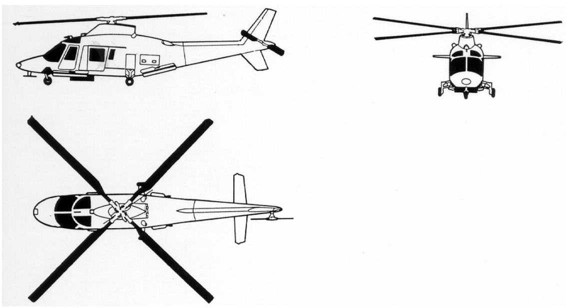


Fig. 8

[3] On prendra garde qu'une des vues d'hélicoptère est incomplète. Il s'agit de celui qui possède une hélice à cinq pales : cette hélice n'est représentée que partiellement sur la vue de face.

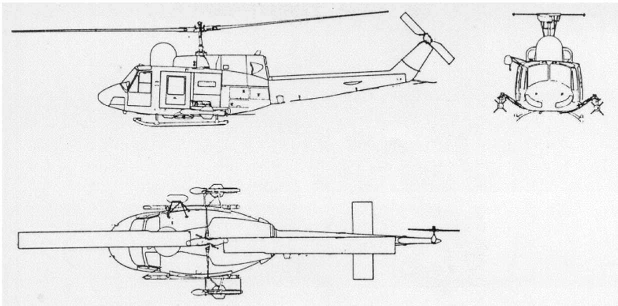


Fig. 9

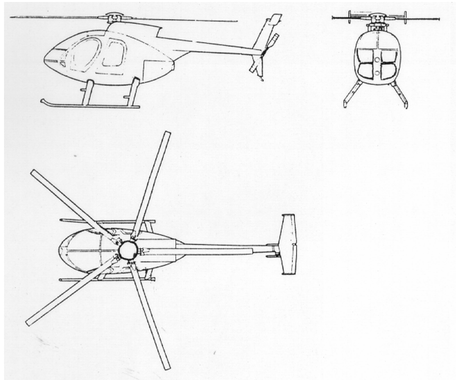


Fig. 10

En ce qui concerne les deux autres hélicoptères, on remarque par exemple qu'un des deux a une carlingue plus longue que l'autre, ce qui permet déjà d'apparier les vues de profil et du dessus de la figure 9 (carlingue allongée), de même que les vues de profil et du dessus de la figure 10 (carlingue courte).

Il reste alors à attribuer les deux vues de face. On observera par exemple que la carlingue de l'hélicoptère à deux pales est plus large que celle de l'hélicoptère à cinq pales. Ceci permet de joindre la vue de face ayant la carlingue la plus large à la figure 9, et celle ayant la carlingue étroite à la figure 10.

Il va de soi que ceci n'est qu'une des façons de résoudre la question. On peut s'attendre à ce que les élèves découvrent d'autres indices. Et aussi à ce qu'ils fassent au passage pas mal d'observations sur les hélicoptères.

Se renseigner sur une auto. – On donne la fiche 9 aux élèves.

Ils identifient sans peine les diverses vues. On peut alors leur demander quels types de renseignements on peut obtenir à partir de ces projections. Des questions possibles sont :

1. Quelles sont les dimensions hors tout de la voiture ?
2. En quelles unités sont données les mesures ?
3. Quelles sont parmi les quatre vues, celles qui sont à la même échelle ?
4. Quelles sont les échelles de ces diverses représentations ?
5. Sur quelles vues peut-on déterminer le diamètre des roues ? La hauteur de la voiture ?
6. Déterminer approximativement le volume de l'habitacle.
7. Combien de personnes peuvent-elles prendre place dans cette voiture ? Comment détermine-t-on ce nombre ?
8. Quel est le volume approximatif du coffre ? Et quel est le volume du coffre lorsqu'on a dégagé le siège arrière ?
9. Comparez les écartements des roues avant et arrière.
10. Évaluer la surface vitrée totale de la voiture.

3 Construire un solide donné par ses projections

De quoi s'agit-il ?

Construire un solide simple, avec ses dimensions exactes, tel qu'il est donné par trois projections orthogonales.

Enjeux

Reconnaître un objet donné par trois projections orthogonales, comprendre ce que représente chacune des projections, utiliser les projections pour obtenir des renseignements sur l'objet, y compris ses mesures, construire l'objet.

On ne pousse pas encore ici l'apprentissage des projections orthogonales coordonnées jusqu'à permettre aux élèves d'en construire eux-mêmes. Cela sera fait à l'activité suivante. Néanmoins on s'explique à leur sujet, on commence à les discerner des simples perceptions visuelles.

Compétences. – *Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments en vraie grandeur. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels. Fractionner des objets en vue de les comparer.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un jeu de solides comprenant un cube, un prisme à base carrée, un parallélipipède rectangle à trois arêtes inégales, un prisme à base triangulaire, une pyramide à base triangulaire, une pyramide à base carrée, un cylindre droit et un cône droit.

La fiche 10.

Les représentations de ces divers solides, chacun par trois projections coordonnées (fiche 11).

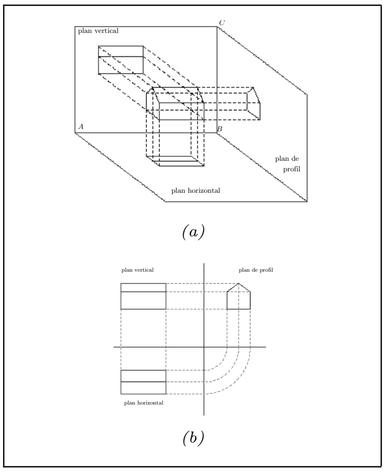
Du bristol, des ciseaux et du ruban adhésif.

Prérequis. – Avoir une certaine idée des projections orthogonales, par exemple en ayant travaillé l'activité *Des parallélépipèdes rectangles dessinés de face et du dessus* à la page 60 ainsi que les activités 1 et 2 de ce chapitre. Pour la construction du cône, qui est le dernier solide envisagé ci-après, savoir que dans un cercle, les arcs interceptés par deux angles au centre sont entre eux comme ces angles. Cette dernière partie de l'activité est adaptée aux élèves de troisième année du secondaire.

Comment s'y prendre ?

On donne la fiche 10 aux élèves, pour leur expliquer le principe des trois projections orthogonales coordonnées. Il est utile à ce stade de matérialiser les trois plans de projection, par exemple par des plaques de polystyrène (frigolite), et d'expliquer les directions de projection en les montrant avec un fil à plomb, ou des tiges, ou des aiguilles à tricoter. On explique alors comment on passe à une figure plane (passage de la figure (a) à la figure (b) de la fiche 10) en rabattant le plan horizontal sur le plan vertical par une rotation d'un quart de tour autour de AB, et en rabattant le plan de profil sur le plan vertical par une rotation d'un quart de tour autour de BC. Les lignes de rappel en quart de cercle (figure (b) de la fiche 10) sont une manière de montrer cette dernière rotation.

Fiche 10 (page 210)



Ces explications permettent entre autres de reconnaître que sur la projection verticale de la maison, le toit est représenté par un rectangle et non par un trapèze (comme sur la figure 11 à la page suivante). Cela conduit aussi à accepter, un peu plus tard au cours de l'activité, que la vue verticale du cône (fiche 11h) se présente comme un triangle, et non comme sur la figure 12.

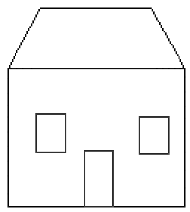


Fig. 11

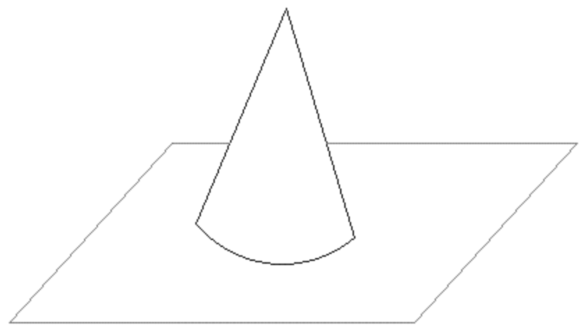
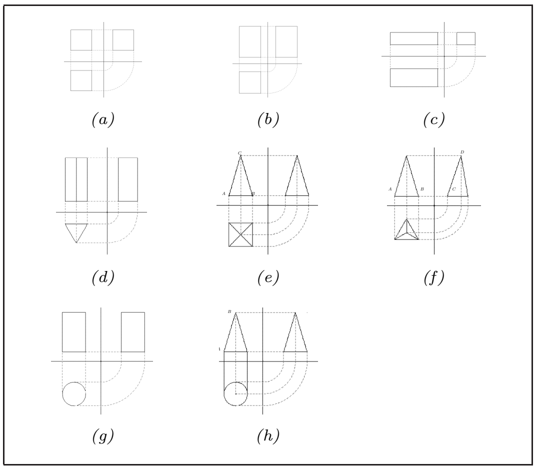


Fig. 12

On demande ensuite aux élèves d'apparier les solides à leurs représentations sur la fiche 11. Cela permet d'approfondir un peu leur notion des projections orthogonales.

Fiche 11 (page 211)



Ils construisent alors, en bristol, les solides les plus simples, à savoir le cube, le parallélipipède, les prismes et le cylindre. Ce sont ceux dont les dimensions sont faciles à relever en vraie grandeur sur les projections (voir fiche 11 à la page 211.) Il va de soi que les projections doivent constituer à ce stade du travail la seule source de renseignement. En particulier les solides eux-mêmes ne sont pas à ce moment disponibles aux élèves.

On poursuit par les autres solides. Voici une façon de construire ceux qui posent le plus de problèmes aux élèves.

La pyramide à base carrée. – Sa base apparaît en vraie grandeur sur la vue du dessus (parfois appelée aussi vue en plan). Sa surface latérale est constituée de quatre triangles isocèles identiques. Leur base se lit en AB sur la fiche 11e. Pour trouver leur hauteur commune, imaginons la hauteur AC de la face de gauche. Cette hauteur est parallèle au plan vertical. Donc elle se projette sur celui-ci en vraie grandeur.

La pyramide à base triangulaire. – Sa base apparaît en vraie grandeur sur la vue du dessus. Sa surface latérale est constituée de trois triangles isocèles identiques. Leur base se lit en AB sur la fiche 11f. Pour trouver leur hauteur commune, imaginons la hauteur DC de la face de devant. Elle est parallèle au plan de profil. Donc elle se projette en vraie grandeur sur ce plan.

Le cône. – Sa base apparaît en vraie grandeur sur la vue du dessus. Appelons r le rayon de la base. Sa surface latérale développée est constituée par un secteur de cercle comme le montre la figure 13. En effet, sur le cône, tous les points de la circonférence de base se trouvent à égale distance du sommet. Cette distance est donnée en vraie grandeur par AB sur la vue verticale. Appelons-la R. Reste à trouver l'angle du secteur de cercle. Il faut arriver à ce que la circonférence de base s'applique exactement sur la périphérie du secteur. Or la circonférence de base mesure $2\pi r$. La circonférence du cercle correspondant au secteur mesure elle, $2\pi R$. Or, dans un cercle, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils interceptent. Par conséquent, l'angle α du secteur satisfait à l'équation

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}.$$

On tire de là que

$$\alpha = 360 \cdot \frac{r}{R}.$$

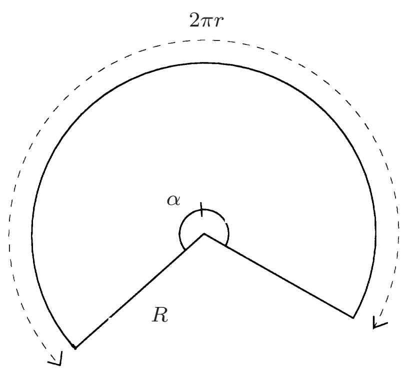


Fig. 13

Prolongements possibles

Varier les objets à construire : on peut songer par exemple au tétraèdre et à l'octaèdre réguliers, ou encore à certains polyèdres semi-réguliers, par exemple le cuboctaèdre.

4 Dessiner des projections orthogonales

De quoi s'agit-il ?

Dessiner les trois projections coordonnées des solides les plus simples.

Enjeux

Essentiellement, il s'agit d'apprendre à dessiner les trois vues d'un solide simple de façon classique, en respectant les mesures et en faisant apparaître les lignes de rappel.

Compétences. – *Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un jeu de solides de quelques centimètres de haut, à savoir : un cube, un prisme à base carrée, un parallélipipède rectangle, un prisme à base triangulaire, une pyramide à base carrée, un cylindre droit, un cône droit, une sphère.

De quoi dessiner.

Comment s'y prendre ?

On donne la fiche 10 (voir page 120) aux élèves, ainsi que les solides prévus dans la rubrique *De quoi a-t-on besoin ?*, et on leur propose l'activité suivante.

> En vous servant du modèle de représentation de la fiche 10, dessinez trois projections pour chacun des solides.

On insiste sur la précision du dessin. Soit les élèves utilisent d'eux-mêmes les lignes de rappel pour construire les trois figures, soit le professeur leur montre sur le tas comment s'y prendre à cet égard.

Prolongements possibles

Cette activité prend tout son sens si elle introduit à d'autres constructions de représentations orthogonales, dans la suite du cours de mathématiques, ou dans des cours de technique. Par exemple il est instructif, pour les élèves de sixième, de construire les projections orthogonales de sections planes de cylindres et de cônes.

6

Constructions

1 Combien de terre pour modeler un cube ?

De quoi s'agit-il ?

Déterminer le poids d'un cube d'un centimètre cube. Déterminer ensuite la quantité de terre nécessaire pour modeler un cube dont le volume est donné.

Enjeux

Faire le lien entre le volume d'un objet et son poids :

– deux objets de même volume faits d'un même matériau ont le même poids ;

– la proportionnalité des grandeurs volume et poids pour un même matériau permet d'utiliser le poids pour mesurer un volume.

Travailler la notion d'unité de volume.

Compétences. *– Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.*

De quoi a-t-on besoin ?

De la terre à modeler (argile, terre glaise,...). Des couteaux pour couper la terre (des couteaux ordinaires suffisent).

Des règles graduées.

Des balances de précision, par exemple des pèse-lettres.

Comment s'y prendre ?

Qu'évoque l'expression « centimètre cube » dans la tête de chacun ? Quelles sont les images familières qui s'y rapportent ? Après un moment d'échange à ce sujet, l'enseignant pose la question suivante :

Que pèse un cube en terre dont le côté mesure un centimètre ?

Les élèves réalisent un cube en terre d'un centimètre de côté. Ils essaient de deviner son poids en le soupesant. Ils le pèsent ensuite afin de vérifier leur estimation.

Un pèse-lettres ordinaire donne un résultat à un ou deux grammes près, ce qui est une précision insuffisante. On s'en aperçoit en voyant la balance donner des poids identiques pour des cubes sensiblement différents. Il faut donc trouver un autre moyen pour mesurer le poids du cube de manière précise.

Une manière de faire est de modeler un cube plus grand et de diviser ensuite son poids par le nombre de cubes d'un centimètre de côté qu'il contient. Chaque élève modèle avec le plus de précision possible un cube de 3 ou 4 cm de côté. Chacun pèse son cube et note le résultat. Ceux qui ont terminé plus vite modèlent un deuxième cube, dont le côté mesure 4 cm (il en faut deux, que l'on met de côté pour la suite de l'activité).

Il reste alors à trouver le nombre de cubes d'un centimètre de côté contenus dans chacun des cubes. Pour cela, les élèves découpent les cubes en cubes d'un centimètre de côté. Par exemple, ceux dont le cube a un côté de trois centimètres le découpent en trois tranches, chaque tranche en trois prismes à base carrée, chaque prisme en trois cubes. Les élèves comptent alors le nombre de petits cubes. Ils font la division pour trouver le poids d'un cube d'un centimètre de côté. On compare les résultats. Ceux-ci devraient être égaux à 0,2 grammes près (ce qui correspond environ à une différence de 2 mm sur chaque côté du grand cube).

L'enseignant revient à la notion de volume :

Si l'on aplatit le cube ou si l'on modifie tout à fait sa forme, a-t-on toujours le même volume ? Pourquoi ? Comment le vérifier ?

Certains enfants ne sont pas encore au clair avec l'invariance du volume relativement aux déformations de l'objet.

La manipulation de la terre permet d'expérimenter cette invariance et sert de support au raisonnement. Pour vérifier expérimentalement que, quand on déforme un cube, il conserve le même volume, on peut procéder comme suit. On prend les deux cubes de 4 cm de côté que l'on avait mis de côté. On remplit deux verres identiques avec de l'eau, de sorte que les niveaux d'eau soient les mêmes. On déforme un des deux cubes. On plonge les deux modelages dans l'eau et l'on constate que les niveaux ont changé de la même façon. Le volume des deux objets est donc le même.

Cette invariance du volume vis-à-vis des déformations est-elle vraie pour tout les matériaux ? Les élèves trouveront eux-mêmes des matériaux qui peuvent se « dégonfler » lorsqu'on les manipule : la barbe à papa en est un exemple, ou encore la pâte à pain qui a levé sous l'effet de la levure ou du levain. Lorsqu'on la pétrit, elle diminue de volume. Pour que le volume reste le même lorsqu'on le déforme, il faut que le matériau soit *incompressible*, ce qui est le cas de la terre à modeler (si on ne lui laisse pas le temps de sécher).

On peut maintenant aborder la dernière partie de cette activité :

Modeler un cube de volume déterminé.

Comment modeler un cube – ou n'importe quel objet en terre – dont le volume est par exemple de 20 cm^3 ? Une manière de le faire est de passer par le poids. Puisqu'on connaît assez précisément le poids d'un cube de 1 cm^3, on connaît celui d'un cube de 20 cm^3 : il suffit de multiplier ce poids par 20. En utilisant la balance, on détermine la quantité de terre dont c'est le poids. On peut alors en faire un cube ou un autre objet : son volume restera le même.

Échos des classes

Voici quelques constatations générales :

– les estimations de poids ou de grandeur donnent des résultats assez éloignés de la réalité, ce qui montre qu'il est utile d'en faire ;
– il n'est pas évident pour tous les enfants que pour passer du poids de n cubes au poids d'un cube, il suffit de diviser le poids total par n ;
– beaucoup d'élèves hésitent encore sur l'invariance du poids après déformation ; certains repèsent leur objet après transformation.

Prolongements possibles

Recommencer l'activité avec un matériau ayant un poids spécifique différent. Aborder la notion de poids spécifique en comparant les deux tableaux de proportionnalité obtenus pour les deux matériaux.

Établir le cube d'un centimètre de côté comme unité de volume. Découvrir la formule du volume des cubes, des parallélépipèdes rectangles.

– Peut-on prévoir le nombre de cubes d'un centimètre de côté que l'on obtiendrait en construisant et en découpant un cube de 5 cm de côté, de 6 cm, ... ?
– Combien de cubes d'un centimètre de côté sont-ils contenus dans un parallélipipède dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm ? On peut modeler le parallélépipède et le découper comme on l'a fait pour les cubes.
– Comment prévoir le nombre de cubes pour un parallélipipède rectangle quelconque ?
– Passer ensuite à des dimensions qui ne sont plus entières (2,5 cm sur 3,2 cm sur 3 cm...).

Commentaires

Nous avons choisi d'utiliser l'expression « poids » plutôt que « masse ». Le concept de « masse » est beaucoup plus abstrait que celui de « poids » et la distinction entre les deux n'est pas facile. On peut la négliger sans dommage dans une première approche des grandeurs.

2 Modeler des cylindres et des prismes à base carrée

De quoi s'agit-il ?

Modeler trois cylindres de même volume dont la hauteur est chaque fois multipliée par deux. Modeler de la même manière trois prismes à base carrée.

Enjeux

Faire le lien entre le volume d'un objet et son poids :

– deux objets de même volume faits d'un même matériau ont le même poids ;
– la proportionnalité des grandeurs volume et poids pour un même matériau permet d'utiliser le poids pour mesurer un volume.

Expérimenter la relation non linéaire entre le côté de la base carrée d'un prisme – ou le rayon de la base d'un cylindre – et leur volume (pour garder le même volume lorsqu'on double la hauteur, ce n'est pas par deux qu'il faut diviser le côté de la base ou le rayon).

Compétences. – Voir compétences à la page 124. En outre : *Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.*

De quoi a-t-on besoin ?

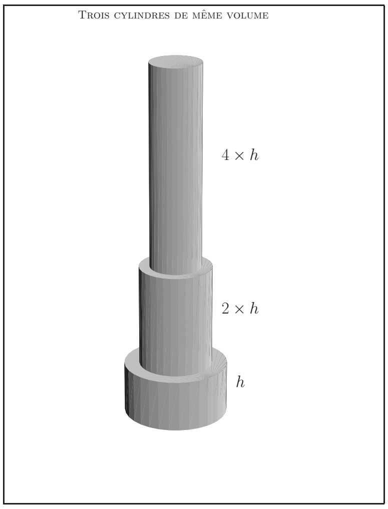
De la terre à modeler (argile, terre glaise,...), des balances, des fiches de travail (fiches 12 et 13, pages 212–213).

Prérequis. – L'activité précédente.

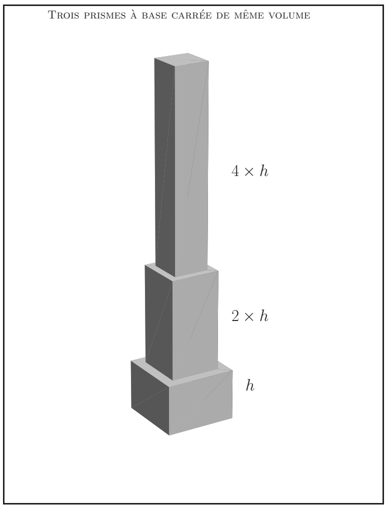
Comment s'y prendre ?

L'enseignant présente le travail à réaliser à partir d'une représentation en perspective (fiche 12).

Fiche 12 (page 212)



Fiche 13 (page 213)



Les enfants doivent analyser les données et énoncer le problème. L'enseignant synthétise ensuite les consignes. Il s'agit de modeler avec toute la terre reçue trois beaux cylindres de même volume qui puissent tenir en équilibre l'un sur l'autre. Les solides serviront dans l'activité suivante et il importe que leur faces et dimensions soient les plus exactes possible. Le premier cylindre est celui du dessous. Le deuxième doit avoir une hauteur double du premier, et le troisième une hauteur quadruple du premier.

Les élèves travaillent par équipe de trois. L'enseignant donne à peu près la même quantité de terre aux différentes équipes, car cela permettra de faire des comparaisons. Les élèves partagent avec précision toute la terre reçue en trois parties de même volume. Des balances sont à leur disposition, mais l'enseignant ne précise pas qu'il faut les utiliser.

Les enfants analysent ensuite la deuxième situation (fiche 13). Si nécessaire, l'enseignant attire l'attention sur la forme carrée de la base et la disposition des parallélépipèdes les uns par rapport aux autres. Comme pour les cylindres, les enfants réalisent les modelages par équipes de trois, avec toute la terre donnée. L'enseignant demande le plus de précision possible dans le modelage : des faces lisses, les plus planes possibles (la table est un support pour y arriver), des plans parallèles et perpendiculaires au juger.

La classe observe les modelages et constate leur variété. Comme il n'y a pas de consigne précise quant aux dimensions du solide du dessous, ceux-ci sont différents d'un groupe à l'autre. Les différences sont d'autant plus manifestes que les hauteurs doublent à chaque étage.

Échos des classes

L'activité de modelage des cubes a bien préparé les élèves à la réalisation des cylindres et des prismes de même volume. Ils ont évoqué l'invariance qu'ils avaient constatée quant au poids et au volume.

L'analyse du dessin en perspective (situation de départ) n'a pas posé de problème particulier. Les élèves ont compris tout de suite ce qu'ils devaient faire.

Plusieurs stratégies ont été utilisées pour partager la terre. Certains l'ont partagée de manière approximative. L'enseignant a dû intervenir en leur demandant comment ils pouvaient être sûrs que les trois parts avaient le même volume. Ils ont alors pensé aux balances et ont pesé chaque morceau. Ils ont retranché l'excédent de manière à arriver à un poids identique pour chaque part.

D'autres ont pesé la terre reçue et ont divisé la mesure en trois. Pour se faciliter la tâche, certains sont trouvé l'astuce suivante : ils ont prélevé une partie de la terre pour obtenir un poids qu'ils étaient capables de partager facilement en trois, par exemple 600 grammes. L'enseignant s'en est rendu compte et leur a demandé d'utiliser toute la terre reçue.

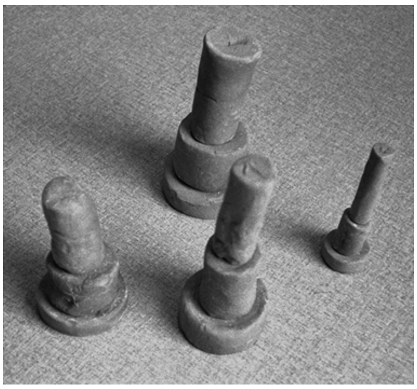


Fig. 1

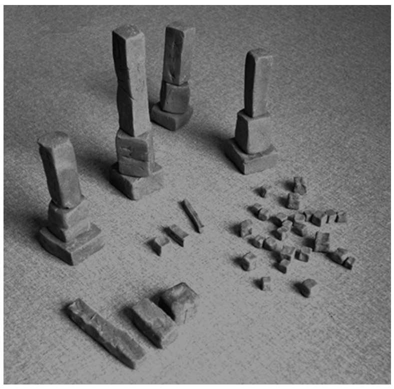


Fig. 2

Le modelage des cylindres a donné de bons résultats (voir figure 1 à la page précédente). Les élèves se sont servis de la table pour rouler la pâte et aplatir les bases. Ils ont utilisé leur règle graduée pour mesurer les hauteurs. Certaines équipes ont organisé leur travail en fixant au départ les trois hauteurs et chacun a modelé sa part. D'autres ont modelé les cylindres l'un à la suite de l'autre en faisant des rectifications en fonction du premier modelage terminé. Ces modifications ont parfois déformé les cylindres. En effet, les bases avaient tendance à se creuser lorsqu'ils allongeaient le cylindre et à s'évaser lorsqu'ils tapaient la base trop fort sur la table. Par ailleurs si le cylindre du dessous était trop haut, les suivants devenaient si fins qu'ils ne restaient pas rigides. Dans ce cas, pour ne pas devoir tout recommencer, les élèves ont remodelé complètement le cylindre le plus haut (celui du dessus) pour pouvoir le mettre en dessous.

On peut faire les mêmes observations pour le modelage des prismes, à l'exception d'une difficulté pour obtenir des bases carrées. Il n'était plus possible de rouler la terre pour allonger le prisme, il fallait taper successivement chaque face latérale sur la table, sans en oublier au risque d'obtenir des bases rectangulaires. Néanmoins, les élèves semblaient déjà familiarisés avec le maniement de la terre et les modelages ont été terminés plus rapidement. Le parallélisme des faces était bien rendu et l'assemblage souvent stable (voir figure 2 à la page précédente).

3 Dessiner les vues du dessus et de face des prismes

De quoi s'agit-il ?

Dessiner les projections orthogonales des tours construites avec les prismes lors de l'activité précédente.

Enjeux

Exercer les représentations à partir d'une situation vécue.

Explorer de manière plus précise les rapports de grandeur entre les trois prismes, entre les bases et les hauteurs.

Compétences. – *Tracer des figures simples. Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments en vraie grandeur. Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.*

De quoi a-t-on besoin ?

Une règle, une équerre, un crayon et une gomme.

Prérequis. – L'activité précédente. L'activité *Des solides vus de tous les côtés* (page 113), où l'on se met d'accord sur les termes *vue du dessus* et *vue de face.*

Comment s'y prendre ?

Voici la consigne :

Dessiner les vues du dessus et de face de la tour construite avec des prismes modelés.

La solution la plus élémentaire consiste à prendre sur la tour toutes les mesures nécessaires au dessin des deux vues. Mais cette méthode est très imprécise et aurait pour résultat un vague croquis au lieu du dessin attendu. L'idée est plutôt de prendre les mesures nécessaires au dessin d'un des prismes et de retrouver, à partir de celles-ci, les dimensions des autres prismes.

Supposons avoir pris les dimensions du prisme du dessous. On sait que le prisme du milieu est deux fois plus haut. Comment déterminer la largeur de sa base ? On peut imaginer transformer le prisme du dessous pour obtenir le prisme du milieu. En effet, ils ont le même volume et sont constitué de la même quantité de terre. Pour avoir un prisme dont la hauteur est deux fois plus grande, il suffirait de découper le prisme du dessous en deux parties identiques et d'ensuite les superposer. Imaginer cela permet de répondre à la question : si la hauteur est doublée, qu'advient-il de la base puisqu'on veut garder le même volume : la base doit être partagée en deux parties égales. Mais alors comment la dessiner en conservant sa forme carrée ?

Cette question est un problème en tant que tel et a peut-être déjà été traitée auparavant[1]. Sinon c'est l'occasion de le faire. On peut laisser les enfants chercher concrètement une solution à ce problème par découpage et recomposition du carré. Les figures 3 et 4 montrent deux solutions à la question.

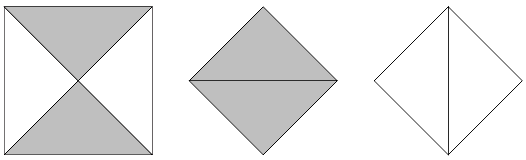


Fig. 3

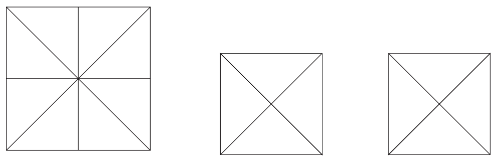


Fig. 4

Ces deux solutions ne sont pas les seules. De plus le chemin pour y parvenir peut être différent d'un enfant à l'autre. Une possibilité est de découper le carré de départ en deux et de vouloir transformer cette moitié en un carré. Les deux solutions montrées ci-dessus découlent alors de partages en deux selon une diagonale dans le premier cas (figure 5 à la page suivante) et selon une médiane dans le deuxième (figure 6).

[1] Voir par exemple les activités proposées dans *Couper en deux, c'est bête comme chou ! Voire* (C. De Block-Docq et N. Rouche [1996]).

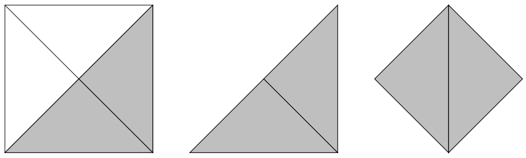


Fig. 5

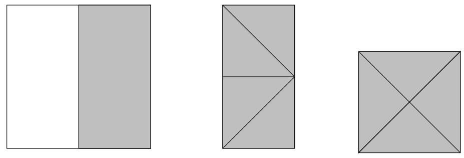


Fig. 6

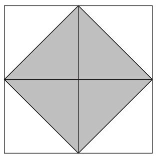


Fig. 7

Le deuxième type de découpage permet encore de voir que le carré moitié peut s'obtenir en joignant les milieux des côtés du carré de départ (figure 7).

Pour trouver le côté de la base du prisme du dessus, on peut recommencer le même découpage, ou bien l'on peut penser de suite au fait que, puisque ce prisme est quatre fois plus haut que celui du dessous, sa base sera quatre fois plus petite. Partager un carré en quatre carrés ne pose aucun problème : il suffit de diviser son côté par deux.

Tout ceci permet de comprendre pourquoi les prismes peuvent être disposés comme à la figure 8 : on tourne les prismes d'un huitième de tour chaque fois. (Ce type de disposition se trouve également sur la photo de la figure 2 à la page 128.)

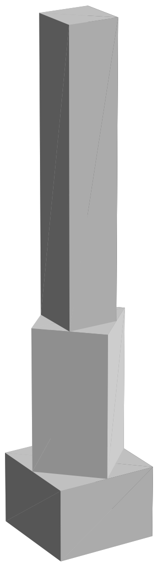


Fig. 8

Tout est maintenant en place pour dessiner les vues du dessus et de face. Commençons par la vue du dessus et, parce que c'est plus facile, faisons celle de la tour où les prismes sont disposés comme à la figure 8. Il suffit de dessiner le premier carré (figure 9), de joindre les milieux des côtés une première fois (figure 10) et de recommencer avec le nouveau carré (figure 11).

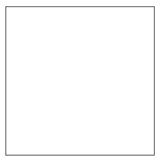


Fig. 9

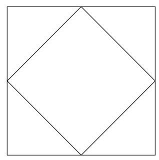


Fig. 10

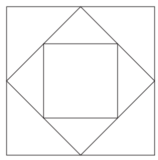


Fig. 11

Si on souhaite avoir la vue du dessus lorsque les prismes sont disposés comme sur la fiche de départ, il faut encore faire tourner le carré du milieu d'un huitième de tour. Une manière de le faire est d'utiliser les diagonales et de se servir d'un compas comme à la figure 12.

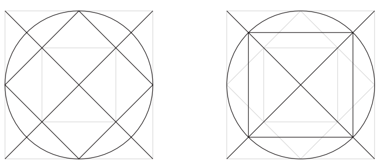


Fig. 12

La vue de face ne devrait pas poser trop de problème si ce n'est de centrer les faces des prismes successifs. Les vues de haut et de face sont représentées à la figure 13. La figure 14 reprend les vues de haut et de face lorsque les prismes sont posés en les tournant à chaque étage d'un huitième de tour.

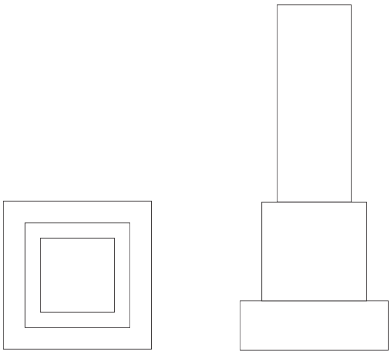


Fig. 13

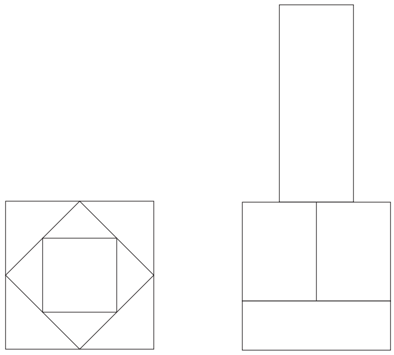


Fig. 14

Échos des classes

Dans la classe témoin, l'utilisation des instruments n'a pas été spontanée, ce qui a engendré beaucoup d'imprécision dans les dessins.

Le premier exemple (figure 15) est celui d'un élève qui s'en est bien sorti, comme quelques-uns des 25 enfants de la classe (certes pas une grande proportion !). Il nous a semblé que sa démarche de résolution était bien pensée et qu'il maîtrisait plus ou moins bien ses dessins.

Neyla (figure 16) a été trop vite dans les dessins des assemblages vus de haut et de face où, comme la majorité des élèves, elle n'a pas respecté les rapports entre les surfaces.

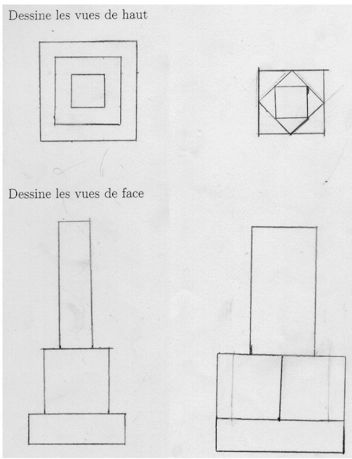


Fig. 15

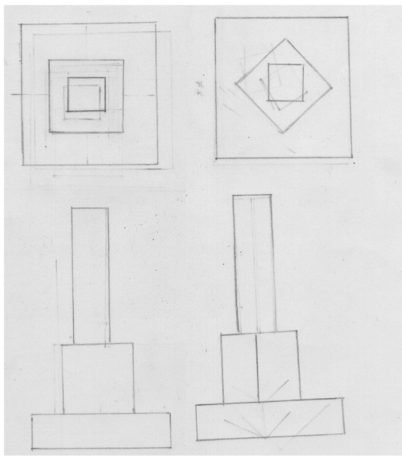


Fig. 16

De la même manière, Thierry (figure 17 à la page suivante) n'a pas fait preuve de beaucoup de soin et de précision dans ses tracés.

Enfin, Eda (figure 18) n'a manifestement pas regardé l'assemblage réel de face et de haut. On remarque des disproportions flagrantes entre les prismes.

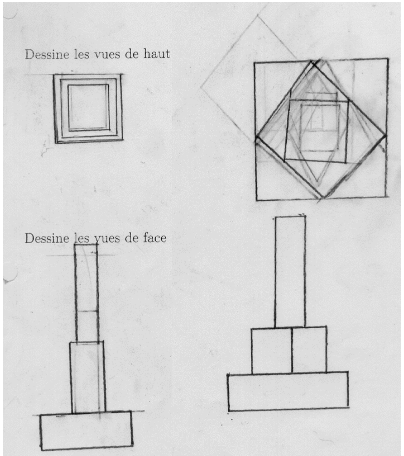


Fig. 17

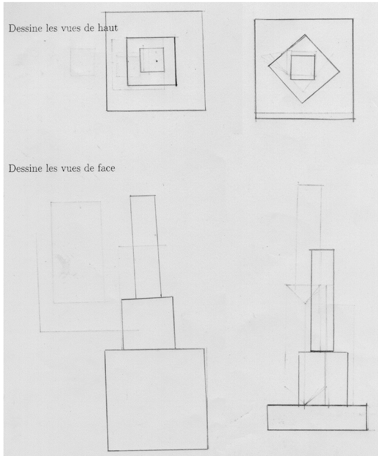


Fig. 18

4 Développements

De quoi s'agit-il ?

Trouver et construire des développements de pyramides, de prismes et de parallélépipèdes.

Enjeux

Développer l'imagination spatiale par l'aller-retour entre le développement et le solide.

Exercer l'habileté manuelle.

Manipuler les instruments de dessin, notamment utiliser le compas pour reporter des longueurs.

Construire aux instruments des carrés et des triangles isocèles.

Compétences. – *Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Tracer des figures simples. Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des solides en bois (un par banc). Des instruments de dessin. Du papier et du carton. Du papier collant.

Prérequis. – Pouvoir tracer des angles droits avec une équerre et des cercles avec un compas.

Activité *Une approche des développements* à la page 52 de *Construire et représenter. Un aspect de la géométrie de 2 ans et demi à 10 ans.*

Comment s'y prendre ?

Pyramides à base carrée. – Le premier solide que les enfants ont à construire est une pyramide droite à base carrée, solide relativement simple qui possède deux types de faces bien distinctes : une base, carrée, et quatre faces latérales, triangles isocèles tous identiques.

Le professeur distribue une pyramide par banc et donne la consigne :

> Il s'agit pour chaque élève de reproduire en carton la pyramide qu'il a reçue. Il doit le faire *d'une seule pièce.*

On pose comme défi supplémentaire de ne pas contourner les faces.

Les élèves essaient de prévoir comment disposer les différentes faces les unes par rapport aux autres sur une feuille de papier pour avoir un développement de la pyramide. Un moyen de le découvrir consiste à découper la pyramide, *en imagination*, et à faire pivoter les faces latérales. La pyramide réelle est là pour soutenir l'imagination. Ils dessinent, à main levée, un premier projet. L'important ici est la forme globale du développement, la disposition des différentes faces et non la précision du dessin.

Une fois le premier projet réalisé, les élèves dessinent le développement qu'ils ont trouvé de manière précise aux instruments. Voici une manière de le faire :

- On relève sur la pyramide la dimension d'un côté de la base. On dessine deux angles droits aux extrémités de ce côté avec l'équerre, et l'on reporte avec le compas la même longueur sur les deux perpendiculaires obtenues.
- Construire les triangles isocèles peut se faire de manière très économique. On relève la dimension des côtés égaux de n'importe quelle face triangulaire de la pyramide. On fixe l'ouverture du compas à cette dimension, ce qui permet de terminer le développement en traçant huit petits arcs de cercle (figure 19).

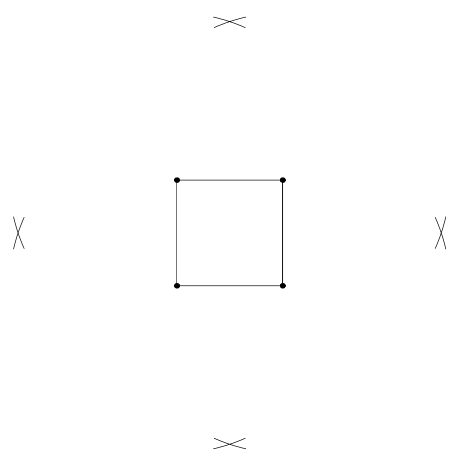


Fig. 19

Voici une manière d'aider les élèves à comprendre la construction du triangle isocèle. On dispose trois bâtonnets dont deux ont la même longueur, comme à la figure 20 à la page suivante, et on les « referme » comme à la figure 21 pour arriver au triangle isocèle (figure 22). Ce que l'on fait avec le compas, c'est reproduire ce mouvement.

Fig. 20

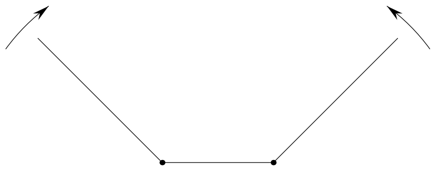


Fig. 21

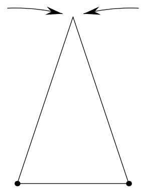


Fig. 22

Les élèves font d'abord le développement sur une feuille de papier, ce qui leur permet de vérifier qu'il convient. Ensuite, ils le réalisent sur du carton[2]. Le développement ressemblera sans doute à celui de la figure 23.

Autres solides. – On peut poursuivre en proposant aux élèves de construire un prisme à base triangulaire. Le choix de ce solide est motivé par la différence de forme entre les bases et les faces latérales, ce qui facilite la perception du développement. De plus, il est important, pour développer l'imagination spatiale des élèves, de ne pas se contenter de développer des cubes et des parallélépipèdes. La même méthodologie peut être appliquée que pour la pyramide.

On peut terminer par la réalisation de cubes, de parallélépipèdes, tétraèdres, ...

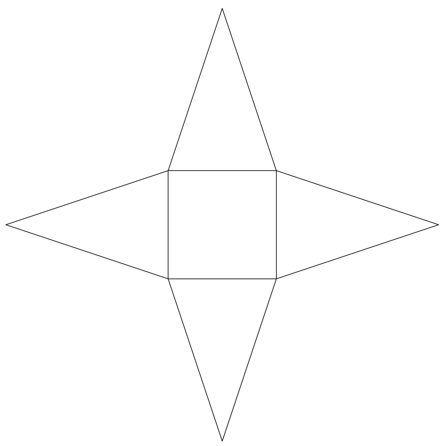


Fig. 23

Contexte de cette activité. – La réalisation de belles boîtes est un objectif suffisant en soi. Toutefois, elle a évidemment tout à fait sa place à l'intérieur d'un projet plus vaste, par exemple la construction d'une maquette d'un quartier ou de l'école, de boîtes pour contenir un cadeau...

[2] Si on souhaite construire la pyramide sans devoir mettre de papier collant à l'extérieur, il faut ajouter des languettes pour pouvoir coller les différentes faces les unes aux autres. Il vaut mieux alors ne pas utiliser de carton : l'expérience montre que la colle à papier ne prend pas suffisamment vite pour que les languettes adhèrent et maintiennent la forme de la boîte à construire.

Prolongement possible

L'enseignant peut poser le défi suivant aux élèves qui auraient terminé leur travail plus rapidement que les autres.

> On donne un carré et quatre triangles isocèles identiques, avec une base de même longueur que le côté du carré. Est-il toujours possible de construire avec ces cinq formes une pyramide à base carrée ?

Commentaires

Pourquoi laisser les enfants chercher eux-mêmes le développement ? Une autre possibilité serait de partir d'un solide, réalisé par exemple avec des polygones articulés, de l'ouvrir et de découvrir ainsi un ou des (éventuellement tous les) développements des solides choisis.

L'objectif principal du travail avec les développements n'est pas leur étude pour elle-même, mais l'exercice de l'imagination spatiale. Essayer de prévoir, à partir du solide, comment ajuster les faces, contribue à cette imagination.

Faire dessiner à main levée un projet de développement a pour but de permettre aux élèves de se concentrer sur cette imagination, sans avoir à se confronter, *en même temps*, aux difficultés techniques d'un dessin précis. On essaie ainsi d'éviter le conflit entre vision globale et exigence de précision.

L'utilisation des instruments pour dessiner le développement avant de construire un solide n'est pas gratuite. Pour que les différentes parties du solide s'ajustent bien, il faut être précis. Pour que le résultat soit esthétique, il est vraiment préférable d'utiliser du papier ou du carton sans quadrillage.

Si une certaine familiarisation avec les instruments a été mise en prérequis, c'est pour ne pas alourdir cette activité-ci. Si les élèves devaient se consacrer en même temps à cet apprentissage, il est à craindre qu'ils se découragent avant d'arriver à un résultat satisfaisant. Le dessin de figures géométriques est un contexte suffisamment riche en lui-même pour exercer la manipulation des instruments (voir par exemple C. Hameau [1996]).

5 Des pyramides aux cônes

De quoi s'agit-il

À partir de développements de pyramides droites, découvrir le développement d'un cône droit, et le construire. (La figure 24 en montre quelques exemples.)

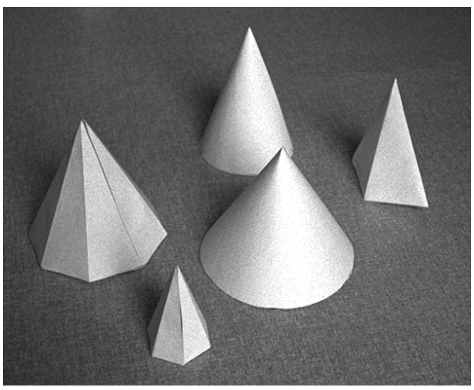


Fig. 24

Enjeux

Le développement du cône droit. La proportionnalité entre la circonférence et le rayon d'un cercle.

La construction de polygones régulier. L'utilisation du rapporteur et des instruments de dessin.

Compétences. – Voir compétences à la page **??**. En outre : *Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations. Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des pyramides droites et des cônes en bois. Des instruments de dessin. Un rapporteur. Les fiches 14 à 20 (pages 214–220).

Prérequis. – Avoir déjà réalisé le développement d'une pyramide droite à base carrée (voir l'activité **??** à la page ??). Manipuler le compas. Tracer des parallèles. Connaître la relation entre la circonférence et le rayon d'un cercle.

Comment s'y prendre ?

La question au centre de cette activité est :

Comment développer un cône ?

Compléter des développements. – L'enseignant donne aux élèves les parties « latérales » de développements de pyramides. Les élèves doivent en construire les bases, qui sont des polygones réguliers. L'important est ici de trouver les bases et non de réaliser des développements en un seul tenant. La construction peut donc se faire sur une autre feuille de papier. Cela permet de travailler sur des figures relativement grandes, ce qui est plus facile.

Les développements à compléter sont tous inscrits dans un arc de cercle dont l'angle au centre vaut 120° et le rayon 15 cm. Les raisons de ce choix – qui n'est pas gratuit – apparaîtront clairement à la fin de l'activité. Il est inutile d'attirer ici l'attention des élèves sur ce fait.

L'enseignant commence par donner les développements latéraux d'une pyramide à base triangulaire et d'une pyramide à base carrée (figure 25 à la page suivante).

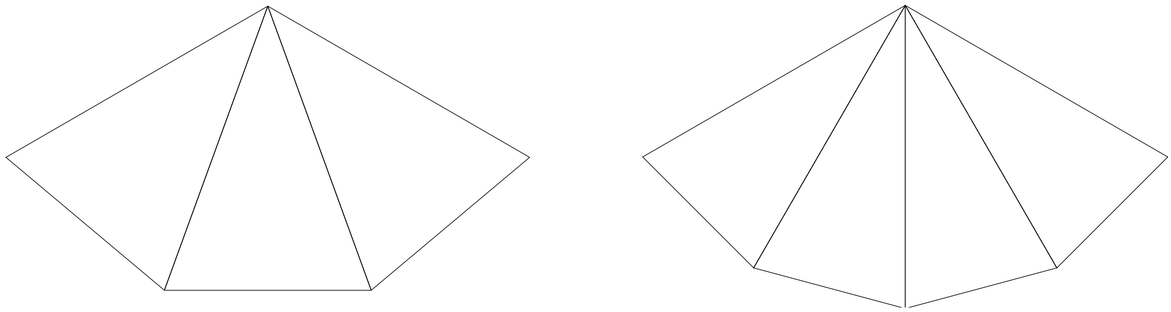


Fig. 25

La question revient à construire un triangle équilatéral et un carré dont on connaît le côté. Pour le triangle équilatéral, deux traits de compas suffisent. L'équerre et le compas permettent de construire le carré. Le compas est utilisé ici comme un instrument permettant de reporter des longueurs sans avoir à mesurer.

Les deux pyramides suivantes ont cinq et six faces latérales (figure 26).

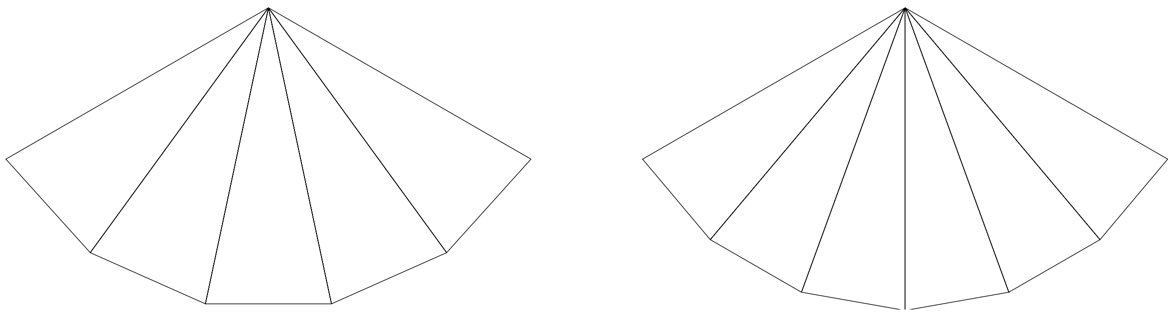


Fig. 26

La construction de la base hexagonale ne devrait pas poser de difficulté. Si les élèves ne la connaissent pas, c'est l'occasion de l'apprendre. Pour construire un pentagone régulier dont le côté est donné, l'enseignant peut proposer la méthode suivante.

Construire un polygone régulier de côté donné. – Commençons par un problème plus simple, en ne nous préoccupant pas de la longueur du côté :

Comment construire un pentagone régulier ?

Regardons un pentagone déjà construit dans un cercle (figure 27 à la page suivante). Les rayons qui rejoignent les sommets du pentagone ont été tracés. On observe que les angles entre ces rayons sont tous égaux. Puisqu'il y en a cinq, leur mesure vaut $\frac{360°}{5}$, c'est-à-dire 72°.

Pour construire un pentagone, on peut commencer par tracer les rayons qui partent du centre, en s'aidant d'un rapporteur (figure 28). Il suffit alors de tracer un cercle pour avoir les sommets d'un pentagone régulier (figure 29).

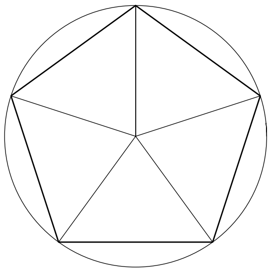


Fig. 27

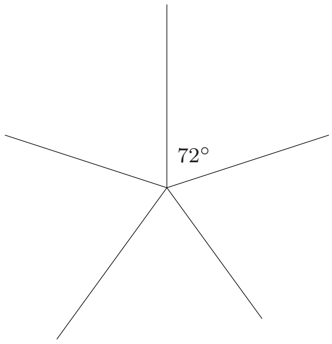


Fig. 28

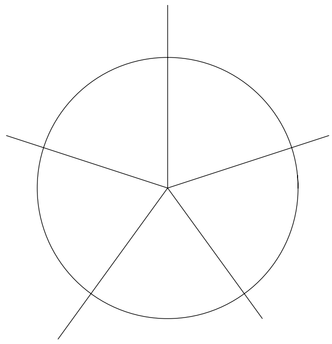


Fig. 29

Comment construire un pentagone régulier dont le côté est donné ?

On observe que plus le rayon du cercle que l'on trace est grand, plus grand est le côté du pentagone obtenu (figures 30, 31 et 32).

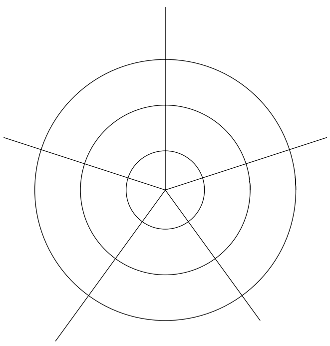


Fig. 30

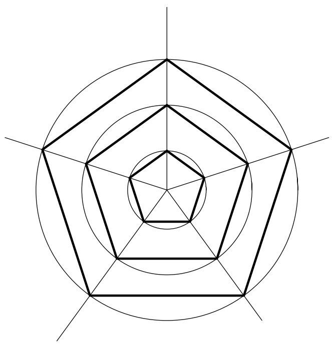


Fig. 31

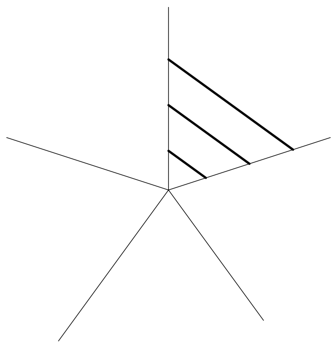


Fig. 32

Reprenons la figure 32, qui est extraite de la figure 31, et traçons, par le centre, la perpendiculaire aux trois côtés de pentagone qui y sont dessinés (figure 33 à la page suivante). Cette droite possède les propriétés suivantes :

– elle est perpendiculaire à tous les côtés de pentagone que l'on pourrait tracer (aux côtés qui se trouvent dans cet angle bien sûr) ;
– elle passe par les milieux de ces côtés ;
– elle coupe l'angle entre les deux rayons en deux angles égaux ;
– elle se trouve dans le prolongement d'un autre rayon.

Voici une petite manipulation qui se base sur ces propriétés et qui permet de mieux comprendre la construction qui va être proposée. Dessinons sur une feuille de papier le côté du pentagone à construire et traçons par son milieu une perpendiculaire (figure 34). Sur une feuille transparente, dessinons cinq rayons ayant entre eux un angle de 72° et prolongeons l'un d'eux de l'autre côté du centre (figure 35).

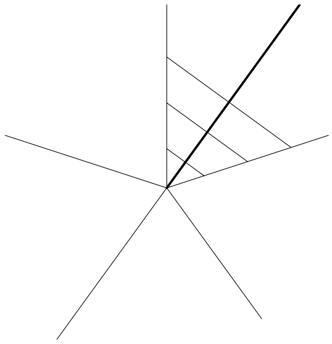


Fig. 33

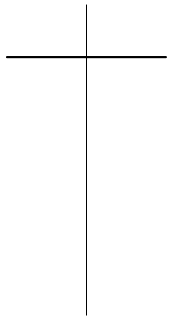


Fig. 34

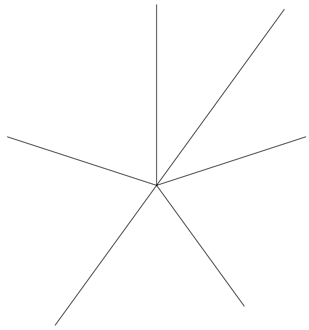


Fig. 35

Plaçons le transparent sur la feuille de papier en faisant coïncider le rayon prolongé avec la perpendiculaire au côté donné (figure 36). En déplaçant le transparent le long de la droite commune (figure 37), nous trouvons le bon endroit où le placer (figure 38).

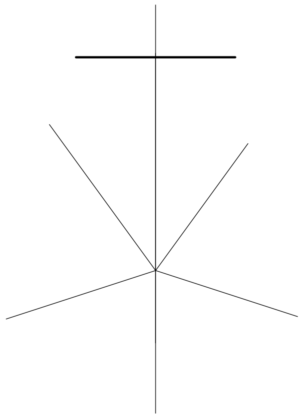


Fig. 36

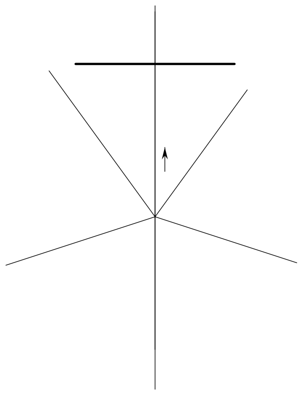


Fig. 37

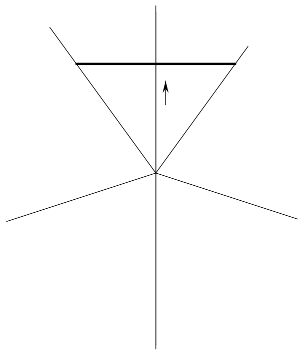
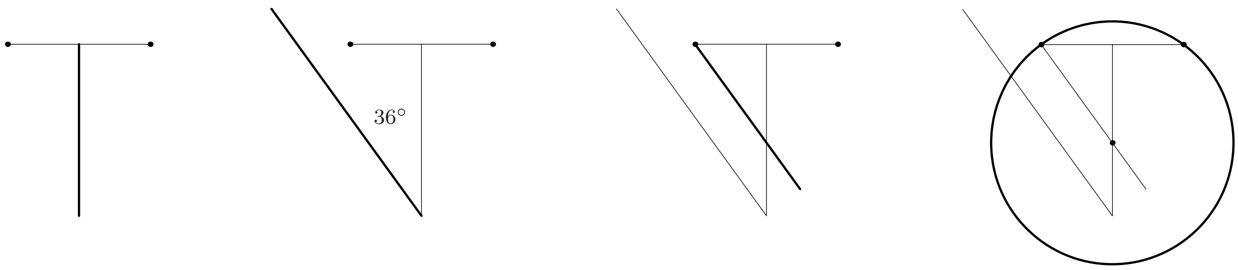


Fig. 38

On reproduit cela aux instruments, en ne traçant que les traits absolument nécessaires :



(a) *(b)* *(c)* *(d)*

(*a*) On trace la médiatrice du côté.

(*b*) Par un point de la médiatrice, on trace une droite qui forme la moitié de l'angle au centre du polygone régulier choisi (36° pour un pentagone).

(*c*) Par une des extrémités du côté on trace la parallèle à cette droite.

(*d*) Le point de rencontre entre cette parallèle et la médiatrice donne le centre du cercle dans lequel est inscrit le polygone.

Les élèves complètent encore le développement d'une pyramide dont la base possède plus de côtés (8, 10 ou 12 ; voir figures 39 à 41). L'enseignant répartit les trois développements entre les élèves.

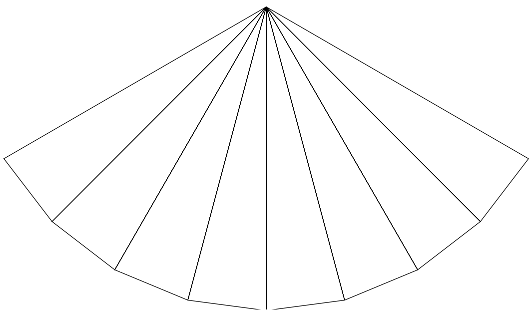


Fig. 39

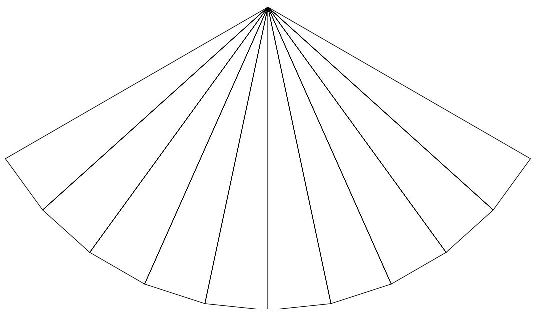


Fig. 40

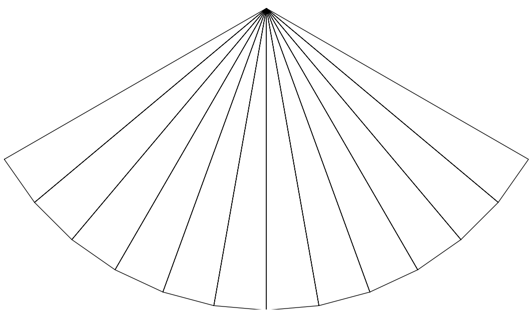


Fig. 41

Construction des pyramides. – Les élèves disposent maintenant des développements de pyramides dont la base possède 3, 4, 5, 6, 8, 10 et 12 côtés. Pour construire les pyramides, la classe se répartit le travail : chaque élève ne construit qu'une seule pyramide.

On expose les pyramides obtenues.

Construction d'un cône. – L'enseignant attire l'attention des élèves sur les caractéristiques communes de tous les développements réalisés :

- L'angle au sommet des parties latérales des développements de pyramide proposés est toujours le même : 120°.
- Les parties latérales de ces développements sont constituées de triangles isocèles. La longueur des deux côtés égaux est la même pour tous les développements : 15 cm.

L'observation des pyramides et de leur développement devrait permettre aux élèves de faire, avec l'aide de l'enseignant, les constatations suivantes :

- Plus la base d'une pyramide à de côtés, plus son développement latéral et sa base sont « arrondis ».
- Pour avoir un cône, il faudrait que la partie latérale du développement soit tout à fait arrondie, et que la base soit un disque.
- Si on augmente le nombre de côtés de la base de la pyramide, la partie latérale se rapproche d'une partie de disque dont l'angle au centre vaut 120° et dont le rayon vaut 15 cm. Le développement latéral du cône sera donc une portion de disque. Pour le vérifier, il suffit d'en construire un et de constater que cela fonctionne, en collant l'un contre l'autre les deux bords de cette portion.

Il reste à construire le disque qui servira de base à ce cône. On peut essayer d'en mesurer le rayon, mais ce n'est pas facile d'être précis. Voici une autre manière de le trouver. Nous venons de voir que la partie latérale est une portion de disque dont l'angle au centre vaut 120° et le rayon 15 cm. L'arc de cercle correspondant vaut donc le tiers de la circonférence du cercle de rayon 15 cm. Sa longueur vaut

$$\frac{2 \times 3,14 \times 15}{3} \text{ cm } = 31,4 \text{ cm.}$$

La base est un disque dont la circonférence doit avoir la même longueur que l'arc de cercle qui délimite la partie latérale du développement. Si r est le rayon de cette base, on doit donc avoir

$$2 \times 3,14 \times r \text{ cm } = 31,4 \text{ cm.}$$

Ce n'est possible que si le rayon r vaut 5 cm.

Les élèves terminent alors le cône en collant la base à la partie latérale. L'enseignant leur propose de construire d'autres cônes. On peut regrouper dans un tableau les informations utiles pour réaliser plusieurs développements de cônes.

Angle du développement latéral	Fraction du disque	Circonférence de la base	Rayon de la base
60°	$\frac{1}{6}$	$\frac{94{,}2 \text{ cm}}{6} = 15{,}7$ cm	$\frac{15 \text{ cm}}{6} = 2{,}5$ cm
90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{94{,}2 \text{ cm}}{4} = 23{,}55$ cm	$\frac{15 \text{ cm}}{4} = 3{,}75$ cm
120°	$\frac{1}{3}$	$\frac{94{,}2 \text{ cm}}{3} = 31{,}4$ cm	$\frac{15 \text{ cm}}{3} = 5$ cm
180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{94{,}2 \text{ cm}}{2} = 47{,}1$ cm	$\frac{15 \text{ cm}}{2} = 7{,}5$ cm
240°	$\frac{2}{3}$	$\frac{2 \times 94{,}2 \text{ cm}}{3} = 62{,}8$ cm	$\frac{2 \times 15 \text{ cm}}{3} = 10$ cm
270°	$\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 94{,}2 \text{ cm}}{4} = 70{,}65$ cm	$\frac{3 \times 15 \text{ cm}}{4} = 11{,}25$ cm

À la figure 42, les bases de trois cônes sont superposées au disque dont le développement latéral est une partie On voit ainsi que le rapport entre le secteur angulaire et 360° est égal au rapport entre le rayon de la base et 15 cm. Sur la figure 42 ces rapports valent $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

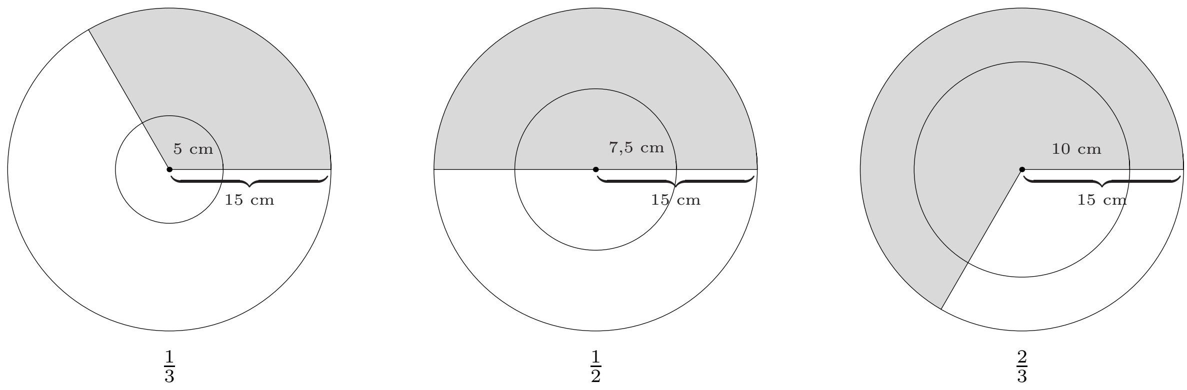


Fig. 42

Prolongement possible

Mettre en évidence le fait que le tableau reprenant les divers développements ci-dessus est un tableau de proportionnalité.

Commentaires

On pourrait penser que lorsque l'on cherche la base d'une pyramide dont le développement latéral est celui de la figure 43, il pourrait y avoir plusieurs bases possibles : un carré et des losanges (le seul polygone à être déterminé par la longueur de ses côtés est le triangle).

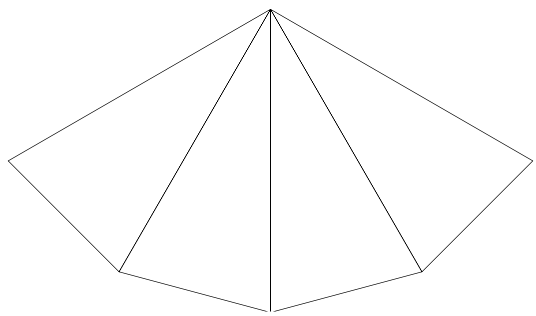


Fig. 43

On peut assez facilement se rendre compte que ce n'est pas le cas, par exemple en essayant de réaliser une telle pyramide dont la base serait un losange. On verra que la base n'est pas plane (un exemple est montré à la figure 24 à la page 136). On peut aussi tenir le raisonnement suivant. La base d'une telle pyramide est un polygone (plan) inscriptible à une sphère, puisque les sommets de la base sont tous à même distance du sommet de la pyramide. La base est donc inscriptible à un cercle, puisqu'un plan coupe une sphère suivant un cercle.

Il est peu probable que cette question soit soulevée dans les classes. On se contentera de construire des pyramides dont la base est un polygone régulier.

7

Représentations en perspective

1 Cache-cache avec les solides

De quoi s'agit-il ?

On propose une suite d'activités qui s'enchaînent. Dans la première, les élèves découvrent quelques solides au moyen du toucher uniquement ; dans la deuxième, on prend connaissance de solides construits en tiges grâce à leurs ombres. Au cours de la troisième et dernière activité, les élèves dessinent des solides en tiges.

Enjeux

L'objectif général est d'amener les élèves à se constituer des images mentales des solides. Pour ce faire, on a recours à des perceptions partielles (tactiles et visuelles) qui incitent à l'observation, la déduction et le recours à des connaissances antérieures.

Au cours des activités, les objectifs suivants sont également rencontrés :

– Renforcer par différentes perceptions les notions d'angle, de parallélisme, de formes de faces...
– Affiner le langage géométrique à propos des solides et des figures par la communication de leurs caractéristiques en vue de les reconnaître, de les comparer, de les différencier. Énoncer des critères pour classer les solides et essayer de les définir.
– Découvrir qu'une ombre peut représenter plusieurs solides et qu'il faut être prudent dans l'interprétation des ombres.
– Faire le lien entre l'ombre d'un solide en tiges, celle d'un solide plein de la même famille, et ses représentations planes selon différents points de vue.
– Découvrir les variations de forme des ombres et les moyens de les obtenir.

Compétences. *- Se situer et situer des objets. Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer. Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Construire un parallélipipède en perspective cavalière. Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.*

De quoi a-t-on besoin ?

Des solides en bois, par exemple : un cube, un parallélépipède rectangle et un parallélépipède non rectangle, des prismes à base triangulaire, carrée, trapézoïdale, hexagonale et octogonale, des pyramides à base triangulaire et carrée, des pyramides tronquées à base triangulaire et carrée, un cylindre, un cône et un cône tronqué, une sphère et une demi-sphère.

Des sacs (autant que de solides) pour cacher les solides et les palper à l'intérieur du sac.

Du matériel pour construire des solides en tiges. Ceux-ci doivent être assez grands pour pouvoir être manipulés derrière le drap, sans que l'ombre de la main empiète trop sur celle de l'objet.

Un rétroprojecteur ou une lampe assez puissante, et un drap qui servira d'écran par transparence.

Des dessins en perspective de solides pleins (fiches 21 à 23, pages 221–223) et de solides en tiges (fiche 24 à la page 224).

1.1 Découvrir un solide dans un sac

Comment s'y prendre ?

La classe est partagée en plusieurs groupes. Chaque groupe reçoit un sac dans lequel un des solides mentionnés ci-dessus est caché. Les élèves le palpent à deux mains à l'intérieur du sac, sans le regarder. Ils échangent leurs impressions avec les autres membres du groupe et cherchent à le caractériser assez précisément.

Ensuite, tour à tour, chaque groupe s'adresse au reste de la classe. Les enfants du groupe prennent successivement la parole pour décrire le solide sans le nommer. Les autres élèves de la classe doivent le reconnaître et le nommer. S'ils n'en connaissent pas le nom, ils essaient de l'associer à un solide connu apparenté ou à un objet courant. Par exemple, « on dirait une boîte avec un fond et un couvercle triangulaire, on dirait une pyramide sans pointe », etc. On sort alors le solide du sac et l'on vérifie les informations qui ont été données. L'enseignant résume les caractéristiques énoncées par les élèves.

Chaque fois qu'un groupe s'est exprimé et que l'on a sorti le solide du sac, un enfant vient le placer sur une table devant la classe. Il s'agit, au fur et à mesure, de les classer selon des critères choisis et expliqués par les élèves eux-mêmes. Ils vont exprimer des ressemblances et des différences entre des solides en vue de les classer. Ces comparaisons les amènent à employer un langage plus précis, applicable à tous les solides.

Enfin, lorsque tous les groupes ont placé leurs solides devant la classe, on recommence toute l'activité avec d'autres sacs distribués par l'enseignant. On peut ainsi faire le tour plusieurs fois, jusqu'à ce que le lot de solides soit épuisé.

Échos d'une classe

Les élèves se sont exprimés de façon très variée à propos des solides. Certains se sont attachés au comptage des faces et à leur forme, d'autres au comptage des arêtes, qui s'est avéré difficile lorsqu'on est privé de la vue. Certains ont relevé les caractéristiques morphologiques de l'objet en termes de faces plates ou arrondies, solides pointus, faces parallèles, etc. À propos du parallélisme, ils ont fait le geste des deux mains parallèles ou évoqué le plafond et le sol sans dire le mot « parallèle ». Les élèves qui ne connaissaient pas précisément les termes « face », « arête » et « sommet », ont parlé de « côté », « bord » et « coin ». Ils se sont pourtant fait comprendre par les autres. En règle générale, un vocabulaire imagé et pas spécifiquement géométrique a été largement employé. Chaque fois, l'enseignant a résumé les caractéristiques des solides avec un langage géométrique approprié et a incité les élèves à s'en servir, dans le but d'arriver à un langage commun à tous.

Les élèves n'ont pas pu nommer certains solides. Ils les ont associés à des objets courants qui semblaient correspondre à la description qui était faite de chacun d'eux. Ce fut le cas des prismes, inconnus dans la classe. Dans ce cas, lorsque le premier prisme à base triangulaire est apparu, l'enseignant a demandé d'énoncer les caractéristiques de ce solide. En résumé, les élèves ont répondu : « le solide a trois faces rectangulaires et deux triangulaires ; les triangles sont les mêmes (allusion à la forme), ils ont la même grandeur et ils sont parallèles ». L'enseignant a alors donné le nom du solide : « prisme à base triangulaire »[1]. Lorsque le prisme à base trapézoïdale est apparu, les élèves, après l'avoir décrit, ont fait le rapprochement avec l'autre prisme, et l'ont appelé « prisme trapèze ». Les caractéristiques qui permettent d'en faire un prisme ont une nouvelle fois été mises en évidence par l'enseignant. Les autres solides de cette famille ont pu être nommés plus facilement, y compris les parallélépipèdes rectangles et non rectangles apparentés aux prismes.

1.2 Les ombres de solides en tiges

Comment s'y prendre ?

L'idée générale est de soustraire l'objet réel du regard des élèves et de concentrer leur attention sur son ombre. Tout au long de l'activité, la question centrale est :

Quel pourrait-être le solide qui donne une telle ombre ? Cette ombre est-elle celle d'un seul solide ?

La construction de solides en tiges. – On commence donc par faire construire des solides en tiges aux élèves. Pour cela, la classe est partagée en groupes de quatre élèves. Chaque groupe va chercher quatre solides dans le lot complet de solides en bois. Ce sont ces solides que le groupe devra reproduire en tiges[2]. Les élèves se répartissent ensuite le travail et réalisent les constructions en tiges selon la technique choisie. Ils doivent veiller à ce

[1] L'enseignant a nommé un objet et a défini la famille à laquelle il appartenait, puis les élèves ont distingué les solides qui correspondaient à cette définition. Une autre possibilité consiste à accepter pendant un temps les dénominations familières des objets, à attendre d'en avoir assez pour pouvoir faire des comparaisons significatives, et seulement alors à cerner les familles, en les définissant et leur donnant un nom.

[2] On peut profiter de l'occasion pour relever des mesures sur les solides et travailler à l'échelle.

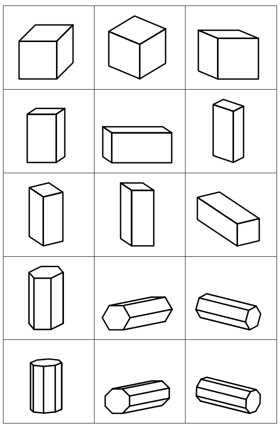
qu'elles soient assez solides pour être manipulées derrière le drap afin d'en projeter les ombres.

Les projections des solides en tiges. – Un drap est tendu devant les élèves. On prévoit assez de place derrière pour y mettre le rétro-projecteur et les solides en tiges. Cette disposition permet de réaliser une projection de type « ombre chinoise ».

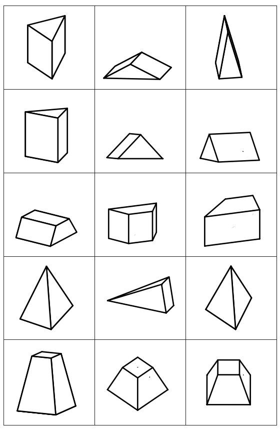
L'enseignant rassemble les solides en tiges et les cache derrière le drap pour que la classe ne voie pas celui que l'on mettra devant la lampe. Il envoie les élèves à tour de rôle derrière le drap. La consigne est de choisir un solide sans le nommer, de le placer entre la source lumineuse et le drap de manière à faire apparaître une ombre. L'élève qui manipule le solide change lentement la position de celui-ci pour faire apparaître diverses représentations. Il voit également l'ombre projetée sur le drap juste devant lui. Il peut donc voir le résultat de ses mouvements sur l'ombre, de la même manière que le reste de la classe de l'autre côté du drap. Le but est que la classe devine le solide qui pourrait donner cette ombre. Il n'y a pas de réponse unique et il faut le dire aux élèves. Une même ombre peut être celle d'objets différents. Néanmoins, comme le lot de solides est connu des élèves, ils savent d'emblée de quels solides on parle et ne cherchent pas à s'en éloigner. On veille à ce qu'ils formulent leur réponse en disant par exemple : « cette ombre *peut* être celle d'un cube ».

Voici deux variantes. Une manière d'identifier les ombres consiste à montrer, parmi le lot de solides en bois, celui qui s'apparente le plus à l'ombre. Une autre manière est d'indiquer, parmi un ensemble de dessins en perspective parallèle affichés au tableau, ceux qui ressemblent le plus à l'ombre. Ce sont des dessins de solides pleins et de solides en tiges (fiches 21 à 23).

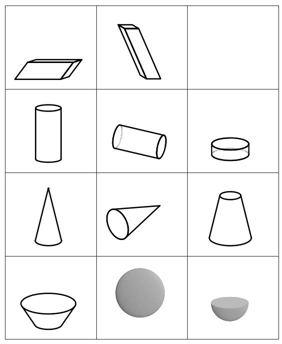
Fiche 21 (page 221)



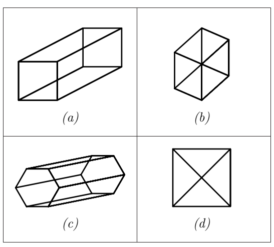
Fiche 22 (page 222)



Fiche 23 (page 223)



Fiche 24 (page 224)



Enfin, l'enseignant demande de faire apparaître une ombre qui ressemble à un dessin qu'il a désigné (fiche 24). Par exemple, il choisit le dessin *(b)* de la fiche 24 et donne la consigne suivante : « Voici le dessin d'un cube ; qui peut faire apparaître une ombre la plus ressemblante possible ? », ou encore « Voici le dessin d'un parallélépipède rectangle... » Pour le dessin *(d)*, la consigne peut être « Voici le dessin d'une pyramide à base carrée, essayez de faire apparaître une telle ombre » ou encore « Voici le dessin d'un tétraèdre régulier... »

C'est l'occasion d'expérimenter concrètement que plusieurs objets peuvent avoir la même ombre. Deux élèves vont derrière le drap, l'un avec un cube et l'autre avec un parallélépipède rectangle pour faire apparaître une ombre, ressemblant au dessin *(d)*. La classe peut guider oralement les manipulations.

Échos d'une classe

Pour la construction des solides en tiges, les élèves ont utilisé des pailles. Ils ont d'abord construit les faces une par une en emboîtant les pailles (une paille un peu comprimée glissée dans une autre). Puis, ils ont assemblé les faces à l'aide de papier collant pour obtenir le solide. Par ce procédé, ils ont obtenu des arêtes doubles, puisque deux pailles appartenant à des faces distinctes étaient chaque fois liées, mais cela n'a pas gêné la vue d'ensemble. Les solides étaient assez grands (environ 15 cm d'arête) et les élèves n'ont pas été embarrassés par l'ombre de leurs mains. Les solides en tiges n'étant pas parfaitement rigides, il a fallu veiller à maintenir les angles droits.

Les élèves ont souvent été capables de nommer le solide caché en voyant son ombre. Pour le reconnaître, ils ont été attentifs à la disposition des faces et à leur forme. C'est ainsi qu'il leur a été plus facile de nommer un solide lorsque son ombre montrait une face en vraie grandeur. Ils ont eu quelques surprises, par exemple lors de la projection d'un parallélépipède non rectangle, qu'ils ont pris pour un parallélépipède rectangle. Associer les ombres aux dessins en perspective de solides pleins n'a pas posé de difficulté majeure. Les élèves ont montré plusieurs dessins de solides dans des positions différentes pour une ombre donnée. Dans ce cas, ils ont apparenté l'ombre aux autres solides de la même famille, sans tenir compte des proportions variées.

Les dessins de solides en tiges à reproduire par une ombre ont été choisis pour leur caractère ambigu et la difficulté à les interpréter. L'enseignant avait précisé le solide représenté, mais les élèves devaient trouver une position dans laquelle l'ombre ressemblait au dessin. Il s'agissait alors d'avoir des gestes précis et de ne pas varier les positions trop brusquement. Ils y sont parvenus après quelques essais. En faisant apparaître eux-mêmes de tels dessins, les élèves en ont mieux saisi la nature et ils leur sont devenus plus familiers.

1.3 Dessiner les ombres.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant enlève du tableau tous les dessins en perspective. Il demande aux élèves de dessiner à vue certains solides, par exemple un parallélépipède rectangle, un tétraèdre et une pyramide à base carrée ou rectangulaire. Le résultat attendu est un dessin qui permet de reconnaître le solide ou de le représenter par une ombre. Dans ce dernier cas, l'élève doit pouvoir placer un solide en tiges devant la lampe de manière à faire apparaître une ombre qui corresponde à son dessin. Chacun peut à tout moment venir observer l'ombre du solide en tiges pour le comparer à ce qu'il dessine et guider ainsi la suite de son dessin. Si un élève dessine un solide plein, l'enseignant peut lui suggérer d'ajouter les arêtes cachées ou de faire un autre dessin où l'on voit le même solide en tiges.

Échos des classes

Les élèves qui éprouvaient des difficultés à dessiner un solide ont eu recours aux ombres. L'enseignant a alors tenu le solide en tige derrière le drap, dans la position où l'élève avait commencé à le dessiner. L'enseignant a demandé à l'élève de désigner sur l'ombre les arêtes déjà tracées et de repérer la position de celles qui manquaient. Ce va-et-vient entre l'ombre et le dessin, ainsi que l'association précise des deux, a aidé les élèves à produire des dessins cohérents, dont voici quelques exemples aux figures 1 et 2.

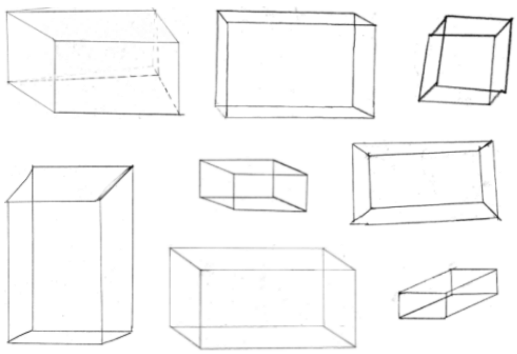


Fig. 1

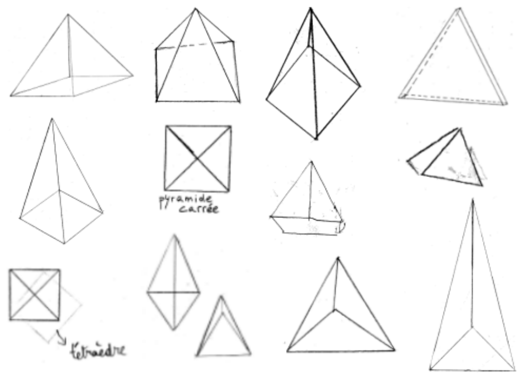


Fig. 2

Prolongements possibles

On enrichit les représentations mentales des solides en proposant d'autres types d'activités, par exemple :

Associer une perception tactile (en aveugle) à une représentation plane, comme le propose le jeu *Tactilo* de Nathan[3] (voir figure 3).

Fig. 3

[3] Seul distributeur de jeux éducatifs Nathan pour la Belgique : *La Découverte* au 49, Place communale - 1332 Genval - tél./fax (02) 652 07 62.

Trouver l'intrus parmi un ensemble de solides ou parmi des représentations planes. Expliquer son choix.

Donner du relief en assemblant des losanges de trois couleurs.

Construire des assemblages de cubes à partir de représentations en perspective[4], par exemple avec le jeu *Structuro* de Nathan.

Associer des dessins en perspective représentant un même objet de différents points de vue.

Associer des dessins de solides sans vraie grandeur (pas de face frontale) à des empreintes des faces.

2 Un cube dans diverses positions

De quoi s'agit-il ?

Dessiner, sur du papier quadrillé, des cubes dans diverses positions.

Enjeux

Cette activité vise à libérer l'imagination visuelle des élèves et à leur faire découvrir des représentations du cube dans diverses positions. Le papier quadrillé offre un support simple, qui permet de repérer des distances et des directions sans recourir à un instrument autre que la règle. Ainsi, la direction d'un segment est identifiée par un parcours le long des carreaux dans les directions horizontale et verticale. Un des effets indirects de l'activité est donc une expérience de la relation entre la direction d'une ligne droite et son coefficient angulaire.

Par ailleurs, cette première activité renseigne l'enseignant sur ce que savent les élèves en matière de représentation en perspective.

Matières. – *Tracé de représentations planes du cube.*

Compétences. – *Passer d'un objet de l'espace à une représentation plane et réciproquement.*

Indiquer la position de l'observateur.

Imaginer l'objet ou sa position d'après sa représentation.

De quoi a-t-on besoin ?

Un cube plein pour deux élèves, avec des arêtes d'environ 8 cm et les six faces de couleurs différentes.

Pour chaque élève : du papier quadrillé, un crayon, une gomme et une règle.

Pour l'ensemble de la classe : trois ou quatre transparents quadrillés ainsi que des marqueurs non permanents.

Pour la dernière partie de l'activité : des ordinateurs avec le logiciel `Cabri` et/ou le logiciel `Sections`. Les différents menus et fichiers `Cabri` sont disponibles sur le site internet du CREM : www.profor.be/crem.

[4] Voir les activités proposées dans la brochure *Construire et représenter de* 2 *ans et demi à 10 ans.*

Comment s'y prendre ?

Dessins d'un cube plein avec une face frontale. – Les élèves (deux élèves par table) placent un cube entre eux comme le montre la figure 4.

Fig. 4

Aucune règle de dessin n'est donnée au préalable. Il s'agit pour chaque élève de réaliser un dessin sur papier quadrillé, dans lequel on reconnaisse un cube dans la position qu'il occupe par rapport au dessinateur.

Après une dizaine de minutes, certains élèves sont invités à reproduire leur dessin sur un transparent. Le professeur veille à recueillir ainsi un échantillon varié de dessins. Ceux-ci sont présentés à la classe, qui les commente à partir de deux questions :

– le dessin donne-t-il bien l'idée d'un cube ?

– peut-on situer l'observateur ?

Le professeur est attentif au vocabulaire utilisé spontanément par les élèves pour commenter les dessins et les comparer à l'objet représenté, ceci afin de reconnaître leur niveau. À ce stade, le respect du parallélisme n'est pas imposé, seul le caractère évocateur de la représentation constitue un critère.

Dessins de cube dans des positions diverses. – Le professeur montre diverses positions d'un cube. Les élèves doivent dessiner un cube dans au moins deux positions différentes. À tour de rôle, un élève maintient le cube dans une position, l'autre le dessine (figure 5).

Fig. 5

À nouveau le professeur invite quelques élèves à reproduire un de leurs dessins sur un transparent quadrillé. Il veille à obtenir ainsi des positions variées. La mise en commun se fait à partir de ces dessins.

Au cours de cette deuxième mise en commun, en présence de productions diverses qui prêtent à comparaison, le terme de *perspective parallèle* est introduit et caractérisé simplement : les parallèles de l'objet y sont dessinées parallèles. Ceci est présenté comme une convention qui, tout en gardant une propriété de l'objet cube, en donne une idée assez évocatrice. On remarque que cette convention commode ne correspond pas à ce qu'on voit sur d'autres représentations, telles que les photographies ou certaines peintures, mais on convient de s'en tenir pour le moment à ce type de représentation.

Les mises en commun sont aussi l'occasion de faire le lien entre la direction ou l'inclinaison d'un segment $[AB]$ et les déplacements horizontal et vertical enchaînés, pour aller de A à B.

Animer un cube avec Cabri. – Ouvrir le menu `brochure0.men` et le fichier `enonce_0.fig`. L'élève se trouve devant l'écran suivant :

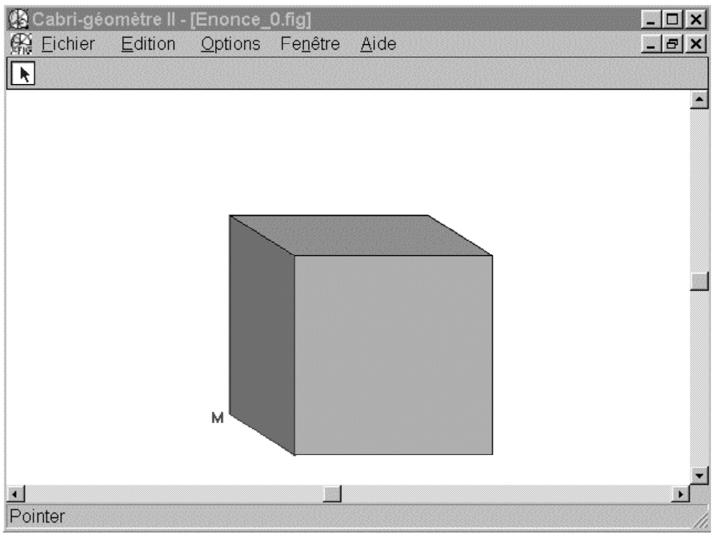


Fig. 6

En déplaçant le point M, sommet du cube, il peut représenter un cube vu par un observateur placé en dessous ou au dessus du cube, à droite ou à gauche du même cube. Les faces ayant des couleurs différentes, il lui est facile de les identifier et de les nommer. Il peut également tenir devant lui un des cubes mis à sa disposition, conformément à l'image qui apparaît à l'écran.

Animer un cube avec Sections. – `Sections` est un logiciel qui permet de visualiser des cubes (et d'autres polyèdres) selon divers points de vue. La figure 7 à la page suivante en montre un écran.

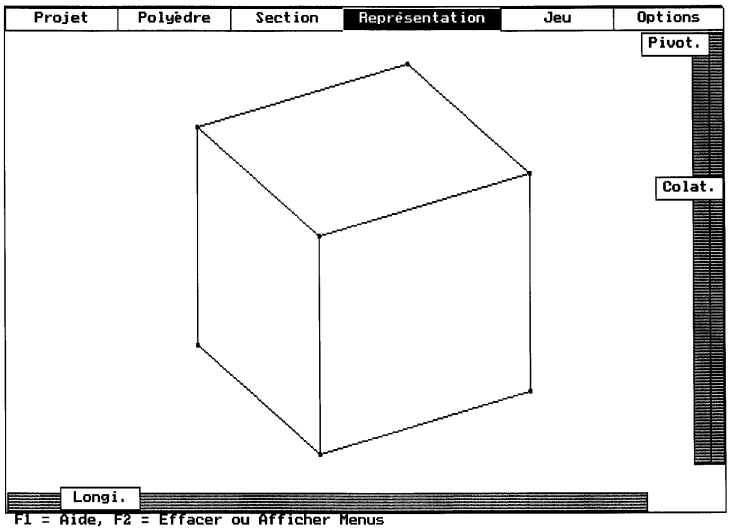


Fig. 7

L'intérêt principal de `Sections` réside dans la possibilité de faire varier de manière continue les positions d'un cube.

La figure 8 montre six instantanés d'un tel mouvement.

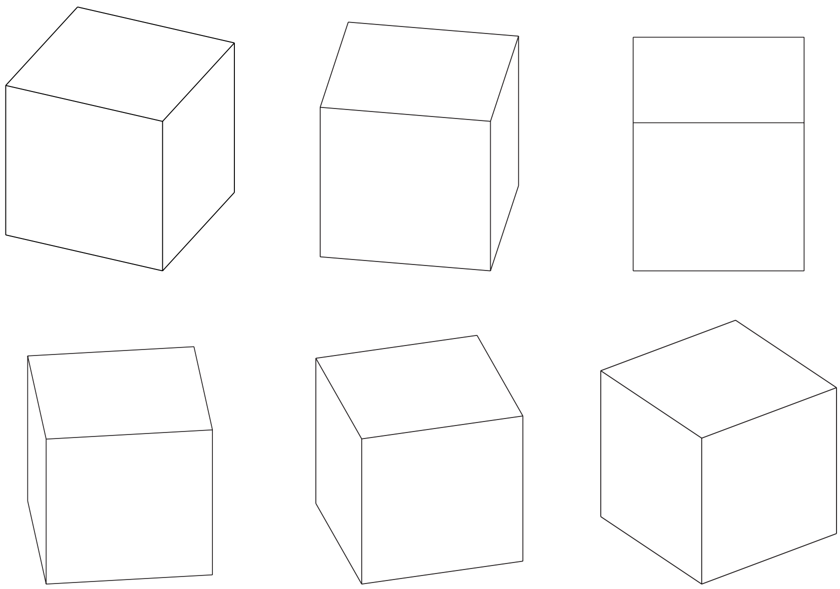


Fig. 8

Représenter un cube en assemblant des quadrilatères avec Cabri. – Ouvrir le menu `brochure1.men` et ensuite le fichier `enonce_1.fig`. L'élève se trouve devant l'écran suivant :

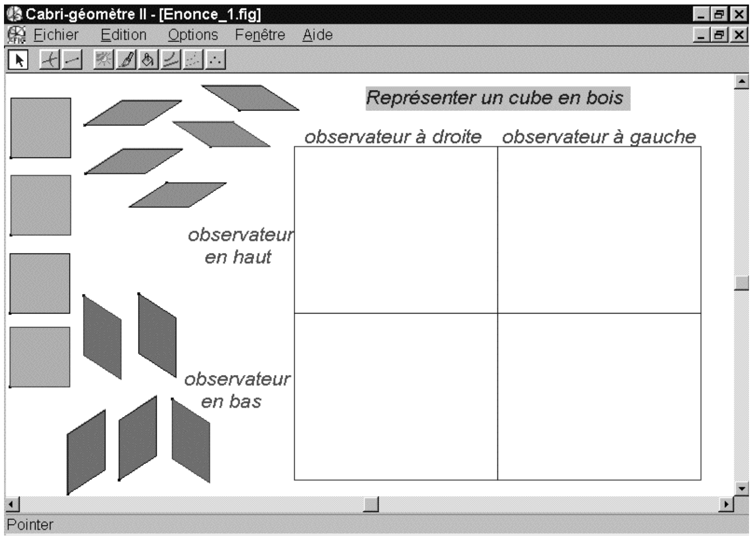


Fig. 9

Il peut déplacer les quadrilatères en tirant le sommet représenté par un gros point et les assembler pour former une représentation d'un cube plein de divers points de vue. On a mis des quadrilatères en excédent, de sorte que le choix soit réfléchi jusqu'au dernier assemblage.

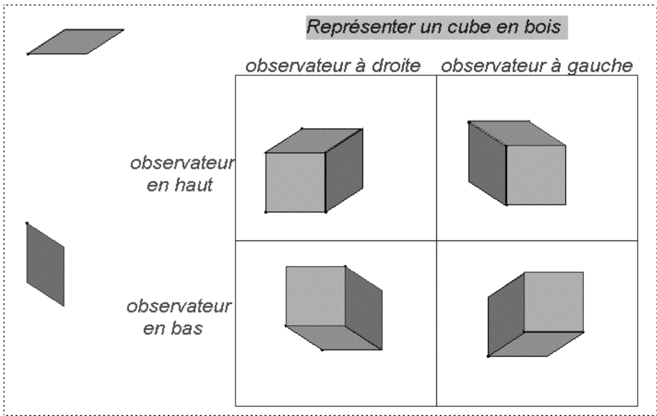
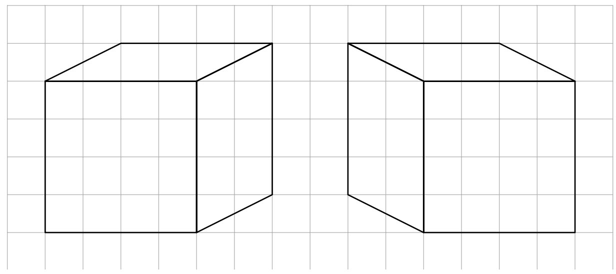
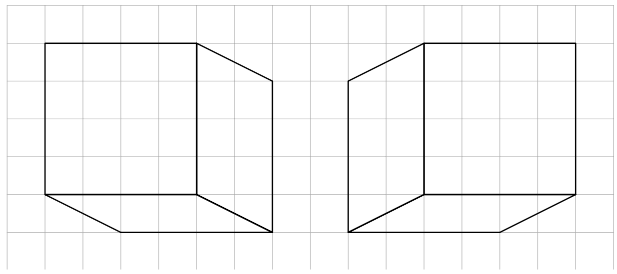
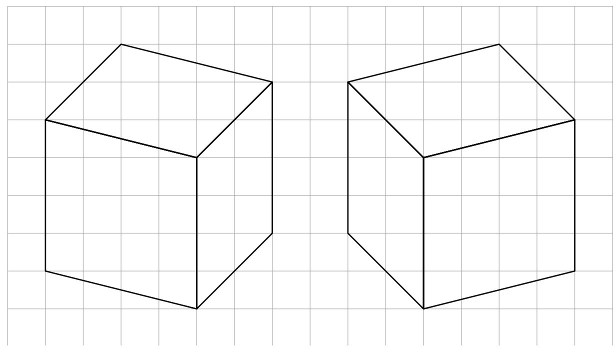
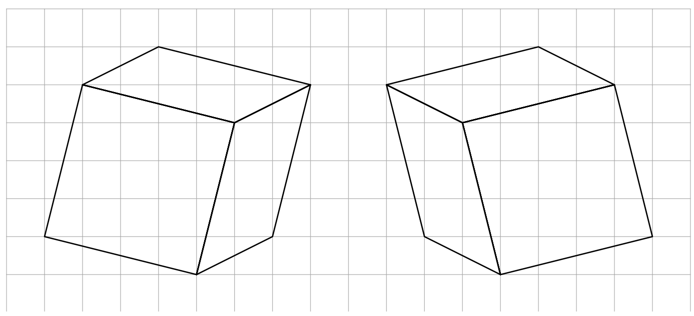


Fig. 10

Synthèse. – Au cours de cette activité, l'accent est mis sur une correspondance d'ordre perceptif entre l'objet cube et sa représentation. La synthèse porte donc sur diverses façons de représenter un même cube selon sa position par rapport à l'observateur.

Cette synthèse peut être préparée par un exercice qui consiste à compléter un tableau dans lequel l'élève doit tantôt indiquer la position de l'observateur pour un dessin donné, tantôt produire un dessin correspondant à une position donnée. Ce type d'activité, qui met en relation des figures et un texte, est particulièrement adapté à cette tranche d'âge et développe la capacité de rédaction. La plupart des synthèses de ce chapitre se présentent de cette façon.

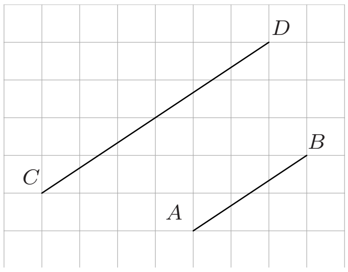
Dessiner un cube dans diverses positions

Position de l'observateur par rapport au cube	*Dessins du cube*
Le cube présente une face frontale. L'observateur voit la face du dessus.	
Le cube présente une face frontale. L'observateur voit la face du dessous.	
Le cube ne présente pas de face frontale. L'observateur voit la face du dessus .	
Le cube ne présente pas d'arête verticale. L'observateur voit la face du dessus.	

Prolongements possibles

1. Apprendre à coder un segment en utilisant un trajet horizontal suivi d'un trajet vertical pour aller de son origine à son extrémité. En ce faisant on peut apprendre deux choses :

– d'abord que deux segments sont codés par les mêmes nombres lorsqu'ils sont parallèles et de même longueur ;
– Ensuite que lorsqu'ils sont parallèles mais pas nécessairement de même longueur, leurs codages sont proportionnels (voir par exemple la figure 11).



segment	$[AB]$	$[CD]$
déplacement horizontal	3	6
déplacement vertical	2	4

Fig. 11

Les deux sens possibles pour un même segment peuvent en outre donner lieu à un codage utilisant les nombres positifs et négatifs. Le codage d'un segment orienté est ainsi comparable au codage d'un point ou d'une translation dans un repère orthonormé.

2. Dessiner un cube posé sur une table. Dessiner ce cube vu dans un miroir vertical.

Échos des classes

Cette activité ainsi que les activités 3 à 5 ont été testées dans deux classes :
– Dans une première secondaire d'une école à vocation technique et professionnelle.
– Dans une deuxième secondaire d'enseignement général.

Dans la classe de première, la représentation en perspective cavalière posait encore de gros problèmes à certains élèves. Plusieurs représentations apparentées aux développements sont apparues. Certains élèves ne savaient que faire des faces latérales. Ils les ont rabattues et raccordées tant bien que mal aux autres. La difficulté était encore plus grande lorsque la face du dessous était visible car ils n'étaient absolument pas familiarisés avec ce type de représentation. Le fait de colorier les faces du cube a permis à certains élèves de s'en sortir.

La moitié au moins des élèves ont utilisé la méthode stéréotypée décrite dans les commentaires. Pour eux, dessiner une représentation sans face frontale a été un obstacle insurmontable. Les représentations sans face frontale des autres élèves étaient toutes symétriques, même si le parallélisme était rarement respecté.

Ces difficultés ont constitué un sérieux handicap à l'élaboration de la synthèse concernant les différentes positions de l'observateur et les représentations correspondantes. Par ailleurs, toutes les activités de synthèse posent en général de gros problèmes dans ce type de classe. En effet, ces élèves – dont le capital vocabulaire est très restreint et dont le français est rarement la langue maternelle – expriment très difficilement ce qu'ils perçoivent ou ce qu'ils construisent. Cela demande beaucoup de temps et d'énergie au professeur. Ceci ne signifie pas, bien entendu, qu'il ne faut pas le faire. Il est utile de prévoir des étapes et des activités supplémentaires afin d'éliminer, pour la synthèse, toutes les difficultés qui ne relèvent pas explicitement de l'expression. Une activité complémentaire a donc été ajoutée dans cette classe, ce qui a permis de déboucher sur la synthèse de la page 155.

Lorsque l'activité met en lumière de telles difficultés chez les élèves, nous suggérons d'ailleurs de réaliser cette activité complémentaire avant la synthèse. Il s'agit pour les élèves de reconstituer la représentation d'un cube vu sous différents points de vue à partir de carrés et de parallélogrammes. Cette activité est à rapprocher de l'activité « Représenter un cube en assemblant des quadrilatères avec Cabri » (page 153), les élèves disposant dans ce cas-ci de quadrilatères découpés dans du carton (voir fiches 25 et 26 aux pages 225–226).

Dans la classe de deuxième, bien que cela n'ait pas été imposé au départ, la plupart des dessins ont respecté le parallélisme des arêtes. C'est sans doute la présence du cube qui a induit le respect de ses propriétés les plus évidentes. Certains élèves ont poussé la fidélité à l'objet jusqu'au respect de la longueur de toutes les arêtes, y compris les fuyantes. Deux élèves ont d'ailleurs eu du mal à accepter que les arêtes du dessin puissent n'avoir pas toutes la même longueur.

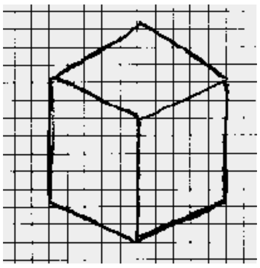


Fig. 12

Lors de la mise en commun les élèves ont qualifié les dessins qui ne respectaient pas intégralement le parallélisme « d'un peu de travers », *sans toutefois mentionner explicitement le défaut de parallélisme.* Par exemple, les élèves trouvaient le dessin de la figure 12 « trop pointu ». Ils l'ont corrigé à vue, sans faire référence explicitement ni au parallélisme, ni au quadrillage.

Par ailleurs ils n'ont pas évoqué spontanément la relation entre la direction, l'inclinaison d'un segment et le quadrillage (nombre de carrés à parcourir horizontalement et verticalement pour aller d'une extrémité à l'autre).

Par contre, une fois le codage introduit, ce sont des élèves eux-mêmes qui ont fait remarquer que, pour un même segment, il y a deux codages possibles qui correspondent aux deux sens obtenus en échangeant l'origine et l'extrémité du segment.

Les élèves n'ont pas éprouvé de difficulté à déterminer à peu près un point de vue à partir duquel le cube est vu. Dessiner un cube vu du dessous s'est avéré plus difficile et n'a été réussi que par quelques élèves.

Il est à remarquer que toutes les représentations de cubes sans face frontale sont symétriques (voir le cinquième dessin d'Elisabetta à la figure 13 à la page suivante).

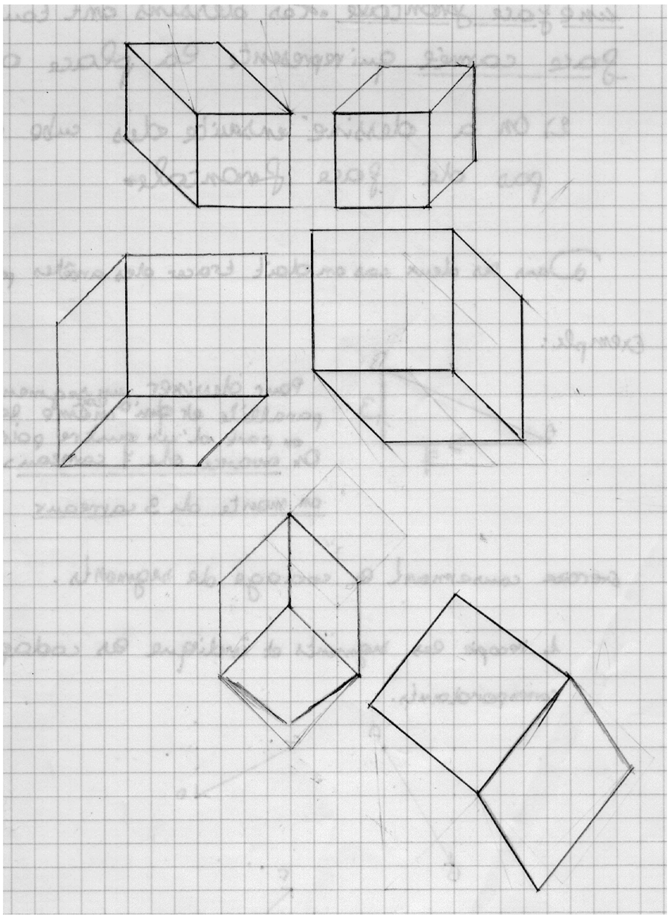


Fig. 13

Vers où cela va-t-il ? Le repérage des directions sur papier quadrillé prépare la notion de *coefficient angulaire* ou de *pente*.

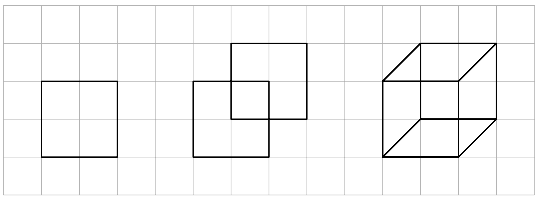
Commentaires

Il est important de ne pas se limiter à des techniques stéréotypées pour obtenir les dessins. La figure 14 donne l'exemple d'une telle construction stéréotypée :

(a) on trace un carré ;

(b) on trace un deuxième carré en le décalant d'une ligne vers la droite et d'une ligne vers le haut ;

(c) on joint les sommets correspondants des deux carrés.



(a) *(b)* *(c)*

Fig. 14

3 Dessiner un assemblage de cubes

De quoi s'agit-il ?

Un dessin de cube en position frontale étant donné, lui accoler d'autres cubes de façon à former un assemblage d'au moins cinq cubes.

Enjeux

L'objectif principal est de mettre en évidence quelques règles de la perspective parallèle. Alors que le papier quadrillé guide le tracé, le dessin sur du papier blanc demande d'être plus conscient des règles.

Expliciter ces règles consiste essentiellement à contraster les propriétés géométriques du cube avec celles de ses représentations. Il importe que ce travail de conceptualisation repose sur une pratique bien intégrée de va et vient entre objet réel et représentation.

Un autre enjeu de cette activité est l'utilisation des instruments. Comment dessiner des parallèles le plus efficacement possible (il y en aura beaucoup à dessiner), comment reporter rapidement et précisément des longueurs ?

Matières. *– La perspective cavalière*[5] *comme mode de représentation de solides qui conserve le parallélisme de droites.*

Compétences. *– Compléter une représentation.*

Repérer des éléments correspondants sur la représentation et sur l'objet.

Respecter les conventions de dessin.

De quoi a-t-on besoin ?

Chaque élève dispose d'une feuille de papier blanc (sans quadrillage ni lignes), au centre de laquelle est dessiné un cube plein en position frontale (fiche 27 à la page 227), d'un crayon, d'une gomme, d'une équerre, d'une règle et d'un compas. On doit aussi disposer dans la classe d'au moins six cubes que l'on peut assembler de diverses façons.

Comment s'y prendre ?

La consigne est de dessiner un second cube, accolé au cube déjà dessiné, puis un troisième accolé à l'un des deux premiers et ainsi de suite, de manière à former un réseau d'au moins cinq cubes qui ne soient pas tous alignés. Le professeur ébauche un tel réseau avec les cubes réels. Immédiatement après avoir donné la consigne, il introduit deux techniques de dessin et dégage les propriétés qui les justifient :

– reporter une distance au compas ;
– pour dessiner des parallèles, faire glisser une équerre le long d'une règle.

On peut arriver à un joli résultat par un jeu de couleurs sur les faces de l'assemblage (figure 15). Colorier d'une même couleur les faces parallèles accroît considérablement l'effet de relief et prépare l'introduction des conventions relatives au vu et au caché.

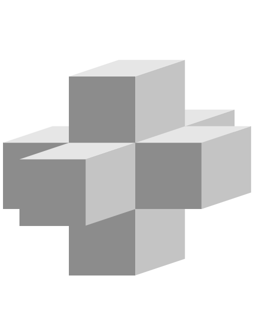
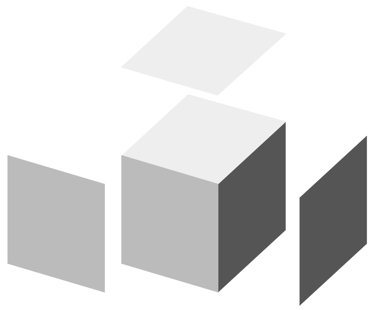
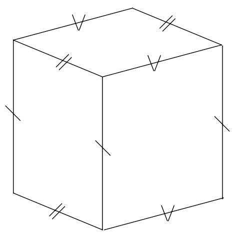
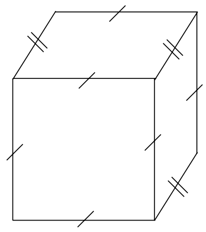


Fig. 15

[5] L'expression perspective cavalière recouvre, dans les textes de programmes et de compétences socles, ce que nous appelons ici perspective parallèle.

Synthèse. – La synthèse compare d'une part les faces et les arêtes du cube réel et de l'autre les dessins de ces faces et de ces arêtes. On peut guider cette comparaison en proposant un tableau à compléter. Le tableau ci-après en donne un modèle : il distingue les représentations qui ont une face frontale de celles qui n'en présentent pas. Il articule des figures de référence avec un texte qui les décrit.

Faces et arêtes du cube et de ses représentations

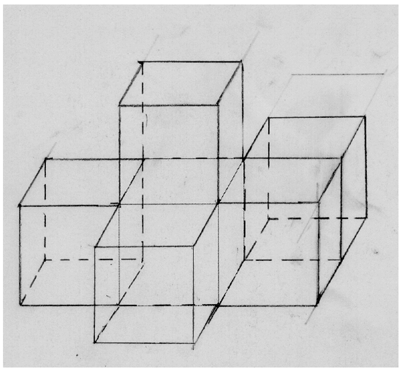
On observe sur le cube	*Propriétés du dessin (cube sans face frontale)*	*Propriétés supplémentaires s'il y a une face frontale*
Les faces du cube réel sont toutes des carrés.	Les dessins des faces sont des parallélogrammes. Certains parallélogrammes peuvent être des losanges. 	Le dessin de la face frontale est un carré. 
Toutes les arêtes ont même longueur.	Sur le dessin du cube, il y a trois groupes d'arêtes qui sont parallèles et ont même longueur. 	Sur les faces frontales toutes les arêtes ont même longueur. 
Tous les angles sont droits.	Sur le dessin du cube, il y a des angles aigus et des angles obtus.	Sur le dessin du cube, la face frontale possède des angles droits.

Échos des classes Les élèves de la classe de première année ont plutôt « imité » par prolongement un dessin préexistant que fait un va et vient continu entre la réalité et la représentation. Malgré les suggestions du professeur, certains n'ont pas construit concrètement au préalable l'assemblage qu'on leur demandait de représenter.

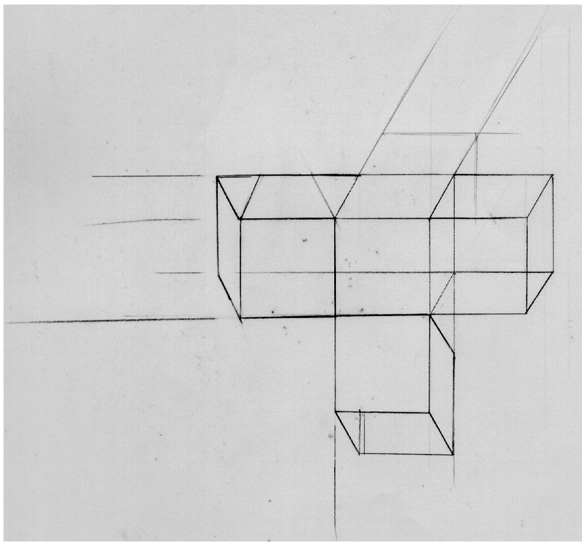
Bien qu'ils avaient acquis la technique de tracé des parallèles, ils ont évité de devoir en construire tant que le prolongement et le report de distance étaient possibles.

C'est la représentation du cube à placer devant eux qui leur a posé le plus de problèmes.

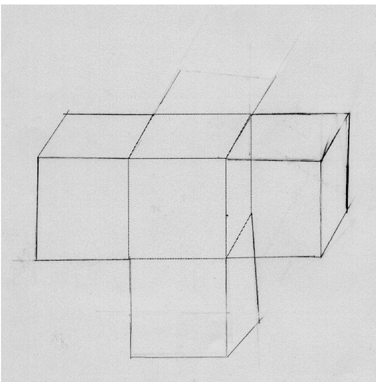
Les tracés des élèves de la classe de deuxième s'enchaînent de diverses façons. Ils ont prolongé des arêtes du cube donné, ils ont reporté des distances et construit des parallèles au gré des configurations qui se présentaient. Certains ont ajouté des arêtes cachées, ce qui parfois leur a évité d'avoir à dessiner des parallèles (voir le dessin de Micael).



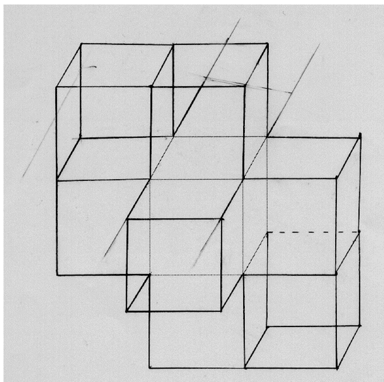
Micael



Jonathan



Sarah



Léa

La plupart des élèves ont utilisé correctement les instruments, mais pour certains la préoccupation des tracés détaillés a perturbé la perception globale de l'objet (voir le dessin de Jonathan et le comparer à celui de Sarah).

Dessiner un cube à l'arrière du cube donné n'a pas été spontané. Lorsqu'on a demandé à un élève de le faire, il a recouru à l'assemblage réel pour déterminer les arêtes à prolonger (Léa).

À un certain stade, des difficultés ont surgi du fait que les cubes ajoutés cachaient une partie ceux qui étaient déjà dessinés : il a fallu gommer ces parties, sinon le dessin devenait de plus en plus difficile à décoder. Le coloriage est alors venu à point pour restituer une lisibilité au dessin. Quelques élèves seulement ont eu recours aux pointillés pour distinguer les arêtes cachées. Il apparaît qu'il faut consacrer à cet apprentissage une activité spécifique. Ce sera l'objet de l'activité 5.

Prolongement possible

Dégager ou remettre en évidence les conditions déterminantes des parallélogrammes. Décrire une ou plusieurs façons de dessiner un carré, un parallélogramme.

Décrire le tracé de parallèles aux instruments et montrer les égalités d'angles que cette construction fait apparaître.

4 Ensemble architectural

De quoi s'agit-il ?

Au départ d'assemblages de cubes, dessiner un ensemble composé de maisons et de tours.

Enjeux

En dessinant de tels assemblages, les élèves réalisent que les dessins de cubes ouvrent à des réalisations complexes et variées, ils découvrent et pratiquent les propriétés de conservation des milieux, ils acquièrent rapidité et sûreté dans la manipulation des instruments de dessin, ils sont amenés à coordonner imagination et précision.

Matières. – *La perspective cavalière comme mode de représentation de solides qui conserve le rapport entre segments de droites parallèles.*

Compétences. – *Respecter des conventions de dessin.*

Repérer des éléments correspondants sur la représentation et sur l'objet.

Connaître et énoncer les propriétés des diagonales et des médianes d'un quadrilatère.

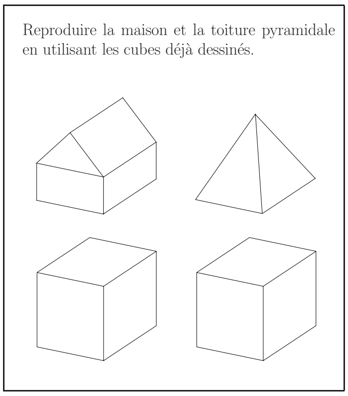
De quoi a-t-on besoin ?

Un grand cube sur lequel on peut dessiner. Pour chaque élève, le matériel de dessin décrit à l'activité précédente, ainsi que les fiches 28 et 29.

Comment s'y prendre ?

Dessiner une maison et une toiture pyramidale. – Chaque élève dispose de la fiche 28. Si nécessaire, l'enseignant montre sur le cube réel comment obtenir la maison.

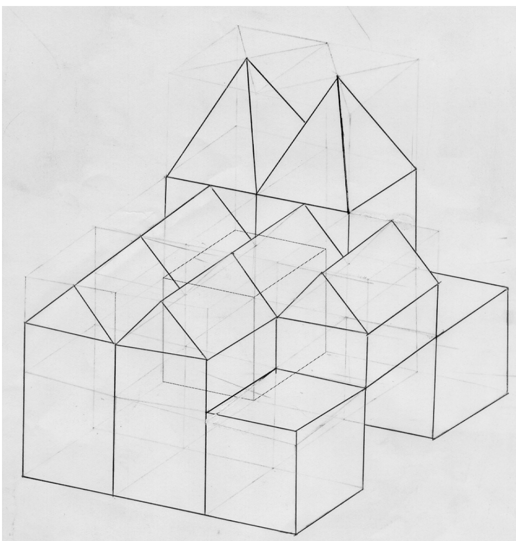
Fiche 28 (page 228)



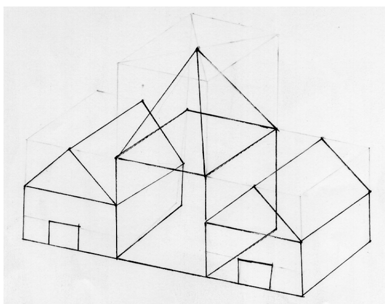
Dessiner un ensemble de maisons et de tours. – Comme pour l'activité précédente, les élèves disposent d'une feuille blanche au centre de laquelle un premier cube a été dessiné (fiche 29 à la page 229). Les traits sont très fins, de manière à ce que les arêtes vues puissent être repassées en trait épais et que les arêtes cachées ultérieurement par tracés de cubes ne soient pas trop visibles. La consigne est la suivante :

Réaliser un ensemble composé de maisons et de tours, en combinant le dessin d'un réseau de cubes, le repérage de milieux d'arêtes et de milieux de faces. L'ensemble doit comporter au moins cinq cubes chacun attaché à l'ensemble par une face au moins.

Voici deux exemples de dessins d'élèves.



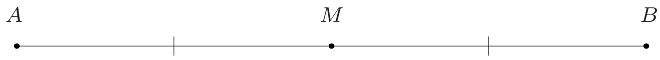
Jonathan



Lætitia

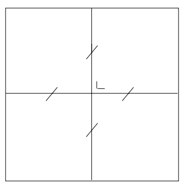
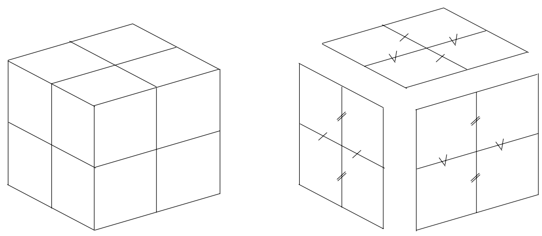
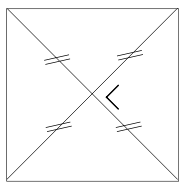
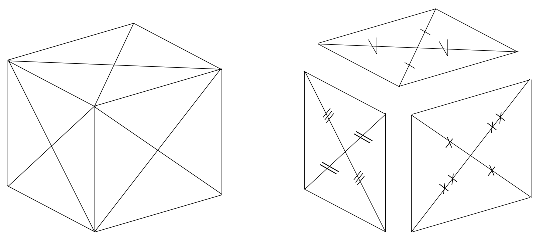
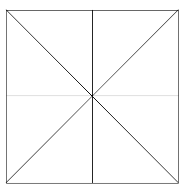
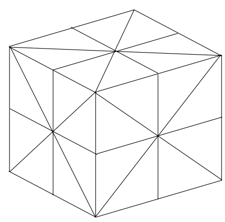
Synthèse. – La synthèse porte sur la conservation des milieux dans des représentations de cubes, ce qui revient à comparer les propriétés des médianes et des diagonales dans le carré et dans le parallélogramme. Comme pour les synthèses précédentes, la comparaison peut prendre la forme d'un tableau à compléter.

Il est utile de rappeler – ou d'introduire – la convention de codage des segments égaux :



Un même signe sur les segments $[MA]$ et $[MB]$ indique qu'ils ont même longueur ou, ce qui est équivalent, que M est le milieu de $[AB]$.

Médianes et diagonales des faces du cube et de ses représentations

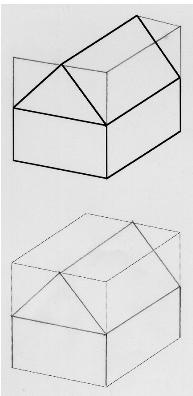
Dans un carré	*Dans un parallélogramme*
Les médianes du carré se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires. 	Les médianes du parallélogramme se coupent en leur milieu. 
Les diagonales du carré se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires . 	Les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. 
Les diagonales et les médianes du carré se coupent en un même point. 	Les diagonales et les médianes du parallélogramme se coupent en un même point. 

Échos des classes

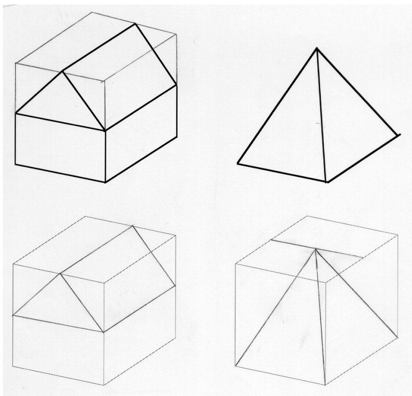
Dans la classe de première, après avoir intégré une maison et une tour dans un cube donné, avant de passer à la réalisation d'un ensemble architectural libre, le professeur a demandé aux élèves d'intégrer un petit ensemble architectural donné dans un réseau cubique donné (voir la fiche 30 à la page 230). Pour la classe, c'était une étape intermédiaire indispensable à la poursuite de l'activité. Lorsque les élèves intègrent leurs différentes parties architecturales dans le réseau cubique, ils sont confrontés au problème des arêtes cachées.

Peu d'élèves peuvent répondre directement à la question « cette arête est-elle visible ou non ? » La plupart n'arrivent à surmonter cette difficulté qu'en repassant, a posteriori, les contours visibles de leurs ensembles architecturaux. Seule la vue globale de l'ensemble leur permet de répondre à cette question.

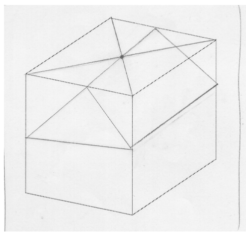
Dans la classe de deuxième, pour dessiner une maison à partir du cube (fiche 28), deux élèves ont commencé par compléter le premier dessin en inscrivant la maison dans un cube (Micael et Benoît). Une élève est partie de la détermination d'un seul point (le centre de la face supérieure) et a construit ensuite tous les autres segments sans rien mesurer (Sarah). Pour déterminer le sommet de la tour, certains ont utilisé les médianes (Benoît et Léa), mais la plupart ont d'emblée construit les diagonales.



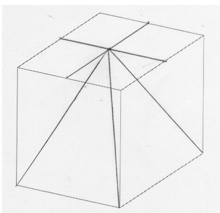
Micael



Benoit



Sarah

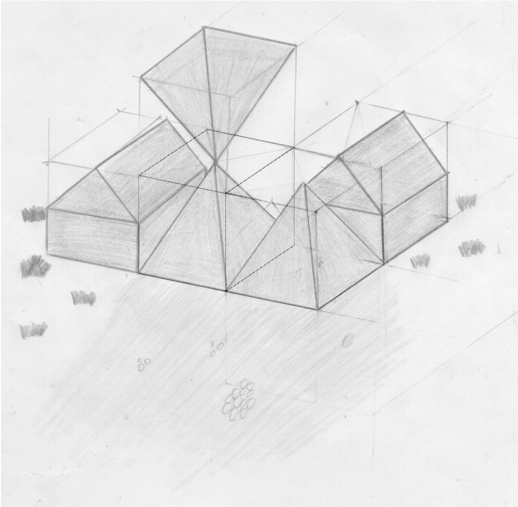


Lea

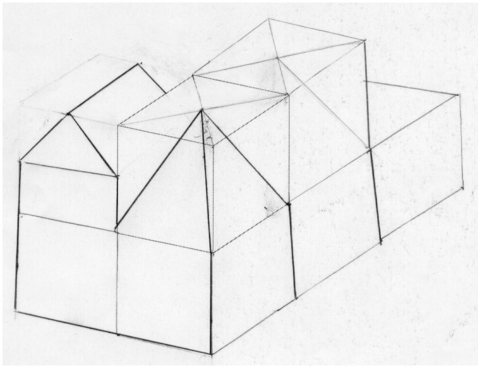
Lors de la mise en commun, le professeur a attiré l'attention sur le fait qu'un même point est à la fois intersection des diagonales et des médianes. Les élèves ont relevé aussi que la construction des diagonales dispense de mesurer et est, par là plus rapide que celle des médianes.

La réalisation d'un ensemble architectural a suscité un intérêt immédiat. Les dessins de Jonathan, d'Elisabetta et de Stéphanie sortent du commun par leur imagination et leur précision. Jonathan (dessin à la page 163) et Elisabetta (dessin à la page suivante) sont les seuls à avoir correctement traité le vu et le caché. Stéphanie (dessin à la page suivante) a poussé l'imagination jusqu'à inverser les points de vues pour les tours !

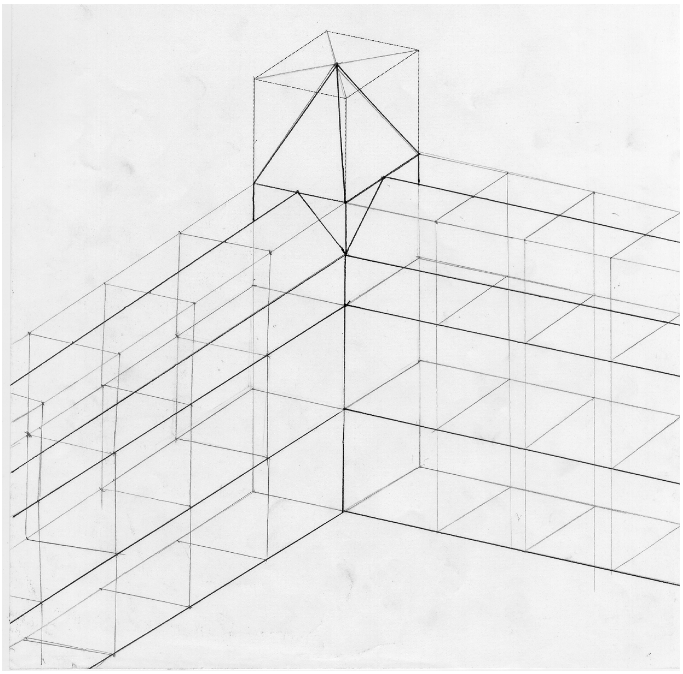
Dans tous les autres dessins, on perçoit un embarras autour des arêtes cachées par les éléments ajoutés (voir le dessin de Lætitia à la page 163 et celui de Yannick à la page suivante). Cette difficulté inspire l'activité suivante.



Stéphanie



Yannick

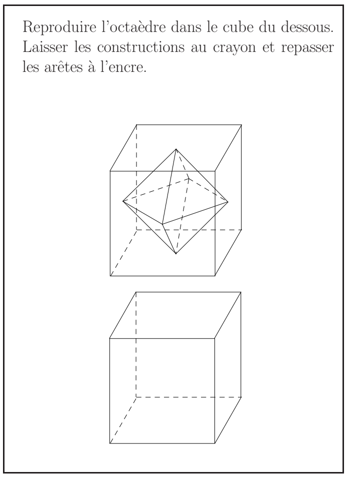


Elisabetta

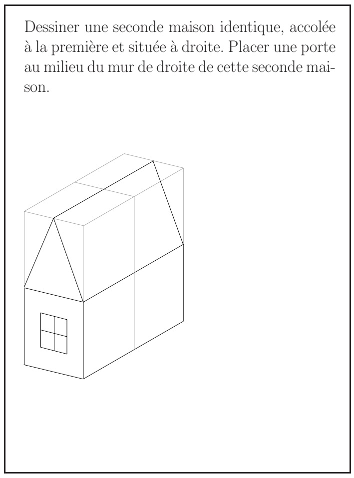
Prolongements possibles

Voici deux fiches permettant d'exercer les acquis de cette activité.

Fiche 31 (page 231)



Fiche 32 (page 232)



5 Vu et caché

De quoi s'agit-il ?

Compléter ou modifier des représentations planes afin de mettre en évidence leurs parties vues et cachées.

Enjeux

Au cours de l'activité, des méthodes pour déterminer le vu et le caché se dégagent, la correspondance entre perception et dessin s'affine, le tracé de parallèles aux instruments est intégré comme une routine : tout est en place pour que l'élève produise un dessin à la fois précis et lisible.

Matières. – *Tracé de représentations planes.*

Compétences. – *Respecter des conventions de dessin.*

Repérer des éléments correspondants sur la représentation et sur l'objet.

Indiquer la position de l'observateur.

Imaginer l'objet ou sa position d'après sa représentation.

De quoi a-t-on besoin ?

Instruments de dessin, crayons de couleur, fiches de 33 à 40 (pages 233 à 240).

Pour la dernière partie de l'activité : des ordinateurs avec le logiciel `Cabri`.

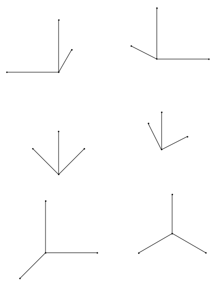
Comment s'y prendre ?

Compléter des dessins de cubes. – Chaque élève reçoit des fiches de travail sur lesquelles des représentations déjà amorcées doivent être complétées. Le professeur impose dorénavant l'usage systématique de la règle et de l'équerre pour tous les tracés de parallèles.

Il y a deux types de fiches : les premières concernent un cube isolé dans différentes positions ; les deuxièmes concernent des assemblages de cubes et des ensembles architecturaux.

Fiche 33 (page 233)

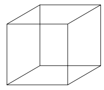
1. On a dessiné trois arêtes vues d'un cube dans diverses positions. Compléter les dessins en traçant toutes les arêtes vues.



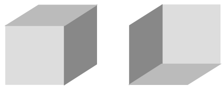
2. Colorier les trois faces vues avec des couleurs différentes.
3. Tracer ensuite en pointillés les arêtes cachées

Fiche 34 (page 234)

Le dessin (a) montre toutes les arêtes d'un cube. À partir de ce dessin, on peut imaginer soit que le cube est vu du dessus (dessin (b)), soit qu'il est vu du dessous (dessin (c)).
Sur les dessins (b) et (c), tracer en pointillés les arêtes cachées.



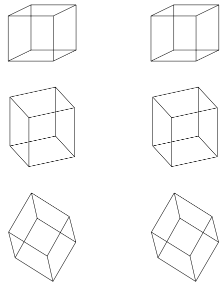
(a)



(b) (c)

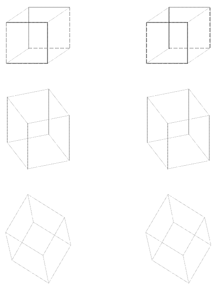
Fiche 35 (page 235)

Les dessins de cubes ci-dessous vont deux par deux. Colorier trois faces de façon à ce qu'ils soient vus de manières différentes.



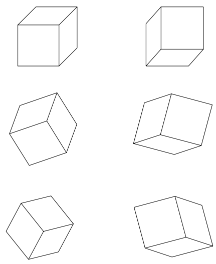
Fiche 36 (page 236)

Les dessins de cubes ci-dessous vont deux par deux. Repasser en trait continu (épais) les arêtes vues et en trait pointillé (épais) les arêtes cachées de façon à ce qu'ils soient vus de manières différentes.



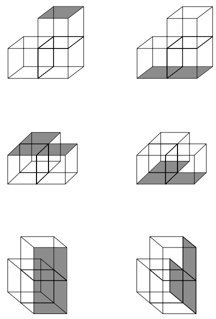
Fiche 37 (page 237)

Tracer en pointillés les arêtes cachées.



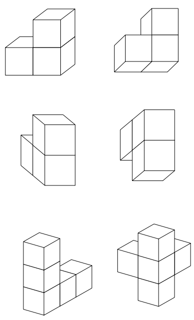
Fiche 38 (page 238)

Poursuivre la mise en couleur des parties vues. Utiliser une même couleur pour les faces (ou parties de faces) parallèles.



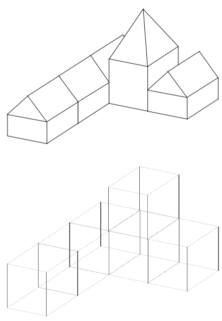
Fiche 39 (page 239)

Tracer en pointillés toutes les arêtes cachées.



Fiche 40 (page 240)

Dessiner l'ensemble architectural dans le réseau de cubes. Repasser en continu toutes les arêtes vues et en pointillés toutes les arêtes cachées.



La fiche 33 induit le passage du dessin d'un cube plein à celui d'un cube donné par toutes ses arêtes. Elle introduit explicitement la convention du *vu* et du *caché*. La mise en couleur des faces vues est un moyen très simple de faire comprendre ce qui distingue les arêtes : les arêtes cachées sont derrière des faces vues. Ceci est clairement explicité dans la fiche 34. Les fiches 35 à 38 exercent la perception du *vu* et du *caché* en alternant les consignes de coloriage de faces et celles de tracé d'arêtes.

La fiche 39 est plus difficile, surtout pour les assemblages vus du dessous. On peut suggérer de tourner la feuille de 180°, ce qui change le dessin en vue du dessus.

Double vue d'un cube avec Cabri. – Ouvrir le menu `brochure1.men` et ensuite ouvrir le fichier `enonce_2.fig`. L'élève se trouve devant l'écran suivant :

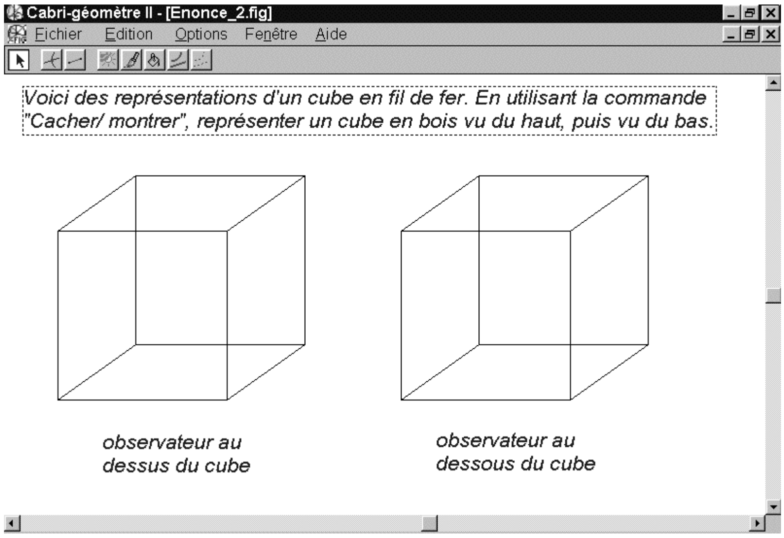


Fig. 16

En utilisant la seule commande `Cacher-Montrer`, il peut réaliser la solution suivante :

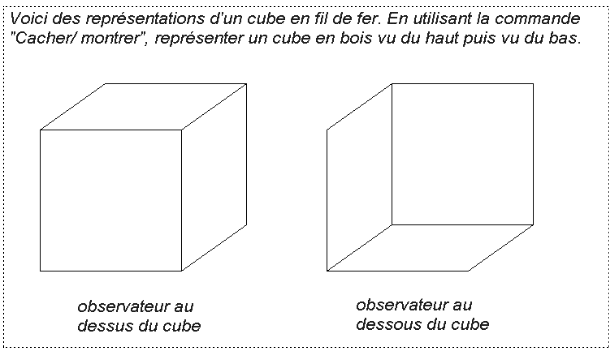


Fig. 17

Lorsque l'on active la commande `Cacher-Montrer`, tous les segments déterminés apparaissent. Les segments visibles sont dessinés en trait continu et les segments cachés en pointillé. On peut évidemment toujours voir les figures autrement. Le point de vue adopté est celui-ci : le cube est placé devant l'observateur, la face de devant dans un plan frontal.

Vu et caché dans des assemblages de cubes avec Cabri. – Ouvrir le menu `brochure1.men` et ensuite ouvrir le fichier `enonce_3.fig`. L'élève se trouve devant l'écran suivant :

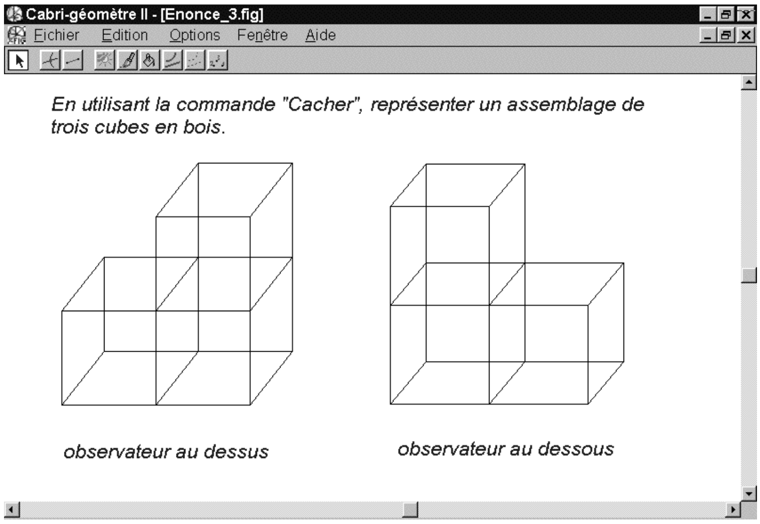


Fig. 18

En n'utilisant que la commande `Cacher-Montrer`, il ne peut arriver qu'à deux solutions (figures 19 et 20). Ceci laisse un sentiment d'insatisfaction : un des segments ne peut être dessiné avec la longueur appropriée. En effet, cette commande permet de cacher ou de montrer des segments déterminés par deux points et non des morceaux de segments.

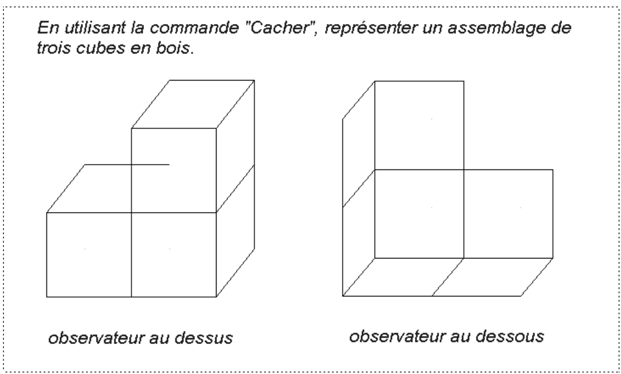


Fig. 19

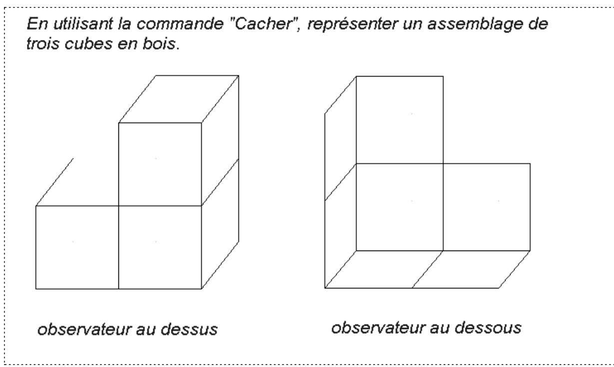


Fig. 20

Pour arriver à une solution satisfaisante (figure 21 à la page suivante), il faut définir un nouveau segment :

– la commande `point sur deux objets` permet de déterminer un nouveau point à l'intersection de deux segments ;
– la commande `segment` permet de déterminer un nouveau segment par deux points.

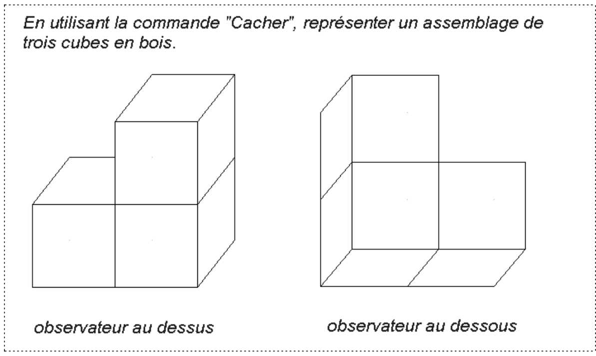


Fig. 21

Ouvrir le menu `brochure1.men` et ensuite ouvrir le fichier `enonce_31.fig`. L'élève se trouve devant l'écran suivant :

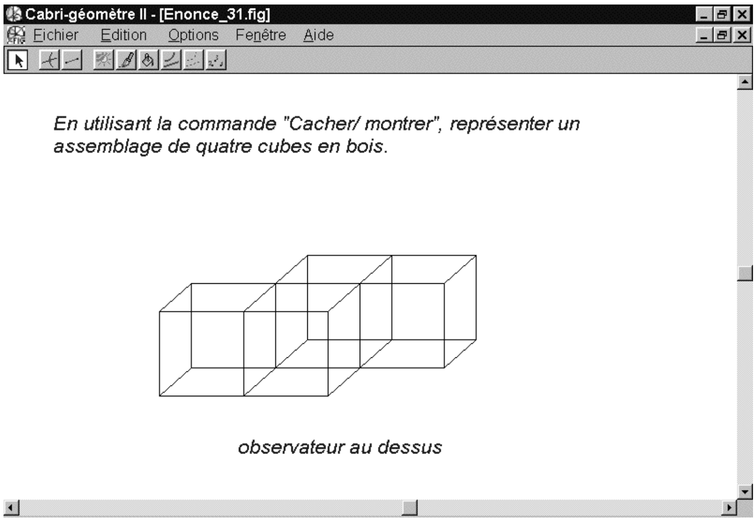


Fig. 22

Cet exercice ne présente pas de difficulté nouvelle.

Voici encore deux exercices du même type : ouvrir `enonce_32.fig` et `enonce_4.fig`.

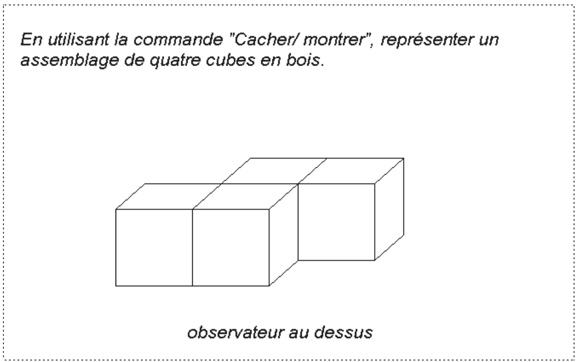


Fig. 23

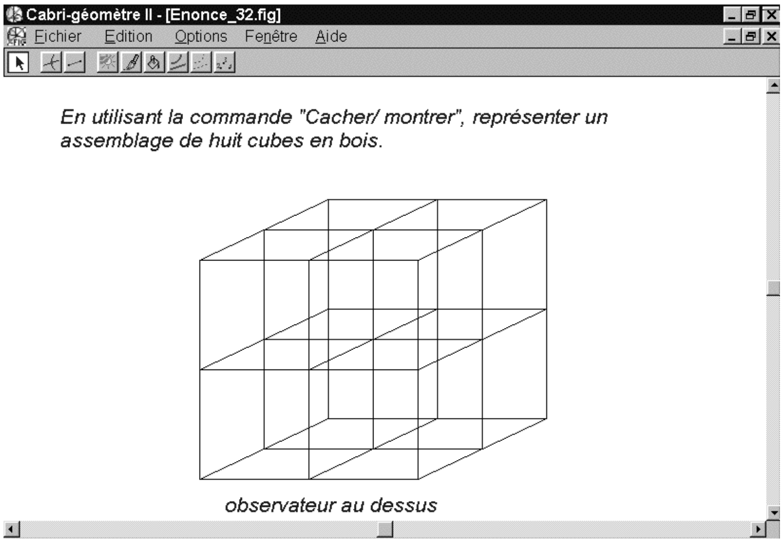


Fig. 24

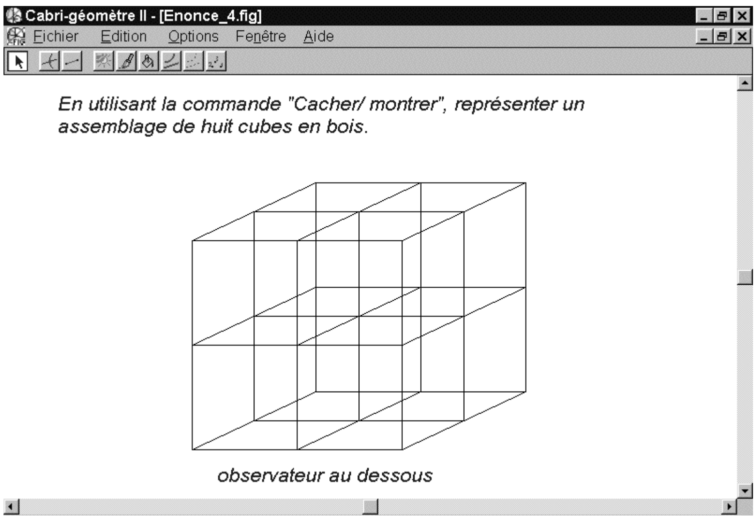


Fig. 25

Voici les solutions :

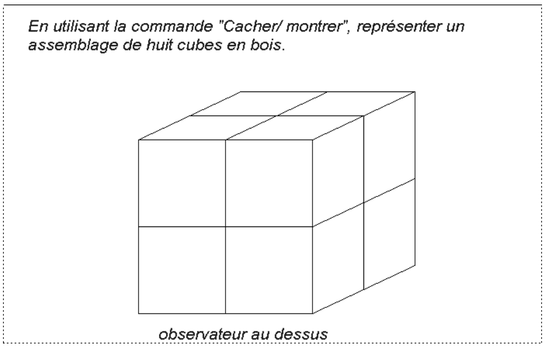


Fig. 26

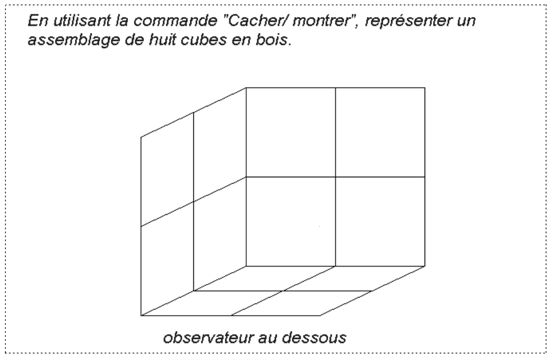


Fig. 27

La deuxième question (figure 25 à la page précédente) est techniquement de la même difficulté. La vue du dessous est toutefois plus difficile à percevoir.

Supprimer des cubes avec Cabri. – Ouvrir le menu `brochure1.men` et ensuite ouvrir le fichier `enonce_5.fig`. L'élève se trouve ensuite devant l'écran suivant :

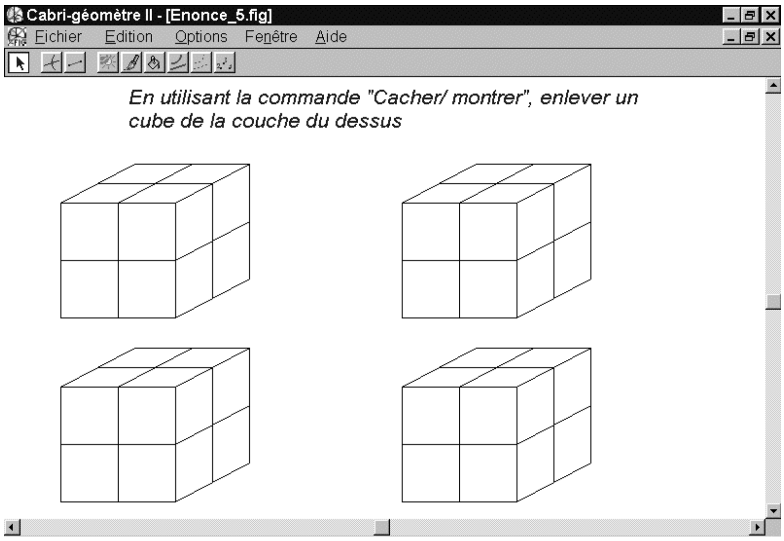


Fig. 28

Ces exercices présentent des difficultés très différentes selon la position du cube que l'on veut enlever.

La figure 29 à la page suivante montre une solution qui n'utilise que la commande `cacher`.

La figure 30 montre une solution qui utilise `cacher` et `montrer`.

La figure 31 à la page suivante montre deux solutions qui demandent en plus de créer de nouveaux segments.

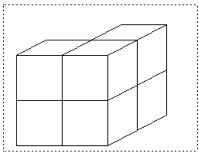


Fig. 29

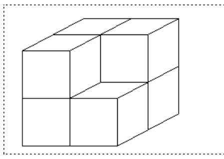


Fig. 30

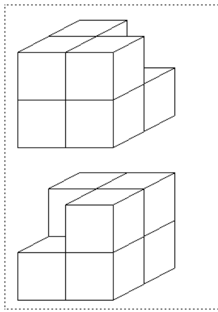


Fig. 31

Pointillés avec Cabri. – Ouvrir le menu `brochure1.men` et ensuite ouvrir le fichier `enonce_6.fig`. L'élève se trouve ensuite devant l'écran suivant :

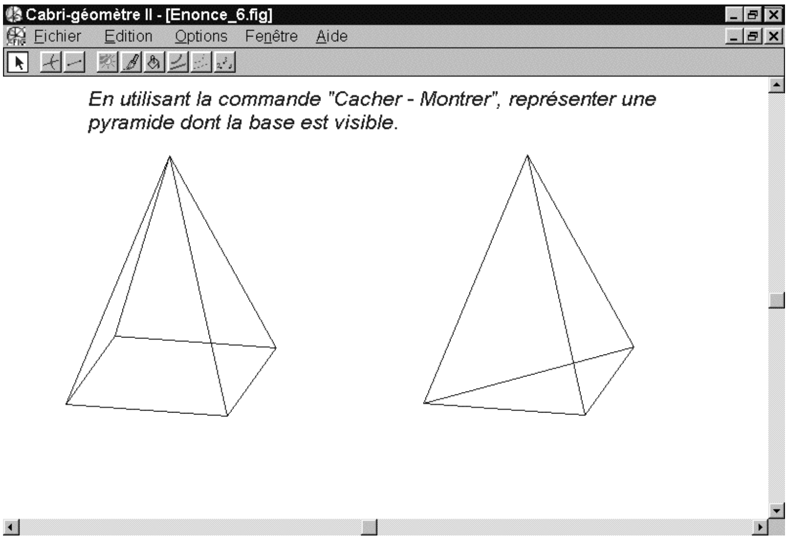


Fig. 32

La représentation des deux pyramides, bases visibles, ne pose pas de problème (figure 33).

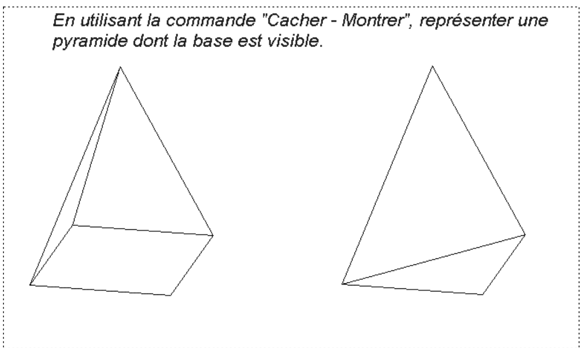


Fig. 33

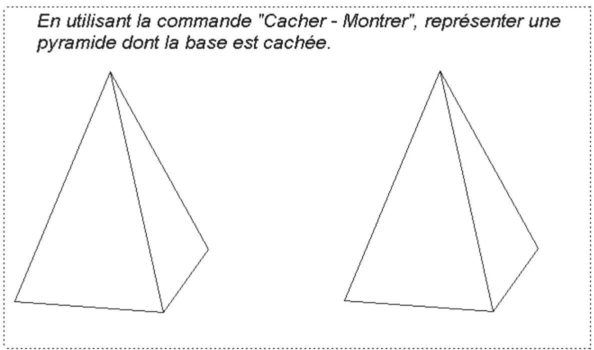


Fig. 34

Par contre, la représentation des mêmes pyramides dont les bases sont cachées (charger le fichier `enonce_60.fig`), provoque une situation ambiguë (figure 34).

Pour représenter les arêtes cachées, c'est le moment d'utiliser la convention du pointillé qui a été rencontrée lors de l'utilisation de la commande `Cacher-Montrer`. Il faut pour cela charger le fichier `enonce_61.fig`.

L'élève se trouve devant l'écran suivant :

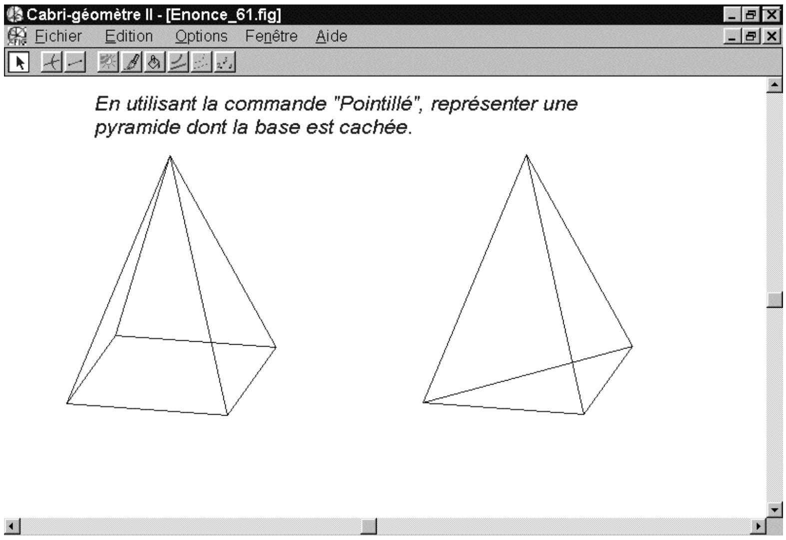


Fig. 35

La comparaison des solutions des deux derniers exercices (figures 34 et 36) permet de bien se rendre compte des informations apportées par les pointillés.

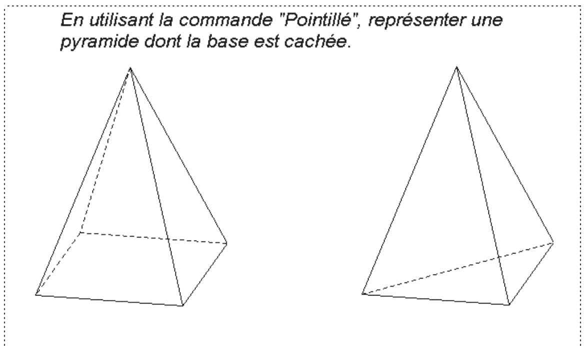


Fig. 36

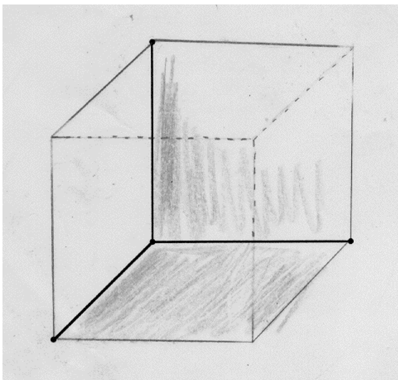
Synthèse. – Cette activité ne requiert pas de synthèse : elle vise essentiellement un savoir-faire qui repose sur la perception.

Échos des classes

Dans la classe de première année, cette activité s'est révélée pratiquement impossible à réaliser. La fiche 33 a posé d'énormes difficultés aux élèves.

En effet, tous ceux qui s'étaient contentés de prolonger les arêtes et de reporter les distances dans l'activité « dessiner un assemblage de cubes » ont été incapables de gérer les trois séries de parallèles à tracer dans chaque représentation. Même la reconstitution de certaines représentations avec des quadrilatères en carton à partir du squelette de départ s'est révélé trop difficile pour certains. Le professeur a donc décidé de postposer la suite des activités à l'année suivante.

Les quatre premiers dessins de la fiche 33 ont été complétés facilement dans la classe de deuxième et, moyennant quelques interventions du professeur, tous les élèves sont arrivés à manipuler les instruments. Par contre les deux derniers dessins, qui présentent des cubes vu du dessous, ont posé problème à plusieurs, d'autant plus que, dans la version expérimentée, la consigne de coloriage n'était pas donnée. C'est d'ailleurs en dépannant un élève que nous avons découvert le caractère éclairant de celle-ci : ne voyant pas au départ qu'il s'agissait d'un cube vu du dessous, Peter avait dessiné en traits pleins toutes les arêtes et ne savait plus comment poursuivre. La seule indication de colorier la face du dessous et d'ébaucher le coloriage de la face frontale a suffi à l'éclairer.



Peter

6 Dessiner les points sur un dé

De quoi s'agit-il ?

Après avoir appris à dessiner un cube, on apprend à dessiner *sur* un cube : on place les points d'un dé sur des représentations en perspective parallèle de celui-ci.

Enjeux

Les propriétés utilisées pour partager un segment en deux parties égales sont étendues au partage en quatre parties égales : on utilise les propriétés d'incidence et on recourt à un réseau de parallèles équidistantes pour partager un segment.

Matières. – *Développement du cube.*

La perspective cavalière comme mode de représentation de solides qui conserve le rapport entre segments de droites parallèles.

Approche des projections parallèles : partage d'un segment par un faisceau de droites parallèles.

Compétences. – *Passer d'un objet de l'espace à une représentation plane et réciproquement.*

Indiquer la position de l'observateur.

Imaginer l'objet ou sa position d'après sa représentation.

De quoi a-t-on besoin ?

La fiche de travail 41.

Un dé de grand format ou plusieurs dés ordinaires. Il est relativement facile de réaliser un grand dé en polystyrène (frigolite) et d'utiliser des aiguilles à tête colorée pour faire les points. Que ce soit avec de tels dés ou avec des dés du commerce, il faut que la disposition des points soit la même que celle proposée dans la fiche. (Il y a en effet des dés qui, tout en vérifiant les conventions énoncées ci-après, orientent autrement les dessins de deux points, de trois points et de six points.)

Comment s'y prendre ?

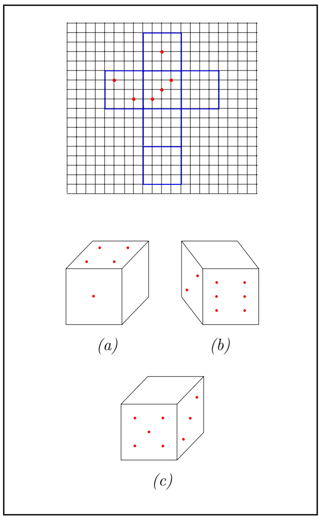
Tout en observant des dés, on énonce deux propriétés :

– sur un dé, la somme des points de deux faces parallèles vaut toujours 7 ;
– sur chaque face, les points sont centrés sur les nœuds d'un quadrillage qui partage chaque arête en quatre.

On présente ensuite la fiche de travail 41 avec la consigne suivante :

Compléter les dessins, sans recourir aux dés disponibles dans la classe.

Fiche 41 (page 241)



Compléter le marquage du développement conduit à bien intégrer les deux règles et prépare la suite du travail.

Pour compléter les dessins en perspective, il s'agit d'abord de déterminer le nombre de points. Y arriver à partir du développement stimule l'imagination spatiale bien plus que le recours au dé.

La face latérale du dessin (a) comporte cinq points. Pour les placer, on détermine par mesure le milieu de chaque arête, puis le milieu de chaque moitié. Ce procédé est applicable aussi bien pour des arêtes sur une face frontale que pour des fuyantes.

Comme les cinq points appartiennent à des diagonales, on peut vérifier la précision du quadrillage. On voit apparaître deux réseaux de parallèles équidistantes qui partagent non seulement les arêtes, mais aussi les diagonales. On rencontre ainsi une forme particulière du théorème de Thalès.

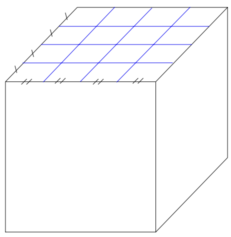
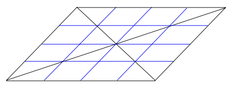
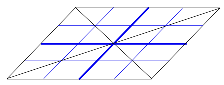
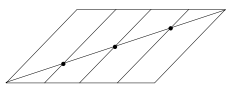
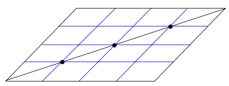
Après un travail libre sur le cube (a) et une mise en commun des méthodes, les élèves sont invités à compléter les dessins (b) et (c), avec la consigne d' éviter de recourir à des mesures.

Synthèse. – La synthèse a pour but de mettre au point, à partir des propriétés des diagonales et des médianes d'un parallélogramme, le partage d'un segment en quatre par un réseau de parallèles équidistantes.

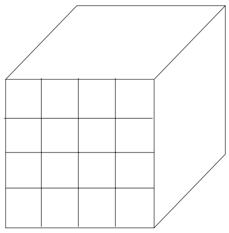
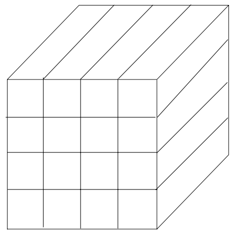
En un premier temps, on travaille sur une seule face du cube, représentée par un parallélogramme. En un second temps, on procède au quadrillage des trois faces vues.

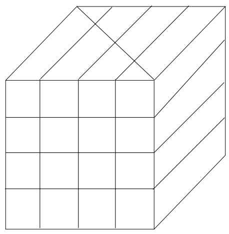
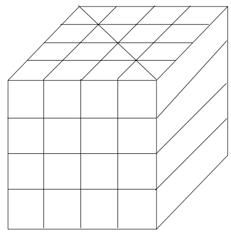
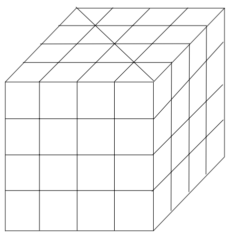
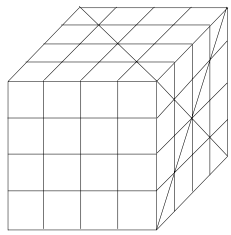
Le travail des élèves consiste à rédiger avec l'enseignant les commentaires qui accompagnent la suite des tracés.

Quadriller le dessin d'une face

	Pour quadriller la face supérieure d'une représentation en perspective cavalière d'un cube, on peut partager en quatre parties égales les arêtes vues en vraie grandeur et aussi les arêtes fuyantes.
	On sait que chaque diagonale d'un parallélogramme passe par l'intersection des médianes.
	On observe cela non seulement pour le parallélogramme extérieur, mais aussi pour les quatre parallélogrammes dessinés à l'intérieur.
	Une nouvelle méthode pour quadriller le dessin de la face supérieure apparaît : 1. On trace un premier réseau de parallèles équidistantes et une diagonale.
	2. À partir de chaque intersection, on construit l'autre réseau de parallèles.

À partir du quadrillage d'une face, quadriller les autres faces

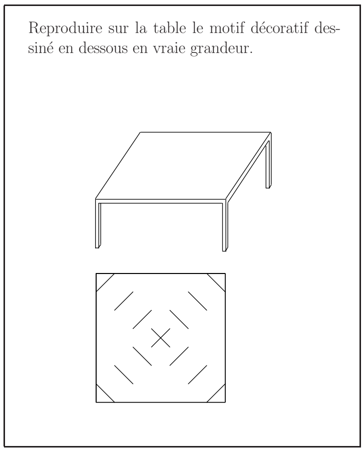
 1. À partir du quadrillage de la face frontale, on peut, sans faire aucune mesure, quadriller les autres faces.	 2. À partir des points de division de deux arêtes de la face frontale, on mène des parallèles aux arêtes fuyantes.

 3. On trace la diagonale de la face supérieure.	 4. On utilise les points de division de la diagonale pour tracer un second réseau de parallèles sur la face supérieure.
 5. Les arêtes fuyantes sont ainsi partagées en quatre parties égales. On peut mener un nouveau réseau de parallèles dans la face de droite.	 6. On vérifie que les diagonales de la face de droite passent bien par les nœuds du quadrillage.

Exercices. – Dans les fiches 42 et 43, le motif proposé en vraie grandeur est placé de manière à pouvoir être dessiné en perspective sur la table, grâce aux seules propriétés d'incidence et de parallélisme, sans qu'on doive mesurer ou reporter de longueur. C'est l'occasion d'exercer la nouvelle technique de partage d'un segment à partir des diagonales et de réseaux de parallèles.

Fiche 42 (page 242)

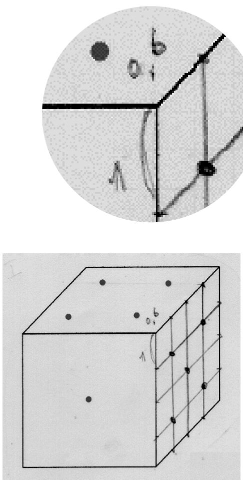
Fiche 43 (page 243)



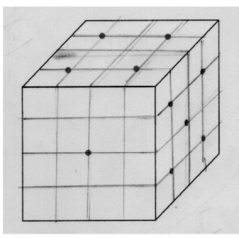
Échos des classes

Compléter le développement (fiche 41) n'a guère posé de problèmes. Aucun élève n'a dû recourir à un dé, ni même à un cube. Ils ont découvert facilement aussi qu'il faut placer cinq points sur la face de droite du cube (a) et trois points sur la face supérieure du cube (b). Par contre, pour le dessin (c), le recours à un dé a été fréquent.

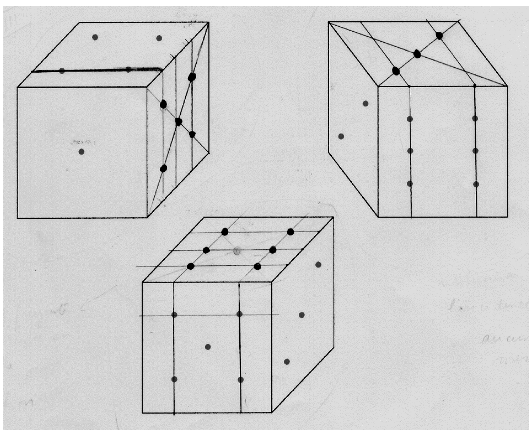
Pour positionner les cinq points du dessin (a), la plupart des élèves ont commencé par dessiner un quadrillage complet sur la face, voire sur toutes les faces. Pour y parvenir, certains ont divisé en quatre les mesures des arêtes de la face frontale et ont spontanément divisé aussi celles des fuyantes (voir le dessin d'Elisabetta). D'autres ont utilisé les points des autres faces (Peter). Stéphanie a astucieusement utilisé les points de la face supérieure pour obtenir le quart de l'arête fuyante et a tracé les diagonales de la face latérale !



Elisabetta



Peter



Stéphanie

Après une mise en commun des méthodes, il est demandé aux élèves de travailler à l'économie et de tracer le moins de segments possibles. Stéphanie y est parvenue, sauf pour le cube (c) : elle n'a pas pensé à utiliser les trois points de la face latérale.

7 Vraie grandeur

De quoi s'agit-il ?

Au départ d'un dessin en perspective parallèle d'une figure inscrite dans un cube, construire cette figure en vraie grandeur. Les figures choisies se limitent ici à quelques quadrilatères et triangles dont les sommets et les côtés sont des éléments d'un cube en position frontale.

Enjeux

L'aller et retour entre un cube et ses représentations se précise : l'objet réel doit être imaginé, puis dessiné à partir d'une représentation. Le cube réel peut aider à lever un doute ou servir à des vérifications, il n'est plus le point de départ.

Dans une représentation plane, les propriétés d'une figure ne sont pas données d'emblée par le dessin, il faut les établir en se référant tant aux propriétés de l'objet réel, qu'à celles de la perspective parallèle ou à celles de figures planes. C'est une démarche qui contribue de manière significative à l'apprentissage de la démonstration.

Matières. – *Construire une figure correspondant à des conditions données.*

Rechercher les propriétés qui suffisent à la construction d'un triangle, d'un quadrilatère.

Compétences. – *Repérer les éléments qui se correspondent sur la représentation et sur l'objet.*

Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments vus en vraie grandeur.

Justifier une construction à partir de propriétés.

De quoi a-t-on besoin ?

Les huit fiches de travail 44 à 51.

Les instruments de dessin habituels.

Un cube en tiges dont l'arête a la même longueur que celle des cubes présentés dans les fiches.

Prérequis. – On suppose que les élèves connaissent les propriétés essentielles des quadrilatères et des triangles, qu'ils ont déjà construit des figures planes aux instruments et réalisé qu'il n'est pas nécessaire de connaître tous les éléments d'une figure pour la construire.

Comment s'y prendre ?

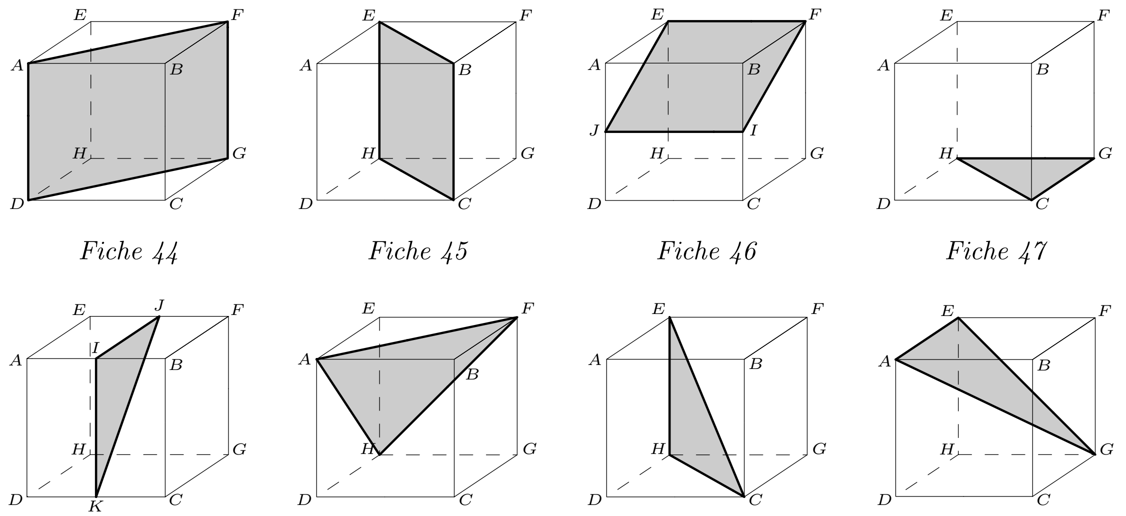
Les élèves reçoivent les huit fiches de travail en une fois. Le professeur les guide pour réaliser la première figure. À cette occasion, il précise la consigne et met en place une méthode de travail.

Pour que les élèves réalisent mieux ce que signifie l'expression *faire un dessin en vraie grandeur*, on peut en préciser le sens : une fois réalisé, le dessin de la figure doit pouvoir être découpé et placé dans le cube réel.

Le but du travail étant de reconstituer les dimensions réelles à partir d'une représentation, il va de soi que le recours au cube ne devrait intervenir que pour se faire une idée du dessin à construire.

Fiches 44 à 51 (pages 244 à 251)

Dessiner en vraie grandeur chacune des figures grisées.



Fiche 44 *Fiche 45* *Fiche 46* *Fiche 47*

Fiche 48 *Fiche 49* *Fiche 50* *Fiche 51*

Voici par exemple comment peut se dérouler la première fiche :

1. *Imaginer et prévoir.* Réaliser par exemple que le quadrilatère coupe le cube en deux solides identiques, qu'un côté du quadrilatère est horizontal, l'autre vertical et prévoir ainsi que ce qui apparaît sur le dessin comme un parallélogramme est en réalité un rectangle.
2. *Repérer les éléments de la figure qui sont représentés en vraie grandeur.* Les segments $[AD]$ et $[FG]$ représentent des arêtes verticales du cube, elles sont dessinées en vraie grandeur.
3. *Trouver la vraie grandeur d'autres éléments de la figure.* Les segments $[AF]$ et $[DG]$ sont des diagonales de faces qui ne sont pas représentées en vraie grandeur. On peut trouver leur vraie grandeur en traçant une diagonale de la face avant ou de la face arrière. Le segment $[AC]$ par exemple est une vraie grandeur de la diagonale d'une face du cube.
4. *Repérer des angles droits.* Sur le cube réel, les angles du quadrilatère en question sont droits.
5. *Vérifier qu'on possède assez d'éléments pour construire la figure.* Le quadrilatère à construire a deux paires de côtés opposés de même longueur et ses angles sont droits. C'est un rectangle dont on connaît la longueur et la largeur.
6. *Construire la figure, confronter le résultat à la prévision, et vérifier à l'aide du cube.*

Synthèse. – L'objectif de cette synthèse est de rassembler et de résumer quelques observations qui peuvent servir dans les constructions en vraie grandeur de figures inscrites dans un cube.

Rédiger des phrases en regard de dessins (ou réciproquement) pour dégager des propriétés, contribue à doter l'élève du langage et de modes de pensée propres aux démonstrations géométriques.

La synthèse se fait en trois étapes :

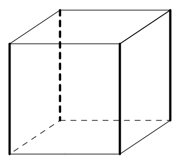
Chaque élève reçoit une série de dessins de cubes avec une face frontale. Il y dessine divers segments vus en vraie grandeur.

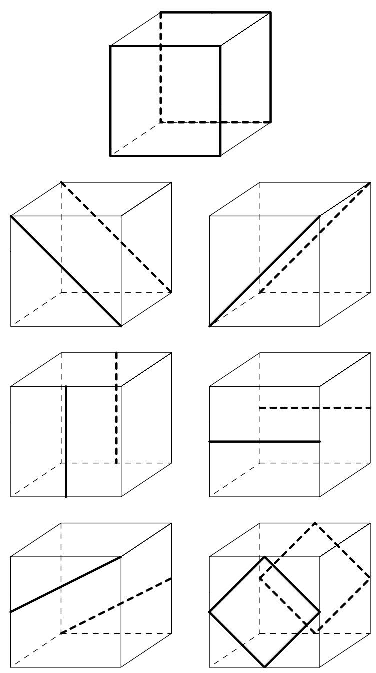
On lui demande ensuite de représenter quatre plans diagonaux et de construire leur vraie grandeur.

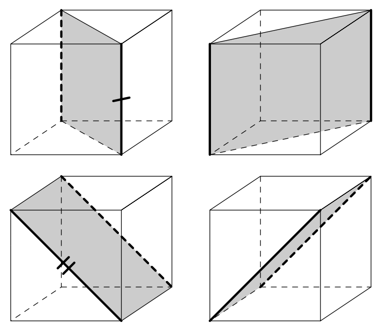
Enfin, il décrit la recherche de la vraie grandeur de la diagonale du cube.

La mise en commun aboutit à un texte dont voici un exemple. Il va de soi que l'élève ne doit pas mémoriser cette synthèse, mais il doit être capable de retrouver seul les éléments dont il a besoin et de les utiliser.

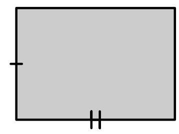
Éléments représentés en vraie grandeur pour un cube dessiné en position frontale.

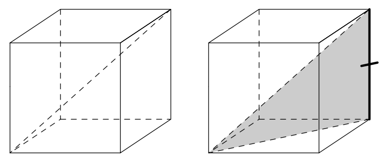
	Toutes les arêtes verticales d'un cube en position frontale sont dessinées en vraie grandeur.

	Tout segment de la face avant et de la face arrière d'un cube en position frontale est dessiné en vraie grandeur.

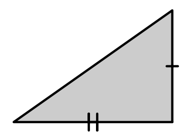


Les quatre dessins ci-contre montrent un cube partagé par un plan diagonal. Les quatre parallélogrammes grisés représentent le même rectangle dont voici la vraie grandeur.





Pour déterminer la vraie grandeur de la diagonale du cube, il faut construire un triangle rectangle à partir des deux côtés adjacents à l'angle droit. L'un est l'arête du cube, l'autre est la diagonale d'une face du cube. L'hypoténuse de ce triangle est la diagonale du cube.

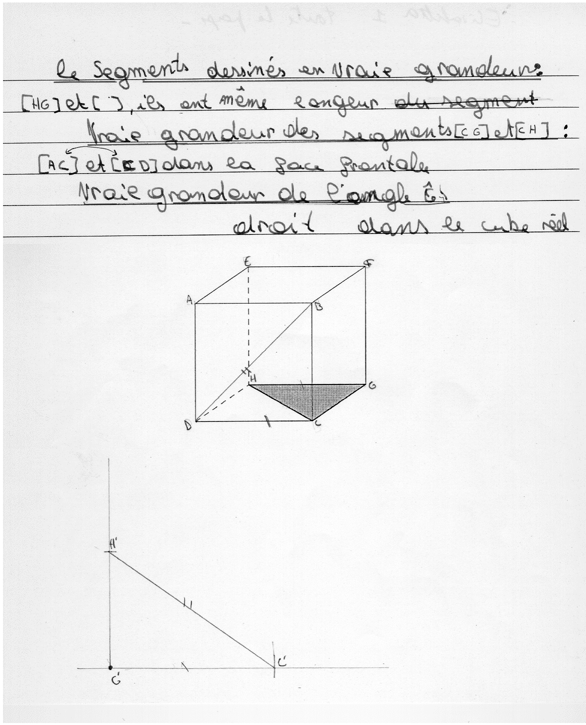


Échos des classes

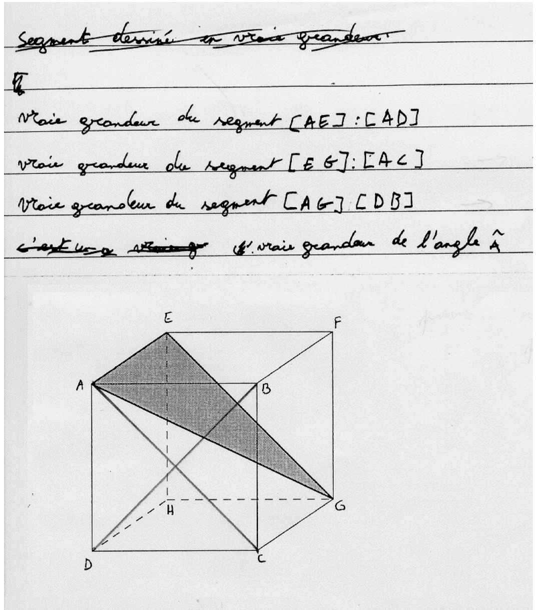
Après avoir réalisé le premier exercice avec le professeur, les élèves ont été invités à suivre les mêmes étapes et à les noter sur leur feuille avant de réaliser le dessin. Pour la fiche 45, aucun élève n'a réalisé d'emblée qu'il s'agit du même rectangle que celui de la fiche 44. Par contre, ils y sont arrivés après avoir repéré les vraies grandeurs. Les fiches 46 à 49 ont posé des difficultés à ceux qui n'avaient pas compris la signification de l'expression *vraie grandeur*. Ils se sont attachés à repérer des segments de même longueur sur le dessin, plutôt qu'à repérer un segment de la face avant (ou arrière) qui est dessiné en vraie grandeur. Pour d'autres, la consigne de laisser des traces écrites des différentes étapes les a absorbés au point de d'inhiber leur imagination visuelle. Elisabetta (dessin à la page suivante) par exemple, après une description correcte de ses observations, s'est embrouillée dans ses reports. Elle n'avait visiblement pas prévu que le triangle à dessiner était un demi carré !

Une nouvelle difficulté a surgi lorsque la vraie grandeur d'un segment ne pouvait être déterminée à partir d'une face frontale. C'était le cas pour un côté du triangle dans les fiches 50 et 51. Jonathan (dessin à la page suivante) par exemple a assimilé une diagonale du cube à une diagonale d'une face.

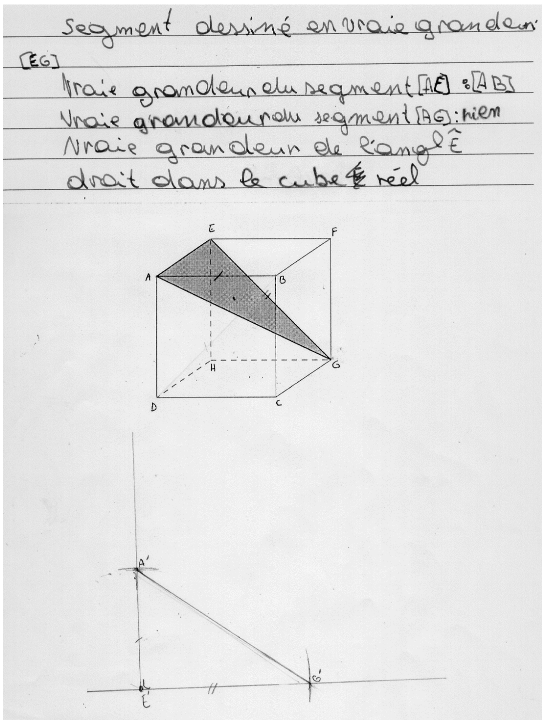
Elisabetta par contre a fait preuve ici d'une très bonne organisation de ses observations et de ses tracés.



Elisabetta : fiche 47



Jonathan : fiche 51



Elisabetta : fiche 51

8 Quel milieu ?

De quoi s'agit-il ?

Analyser un dessin de maison en perspective centrale, contraster quelques propriétés de cette perspective avec celles de la perspective parallèle et produire quelques dessins de bâtiments en perspective centrale.

Enjeux

Mettre en évidence les liens entre parallélisme et conservation du milieu. Utiliser les propriétés d'incidence.

Matières. *– Découverte et énoncé de propriétés liées aux configurations de Thalès.*

Problèmes de construction, recherche et démonstration de propriétés.

Compétences. *– Effectuer et interpréter des représentations planes de figures de l'espace en se fondant sur les propriétés de telles représentations.*

Dans une démonstration, utiliser les propriétés des proportions.

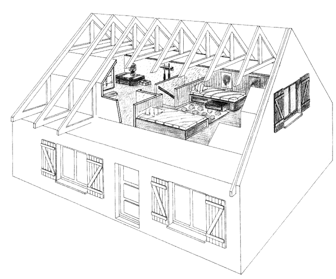
De quoi a-t-on besoin ?

Les instruments de dessin habituels et les fiches de travail présentées en annexe (fiches 52 à 56, pages 252–256).

Comment s'y prendre ?

Le milieu de la façade. – La fiche 52 est soumise à une réflexion individuelle. Le professeur sollicite des avis écrits.

Fiche 52 (page 252)



En réalité, la porte de la maison est-elle au milieu de la façade ?
Sur quelles observations ou constructions se base votre réponse ?

Une mise en commun s'ensuit. La confrontation débouche sur la question du milieu : les diagonales et les médianes du rectangle de façade ne désignent pas le même point. Voici quelques exemples de considérations :

– le milieu du segment qui représente le bas du mur de façade coïncide avec le milieu de la porte (figure 37a à la page suivante).

– La fenêtre de gauche est plus éloignée du mur extérieur que la fenêtre de droite. Ce qui semble indiquer que la porte n'est pas au milieu.

– La hauteur de la maison est représentée par un segment plus court à l'arrière-plan qu'à l'avant-plan, donc deux segments égaux ne sont pas représentés par des segments égaux.
– Lorsqu'on prolonge des représentations de segments parallèles dans la réalité, on constate qu'ils convergent en un même point (figure 37b). Ce n'est donc pas une perspective parallèle.
– La fenêtre de gauche, qui donne l'impression d'être identique dans la réalité à celle de droite, est dessinée plus petite. On met en doute les arguments basés sur des mesures.
– L'intersection des diagonales du dessin du mur n'est pas au milieu de la porte, mais se situe plus vers l'arrière (figure 37c).
– La cinquième ferme du toit, qui est celle du milieu, est presque au dessus de l'intersection des diagonales (figure 37d).

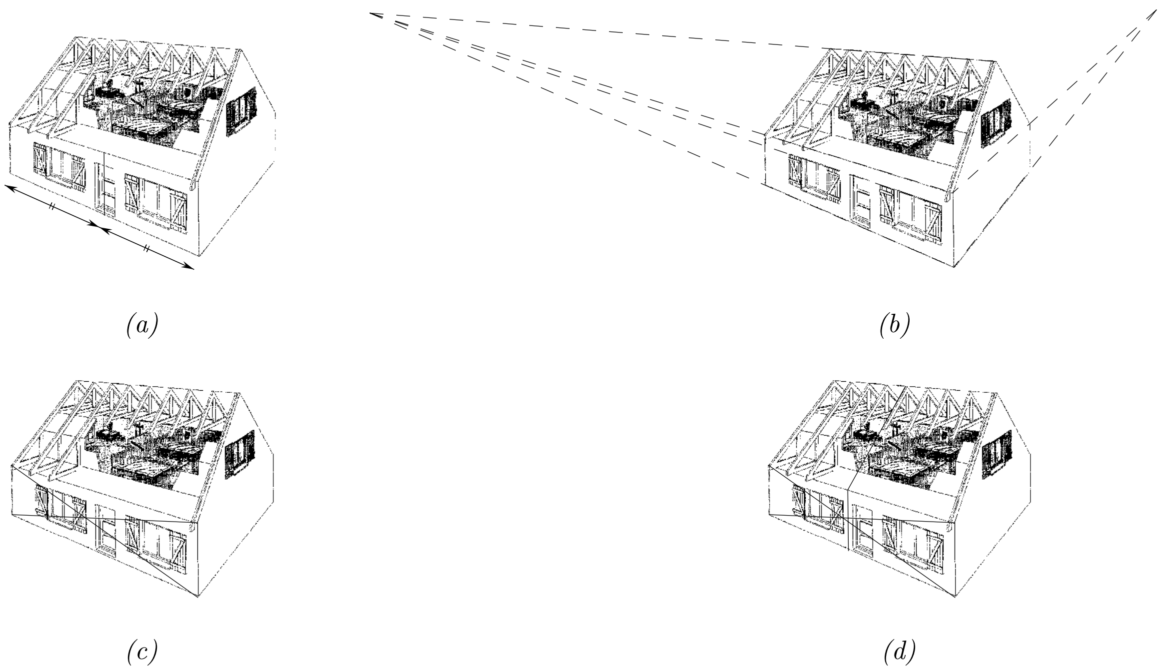


Fig. 37

Tout ceci conduit à conclure que dans la réalité la porte n'est pas au milieu du mur et que c'est l'intersection des diagonales qui représente ce « milieu ». Le professeur précise que le dessin de la maison est réalisé selon les règles de la *perspective à point de fuite* : les parallèles qui s'éloignent de l'observateur sont représentées par des droites qui convergent vers un même point.

Synthèse. – La synthèse qui suit consiste en une comparaison entre quelques propriétés de la perspective parallèle et de la perspective centrale.

<table>
<tr>
<td>

En perspective parallèle

Les arêtes parallèles sont représentées par des segments parallèles.

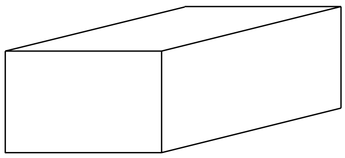


Fig. 38

Dans la figure 38, il y a trois réseaux de segments parallèles entre eux.

</td>
<td>

En perspective centrale

Certaines arêtes parallèles sont représentées par des segments qui convergent vers un *point de fuite*.

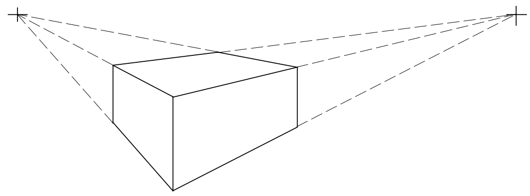


Fig. 39

Dans la figure 39, il y a deux réseaux de segments qui convergent vers leur point de fuite et un réseau de segments verticaux, parallèles entre eux.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Le milieu d'un segment est représenté par un point situé au milieu du dessin de ce segment.

Les segments parallèles et de même longueur sont représentés par des segments parallèles et de même longueur.

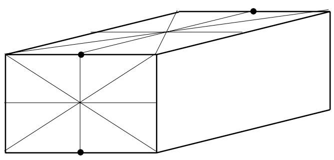


Fig. 40

</td>
<td>

Le point qui représente le milieu d'un segment n'est pas toujours le milieu du dessin de ce segment.

Les segments parallèles et de même longueur ne sont pas toujours représentés par des segments de même longueur.

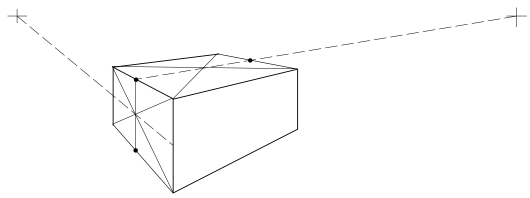


Fig. 41

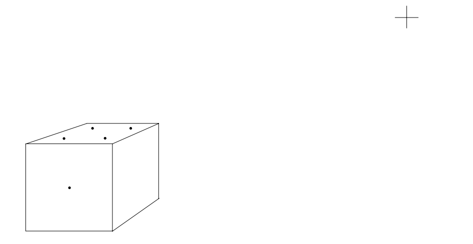
</td>
</tr>
</table>

Dessiner des points sur un dé. – Les fiches 53 et 54 prolongent la fiche 41 à la page 241.

Il s'agit à présent de transposer des constructions en perspective parallèle à des dessins analogues en perspective centrale.

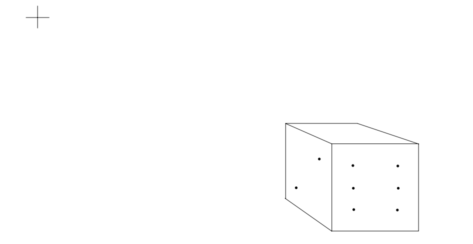
Fiche 53 (page 253)

Compléter le dessin de ce dé. Les informations sur la disposition des points sont données à la fiche 41 à la page 241. La croix désigne le point de fuite.



Fiche 54 (page 254)

Compléter le dessin de ce dé. Les informations sur la disposition des points sont données à la fiche 41 à la page 241. La croix désigne le point de fuite.



La figure 42 montre une façon de placer les cinq points.

(a) L'intersection des diagonales détermine le centre de la face. Un premier point est placé.

(b) Le dessin de la médiane horizontale passe par le centre et son prolongement passe par le point de fuite. Le dessin de la médiane verticale passe par le centre et est parallèle aux arêtes verticales du cube.

(c) Les médianes partagent la face en quatre quadrilatères (ils représentent quatre carrés identiques). Les autres points de la face du dé sont déterminés par l'intersection des diagonales de ces quadrilatères.

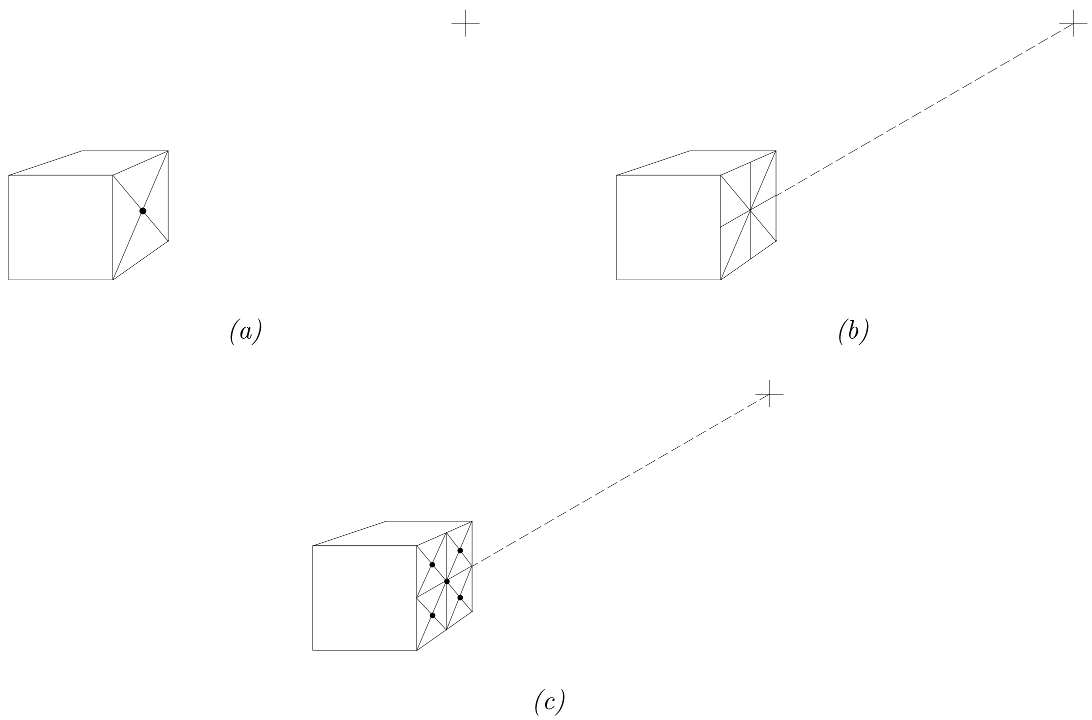
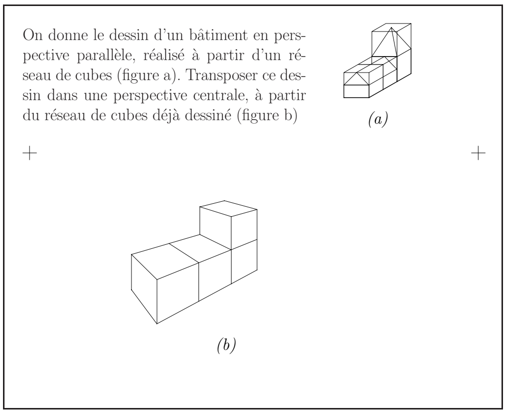


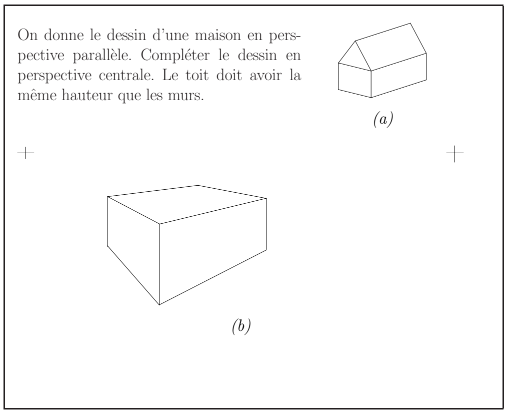
Fig. 42

Dessiner un bâtiment. – La fiche 55 utilise les mêmes propriétés de la perspective centrale que la fiche précédente, mais la transposition se fait à propos d'un dessin qui comporte deux points de fuite.

Fiche 55 (page 255)



Fiche 56 (page 256)



La figure 43 montre une construction qui n'utilise que des propriétés concernant les incidences de droites et de points et la représentation de parallèles. On peut utiliser ce dessin pour soulever la question de la conservation du milieu sur des segments verticaux. Cette question sera traitée complètement à la fiche 56 à la page 256.

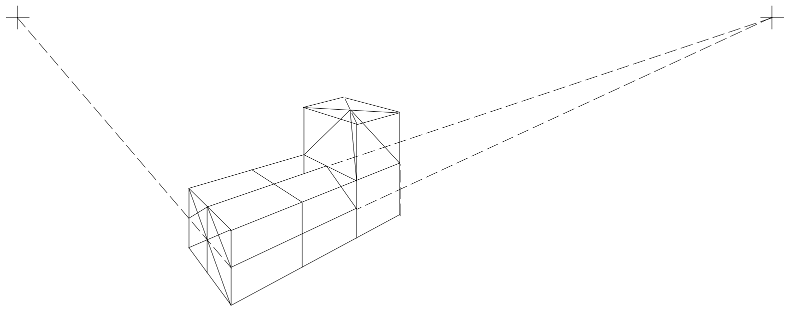


Fig. 43

Pour dessiner le toit de la maison (fiche 56), il faut déterminer l'axe de symétrie du mur gauche et y placer une extrémité du faîte du toit. On le sait, cet axe passe par l'intersection des diagonales de la face (figure 44 à la page suivante), mais comment faire pour y reporter la hauteur du mur ?

Les égalités de distances ne sont pas respectées sur les fuyantes, mais qu'en est-il sur les verticales ?

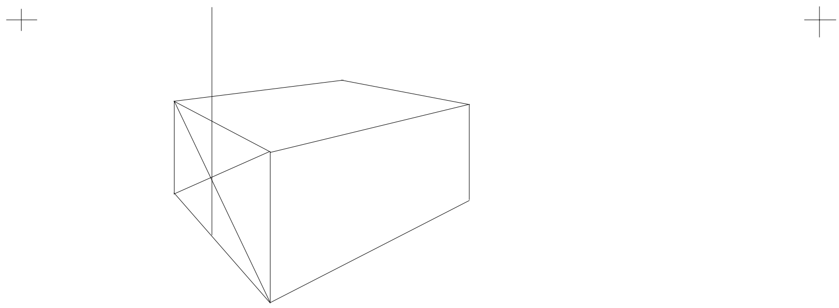


Fig. 44

Pour régler cette question, revenons au dessin du mur de gauche, que nous avons complété avec ses diagonales et trois fuyantes (figure 45). Examinons la fuyante qui passe par l'intersection des diagonales : coupe-t-elle les verticales en leur milieu ?

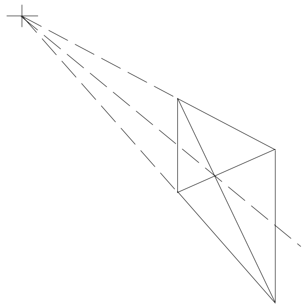
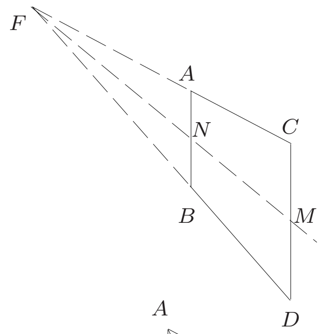


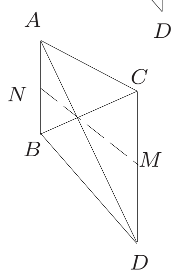
Fig. 45

On peut y voir plusieurs configurations de Thalès. Examinons deux sous-figures et écrivons les égalités de rapports qui en découlent.



Les droites AB et CD sont parallèles. On a :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AN}{CM}$$



$$\frac{AB}{DC} = \frac{AN}{DM}$$

De cette double égalité, on tire

$$\frac{AN}{CM} = \frac{AN}{DM} \quad \text{et} \quad CM = DM.$$

La figure 46 montre une façon de dessiner le toit.

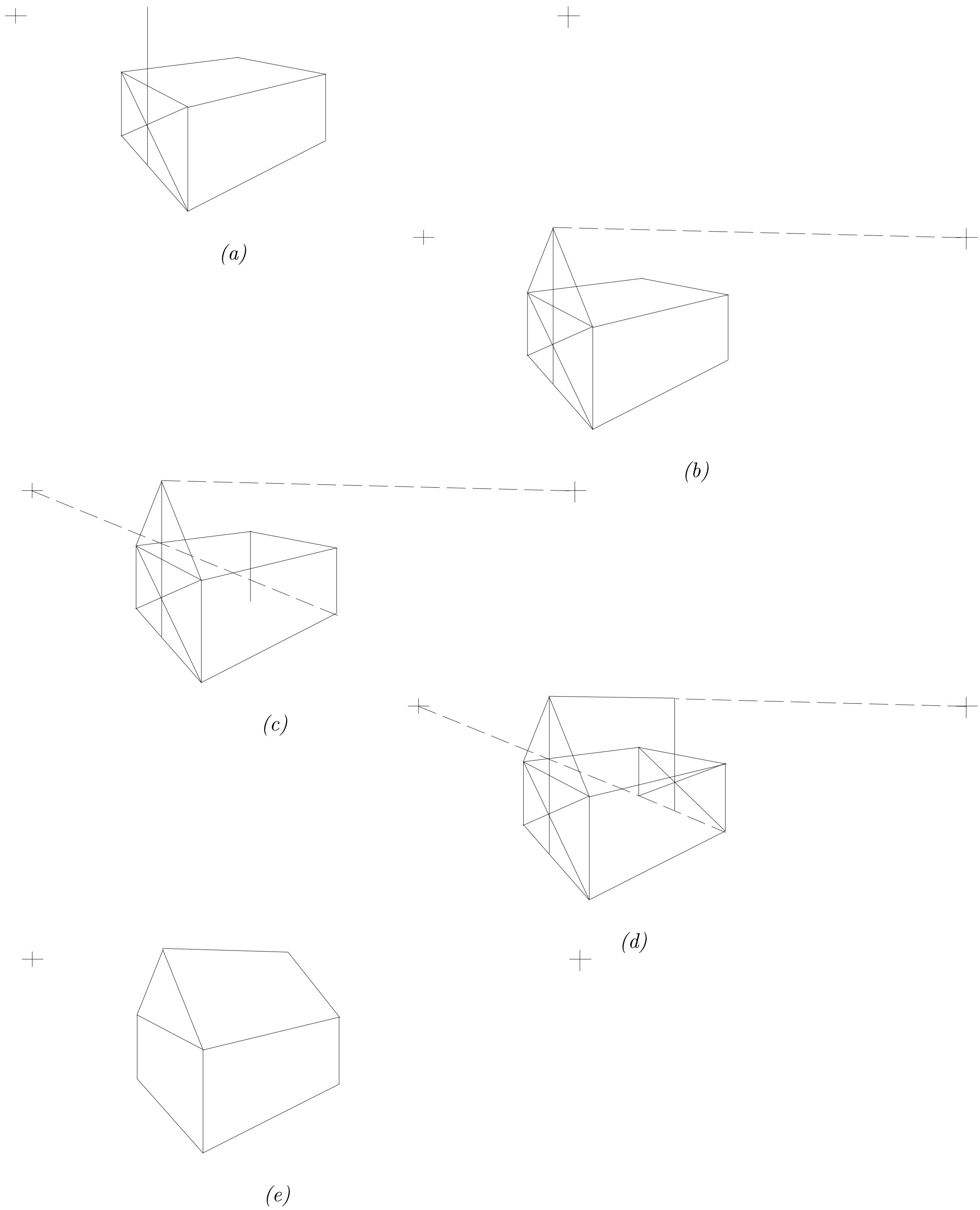


Fig. 46

Échos d'une classe

La question relative au milieu de la façade a suscité un vif intérêt dans la classe de troisième où la fiche a été expérimentée. Les considérations mises en commentaire de la fiche (page 186) sont quasi textuellement celles des élèves. De nombreuses questions à propos de la perspective centrale ont surgi :

– Combien y a-t-il de points de fuite sur ce dessin ?
– Quels sont les points de fuite qui appartiennent à la ligne d'horizon ?
– Y a-t-il plus de deux points de fuite quand on dessine un cube ?
– Combien y a-t-il de points de fuite quand on dessine une sphère ?
– ...

Lors de la synthèse, les élèves se sont attelés à décrire la différence entre l'image d'une médiane en perspective parallèle et en perspective à point de fuite (le terme image était utilisé de manière spontanée et semblait bien maîtrisé).

Avec l'aide du professeur, ils ont mis au point les phrases suivantes :

– En perspective parallèle, l'image d'une médiane d'un carré est une médiane de l'image de ce carré.
– En perspective à point de fuite, l'image d'une médiane d'un carré n'est pas toujours une médiane de l'image de ce carré.

Les élèves ont évoqué à ce propos des énoncés de même forme concernant par exemple l'opposé et l'inverse d'une somme : l'opposé d'une somme est égale à la somme des opposés, mais l'inverse d'une somme n'est pas égale à la somme des inverses.

9 La perspective dans quelques œuvres d'art

De quoi s'agit-il ?

Analyser les perspectives utilisées dans des œuvres d'art.

Enjeux

Les activités précédentes on enrichi les perceptions visuelles des objets et de leurs représentations. Ces perceptions sont désormais associées à quelques propriétés de la perspective parallèle et de la perspective centrale. Un autre regard peut être posé sur les façons de rendre la profondeur dans les œuvres d'art. Cette activité en propose quatre, issues de traditions très différentes.

Matières. – *Représentations planes de solides : comparaison de différents types de représentation.*

La perspective cavalière comme mode de représentation de solides qui conserve le parallélisme des droites.

Compétences. – *Interpréter des représentations planes en se fondant sur les propriétés de telles représentations.*

De quoi a-t-on besoin ?

Les quatre reproductions proposées dans les fiches 57 à 60.

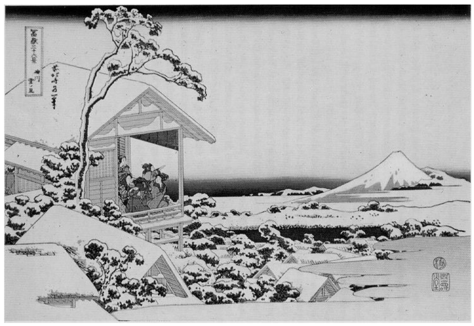
Une règle, une équerre, un crayon.

Comment s'y prendre ? Pour chaque reproduction, les élèves situent les différents éléments du tableau les uns par rapport aux autres et examinent comment sont rendus les effets de profondeur.

Fiche 57 (page 257)

Fidélité, Suzuki Harunobu, 1767

Fiche 58 (page 258)

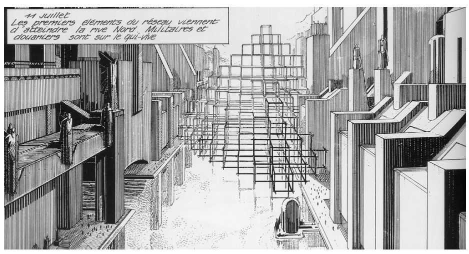


Snow View at Koishikawa, Hokusai (1760–1850)

Fiche 59 (page 259)

L'adoration des Mages, Albrecht Dürer (1471–1528)

Fiche 60 (page 260)



La fièvre d'Urbicante, François Schuiten, 1992

La composition de l'estampe *Fidélité* est d'une grande clarté : à l'avant plan, sur un pont de bois, une geisha est accoudée à une table basse. La scène est vue du dessus. Un arbre occupe le second plan, une embarcation le troisième. A hauteur de la ligne d'horizon, une rive lointaine.

À l'avant-plan, ce sont d'abord des effets de vu et caché qui permettent de situer les éléments les uns par rapport aux autres : la balustrade passe devant la table et derrière la geisha ... Mais ce qui contribue le plus à l'effet de profondeur, c'est le pont. Il est apparemment dessiné en perspective parallèle. On en doute cependant pour ce qui concerne les fuyantes de la balustrade : on dirait qu'elles s'écartent l'une de l'autre dans la direction de la mer. On vérifie alors aux instruments : le parallélisme est respecté pour tous les éléments censés représenter des objets parallèles (figure 47).

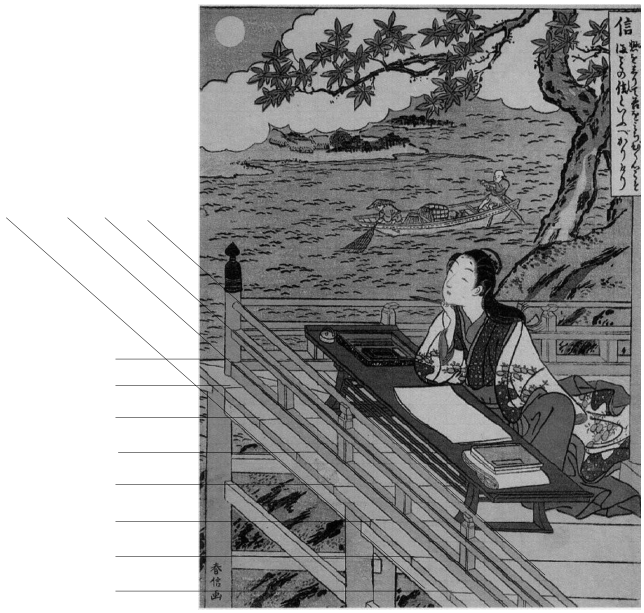


Fig. 47

L'impression donnée par les fuyantes de la balustrade peut s'expliquer de la sorte : dans un paysage, l'œil perçoit les parallèles comme des droites qui se coupent sur la ligne d'horizon, leur représentation par des parallèles donne donc une illusion d'optique qui les fait paraître divergentes.

Par contre, pour représenter le bateau, l'artiste restitue l'impression visuelle : ce qui est plus éloigné apparaît plus petit.

On peut donc dire que cette estampe utilise localement la perspective parallèle en y introduisant des éléments qui corrigent certains effets optiques liés à ce mode de représentation.

La composition de l'estampe *Snow View* est plus élaborée : le sujet principal, la maison qui domine le paysage, est au second plan. À l'avant-plan, un toit un peu plus grand que celui de la maison principale. La disposition et les dimensions des autres maisons suggèrent qu'elles sont situées en contre-bas. Dans le lointain, proche de la ligne d'horizon, le sommet d'une montagne.

La maison principale semble dessinée en perspective parallèle, mais la vérification aux instruments montre des déviations : c'est manifeste pour les fuyantes de la baie et celles du toit (figure 48 à la page suivante). Ceci sans doute pour corriger l'effet d'optique lié aux parallèles situées dans un paysage.

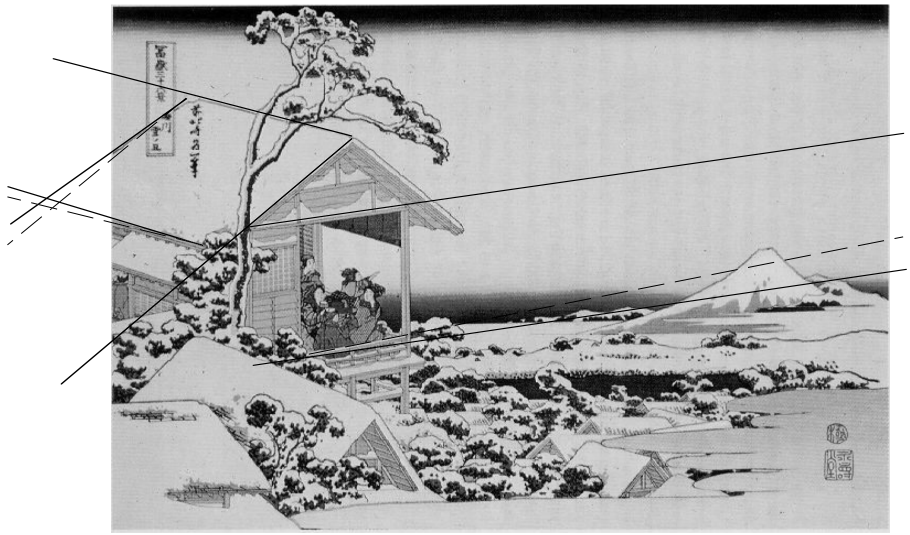


Fig. 48

Par ailleurs les planches constituant le mur sont localement dessinées parallèles entre elles. Les conclusions sont donc analogues aux précédentes.

Dans la gravure de *Dürer*, la disposition des personnages donne d'emblée une impression de profondeur et de communication entre les divers plans. Le bâtiment n'est certes pas dessiné en perspective parallèle. Pour vérifier s'il s'agit d'une perspective centrale, prolongeons les éléments censés représenter des parallèles (figure 49).

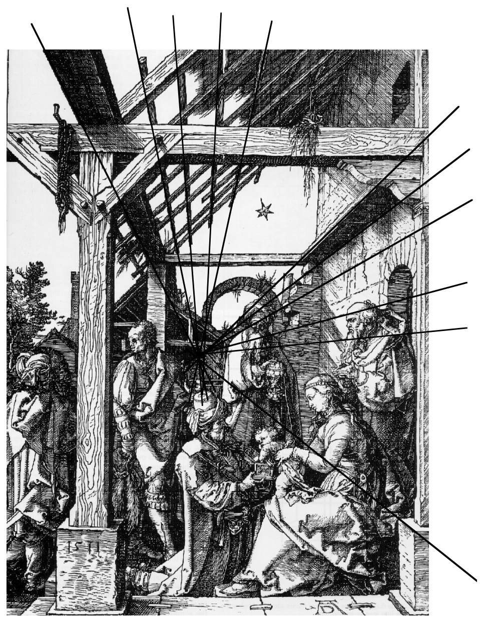


Fig. 49

Le bâtiment présente une face frontale, toutes les horizontales convergent vers un même point de fuite au centre de la gravure.

Tout en étant d'un style très différent, la composition de *Schuiten* est visiblement analogue à celle de *l'Adoration des mages* : une présentation frontale en perspective centrale avec toutefois un point de fuite situé plus haut (figure 50).

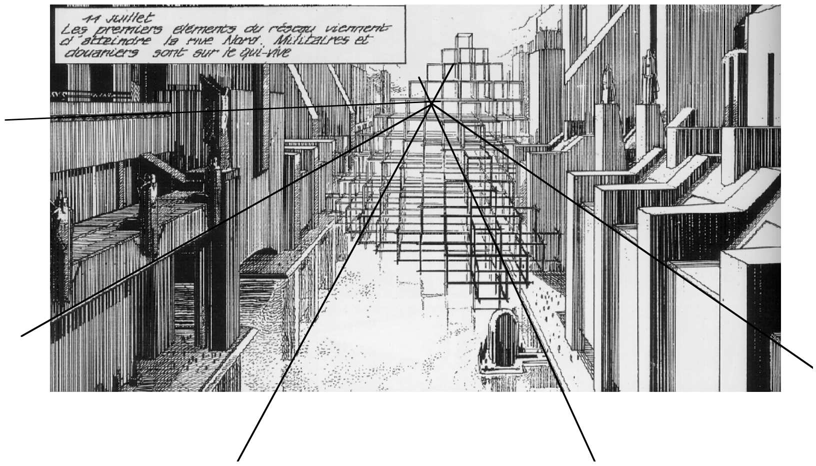


Fig. 50

Un zoom sur le réseau de cubes (figure 51) permet d'observer que de part et d'autre du point de fuite (situé sur la ligne d'horizon), le point de vue sur les cubes change : d'une vue du dessus on passe à une vue du dessous.

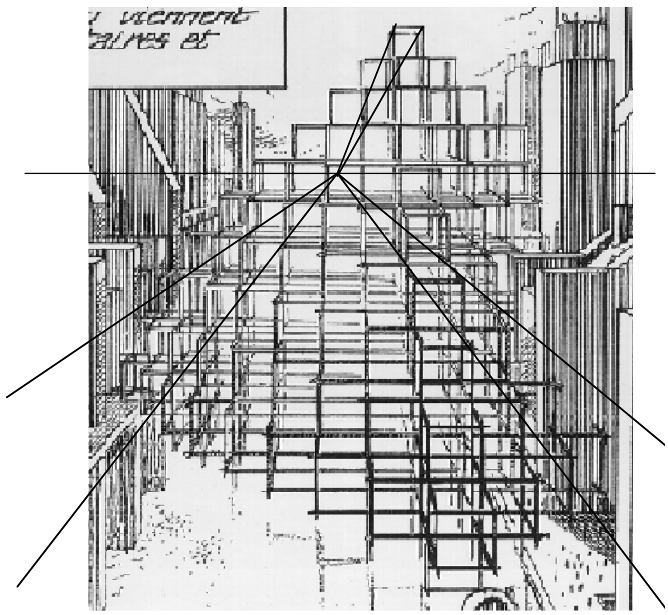
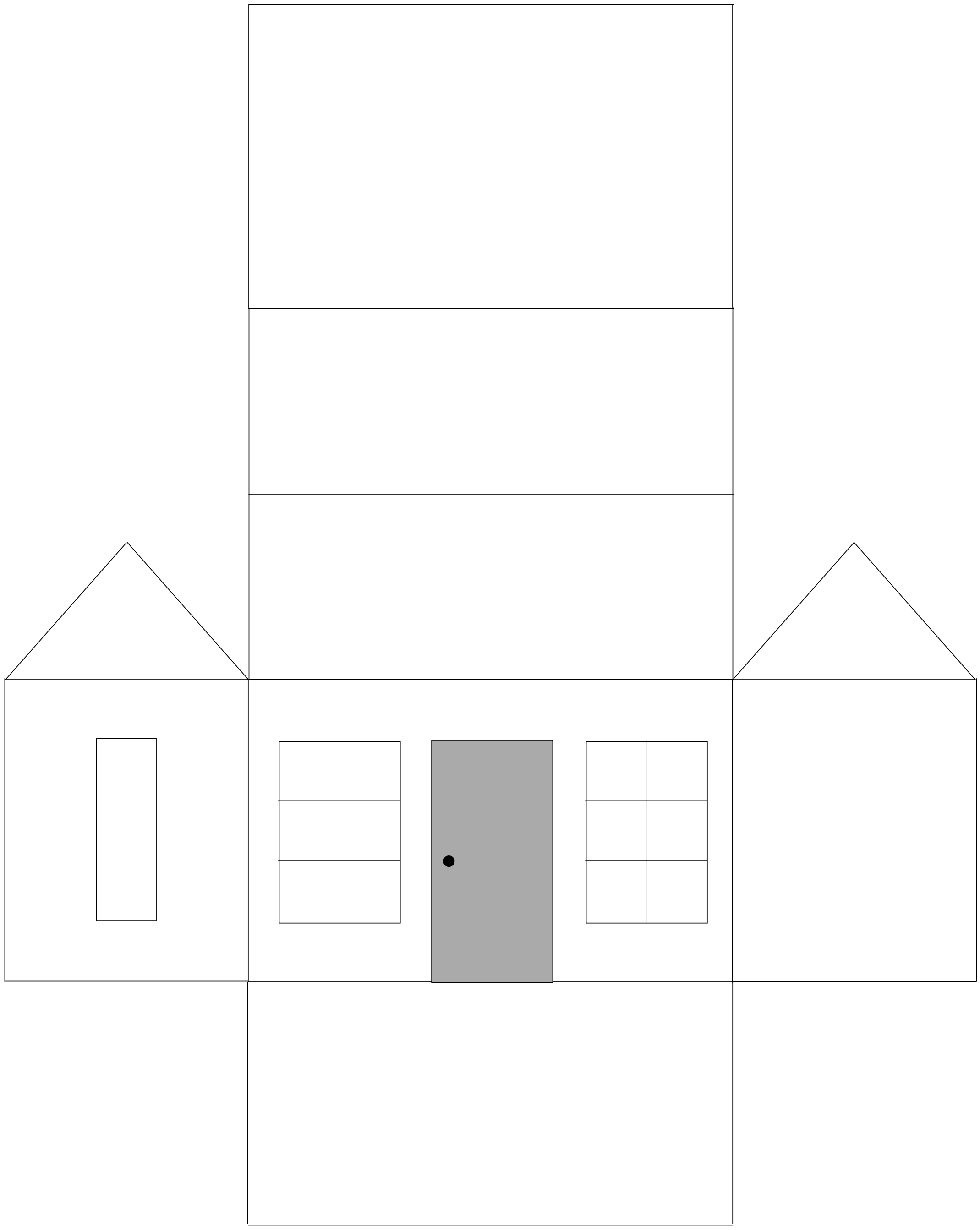
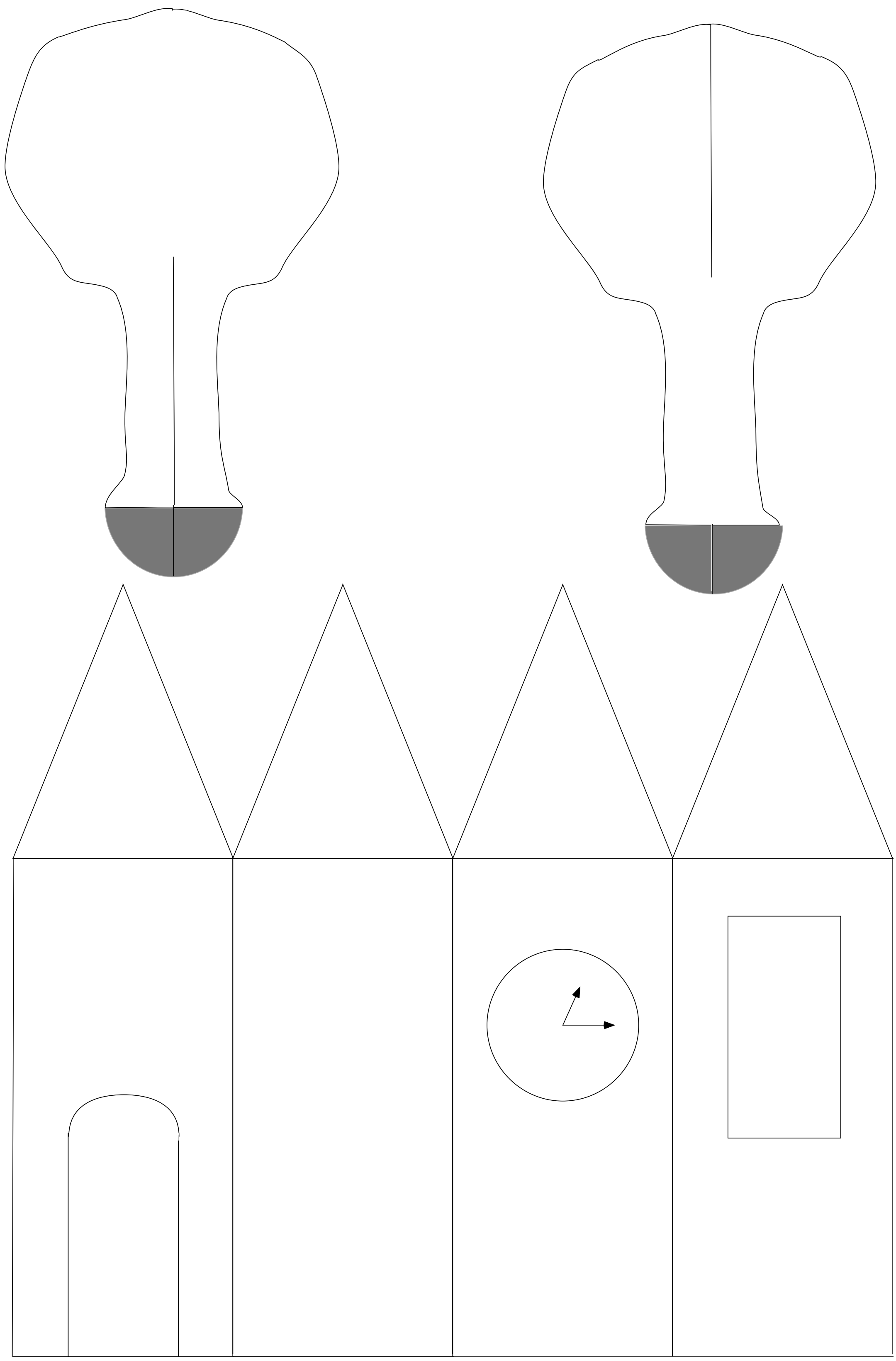


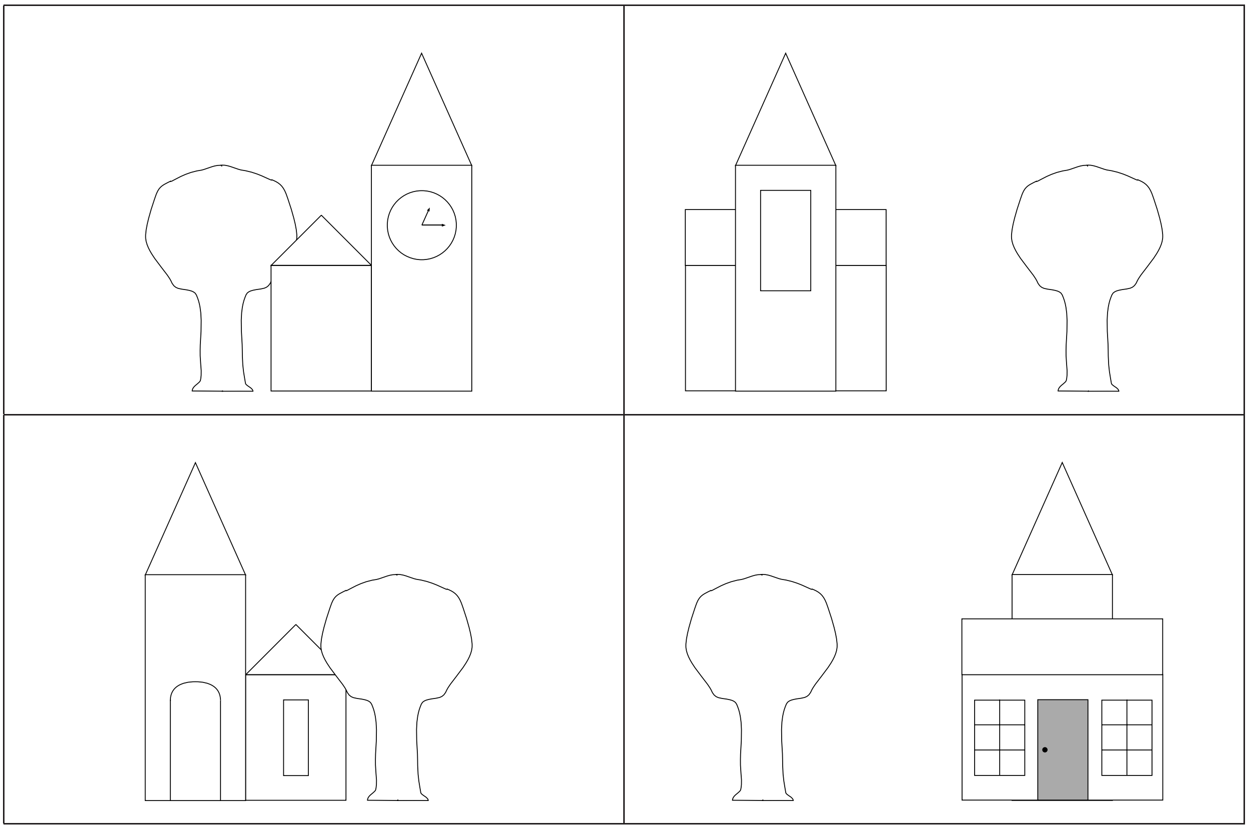
Fig. 51

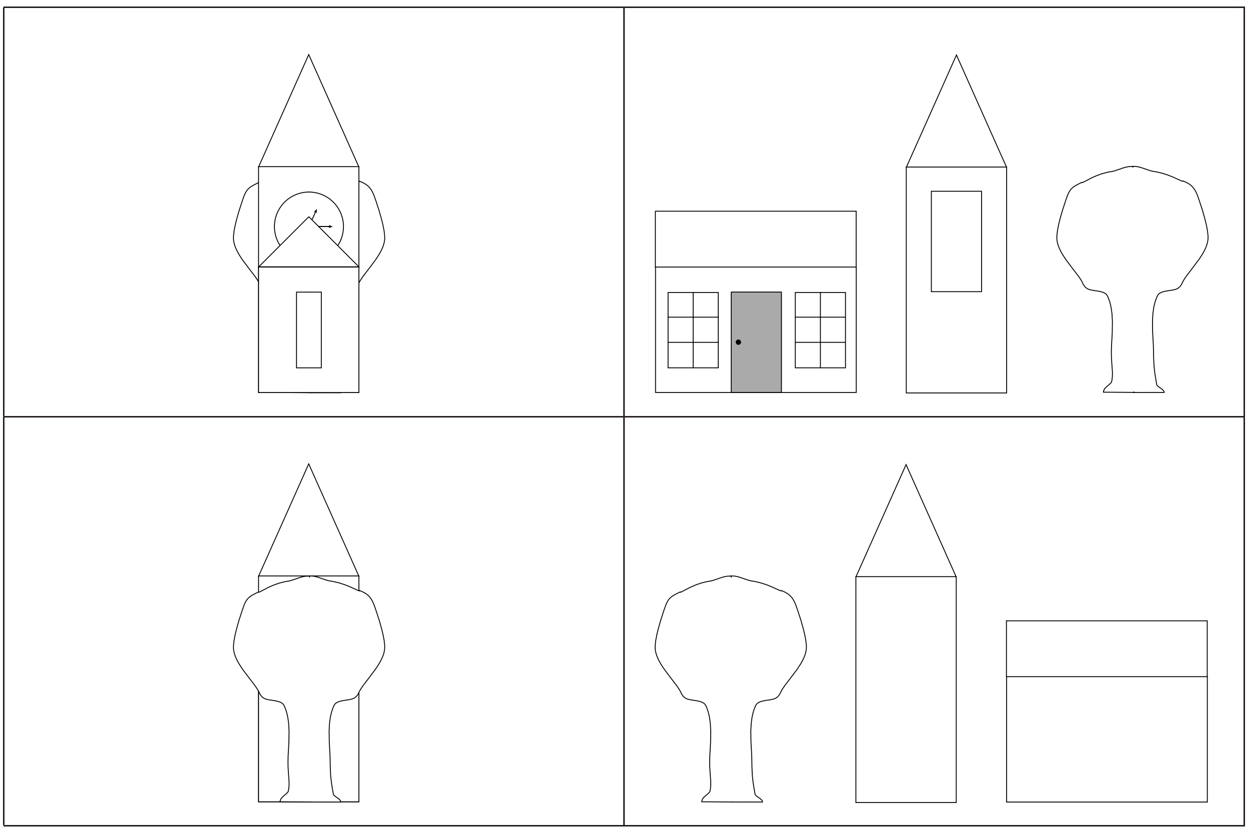
Annexe

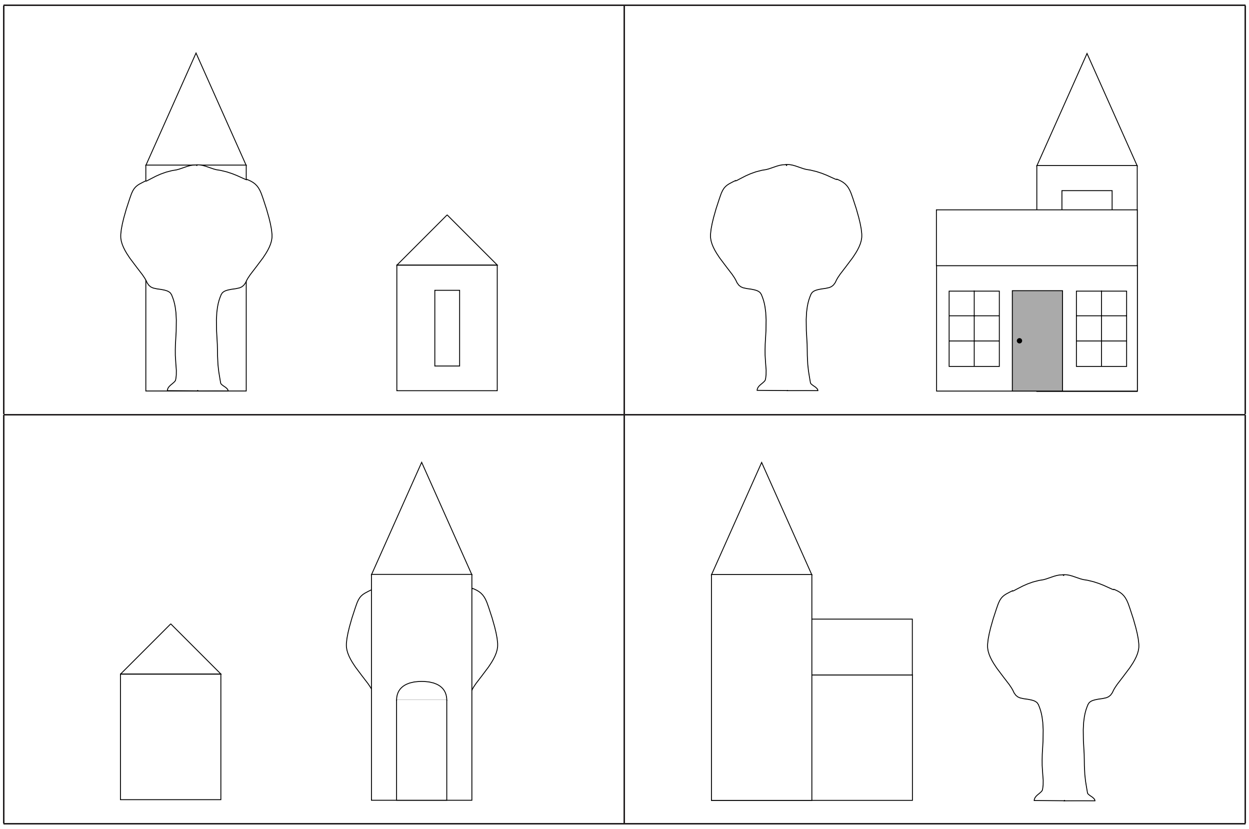
Documents à photocopier

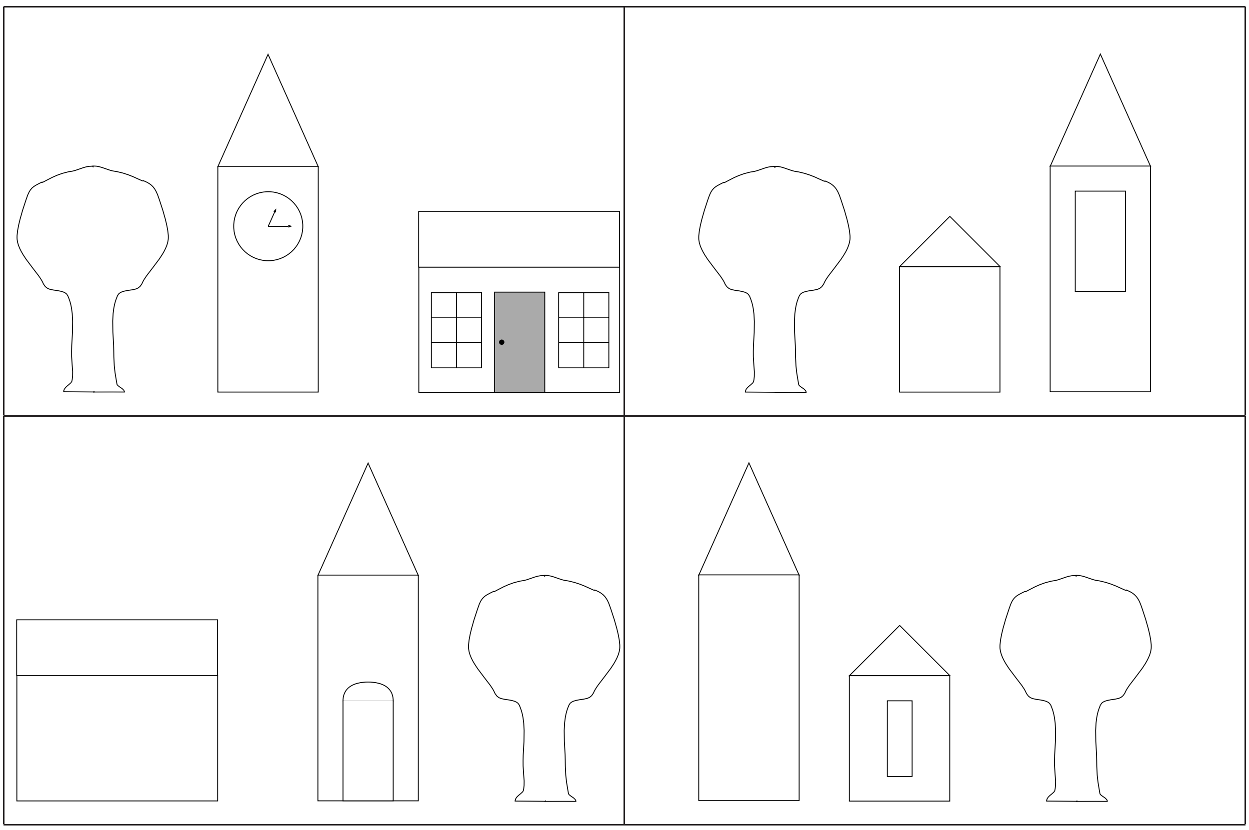


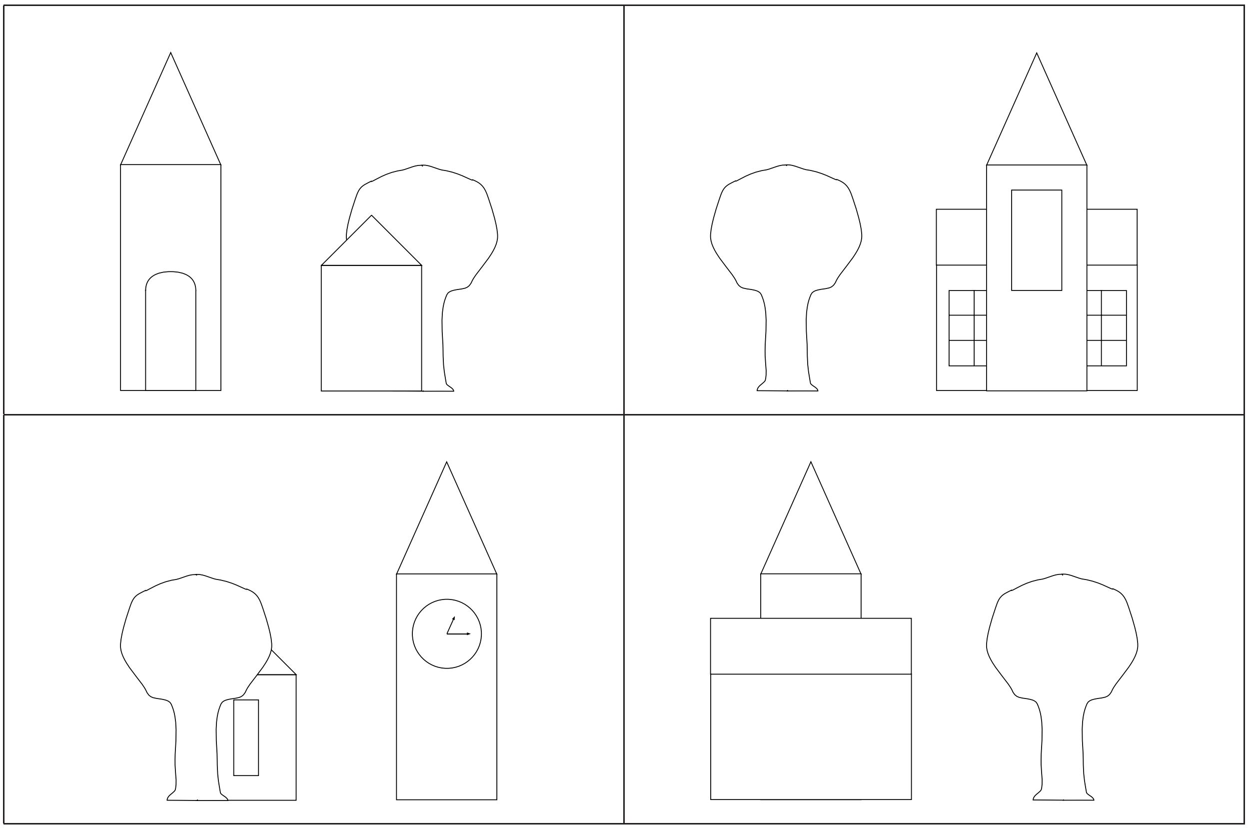


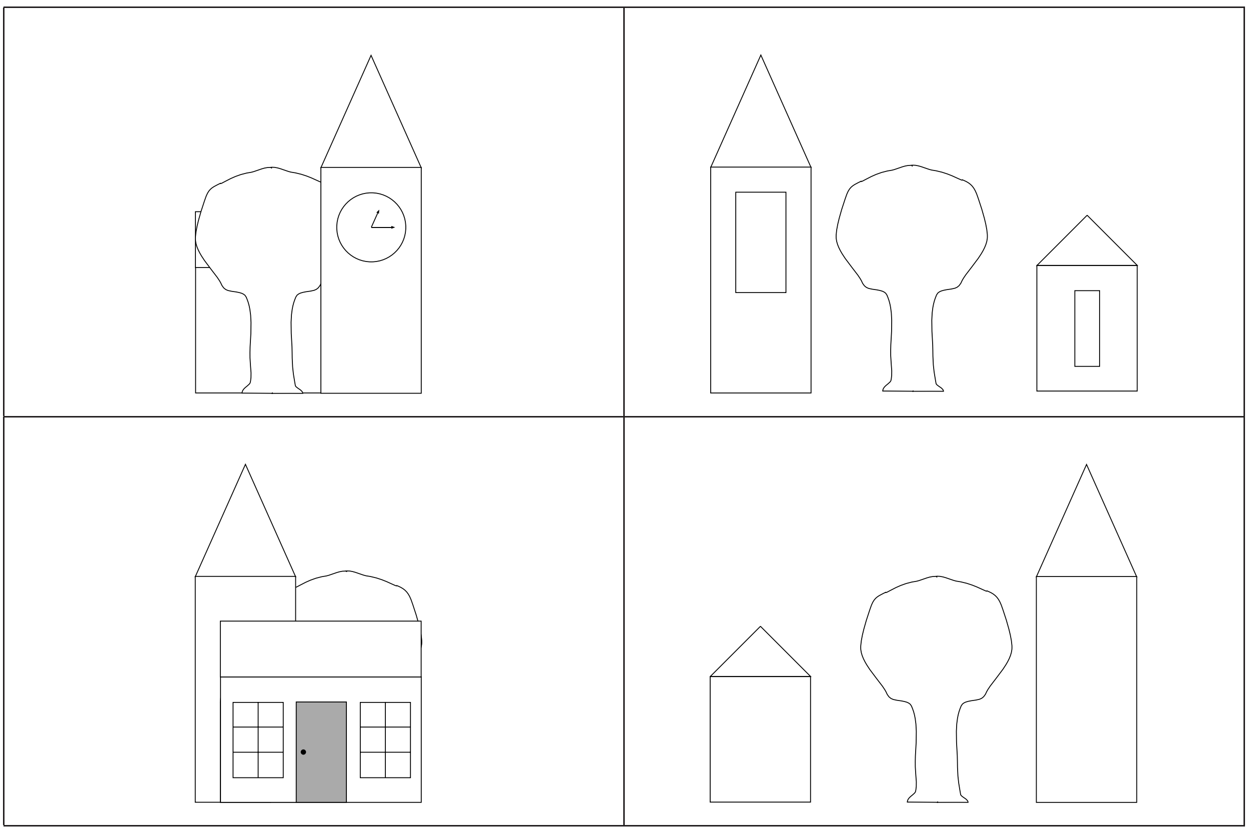


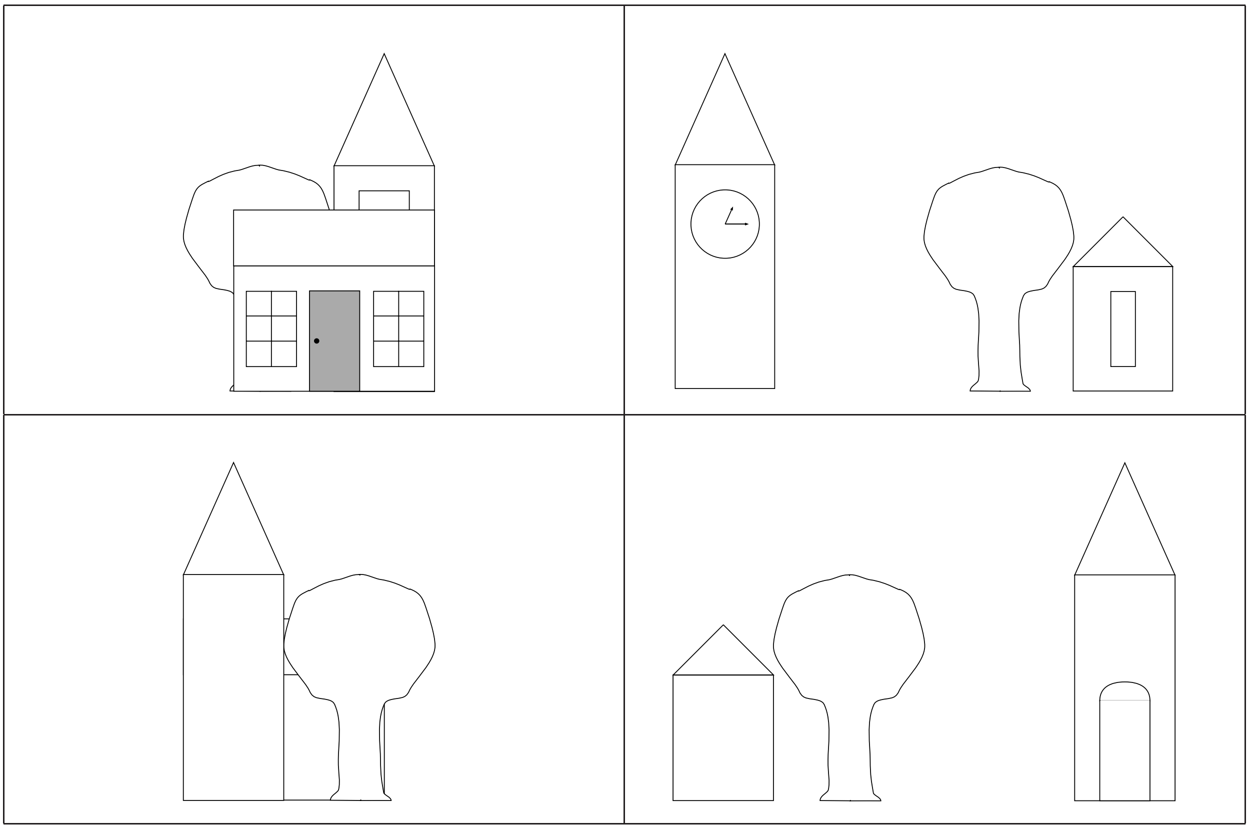


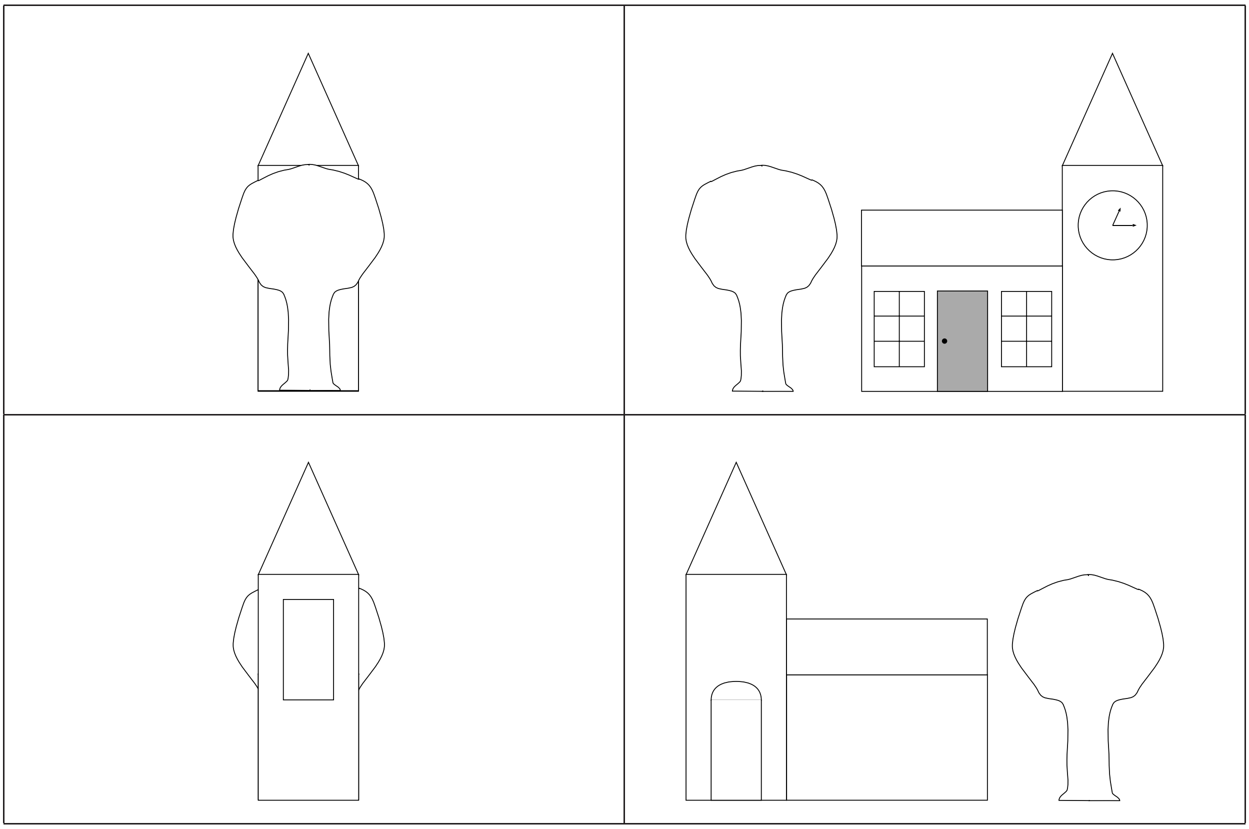


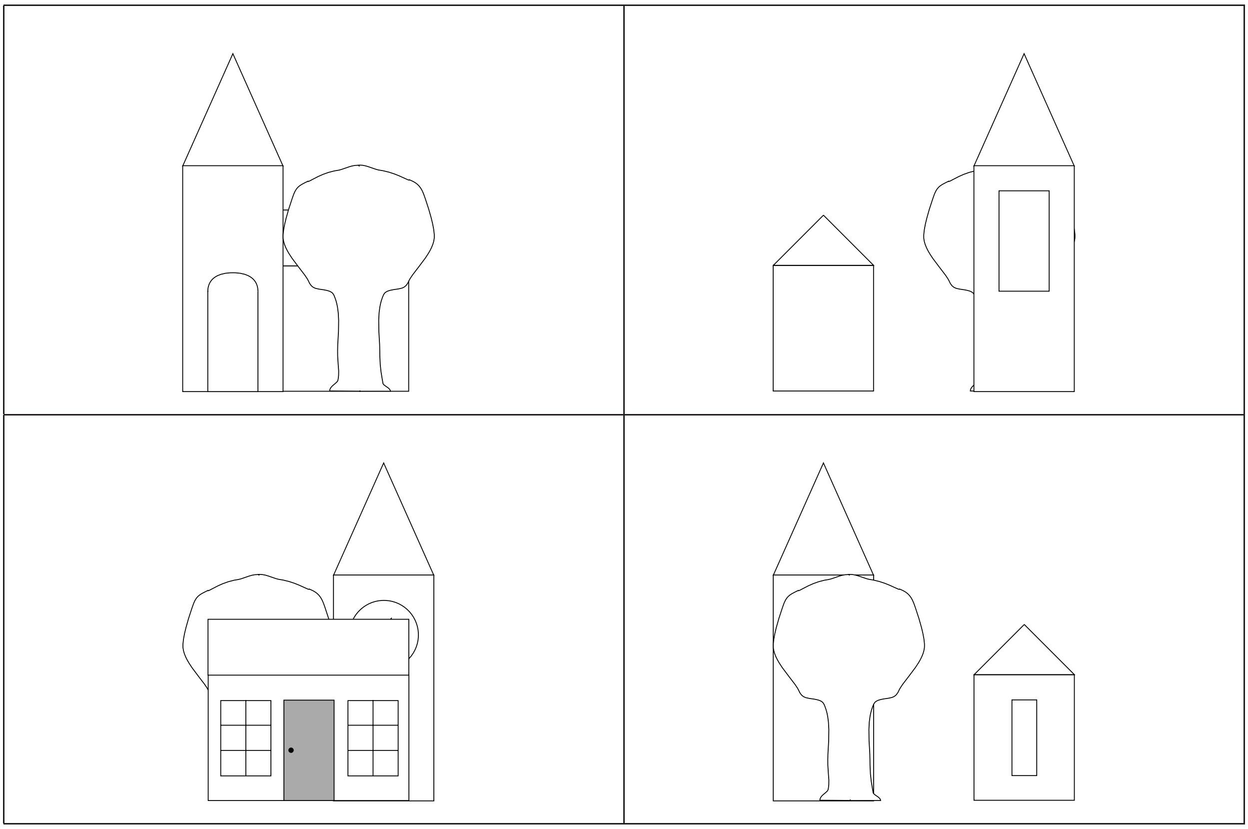


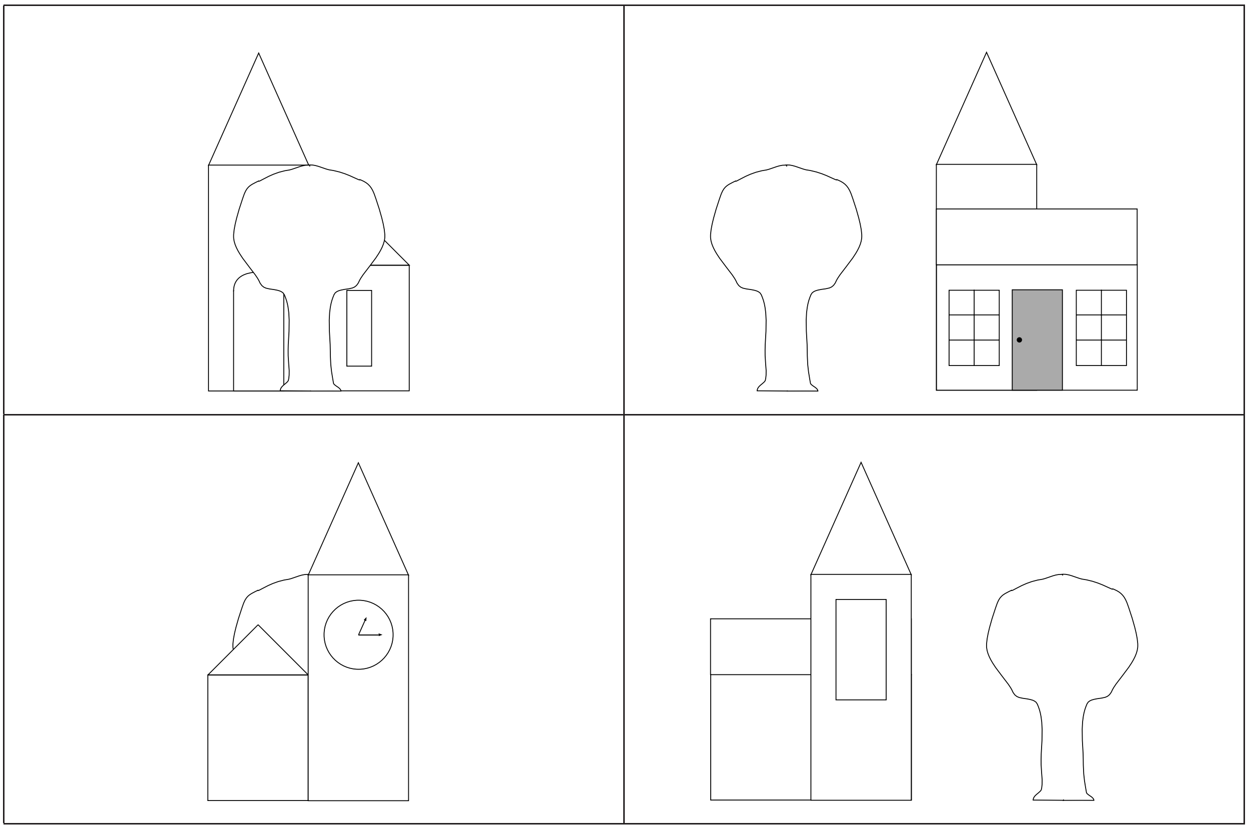


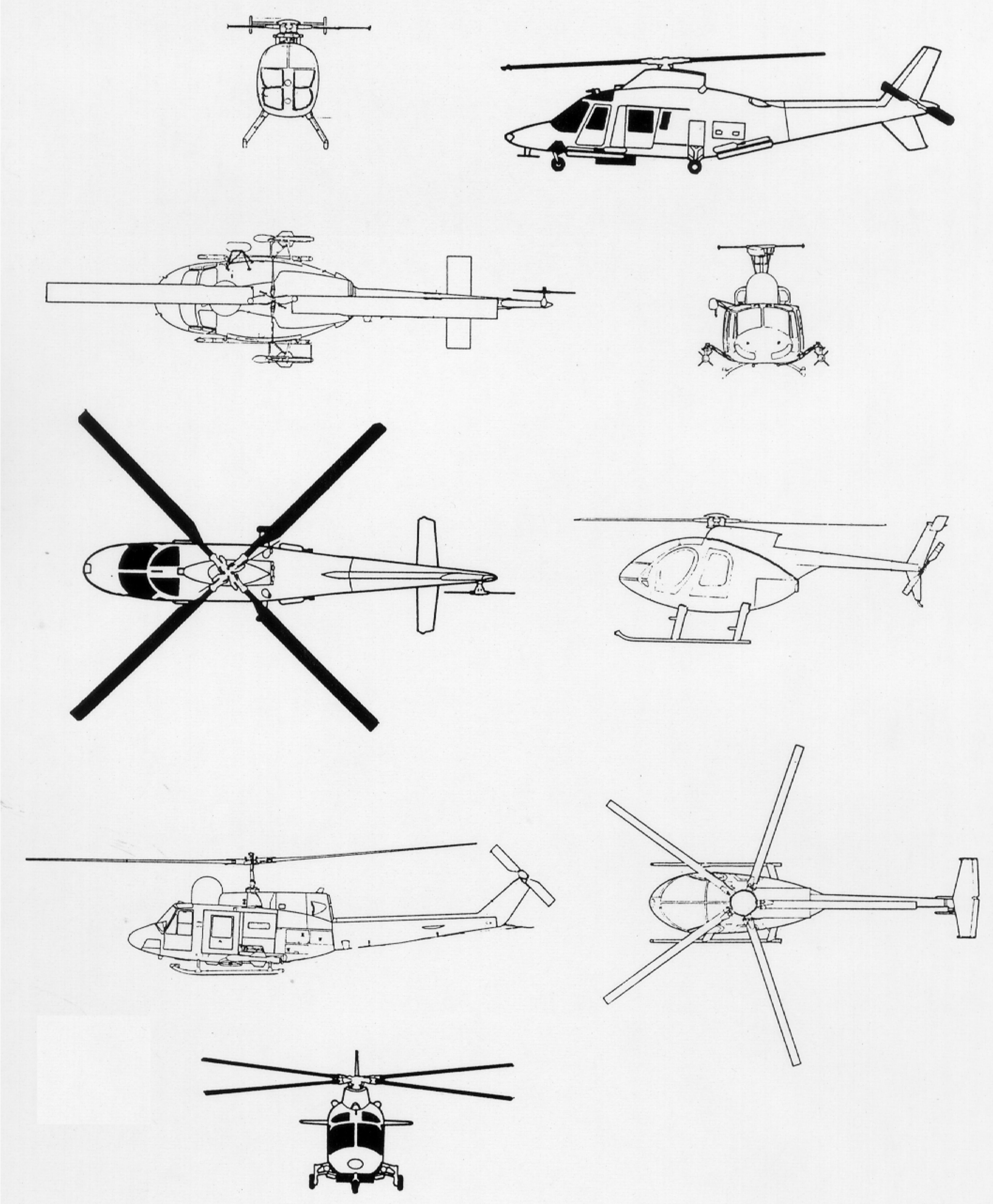


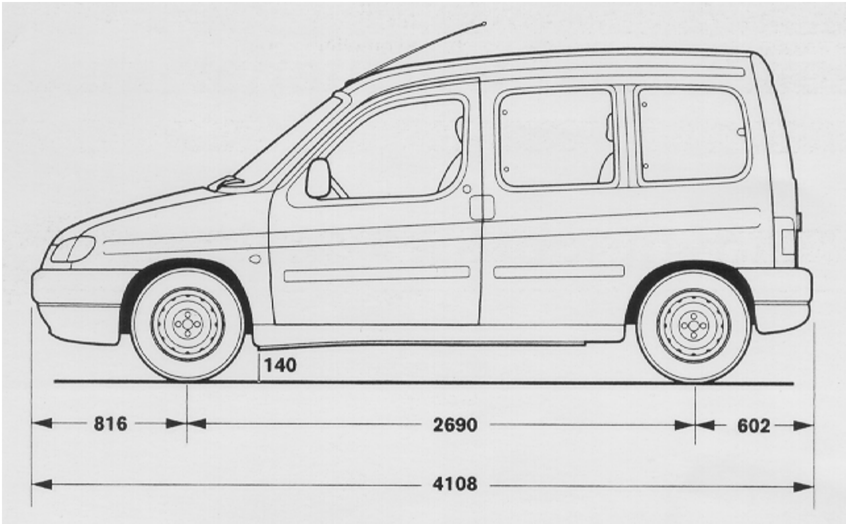


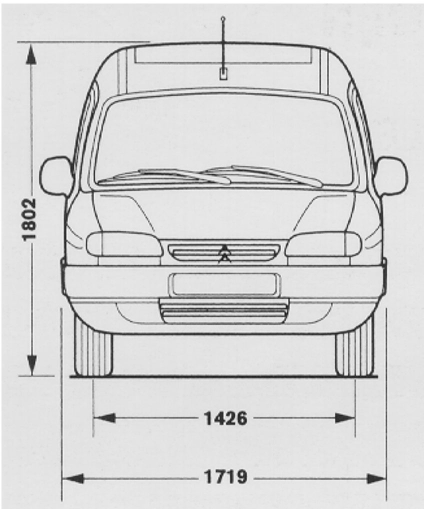


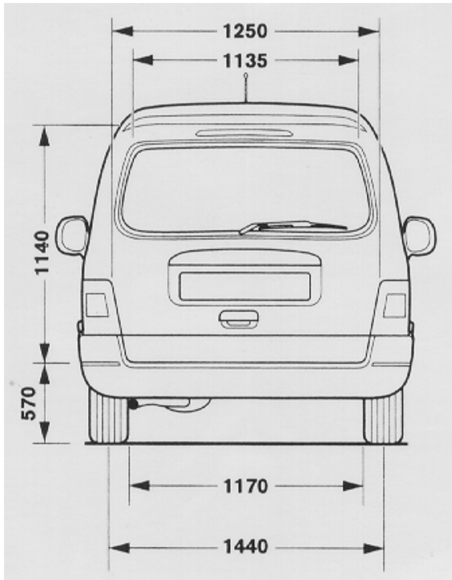


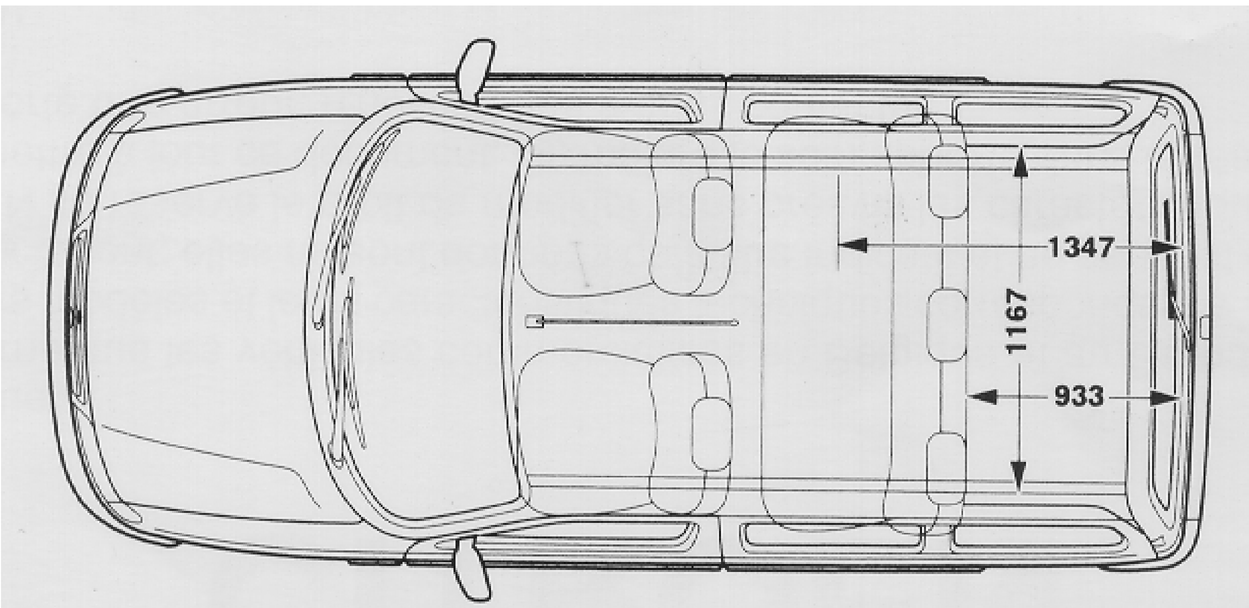


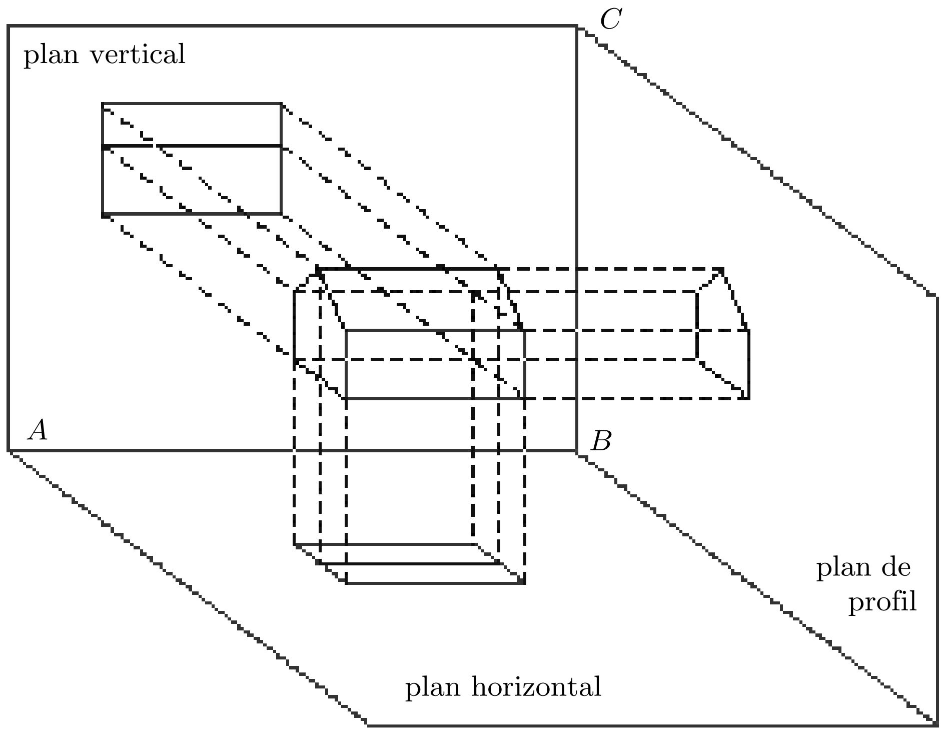



140
816
2690
602
4108

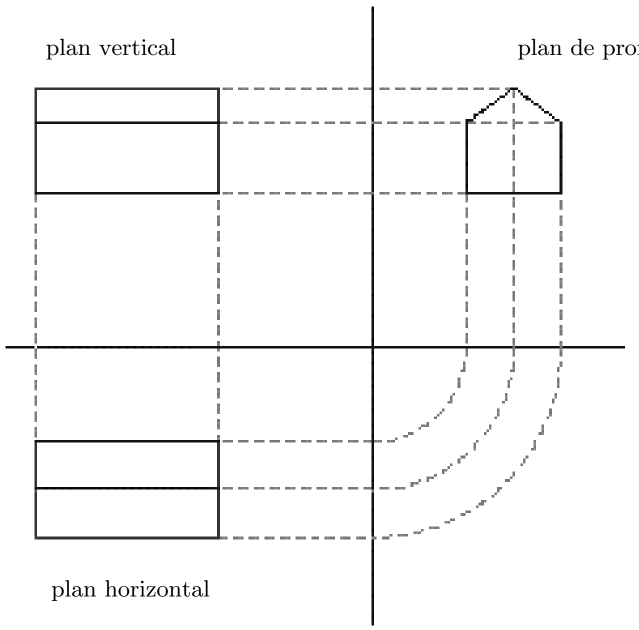

1802
1426
1719


1250
1135
1140
570
1170
1440

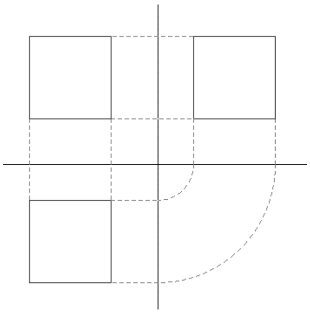

1347
1167
933


plan vertical
C
A
B
plan de
profil
plan horizontal

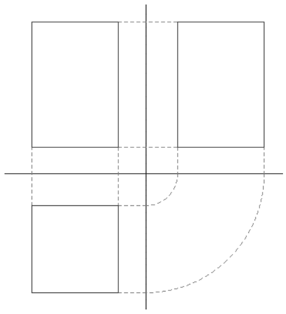
(a)


plan vertical
plan de profil
plan horizontal

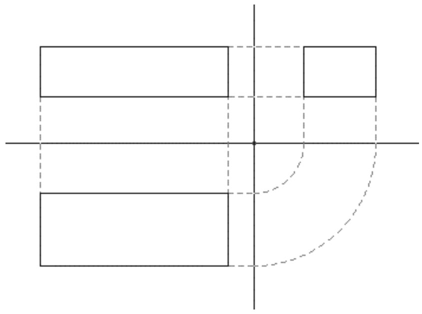
(b)



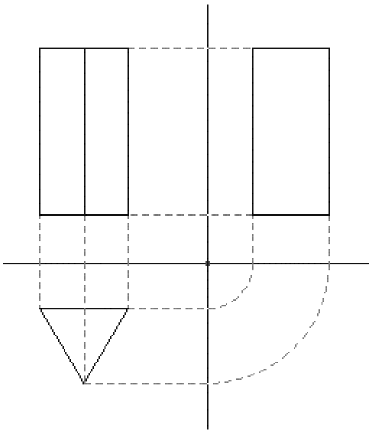
(a)



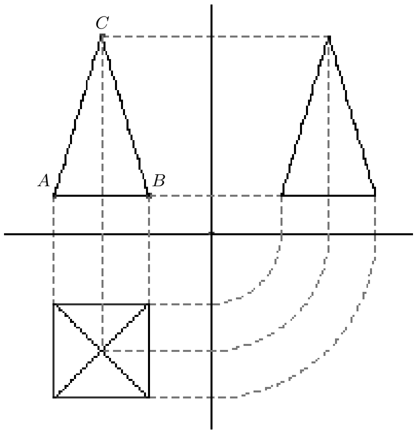
(b)



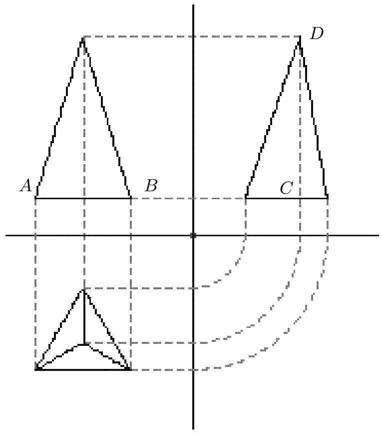
(c)



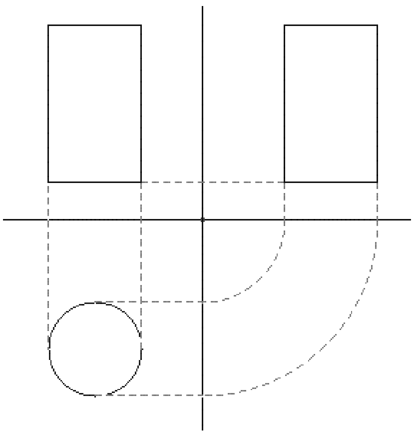
(d)



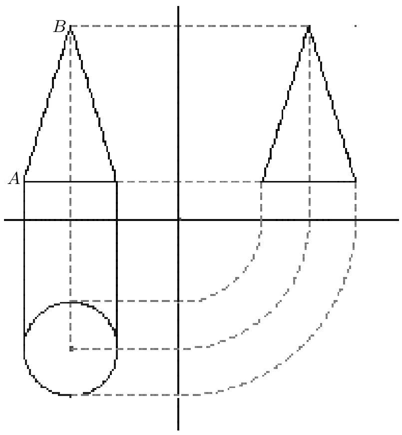
(e)



(f)

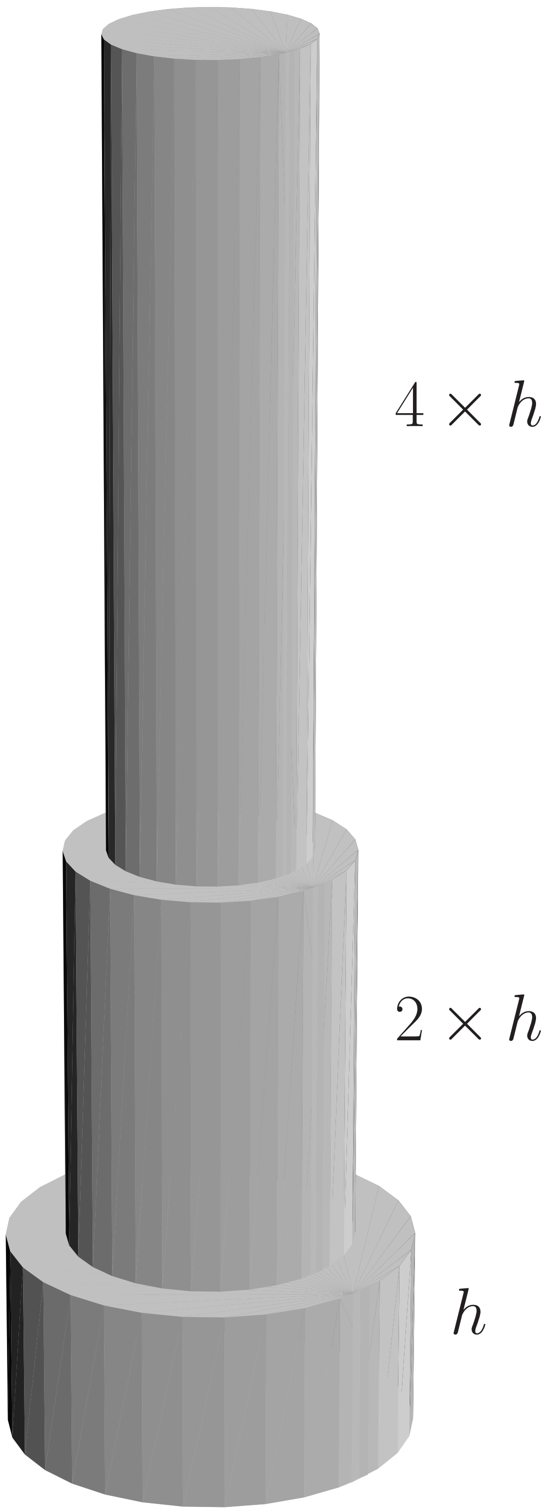


(g)

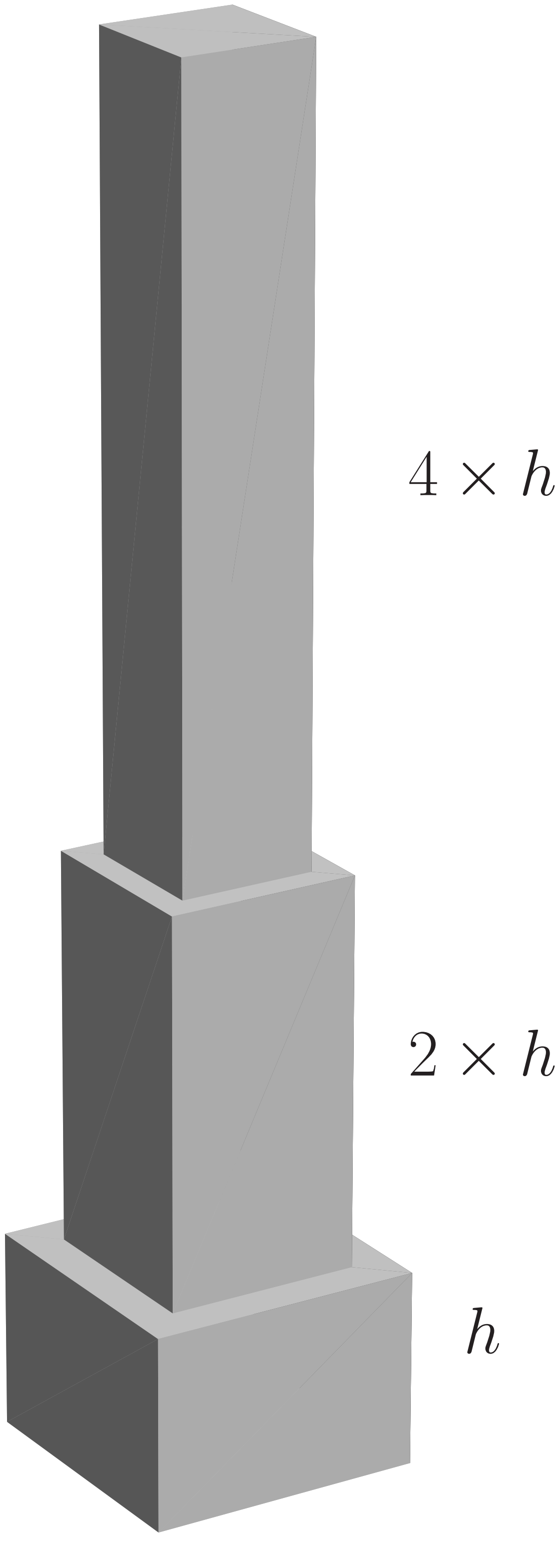


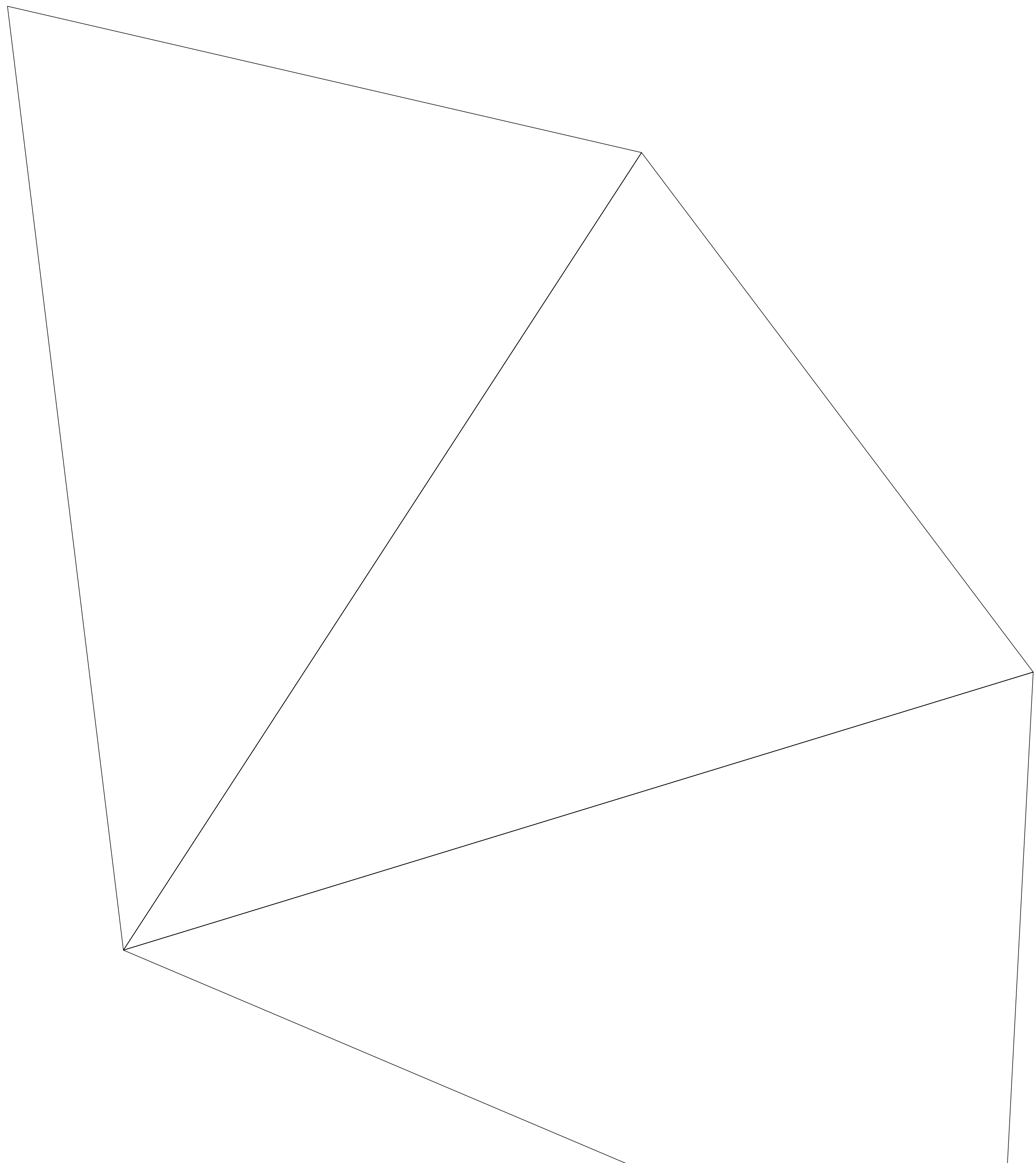
(h)

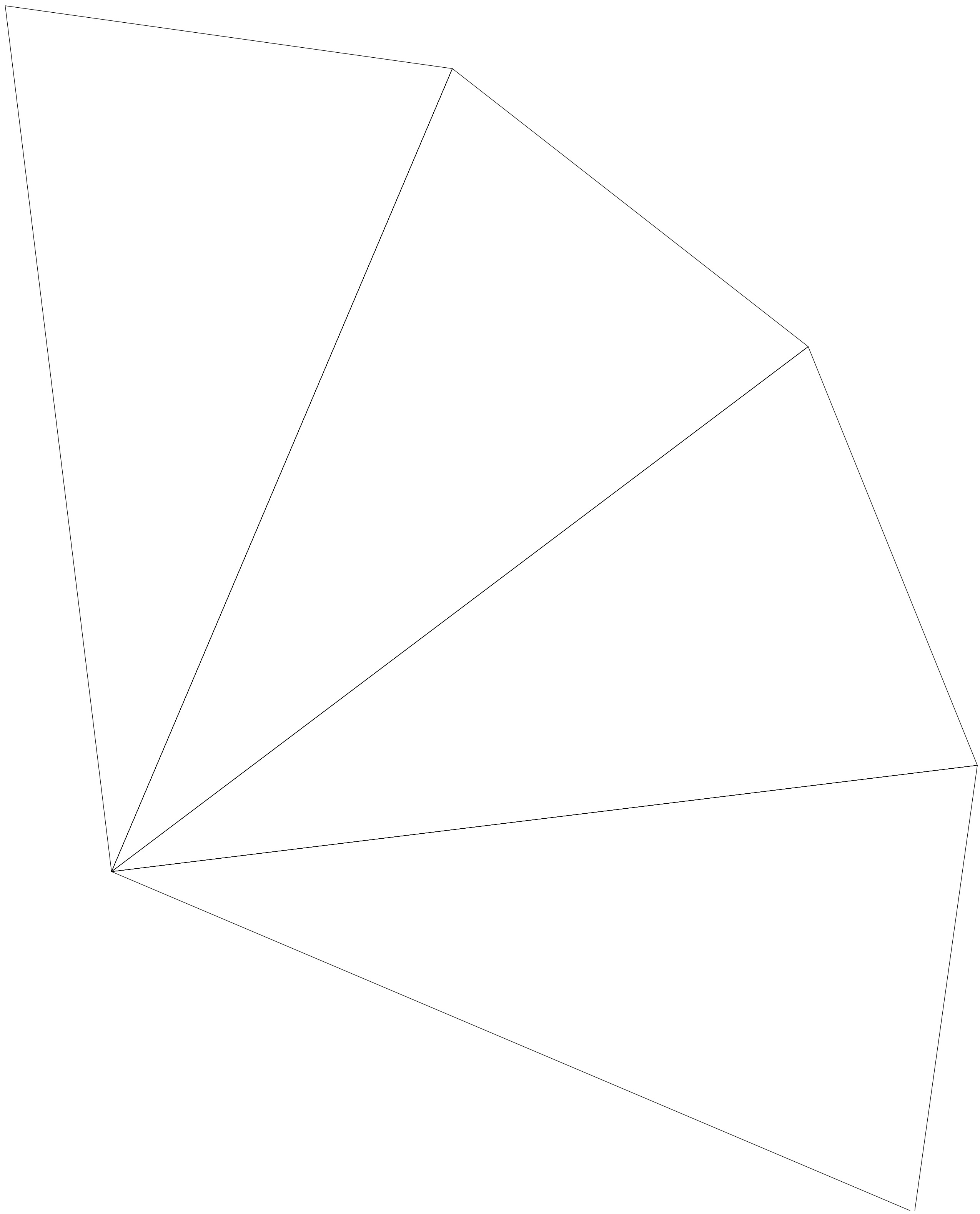
Trois cylindres de même volume

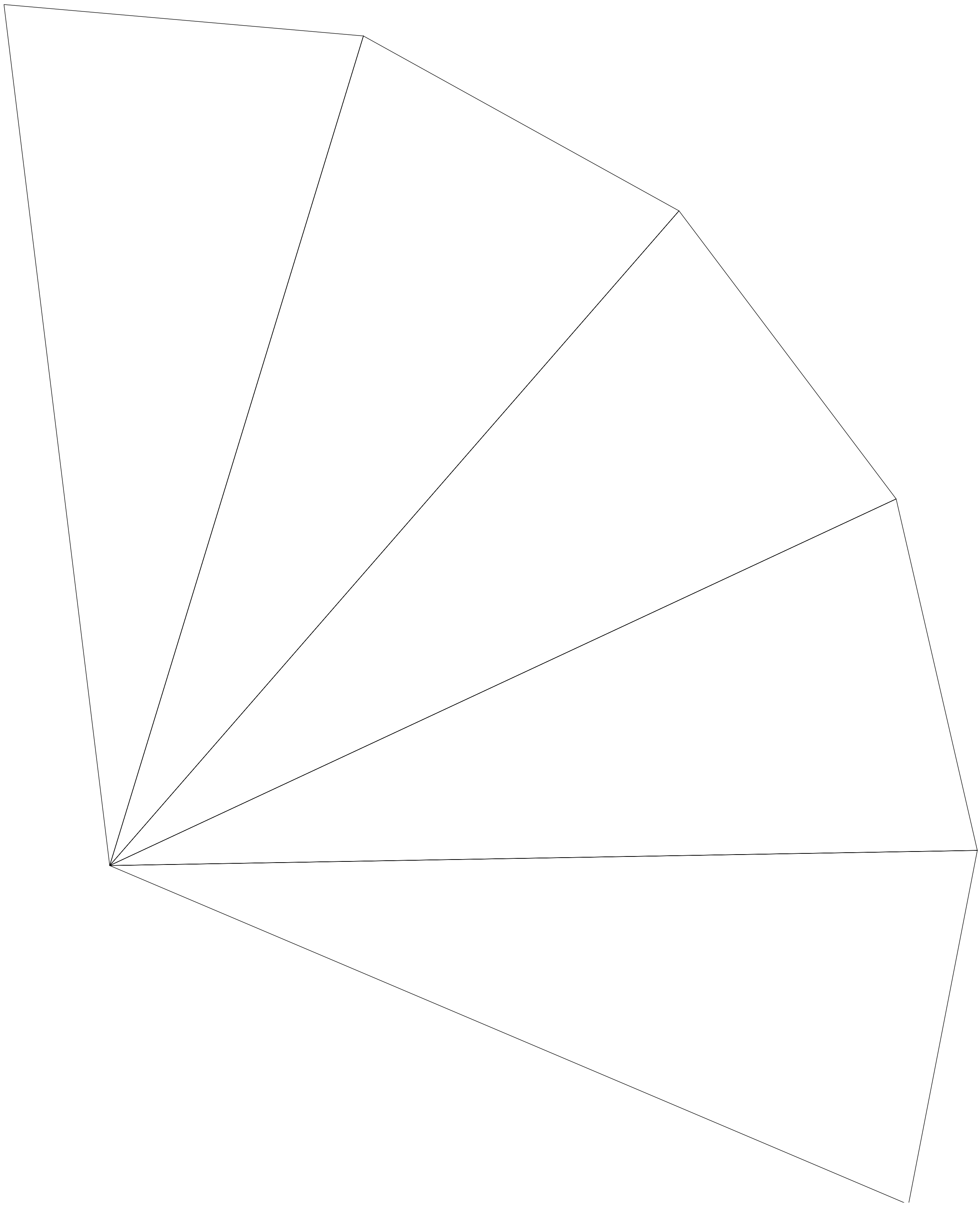


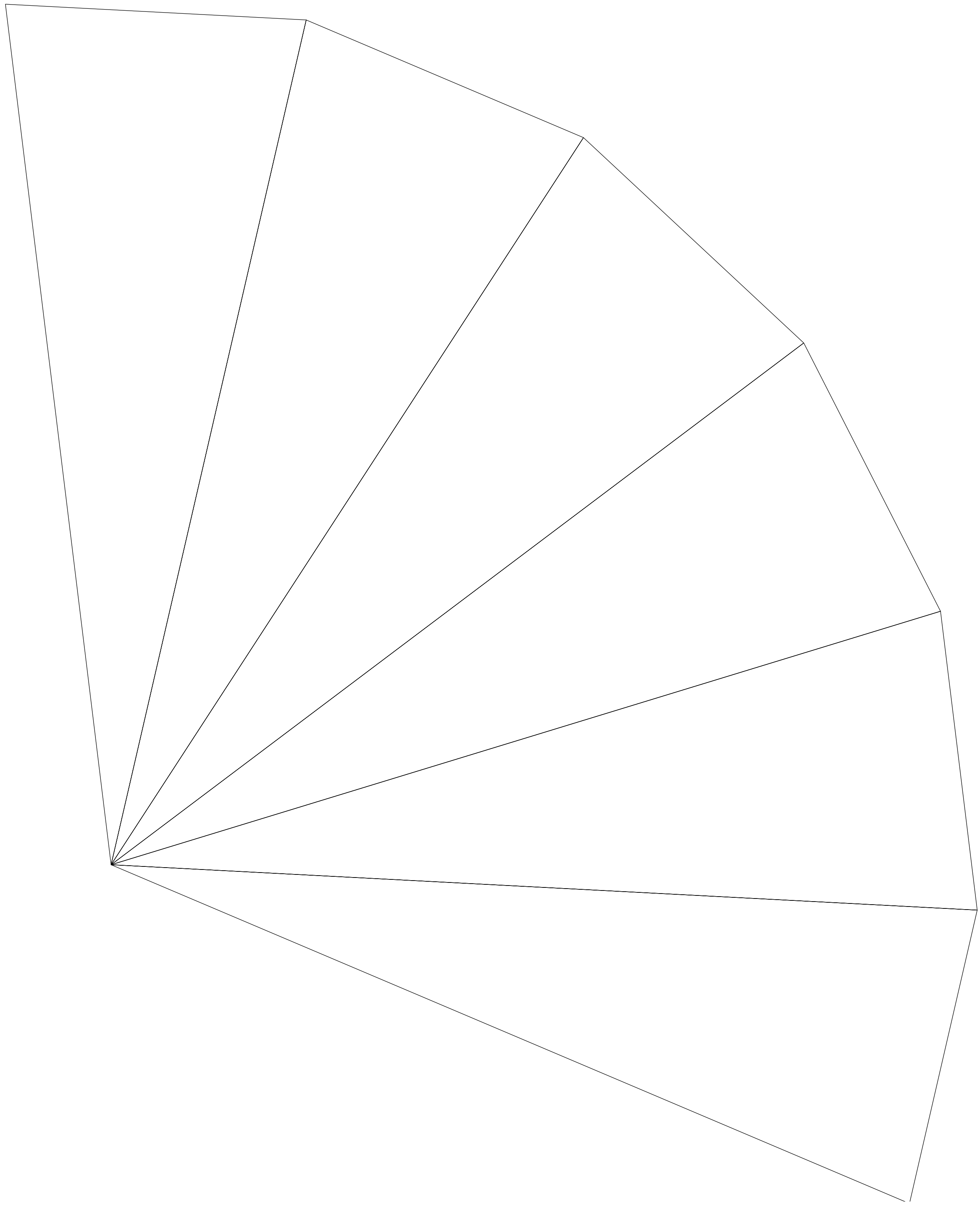
Trois prismes à base carrée de même volume

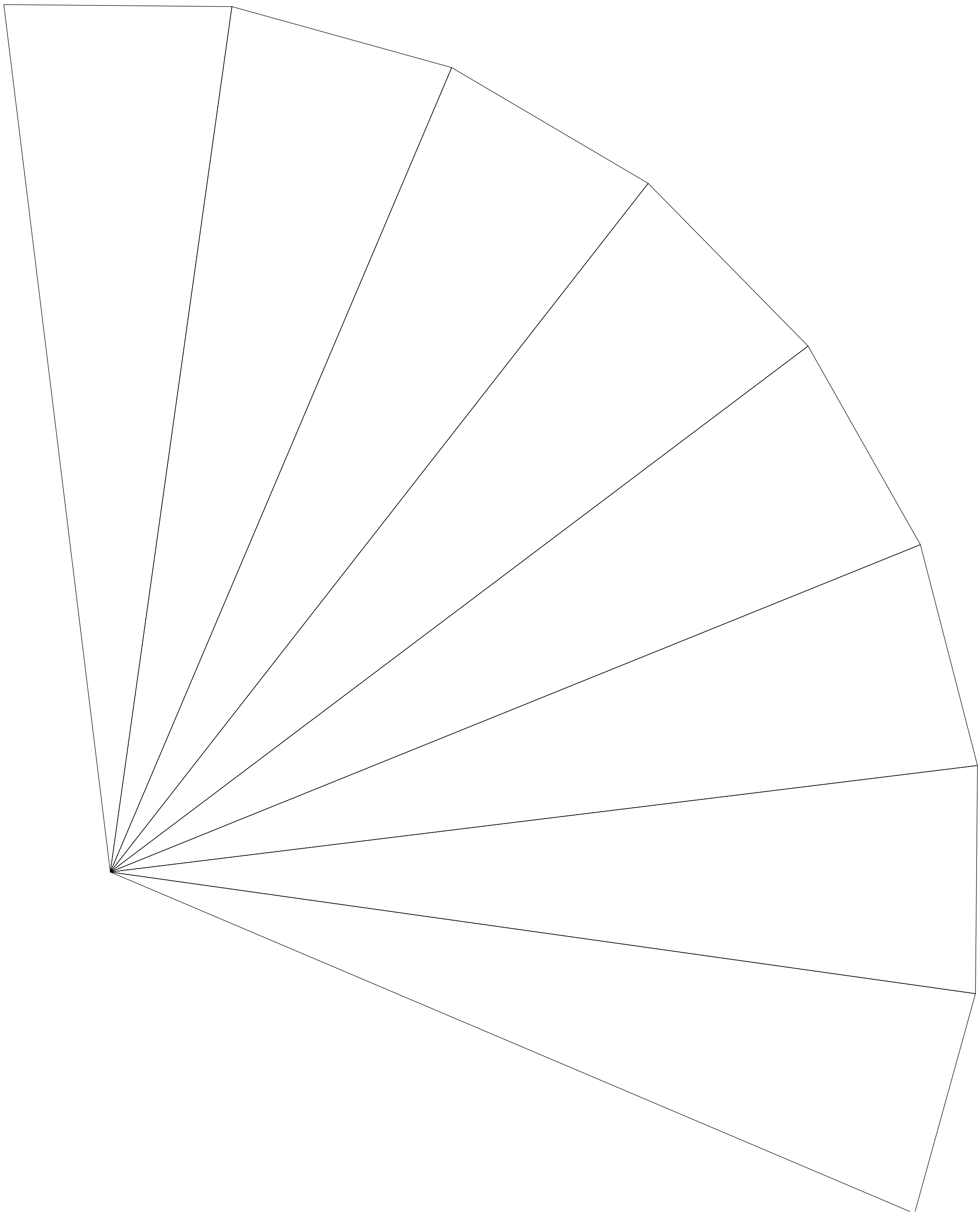


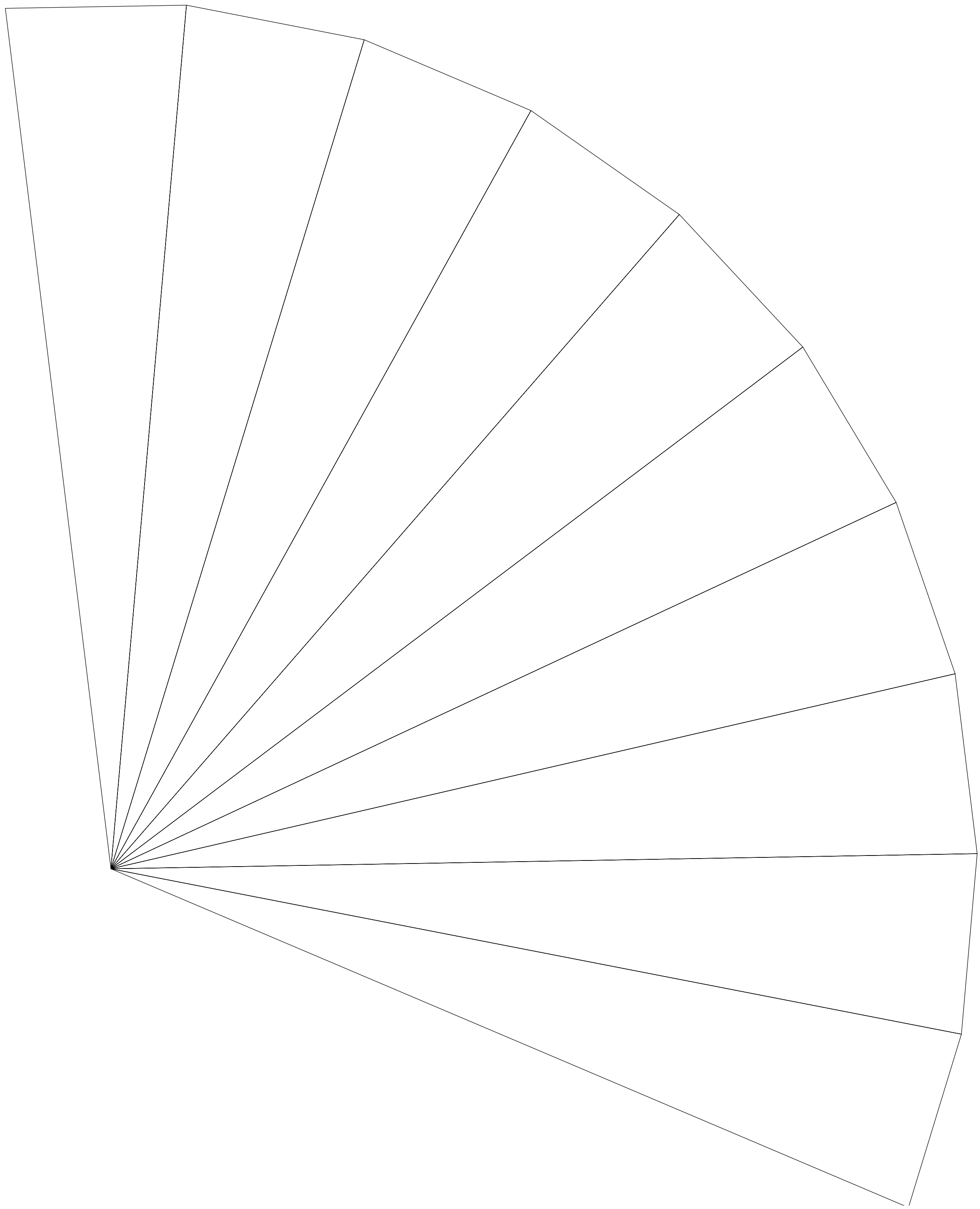


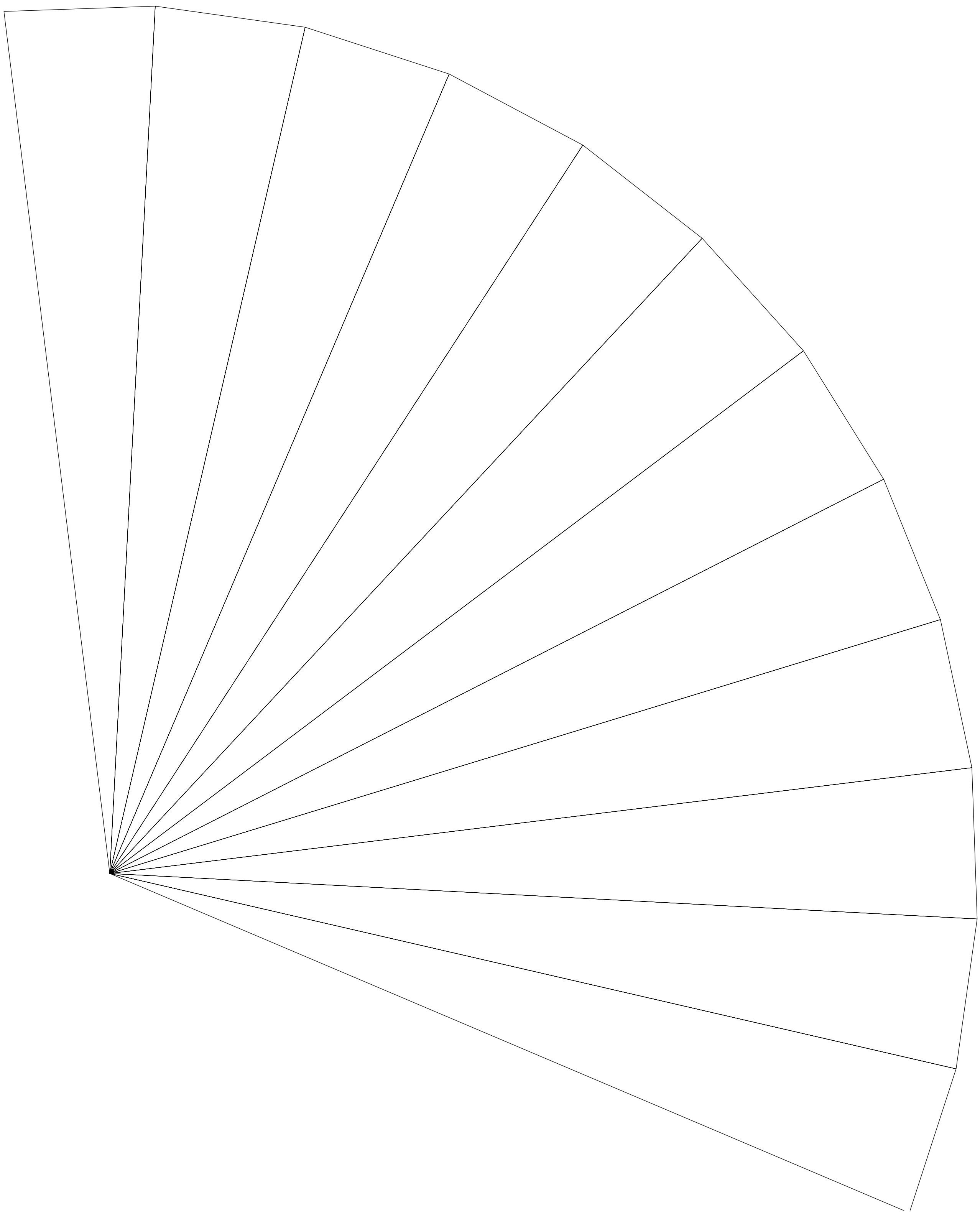


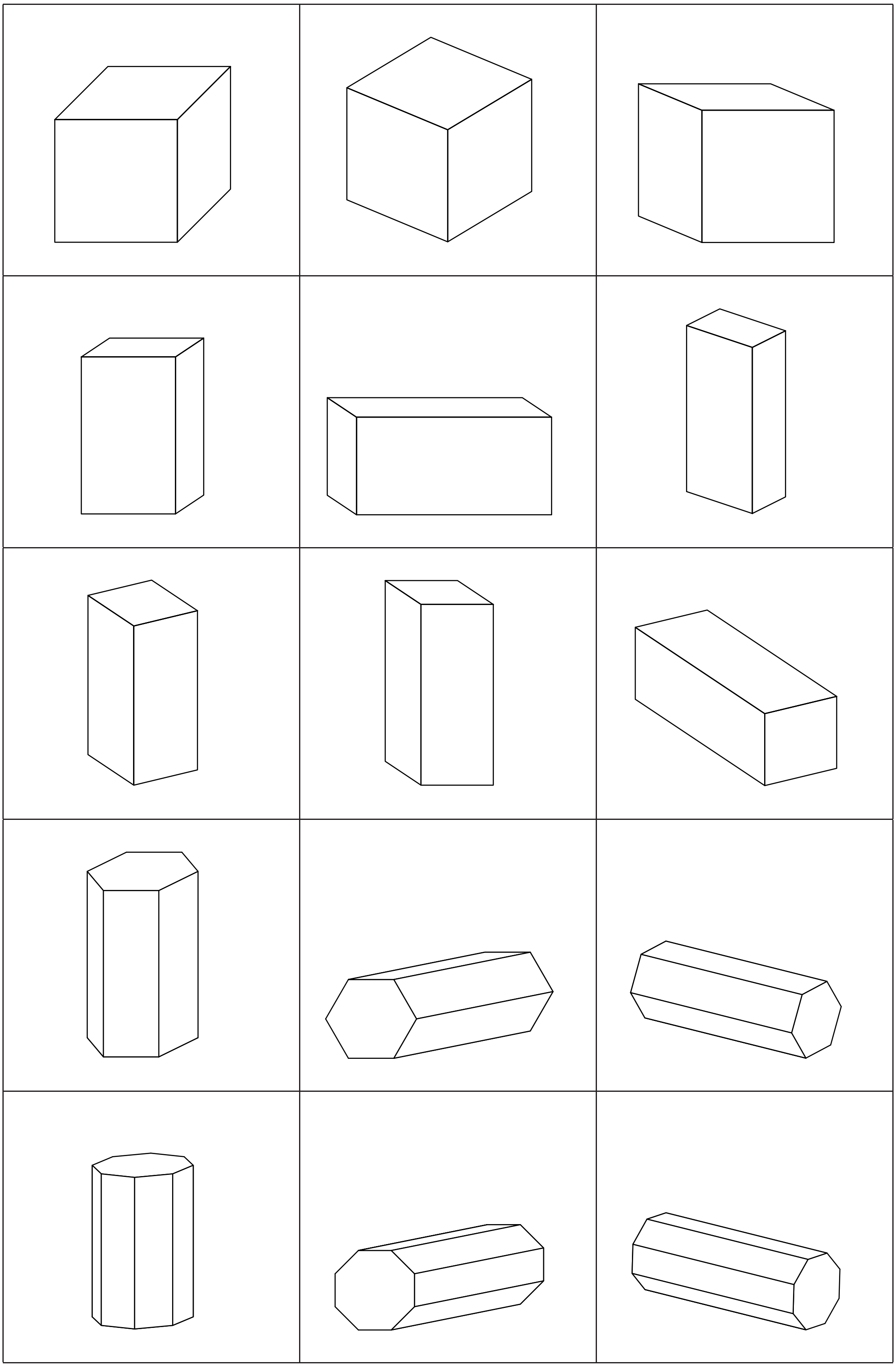


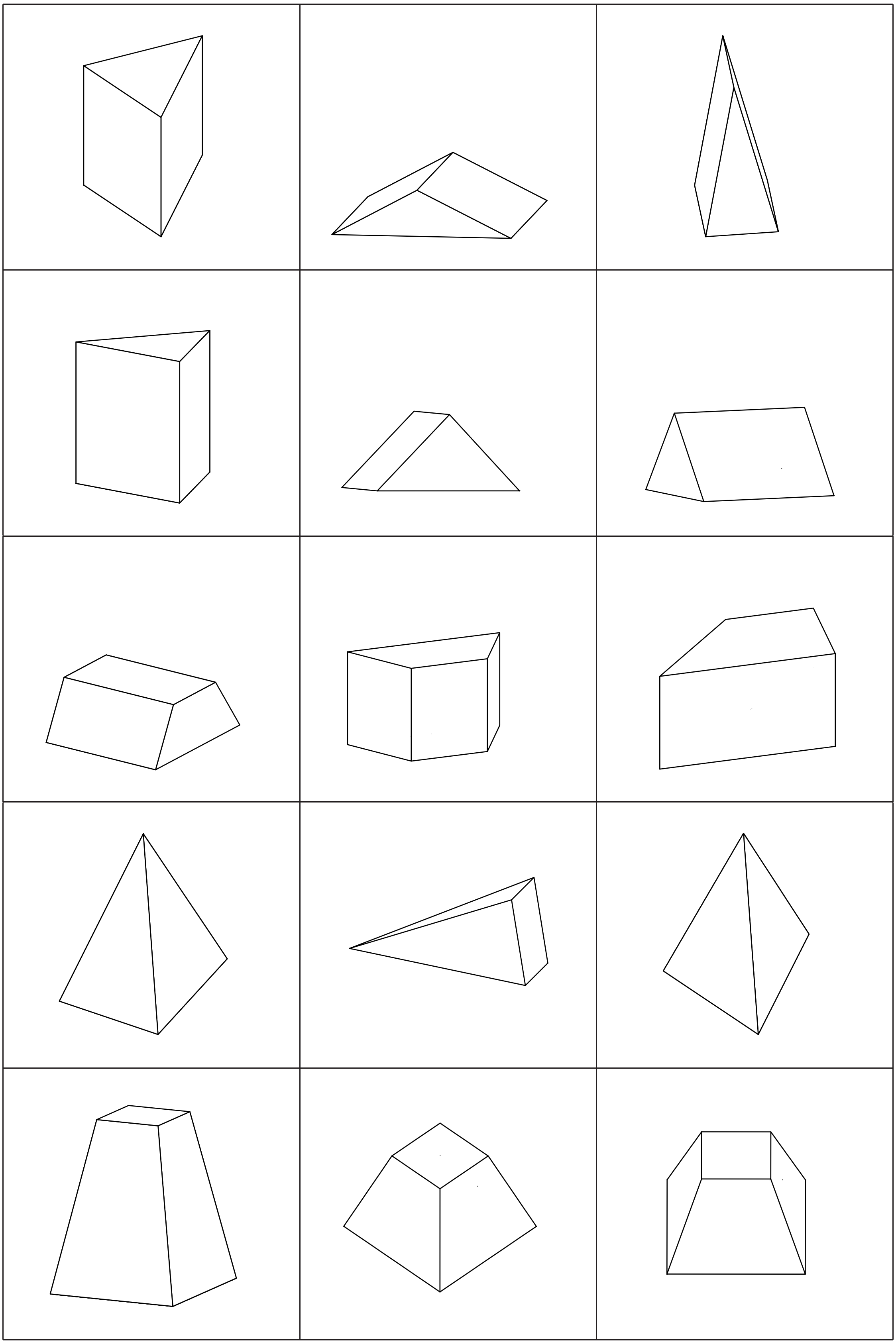


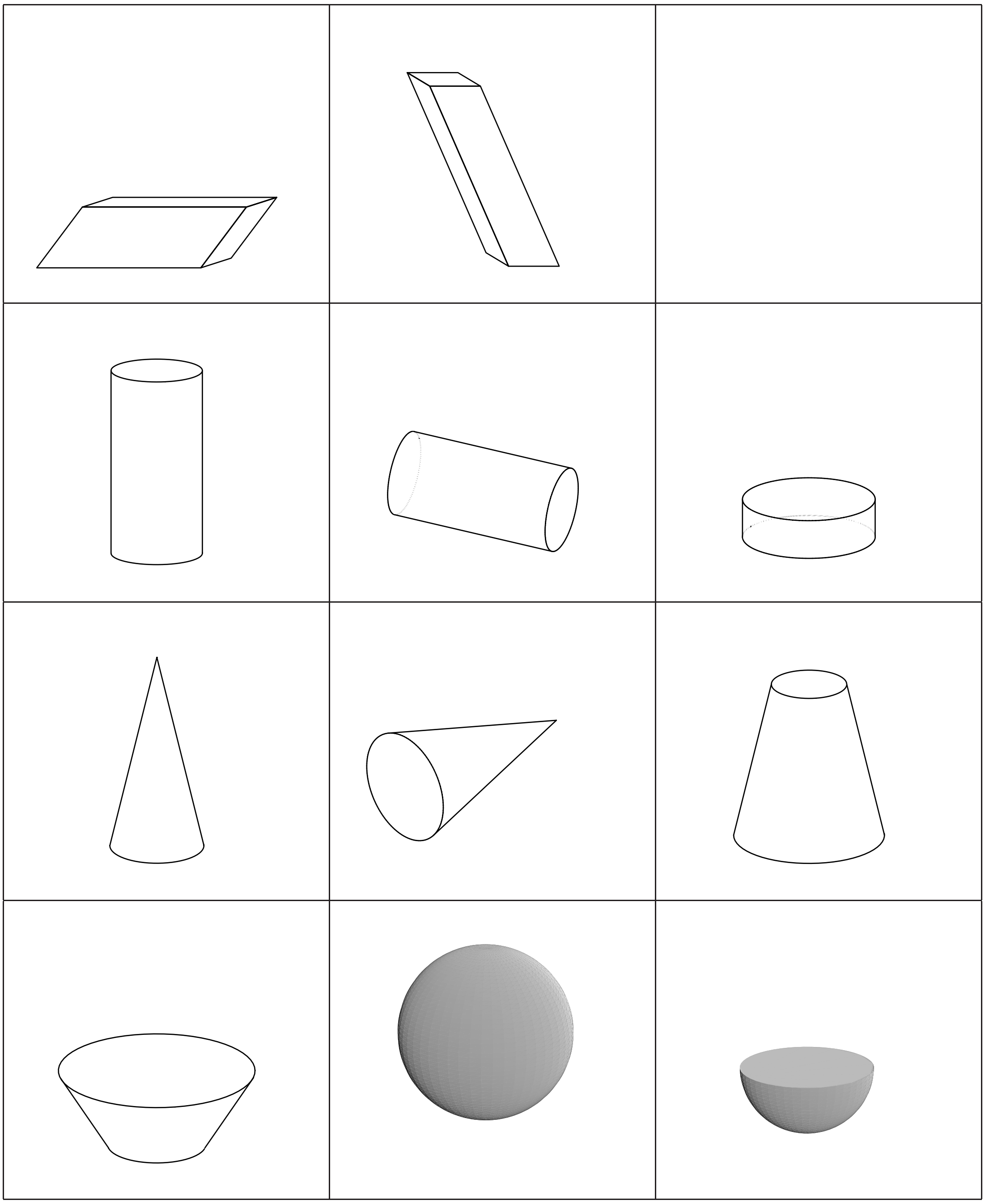


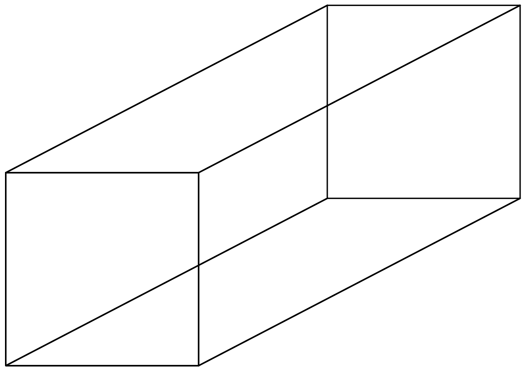




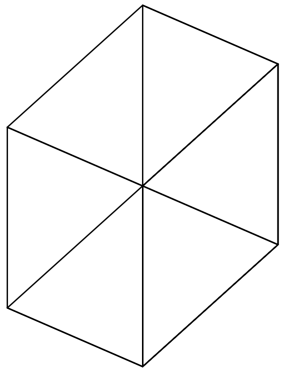




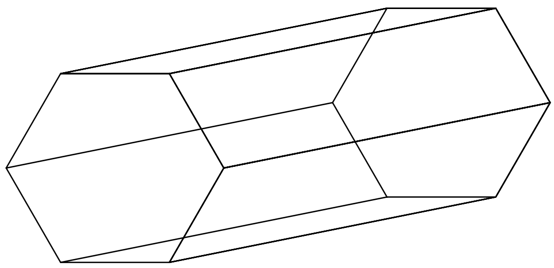




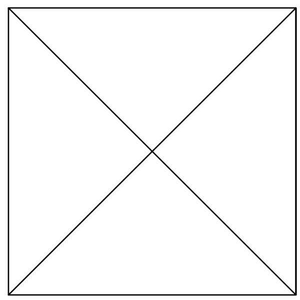
(a)



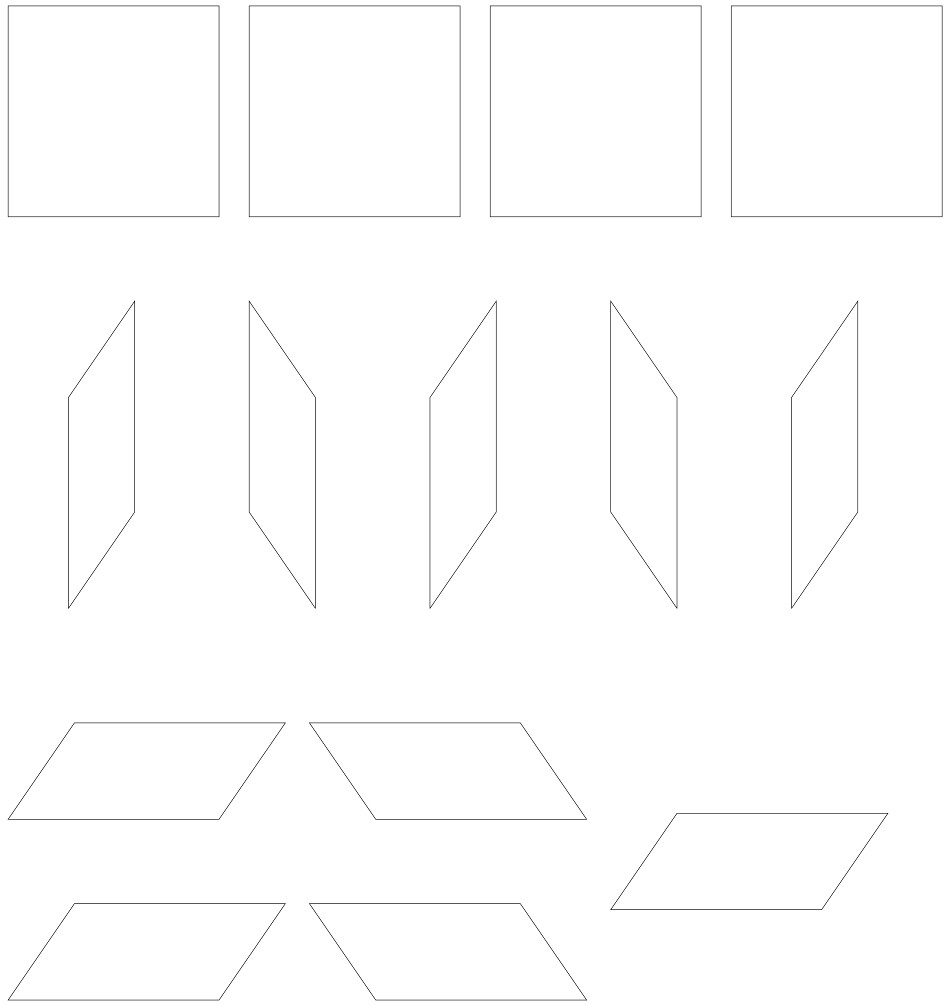
(b)



(c)



(d)



Tu disposes de carrés et des paralélogramme découpés dans des feuilles de couleur. Dans chacun des cas suivants, représente un cube en assemblant les quadrilatères qui conviennent. Chacune des représentations doit présenter une face frontale.

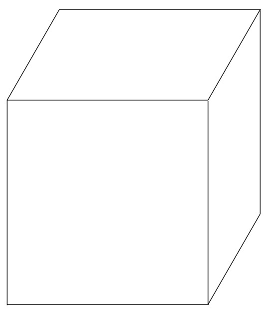
(a) L'observateur se trouve au dessus et à droite.

(b) L'observateur se trouve en dessous et à gauche.

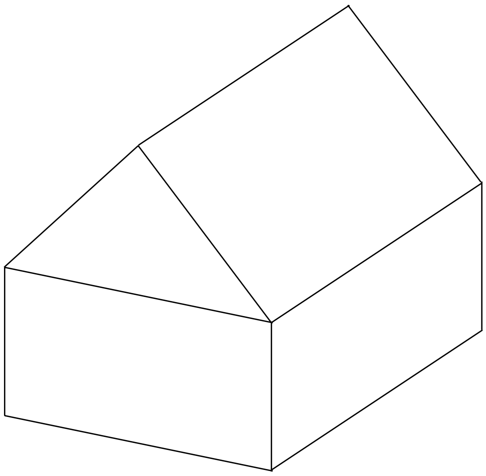
(c) L'observateur se trouve au dessus et à gauche.

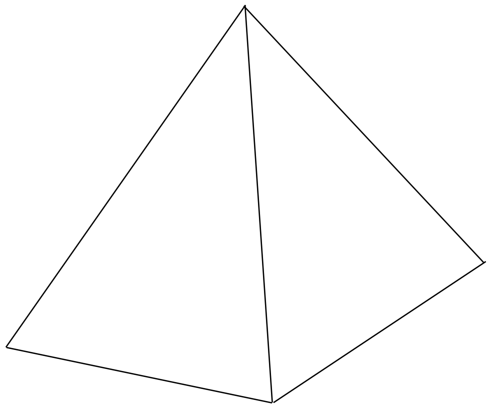
(d) L'observateur se trouve en dessous et à droite.

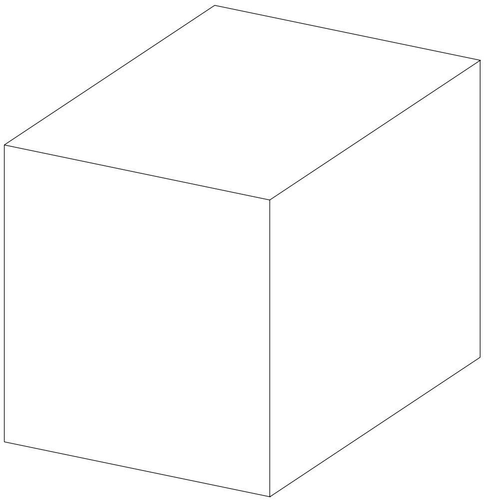
Dessiner un second cube, accolé au cube déjà dessiné, puis un troisième accolé à l'un des deux premiers et ainsi de suite, de manière à former un réseau d'au moins cinq cubes qui ne soient pas tous alignés.

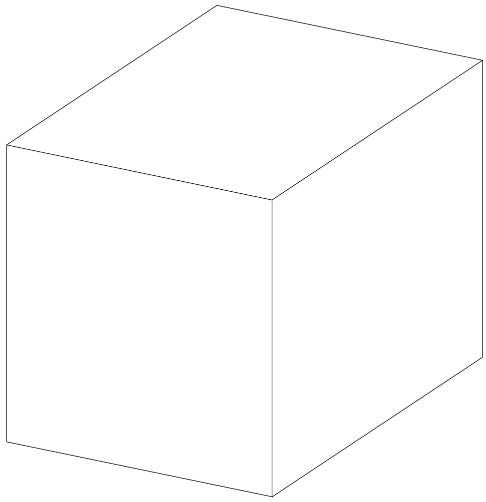


Reproduire la maison et la toiture pyramidale en utilisant les cubes déjà dessinés.

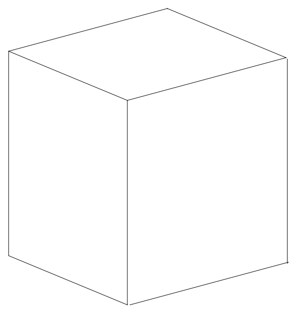


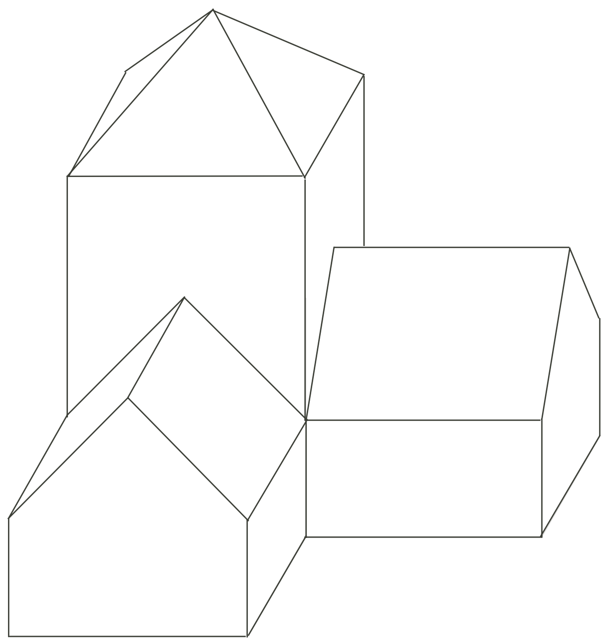


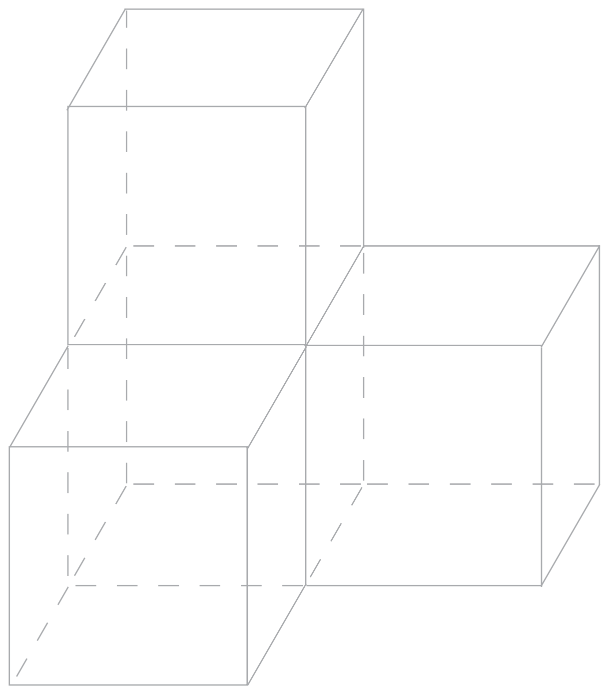




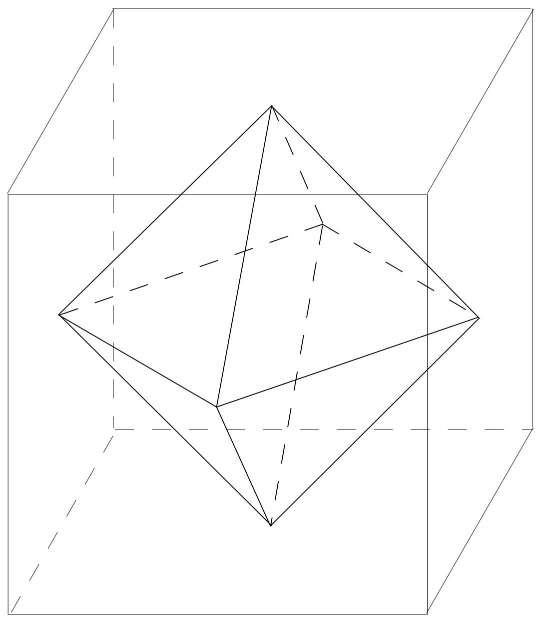
Réaliser un ensemble composé de maisons et de tours, en combinant le dessin d'un réseau de cubes, le repérage de milieux d'arêtes et de milieux de faces. L'ensemble doit comporter au moins cinq cubes chacun attaché à l'ensemble par une une face au moins.

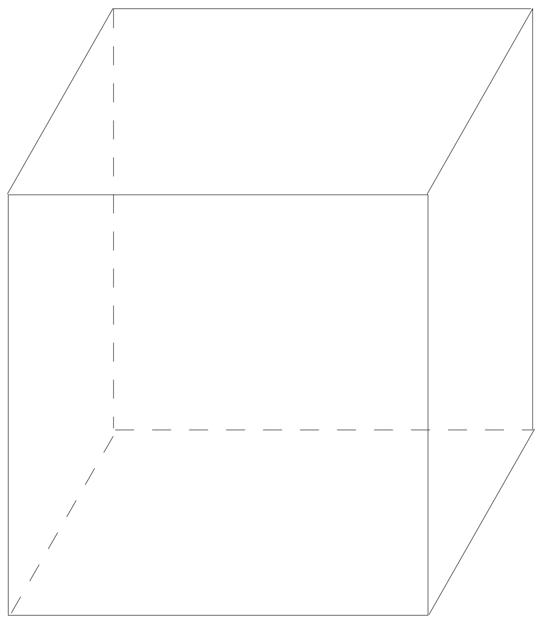




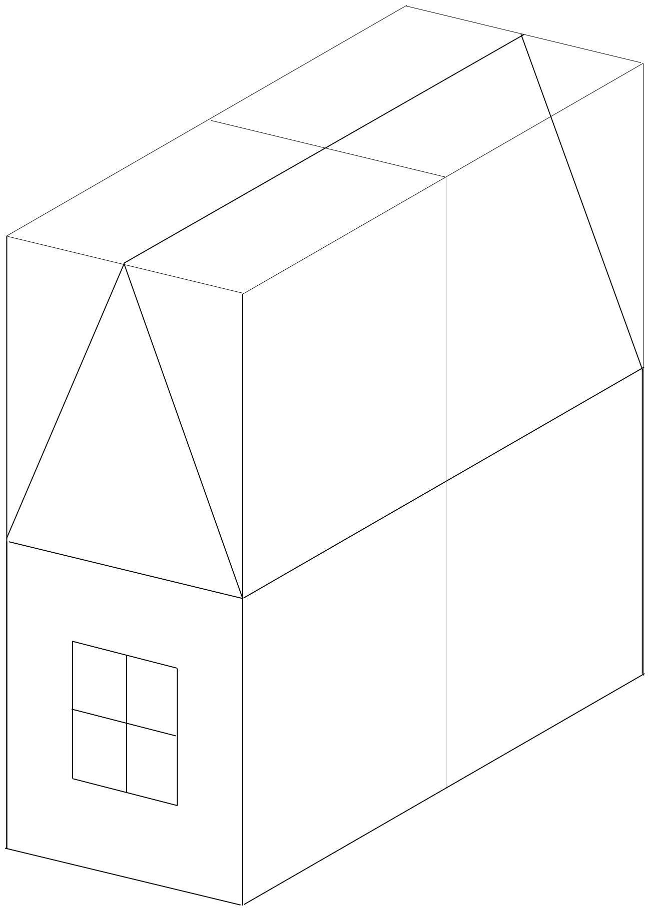


Reproduire l'octaèdre dans le cube du dessous. Laisser les constructions au crayon et repasser les arêtes à l'encre.

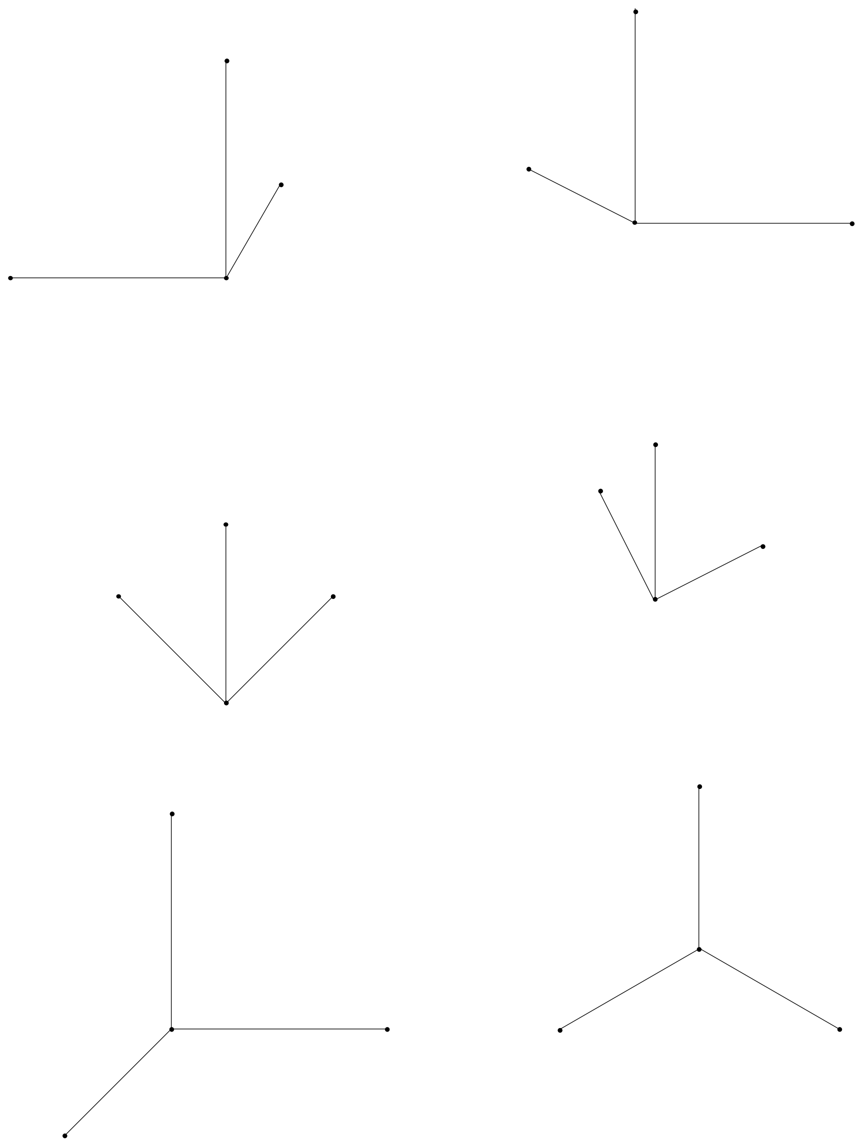




Dessiner une seconde maison identique, accolée à la première et située à droite. Placer une porte au milieu du mur de droite de cette seconde maison.

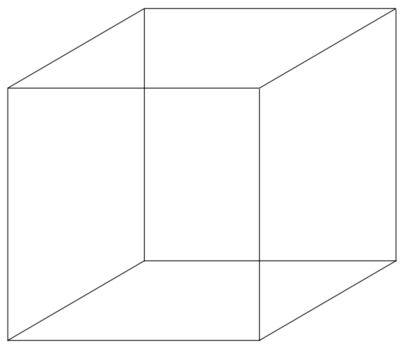


1. On a dessiné trois arêtes vues d'un cube dans diverses positions. Compléter les dessins en traçant toutes les arêtes vues.

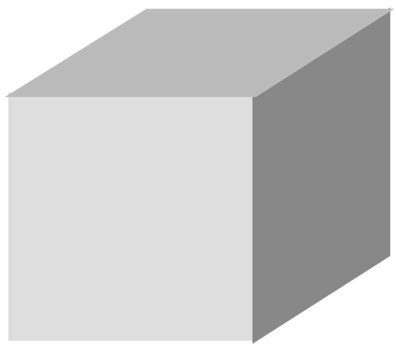


2. Colorier les trois faces vues avec des couleurs différentes.
3. Tracer ensuite en pointillés les arêtes cachées

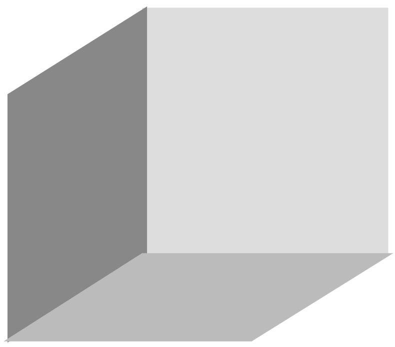
Le dessin (a) montre toutes les arêtes d'un cube. À partir de ce dessin, on peut imaginer soit que le cube est vu du dessus (dessin (b)), soit qu'il est vu du dessous (dessin (c)). Sur les dessins (b) et (c), tracer en pointillés les arêtes cachées.



(a)

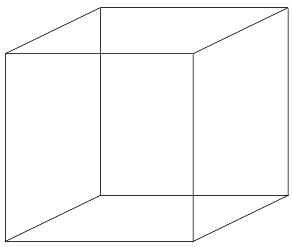
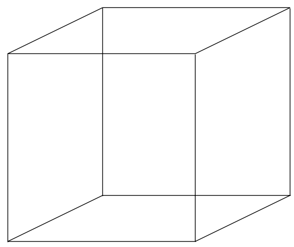


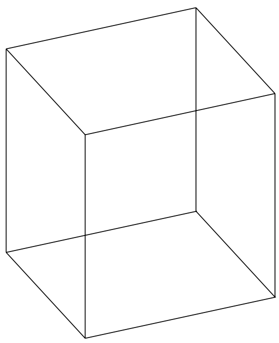
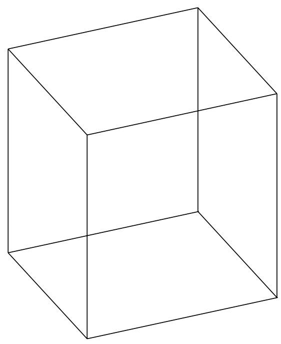
(b)

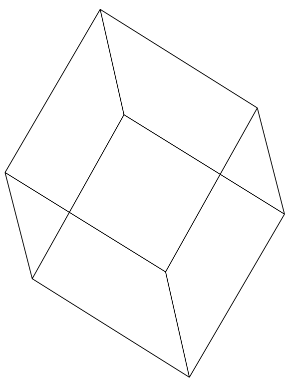
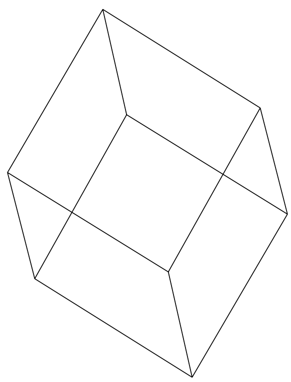


(c)

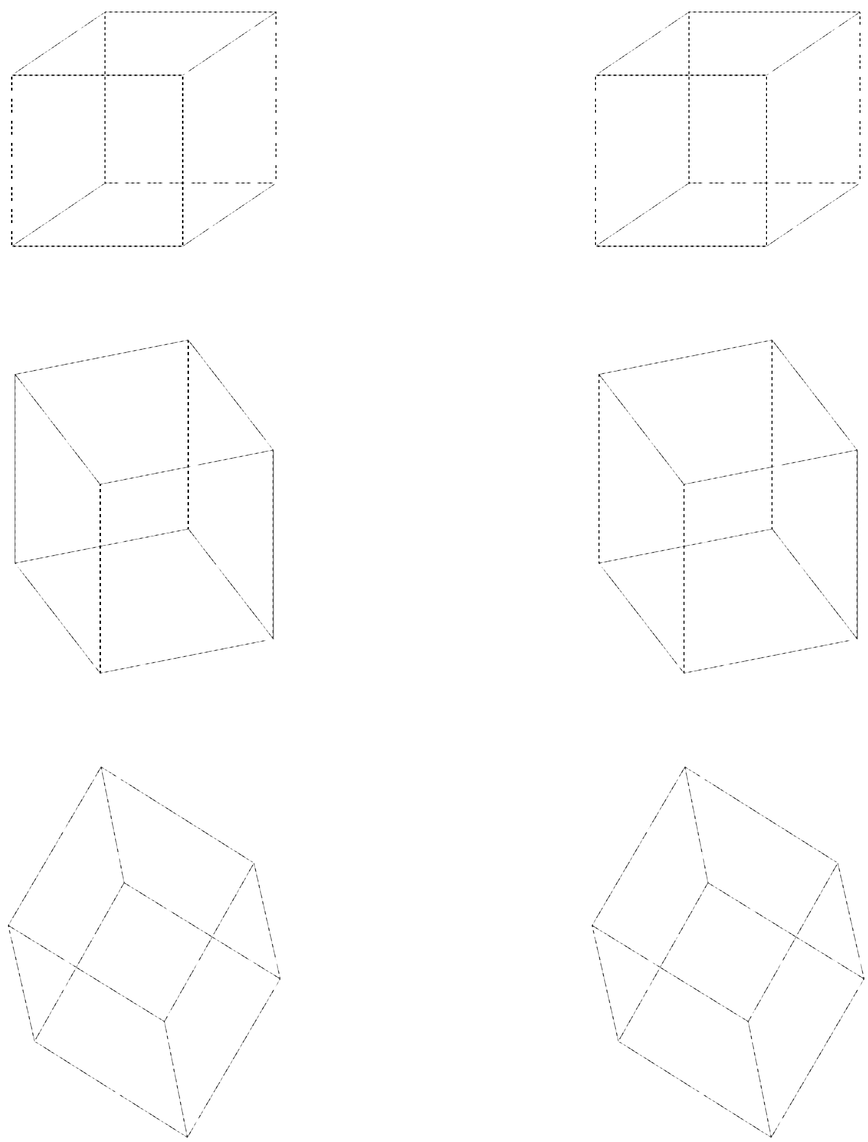
Les dessins de cubes ci-dessous vont deux par deux. Colorier trois faces de façon à ce qu'ils soient vus de manières différentes.

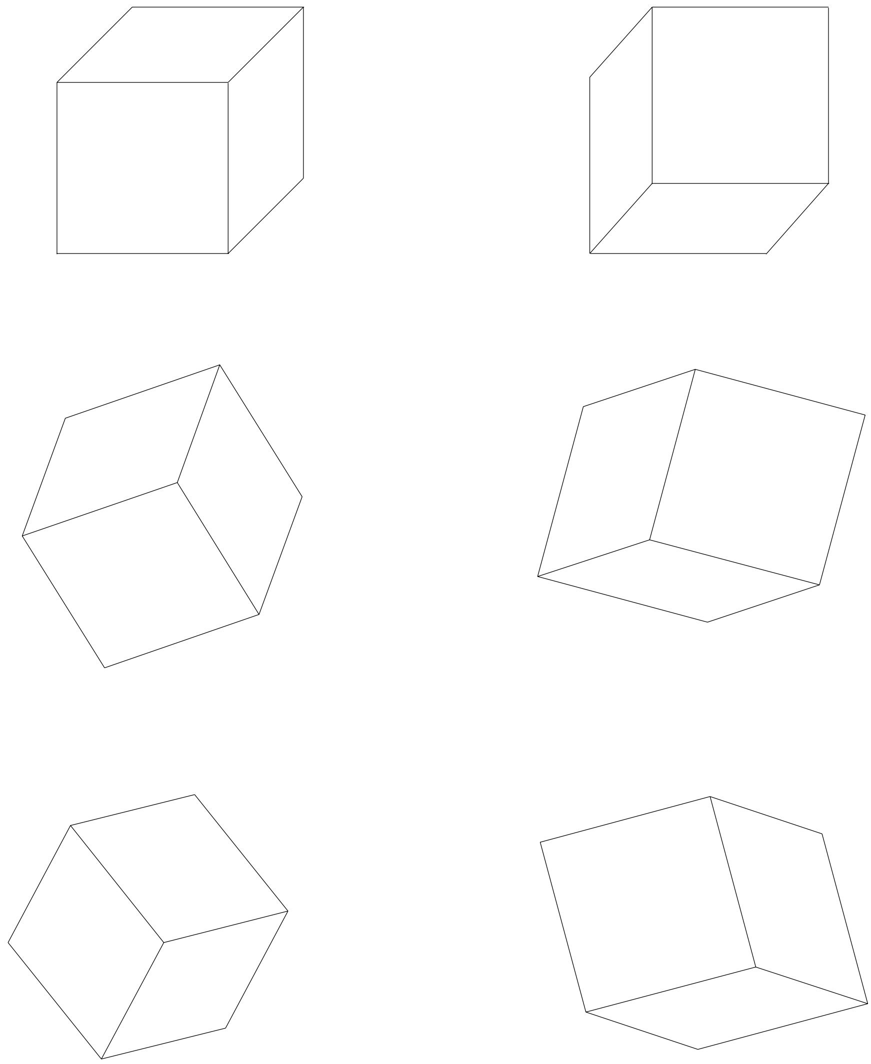



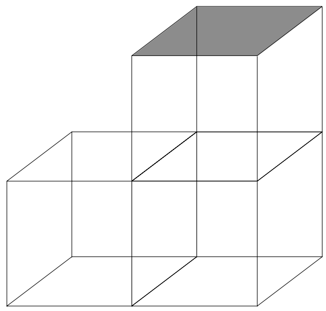
Les dessins de cubes ci-dessous vont deux par deux. Repasser en trait continu (épais) les arêtes vues et en trait pointillé (épais) les arêtes cachées de façon à ce qu'ils soient vus de manières différentes.

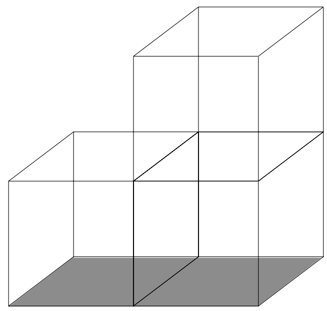


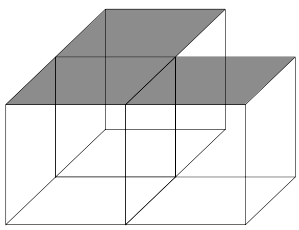
Tracer en pointillés les arêtes cachées.

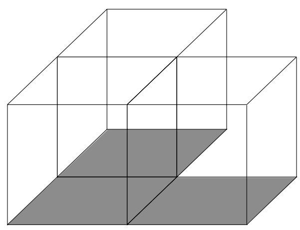


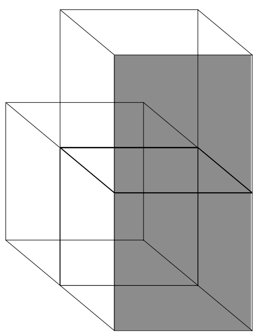
Poursuivre la mise en couleur des parties vues. Utiliser une même couleur pour les faces (ou parties de faces) parallèles.

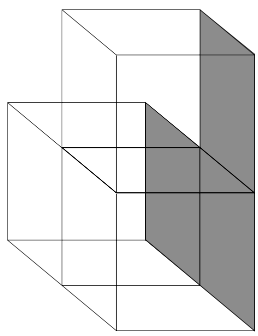




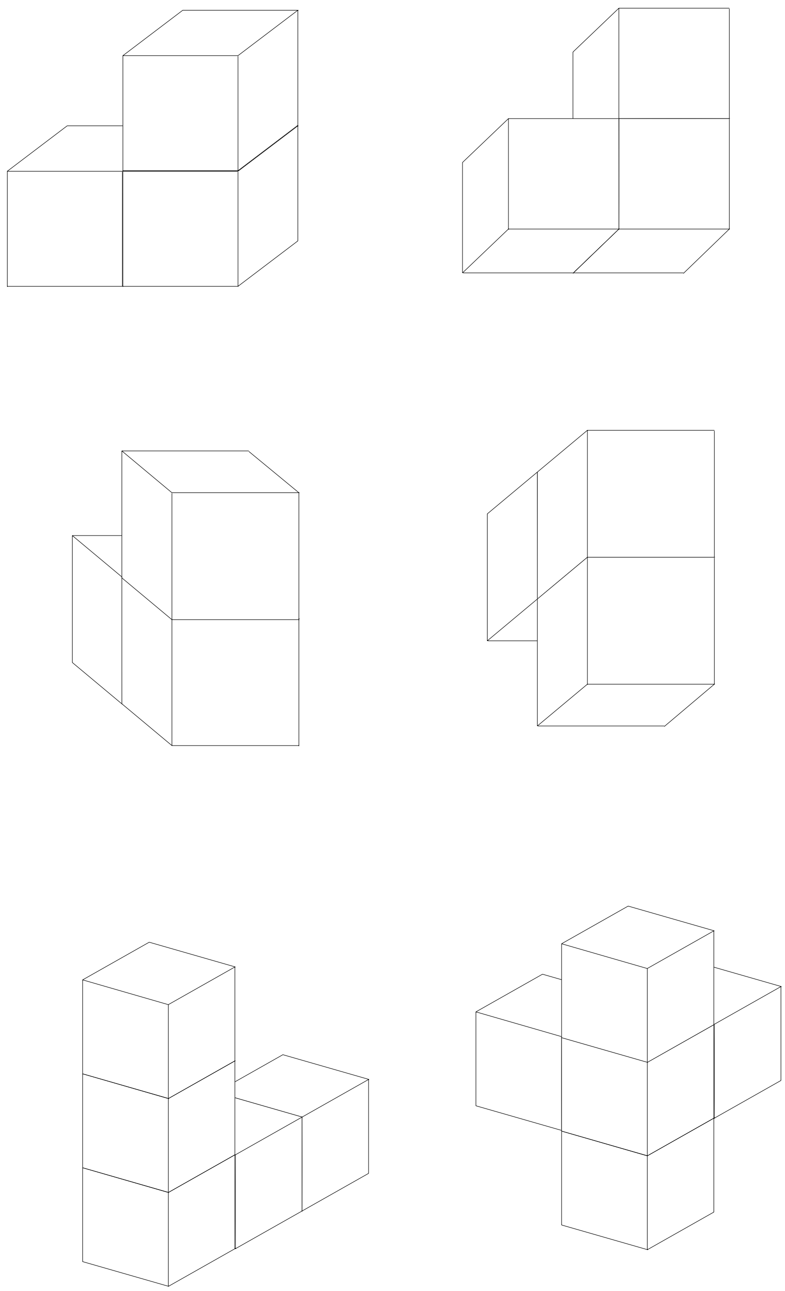




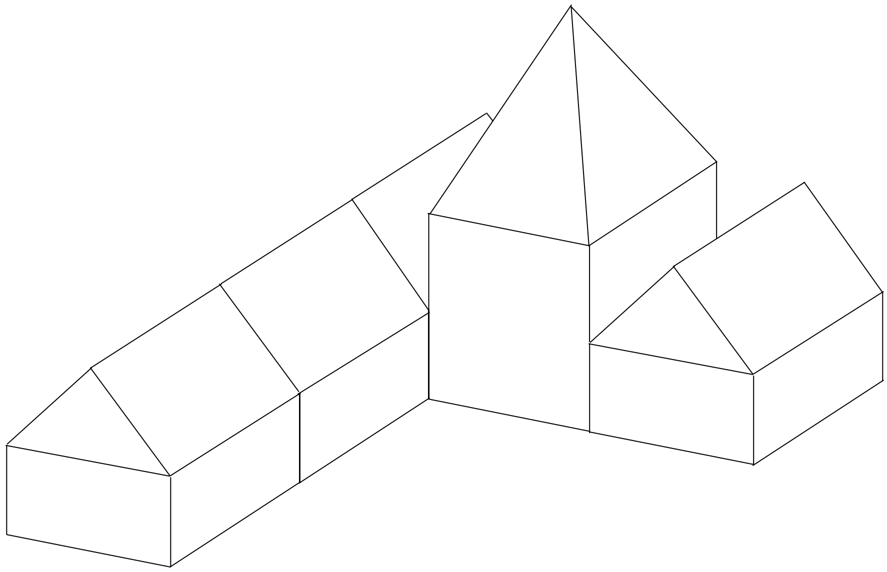


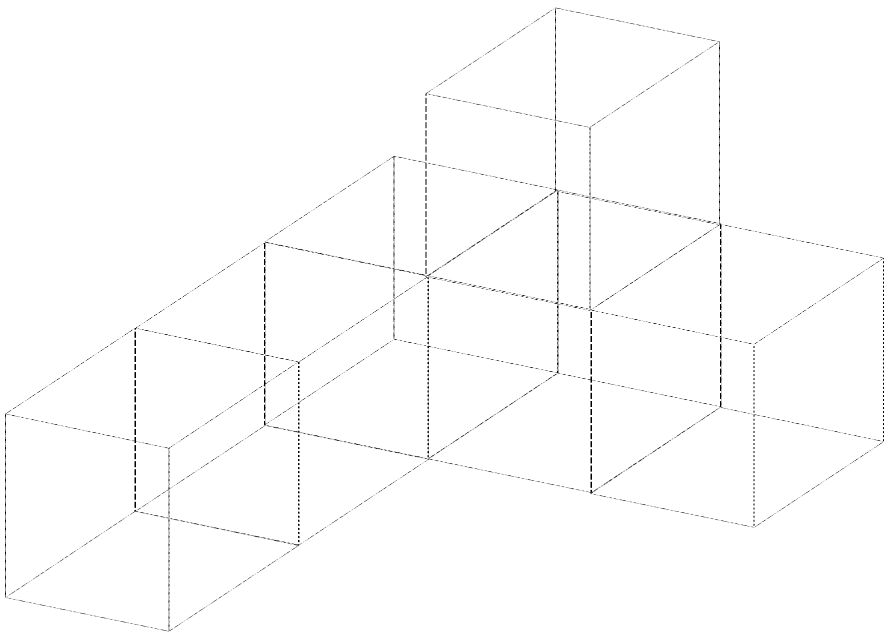


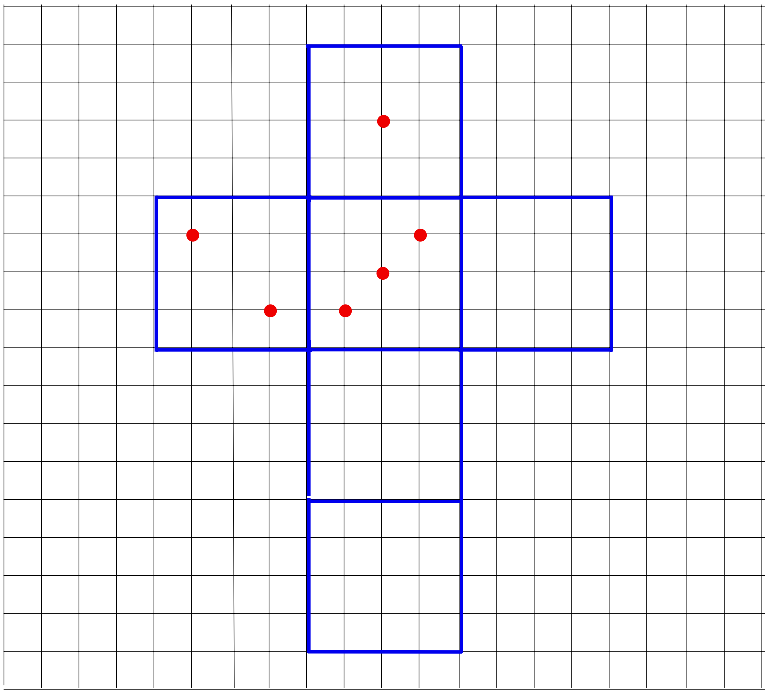
Tracer en pointillés toutes les arêtes cachées.

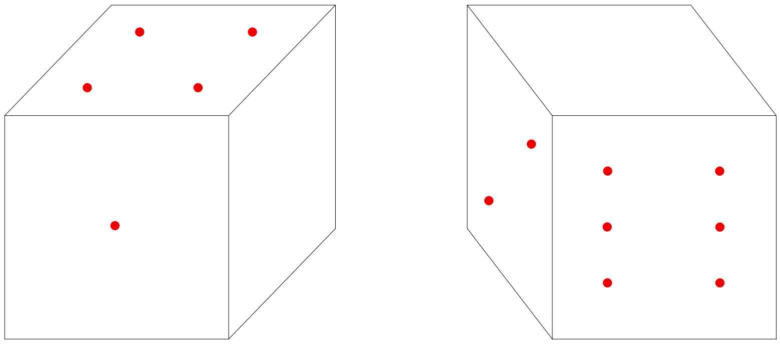


Dessiner l'ensemble architectural dans le réseau de cubes. Repasser en continu toutes les arêtes vues et en pointillés toutes les arêtes cachées.

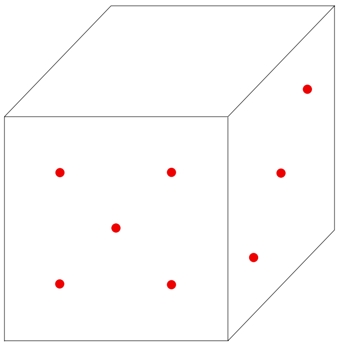






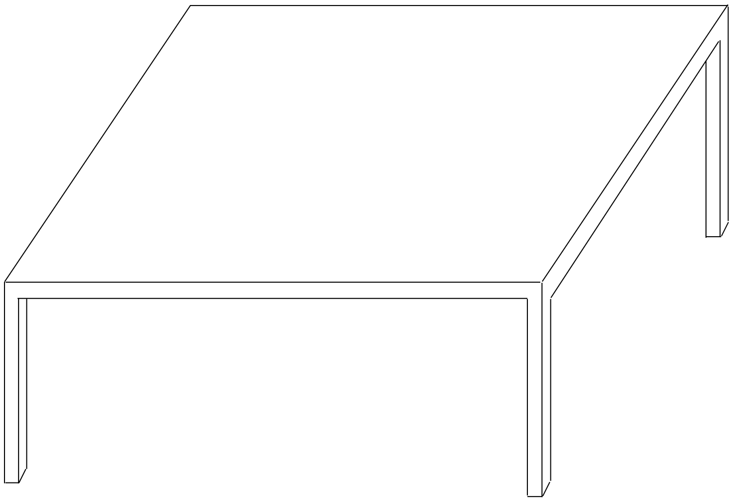


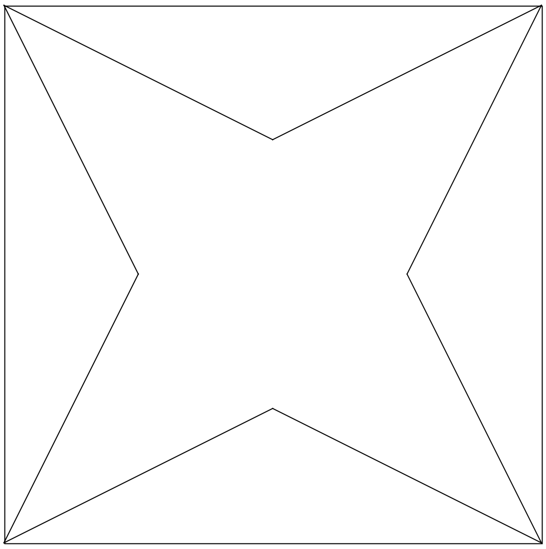
(a) *(b)*



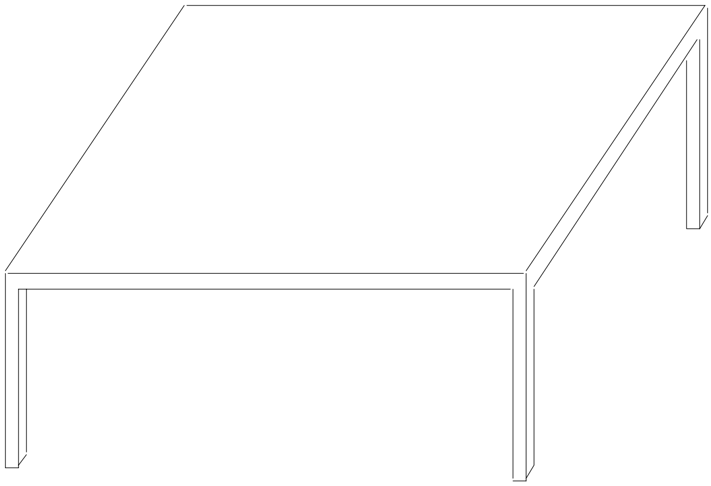
(c)

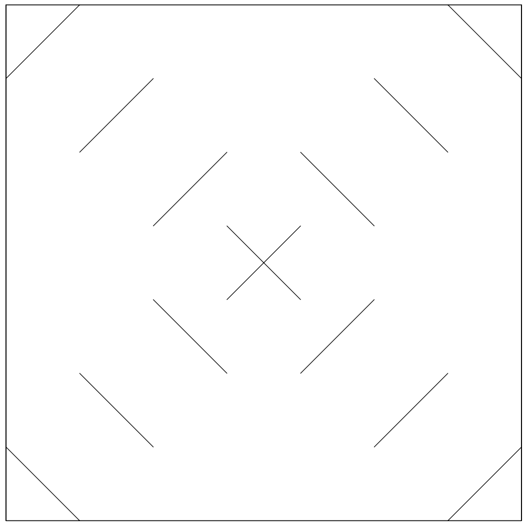
Reproduire sur la table le motif décoratif dessiné en dessous en vraie grandeur.



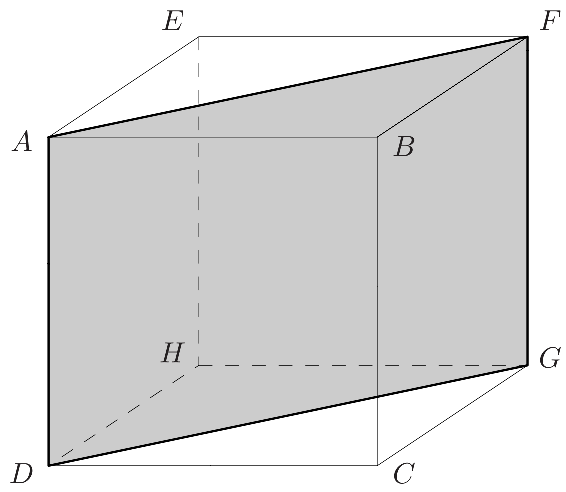


Reproduire sur la table le motif décoratif dessiné en dessous en vraie grandeur.

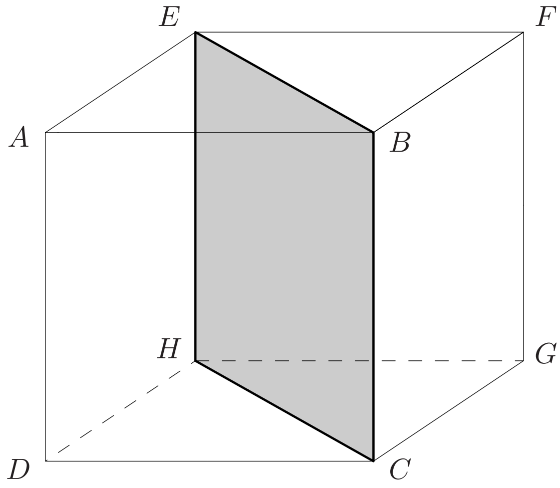




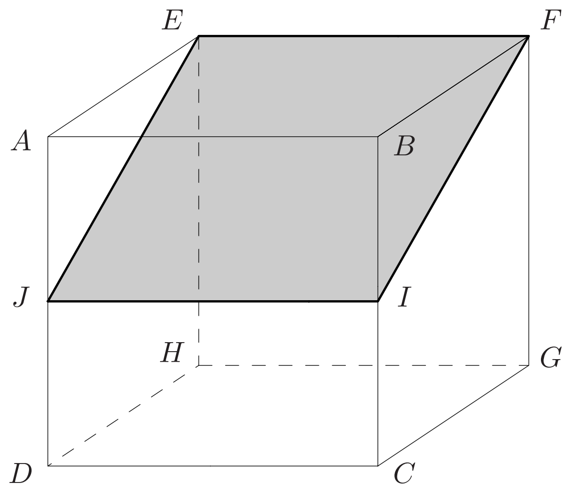
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



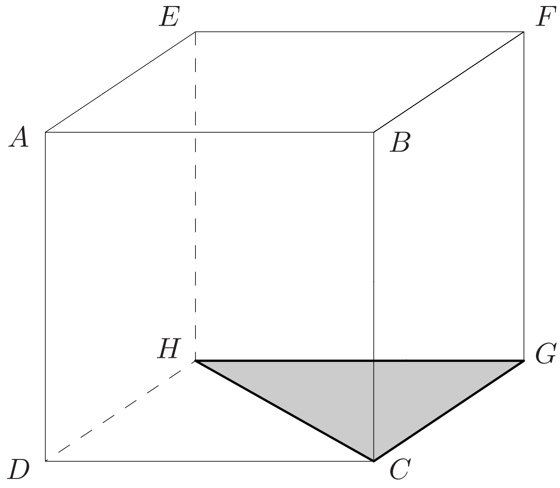
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



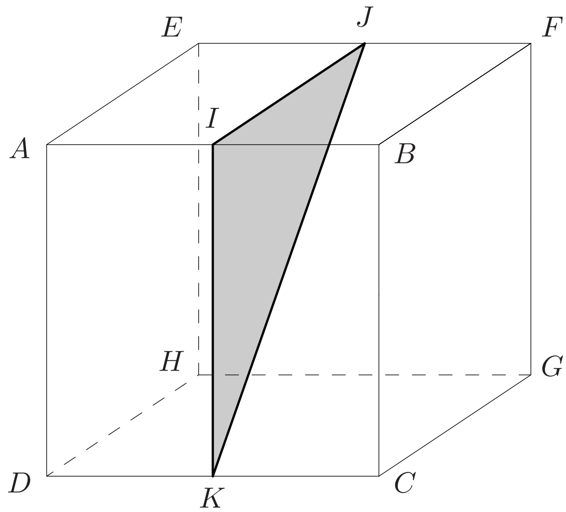
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



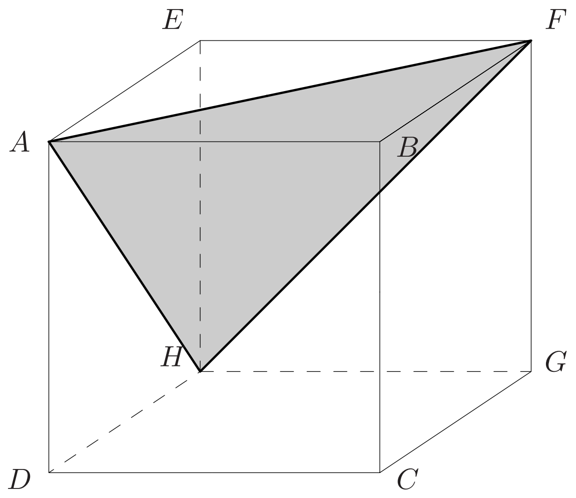
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



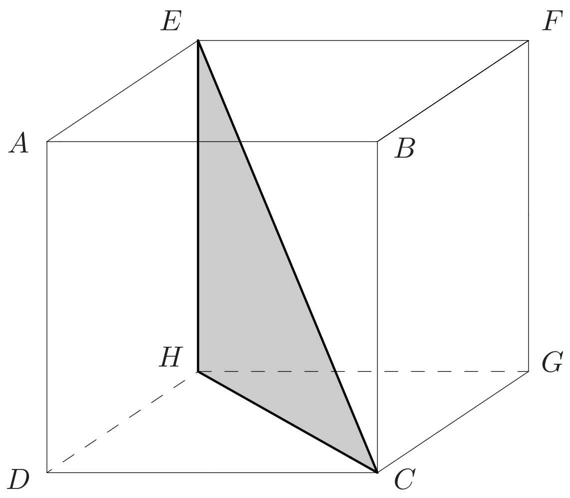
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



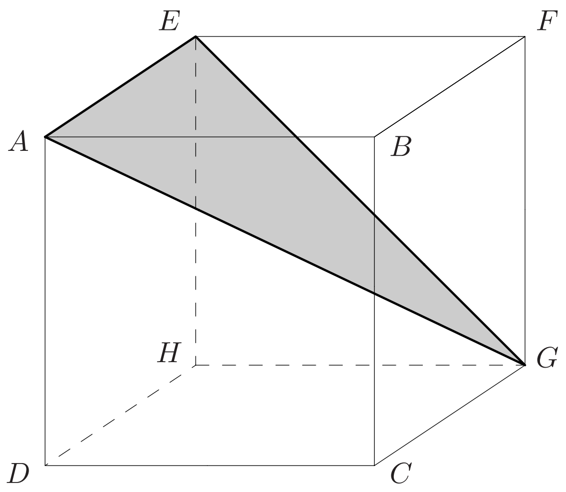
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.

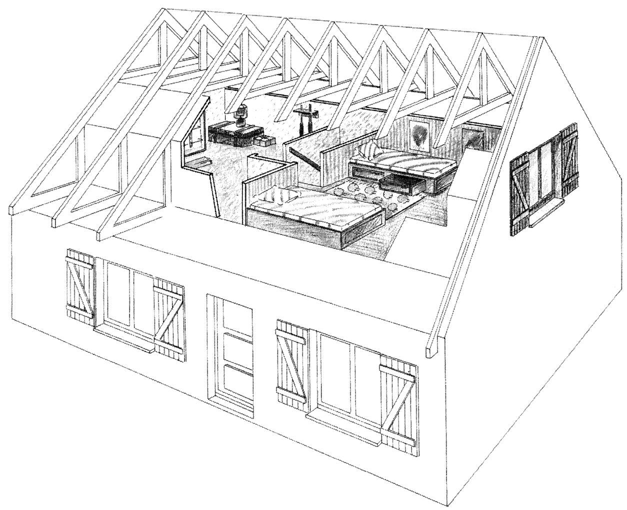


Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



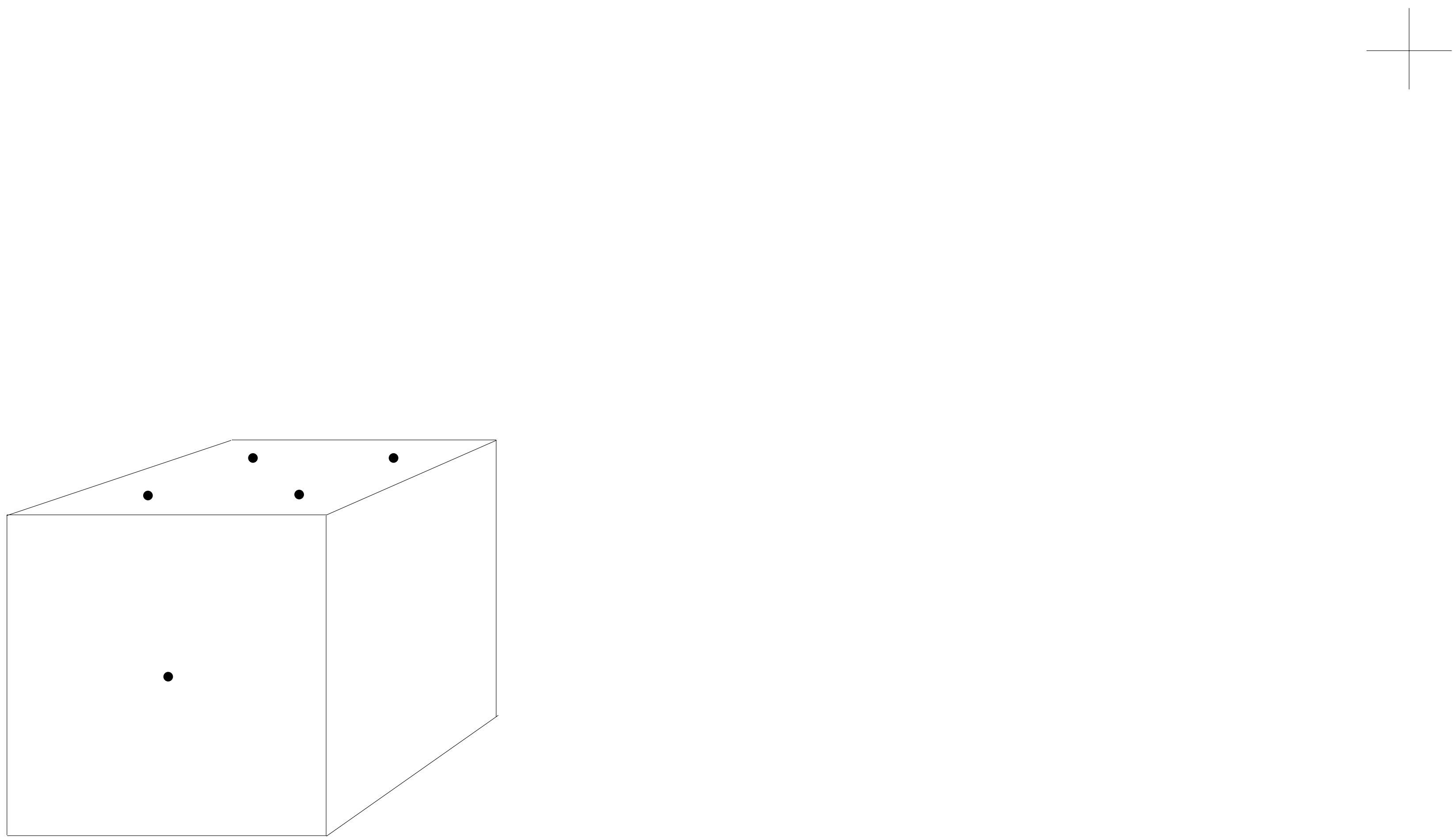
Dessiner en vraie grandeur la figure grisée.



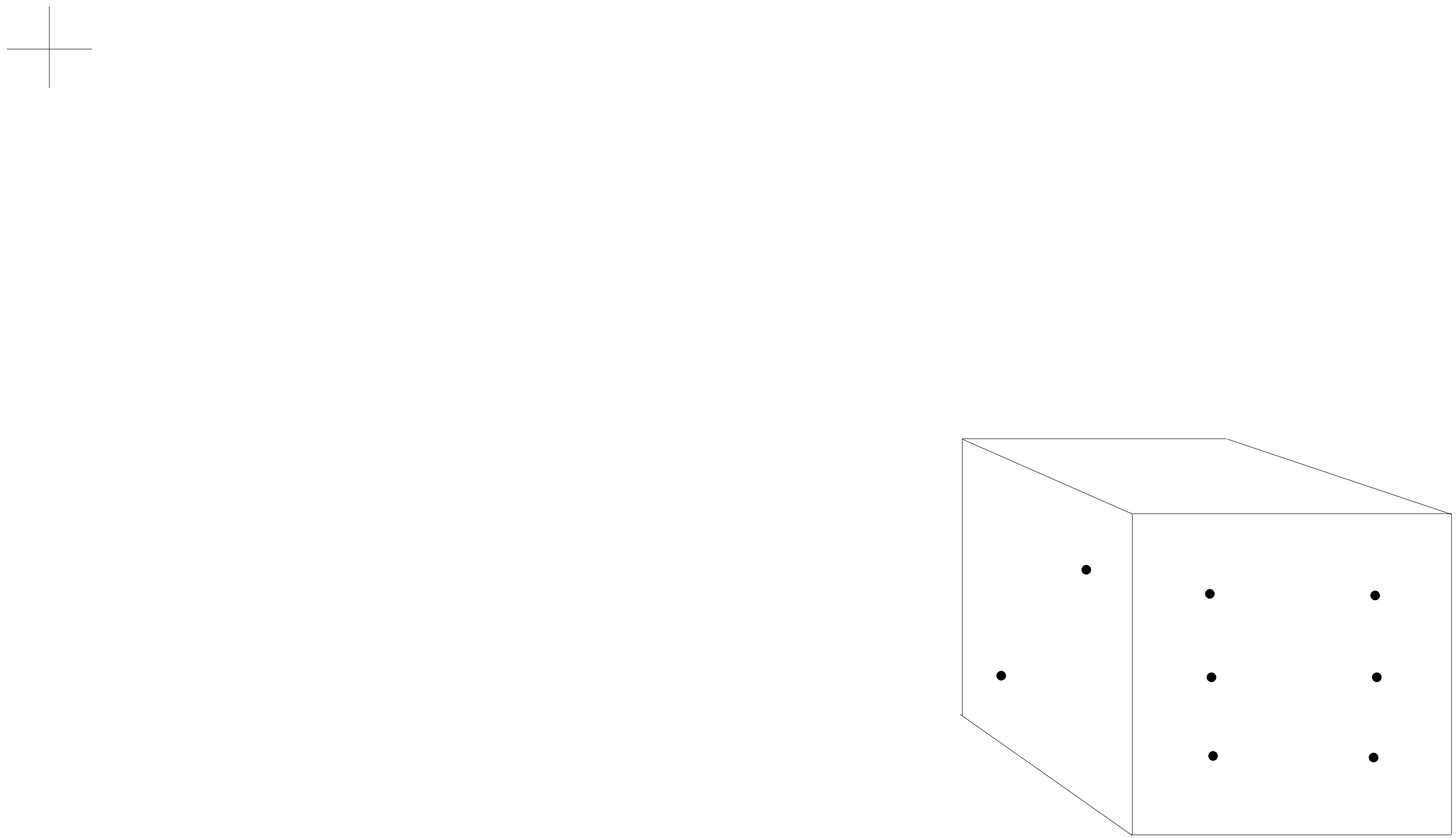


En réalité, la porte de la maison est-elle au milieu de la façade ?
Sur quelles observations ou constructions se base votre réponse ?

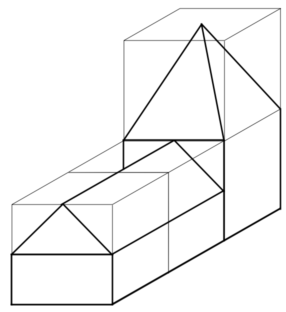
Compléter le dessin de ce dé. Les informations sur la disposition des points sont données à la fiche 41 à la page 241. La croix désigne le point de fuite.



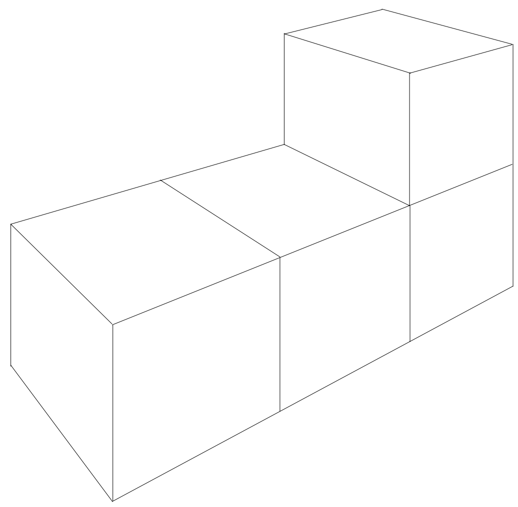
Compléter le dessin de ce dé. Les informations sur la disposition des points sont données à la fiche 41 à la page 241. La croix désigne le point de fuite.



On donne le dessin d'un bâtiment en perspective parallèle, réalisé à partir d'un réseau de cubes (figure a). Transposer ce dessin dans une perspective centrale, à partir du réseau de cubes déjà dessiné (figure b)

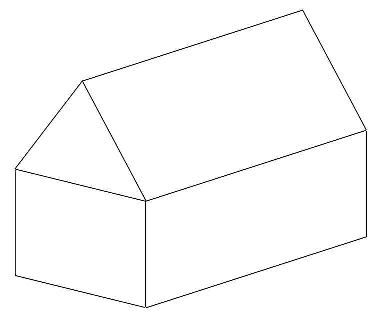


(a)

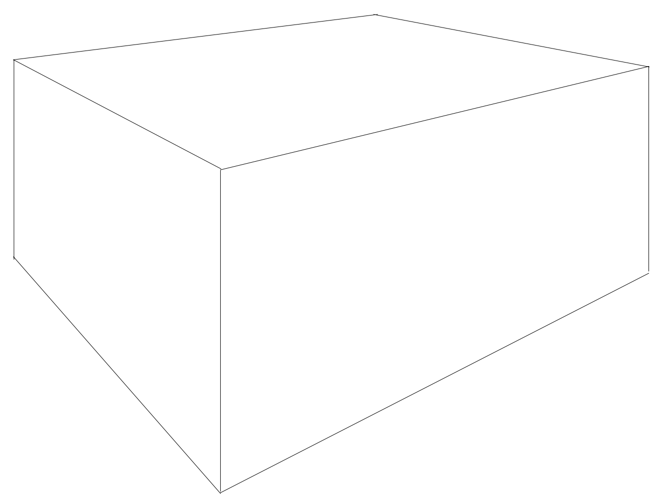


(b)

On donne le dessin d'une maison en perspective parallèle. Compléter le dessin en perspective centrale. Le toit doit avoir la même hauteur que les murs.



(a)

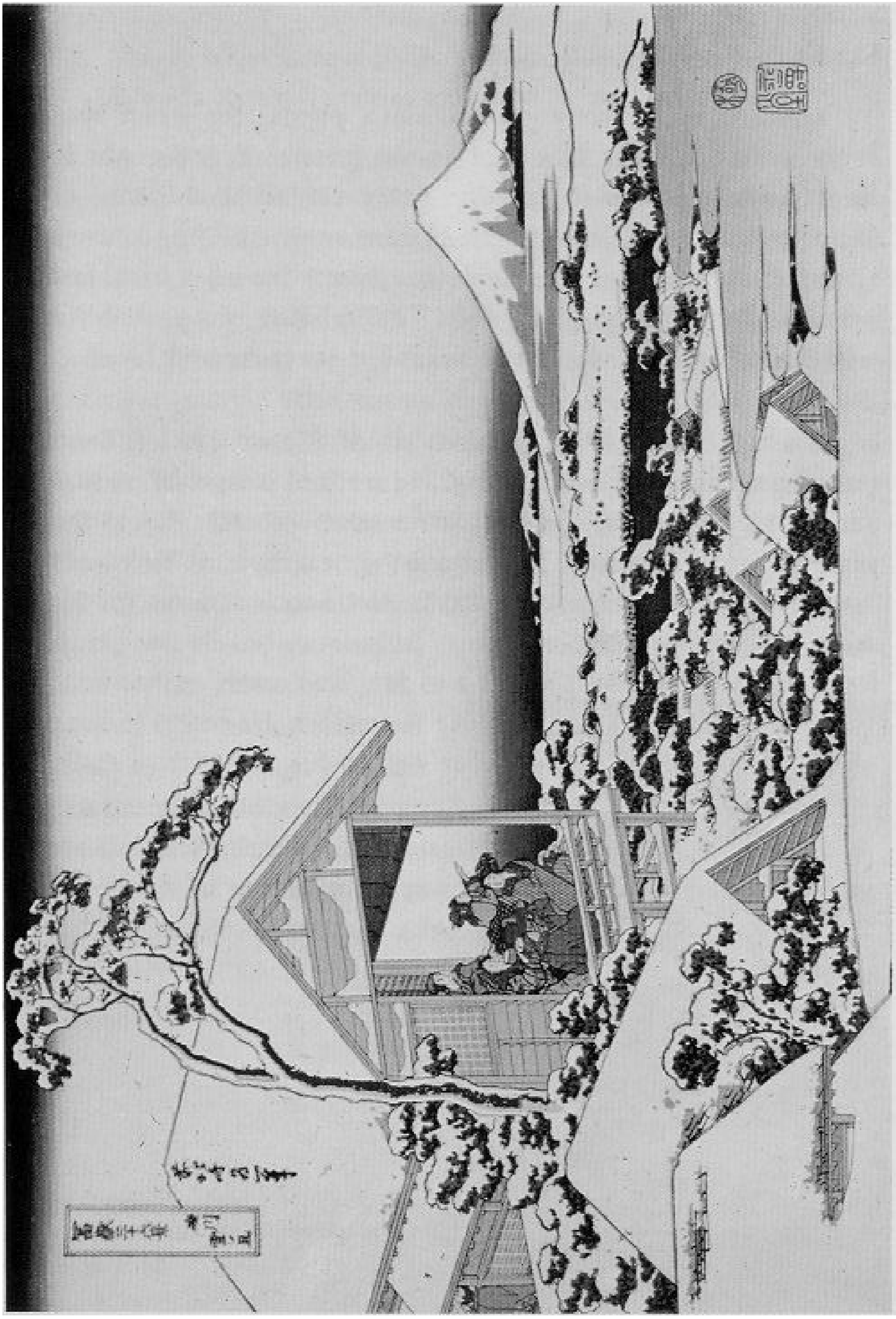


(b)

Analyser les procédés qui produisent un effet de relief.

Fidélité, Suzuki Harunobu, 1767

Analyser les procédés qui produisent un effet de relief.

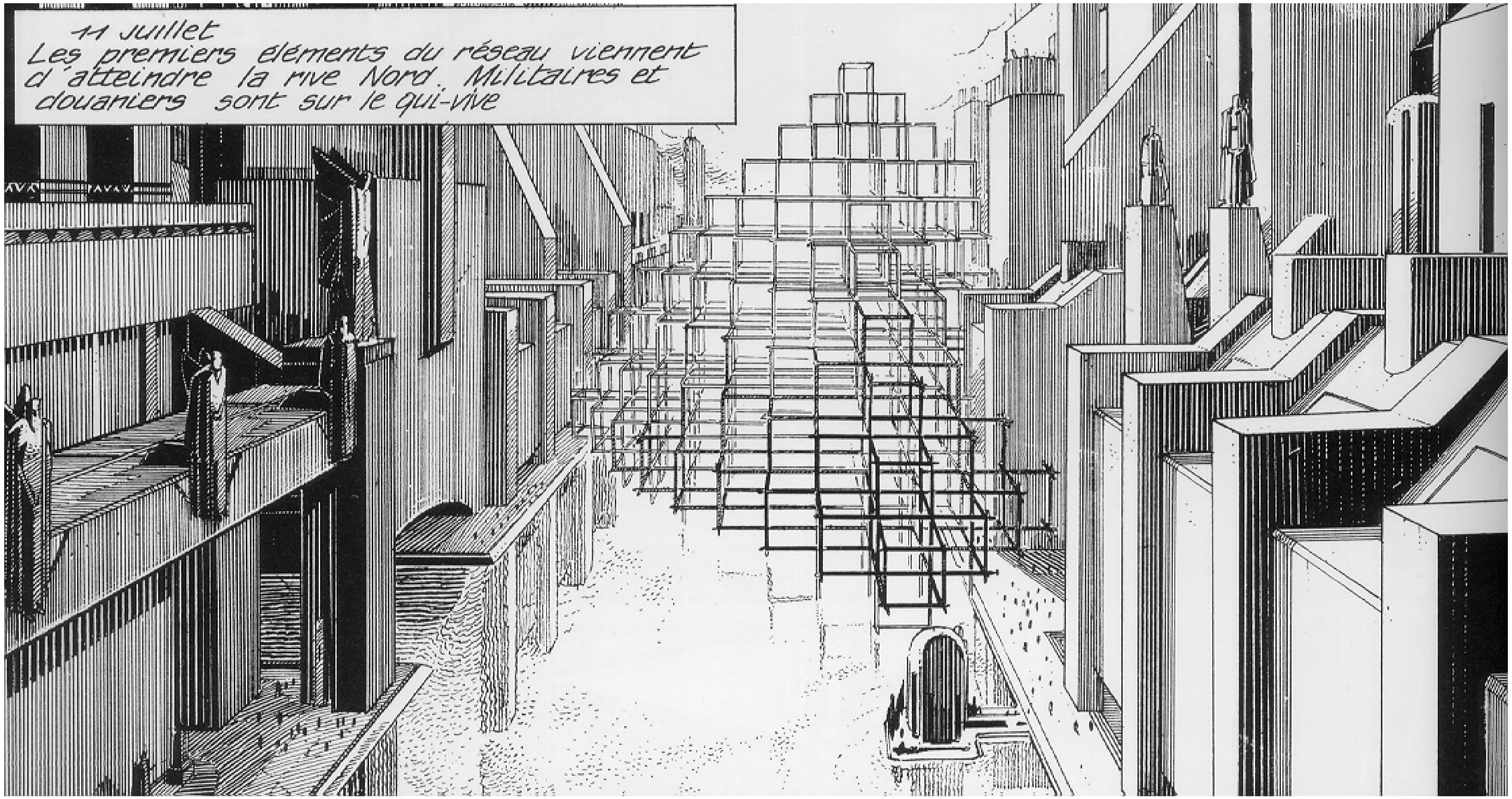


Snow View at Koishikawa, Hokusai (1760–1850)

Analyser les procédés qui produisent un effet de relief.

L'adoration des Mages, Albrecht Dürer (1471–1528)

Analyser les procédés qui produisent un effet de relief.



La fièvre d'Urbicante, François Schuiten, 1992

Troisième partie

Construire et représenter

Un aspect de la géométrie de 15 à 18 ans

Ombres et lumière

Remerciements

Les activités présentées au chapitre 8 à la page suivante ont été testées dans différentes classes de quatrième année, de l'enseignement général et de l'enseignement technique. Nous remercions les professeurs qui nous ont accueillis dans leur classe : Serge Sabbatini, professeur de mathématique à l'Institut des Sacrés Cœurs à Waterloo, ainsi que Pascale Guissard et Marianne Bouton, professeurs de mathématique à l'Institut Saint Julien Parnasse à Auderghem. Leurs observations et leurs suggestions ont contribué à la mise au point de ces activités.

8

Vers la géométrie affine de l'espace

1 Ombres au soleil et projection parallèle.

De quoi s'agit-il ?

En étudiant les ombres au soleil, établir leur lien avec les projections parallèles et la perspective parallèle.

Enjeux

Montrer que toute *projection parallèle*[1] d'un objet de l'espace sur un plan est une représentation de cet objet en *perspective parallèle*[1]. Ceci permet a posteriori de donner du sens aux règles appliquées lors de représentations en *perspective cavalière*[1], qui est un cas particulier de perspective parallèle.

Matières couvertes. – *Représentations d'objets de l'espace en perspective parallèle.*

Compétences. – *Maîtriser un outil de représentation pour aborder l'incidence et le parallélisme en géométrie de l'espace.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Pour chaque groupe d'élèves :

Une vitre de format plus ou moins 18 × 24 cm, ou mieux, une plaque de plexiglas transparent. Dans la suite, celle-ci sera simplement appelée *la vitre*. Deux équerres à étagère. Une grande pince métallique clip (voir figure 3 à la page 265).

Une photocopie sur transparent de la figure fournie en annexe à la page 378, reproduite en petit à la figure 4 à la page 265. Ce transparent, qu'on découpera de manière à ce que le point A coïncide avec le bord de la vitre, y sera fixé par du papier adhésif, en veillant à ce qu'il y adhère au mieux. Ces précautions ont pour but de limiter les erreurs de mesure.

Des photographies fournies en annexe aux pages 376 et 377, reproduites en petit dans les figures 1 à la page suivante et 2 à la page 265.

Un prisme droit en plexiglas ou en tiges, d'environ 15 cm de hauteur, à base triangulaire équilatérale.

Des feuilles de papier blanc grand format (A3 par exemple).

Des marqueurs sur transparents.

[1] Le sens précis de ce terme est repris dans le glossaire.

Prérequis. – On accepte l'hypothèse que les rayons du soleil sont rectilignes.

Connaissance de notions élémentaires de perspective parallèle (voir le chapitre 7), en l'occurrence savoir que des segments parallèles et égaux sont représentés par des segments parallèles et égaux, mais que des segments égaux et non parallèles ne sont pas nécessairement représentés par des segments égaux.

Par deux points passe une seule droite. Elle appartient à une seule direction ou faisceau de droites parallèles.

Par trois points non alignés passe un seul plan. Il appartient à un seul faisceau de plans parallèles.

Le théorème de Thalès dans le plan.

Local. – Si possible, disposer d'un local ensoleillé.

1.1 Ombres au soleil.

Comment s'y prendre ?

Nous nous proposons d'étudier les projections parallèles. Les ombres au soleil nous en donnent une bonne approche intuitive. Cependant, il n'est pas certain que les rayons du soleil soient perçus par les élèves comme étant parallèles. D'où la question suivante :

> Les photographies des figures 1 et 2 à la page suivante suggèrent des conclusions opposées. Dans la première, il semble évident que les rayons du soleil divergent radialement. L'autre au contraire nous invite à accepter l'idée que sur terre, les rayons nous parviennent plutôt parallèles. Qu'en est-il ?

Fig. 1 : Coucher de soleil à La Panne (Belgique) 28 décembre 1998

Fig. 2 : Grand Central Station (New York), inondée par la lumière

Après une courte discussion, un dispositif expérimental de facture simple (figure 3) est introduit pour guider la réflexion. Ceci devrait éviter que trop de temps soit consacré à cette activité préliminaire.

Les élèves sont répartis en petits groupes. Chaque groupe dispose du matériel décrit plus haut. Les élèves collent sur la vitre le transparent réalisé au moyen du modèle de la figure 4. Celle-ci est ensuite placée verticalement entre deux équerres et maintenue par une pince de bureau (figure 3). Il est important que la feuille de papier soit bien tendue sur la table exposée au soleil, et que feuille et vitre restent parfaitement immobiles pendant toute la manipulation.

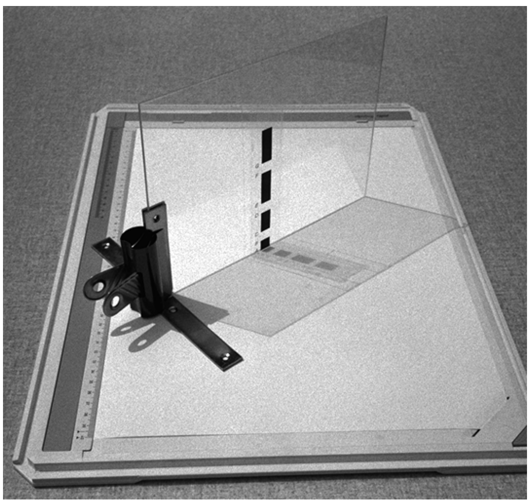


Fig. 3

Fig. 4 : Modèle à photocopier sur transparent, fourni en vraie grandeur dans l'annexe

On demande aux élèves de marquer sur la feuille de papier les extrémités des différentes ombres produites. Dans les conditions de l'expérience, peut-on « raisonnablement » considérer que les rayons du soleil sont parallèles ?

Quelques constatations s'imposent immédiatement :
les zones éclairées sont de longueurs égales ;
les ombres correspondent aux plages sombres du modèle.

Des ficelles peuvent être tendues, et fixées avec du papier adhésif, entre les points de la vitre et leurs ombres projetées. Cette situation géométrique est représentée par la figure 5.

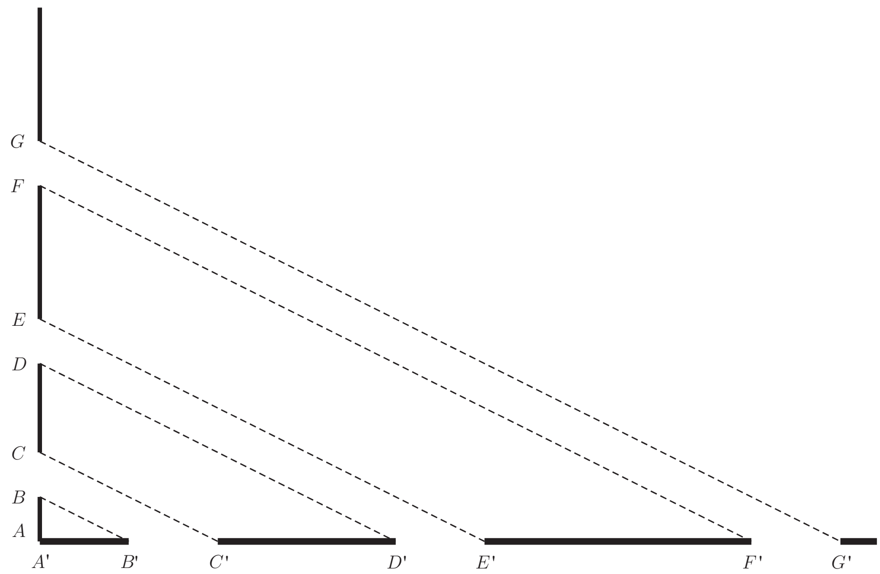


Fig. 5 : Vue de profil du dispositif

Sur la feuille où l'on a déjà dessiné les ombres $[A'B']$, $[C'D']$, $[E'F']$, ... on trace, à partir de A' et dans une direction faisant un angle droit avec celle de l'ombre, un segment sur lequel on reporte les points A, B, C, D, E, F, G, en respectant les mesures du modèle de la figure 4. On joint ensuite BB', CC', DD', EE', FF' et GG' et on vérifie le parallélisme avec les instruments.

Remarquons déjà que :

– l'image d'un point de la vitre est un point du plan sur lequel on projette ;
– l'image d'un segment est un segment ;
– l'image d'une droite est une droite (par prolongation) ;
– les droites joignant les points de l'espace à leur point image sont toutes parallèles. On les appelle *projetantes.*

Ceci nous fournit une perception intuitive d'une *projection parallèle*, qui envoie les points de l'espace sur un plan, dans une direction donnée. Nous définirons cette notion plus tard.

Et s'il n'y a pas de soleil, peut-on utiliser une lampe ?

Les élèves sont invités à transposer le schéma de la figure 5 à la page précédente pour le cas d'une source de lumière ponctuelle rapprochée, et à faire l'expérience si nécessaire.

Échos des classes

Certains élèves ne concevaient pas clairement que les ombres étaient dues à l'interruption des rayons du soleil par les zones opaques du modèle de la figure 4 à la page 265. Ce problème a surgi lorsqu'on leur a demandé de tirer des ficelles représentant les rayons lumineux. Une fois cette difficulté levée, l'illustration de l'expérience de l'ombre à la lampe par transposition du schéma de la figure 5 à la page précédente n'a pas posé de problème.

Prolongements possibles

Les rayons du soleil sont-ils des droites parallèles ? – Dans les situations-problèmes que nous proposons, l'ombre au soleil est considérée comme une projection parallèle. Il est utile de se demander dans quelle mesure cette projection que nous offre la nature, et qui est attrayante sur le plan pédagogique, est bien effectivement parallèle. Nous montrons ci-après que deux rayons issus d'un même point du soleil et observés sur la terre, sont indiscernables de deux rayons parallèles. Nous montrons aussi que le phénomène de pénombre risque d'être un peu plus gênant pour les expérimentations dans les classes.

Les rayons du soleil sont presque parallèles

Il n'existe pas de source lumineuse ponctuelle. En particulier le soleil, bien que nous le voyions assez petit, est un astre énorme, et aucune source lumineuse usuelle n'est réduite à un point. Néanmoins, dans ce qui suit, nous allons considérer en pensée une source ponctuelle S, rayonnant dans toutes les directions (figure 6).

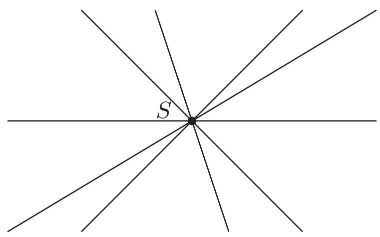


Fig. 6

Si on observe deux rayons quelconques d'une telle source dans une région A proche de la source (figure 7), on n'a aucune peine à observer qu'ils ne sont pas parallèles.

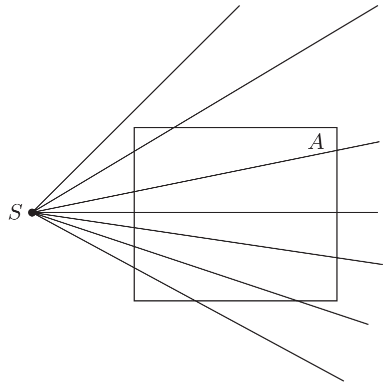


Fig. 7

Par contre les rayons observés dans une région située loin de la source ressemblent davantage à des parallèles (figure 8). Cet effet est d'autant plus marqué que la région A est éloignée de la source S.

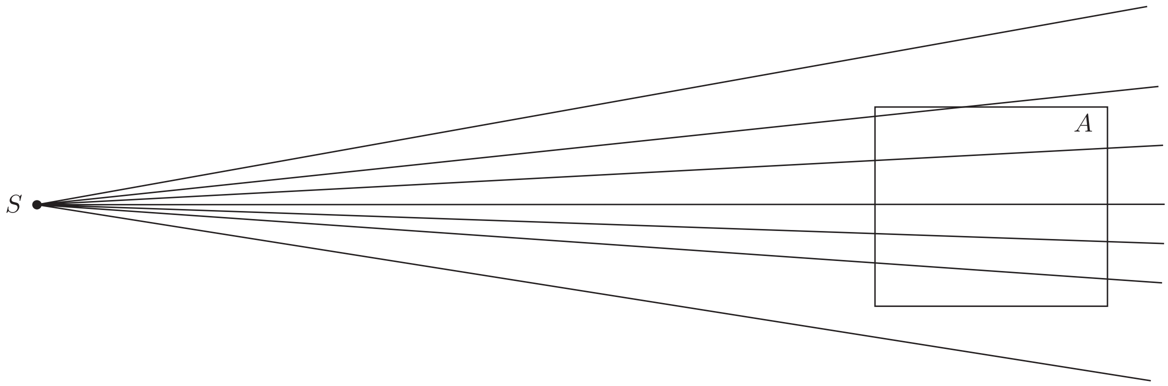


Fig. 8

Considérons, comme sur la figure 9, un rayon x issu d'une source S et passant par un point P situé à une distance d de S. Un deuxième rayon y passe à 1 m de P. À 1 m à droite de P, l'écart (exprimé en mètres) entre les deux rayons vaut $1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon = \frac{1}{d}$.

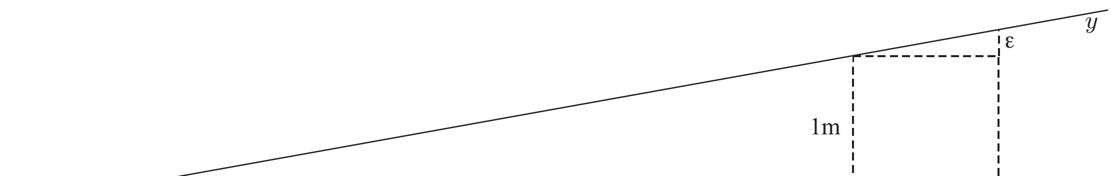


Fig. 9

La distance de la terre au soleil vaut 150 millions de kilomètres. Si donc nous considérons deux rayons issus *d'un même point de la surface du soleil*, nous observerons dans les conditions décrites ci-dessus un écart (exprimé en mètres) de

$$\varepsilon = \frac{1}{150.10^9} = 6,7.10^{-12}.$$

ou encore 6,7.10^{-9} mm. À l'échelle humaine, un tel écart est absolument négligeable.

Le phénomène de pénombre

L'ombre au soleil portée par un objet sur un écran situé à moins de 50 cm de lui est assez nette. Par contre, les ombres projetées au-delà d'un mètre ont des contours assez flous. Et la zone de flou s'élargit au fur et à mesure qu'on écarte l'écran de l'objet. La zone en question est appelée *zone de pénombre*. Voyons à quoi elle est due.

Depuis la terre, nous voyons le soleil sous un angle α qui vaut environ $\frac{1}{2}$ degré. Pour la facilité de l'explication, nous avons exagéré l'amplitude de cet angle sur la figure 10.

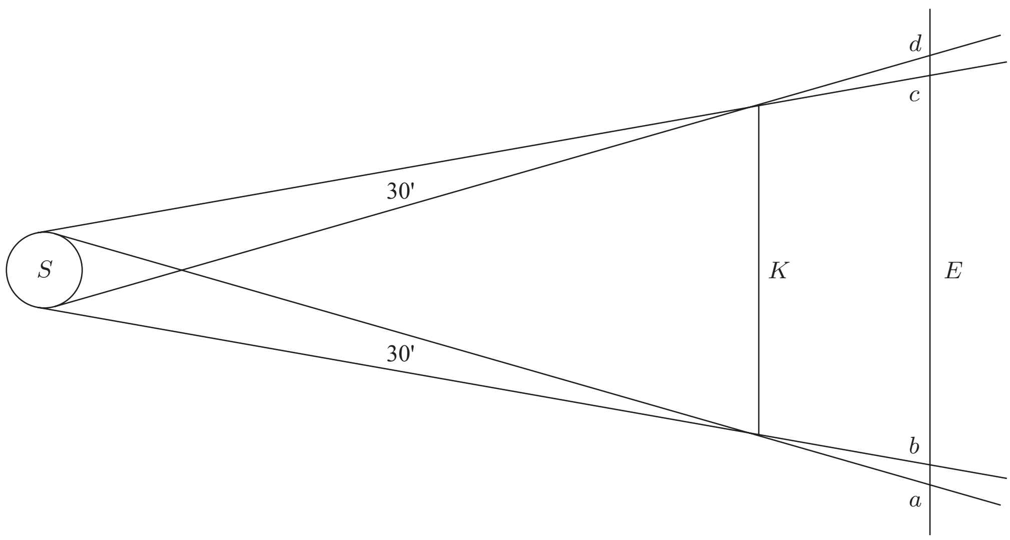


Fig. 10

Cette vue de profil montre l'ombre produite par un objet K sur un écran E proche de lui. Tous les points de l'écran situés en dessous de a sont en plein soleil. Les points situés entre a et b ne reçoivent qu'une partie de la lumière du soleil, et ils en reçoivent d'autant moins qu'ils sont plus proches de b. Un observateur situé entre a et b n'apercevrait qu'une partie du disque solaire. La zone entre a et b est une zone de pénombre. Entre b et c l'ombre est totale. La zone entre c et d est une autre zone de pénombre. Et les points au dessus de d sont en plein soleil.

Nous pouvons calculer la largeur l de la zone de pénombre en fonction de la distance d de l'écran à l'objet. La figure 11 montre que cette largeur vaut

$$l = d \times \operatorname{tg} 30' = d \times 0,009.$$

En particulier, cette largeur vaut

à 50 cm 0,45 cm,

et à 1m 0,9 cm.

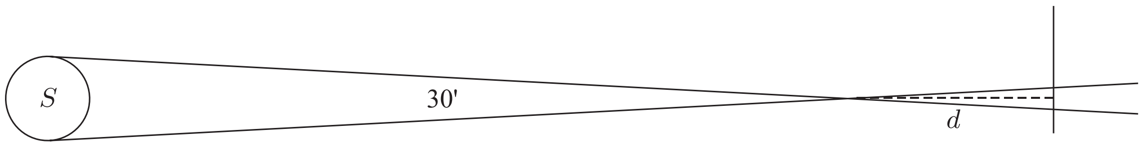


Fig. 11

Remarque. – Les deux questions traitées dans cette note pourraient être utilisées comme problèmes dans des classes.

L'ombre à la lampe. – Elle sera développée dans l'activité 1 du chapitre 10 . Elle conduit à la perspective centrale, dont les peintres et mathématiciens du Quattrocento[2] ont établi les règles bien avant que n'intervienne une autre forme de représentation plane de l'espace, la *perspective cavalière*.

Commentaires

La perspective cavalière est entrée dans la pratique à la fin du seizième siècle en Europe. Elle convient parfaitement pour réaliser des plans d'architecture classique, pour laquelle elle fait mieux percevoir les alignements, les symétries, le parallélisme, ... Elle donne une vue plus globale des objets puisque, comme nous le verrons dans l'activité 1 du chapitre 10, le point de vue de l'observateur est rejeté « très loin ». Elle aura également beaucoup d'applications dans l'art de la guerre, car il est plus facile d'y mesurer les objets, les distances. Dans ses *Cours de mathématique nécessaires à un homme de guerre* (1693), ouvrage cité par P. Comar [1996], Ozanam écrit :

« Pour représenter les fortifications, on se sert d'une perspective [...] qu'on appelle *Perspective Cavalière* et *Perspective Militaire*, qui suppose l'œil infiniment éloigné du Tableau, [...] et quoiqu'elle soit naturellement impossible, la force de la vue ne pouvant se porter à une distance infinie, elle ne laisse pas néanmoins de faire bon effet. »

Signalons encore que depuis l'Antiquité et notamment en Extrême-Orient (voir les estampes japonaises de l'activité 9 du chapitre 7), on trouve des utilisations de cette perspective, mais pas comme moyen global de représentation. Ainsi, une partie du « tableau » qui fait penser à une perspective cavalière peut avoisiner une projection orthogonale, par exemple. C'est surtout une manière empirique de suggérer le relief.

1.2 Ombre d'un prisme.

Comment s'y prendre ?

On observe l'ombre au soleil d'un prisme droit (figure 12 à la page suivante) déposé dans le coin d'une feuille de papier de format A3. Sur chaque arête verticale, on place un point à des hauteurs différentes, par exemple G au milieu de $[AD]$, H au tiers de $[BE]$ et J au quart de $[CF]$.

Les élèves dessinent la base du prisme et l'ombre portée sur la feuille ; ils notent ensuite la position des ombres des points G, H et J, afin de garder la trace de l'expérience les jours suivants pour le cas où il n'y aurait plus de soleil. Le professeur suscite les questions suivantes :

[2] Les Italiens n'utilisent pas la même terminologie que nous pour désigner les siècles. Ainsi *Quattrocento* signifie littéralement les années quatre cents (sous-entendu après l'an mil), c'est-à-dire en fait notre quinzième siècle.

> - Les ombres des arêtes parallèles sont-elles parallèles ?
> - Les ombres des arêtes sécantes sont-elles sécantes ?
> - Comment est l'ombre de $[DE]$ par rapport à $[AB]$, celle de $[EF]$ par rapport à $[BC]$, et celle de $[DF]$ par rapport à $[AC]$?

Les élèves mesurent les longueurs de toutes les arêtes du prisme et celles des segments $[AG]$, $[BH]$ et $[CJ]$, ainsi que les longueurs de leurs ombres. Ils comparent les longueurs des segments aux longueurs de leurs ombres.

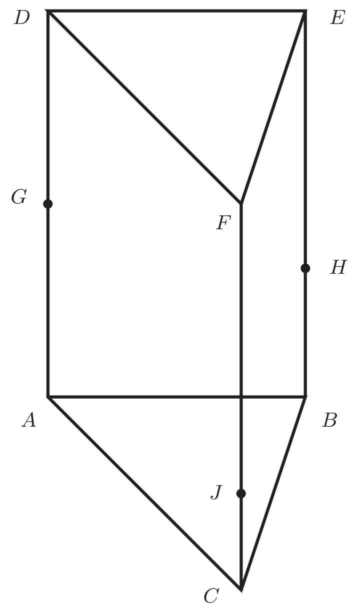


Fig. 12 : Prisme à base triangulaire

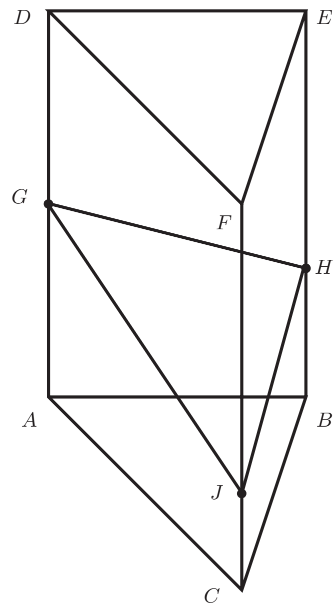


Fig. 13 : Prisme tronqué

> - Que constate-t-on pour
>   - $[DE]$, $[EF]$, $[FD]$ et leurs ombres ?
>   - $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ et leurs ombres ?
> - Où se trouve l'ombre de G sur l'ombre de $[AD]$, celle de H sur l'ombre de $[BE]$, et celle de J sur l'ombre de $[CF]$?

Joignons G, H, J sur les faces du prisme pour faire apparaître les segments $[GH]$, $[HJ]$ et $[JG]$ et le prisme tronqué $ABCJGH$ (figure 13).

> Que peut-on dire de l'ombre du triangle GHJ ?

L'ombre du prisme est l'image de celui-ci sur le plan de la table par une projection parallèle à la direction des rayons du soleil. Les projetantes sont donc les rayons du soleil.

Nous souhaitons traduire les observations faites à partir du prisme en des énoncés mathématiques plus généraux. Les constatations effectuées par les élèves sont d'abord reportées dans la colonne de gauche d'un tableau à deux colonnes. Les élèves sont invités à les reformuler en termes de projections parallèles. Ces conjectures sont alors inscrites vis-à-vis dans la colonne de droite.

Les élèves observent que :	Les élèves conjecturent que :
L'ombre d'une arête est un segment.	La projection parallèle d'un segment est un segment[3].
Les arêtes $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ ont des ombres parallèles.	Des droites parallèles se projettent selon des droites parallèles[4].
Les arêtes $[AD]$ et $[DF]$, $[AD]$ et $[DE]$, ... ont des ombres sécantes.	Des droites sécantes se projettent selon des droites sécantes[5].
L'ombre de $[DE]$ est parallèle à $[AB]$ donc à $[DE]$. Il en va de même pour $[EF]$ et $[DF]$.	Des droites parallèles au plan de projection se projettent parallèlement à elles-mêmes.
Les segments $[DE]$, $[EF]$ et $[DF]$ ont la même longueur que leur ombre. Les ombres des arêtes verticales sont égales entre elles, mais n'ont pas nécessairement la même longueur que les arêtes.	Des segments parallèles au plan de projection se projettent en vraie grandeur. Des segments non parallèles au plan de projection se projettent sans conserver leur longueur, mais des segments égaux et parallèles se projettent suivant des segments égaux et parallèles.
L'ombre de G est à la moitié de $[AD]$, celle de H au tiers de $[BE]$ et celle de J au quart de $[CF]$.	La projection parallèle conserve les rapports des segments dans une direction donnée.

[3] La projection parallèle d'un segment peut aussi être un point.

[4] Deux droites parallèles peuvent aussi se projeter selon deux points, ou une seule droite.

[5] Deux droites sécantes peuvent aussi se projeter selon une seule droite.
Il ne nous paraît pas opportun de débattre ici des cas particuliers, mais il vaut mieux ne pas les éluder si les élèves les abordent spontanément.

La dernière conjecture est proposée aux élèves en activité de démonstration (Théorème de Thalès dans le plan). Les autres seront démontrées dans les activités 2 et 3.

Exercices. – La perspective cavalière fournit une représentation plane des objets de l'espace. Montrons au travers d'exercices que les propriétés mises en évidence dans le tableau ci-dessus correspondent aux règles utilisées dans la représentation en perspective cavalière.

1. Quelle forme peut avoir l'ombre ou la projection parallèle

– d'un carré ?

– d'un rectangle ?

– d'un triangle équilatéral ?

– ...

2. Voici un cube en tiges vu du dessus et l'ombre d'une arête verticale. Dessiner l'ombre complète du cube.

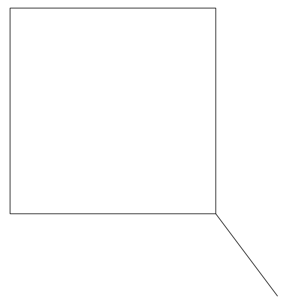


Fig. 14

3. Dessiner un cube en perspective cavalière.

4. Dessiner un prisme à base triangulaire en perspective cavalière.

5. Dessiner un tétraèdre en perspective cavalière.

6. Le tétraèdre $DA'C'B$ est inscrit dans un cube en perspective cavalière (figure 15). Démontrer qu'il est régulier.

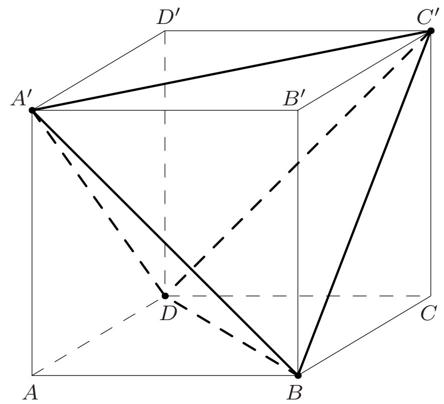


Fig. 15

7. Quatre points quelconques, non alignés, peuvent-ils toujours être les sommets de la représentation en perspective cavalière d'un tétraèdre régulier ? (V)[6]

8. Cinq points quelconques, non alignés, peuvent-ils toujours être les sommets de la représentation en perspective cavalière d'un cube ? (F)[6]

Toutes les réflexions suscitées par cette activité devraient convaincre les élèves du lien entre ombre au soleil, projection parallèle et perspective parallèle.

Échos des classes

La première classe où cette activité a été expérimentée a bénéficié d'une longue période de beau temps. Lors des expérimentations suivantes, les conditions météorologiques très instables nous ont incités à prendre les devants pour être sûrs de pouvoir travailler. Quelques jours avant le début de l'activité, nous avons montré aux élèves comment construire un prisme en tiges et nous leur avons demandé de profiter d'une éclaircie pour dessiner l'ombre de leur prisme sur une feuille A3. Le travail en classe a donc pu directement démarrer par l'exploitation des productions des élèves. Certains d'entre eux ont construit leur prisme avec beaucoup de précision, et leur travail était très soigné. D'autres ont rapidement constaté que la qualité médiocre de leur dessin rendait plus difficile la lecture des informations.

Pour l'élaboration du tableau de la page 272, il a fallu poser des questions assez précises pour obtenir les énoncés des observations. Une intervention assez active du professeur a été nécessaire pour dégager les deux premières conjectures. À partir de ces exemples, les élèves ont compris comment les mots du langage courant se transposent en termes mathématiques et les autres énoncés sont arrivés facilement.

2 Ombres au soleil et propriétés d'incidence.

De quoi s'agit-il ?

Étudier les propriétés d'incidence à partir de l'ombre d'un bâton.

Enjeux

Matières couvertes. – *Propriétés d'incidence et caractérisations d'une droite et d'un plan.*

Compétences. – *Rechercher et énoncer correctement des propriétés géométriques à partir de situations concrètes, apprendre à modéliser mathématiquement.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Des plaques transparentes rigides et leurs supports comme décrits dans l'activité 1 .

De la ficelle de deux couleurs différentes.

Du papier adhésif.

[6] Les indications de réponse sont destinées au professeur.

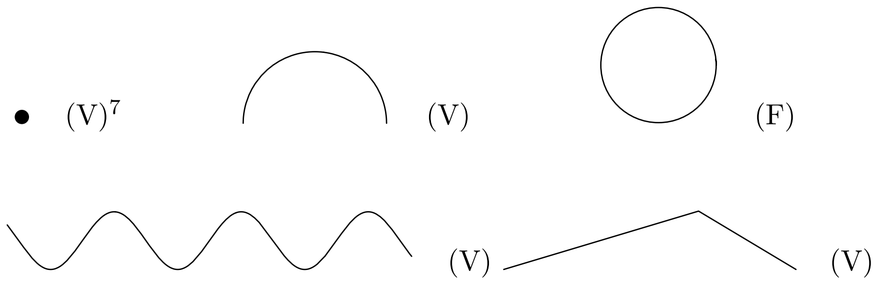
Des photocopies sur transparent de la feuille fournie en annexe à la page 380, reproduite en petit à la figure 16 à la page suivante.

Prérequis. – Les mêmes que pour l'activité 1 et l'activité 1 elle-même.

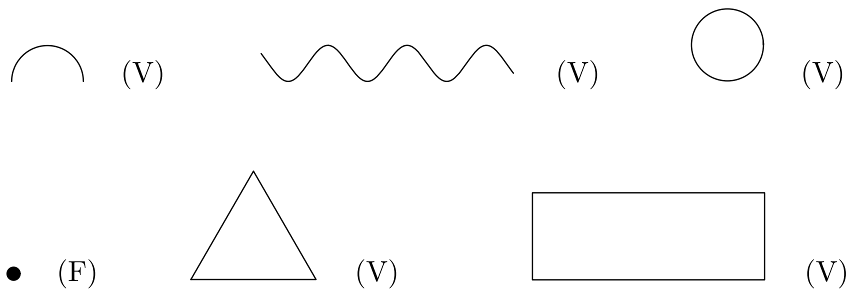
2.1 Propriétés d'incidence

Comment s'y prendre ?

Nous avons remarqué que l'ombre d'un « segment » sur une plaque était un « segment ». Qu'en est-il sur d'autres supports ? Quelles sont, parmi les figures suivantes, celles qui peuvent être l'ombre d'un bâton ?



De même, si l'ombre d'un objet est ________ , cet objet peut être



Toutes ces questions ont pour but de faire émerger l'idée que la réponse dépend du support sur lequel l'ombre est projetée (ballon, tôle ondulée, angle de deux murs, ...) et de la position de l'objet par rapport aux rayons solaires.

Après avoir mis en évidence la complexité de certaines situations, nous revenons à un cas très simple, celui de l'ombre d'un bâton sur un plan. Nous commençons par réaliser un transparent reproduisant la figure 16 à la page suivante.

On fournit à chaque groupe d'élèves un transparent et le matériel déjà utilisé lors de l'activité 1. Les élèves fixent le transparent sur la vitre et

[7] Les indications de réponse ne sont pas communiquées aux élèves.

collent en B et P des fils d'une même couleur ; aux autres points, ils collent deux fils d'une autre couleur (figure 17).

Fig. 16 : Ce qui nous servira de bâton

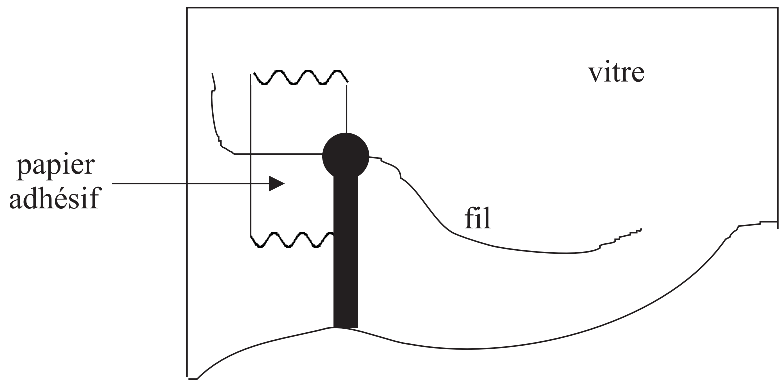


Fig. 17 : Fixation des fils

Chaque groupe d'élèves dispose le montage sur une table ensoleillée et tend chaque fil du point jusqu'à son ombre en le fixant au moyen de papier adhésif (figure 18).

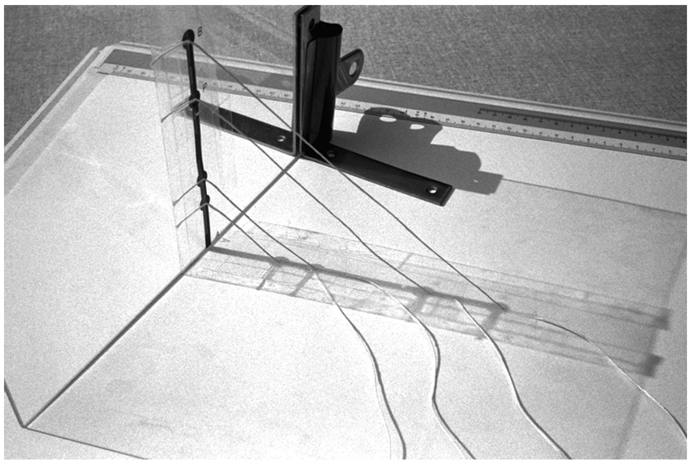


Fig. 18

S'il n'y a pas de soleil, des fils parallèles représentant les rayons du soleil pourront matérialiser la situation. L'activité 1 nous a montré que ces fils représentant les rayons du soleil doivent être parallèles.

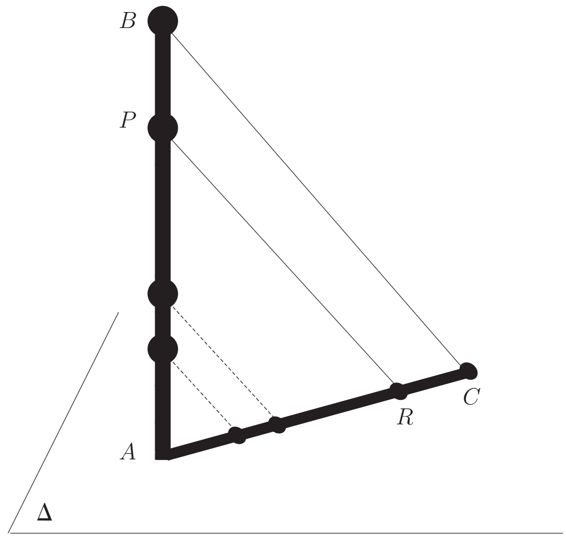


Fig. 19 : Résultat de la manipulation

La figure 19 fait apparaître deux plans : le plan Δ sur lequel l'ombre est projetée et le plan ABC. Elle fait également apparaître plusieurs droites concrétisées ici par le segment $[AB]$, son ombre $[AC]$ et les rayons solaires BC, PR, ...

On demande aux élèves d'analyser cette situation du point de vue des positions relatives des droites et des plans, en tentant de dégager les propriétés géométriques qui expliquent le fait que l'ombre du segment $[AB]$ est le segment $[AC]$, en particulier tout point de $[AB]$ a son ombre sur $[AC]$.

On peut guider les élèves en posant quelques questions :

Comment détermine-t-on l'ombre du point B, du point P ?
Y a-t-il des points de $[AB]$ dont l'ombre n'est pas sur $[AC]$?
Pourquoi les rayons du soleil passant par les points de $[AB]$ sont-ils dans un même plan ?

Le professeur divise le tableau en deux colonnes et note les suggestions des élèves dans la colonne de gauche. Ceci fait, il demande aux élèves de formuler en termes mathématiques les propriétés ainsi dégagées. Le résultat pourrait ressembler à ce qui suit.

Faits observés sur le dispositif expérimental	Énoncés mathématiques
Un rayon solaire passe par B et atteint le plan horizontal en un point C. C est l'ombre du point B.	Une droite non contenue dans un plan et qui a une intersection avec ce plan le perce en un point.
Tous les points de $[AB]$ ont leur ombre sur $[AC]$ et tout point de $[AC]$ est l'ombre d'un point de $[AB]$.	L'image d'un segment rectiligne $[AB]$ par une projection parallèle est un segment rectiligne $[AC]$.
Tous les points de l'ombre $[AC]$ sont dans le plan Δ.	Une droite dont deux points sont dans un plan est entièrement contenue dans ce plan.
Par P, point de $[AB]$, passe un et un seul rayon solaire parallèle à BC, qui perce Δ en R (ombre de P).	Par un point, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée (axiome d'Euclide).
Ce rayon est contenu dans le plan ABC. En effet, il passe par le point P de ABC et est parallèle à la droite BC de ABC.	Si, par un point d'un plan, on mène une parallèle à une droite du plan, cette parallèle est contenue dans le plan.

Comme nous l'avons déjà dit, ce tableau doit être construit grâce à une discussion au sein de la classe. Le rôle du professeur consiste, dans un premier temps, à organiser les observations particulières, formulées dans le vocabulaire du monde observable. Ensuite, il veille à assurer une transition harmonieuse entre ces observations et les propriétés générales qu'elles sous-tendent, exprimées dans le langage des mathématiques.

Le professeur pose ensuite d'autres questions pour faire émerger les fondements de la géométrie de l'espace.

> Les deux plans Δ et ABC déterminent-ils la droite de l'ombre $[AC]$ et pourquoi ?
> Peut-on imaginer d'autres manières de déterminer le plan ABC ?

Les réponses fournies par les élèves sont des « énoncés mathématiques naïfs » (colonne de gauche). Le professeur veille à les généraliser de manière à obtenir des énoncés qui seront acceptés et formeront la base de l'étude qui va être développée (colonne de droite).

Faits observés sur le dispositif expérimental	Énoncés mathématiques
Les deux plans Δ et ABC sont sécants, puisqu'ils ont un point en commun, par exemple A.	Deux plans ayant un point en commun sont sécants[8].
La droite AC est contenue dans le plan Δ et dans le plan ABC. Elle est donc leur droite d'intersection.	Deux plans sécants se coupent suivant une droite.
Soit le plan ABC. Ce plan – contient entièrement les deux droites sécantes AB et AC. On peut dire que le plan ABC est déterminé par les deux droites sécantes AB et AC ; – contient entièrement les deux droites parallèles BC et PR. On peut dire que le plan est déterminé par les deux droites parallèles BC et PR ; – est aussi déterminé par le point A et la droite BC.	Par trois points non alignés passe un unique plan. – Deux droites sécantes déterminent un plan. – Deux droites parallèles déterminent un plan. – Une droite et un point extérieur déterminent un plan.

Nous disposons à présent des outils nécessaires pour définir la projection parallèle.

Définition de la projection parallèle. – *Soit un plan et une droite non parallèle au plan. L'image d'un point de l'espace par la projection sur le plan donné parallèlement à la droite donnée est le point de percée dans le plan de l'unique parallèle à la droite donnée passant par le point.*

[8] Il est entendu que lorsqu'on dit ici deux droites ou deux plans, il s'agit d'objets mathématiques distincts (voir commentaires de l'activité 3).

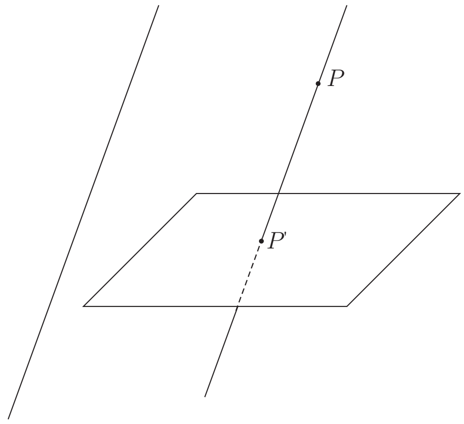


Fig. 20 : P' est l'image de P

L'image d'un objet de l'espace par cette même projection parallèle est l'ensemble des images des différents points de cet objet.

Exercices. – Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Une projection parallèle d'une droite sur un plan peut être

- une droite ; (V)[9]
- un segment ; (F)
- une demi-droite ; (F)
- un point. (V)

Une projection parallèle d'un plan sur un plan peut être

- un plan ; (V)
- un parallélogramme ; (F)
- un demi-plan ; (F)
- une droite ; (V)
- un point. (F)

Échos des classes

Les questions préliminaires concernant la forme de l'ombre d'un bâton, ou la forme de l'objet dont on voit l'ombre ont suscité de nombreuses discussions au sein de la classe et ont permis aux élèves les plus inventifs de donner libre cours à leur imagination.

Le rôle du professeur est primordial dans l'élaboration des deux tableaux aux pages 277 et 279. Il faut poser des questions précises pour obtenir les propriétés que l'on souhaite mettre en évidence. Les questions reprises dans le texte sont celles qui ont donné les meilleurs résultats dans les différentes classes où l'expérience a été menée, mais il se peut que le professeur doive en imaginer d'autres pour débloquer la situation dans sa classe.

Quelques problèmes, liés au passage du concret à l'abstrait, ont surgi lors de la formulation des énoncés mathématiques. Concevoir une droite infinie

[9] Les indications de réponse ne sont pas communiquées aux élèves.

comme extension d'un segment, et un plan infini à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme est loin d'être évident pour tous. Or, les élèves doivent avoir franchi cette étape pour comprendre et admettre que deux plans sécants se coupent suivant une droite (et non suivant un segment ou un point). D'autres difficultés sont apparues lors des exercices qui ont suivi la définition de la projection parallèle. Certains élèves ne pouvaient imaginer que les points situés sous le plan aient une projection parallèle sur celui-ci. Ils pensaient que la projection parallèle d'une droite qui perce le plan sur lequel on projette était une demi-droite.

Prolongements possibles

Un célèbre théorème

Reprenons l'expérience décrite dans l'activité 1 (figure 13 à la page 271). Sur la feuille de papier, notons G', H' et J' les ombres respectives de G, H et J. Dans le plan de la feuille, prolongeons $G'H'$ et AB, $H'J'$ et BC, $G'J'$ et AC. Que remarquons-nous ?

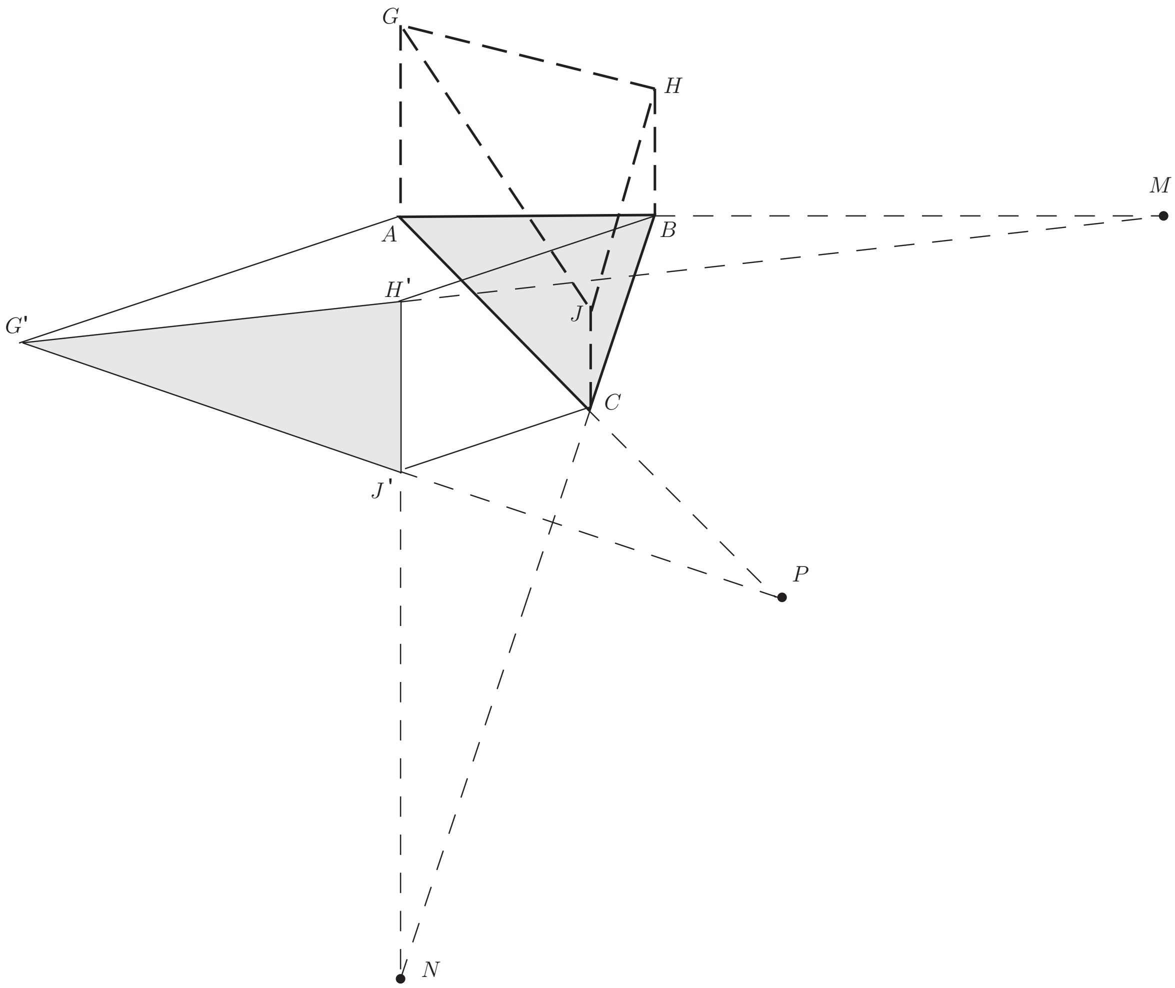


Fig. 21 : M, N, P alignés ?

Après discussion, les élèves seront amenés à conjecturer que, aux erreurs expérimentales près, les droites $G'H'$ et AB, $H'J'$ et BC, $G'J'$ et AC se coupent respectivement en trois points M, N et P qui sont alignés. Il reste maintenant à le démontrer et la conjecture deviendra un théorème qui s'énonce :

Si deux triangles sont tels que leurs sommets sont deux à deux sur des droites parallèles, et que leurs côtés correspondants se coupent deux à deux, alors les points d'intersection sont des points alignés.

Ce théorème est dû à Desargues. Sa démonstration est très simple si les triangles ne sont pas dans un même plan. Considérons les triangles ABC et GHJ.

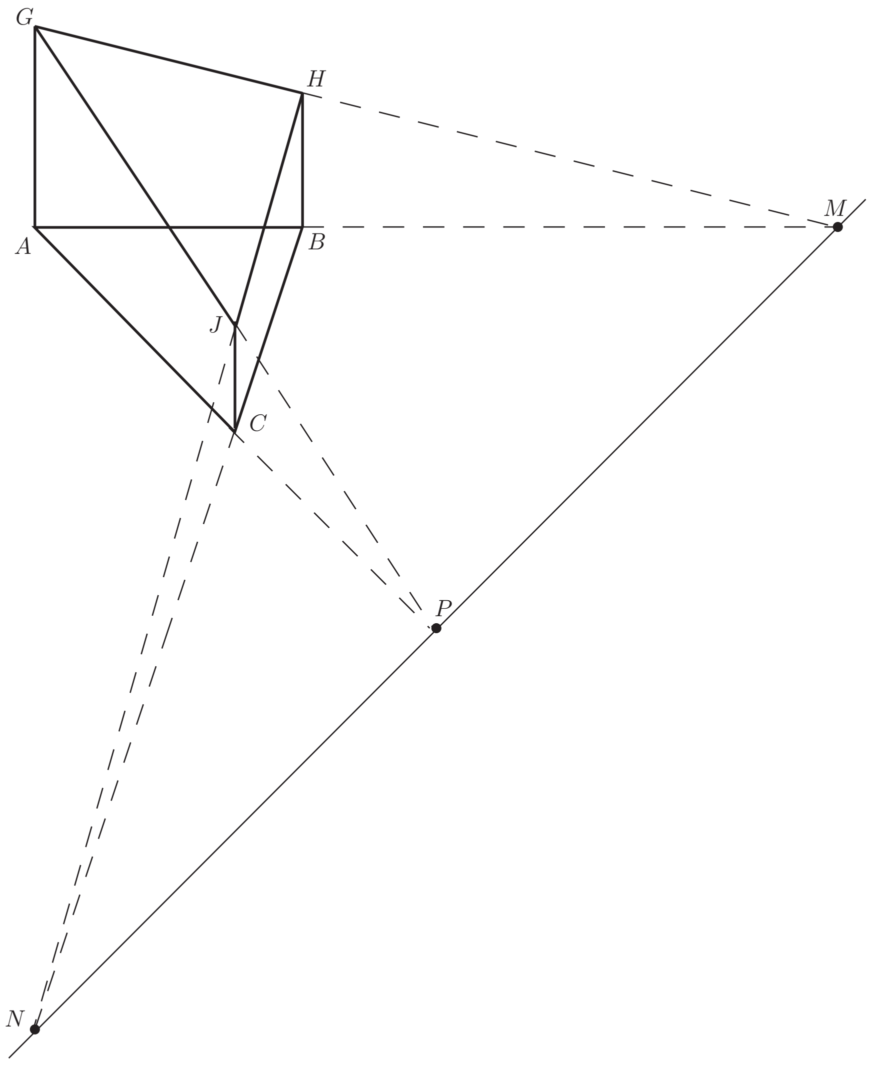


Fig. 22 : Le théorème de Desargues dans l'espace

Il faut amener les élèves à voir que les deux bases du prisme tronqué sont deux plans sécants. Dès lors, puisque les droites AB et GH sont coplanaires, elles se coupent en M. Il en va de même pour les droites AC et GJ qui se coupent en P et les droites BC et HJ qui se coupent en

N. Ces points M, N et P sont communs aux deux plans sécants GHJ et ABC. Par conséquent, ils sont sur leur droite d'intersection.

Si les triangles sont dans un même plan, comme les triangles ABC et $G'H'J'$ de la figure 21 à la page 281, il est commode de considérer la situation plane comme l'image par une projection parallèle de la situation spatiale (figure 23).

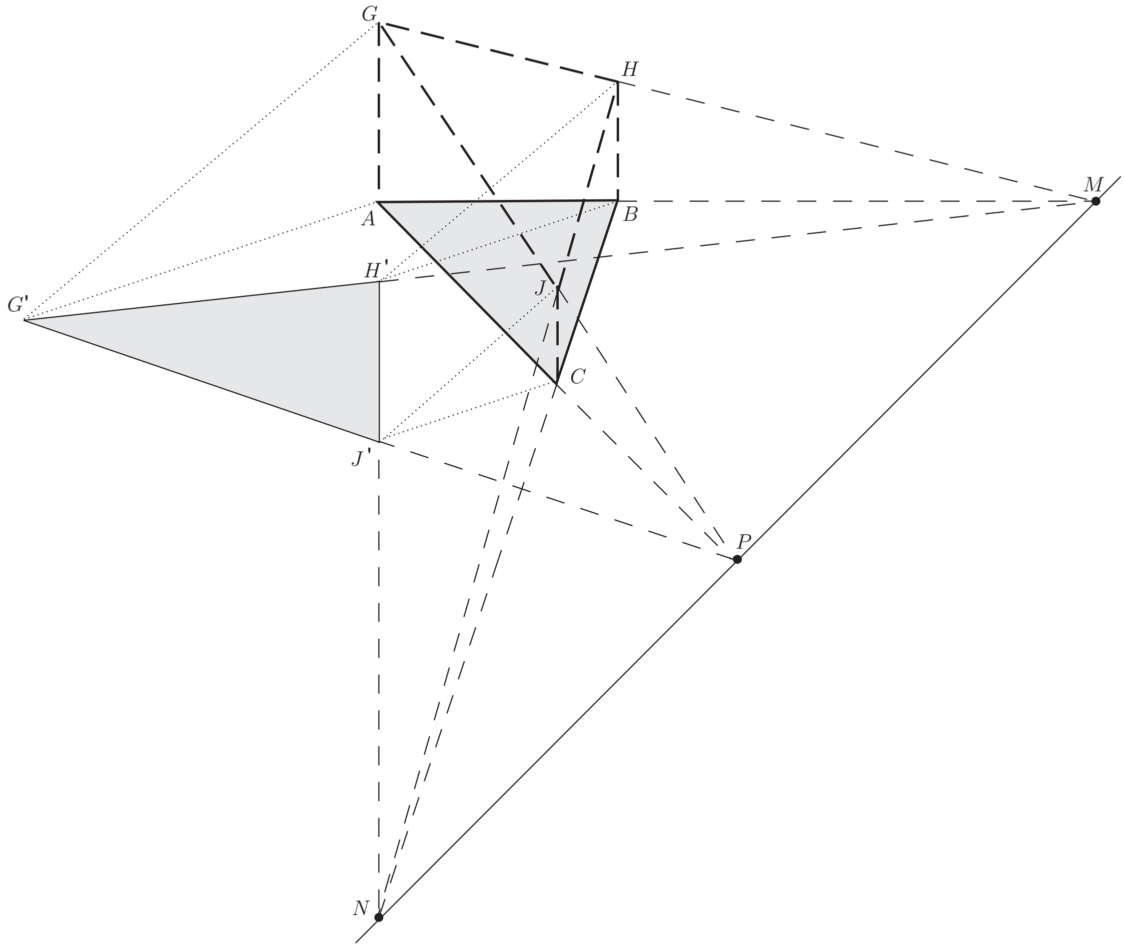


Fig. 23 : Le théorème de Desargues dans le plan

Le tableau suivant précise les images des points qui nous intéressent, par la projection parallèle dont les projetantes sont les rayons du soleil.

$G \longrightarrow G'$	$H \longrightarrow H'$	$J \longrightarrow J'$
$A \longrightarrow A$	$B \longrightarrow B$	$C \longrightarrow C$
$M \longrightarrow M$	$N \longrightarrow N$	$P \longrightarrow P$

Comme le plan ABC est le plan de projection de la projection parallèle considérée, celle-ci envoie chacun des trois points M, N et P sur lui-même. Rappelons que toute projection parallèle conserve les incidences. Le point M, point d'intersection des droites AB et GH est donc aussi le point d'intersection des droites AB et $G'H'$ dans le plan ABC. Le théorème de Desargues est ainsi établi, puisque ce raisonnement peut être répété pour les points N et P.

Commentaires

Il existe un autre théorème, parent de celui-ci et dû également à Desargues, dans lequel les sommets des deux triangles sont deux à deux situés sur trois sécantes issues d'un même point.

Le mathématicien français Girard Desargues (1593 – 1662) est avec son contemporain Blaise Pascal (1623 – 1662), un des précurseurs de la géométrie projective.

2.2 Sections planes et points de percée

Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π déterminé par M, N et P (figure 24). Le point M est sur l'arête $[CD]$, N sur $[AD]$ et P sur $[BD]$.

Comment s'y prendre ?

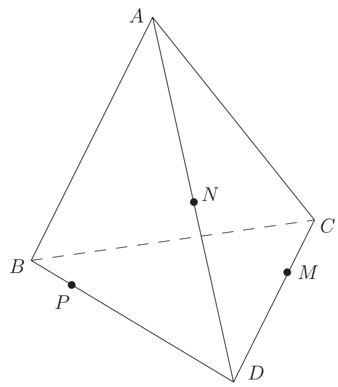


Fig. 24 : Section de tétraèdre

La section de tétraèdre ci-dessus est relativement simple à réaliser. Mais, pour familiariser les élèves avec le fonctionnement des propriétés d'incidence et pour leur en faire découvrir la véritable portée, on leur propose toute une série de problèmes de construction. On fixe le plan de section soit par trois points, soit par un point et une droite ; ces données permettent de déterminer univoquement la section.

Lors d'un premier contact avec ce type de problème, la plupart des élèves sont désarmés et ne savent par où commencer : selon leurs dires, *ils n'y voient rien !*

L'expérience montre que le support d'un tableau d'incidence, tel que nous le décrivons ci-dessous, permet aux élèves les plus « récalcitrants » d'arriver à réaliser la construction. Après en avoir effectué quelques-unes, ils finissent en général par y voir plus clair et se dégagent progressivement de cette « méthode mécanique ».

Prenons par exemple le problème qui consiste à construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π déterminé par M, N et P (figure 25). Le point M est sur $[AB]$, N sur $[AC]$ et P sur $[CD]$.

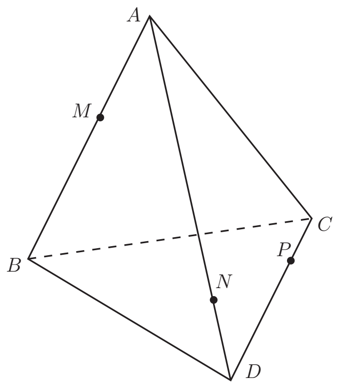


Fig. 25 : Section de tétraèdre

Le point M est sur $[AB]$ et, par conséquent, M est dans le plan ABC et dans le plan ABD. Il est important de faire remarquer que tout point sur une arête appartient à deux faces. De la même manière, N est dans les plans ABD et ACD et P dans les plans ACD et BCD.

On note ces renseignements dans le tableau ci-dessous, où on perçoit alors clairement que les points M et N sont dans une même face ABD. Remarquons également que, par l'énoncé du problème posé, ils sont également dans le plan de section Π. Donc M et N déterminent l'intersection de la face ABD et du plan Π.

Π	Arrière ABC	Gauche ABD	Droite ACD	Base BCD
M N P	M	M N	 N P	 P

Dans ABD, parmi les droites dessinées, la droite MN ne peut couper que les droites AB, AD ou BD. Elle coupe AB en M, AD en N et BD en R (voir figure 26 à la page suivante), qu'on reporte dans le tableau (faces ABD et BCD).

C'est l'occasion d'attirer l'attention des élèves sur le fait que, dans la représentation plane, les droites MN et BC semblent se couper, alors qu'en fait, ce sont des droites gauches, c'est-à-dire des droites non coplanaires et donc disjointes.

Le tableau montre aussi que N et P appartiennent tous deux à la face ACD et au plan Π. Donc NP est l'intersection de Π avec cette face. La droite NP coupe AD en N, CD en P et AC en S (voir figure 27), qu'on reporte dans le tableau (faces ABC et ACD).

On peut terminer la construction de la section en utilisant MS dans ABC, ou PR dans BCD. Quelle que soit la paire de points choisie, MS ou PR, on détermine le même point T sur l'arête BC (voir figure 28).

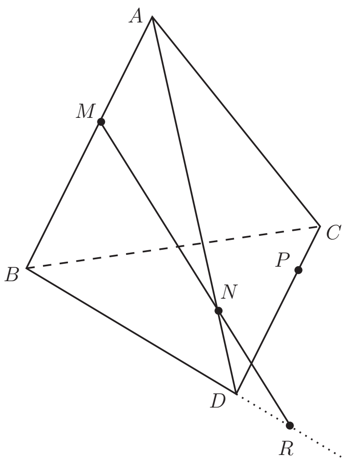


Fig. 26 : Point R

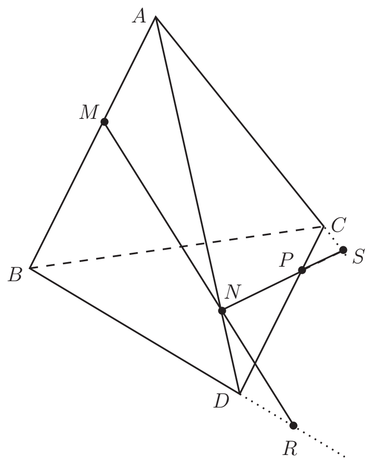


Fig. 27 : Point S

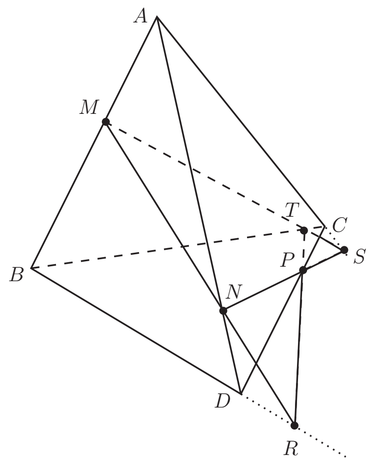


Fig. 28 : Point T

Dans Π, on repère :

Π	Arrière ABC	Gauche ABD	Droite ACD	Base BCD
M	M	M		
N		N	N	
P			P	P
R		R		R
S	S		S	
T	T			T

Cette méthode, ou d'autres qui s'en rapprochent, a été utilisée par plusieurs enseignants du secondaire pendant des années, dans des classes de différents niveaux, y compris dans l'enseignement technique. Chaque fois, la plupart des élèves, qui au départ étaient rebutés par les problèmes de section, ont bien progressé dans la compréhension de la représentation plane de l'espace.

Comme cette méthode leur permet de résoudre l'exercice, ils éprouvent la satisfaction d'avoir surmonté une difficulté, ils ont envie de s'attaquer à d'autres ; ainsi, petit à petit, *ils y voient plus clair* et se dégagent d'eux-mêmes de l'utilisation du tableau d'incidence.

Toutefois, cette technique n'est pas une panacée : certains élèves ne parviennent jamais à construire une section sans l'aide du tableau.

Exercices. – Les énoncés de ces exercices sont repris en annexe aux pages 381 à 386 sous forme de fiches photocopiables pour les élèves.

1. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π, dans les cas suivants (figure 29) :

1. Π est le plan déterminé par d et P où $d \subset ABC$ et $P \in ACD$.
2. Π est le plan déterminé par d et P où $d \subset ABD$ et $P \in ACD$.

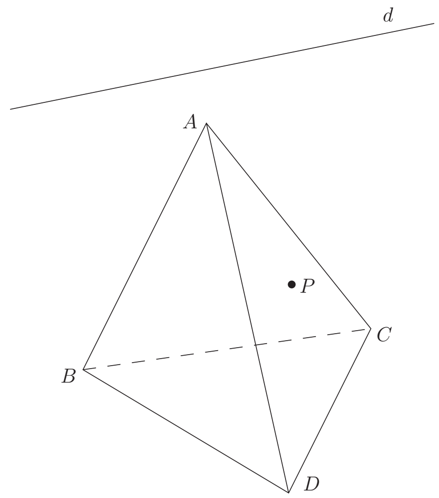


Fig. 29

2. Construire le point de percée de la droite MN dans le plan de la face BCD. Le point M est sur l'arête $[AB]$ et N est dans le plan ACD (figure 30). Suggestion : utiliser la section du tétraèdre par un plan auxiliaire contenant la droite MN.

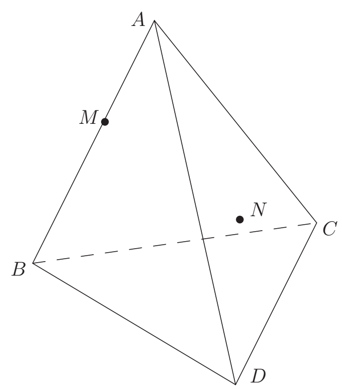


Fig. 30

3. Construire le point de percée de la droite MN dans le plan de la face ACD. Le point M est dans le plan ABD et N est dans le plan BCD (figure 31 à la page suivante).

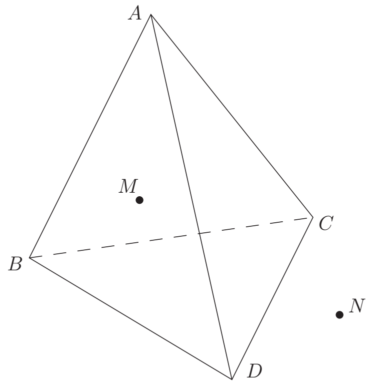


Fig. 31

4. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π déterminé par les trois points M, N et P. M appartient au plan de la face BCD, N, au plan de la face ACD et P à l'arête $[CD]$ (figure 32).

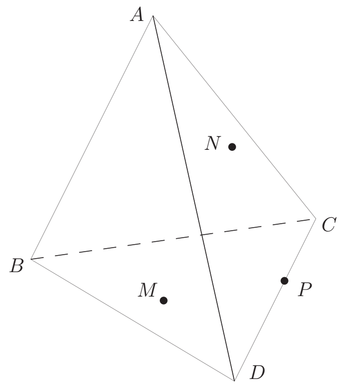


Fig. 32

5. Construire la section de la pyramide à base carrée $SABCD$ par le plan MRN (figure 33).

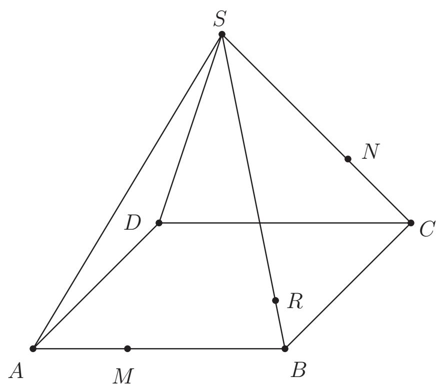


Fig. 33

6. Dans chacun des cas suivants, $PRST$ est-il une section du tétraèdre $ABCD$ par un plan (figures 34, 35 et 36 à la page suivante) ?

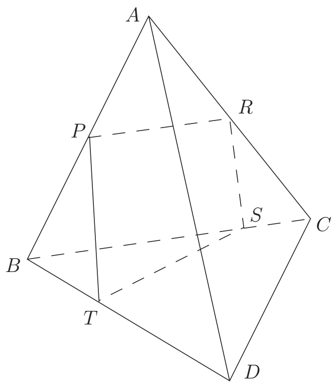


Fig. 34 : Premier cas

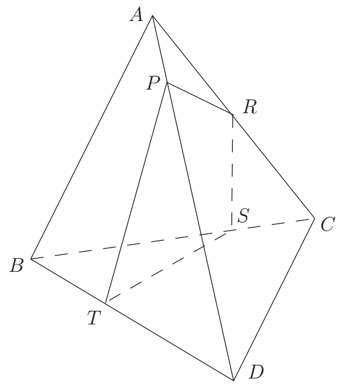


Fig. 35 : Deuxième cas

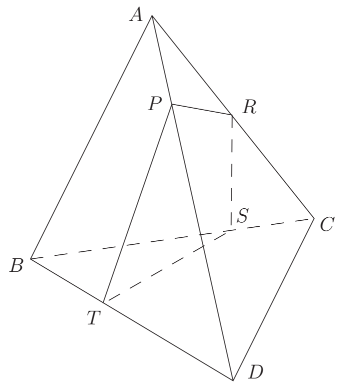


Fig. 36 : Troisième cas

Échos des classes

Après une prise de contact un peu difficile, tous les élèves ont manifesté un intérêt certain pour ce type d'exercices, même des élèves qui avaient perdu toute motivation pour le cours de mathématique à cause de leurs résultats catastrophiques. Cette attitude est sans doute due au fait que la résolution de ces problèmes ne nécessite ni calcul, ni formule, ni prérequis sauf les propriétés établies dans le début de cette séquence d'apprentissage. Le même intérêt a été rencontré dans une classe de l'enseignement technique réputée « faible en mathématiques ». Le recours au tableau d'incidence s'est révélé une aide très précieuse pour les élèves.

Les erreurs et les difficultés les plus souvent rencontrées sont les suivantes :

– Certains élèves utilisent au cours de la construction un point d'intersection apparent, correspondant en fait au croisement de deux droites gauches.

– Ils ne conçoivent pas clairement que la section dans une face du tétraèdre doit être un segment dont les extrémités sont sur les arêtes qui bordent cette face. Ainsi, ils ne pensent pas à prolonger jusqu'aux bords de la face un segment appartenant à la section mais limité par un point donné à l'intérieur de celle-ci (par exemple le segment NP de la figure 32 à la page précédente).

– Tout en sachant que, dans certains cas, il faut prolonger des arêtes pour obtenir des points « utiles », ils ne voient pas toujours clairement quelle arête utiliser.

Les élèves ont observé avec intérêt que certaines constructions pouvaient être menées à bien par différents cheminements conduisant à la même solution. À cet égard, les exercices de construction de points de percée présentent l'intérêt supplémentaire de montrer que le choix arbitraire du plan auxiliaire n'a pas d'influence sur le résultat. Ainsi, dans l'exercice 3, les élèves ont utilisé indifféremment l'un des plans AMN ou BMN, plus rarement CMN ou DMN. L'un d'entre eux a même imaginé de choisir un plan PMN, où P était un point tout à fait quelconque du plan ABD ; il est parvenu au bout de sa construction malgré cette difficulté supplémentaire.

À la fin de cette séquence d'apprentissage, la méthode de construction d'une section plane était comprise par tous les élèves. Ils étaient tous capables de refaire un exercice vu en classe et presque tous pouvaient mener à bien une construction nouvelle. Cependant, la rédaction de leur raisonnement en justifiant les différentes étapes est restée un problème pour certains, malgré le temps passé en classe à exercer cette activité et à corriger les productions individuelles.

3 Parallélisme

De quoi s'agit-il ?

Par un jeu d'ombres et de lumière, étudier le parallélisme dans l'espace.

Enjeux

Étudier les propriétés du parallélisme dans l'espace et les sections planes dans les cubes.

Matières couvertes

Propriétés du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan.

Critère de parallélisme de deux plans.

Compétences. – *Déterminer un point de percée et construire une section plane en justifiant les différentes étapes.* Maîtriser les notions de *condition nécessaire* et de *condition suffisante*, *pratiquer la démonstration par l'absurde.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. Des plaques de verre ou de plexiglas et leur support (matériel décrit à l'activité 1). Il en faut au moins deux.

Du fil et du papier adhésif.

Des transparents.

Un cube de plexiglas transparent dont une face est absente et dont les autres faces sont recouvertes de papier calque.

Un masque percé d'une fente rectiligne de 0.1 mm de large (ce matériel peut être réalisé par photocopie sur transparent du modèle fourni en annexe à la page 387).

Un rétroprojecteur.

Prérequis. – Préciser le sens exact du mot « parallèle ». On peut faire les mises au point nécessaires en partant d'observations sur les arêtes et les faces d'un cube.

DROITES PARALLÈLES : Deux droites coplanaires distinctes sont soit sécantes, soit parallèles. Lorsqu'elles sont sécantes, elles ont un seul point d'intersection. Lorsqu'elles sont parallèles, elles n'ont aucun point d'intersection ; on dit aussi qu'elles sont disjointes.

PLANS PARALLÈLES : Deux plans distincts sont soit sécants, soit parallèles. Lorsqu'ils sont sécants, ils ont une droite d'intersection.
Lorsqu'ils sont parallèles, ils n'ont aucun point d'intersection ; on dit aussi qu'ils sont disjoints.

DROITE PARALLÈLE À UN PLAN : Une droite est parallèle à un plan si elle ne perce pas ce plan ou si elle est contenue dans ce plan.

3.1 Ombres d'un segment
Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan

Comment s'y prendre ?

La première question est celle-ci :

> L'ombre d'un segment peut-elle être parallèle à ce segment, et si oui dans quel(s) cas ?

En manipulant une règle ou un crayon, les élèves arrivent à distinguer deux cas. Le segment peut être placé de telle manière que la droite qui le prolonge soit

– oblique et perce le plan de projection ;

– parallèle au plan de projection.

Le segment est parallèle à son ombre dans le deuxième cas. Pour illustrer et analyser chacune de ces deux situations, collons sur deux vitres des transparents réalisés suivant les figures 37 et 38 (en annexe page 388):

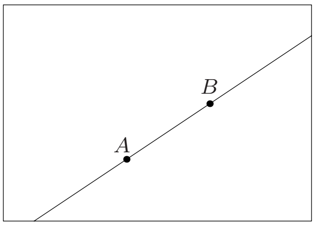


Fig. 37

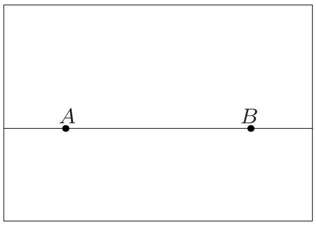


Fig. 38

Des fils sont tendus et fixés avec du papier adhésif entre les points A et B et leurs ombres respectives. S'il n'y a pas de soleil, des fils parallèles représentant les rayons du soleil peuvent matérialiser la situation.

Dans un premier temps, observons et analysons ces deux situations à partir de nos modèles dans l'espace. Puis demandons aux élèves de les représenter sur une feuille de papier et d'expliquer en détail chacun des deux cas. Ce premier travail a pour but de préparer les élèves à aborder un raisonnement par l'absurde.

1. Si le segment $[AB]$ est sur une droite oblique qui perce le plan Δ en P(figure 39), la droite $A'B'$ de l'ombre coupe la droite AB en P.

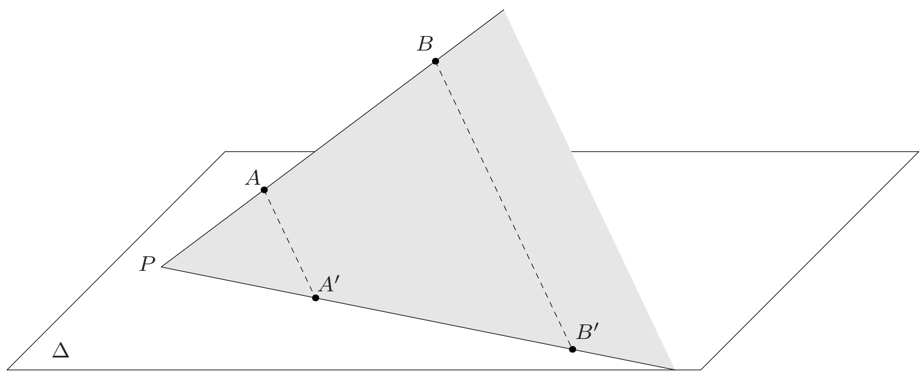


Fig. 39

En effet, le plan Π déterminé par la droite AB et la direction des rayons du soleil (AA' ou BB') coupe le plan Δ suivant la droite de l'ombre $A'B'$.

Le point P appartient au plan Π et au plan Δ, donc P appartient à leur intersection $A'B'$.

2. Si le segment $[AB]$ est sur une droite parallèle au plan Δ (figure 40), les droites AB et $A'B'$ ne peuvent se couper : leur point d'intersection serait commun à la droite AB et au plan Δ, ce qui contredit le parallélisme de la droite AB et du plan Δ. Donc, le segment et son ombre sont sur des droites parallèles.

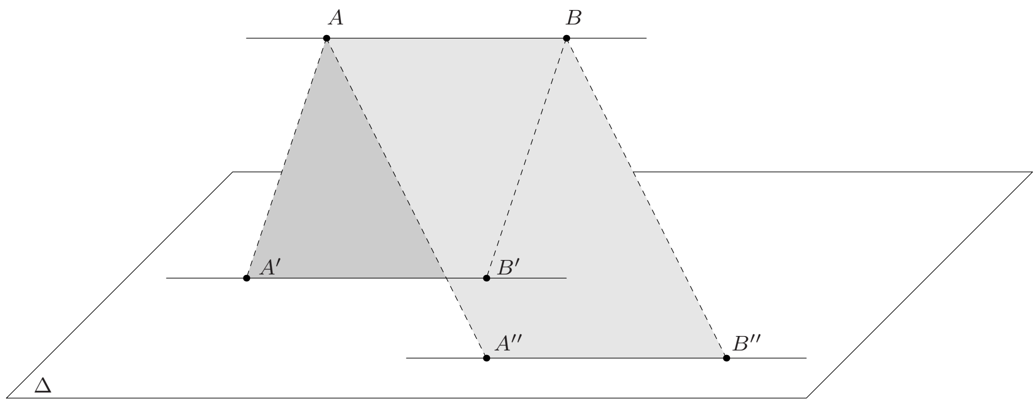


Fig. 40

Le quadrilatère $ABB'A'$ de la figure 40 est un parallélogramme, puisque AB est parallèle à son ombre $A'B'$ et que les rayons du soleil AA' et BB' sont parallèles. La longueur de AB est donc égale à celle de $A'B'$. Ainsi, nous avons démontré deux des conjectures énoncées dans l'activité 1 :

- Les droites parallèles au plan de projection se projettent parallèlement à elles-mêmes.
- Les segments parallèles au plan de projection se projettent en vraie grandeur.

À mesure que le soleil parcourt le ciel, l'ombre de AB se déplace sur le plan Δ, tout en restant parallèle à AB.

De cette observation, il résulte que si une droite d extérieure à un plan Δ est parallèle à ce plan, celui-ci contient une infinité de droites parallèles à d, chacune est l'intersection de Δ avec un plan contenant d.

Énonçons cette propriété sous la forme suivante.

1. *Si une droite extérieure à un plan est parallèle à ce plan, tout plan contenant la droite et sécant avec le premier plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

Démontrons cela. Si l'élève a compris que deux situations seulement sont possibles et qu'elles s'excluent mutuellement, il a déjà franchi un cap important dans la compréhension de la *démonstration par l'absurde.*

Soit d une droite parallèle à un plan Δ, et d' l'intersection de Δ avec un plan Π contenant d. Comme on ne voit pas clairement comment démontrer que les droites d et d' sont parallèles, on en vient à se demander si elles ne pourraient pas être sécantes ; mais si on imagine d et d' sécantes, on se trouve forcément dans l'autre situation, celle où la droite d perce le plan Δ. Ce qui contredit évidemment le fait que la droite d est parallèle au plan Δ. Donc, puisqu'il n'est pas possible que d et d' soient sécantes, c'est qu'elles sont forcément parallèles (comme elles sont coplanaires, il est exclu qu'elles soient gauches).

Il est important de conserver dans la classe les modèles à trois dimensions mis en place dès le début de cette activité. Les élèves peuvent les regarder chaque fois qu'ils en éprouvent le besoin. Le va-et-vient permanent entre l'observation des modèles et la formulation des idées soutient efficacement le raisonnement des élèves tout au long de leur démarche intellectuelle et amène de manière aussi naturelle que possible le principe de la démonstration par l'absurde.

Si la démonstration de la propriété semble maintenant évidente aux élèves, il nous reste cependant une dernière étape importante à franchir : rédiger cette démonstration sous une forme plus théorique. Certains élèves seront sans doute déconcertés, ou même rebutés, par cette dernière forme de la démonstration. Nous pensons néanmoins qu'il convient de les y amener à ce moment, en la présentant comme une synthèse précise de toute la discussion qui a précédé. Bien sûr, nous sommes conscients de ce qu'il s'agit là d'une première approche d'une démonstration de ce type. Celle-ci pourrait être présentée comme suit :
Soit un plan Π contenant une droite d et sécant avec un plan Δ. La droite d' d'intersection de Π avec Δ est parallèle à d.

Fig. 41

En effet, si d et d' n'étaient pas parallèles, elles seraient sécantes dans Π et leur point d'intersection I serait commun à d et Δ. Ceci est impossible dans l'hypothèse où d est parallèle à Δ ; donc d' est parallèle à d.

On peut alors songer à la proposition réciproque : si une droite d (extérieure à un plan Δ) est parallèle à une infinité de droites parallèles de Δ, alors d est parallèle à Δ.

Cette proposition semble bien vraie. Mais la condition paraît très exigeante. À la réflexion, on aboutit à la question suivante :

À combien de droites du plan faut-il vérifier qu'une droite est parallèle pour pouvoir conclure qu'elle est parallèle au plan ?

Lorsque la majorité des élèves pense qu'il *suffit* de vérifier que la droite est parallèle à une *seule* droite du plan, on propose d'en établir la preuve. Cette *condition suffisante* est encore appelée « critère de parallélisme d'une droite et d'un plan »[1].

2. Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan : *Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.*

Si la droite est dans le plan, elle est parallèle au plan (par définition). Considérons donc le cas où la droite est disjointe du plan.

Il nous faut donc montrer que :
Si le plan Δ contient une droite d' parallèle à d, alors d est parallèle à Δ.

En effet, d et d' déterminent un plan Π. La droite d'intersection de Δ et de Π est d', puisqu'elle est contenue dans ces deux plans (figure 42).

[1] Le mot *critère* désigne le plus souvent une règle pratique de vérification d'une propriété, c'est-à-dire une *condition suffisante*. Cependant, dans certains ouvrages de géométrie, ce terme est employé pour désigner une *condition nécessaire et suffisante*.

Fig. 42

Si d perçait Δ en un point I (figure 43),

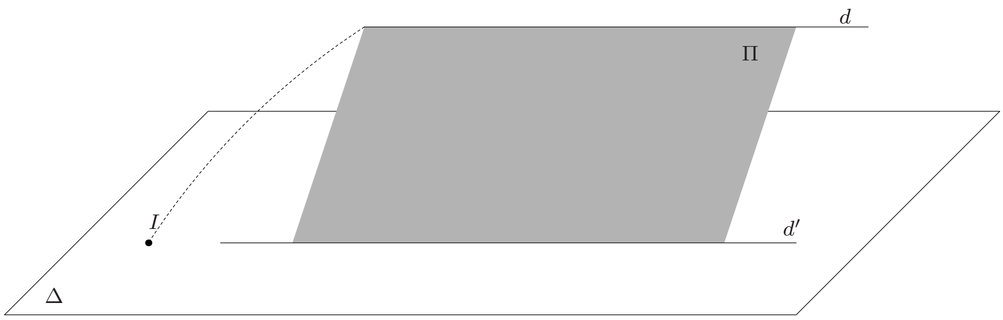


Fig. 43

- I serait sur d ;
- I serait dans Δ et dans Π, donc sur d' ;
- I serait le point d'intersection de d et d', ce qui est impossible puisque d est parallèle à d'.

La droite d est donc parallèle à Δ. Ceci démontre le critère annoncé.

La propriété a pu être établie par ce même type de raisonnement où, après avoir supposé le contraire de la thèse, on arrive à rejeter cette supposition car elle implique une contradiction. C'est ce type de raisonnement qu'on appelle habituellement *démonstration par l'absurde*. Nous allons voir qu'on peut l'utiliser pour démontrer de nombreuses propriétés du parallélisme.

Ce critère peut encore s'énoncer en termes de projections parallèles :

3. *Si une droite est parallèle à son image par une projection parallèle sur un plan, alors elle est parallèle à ce plan.*

Le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan est non seulement une *condition suffisante*, mais aussi une *condition nécessaire*.

4. *Une droite est parallèle à un plan si et seulement si il existe dans le plan une droite qui lui est parallèle.*

En l'énonçant de cette manière, on fait apparaître en même temps la condition nécessaire (C.N.) et la condition suffisante (C.S.).

C.N. : Si une droite est parallèle à un plan, alors il existe dans le plan une droite qui lui est parallèle

C.S. : Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

La *condition nécessaire* est une conséquence immédiate de la propriété 1 à la page 293, et la *condition suffisante* vient d'être démontrée.

Pour aider les élèves à mieux percevoir la différence entre *condition nécessaire* et *condition suffisante*, on peut l'illustrer par un exemple simple. Si deux droites sont parallèles, elles sont *nécessairement* disjointes ; mais si les droites sont disjointes, cela ne *suffit* pas pour en déduire qu'elles sont parallèles, puisqu'elles pourraient aussi bien être gauches. Par contre, si deux droites sont disjointes et coplanaires, on peut en déduire qu'elles sont parallèles.
D'autre part, si deux droites sont disjointes, elles ne sont pas *nécessairement* gauches ; mais si des droites sont gauches, cela *suffit* pour déduire qu'elles sont disjointes.

Exercices. – Voici un ensemble d'énoncés de propriétés. Les uns sont corrects, les autres ne le sont pas.

1. Il existe un seul plan parallèle à un plan donné et comprenant un point donné extérieur à ce premier plan.
2. Si deux plans sont parallèles, toute droite qui perce l'un perce l'autre.
3. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.
4. Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.
5. Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.
6. Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
7. Si une droite est parallèle à un plan, tout plan qui coupe la droite coupe aussi le plan.
8. Si deux plans sont parallèles à une même droite, ils sont parallèles.
9. Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
10. Si deux droites sont parallèles à un même plan, elles sont parallèles.
11. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui contient l'une est parallèle à l'autre.
12. Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

Dans un premier temps, les élèves relèvent les propriétés vraies et les fausses. Pour justifier qu'un énoncé est faux, ils sont invités à fournir un contre-exemple. La première propriété est connue comme l'axiome d'Euclide dans l'espace. Dans une théorie axiomatique minimale[10], on peut

[10] Le but poursuivi n'est pas d'arriver à une théorie axiomatique mais de fournir aux élèves l'occasion de s'exercer au raisonnement déductif, notamment au raisonnement par l'absurde.

l'établir à partir de l'axiome d'unicité de la droite parallèle à une droite donnée par un point extérieur à celle-ci. En faire la preuve est difficile pour des élèves qui abordent les démonstrations de géométrie dans l'espace. Il vaut mieux leur proposer en premier lieu des activités à leur portée. C'est pourquoi nous admettrons la propriété 1 en la prenant comme axiome. Dès lors, les propriétés qui sont vraies peuvent être démontrées soit en utilisant le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, soit par une démonstration par l'absurde, soit par une combinaison des deux. Cette activité de démonstration est demandée aux élèves. Rien n'empêche le professeur de revenir sur la propriété 1 en fonction de l'intérêt manifesté dans sa classe.

Échos d'une classe

Grâce au dispositif des figures 39 et 40 à la page 292, les élèves ont rapidement compris le raisonnement par l'absurde qui sous-tend la démonstration de la propriété 1 à la page 293. Ils ont pu l'expliquer dans un langage proche du langage courant. Par contre, la mise en place de la démonstration formalisée a suscité quelques réactions négatives. À ce stade du travail, les élèves ne perçoivent pas bien l'utilité de disposer d'un critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, de connaître des propriétés et de les établir par des démonstrations.

Les exercices de la page 296 provoquent beaucoup de discussions et d'étonnements. Après une première phase de réflexion personnelle, les élèves confrontent leurs résultats et s'aperçoivent de la diversité de leurs réponses. Presque tous ont tenu pour vraie l'une ou l'autre propriété qui s'est révélée fausse après une analyse plus poussée. Cette prise de conscience en amène certains à revoir leur position sur l'utilité des démonstrations. Les problèmes de sections planes vont les convaincre de la nécessité de connaître des propriétés.

3.2 Sections planes dans un cube

Comment s'y prendre ?

On masque le faisceau de lumière d'un rétroprojecteur par la feuille opaque percée d'une fente de 0.1 mm. La fente et la direction des rayons lumineux déterminent un plan dont la trace est visible sur un écran : cette trace est la droite d'intersection de ce plan lumineux avec l'écran.

Si on place un cube translucide dans ce plan lumineux, sa trace sur le cube permet de visualiser la section du cube par ce plan. Le fait que le cube soit translucide permet de voir la trace lumineuse aussi bien à l'intérieur du cube qu'à l'extérieur ; par contre, si le cube est transparent, la trace n'est pas visible. L'effet souhaité peut être obtenu en recouvrant de papier calque un cube en plexiglas. La face dirigée vers la fente doit être absente pour éviter la réflexion de la lumière sur cette face. À partir des observations effectuées avec ce matériel, les élèves tentent de répondre aux questions suivantes :

1. Combien de côtés peuvent avoir les polygones obtenus comme section ?
2. Comment le plan lumineux coupe-t-il deux faces parallèles ?
3. La section peut-elle être un polygone régulier ?
4. La section peut-elle être un rectangle ? un parallélogramme ? un losange ?

Des éléments de réponse sont obtenus en faisant varier la position du cube par rapport au plan lumineux. La section du cube peut-elle être un heptagone comme le suggère la figure 44 (voir annexe page 389) ?

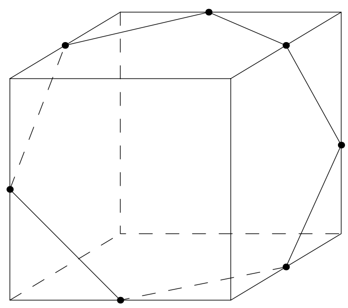


Fig. 44 : Heptagone

Une réponse à la question 2 peut être apportée par la propriété :

5. *Tout plan sécant à deux plans parallèles les coupe suivant des droites parallèles.*

La preuve (par l'absurde) en est demandée en activité de démonstration.

Pour répondre aux questions 3 et 4, les élèves peuvent chercher à produire un exemple pour chaque cas, éventuellement d'abord, au moyen du plan lumineux sur le cube en plexiglas, puis en le construisant sur un cube en perspective cavalière.

Voici quelques sections particulières en forme de polygone régulier (figures 45 à 47) :

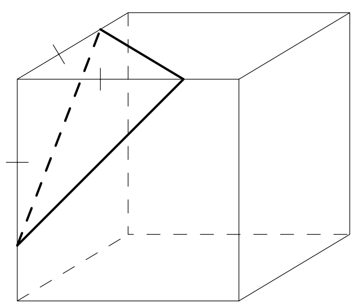


Fig. 45 : Triangle équilatéral

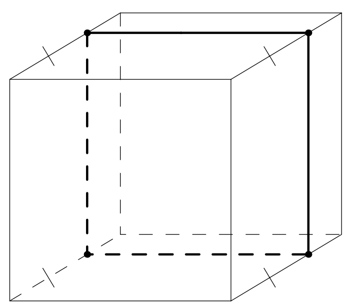


Fig. 46 : Carré

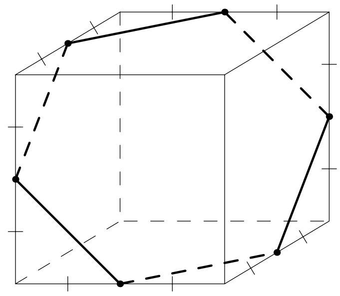


Fig. 47 : Hexagone régulier

Est-il possible de trouver un pentagone régulier comme le suggère la figure 48 (voir annexe page 389) ?

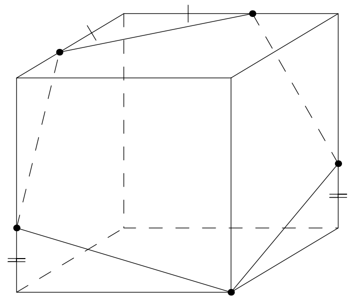


Fig. 48 : Pentagone régulier ?

Le théorème 5 devrait mettre les élèves sur la voie d'une argumentation correcte pour rejeter la figure 48 en tant que section plane. S'il est possible de trouver un pentagone comme section plane dans un cube, celui-ci ne pourra jamais être régulier.

Voici un rectangle, un parallélogramme et un losange :

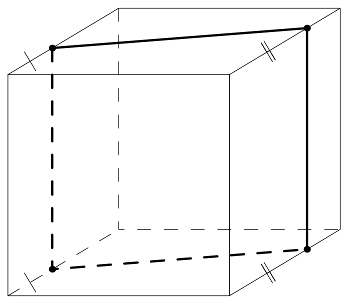


Fig. 49 : Rectangle

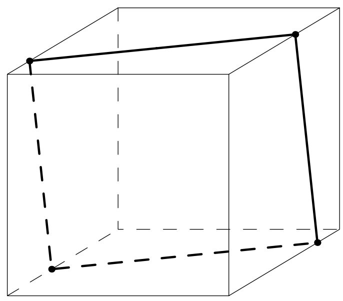


Fig. 50 : Parallélogramme

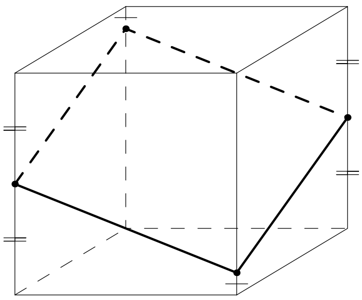


Fig. 51 : Losange

Exercices. – Des exercices de construction de sections planes dans des cubes sont proposés. Les énoncés sont repris en annexe aux pages 390 à 395 sous forme de fiches photocopiables pour les élèves. Le plan de section est donné soit par trois de ses points, soit par un point et une droite. Certaines de ces constructions peuvent être réalisées au moyen des seules propriétés d'incidence. Cependant la propriété 5 permet de les construire plus facilement, ou de vérifier la validité d'une section. Ces observations peuvent inciter les élèves à découvrir de nouvelles propriétés et à les démontrer pour pouvoir les utiliser ensuite.

1. Construire la section du cube de la figure 52 par le plan XYZ où $X \in BB'$, $Y \in BC$ et $Z \in A'D'$.

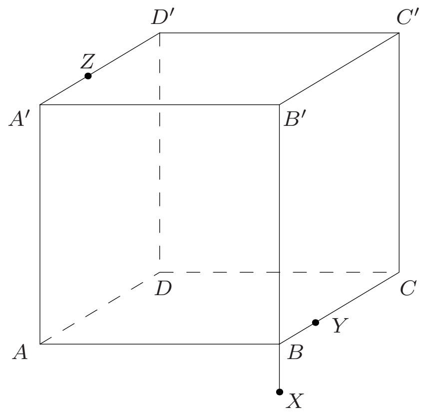


Fig. 52

2. Dans une seulement des deux figures 53 et54, le quadrilatère $XYTR$ est la section du cube par le plan XYZ, où $X \in A'B'$, $Y \in C'D'$ et $Z \in CD$. Laquelle et pourquoi ?

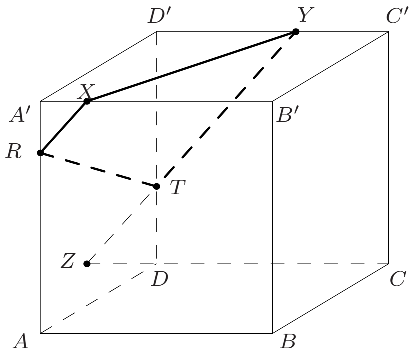


Fig. 53

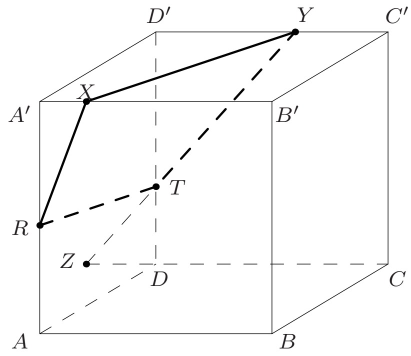


Fig. 54

3. Construire la section du cube de la figure 55 par le plan XYZ où $X \in AB$, $Y \in B'C'$ et $Z \in A'B'$.

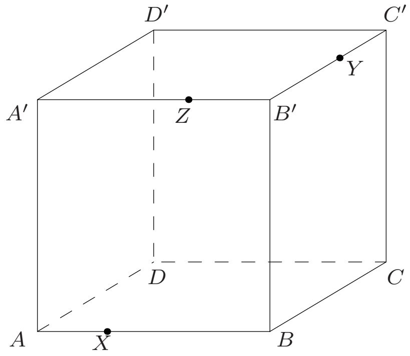


Fig. 55

4. Construire la section du cube de la figure 56 par le plan XYZ où $X \in BC$, $Y \in AB$ et $Z \in A'B'C'D'$.

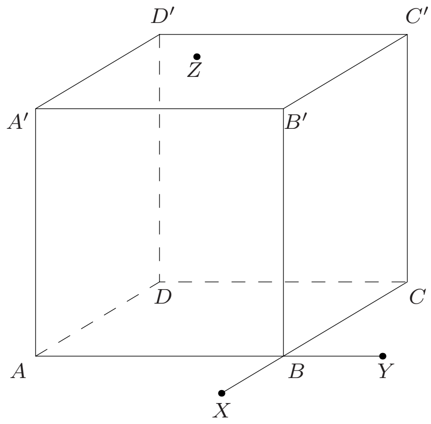


Fig. 56

5. Construire la section du cube de la figure 57 par le plan XYZ où X, Y et Z sont respectivement les milieux des arêtes $[A'D']$, $[D'C']$ et $[AB]$. Démontrer ensuite que la section obtenue est un hexagone régulier.

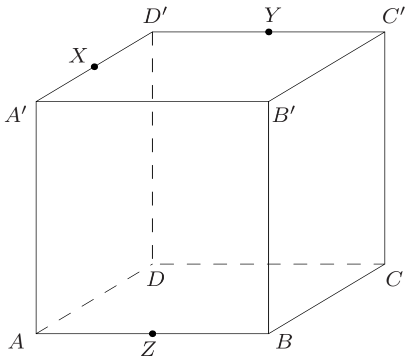


Fig. 57

6. Construire la section de la pyramide à base carrée de la figure 58 par le plan MNR, dans le cas où RN est parallèle à BC.

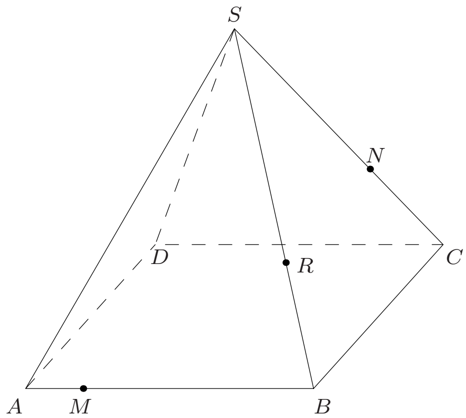


Fig. 58

Un nouveau théorème sur le parallélisme peut émerger de cette situation.

6. *Si deux plans sécants sont coupés par un troisième parallèle à leur intersection, alors ce troisième plan coupe les deux premiers suivant des droites parallèles à leur intersection.*

Échos d'une classe

Les élèves ont été invités à construire la section de l'exercice 1 sans connaître au préalable le théorème 5 qui affirme que tout plan sécant à deux plans parallèles les coupe suivant deux droites parallèles. Ils ont réalisé leur construction en se basant sur les propriétés d'incidence uniquement. Une observation attentive, axée sur le parallélisme des côtés de l'hexagone de la section, leur a permis de dégager la propriété. L'énoncer correctement a posé problème à certains tandis que d'autres en ont proposé spontanément une justification par l'absurde. Les élèves constatent que ce théorème 5, très utile à la résolution des exercices 2 et 3, est nécessaire pour aborder l'exercice 4.

La construction demandée à l'exercice 6 exploite de manière très claire le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, ainsi que le théorème préliminaire 1 à la page 293 : *Si une droite extérieure à un plan est parallèle à ce plan, tout plan contenant la droite et sécant avec le premier plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

C'est donc par le biais de leur utilisation dans les exercices que les élèves découvrent peu à peu l'intérêt des critères et propriétés qui trouvent ainsi leur justification.

3.3 Critère de parallélisme de deux plans

Comment s'y prendre ?

Le professeur répartit les élèves en groupes et fournit à chaque groupe une plaque de plexiglas et deux transparents. Sur le premier de ceux-ci, on a dessiné deux droites parallèles, et sur le second, deux droites sécantes. Les élèves donnent au plan de plexiglas quelques positions différentes au-dessus d'une table ensoleillée et vérifient, dans chaque cas, s'il est possible d'y déposer les transparents de telle manière que chacune des deux droites qui y sont dessinées soit parallèle à son ombre.

L'opération est assez aisée pour le transparent qui porte les deux droites parallèles : il suffit d'avoir placé l'une des droites parallèlement à son ombre pour que l'autre droite soit aussi dans la position adéquate. La justification de ce fait (et de ceux qui vont suivre) procure notamment l'occasion d'utiliser le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan et les propriétés qui en découlent.

Le problème posé par les deux droites sécantes semble plus compliqué. La seule situation claire d'emblée est celle où l'on place le transparent sur un plan horizontal, c'est-à-dire parallèle au plan de projection. Dans ce cas, on observe que, quelle que soit la position des deux droites sur le plan, leurs ombres leur sont constamment parallèles. Cette observation peut également être justifiée. C'est à nouveau un va-et-vient permanent entre l'observation et la justification des faits observés qui soutient le raisonnement et guide la démarche.

Les questions suivantes sont alors abordées :

- Peut-on trouver dans n'importe quel plan deux droites sécantes telles que chacune soit parallèle à son ombre ?
- Si une droite est parallèle à son ombre, quelle est sa position par rapport au plan de projection ?

Si l'on applique le transparent sur la plaque de plexiglas maintenue en position oblique, on constate qu'il est toujours possible de placer une des deux droites sécantes de telle manière qu'elle soit parallèle à son ombre, mais que ce résultat ne pourra jamais être obtenu pour les deux droites en même temps. La droite qui est parallèle à son ombre est évidemment parallèle au plan horizontal sur lequel les ombres sont observées, en vertu du critère de parallélisme d'une droite et d'un plan. La seule manière d'amener les deux droites sécantes à être parallèles à leur ombre est donc de les placer toutes les deux en position horizontale, et dans ce cas , nous constatons que le plan qui les contient est horizontal lui aussi.
Nous avions déjà observé que toutes les droites d'un plan horizontal sont parallèles à leur ombre. Suite à ces nouvelles observations, la question qui se pose est :

Combien de droites du plan devraient être parallèles à leur ombre pour qu'on puisse conclure que le plan est parallèle au plan de projection ?

La réponse qui ressort des dernières observations est qu'il en faut deux, dans deux directions différentes, c'est-à-dire sécantes (puisque nous avons pu placer deux droites parallèles qui soient parallèles à leur ombre dans un plan oblique). À ce stade du raisonnement, il semble naturel de conjecturer que cette condition nécessaire est aussi une condition suffisante. Nous allons montrer que, pour qu'un plan soit parallèle à un autre, il suffit que *deux droites sécantes* du premier soient respectivement parallèles à leur ombre sur le deuxième, ou encore que le premier contienne deux droites sécantes parallèles au deuxième. Nous dégageons ainsi deux formes équivalentes du *critère de parallélisme de deux plans* et nous proposons aux élèves de le démontrer.

Critère de parallélisme de deux plans

7. *Première forme :*
Si un plan contient deux droites sécantes parallèles à un autre plan, ces deux plans sont parallèles.

Démontrons ce critère par l'absurde.

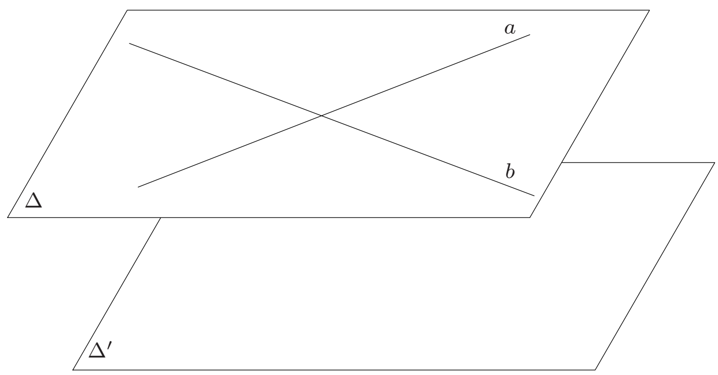


Fig. 59

Supposons que Δ et Δ' ne sont pas parallèles. Ces deux plans sont donc sécants. Comme Δ contient la droite a parallèle à Δ', il coupe le plan Δ' suivant une droite i parallèle à a (propriété 1 à la page 293). Pour la même raison, la droite i doit aussi être parallèle à b. Comme i ne peut être parallèle à la fois aux deux droites sécantes a et b (axiome d'Euclide dans le plan), l'hypothèse que Δ et Δ' ne sont pas parallèles nous conduit à une contradiction. Nous pouvons donc conclure que les deux plans Δ et Δ' sont bien parallèles.

8. *Deuxième forme :*
Si un plan contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, ces deux plans sont parallèles.

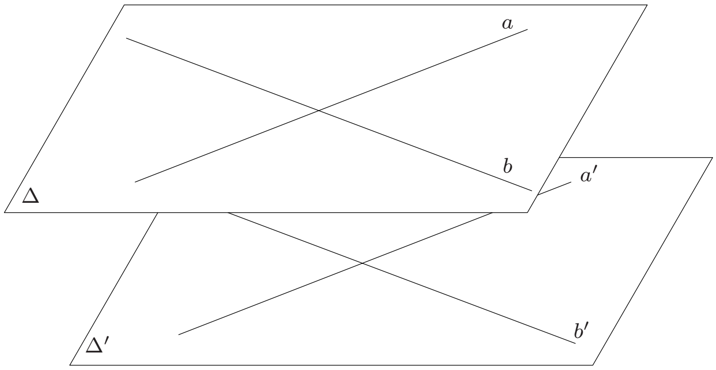


Fig. 60

Si a est parallèle à une droite a' de Δ', elle est parallèle au plan Δ'. De même, la droite b est parallèle à Δ', ce qui nous ramène à l'énoncé précédent.

Ce critère peut encore s'énoncer en termes de projections parallèles.

9. *Si un plan contient deux droites sécantes respectivement parallèles à leurs images par une projection parallèle sur un autre plan, ces deux plans sont parallèles.*

Prolongements possibles

Construire un plan passant par un point donné et parallèle à deux droites gauches données.

Un tétraèdre est coupé par un plan parallèle à deux arêtes gauches. Quelle est la nature de la section ?

Théorème de Thalès dans l'espace. – Ce théorème va nous permettre de mettre en évidence un processus de généralisation, tout en utilisant de manière naturelle les sections planes dans les tétraèdres. Un nouveau type de projection va s'en dégager : la projection d'une droite sur une droite parallèlement à un plan.

Les configurations de Thalès dans le plan sont associées dans tous les esprits à un ensemble de droites parallèles coupées par des sécantes. On demande aux élèves d'imaginer une configuration analogue dans l'espace. La première idée qui émerge naturellement est la transposition du théorème de Thalès aux droites de l'espace. Or ici, un ensemble de droites parallèles ne coupe pas forcément une droite quelconque. Par contre, un ensemble de plans parallèles coupe nécessairement toutes les droites de l'espace qui ne leur sont pas parallèles. Ces plans déterminent des segments sur les droites. La question posée est la suivante.

Les rapports entre les segments déterminés sur les droites de l'espace par des plans parallèles sont-ils les mêmes sur n'importe quelle droite ?

Des droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles ou gauches. Dans les deux premiers cas, les droites sont coplanaires et ceci nous ramène à une situation connue. Dans un premier temps, les élèves sont invités à observer et analyser ces deux situations. Le moment est venu d'exploiter notre travail sur les sections planes dans un tétraèdre (arêtes concourantes) et dans un prisme (arêtes parallèles) pour éclairer ce nouveau problème sous un jour familier. Les plans parallèles sont introduits en considérant un plan de section parallèle à la base (ou aux bases s'il s'agit d'un prisme).

Droites concourantes coupées par des plans parallèles – Considérons la section du tétraèdre $ABCD$ par un plan parallèle à sa base BCD.

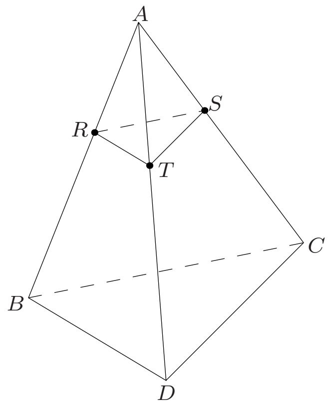


Fig. 61

Les élèves construisent la section à titre d'exercice et en justifient les étapes. Le plan de section Π, parallèle au plan Δ de la base BCD, coupe les faces ABC, ACD et ABD respectivement suivant les droites RS parallèle à BC, ST parallèle à CD et RT parallèle à DB. Les deux plans Δ et Π, et un troisième plan Δ' passant par le sommet A et parallèle aux deux premiers, déterminent sur les droites qui portent les arêtes, les segments $[AR]$ et $[AB]$, $[AS]$ et $[AC]$, $[AT]$ et $[AD]$. Peut-on observer et justifier l'égalité des rapports des longueurs de ces segments ?

On y parvient facilement. En effet, on voit apparaître une configuration de Thalès dans le plan ABC, une autre dans le plan ACD et la dernière dans le plan ABD, ce qui nous donne successivement :

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|}, \quad \frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|AT|}{|AD|} \quad \text{et} \quad \frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AT|}{|AD|}.$$

En rassemblant ces trois égalités, on obtient :

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|AT|}{|AD|}.$$

Si un autre plan parallèle à la base coupe le tétraèdre suivant $R'S'T'$, on obtient par un raisonnement analogue :

$$\frac{|RR'|}{|RB|} = \frac{|SS'|}{|SC|} = \frac{|TT'|}{|TD|}.$$

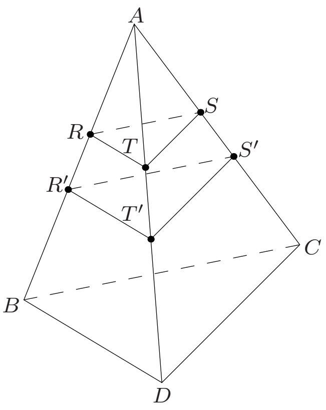


Fig. 62

Les longueurs des segments déterminés sur les arêtes par les trois plans parallèles sont donc bien proportionnelles.

Remarquons au passage que le fait d'avoir travaillé sur les arêtes d'un tétraèdre ne nuit en rien à la généralité de la démonstration, puisqu'un tétraèdre peut toujours être construit sur trois droites concourantes.

Nous pouvons donc conclure.
Des plans parallèles déterminent sur des droites concourantes des segments proportionnels.

Droites parallèles coupées par des plans parallèles – Recommençons le même raisonnement sur un prisme à base triangulaire, coupé par un plan de section parallèle à ses bases.

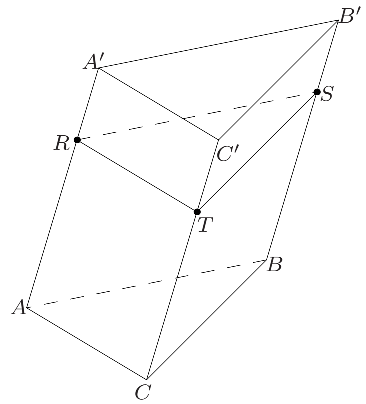


Fig. 63

Le plan de section Π, parallèle aux plans Δ de la base ABC et Δ' de la base $A'B'C'$, coupe les faces $AA'B'B$, $BB'C'C$ et $AA'C'C$ respectivement suivant les droites RS parallèle à AB, ST parallèle à BC et RT parallèle à AC (à justifier). Les trois plans Δ, Δ' et Π déterminent, sur les droites qui portent les arêtes AA', BB' et CC', les segments $[AR]$ et $[AA']$, $[BS]$ et $[BB']$, $[CT]$ et $[CC']$. Les parallélogrammes qui apparaissent sur les faces nous donnent les égalités

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| \quad \text{et} \quad |AR| = |BS| = |CT|,$$

et par conséquent

$$\frac{|AR|}{|AA'|} = \frac{|BS|}{|BB'|} = \frac{|CT|}{|CC'|}.$$

Comme un prisme peut toujours être construit sur des droites parallèles, on peut conclure en toute généralité :
Des plans parallèles déterminent sur des droites parallèles des segments proportionnels.

Droites gauches coupées par des plans parallèles – C'est évidemment ce cas qui va nous permettre d'étendre réellement le domaine d'application du théorème de Thalès. Comme les droites ne sont plus coplanaires, nous ne pourrons plus nous référer d'emblée à une configuration de Thalès dans un plan. Nous proposons aux élèves d'établir la propriété en se référant au problème de la section plane d'un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes gauches.

Ils construisent en justifiant les étapes (si ce n'est déjà fait) la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π parallèle aux arêtes AC et BD, passant par le point P de l'arête AB (figure 64).

Le plan Π coupe les faces ABD, ACD, BCD et ABC respectivement suivant les droites PR parallèle à BD, RS parallèle à AC, ST parallèle à BD et TP parallèle à AC. Appelons Δ le plan contenant BD et parallèle à AC et Δ' le plan contenant AC et parallèle à BD. Les élèves justifient que les trois plans Δ, Δ' et Π sont parallèles. La question est de démontrer que ces trois plans déterminent sur les droites gauches AB et CD des segments proportionnels, c'est-à-dire que

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CS|}{|CD|}.$$

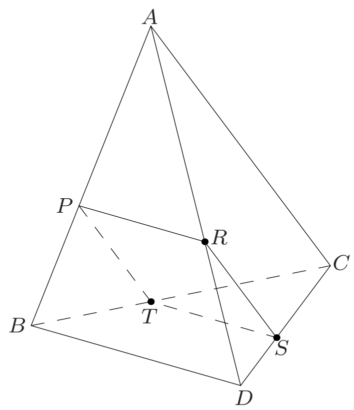


Fig. 64

Les élèves seront probablement tentés de retrouver des configurations de Thalès dans les plans des faces, cette démarche ayant donné précédemment les résultats escomptés ; et en effet, on trouve

dans la face ABD :

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AR|}{|AD|},$$

dans la face ACD :

$$\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|CS|}{|CD|},$$

ce qui nous donne finalement :

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CS|}{|CD|}.$$

Dans ce cas-ci également, on peut conclure que la propriété a été démontrée dans le cas général. En effet, considérons deux droites gauches d et d' et trois plans Δ, Π et Δ' qui les coupent. La droite d coupe les plans extérieurs Δ et Δ' en A et B, et d' coupe ces mêmes plans en C et D. On retrouve ainsi le tétraèdre $ABCD$ et sa section $PRST$ par le plan Π, comme dans la figure 64.

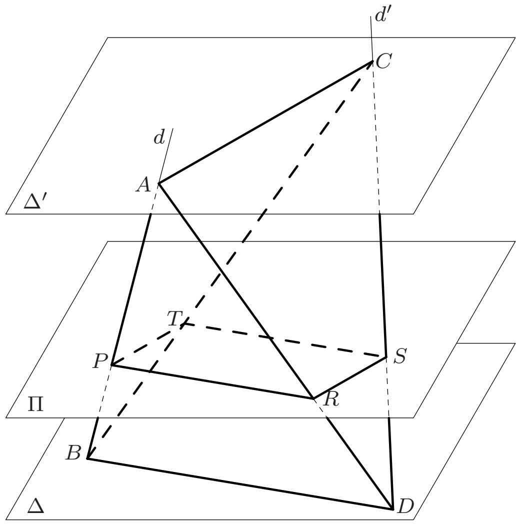


Fig. 65

En conclusion, nous pouvons énoncer le *Théorème de Thalès dans l'espace* :

10. *Si des plans parallèles coupent deux droites quelconques de l'espace, les segments déterminés sur l'une sont proportionnels aux segments correspondants déterminés sur l'autre.*

On peut également interpréter les points C, S et D de la droite CD comme les images des points A, P et B de la droite AB par une projection de la droite AB sur la droite CD parallèlement au plan Π, ce qui permet d'énoncer le théorème sous la forme :

11. *Toute projection d'une droite sur une droite parallèlement à un plan conserve le rapport des longueurs de deux segments.*

Commentaires

Dans la plupart des ouvrages qui traitent du parallélisme, les définitions choisies sont telles que « deux droites confondues sont parallèles » ou « deux plans confondus sont parallèles ». Pour notre part, nous avons délibérément évité de parler de droites ou de plans confondus. Si deux droites désignées par des noms différents au cours d'un raisonnement s'avéraient être confondues, nous dirions tout simplement qu'il s'agit d'une seule et même droite (à laquelle on avait attribué des noms différents), mettant ainsi l'accent sur l'unicité de la droite parallèle à une direction donnée, passant par un point donné.

Dans le cadre de la théorie des ensembles, lorsque le parallélisme est vu comme une relation d'équivalence, la réflexivité de la relation s'exprime sous la forme : « Une droite est parallèle à elle-même » ou « Un plan est parallèle à lui-même ». Nous n'avons pas éprouvé la nécessité de recourir à des énoncés de ce type dans cette première approche du parallélisme dans l'espace. C'est pourquoi ces énoncés n'apparaissent pas à ce stade de notre travail.

En ce qui concerne le parallélisme d'une droite et d'un plan, la situation nous a semblé différente. En effet, une droite et un plan, n'étant pas des objets de même nature, ne seront jamais confondus ; mais la droite peut être contenue dans le plan. On constate que beaucoup des propriétés qu'on peut énoncer pour une droite disjointe d'un plan restent vraies si la droite est contenue dans le plan. Il n'y a donc pas lieu de discriminer ces deux cas, mais au contraire, il semble naturel de les regrouper sous un même vocable, en l'occurence : « parallèle ». Les propriétés peuvent ainsi être énoncées sous une forme générale, simple et concise ; et les énoncés correspondant au cas où la droite est dans le plan sont retrouvés comme cas particuliers.

9

À propos des coniques

1 Cercles, ellipses, affinités

De quoi s'agit-il ?

Présenter l'ellipse comme ombre au soleil d'un cercle.

Enjeux

Montrer qu'une ellipse est l'image d'un cercle par une affinité.

Donner du sens au calcul matriciel.

Matières couvertes. – Bijection. Existence de la réciproque d'une transformation du plan.

Notion de *composition de transformations de l'espace.*

Forme analytique et matricielle d'une affinité. Rotation, cisaillement, *étirement, compression dans le plan.*

Image d'un cercle par une affinité.

Section plane d'un cylindre.

Compétences. – Résoudre des *problèmes de construction.*

Reconnaître une conique à son équation cartésienne réduite.

Identifier l'ellipse comme transformée d'un cercle par une affinité.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Les plaques transparentes rigides et leurs supports décrits dans l'activité 1.

Des photocopies sur transparent de la figure 1 fournie en vraie grandeur en annexe à la page 396.

Prérequis. – Éléments de calcul matriciel, y compris le calcul de la matrice inverse. Géométrie analytique de l'espace. Équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Local. – Il est souhaitable de disposer d'un local ensoleillé.

1.1 Ombre au soleil d'un cercle

Comment s'y prendre ?

Quelle est l'ombre au soleil d'une roue de vélo ?

Après une phase de discussion, un dispositif expérimental similaire à ceux déjà utilisés est soumis à l'observation des élèves.

Chaque groupe reçoit le matériel décrit plus haut. Les élèves collent sur la vitre le transparent réalisé au moyen de la figure 1.

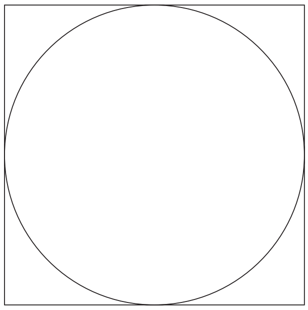


Fig. 1 : Cercle inscrit dans un carré

Le cercle inscrit dans un carré de la figure 1 (fourni à la bonne échelle en annexe à la page 396) est photocopié sur une feuille A3. Cette feuille est collée sur une table, la vitre y est déposée de manière qu'un côté du carré du transparent coïncide avec un côté du carré photocopié. Cette disposition permet de voir sur un même plan (celui de la feuille A3) une représentation des carré et cercle initiaux ainsi que leur ombre (figure 2).

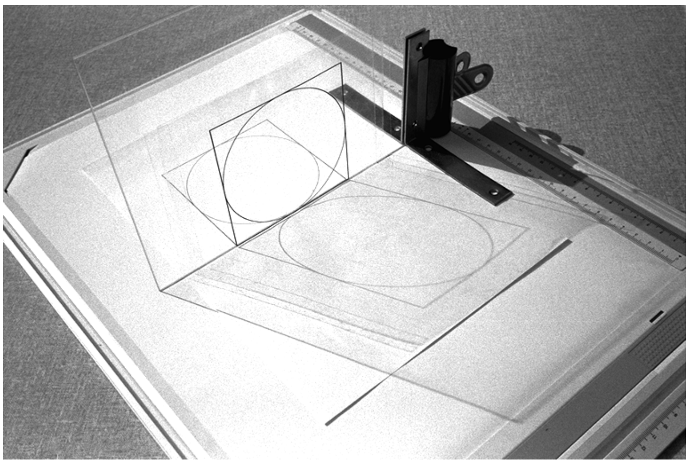


Fig. 2

Après avoir marqué sur la feuille bien tendue la trace de l'ombre du cercle et du carré, les élèves obtiennent un dessin comme celui de la figure 3 à la page suivante.

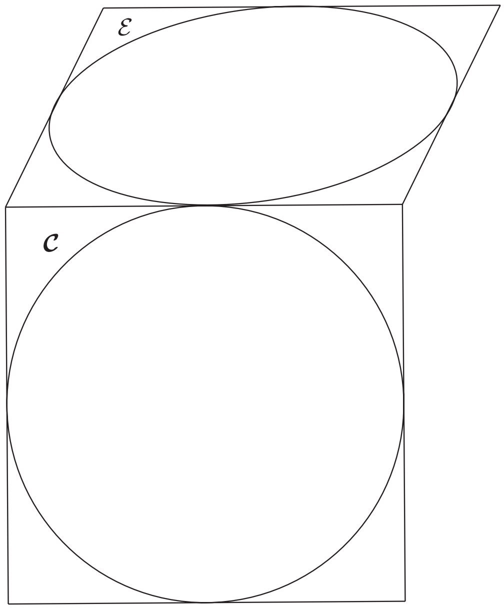


Fig. 3 : Cercle inscrit dans un carré et ombres produites

Ils sont amenés à constater que la courbe obtenue est l'image d'un cercle par une projection parallèle (activité 1).

Le logiciel de dessin Cabri-Géomètre complète utilement les dispositifs expérimentaux décrits ici. Ainsi dans la figure 4, les déplacements du point M engendrent la déformation du parallélogramme image du carré et montrent les différentes formes prises par l'image du cercle[1].

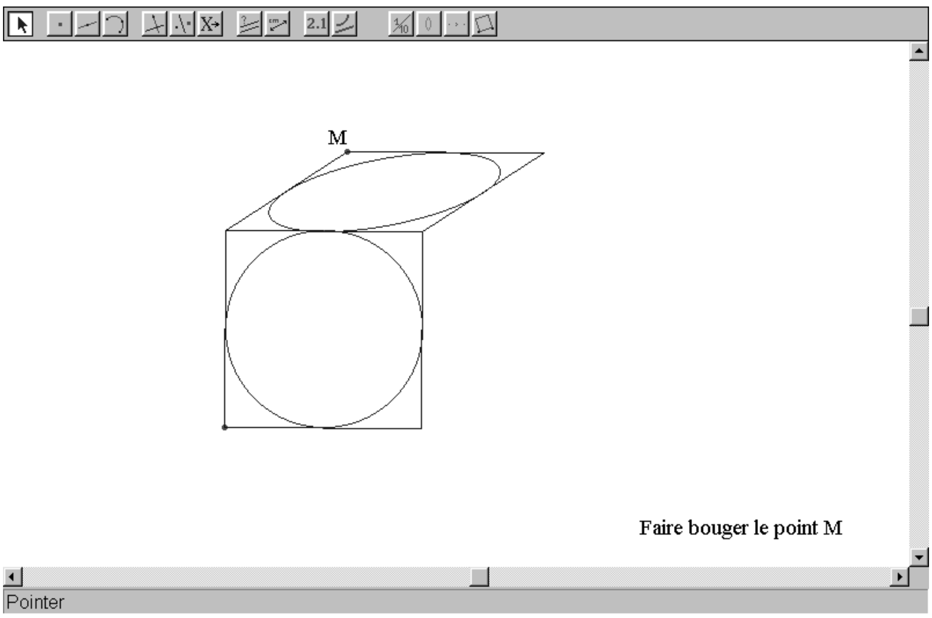


Fig. 4 : Fenêtre Cabri

[1] Des fichiers Cabri sont disponibles sur le site INTERNET du CREM à l'adresse www.profor.be/crem.

Lorsqu'on place la vitre face aux rayons du soleil (figure 7 à la page suivante), l'ombre du carré est un rectangle dont un côté coïncide avec un côté du carré initial (voir aussi photo à la figure 5).

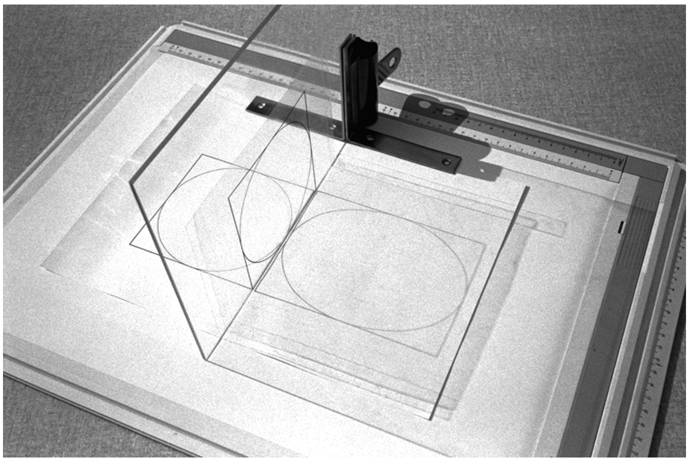


Fig. 5

C'est la figure 7 qui sera exploitée comme première approche.

Un autre cas particulier intéressant à observer (figure 6) est celui où le plan de la vitre contient les projetantes (rayons du soleil).

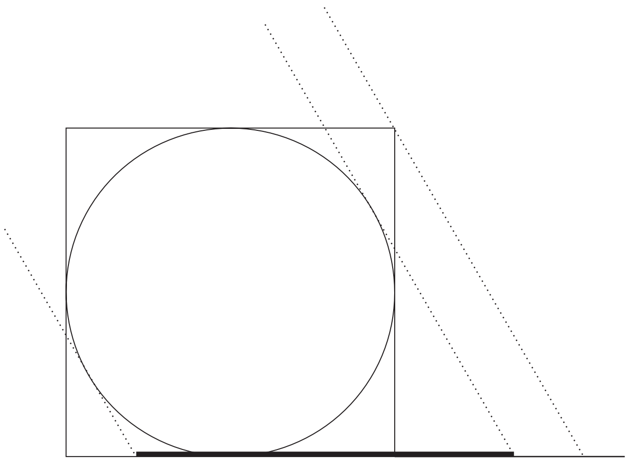


Fig. 6 : Une autre position particulière de la vitre

Dans ce cas, l'ombre du carré est un segment, celle du cercle, un autre segment.

Ce cas diffère de tous les autres : chaque point de chacun des segments est l'ombre d'un ou deux points. Plus précisément, chaque point d'un des deux segments est l'image d'un ou deux points du carré ; et chaque point de l'autre segment est l'image d'un ou deux points du cercle. En ce qui concerne les autres positions de la vitre, les élèves peuvent constater que, à chaque point du carré correspond un seul point de son ombre et réciproquement, et qu'il en va de même pour les points du cercle et ceux de son ombre. On parle alors de *bijection* entre l'ensemble des points du carré et l'ensemble des points de son ombre, entre l'ensemble des points du cercle et l'ensemble des points de son ombre.

Reprenons le cas particulier de la figure 5 à la page précédente et traitons cette situation comme un problème de géométrie plane dans le plan de la feuille de papier (figure 7). La figure du transparent est pour cela amenée à coïncider avec la photocopie sur la feuille A3 par une isométrie de l'espace : une rotation de 90 degrés autour de l'axe passant par le côté commun aux deux carrés (transparent et photocopie).

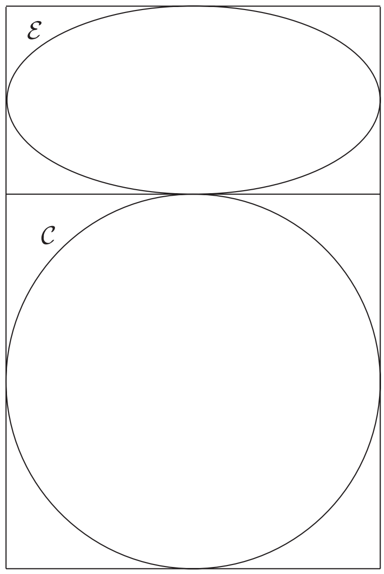


Fig. 7 : Vue de la feuille A3 pour une position particulière de la vitre

Les élèves sont invités à imaginer la construction de la courbe $\mathcal{E}$ à partir du cercle $\mathcal{C}$. Une indication peut leur être fournie en posant la question suivante.

> Quelles sont les propriétés qui sont conservées par les rotations et les projections parallèles ?

Ils constatent en cours de route que les propriétés qui leur viennent en aide sont

- la conservation de l'alignement,
- la conservation de l'incidence,
- la conservation du parallélisme,
- la conservation des rapports de longueurs,

et ils arrivent à une construction du type de la figure 8 à la page suivante.

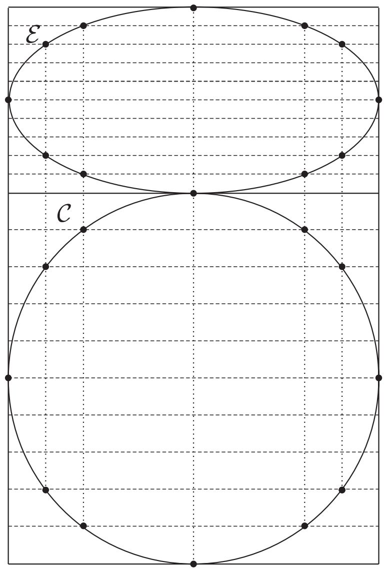


Fig. 8 : Transformation du plan qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$

C'est le moment d'aborder le problème de la transformation réciproque :

> Si l'on sait que la courbe $\mathcal{E}$ est l'image d'une courbe inscrite dans un carré, peut-on construire celle-ci à partir de $\mathcal{E}$?

Les élèves verront sans doute immédiatement que toute la construction qui leur a permis de passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{E}$ peut être reproduite dans l'autre sens.

Cette transformation du plan qui permet de trouver $\mathcal{C}$ comme image de $\mathcal{E}$ est appelée *transformation réciproque (ou inverse)* de celle qui donne $\mathcal{E}$ comme image de $\mathcal{C}$.

> Et dans le cas particulier évoqué à la figure 6 à la page 314, peut-on aussi retrouver la courbe dont l'image est un segment, sachant que cette courbe est inscrite dans un carré ?

Les élèves peuvent imaginer des courbes autres que le cercle, dont l'ombre soit le même segment que l'ombre du cercle. Ils devraient prendre conscience de l'ambiguïté liée au caractère non bijectif de cette transformation[2].

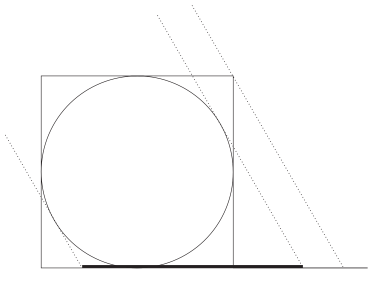


Fig. 9

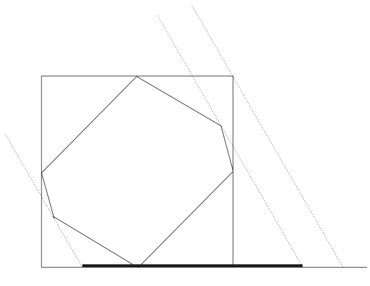


Fig. 10

[2] Le mot *transformation* est pris au sens large, c'est-à-dire application non nécessairement bijective du plan dans lui-même.

La suite de l'activité sera consacrée à répondre à la question qui suit :

Quelle est l'équation de la courbe $\mathcal{E}$ obtenue ?

Pour cela, nous introduisons les affinités.

1.2 Affinités

Comment s'y prendre ?

Toute transformation bijective du plan qui conserve les droites et le parallélisme est appelée *affinité du plan.*

Ceci signifie que

- l'image d'une droite est une droite ;
- deux droites parallèles ont pour images des droites parallèles.

Les constructions que les élèves ont effectuées doivent les convaincre de la propriété suivante :

1. *La transformation bijective du plan qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$ est une affinité.*

Une discussion entre les différents groupes d'élèves devrait les amener à concevoir que toute transformation bijective du plan muni d'un repère a des équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & f_1(x,y) \\ y' & = & f_2(x,y)\,, \end{array}\right.$$

où les fonctions f_1 et f_2 sont telles qu'il est possible d'exprimer (x,y) en fonction de (x',y'), puisque toute transformation bijective du plan possède une transformation réciproque. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & g_1(x',y') \\ y & = & g_2(x',y')\,. \end{array}\right.$$

À partir de la définition de l'affinité donnée plus haut, quelles sont les équations générales d'une affinité du plan ?

Une nouvelle phase de discussion doit aboutir à la conclusion que, puisque l'équation d'une droite est du premier degré et que toute affinité envoie une droite sur une droite, les fonctions f_1 et f_2 dont il est question ci-dessus doivent être du premier degré.

Pour étayer cette intuition, le professeur peut demander à ses élèves de regarder ce que deviendrait l'équation de la droite $\lambda x + \mu y = \nu$ par une transformation du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x^3 \\ y' & = & y \end{array}\right.$$

et leur faire constater que l'équation obtenue

$$\lambda\sqrt[3]{x'} + \mu y' = \nu$$

n'est plus celle d'une droite.

D'une manière générale, l'équation d'une droite $\lambda x + \mu y = \nu$ devient, par la transformation

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & g_1(x', y') \\ y & = & g_2(x', y') \end{array}\right.$$

ci-dessus, $\lambda g_1(x', y') + \mu g_2(x', y') = \nu$. Cette équation doit être l'équation d'une droite pour toute valeur de λ et de μ. En particulier, si $\lambda = 0$, on a $\mu g_2(x', y') = \nu$, ce qui implique que g_2 doit être du premier degré. Si $\mu = 0$, on a $\lambda g_1(x', y') = \nu$, ce qui implique que g_1 doir être du premier degré. Ainsi, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha x' + \beta y' + \varepsilon \\ y & = & \gamma x' + \delta y' + \eta\,, \end{array}\right.$$

et en inversant, nous en arrivons alors à proposer les expressions analytiques suivantes comme équations d'une affinité :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax + by + k \\ y' & = & cx + dy + \ell\,, \end{array}\right.$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Quelle(s) condition(s) doit-on imposer aux coefficients a, b, c, d, k, ℓ pour que (x, y) puisse s'exprimer en fonction de (x', y') ?

L'écriture

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

permet d'arriver à la conclusion qu'il suffit d'avoir

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0.$$

Dans ce cas, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \left[\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\ell - kd \\ kc - a\ell \end{pmatrix} \right].$$

Les élèves vérifieront ensuite qu'en appliquant la transformation décrite ci-dessus aux droites

$$\begin{array}{lcl} d_1 & \equiv & y = mx + p_1\,, \\ d_2 & \equiv & y = mx + p_2\,, \end{array}$$

ils obtiennent, pour les droites images, des coefficients de direction tous deux égaux à $\dfrac{md + c}{mb + a}$.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

2. *Toute affinité du plan muni d'un repère a pour équations*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$$

où

$$ad - bc \neq 0.$$

Lorsque $k = \ell = 0$, il reste

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{où } ad - bc \neq 0.$$

Une telle affinité « sans translation » s'appelle *transformation linéaire*. Ce sont surtout des transformations linéaires qui interviennent dans la suite de l'activité.

Les transformations linéaires constituent un puissant outil mathématique dans différentes disciplines scientifiques et notamment en économie. Elles généralisent le concept de *fonction linéaire* d'une variable.

Quelles sont les équations d'une affinité qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$?

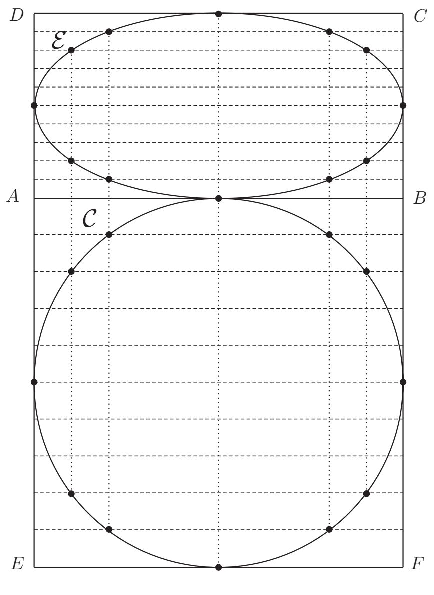


Fig. 11 : Cas particulier de transformation du plan qui envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la courbe $\mathcal{E}$

Cette affinité envoie le carré $AEFB$ sur le rectangle $ADCB$. À cause de la conservation du parallélisme, il suffit d'exprimer que trois sommets du carré sont envoyés sur trois sommets du rectangle.

Considérons le repère suivant : l'origine est en A, l'axe des abscisses le long de AB, celui des ordonnées, le long de AD. Choisissons la même unité sur chacun des axes, de telle manière que les coordonnées de B soient $(2, 0)$. Les coordonnées des différents points sont alors

$$A(0,0),\ B(2,0),\ C(2,2\alpha),\ D(0,2\alpha),\ E(0,-2) \text{ et } F(2,-2), \text{ où } \alpha > 0.$$

Le cercle a son centre en $(1, -1)$ et son rayon vaut 1. Son équation est

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Un retour à la situation spatiale et l'observation du mouvement de rotation de la vitre pour l'amener dans le plan permettra sans doute aux élèves d'écrire directement

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & -\alpha y\,, \end{array}\right.$$

ou encore, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Une telle affinité est appelée *compression*.[3]

La même formule peut être obtenue en partant de l'équation générale d'une affinité et en exprimant que A va sur A, B sur B et E sur D.

Pour pouvoir trouver l'image du cercle $\mathcal{C}$, il faut exprimer x et y en fonction de x' et y', ce qui nous impose d'inverser la dernière matrice. Il vient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sous l'effet de cette transformation, l'équation du cercle devient

$$(x'-1)^2 + \frac{(y'-\alpha)^2}{\alpha^2} = 1.$$

En posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x'-1 \\ Y & = & y'-\alpha\,, \end{array}\right.$$

ce qui correspond à translater l'origine du repère au centre de symétrie du rectangle $ABCD$, on obtient l'équation

$$\frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{\alpha^2} = 1\,,$$

qui est bien l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes, dont les longueurs sont 2 et 2α. L'ellipse $\mathcal{E}$ apparaît ainsi comme transformée du cercle $\mathcal{C}$ par une affinité.

[3] Il va de soi que l'équation de la courbe image de $\mathcal{C}$ pourrait être écrite sans peine à partir de ces seules équations, sans parler de la forme générale d'une affinité et sans introduire le calcul matriciel. Cependant, il nous a paru intéressant de traiter matriciellement un problème où l'inversion et le produit matriciel (voir ci-après le cas plus général) ont un sens géométrique. De plus, les élèves percevront sans doute que cette forme générale permettra de traiter des transformations du plan beaucoup plus complexes que celle qui se présente dans ce problème.

Un calcul analogue peut être fait dans le cas plus général où le carré est envoyé non plus sur un rectangle mais sur un parallélogramme (figure 12). Cela correspond à une position tout à fait quelconque de la vitre par rapport aux rayons du soleil.

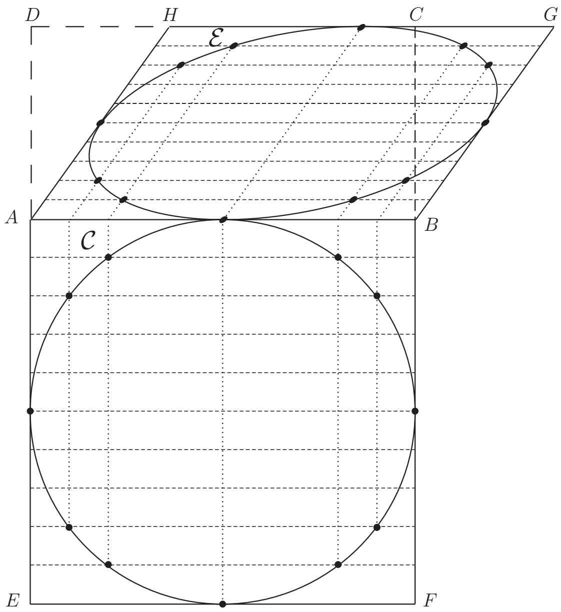


Fig. 12 : Cas général

Dans le même repère, il suffit de composer l'affinité précédente avec celle qui envoie A sur A, B sur B et $D(0, 2\alpha)$ sur $H(2\beta, 2\alpha)$. Partant de l'équation générale d'une affinité, en imposant ces trois conditions, les élèves arriveront aisément à

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est l'occasion de rencontrer et de souligner le fait que, à une composée de transformations correspond un produit matriciel. En effet,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right].$$

L'associativité du produit matriciel permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

et ainsi,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'affinité pour laquelle A et B sont leur propre image et H est l'image de E.

Après inversion de cette dernière matrice, il vient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\beta}{\alpha} \\ 0 & -\dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à vérifier que, sous l'effet de cette affinité, l'équation du cercle devient

$$\left(x'' - \frac{\beta}{\alpha}y'' - 1\right)^2 + \frac{(y''-\alpha)^2}{\alpha^2} = 1.$$

En effectuant le changement de repère

$$\begin{cases} X = x'' - \beta - 1 \\ Y = y'' - \alpha\,, \end{cases}$$

ce qui revient à translater l'origine O du repère au point O', point de concours des diagonales du parallélogramme, il vient

$$\left(X - \frac{\beta}{\alpha}Y\right)^2 + \frac{Y^2}{\alpha^2} = 1.$$

Il reste alors à réduire cette expression. Cela peut sembler difficile, car les élèves ne disposent pas nécessairement des outils adéquats. En effet, il leur a sans doute été rarement demandé d'éliminer un terme en XY.

Il est cependant possible de traiter un cas particulier qui leur permettra de se rendre compte de ce qui se passe effectivement.

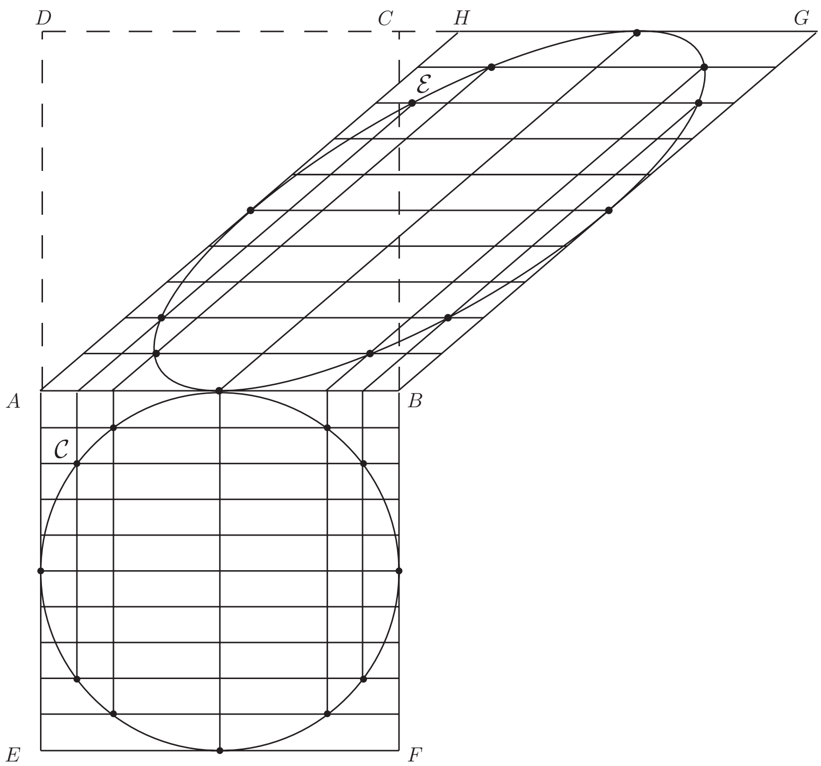


Fig. 13 : Cas particulier (cisaillement)

La figure ci-dessus représente le cas particulier où $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Dans ce cas précis, il n'y a pas de compression. L'affinité est un *cisaillement*. Le choix de β peut sembler arbitraire. Notre but vise simplement à ce que les élèves puissent reconnaître au travers de calculs parfois arides, des objets mathématiques plus familiers (la tangente d'un angle « remarquable » par exemple).

L'observation de la figure fait apparaître clairement que la courbe $\mathcal{E}$ image du cercle $\mathcal{C}$ « ressemble » à une ellipse qui aurait subi une rotation autour de l'origine O'. Sachant que dans l'équation d'une l'ellipse rapportée à ses axes, il n'y a pas de terme en XY, on amène les élèves à l'idée que, si la courbe $\mathcal{E}$ est effectivement une ellipse, une rotation convenable du repère devrait faire « disparaître » ce terme.

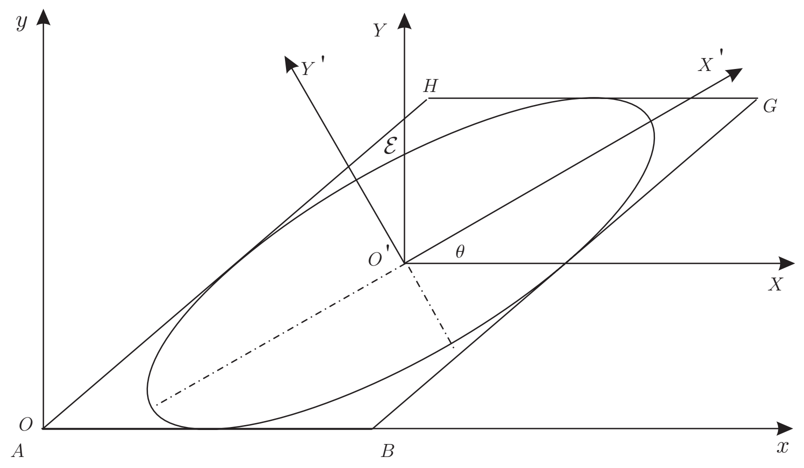


Fig. 14

Pour trouver l'équation de la courbe rapportée à ses axes, on peut la faire tourner d'un angle $-\theta$ autour de l'origine O' ou encore, ce qui revient au même, faire tourner le repère d'un angle θ autour de O'.

En effet, la coordonnée d'un point P de la courbe $\mathcal{E}$ dans le repère $O'X'Y'$, image du repère $O'XY$ par une rotation d'angle θ autour de O', est la même que la coordonnée du point image de P par une rotation d'angle $-\theta$ autour du même point.

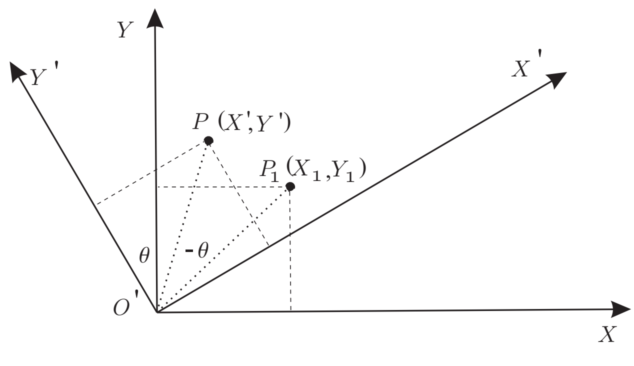


Fig. 15 : $X' = X_1$ et $Y' = Y_1$

Toute rotation conserve l'alignement et le parallélisme. C'est donc une affinité ou plus précisément une transformation linéaire (puisqu'il n'y a pas de translation). Ainsi, une rotation s'exprime sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Les coefficients a, b, c, d sont déterminés comme précédemment en exprimant que la rotation d'angle $-\theta$ envoie le point $I(1,0)$ sur le point $I'(\cos\theta, -\sin\theta)$ et le point $J(0,1)$ sur le point $J'(\sin\theta, \cos\theta)$.

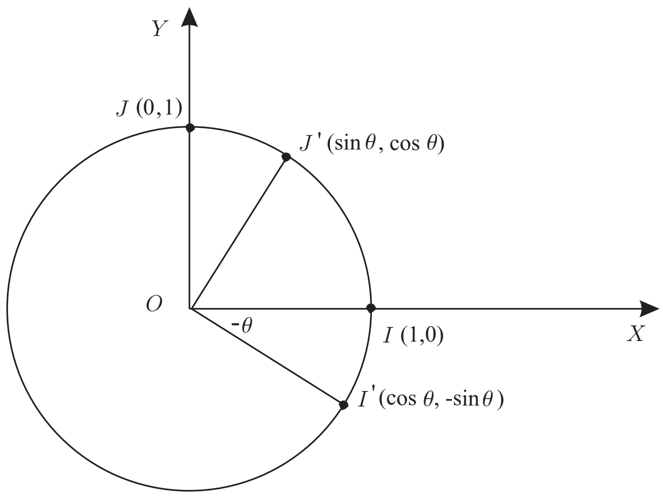


Fig. 16 : Rotation d'angle $-\theta$ des points I et J

Ceci permet de trouver l'écriture matricielle de ladite rotation :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

En inversant cette matrice (dont le déterminant vaut 1), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}.$$

Revenons au cas particulier du cisaillement envisagé plus haut. L'équation de la courbe

$$\left(X - \frac{2\sqrt{3}}{3}Y\right)^2 + Y^2 = 1$$

devient donc, dans le repère $O'X'Y'$, après une rotation d'angle θ autour de O',

$$\left[\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)X' - \left(\sin\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)Y'\right]^2 + \left(\sin\theta X' + \cos\theta Y'\right)^2 = 1.$$

L'angle θ qui annule le terme en $X'Y'$ vérifie la relation

$$-\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)\left(\sin\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right) + \sin\theta\cos\theta = 0\,,$$

ou encore

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\cos^2\theta + \frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta = 0\,,$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2\theta = \frac{2}{3}\sin 2\theta\,,$$

ce qui implique que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3}.$$

L'angle

$$2\theta = \frac{\pi}{3}$$

vérifie cette relation. Il vient donc

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

La matrice de rotation est alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$\begin{cases} X &= \frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y' \\ Y &= \frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'. \end{cases}$$

L'équation de la courbe devient

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y' - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = 1,$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)X' - \left(\frac{1}{2} + 1\right)Y'\right]^2 + \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}X' - \frac{3}{2}Y'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = 1,$$

qui donne finalement

$$\frac{X'^2}{3} + \frac{Y'^2}{\frac{1}{3}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation réduite d'une ellipse dont les axes mesurent $2\sqrt{3}$ et $2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il est évident que chacune des étapes de ce calcul peut se faire avec α et β quelconques.

On a construit à l'aide du logiciel Cabri-Géomètre le cas particulier de la figure 13 à la page 322.

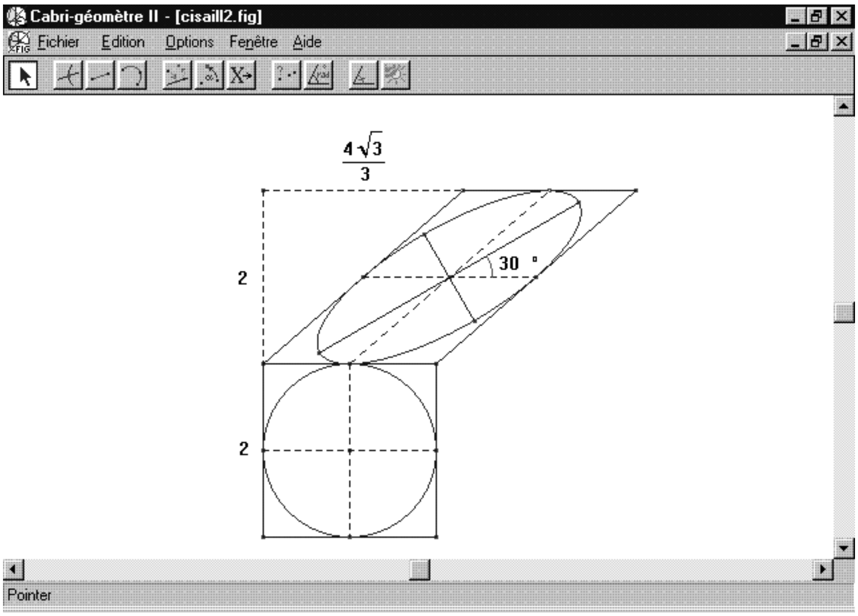


Fig. 17 : Fenêtre Cabri

Connaissant le centre d'une ellipse, il est assez simple de déterminer ses axes principaux. Il suffit de tracer le cercle dont le centre est celui de l'ellipse et qui coupe cette ellipse en quatre points. Les médianes du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection du cercle et de l'ellipse sont les axes principaux de l'ellipse. Il a alors été demandé au logiciel Cabri de mesurer, par exemple, l'angle entre l'horizontale et le grand axe passant par le centre de l'ellipse. Cette confirmation du calcul par le dessin devrait achever de convaincre les élèves les plus sceptiques.

1.3 Section plane d'un cylindre

Après ce qui vient d'être fait, l'activité que nous proposons maintenant peut sembler très simple. Elle constitue cependant un bon moyen pour introduire l'activité 2, plus complexe.

Comment s'y prendre ?

Qu'entend-on par cylindre ?

Considérons un cercle $\mathcal{C}$ de centre A. On appelle *surface cylindrique de révolution* l'ensemble des droites perpendiculaires au plan du cercle $\mathcal{C}$ et s'appuyant sur le cercle[4].

Chacune des droites dont il est question dans la définition ci-dessus est appelée *génératrice* de la surface cylindrique. La droite perpendiculaire au plan du cercle par A est l'*axe* de cette surface.

Un *cylindre de révolution* est le solide limité par une surface cylindrique de révolution et deux plans perpendiculaires à son axe. Cependant, le terme

[4] Il existe d'autres types de surfaces cylindriques qui ne sont pas de révolution. Elles sont obtenues par le procédé que nous venons de décrire, mais en prenant au départ toute autre courbe qu'un cercle. Nous en rencontrerons quelque-unes dans l'activité 2.

cylindre sera souvent employé pour désigner la surface cylindrique de révolution.

Un *plan tangent* au cylindre est un plan contenant une génératrice et perpendiculaire au plan déterminé par cette génératrice et l'axe de ce cylindre.

Choisissons un repère qui permette d'écrire aisément l'équation du cylindre : l'origine est placée sur l'axe du cylindre et l'axe Oz coïncide avec l'axe du cylindre. Dans un plan perpendiculaire à Oz, Oxy est un quelconque repère orthonormé. Les unités sont évidemment les mêmes sur chaque axe.

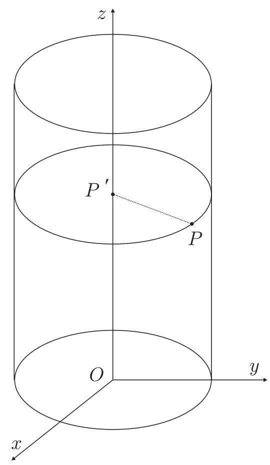


Fig. 18

Si P représente un point quelconque du cylindre et P' sa projection sur l'axe de ce cylindre, la longueur $|PP'|$ est le rayon du cylindre, quelle que soit la hauteur (coordonnée z) du point (figure 18). Ainsi, tout point du cylindre vérifie l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

où R est le rayon du cylindre.

Remarquons — et cela revêt une certaine importance dans ce qui va suivre — que, en raison de la symétrie que possède tout cercle, cette équation est indépendante de la position des axes x et y dans tout plan perpendiculaire à l'axe Oz.

Les génératrices étant parallèles à l'axe des z, cette dernière inconnue n'apparaît pas dans l'équation ; ce phénomène a déjà pu être observé pour l'équation d'un plan parallèle à l'un des axes.

Quelles sont les sections planes d'un cylindre de révolution ?

En maintenant la vitre qui a servi à l'expérience précédente perpendiculaire aux rayons du soleil, on obtient un cylindre d'ombre. L'ombre qui se dessine sur tout « plan quelconque » par rapport à la vitre est une section plane du cylindre.

Une autre façon de procéder est d'inviter les élèves à disposer un cylindre dans différentes positions dans un plan lumineux. La trace du plan lumineux sur le cylindre permet de visualiser la ligne d'intersection (cette manipulation est décrite dans l'activité 2 de ce chapitre). Ils verront apparaître sur la surface cylindrique :

- un cercle lorsque le plan lumineux est perpendiculaire à l'axe du cylindre ;
- une ellipse ou une partie d'ellipse dans tous les autres cas, à part le cas suivant ;
- deux droites parallèles lorsque le plan lumineux est parallèle à l'axe du cylindre.

Établissons analytiquement ces observations.

Recherche de l'intersection du cylindre avec différents plans.

Cercle. – Le plan de section est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Son équation est $z = k$, où k est une constante et la courbe d'intersection est donnée par le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = k. \end{cases}$$

La première de ces équations est celle d'un cylindre dont la base est un cercle de rayon R. C'est aussi l'équation de la projection orthogonale dans le plan Oxy de la courbe d'intersection. Celle-ci est donc un cercle de rayon R dans le plan $z = h$. Pour écrire l'équation de cette courbe dans le plan Π, plaçons dans celui-ci un repère orthonormé $O'XY$, de même unité que le repère initial, où O' est le point de percée de l'axe Oz dans Π et $O'X$, $O'Y$ sont respectivement parallèles à Ox et Oy. L'équation de la courbe d'intersection est alors

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

dans ce repère.

Ellipse. – Le plan de section est oblique.

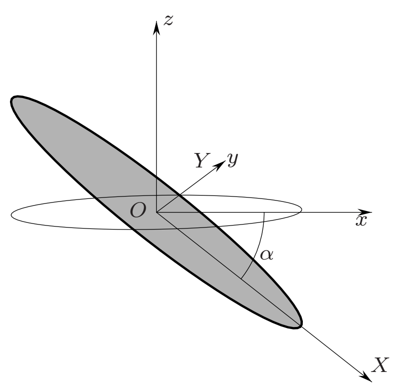


Fig. 19

En vertu de la remarque faite précédemment à propos de la position des axes Ox et Oy, nous choisissons pour origine le point de percée de l'axe du cylindre dans Π. Par O, considérons le plan Δ perpendiculaire à Oz, et dans ce plan, l'axe Oy à l'intersection de Π et Δ de manière que l'équation du plan Π devienne $z = mx$. L'équation de la courbe d'intersection est alors

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = mx. \end{cases}$$

L'équation $x^2 + y^2 = R^2$, qui est celle du cylindre dans l'espace, est aussi celle de la projection orthogonale dans le plan Oxy de la courbe d'intersection.

Pour écrire l'équation de cette courbe dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère OXY (de même unité que le repère Oxy), où OY coïncide avec Oy et OX est sur la droite d'intersection du plan Π avec le plan Oxz.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, la coordonnée d'un point $P(x,y)$ est liée à celle du point $Q(X,Y)$ dont il est la projection orthogonale sur le plan Oxy par la relation

$$\begin{cases} x &= X\cos\alpha \\ y &= Y. \end{cases}$$

L'équation de la courbe dans ce repère est

$$X^2\cos^2\alpha + Y^2 = R^2 \quad \text{ou encore} \quad \frac{X^2}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2} + \frac{Y^2}{R^2} = 1,$$

qui est l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes dont les longueurs valent $\dfrac{2R}{\cos\alpha}$ et $2R$.

Deux droites parallèles. – Le plan de section est parallèle à l'axe du cylindre.

Si l'axe Oy est placé parallèlement au plan de section, l'équation de celui-ci est $x = k$ où k est une constante et l'intersection est donnée par

$$\begin{cases} y^2 = R^2 - k^2 \\ x = k. \end{cases}$$

Dans le plan Π d'équation $x = k$ muni du repère $O'XY$ (O' point de percée de Ox dans Π, $O'X /\!/ Ox$, $O'Y /\!/ Oy$), on obtient les deux droites parallèles d'équations

$$Y = \sqrt{R^2 - k^2} \quad \text{et} \quad Y = -\sqrt{R^2 - k^2}.$$

2 Sections coniques

De quoi s'agit-il ?

En utilisant un plan lumineux, rechercher et étudier toutes les sections planes d'un cône, appelées *sections coniques*.

Enjeux

Montrer que toute section plane dans un cône est une *conique*, c'est-à-dire une ellipse, une parabole ou une hyperbole, éventuellement dégénérée. À partir des équations du cône de révolution et du plan, démontrer que l'équation de la courbe d'intersection est bien l'équation d'une conique. Discuter du genre de la conique obtenue, en fonction des positions relatives du cône et du plan.

Matières couvertes.– L'ellipse, la parabole et l'hyperbole vues comme *sections planes d'un cône.*
Exemples de réduction d'une équation du deuxième degré à deux variables.

Compétences. – *Reconnaître une conique à son équation cartésienne réduite.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Un cône de plexiglas transparent, ou un cône de papier calque.

Un masque percé d'une fente rectiligne de 0,1 mm de large (ce matériel peut être réalisé par photocopie sur transparent du modèle fourni en annexe à la page 387).

Du papier calque et des transparents.

Un rétroprojecteur.

Prérequis. – Géométrie analytique de l'espace : équation cartésienne d'un plan parallèle à une direction donnée.

Équation d'une conique rapportée à ses axes.

Local. – Il est souhaitable de disposer d'un local que l'on peut au moins partiellement occulter.

2.1 Sections planes d'un cône

Comment s'y prendre ?

La feuille opaque percée d'une fente est déposée sur le rétroprojecteur de sorte que le faisceau de rayons lumineux qui passe par la fente forme un plan lumineux. La trace de celui-ci sera visible sur tout objet placé dans le plan lumineux et cette trace permet de visualiser la ligne d'intersection de l'objet considéré par le plan lumineux.

Le cône de plexiglas est déposé sur la fente dans différentes positions. La description précise des situations observées nécessite la mise en place du vocabulaire approprié.

Considérons un cercle $\mathcal{C}$ de centre A, et S un point de la perpendiculaire en A au plan du cercle $\mathcal{C}$.

On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite passant par S et s'appuyant sur le cercle. La surface ainsi obtenue est formée de deux parties symétriques, appelées *nappes*, situées de part et d'autre du point S.

La droite SA est *l'axe* de cette surface, et les droites passant par S et s'appuyant sur le cercle en sont les *génératrices*. Le point S en est le *sommet*.

Un *cône de révolution* est un solide limité par une surface conique de révolution, son sommet et un plan perpendiculaire à l'axe de cette surface.

Nous utiliserons le terme *cône* indifféremment pour désigner la surface conique de révolution ou le cône de révolution.

Un *plan tangent* au cône est un plan contenant une génératrice et perpendiculaire au plan déterminé par cette génératrice et l'axe du cône.

L'angle formé par l'axe du cône et une de ses génératrices est appelé *l'angle du cône*.

Angle d'une droite et d'un plan : c'est l'angle aigu formé par la droite et sa projection orthogonale sur ce plan (sauf si la droite est perpendiculaire au plan ; dans ce cas, c'est l'angle droit).

Angle de deux plans sécants : c'est l'angle aigu ou droit formé par les droites d'intersection des deux plans avec un troisième plan perpendiculaire à leur intersection. Il est égal à l'angle aigu ou droit formé par les normales aux deux plans issues d'un point.

Les élèves sont invités à placer le cône dans différentes positions où il est coupé par le plan lumineux, à décrire chacune de ces situations et à reconnaître les coniques, dégénérées ou non, qu'ils pourront ainsi observer. L'hyperbole et la parabole seront plus visibles si le cône est recouvert de papier calque (on peut aussi utiliser un cône de papier calque dont la base est transparente, construit selon la méthode expliquée dans l'activité 5 du chapitre 6). L'ellipse et le cercle se voient mieux sur un cône transparent.

Pour faire apparaître les coniques dégénérées, il convient de placer le sommet du cône sur la fente lumineuse ; la section formée de deux droites sécantes est ainsi obtenue facilement, et il est possible d'observer que ces droites tendent l'une vers l'autre si le cône est incliné progressivement vers la position où il est tangent au plan lumineux.

Les élèves verront apparaître :

– un cercle lorsque le plan lumineux est perpendiculaire à l'axe du cône ;
– une ellipse lorsque le plan lumineux forme avec l'axe du cône un angle supérieur à l'angle du cône ;
– une parabole lorsque le plan lumineux est parallèle à une génératrice du cône ;
– une branche d'hyperbole lorsque le plan lumineux forme avec l'axe du cône un angle inférieur à l'angle du cône, par exemple si le cône est posé sur sa base ;
– deux droites sécantes lorsque le plan lumineux passe par le sommet du cône ;

– une droite lorsque le plan lumineux est tangent au cône.

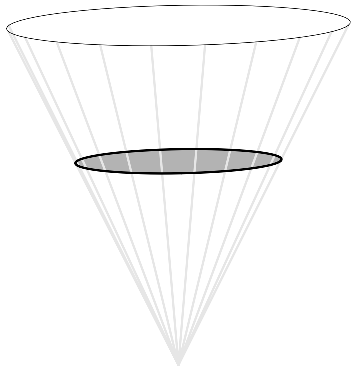


Fig. 20 : Cercle

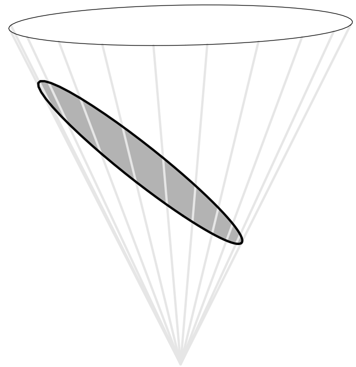


Fig. 21 : Ellipse

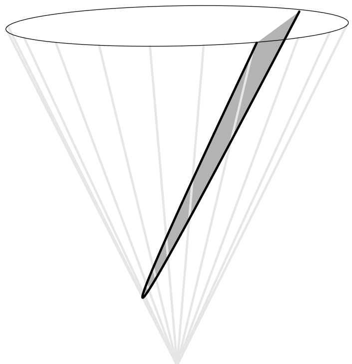


Fig. 22 : Parabole

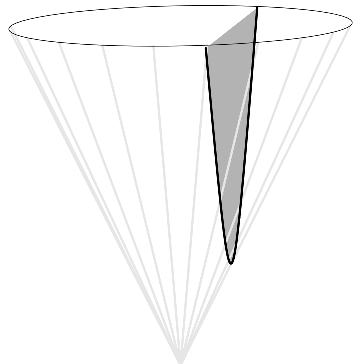


Fig. 23 : Hyperbole

2.2 Équations des sections coniques

Comment s'y prendre ?

Pour identifier les courbes observées, il serait opportun d'en connaître les équations. Celles-ci s'obtiennent en résolvant le système formé par l'équation du cône et celle du plan sécant. Encore faut-il connaître l'équation du cône.

Quelle est l'équation d'une surface conique de révolution ?

Choisissons tout d'abord un repère orthonormé qui permette d'écrire facilement l'équation du cône : l'origine du repère est placée au sommet du cône et l'axe Oz coïncide avec l'axe de celui-ci.

Si P représente un point quelconque de la surface conique et P' la projection de ce point P sur l'axe du cône, les élèves peuvent observer que le rapport entre les longueurs $|OP'|$ et $|PP'|$ est constant. Or, dans le repère choisi, ces longueurs se calculent facilement :

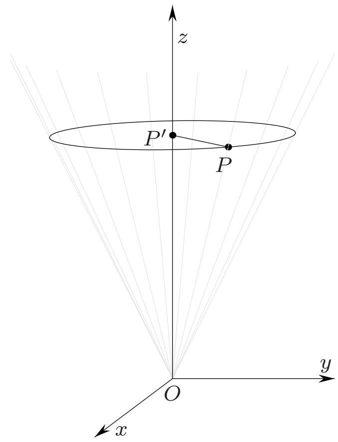


Fig. 24

$$|OP'| = |z| \quad \text{et} \quad |PP'| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tout point du cône vérifie donc la relation

$$|z| = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{où} \quad k > 0.$$

En élevant les deux membres au carré, nous obtenons

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2),$$

ce qui est l'équation du cône dans ce repère orthonormé (quelles que soient les positions des axes Ox et Oy dans le plan perpendiculaire en O à l'axe du cône).

Les élèves découvriront le lien qui existe entre la valeur de k et la mesure de l'angle du cône. La valeur de k est le coefficient de direction d'une génératrice du cône dans un plan contenant l'axe Oz et vaut la cotangente de l'angle du cône.

Quelles sont les équations des sections coniques ?

Un plan quelconque Π de l'espace a pour équation

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Il coupe le plan Oxy d'équation $z = 0$ suivant la droite i dont l'équation dans le plan Oxy est $ax + by + d = 0$. Comme il nous est loisible de choisir la position des axes Ox et Oy dans le plan perpendiculaire à Oz, nous les plaçons de telle manière que la droite i soit parallèle à l'un d'entre eux, à l'axe Oy par exemple. Dans ce cas, l'équation de i dans le plan Oxy sera du type $x =$ constante et ne contiendra pas de terme en y. Dans le repère ainsi placé, on aura donc $b = 0$ et l'équation du plan Π sera

$$ax + cz + d = 0.$$

Ce choix du repère, qui a pour but d'éviter de compliquer inutilement les calculs, ne nuit en rien à la généralité de la discussion qui va suivre, car on peut toujours placer le repère dans une telle position par rapport à l'axe du cône et au plan de section.

Les élèves sont invités à déterminer l'équation de la courbe d'intersection du cône et du plan Π et à retrouver tous les cas observés, en faisant varier la position du plan. Il faudra sans doute leur préciser que, dans l'espace, toute équation en x, y, z est l'équation d'une surface ; une courbe est donnée par les équations de deux surfaces dont elle est l'intersection (tout comme une droite est donnée par les équations de deux plans).

Observons tout d'abord que a et c ne peuvent être simultanément nuls, si l'on veut que $ax + cz + d = 0$ soit l'équation d'un plan.

- Si $c \neq 0$, cette équation peut s'écrire sous la forme $z = mx + p$ où $m = \frac{-a}{c}$ et $p = \frac{-d}{c}$. La valeur de m indique l'inclinaison du plan Π par rapport au plan Oxy, et c'est la comparaison des valeurs de k et de m qui permettra de distinguer les positions relatives de ce plan par rapport aux génératrices du cône. Pour interpréter correctement les différents cas, observons la trace du cône et du plan de section dans le plan Oxz d'équation $y = 0$. Dans ce plan, le cône se réduit à ses deux génératrices d'équation $z = kx$ et $z = -kx$, obtenues en factorisant $z^2 - k^2x^2 = 0$. Le plan se réduit à la droite d'équation $z = mx + p$. Les coefficients angulaires de ces droites sont respectivement k, $-k$ et m.

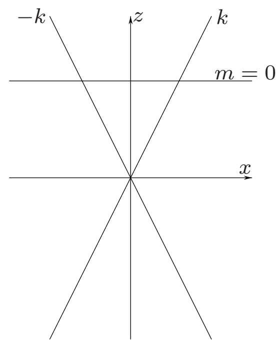


Fig. 25

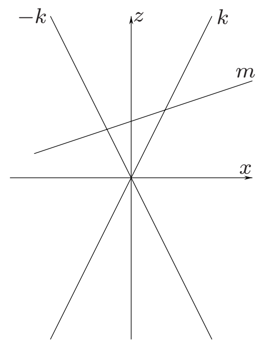


Fig. 26

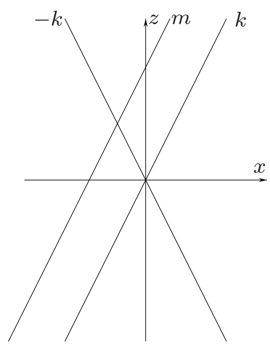


Fig. 27

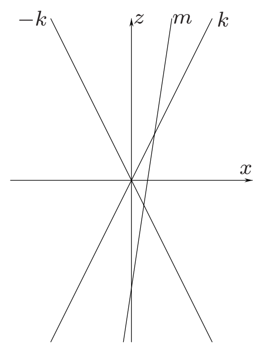


Fig. 28

– si $m = 0$ (figure 25) : le plan de section est parallèle au plan Oxy et donc perpendiculaire à l'axe Oz;
– si $|m| < |k|$ (figure 26) : l'angle formé par le plan de section et le plan horizontal est inférieur à l'angle formé par une génératrice du cône et ce même plan horizontal. L'angle formé par le plan de section et l'axe du cône est alors supérieur à l'angle du cône.
– si $|m| = |k|$ (figure 27) : le plan de section est parallèle à une génératrice du cône. L'angle formé par le plan de section et l'axe du cône est alors égal à l'angle du cône.
– si $|m| > |k|$ (figure 28) : l'angle formé par le plan de section et le plan horizontal est supérieur à l'angle formé par une génératrice du cône et ce même plan horizontal. L'angle formé par le plan de section et l'axe du cône est alors inférieur à l'angle du cône.

- Si $c = 0$, $(a \neq 0)$, l'équation devient $x = q$ où $q = \frac{-d}{a}$. Dans ce cas, le plan de section est parallèle à l'axe Oz.

Considérons tout d'abord les sections du cône lorsque le plan Π ne passe pas par le sommet du cône ($p \neq 0$). Voici les différents cas qui peuvent se présenter :

Cercle. – Le plan est perpendiculaire à l'axe du cône.

Dans ce cas, $m = 0$ et l'équation du plan Π se réduit à $z = p$. On obtient l'équation de la section du cône par Π en remplaçant z par p dans l'équation du cône. On obtient ainsi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{p^2}{k^2} \\ z = p. \end{cases}$$

.

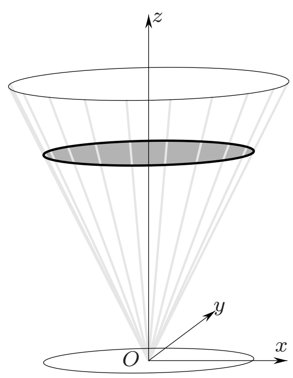


Fig. 29 : La section est un cercle

La première de ces équations est celle d'un cylindre dont la base est un cercle de rayon $\frac{|p|}{k}$. C'est aussi l'équation de la projection orthogonale dans le plan Oxy de la courbe d'intersection. Celle-ci est donc un cercle de rayon $\frac{|p|}{k}$ dans le plan $z = p$. Pour écrire l'équation de la section dans le plan Π, plaçons dans celui-ci un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O' est le point de percée de l'axe Oz dans Π tel que les axes $O'X$ et $O'Y$ soient respectivement parallèles aux axes Ox et Oy. L'équation de la courbe d'intersection dans ce repère est alors

$$X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{k^2},$$

et c'est bien l'équation d'un cercle de rayon $\frac{|p|}{k}$.

Remarquons au passage qu'on obtient la même équation pour la courbe d'intersection avec le plan d'équation $z = -p$ qui coupe l'autre nappe du cône.

Ellipse. – Le plan de section est oblique et $|m| < |k|$.

En remplaçant z par $mx + p$ dans l'équation du cône, on obtient pour la courbe d'intersection :

$$\begin{cases} (k^2 - m^2)x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0 \\ z = mx + p. \end{cases}$$

La première équation ne comporte pas de terme en z, c'est l'équation d'une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz. C'est aussi l'équation de la courbe d'intersection de cette surface cylindrique avec le plan d'équation $z = 0$, c'est-à-dire celle de la courbe C, projection de la courbe d'intersection sur le plan Oxy.

Le coefficient $(k^2 - m^2)$ du terme en x^2 est positif puisque $|k| > |m|$. Posons $s^2 = k^2 - m^2$; l'équation de C

$$s^2x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0$$

peut être transformée comme suit :

$$s^2(x^2 - \frac{2mp}{s^2}x) + k^2y^2 - p^2 = 0.$$

Ensuite, en ajoutant et en retranchant $\frac{m^2p^2}{s^2}$ pour faire apparaître un carré parfait, nous obtenons

$$s^2(x^2 - \frac{2mp}{s^2}x + \frac{m^2p^2}{s^4}) + k^2y^2 - \frac{m^2p^2}{s^2} - p^2 = 0,$$

$$s^2(x - \frac{mp}{s^2})^2 + k^2y^2 = \frac{p^2(m^2 + s^2)}{s^2}.$$

En posant

$$\begin{cases} x' = x - \frac{mp}{s^2} \\ y' = y, \end{cases}$$

et puisque $m^2 + s^2 = k^2$, nous obtenons

$$s^2x'^2 + k^2y'^2 = \frac{p^2k^2}{s^2},$$

ou encore

$$\frac{x'^2}{\frac{p^2k^2}{s^4}} + \frac{y'^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1,$$

qui est l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes. La translation

$$\begin{cases} x' = x - \frac{mp}{s^2} \\ y' = y \end{cases}$$

a donc amené l'origine du repère au centre O' de l'ellipse C.

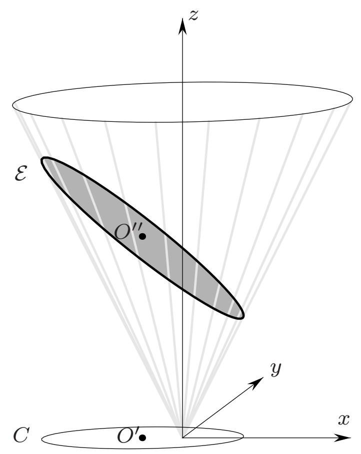


Fig. 30 : La section est une ellipse

Pour écrire l'équation de la section conique $\mathcal{E}$ dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O'' est le point de percée dans Π de la parallèle à Oz passant par O', tel que $O''Y$ soit parallèle à $O'y'$ et que $O''X$ soit perpendiculaire à $O''Y$ dans Π.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, qui est aussi égal à l'angle formé par les axes $O''X$ et $O'x'$, la coordonnée d'un point $P'(x', y')$ est liée à celle du point $P(X, Y)$ dont il est la projection orthogonale sur le plan $O'x'y'$ par la relation

$$\begin{cases} x' = X \cos \alpha \\ y' = Y. \end{cases}$$

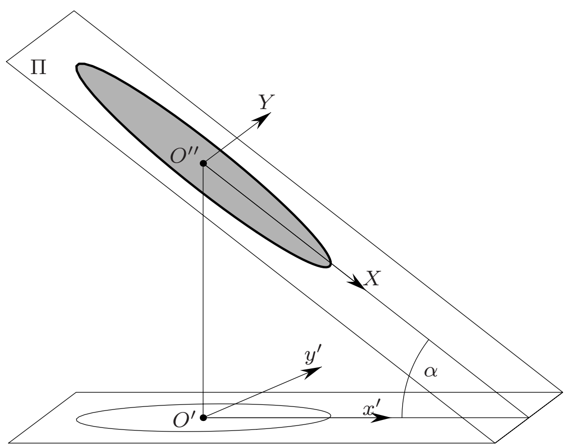


Fig. 31 : Nouveau repère

L'équation de la section conique $\mathcal{E}$ dans ce repère est alors

$$\frac{X^2}{\frac{p^2k^2}{s^4\cos^2\alpha}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation réduite d'une ellipse dont les axes mesurent $\dfrac{2|p|k}{s^2\cos\alpha}$ et $\dfrac{2|p|}{|s|}$.

Parabole. – Le plan de section est oblique et $|m| = |k|$.

Dans l'équation de la courbe d'intersection

$$\begin{cases} (k^2 - m^2)x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0 \\ z = mx + p, \end{cases}$$

le coefficient $(k^2 - m^2)$ du terme en x^2 est nul et l'équation de C se réduit à

$$y^2 = \frac{2mp}{k^2}x + \frac{p^2}{k^2},$$

ou encore à

$$y^2 = \frac{2mp}{k^2}(x + \frac{p}{2m}).$$

C'est l'équation d'une parabole P. En posant

$$\begin{cases} x' = x + \frac{p}{2m} \\ y' = y, \end{cases}$$

ce qui revient à translater l'origine du repère au sommet O' de la parabole P, on obtient l'équation réduite

$$y'^2 = \frac{2mp}{k^2}x'.$$

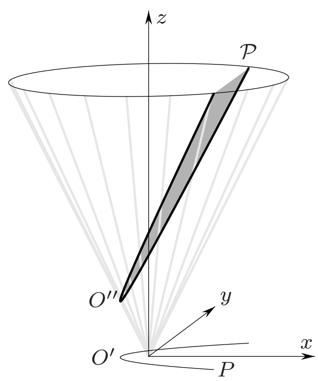


Fig. 32 : La section est une parabole

Pour écrire l'équation de la section conique $\mathcal{P}$ dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O'' est le point de percée dans Π de la parallèle à Oz passant par O', tel que $O''Y$ soit parallèle à $O'y'$ et que $O''X$ soit perpendiculaire à $O''Y$ dans Π.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, qui est aussi égal à l'angle formé par les axes $O''X$ et $O'x'$, la coordonnée d'un point $P'(x', y')$ est liée à celle du point $P(X, Y)$ dont il est la projection orthogonale sur le plan $O'x'y'$ par la relation

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha \\ y' = Y. \end{cases}$$

L'équation de la section conique $\mathcal{P}$ dans ce repère est alors

$$Y^2 = \frac{2mp\cos\alpha}{k^2}X,$$

qui est bien celle d'une parabole.

Hyperbole, premier cas. – Le plan de section est oblique et $|m| > |k|$. Dans l'équation de la courbe d'intersection

$$\begin{cases} (k^2 - m^2)x^2 + k^2y^2 - 2mpx - p^2 = 0 \\ z = mx + p, \end{cases}$$

le coefficient $(k^2 - m^2)$ du terme en x^2 est négatif, puisque $|k| < |m|$. Posons $-s^2 = k^2 - m^2$; l'équation de la courbe C

$$s^2x^2 - k^2y^2 + 2mpx + p^2 = 0$$

peut être transformée de la manière suivante :

$$s^2(x^2 + \frac{2mp}{s^2}x) - k^2y^2 + p^2 = 0.$$

Ensuite, en ajoutant et en retranchant $\frac{m^2p^2}{s^2}$ pour faire apparaître un carré parfait, nous obtenons

$$s^2(x^2 + \frac{2mp}{s^2}x + \frac{m^2p^2}{s^4}) - k^2y^2 - \frac{m^2p^2}{s^2} + p^2 = 0,$$

$$s^2(x + \frac{mp}{s^2})^2 - k^2y^2 = \frac{p^2(m^2 - s^2)}{s^2}.$$

En posant

$$\begin{cases} x' = x + \frac{mp}{s^2} \\ y' = y, \end{cases}$$

ce qui revient à translater l'origine du repère au centre O' de la courbe C, et puisque $m^2 - s^2 = k^2$, nous obtenons

$$s^2x'^2 - k^2y'^2 = \frac{p^2k^2}{s^2},$$

ou encore

$$\frac{x'^2}{\frac{p^2k^2}{s^4}} - \frac{y'^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1.$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes. La translation

$$\begin{cases} x' = x + \frac{mp}{s^2} \\ y' = y \end{cases}$$

a donc amené l'origine du repère au centre O' de l'hyperbole C.

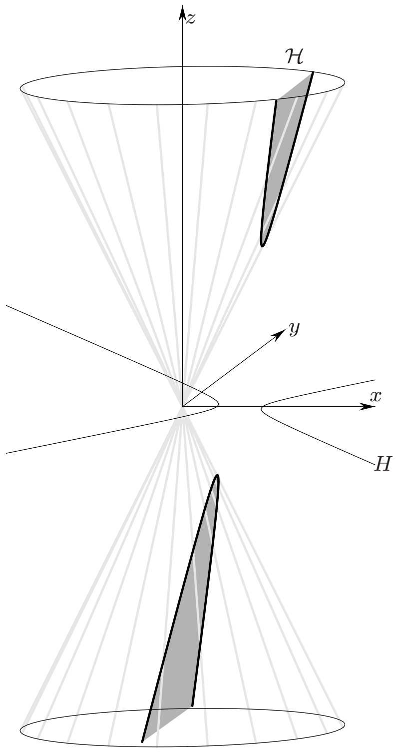


Fig. 33 : La section est une hyperbole

Pour écrire l'équation de la section conique $\mathcal{H}$ dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère orthonormé de même unité que le repère initial, dont l'origine O'' est le point de percée dans Π de la parallèle à Oz passant par O', tel que $O''Y$ soit parallèle à $O'y'$ et $O''X$ est perpendiculaire à $O''Y$ dans Π.

Si α désigne l'angle formé par les plans Π et Oxy, qui est aussi égal à l'angle formé par les axes $O''X$ et $O'x'$, la coordonnée d'un point $P'(x', y')$ est liée à celle du point $P(X, Y)$, dont il est la projection orthogonale sur le plan $O'x'y'$, par la relation

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha \\ y' = Y. \end{cases}$$

L'équation de la section conique $\mathcal{H}$ dans ce repère est alors

$$\frac{X^2}{\frac{p^2k^2}{s^4\cos^2\alpha}} - \frac{Y^2}{\frac{p^2}{s^2}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation réduite d'une hyperbole dont les axes mesurent $\dfrac{2|p|k}{s^2\cos\alpha}$ et $\dfrac{2|p|}{|s|}$.

Hyperbole, deuxième cas. – Le plan de section est parallèle à l'axe du cône.

Dans ce cas, l'équation du plan Π devient $x = p$. Le plan Π est alors parallèle au plan Oyz et on obtient l'équation de la section du cône par Π

en remplaçant x par p dans l'équation du cône. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \frac{z^2}{k^2p^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1 \\ x = p. \end{cases}$$

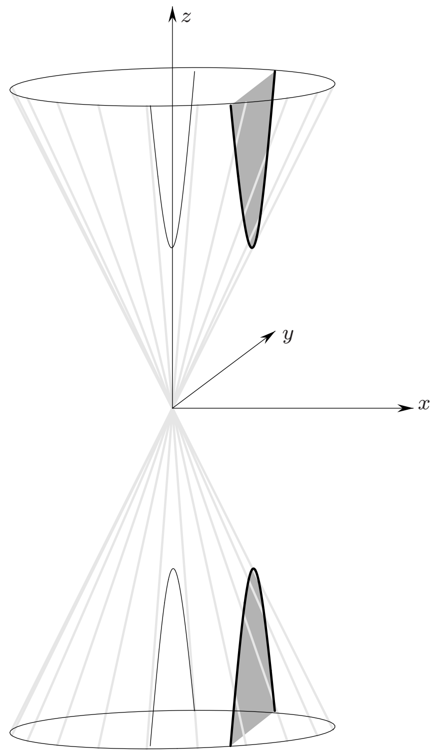


Fig. 34 : La section est une hyperbole

La première équation est celle de la projection orthogonale dans le plan Oyz de la courbe d'intersection. Pour écrire l'équation de cette courbe dans le plan Π, munissons celui-ci d'un repère $O'YZ$ de même unité que le repère initial, où O' est le point de percée de Ox dans Π et tel que $O'Y$ et $O'Z$ soient respectivement parallèles à Oy et Oz. L'équation de la courbe d'intersection est alors

$$\frac{Z^2}{k^2p^2} - \frac{Y^2}{p^2} = 1$$

dans ce repère. C'est l'équation d'une hyperbole dont les axes mesurent $2k|p|$ et $2|p|$.

Coniques dégénérées. – Le plan de section passe par le sommet du cône.

- Le plan Π est perpendiculaire à l'axe du cône.

  L'équation du plan Π est alors $z = 0$ et la section du cône par Π a pour équation

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

  Le seul point d'intersection est donc le sommet du cône.

- Le plan de section est oblique et $|m| < |k|$.
  L'équation du plan Π est $z = mx$ et la section du cône par Π a pour équation
  $$\begin{cases} k^2y^2 + (k^2 - m^2)x^2 = 0 \\ z = mx. \end{cases}$$
  Comme $k^2 - m^2 > 0$, le seul point d'intersection est le sommet du cône.
- Le plan de section est oblique et $|m| = |k|$.
  En remplaçant $k^2 - m^2 = 0$ dans l'équation de la section, on voit que celle-ci est la droite d'équation
  $$\begin{cases} y = 0 \\ z = mx. \end{cases}$$
- Le plan de section est oblique et $|m| > |k|$.
  Comme $k^2 < m^2$, on pose $t^2 = m^2 - k^2$ et l'équation de la section devient
  $$\begin{cases} k^2y^2 - t^2x^2 = 0 \\ z = mx. \end{cases}$$
  En factorisant, on obtient comme section du cône les deux droites d'équations
  $$\begin{cases} y = \frac{t}{k}x \\ z = mx \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = -\frac{t}{k}x \\ z = mx. \end{cases}$$
- Le plan de section est parallèle à l'axe du cône.
  L'équation du plan Π est alors $x = 0$ et la section du cône par Π a pour équation
  $$\begin{cases} z^2 - k^2y^2 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$
  La section est donc formée des deux génératrices d'équations
  $$\begin{cases} z = ky \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = -ky \\ x = 0. \end{cases}$$

Ces sections planes du cône, qui se réduisent à un point, une droite ou deux droites sont appelées *coniques dégénérées*. Elles ont été observées précédemment, en plaçant le sommet du cône dans le plan lumineux.

Prolongements possibles

1. L'ellipse, la parabole et l'hyperbole peuvent être observées également comme ombres à la lampe d'un cercle. Un cercle sur transparent est collé sur la vitre maintenue verticalement par son support. Le plan de projection est le plan horizontal. L'ombre du cercle qui apparaît sur ce plan est la section du cône d'ombre dont le sommet est la lampe et dont les génératrices sont les rayons lumineux interrompus par le cercle. En faisant varier la position de la lampe, on montre facilement le passage continu de l'ellipse à la parabole, puis à une branche d'hyperbole. Des dessins montrant le passage de l'ellipse à la parabole et réalisés au moyen du logiciel Cabri-Géomètre sont présentés ci-dessous. Remarquons que le cône d'ombre n'est pas un cône de révolution, puisque la lampe n'est plus sur la perpendiculaire au plan du cercle passant par son centre.

Cette expérience ne permet pas de montrer les coniques dégénérées, la position où le plan de projection passe par le sommet du cône (la lampe) est peu compatible avec le dispositif employé et fournit des ombres très médiocres.

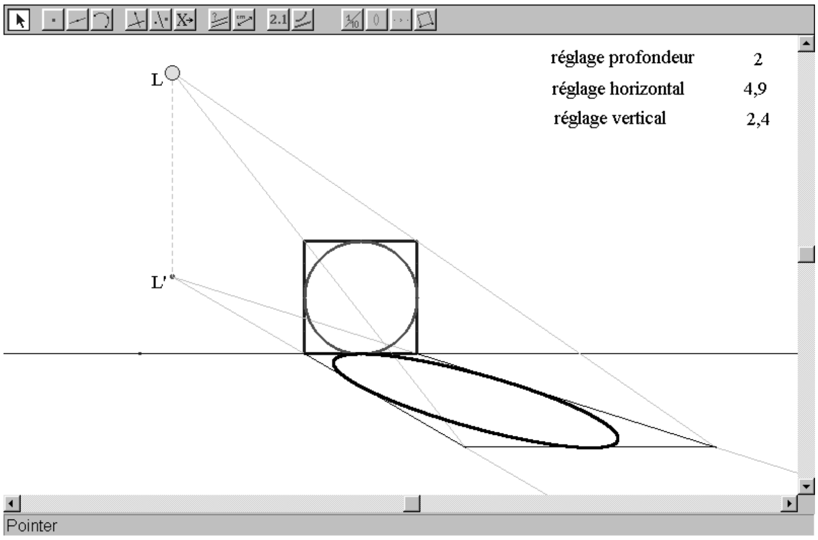


Fig. 35

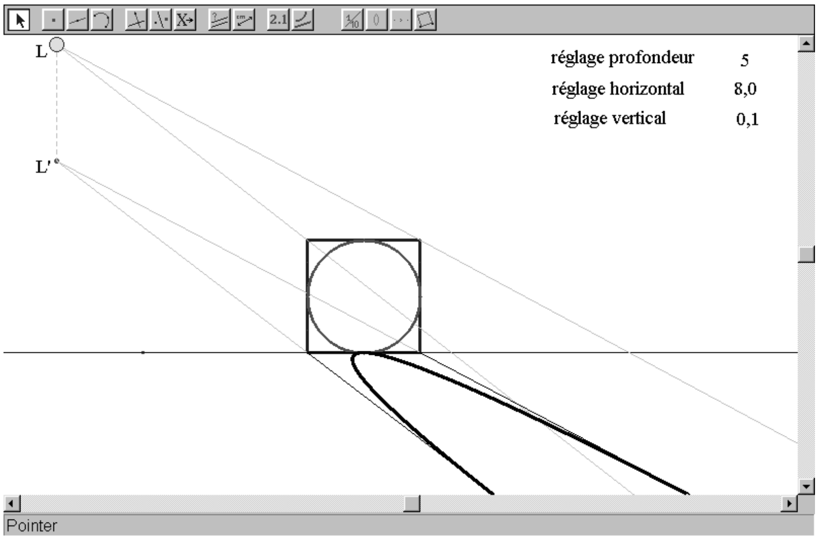


Fig. 36

2. Les théorèmes de Dandelin et Quételet (connus à l'étranger sous le nom de *théorèmes belges*) établissent le lien entre les sections planes dans les cônes et les coniques définies comme lieux géométriques. Cette méthode est abordée dans CREM [1995].

10

Vers la géométrie projective

1 Ombres à la lampe et projection centrale

De quoi s'agit-il ?

En étudiant les ombres à la lampe, établir le lien avec les projections centrales et la perspective à points de fuite.

Enjeux

Montrer que toute représentation d'un objet de l'espace en perspective centrale est une projection centrale de cet objet sur un plan. Ceci permet d'expliquer les règles de la perspective à points de fuite établies par les peintres du Quattrocento.

Matières couvertes. – Propriétés des projections centrales.

Représentations d'objets de l'espace en perspective à points de fuite.

Conservation du birapport par une projection centrale.

Compétences. – *Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste : quelques règles concernant la perspective centrale sont rencontrées et commentées en situant leur découverte dans le temps, ainsi que leur intérêt sur les plans artistique et scientifique.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Les plaques transparentes rigides et leurs supports qui ont été décrits dans l'activité 1.

Des photocopies sur transparent de la figure 1 agrandie. Des photocopies des documents correspondant aux figures 4 et 5 (voir annexe aux pages 397 à 399).

Des feuilles de papier blanc de format A3.

Une lampe de poche ou une lampe halogène et un transformateur. Il est important que la source lumineuse soit aussi ponctuelle que possible et qu'elle puisse facilement être placée et fixée en différents points de l'espace.

Prérequis.– Les activités 1 et 2 du chapitre 8.

Local.– Il est souhaitable de disposer d'un local que l'on peut au moins partiellement occulter.

1.1 Ombres à la lampe

Comment s'y prendre ?

Au cours de l'activité 1, nous avons rapidement comparé les ombres au soleil et à la lampe du bâton gradué. Ceci nous a permis de constater que les ombres à la lampe n'ont pas les mêmes propriétés que les ombres au soleil, les rayons issus d'une lampe n'étant pas parallèles mais concourants. Cependant, l'examen de l'ombre du bâton ne nous fournit guère d'information, en dehors du fait que l'ombre à la lampe ne conserve pas les rapports des longueurs de segments. Nous suggérons donc d'enrichir le modèle à observer pour en dégager plus d'informations et d'examiner l'ombre à la lampe, non plus d'un bâton, mais d'un damier dont les carrés sont alternativement transparents et opaques comme le montre le modèle de la figure 1. Cette figure présente l'avantage d'être simple, tout en comportant des droites parallèles dans des directions différentes et des segments dont les longueurs sont facilement repérables (une, deux, trois,... largeurs de carreau).

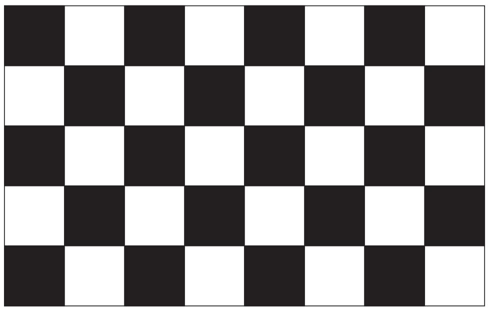


Fig. 1: Modèle à photocopier sur transparent fourni en vraie grandeur en annexe

Les élèves collent le transparent réalisé à partir du damier sur la vitre placée verticalement, de telle manière que les droites qui forment le damier soient horizontales ou verticales.

Une première phase du travail peut être consacrée à l'observation rapide de l'ombre au soleil de ce damier et au rappel des propriétés de la projection parallèle (figure 2).

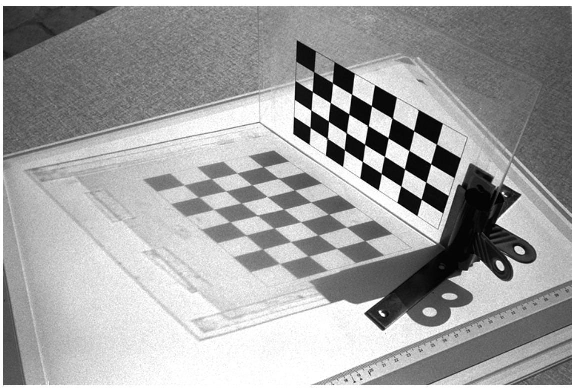


Fig. 2

Ensuite, la lampe est placée derrière la vitre, à 7 cm de distance et 20 cm de hauteur environ, orientée vers le damier, dans le plan vertical perpendiculaire à la vitre et qui coupe le damier en deux parties égales. Toutes ces dispositions sont prises pour produire une ombre qui évoque autant que possible une photographie de carrelage, mais d'autres positions de la lampe pourront être exploitées par la suite. Après avoir observé l'ombre ainsi produite et marqué sur une feuille de papier A3 les ombres des sommets de tous les carrés, les élèves tracent le dessin complet de l'ombre. Le résultat obtenu suscitera très vraisemblablement la comparaison avec la photographie d'un carrelage, ou avec la représentation d'un carrelage dans une peinture.

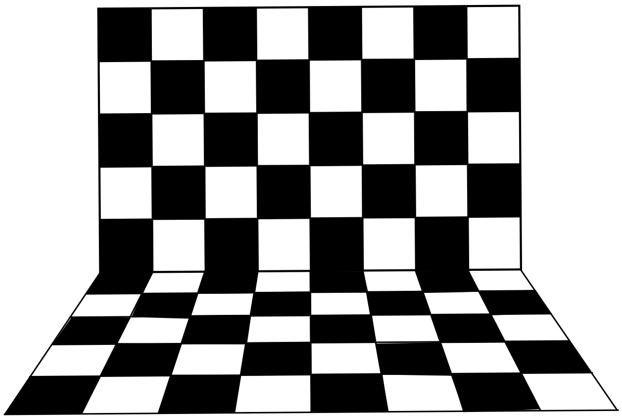


Fig. 3: Ombre à la lampe du damier

Deux autres documents sont alors présentés à la classe : une photographie d'un carrelage et une reproduction de peinture comportant également une portion de carrelage, ainsi que d'autres éléments d'architecture comme des murs, portes, fenêtres, poutres, ...Nous proposons de tels documents (figures 4 et 5) à titre d'exemples, mais bien entendu les élèves ou le professeur peuvent en apporter d'autres. Des photocopies de ces documents sont distribuées aux élèves de telle manière que chacun puisse tracer sur son exemplaire toutes les constructions géométriques qu'il juge nécessaires à l'étude des propriétés.

Fig. 4: Photographie de carrelage

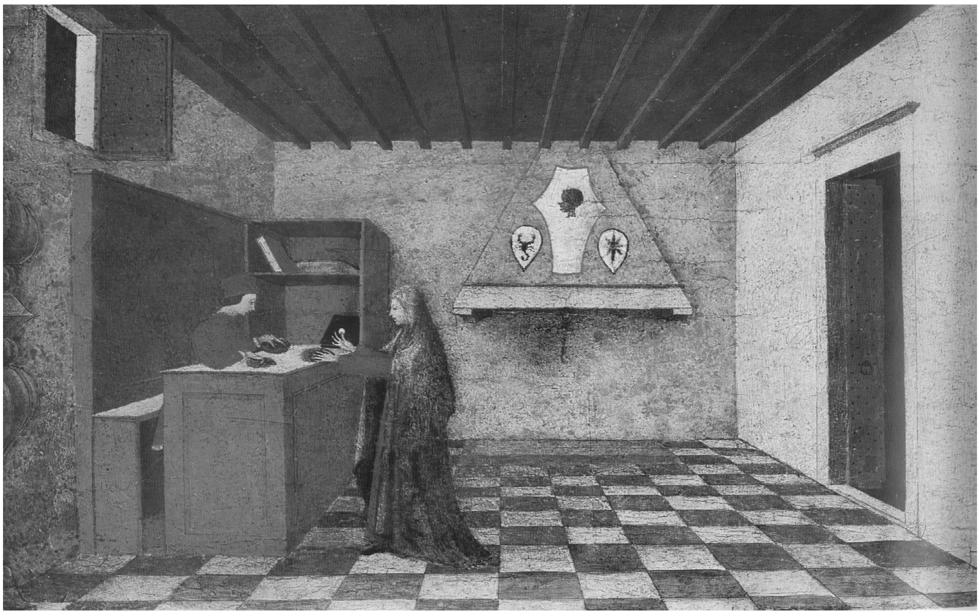


Fig. 5: Le miracle de l'hostie profanée-Uccello-1469

De toute évidence, les trois documents observés (ombre du damier, photographie du carrelage, peinture) ne sont pas des représentations en perspective cavalière. Ils nous fournissent une image plus proche de celle que nous percevons par la vision. Ils présentent des ressemblances évidentes, qui laissent supposer qu'un phénomène commun est à l'origine de ces trois représentations. De quoi s'agit-il ?

Comment se forme une ombre à la lampe ?
Que se passe-t-il dans un appareil photographique ?
Comment les peintres de la Renaissance italienne ont-ils établi les règles de la perspective ?

Toutes ces questions, provoquées par la comparaison des trois documents, vont nous amener progressivement à l'étude de la projection centrale et de la perspective à points de fuite.

Pour y voir plus clair, commençons par analyser les trois documents du point de vue de leurs propriétés géométriques.

Sur ces documents,

- comment apparaît l'ombre ou la représentation
  - d'une droite ?
  - de deux droites sécantes ?
  - de deux droites parallèles (examiner plusieurs directions) ?
- les longueurs des segments sont-elles conservées ?
- les rapports des longueurs sont-ils conservés ? (En particulier, examiner la position du milieu d'un segment sur sa représentation.)

Des observations effectuées sur l'ombre du damier, il ressort que

- L'ombre d'une droite est une droite :
  - des droites sécantes ont pour ombres des droites sécantes ;
  - des droites parallèles ont pour ombres des droites concourantes, sauf les droites horizontales du damier qui sont parallèles à leurs ombres ; celles-ci sont donc parallèles.
- Les longueurs des segments ne sont pas conservées.
- Les rapports des longueurs des segments ne sont pas conservés, sauf sur les horizontales du damier. Par exemple le milieu d'un segment formé de deux côtés consécutifs et alignés du damier n'apparaît pas au milieu de l'ombre de ce segment, sauf sur l'ombre d'un segment horizontal.

Des constatations similaires peuvent être faites à partir de l'examen du document photographique et de la reproduction de peinture, ce qui nous confirme l'existence d'un phénomène commun. C'est l'ombre à la lampe qui nous paraît la plus facile à étudier, car nous pouvons maîtriser les conditions d'expérience : tout d'abord nous disposons du modèle original, ce qui permet d'établir des comparaisons entre le damier d'origine et son ombre, mais aussi nous pouvons modifier l'emplacement de la lampe, observer les ombres d'autres figures en élaborant d'autres transparents...

L'ombre à la lampe nous donne une approche intuitive de la projection centrale et l'ombre du damier sur la feuille est une représentation de celui-ci en perspective centrale.

Toute l'intuition acquise au cours de cette première partie est indispensable pour aborder dans de bonnes conditions les démonstrations mathématiques qui vont suivre.

1.2 Projections centrales

Comment s'y prendre ?

Nous avons acquis, grâce aux ombres à la lampe, une perception intuitive de la projection centrale, qui envoie les points de l'espace sur un plan par des droites issues d'un point, appelées projetantes. L'ombre d'un objet sur le plan de la feuille est l'image de celui-ci par une projection centrale dont le centre est le point lumineux. Les projetantes sont les rayons lumineux issus de la lampe.

Étendons ce type de projection à l'espace tout entier de la manière suivante.

L'image d'un point de l'espace par une projection centrale sur un plan est le point de percée dans ce plan de la droite issue du centre et passant par ce point.

L'image d'un objet de l'espace par cette même projection centrale est l'ensemble des images des différents points de cet objet.

Il faut remarquer que les points du plan parallèle au plan de projection et passant par le centre n'ont pas d'image par cette projection.

Les *projetantes* sont les droites joignant les points de l'espace à leur image ; elles se rencontrent en un même point, le centre de la projection.

L'ombre à la lampe ne nous donne donc qu'une approche incomplète de la projection centrale. En effet, seuls les objets situés entre la lampe et le plan de projection ont une ombre, tandis que tous les points de l'espace ont une image par une projection centrale, sauf ceux du plan parallèle au plan de projection et passant par le centre.

Les élèves sont invités à reformuler les observations effectuées sur l'ombre du damier, de manière à obtenir les énoncés de quelques propriétés des projections centrales. Les démonstrations de ces propriétés ne présentent guère de difficulté, elles s'appuient sur les propriétés d'incidence et de parallélisme dans l'espace. Comme dans l'activité 1 à la page 263, nous n'abordons pas ici tous les cas particuliers, mais il convient de ne pas les éluder si les élèves les abordent spontanément.

Dans les démonstrations qui suivent, nous noterons O le centre de projection, Π le plan de projection et Π_o le plan parallèle à Π et passant par O. Il faudra rester attentif au fait que les points de ce plan Π_o n'ont pas d'image par la projection centrale de centre O.

Image d'une droite

1. *L'image d'une droite par une projection centrale est une droite (ou un point).*

En voici la preuve, dans le cas général où la droite d ne passe pas par O.

Les droites passant par O et un point de la droite d sont entièrement contenues dans le plan Δ déterminé par la droite d et le point O, toutes ces projetantes des points de d percent le plan de projection Π en des points communs à ces deux plans. L'image de la droite d par la projection centrale de centre C est donc la droite d'intersection du plan Δ et du plan Π.

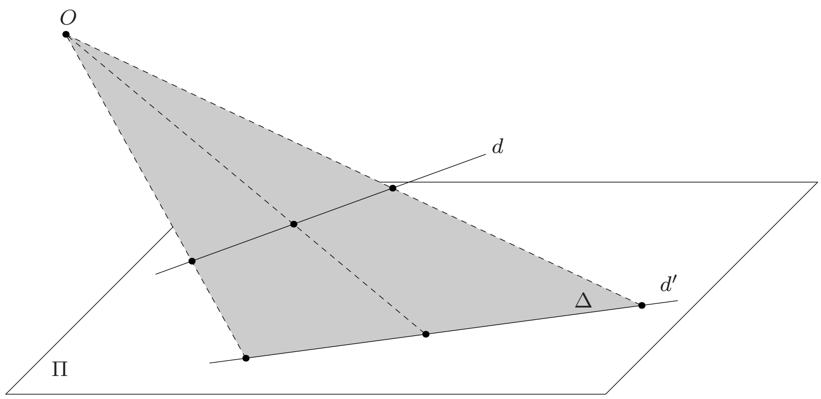


Fig. 6

Cette droite existe toujours, sauf si les plans Π et Δ sont parallèles, ce qui ne peut se produire que si la droite d se trouve dans le plan Π_o, mais nous avons déjà remarqué que les points de ce plan n'ont pas d'image par la projection centrale.

Images de deux droites. – Les questions suivantes sont destinées à guider les élèves dans leur réflexion.

- Les images de deux droites sécantes par une projection centrale peuvent-elles être
  - deux droites sécantes ?
  - deux droites parallèles ?
- Les images de deux droites parallèles par une projection centrale peuvent-elles être
  - deux droites sécantes ?
  - deux droites parallèles ?

Tout en apportant des réponses à ces questions, les élèves s'attacheront à les rendre aussi complètes que possible en précisant dans quelles positions doivent se trouver les deux droites d'origine dans chacun des cas.

La deuxième observation effectuée sur l'ombre des droites du damier incite à conjecturer que deux droites sécantes ont pour image deux droites sécantes. Cependant, rien ne permet de supposer que les droites du damier nous fournissent tous les cas de figure. Une expérience supplémentaire pourrait faire apparaître d'autres situations : les élèves réalisent un nouveau transparent sur lequel ils tracent deux droites sécantes et collent celui-ci sur la vitre. En plaçant la lampe dans différentes positions, il est possible d'observer que les ombres de deux droites sécantes peuvent être des droites parallèles, et de constater dans quelle position relative des droites et de la lampe cela se produit.

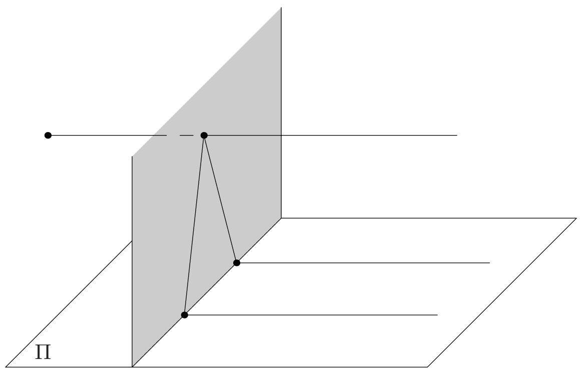


Fig. 7

En reformulant ces dernières observations en termes de projection centrale, les élèves énoncent la propriété sous la forme suivante :

2. *Les images de deux droites sécantes par une projection centrale sont des droites sécantes, sauf si leur point d'intersection est dans le plan parallèle au plan de projection passant par le centre. Dans ce cas, leurs images sont des droites parallèles.*

Les élèves qui n'auraient pas observé le cas particulier lors de la dernière expérience devraient le découvrir par le raisonnement en établissant la démonstration du cas général.

Notons c et d deux droites sécantes en un point I. Leurs images par la projection centrale de centre O sont les droites c' et d', intersections du plan Π avec les plans Γ et Δ où
Γ est le plan déterminé par O et c,
Δ est le plan déterminé par O et d.

Ces deux plans ont en commun les points O et I, ils sont donc sécants et leur droite d'intersection notée i est déterminée par les points O et I.

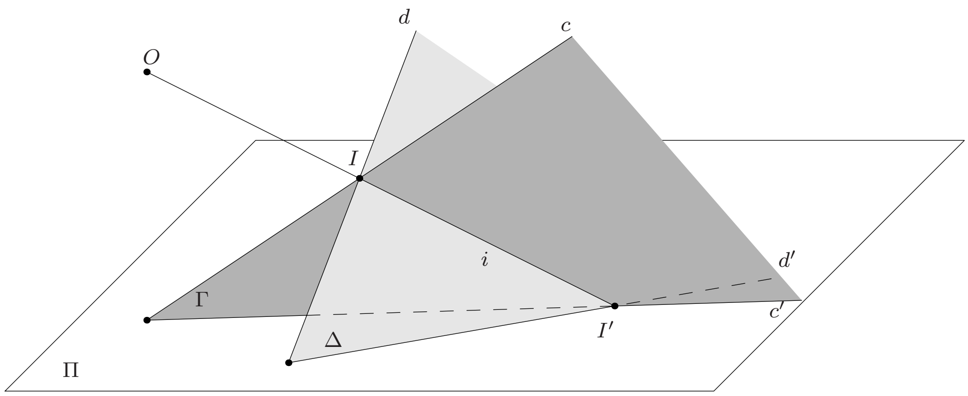


Fig. 8

Si la droite i perce le plan Π en I',
le point I' appartient aux plans Π et Γ, donc à la droite c',
le point I' appartient aux plans Π et Δ, donc à la droite d',
les deux droites images de c et de d se coupent donc en I' et elles sont sécantes.

Mais si la droite i est parallèle au plan Π, les droites c' et d' images de c et d n'auront pas de point commun, elles sont coplanaires disjointes, donc parallèles. Cette situation peut se produire lorsque la droite OI est parallèle au plan Π, c'est-à-dire lorsque le point I est dans le plan Π_o.

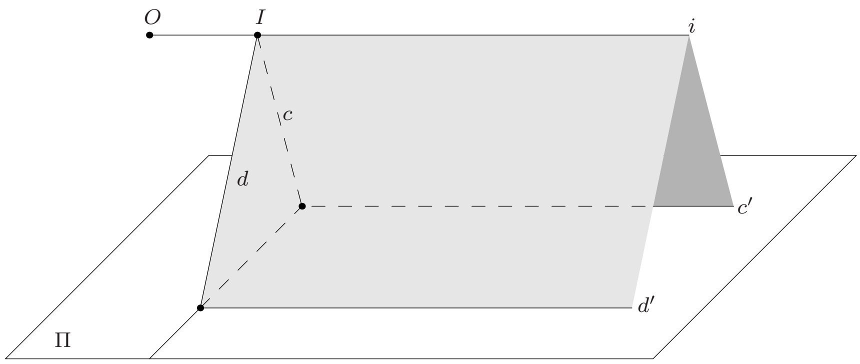


Fig. 9

Les élèves qui n'auraient pas observé cette dernière situation lors de l'expérience préalable pourront l'illustrer a posteriori en plaçant la lampe dans la position appropriée.

L'observation de l'ombre du damier nous a montré que les droites horizontales ont des ombres parallèles, tandis que les verticales ont des ombres concourantes. Si on trace des diagonales, ou si on colle le damier en position oblique sur la vitre, on constate que d'autres directions de droites parallèles ont des ombres concourantes. Il faudra donc préciser.

- Quelles sont les directions de droites parallèles dont les images par une projection centrale sont des droites parallèles ?
- Quelles sont les directions de droites parallèles dont les images par une projection centrale sont des droites concourantes ?

Une expérience complémentaire sera effectuée en plaçant sur la vitre, dans différentes positions, un transparent sur lequel des droites parallèles ont été tracées. La répétition de l'expérience pour différentes positions de la lampe nous confirme que les seules droites parallèles dont les ombres sont parallèles sont les droites horizontales, c'est-à-dire celles qui sont parallèles au plan de projection. De plus, ces droites ont des ombres qui leur sont parallèles.

Ces observations nous conduisent aux énoncés suivants.

3. *Si une droite parallèle au plan de projection a une image par une projection centrale, cette image est une droite qui lui est parallèle.*

4. *Les images par une projection centrale de droites parallèles au plan de projection sont des droites parallèles (si elles existent).*

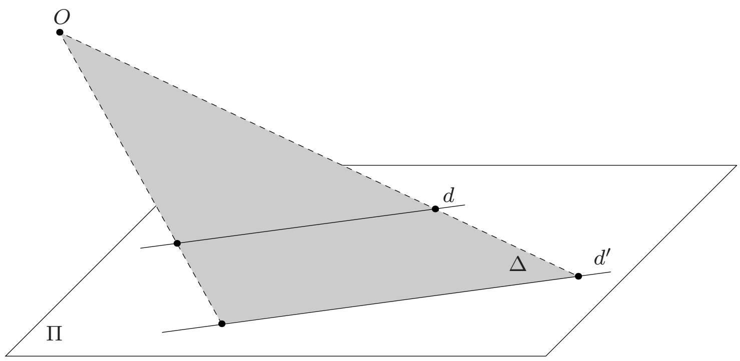


Fig. 10

Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété 1 à la page 293 : *Si une droite est parallèle à un plan, tout plan contenant la droite et sécant avec le premier plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

Considérons à présent des droites parallèles, non parallèles au plan de projection. L'analyse de l'ombre du damier nous montre que :

- les verticales ont pour ombres des droites concourantes, leur point de rencontre semble se trouver sur une verticale passant par le point lumineux (voir figure 12 à la page suivante);
- les diagonales dans une direction ont des ombres concourantes ;
- les diagonales de l'autre direction ont également des ombres concourantes.

De plus, les points de rencontre des ombres des droites des trois directions examinées semblent alignés.

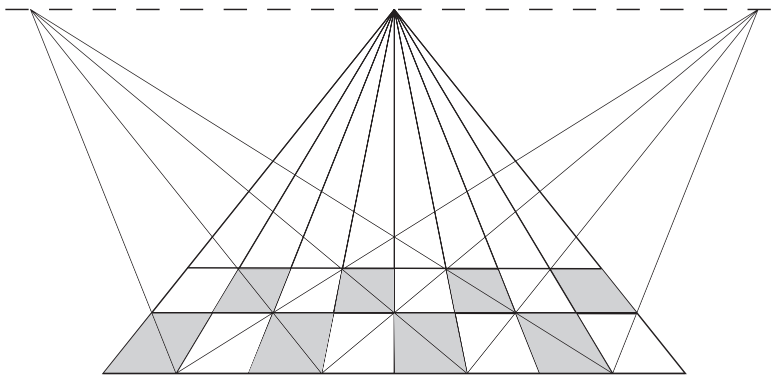


Fig. 11

L'examen de l'ombre du damier placé en oblique nous montre que les droites des autres directions non parallèles au plan de projection ont des ombres concourantes.

Démontrons la propriété suivante.

5. *Les images par une projection centrale de droites parallèles, non parallèles au plan de projection, sont des droites concourantes.*

Pour cela, gardons à l'esprit la question suivante.

Où se trouve le point de rencontre des projections des droites parallèles d'une direction donnée ?

Pour clarifier la situation, examinons tout d'abord les droites verticales de la vitre. Leurs projections sont les droites d'intersection du plan Π avec les plans verticaux déterminés par le centre O et chacune de ces verticales. Tous ces plans verticaux contiennent la verticale passant par O, et celle-ci perce le plan Π en un point S. Ce point S est commun au plan Π, à tous les plans verticaux et donc à toutes les projections des droites verticales du plan de la vitre. Celles-ci sont donc concourantes et leur point de rencontre est le point S.

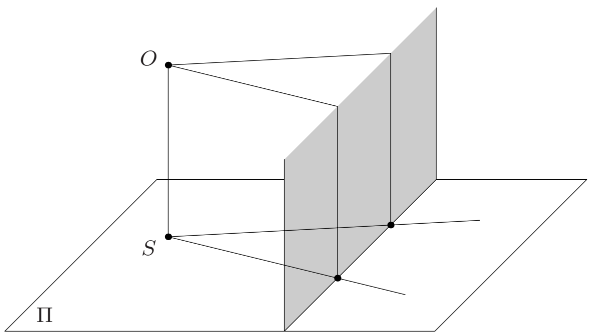


Fig. 12

La projection d'une droite verticale, non contenue dans le plan de la vitre, passe-t-elle aussi par le point S ? Oui, car le même raisonnement s'applique à ces droites.

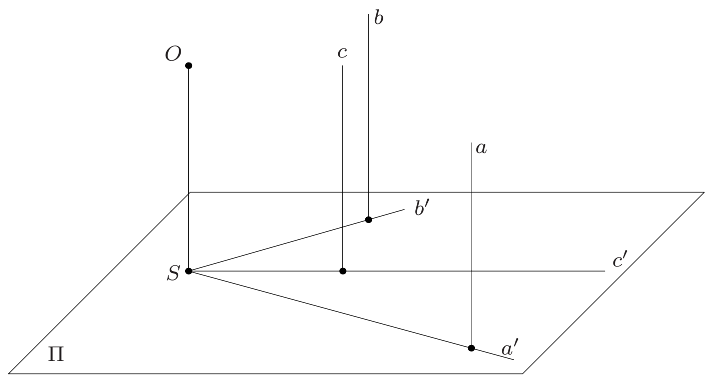


Fig. 13

Nous pouvons conclure provisoirement : les projections de toutes les droites de l'espace perpendiculaires au plan de projection sont concourantes en un point qui est la projection orthogonale du centre O sur le plan Π.

Nous avons privilégié d'abord la direction verticale, perpendiculaire au plan de projection, pour fixer les idées. Mais le même raisonnement peut être tenu pour des droites parallèles de toute autre direction, par exemple celle de la droite a.

En effet, tous les plans contenant O et une droite de la direction considérée, dont les intersections avec Π déterminent les projections des droites parallèles à a, contiennent la parallèle à a passant par O, et donc la projection du centre O sur le plan Π parallèlement à a. Ainsi, les images des parallèles à a convergent en S.

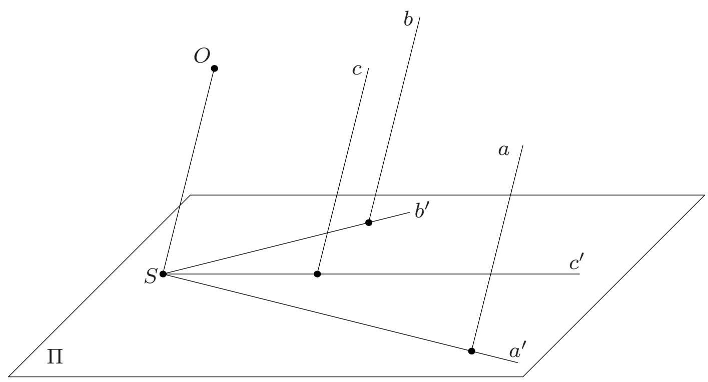


Fig. 14

Revenons au problème de l'alignement des points de rencontre des ombres des droites des trois directions examinées (figure 11 à la page précédente).

Les images de droites parallèles à une droite du plan de la vitre (sauf les horizontales) sont donc des droites concourantes, dont le point de rencontre est la projection du point O parallèlement à cette direction. Ces points de rencontre se trouvent donc sur la droite d'intersection du plan de projection avec le plan parallèle au plan de la vitre passant par le centre. Cette droite est le lieu des points d'intersection de ces faisceaux de droites concourantes. Ceci explique que ces points de rencontre sont effectivement alignés.

Prolongements possibles

Nous n'avons abordé ici que quelques propriétés des projections centrales, en particulier celles qui vont nous permettre de justifier les règles principales de la représentation en perspective. La conservation du rapport des longueurs sur les droites parallèles au plan de projection pourrait être abordée sans difficulté (Thalès).

Dans l'activité suivante, nous proposons une démonstration du théorème de Desargues à partir de l'ombre à la lampe d'un prisme à base triangulaire.

1.3 La perspective du peintre

Un tableau en perspective est l'image par une projection centrale, dont le centre est l'œil du peintre, sur le plan du tableau, de l'espace situé derrière le tableau. L'œil du peintre (un seul) occupe donc une position unique et immuable pendant toute l'élaboration de la peinture. Idéalement, le spectateur devrait placer son œil exactement au même endroit pour admirer le tableau selon le point de vue choisi par le peintre.

Voici ce que Leonardo da Vinci écrit à ce sujet dans ses carnets de notes : « La perspective n'est rien d'autre que la vision d'un objet derrière un verre lisse et transparent, à la surface duquel pourront être marquées toutes les choses qui se trouvent derrière le verre ; ces choses approchent le point de l'œil sous forme de diverses pyramides que le verre coupe. » E. Maccurdy [1942]

Les illustrations suivantes montrent différents dispositifs de perspective imaginés par le peintre Dürer. Ces instruments, encombrants et peu maniables, ont le mérite de mettre en évidence les grands principes de la perspective centrale.

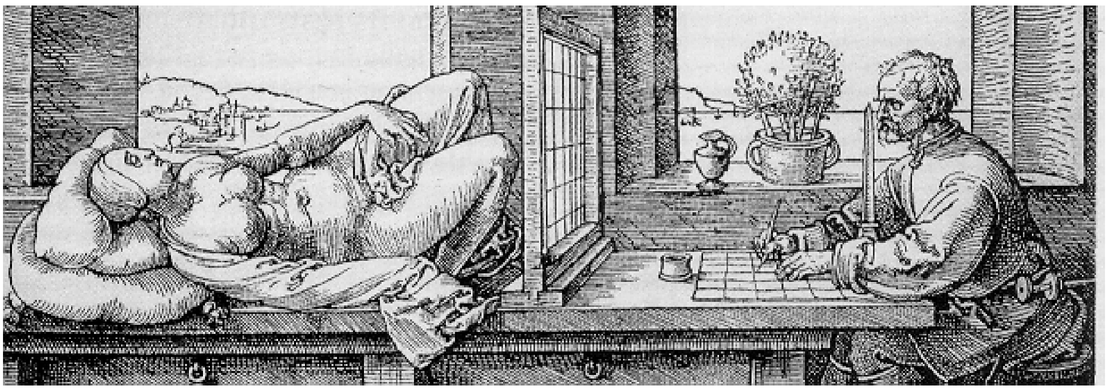


Fig. 15

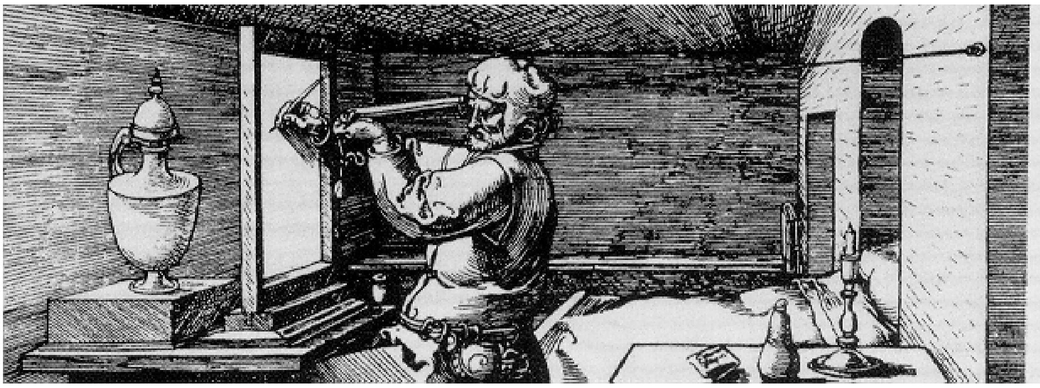


Fig. 16

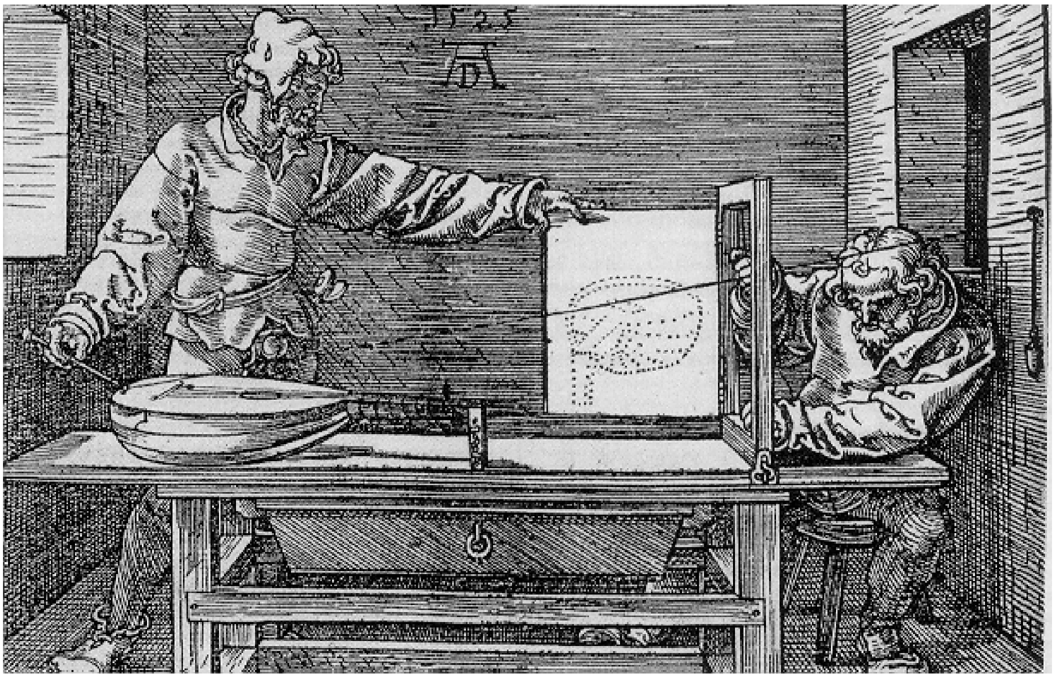


Fig. 17

Le travail effectué sur l'ombre à la lampe nous a montré une situation similaire, mais où la position des plans est inversée : en effet, le damier original se trouvait sur la vitre placée verticalement, et son ombre apparaissait sur un plan de projection horizontal ; tandis que le peintre représente sur un tableau vertical un carrelage horizontal. Il faudra donc transposer comme il convient les résultats obtenus précédemment, pour obtenir les règles du dessin en perspective. Un peu de vocabulaire spécifique va nous permettre de les énoncer plus facilement.

On appelle *point de fuite* le point de rencontre sur le tableau des représentations des droites parallèles dans une direction non parallèle au plan du tableau.

Le *point de fuite principal* est celui qui correspond à la direction des droites de bout par rapport à l'observateur. Les élèves déterminent sa position sur le tableau (au pied de la perpendiculaire menée de l'œil de l'observateur sur le plan du tableau) et justifient leur réponse. C'est la situation transposée de celle qui apparaît dans la figure 13 où Π serait le plan du tableau.

Le plan horizontal (parallèle au sol) au niveau de l'œil du peintre est appelé *plan de l'horizon*. L'intersection de ce plan avec le plan du tableau est appelée *ligne d'horizon*. Les élèves déterminent le rôle de cette droite, qui contient le point de fuite principal. Ils établissent qu'elle est le lieu des points de fuite des directions horizontales non parallèles au tableau.

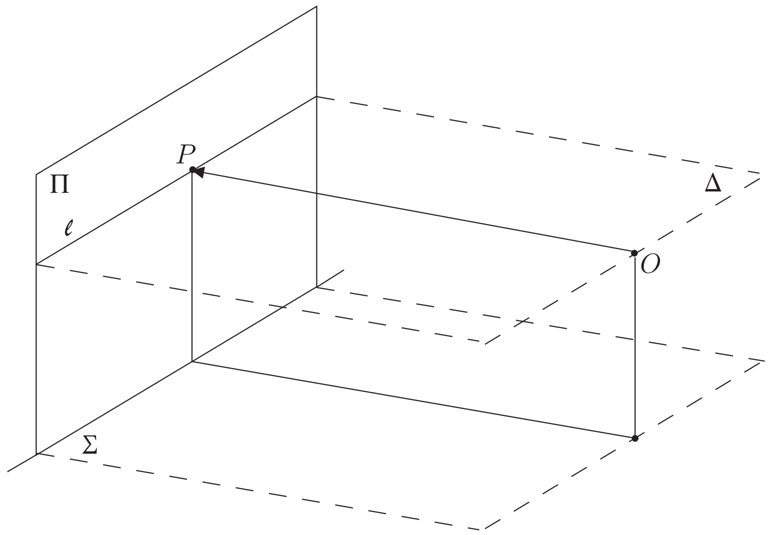


Fig. 18

Dans cette figure,

– Π représente le plan du tableau,

– Σ est le plan du sol,

– O est l'œil de l'observateur,

– Δ est le plan de l'horizon,

– ℓ est la ligne d'horizon,

– P est le point de fuite principal.

Les élèves sont à présent en mesure de faire la synthèse des règles principales du dessin en perspective. Le résultat obtenu pourrait ressembler à ce qui suit.

- Les droites parallèles au plan du tableau se représentent parallèlement à elles-mêmes. Des droites parallèles dans ces directions ont des images parallèles.
- Les droites horizontales parallèles, non parallèles au plan du tableau, sont représentées par des droites concourantes (appelées *fuyantes*) ; les différents points de fuite se trouvent sur la ligne d'horizon.
- Les rapports de longueurs sont conservés sur les droites parallèles au plan du tableau, mais pas sur les fuyantes.

La réduction des longueurs en fonction de l'éloignement n'est évidemment pas aléatoire. Comment la déterminer ? La question suivante est posée aux élèves.

Que penser de la représentation du carrelage dans cette peinture de Lorenzetti (agrandie en annexe à la page 400) ?

Fig. 19: L'annonciation de A. Lorenzetti, 1344.

Pourquoi ce carrelage n'est-il pas conforme aux règles de la perspective ?

La réflexion des élèves peut être guidée par l'indication suivante : la projection centrale conserve l'alignement des points et dans la représentation d'un carrelage, il est possible d'exploiter des alignements de sommets moins évidents que ceux situés sur les bords des rangées.

Lorsque les élèves auront découvert que l'alignement des points situés sur des diagonales successives n'est pas respecté dans ce tableau, ils seront en mesure d'aborder le problème suivant.

Voici la première rangée d'un carrelage.

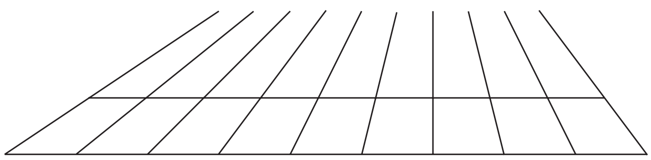


Fig. 20

Comment dessiner les rangées suivantes au moyen d'une construction géométrique simple (voir annexe à la page 401) ?

La solution découle des observations effectuées sur la peinture de Lorenzetti. La construction des diagonales ne sera suggérée qu'en dernier recours.

Ces règles ont été établies et démontrées par les peintres et mathématiciens de la Renaissance italienne. La figure suivante illustre la construction du dallage expliquée par Alberti dans son traité *De Pictura* (L. Alberti [1435]). Le point O représente l'œil du peintre, T le tableau et P le point de fuite principal.

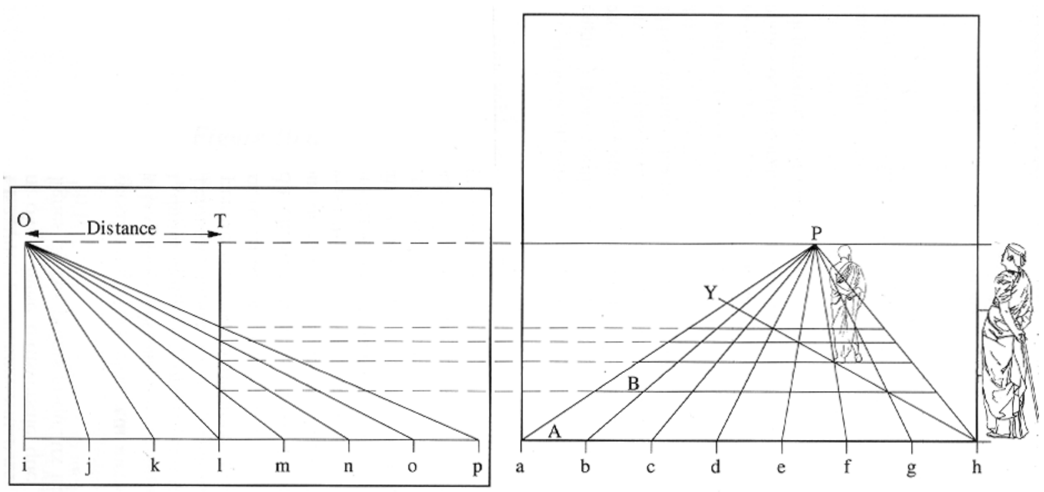


Fig. 21

Exercices

1. Représenter en perspective un cube dont une face est en position frontale. Placer le milieu sur chacune des arêtes de ce cube.

2. Représenter en perspective une pyramide droite à base carrée dont une arête de la base est parallèle au plan de représentation.

3. Compléter la représentation du couloir (figure 22, agrandie en annexe à la page 402) en terminant le dessin du carrelage, en plaçant deux portes de même largeur sur le mur de droite et une fenêtre de largeur double sur le mur de gauche.

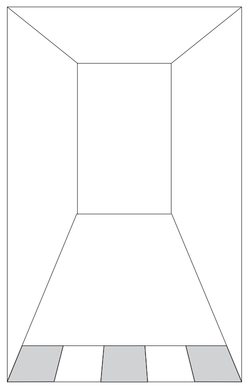


Fig. 22

Prolongements possibles

Il nous paraît intéressant de montrer aux élèves que l'ombre du damier obtenue en éloignant « indéfiniment » la lampe ressemble de plus en plus à l'ombre produite par le soleil. Quelques dessins, réalisés au moyen du logiciel Cabri-Géomètre et illustrant cette propriété sont présentés ci-dessous (figures 23 à 26).

La projection parallèle pourrait donc être considérée comme une projection centrale dont le centre est rejeté à l'infini ; et les droites parallèles, comme des droites qui se coupent en un *point à l'infini.* Il y aurait un *point à l'infini* dans chaque direction. Dans une représentation en perspective centrale, les points de fuite sont les représentations sur le tableau de ces points à l'infini, et ces représentations sont à distance finie.

Si dans un plan, on ne fait plus la distinction entre les points à l'infini et les autres points, il ne sera plus possible de distinguer les droites parallèles des droites concourantes ; la notion de parallélisme n'aura plus de sens. Si de plus, on admet que les points à l'infini forment une *droite de l'infini*, on obtient un plan homogène en ses points et en ses droites. Cela signifie que, dans ce plan,

– deux points déterminent une et une seule droite ;

– deux droites déterminent un et un seul point d'intersection.

Le plan ainsi défini est le *plan projectif* et cette géométrie est appelée *géométrie projective.*

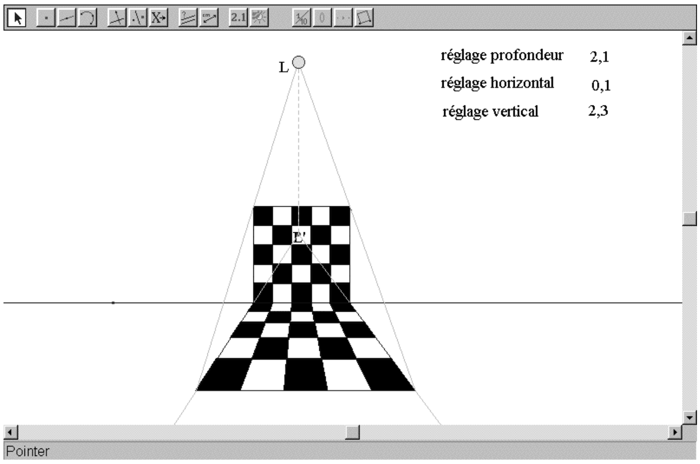


Fig. 23

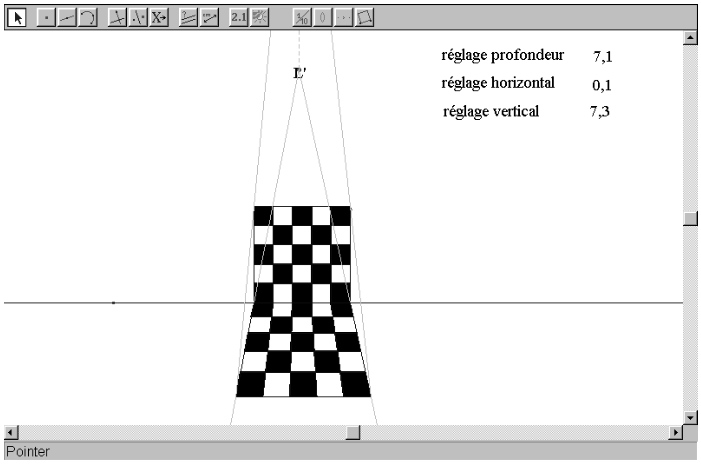


Fig. 24

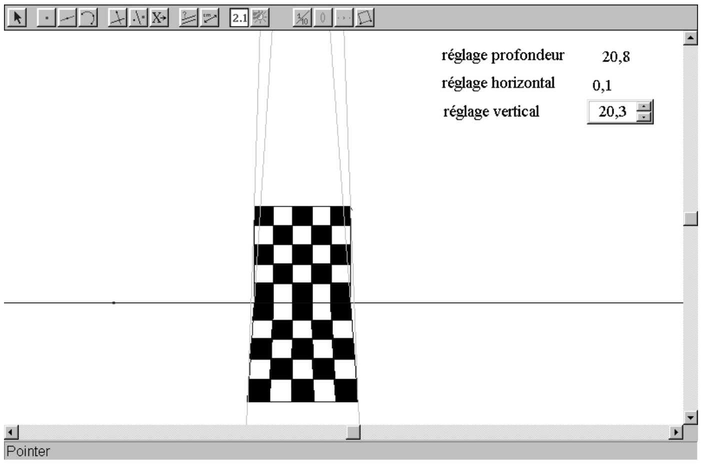


Fig. 25

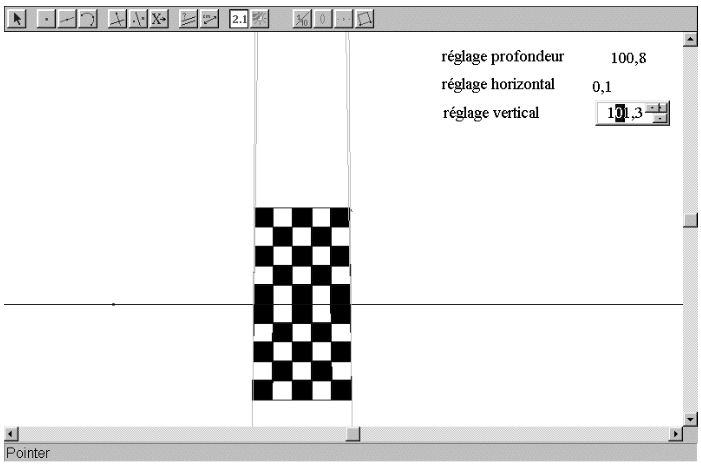


Fig. 26

1.4 Le birapport, invariant de la projection centrale

Les élèves ont déjà observé à plusieurs reprises que les projections centrales ne conservent ni les longueurs, ni les rapports de longueurs. Les observations sur l'ombre à la lampe d'un damier et les exercices de construction en perspective centrale proposés dans cette activité leur ont fait constater que la représentation du point situé au milieu d'un segment ne se trouvait pas au milieu de la représentation de ce segment (sauf pour un segment parallèle au plan de la représentation). Cependant, la position de l'image de ce point milieu dans la représentation n'est pas arbitraire, elle répond à des règles de construction précises. Il est permis de penser que, si ce point peut être construit de manière univoque, sa position pourrait également être déterminée par calcul.

Plus généralement, le point C qui partage le segment $[AB]$ dans un rapport donné sera représenté en un point bien précis de la représentation $[A'B']$ du segment $[AB]$ sur la toile. Nous proposons aux élèves de calculer dans quel rapport le point C', image de C, partage le segment $[A'B']$.

Plaçons-nous dans le contexte de la perspective du peintre et considérons un segment $[AB]$ perpendiculaire au plan du tableau, tel que son extrémité A soit sur la toile. Le point A coïncide avec son image et la représentation du segment $[AB]$ est le segment $[AB']$. Considérons le point C du segment $[AB]$ tel que $|AC| = k|AB|$.
Le rapport

$$r = \frac{|AC|}{|CB|}$$

vaut

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{k|AB|}{|AB| - |AC|} = \frac{k|AB|}{(1-k)||AB|} = \frac{k}{1-k}.$$

La question est donc de calculer la valeur du rapport $r' = \frac{|AC'|}{|C'B'|}$.

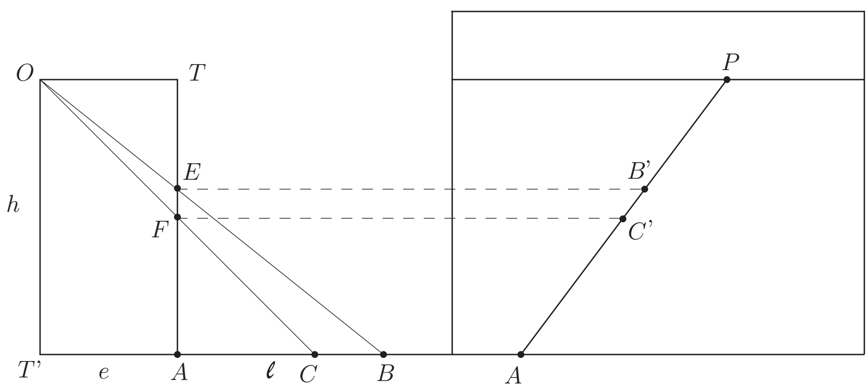


Fig. 27

Dans cette figure,

– O représente l'œil de l'observateur ;

– AT est une vue de profil du tableau ;
– P est le point de fuite principal.

Remarquons tout d'abord que le rapport r' est égal au rapport $\frac{|AF|}{|FE|}$ (Thalès). Pour simplifier l'écriture des calculs, notons :

– $e = |OT|$ l'éloignement de l'observateur par rapport à la toile ;
– $h = |OT'|$ la hauteur de l'observateur ;
– $\ell = |AB|$ la longueur du segment $[AB]$.

Calculons $|AF|$ en utilisant la similitude des triangles ACF et $T'CO$:

$$\frac{|AF|}{|T'O|} = \frac{|AC|}{|T'C|},$$

$$|AF| = \frac{|AC| \cdot |T'O|}{|T'C|} = \frac{k\ell \cdot h}{k\ell + e}.$$

Observons que $|FE| = |AE| - |AF|$ et calculons $|AE|$ en utilisant la similitude des triangles EBA et OBT' :

$$\frac{|AE|}{|T'O|} = \frac{|AB|}{|T'B|},$$

$$|AE| = \frac{|AB| \cdot |T'O|}{|T'B|} = \frac{\ell \cdot h}{\ell + e}.$$

Nous calculons ensuite

$$|FE| = |AE| - |AF| = \frac{\ell h}{\ell + e} - \frac{k\ell h}{k\ell + e}.$$

Après réduction au même dénominateur et simplification, nous obtenons

$$|FE| = \frac{e\ell h(1-k)}{(k\ell + e)(\ell + e)}.$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer le rapport

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{\frac{k\ell h}{k\ell+e}}{\frac{e\ell h(1-k)}{(k\ell+e)(\ell+e)}} = \frac{k}{1-k} \cdot \frac{\ell + e}{e},$$

et donc

$$\frac{|AC'|}{|C'B'|} = r \cdot \frac{\ell + e}{e}.$$

Ceci signifie que le rapport initial

$$\frac{|AC|}{|CB|} = r$$

est devenu

$$\frac{|AC'|}{|C'B'|} = r \cdot \frac{\ell + e}{e}$$

dans la représentation.

Ce rapport r a donc été multiplié par un facteur qui ne dépend que de la longueur ℓ du segment $[AB]$ et de l'éloignement e de l'observateur par rapport au plan du tableau. Les élèves peuvent interpréter ce qui se passe si l'observateur s'éloigne indéfiniment du tableau. Dans ce cas, e tend vers l'infini, le facteur multiplicatif $\frac{\ell+e}{e}$ tend vers 1 et on peut en déduire que le rapport des longueurs est conservé. Une propriété bien connue des projections parallèles est ainsi retrouvée comme cas particulier de la propriété correspondante des projections centrales, dans le cas où le centre de projection est « à l'infini ».

De plus, dans les calculs qui précèdent, le choix du point C sur le segment $[AB]$ détermine la valeur du rapport r, mais n'influence en rien la suite du raisonnement. Si on considère un autre point D sur $[AB]$, la valeur du rapport $s = \frac{|AD|}{|DB|}$ dans lequel le point D divise le segment $[AB]$ sera elle aussi multipliée par le même facteur $\frac{\ell+e}{e}$. Donc, si on considère le quotient de deux rapports de ce type $\frac{r}{s}$, sa valeur sera conservée pour les points correspondants de la représentation, puisque le facteur $\frac{\ell+e}{e}$ peut être simplifié dans le quotient :

$$\frac{\frac{|AC|}{|CB|}}{\frac{|AD|}{|DB|}} = \frac{r}{s} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{|AC'|}{|C'B'|}}{\frac{|AD'|}{|D'B'|}} = \frac{r \cdot \frac{\ell+e}{e}}{s \cdot \frac{\ell+e}{e}} = \frac{r}{s}.$$

Ce quotient de rapports de longueurs est appelé *birapport*[1] et il s'introduit naturellement, grâce à ce qui précède, comme un invariant de la projection centrale.

On appelle birapport de quatre points d'une même droite le quotient des rapports suivant lesquels les deux derniers divisent le segment des deux premiers. On le note :

$$(ABCD) = \frac{\frac{|AC|}{|CB|}}{\frac{|AD|}{|DB|}}.$$

Des démonstrations classiques de la conservation du birapport par les projections centrales existent dans le cas général. Il s'agit de démontrer que

6. *Si les points A', B', C', D' sont les images des points alignés A, B, C, D par une projection centrale, les birapports $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$ sont égaux.*

Le principe de la démonstration est de déterminer deux segments dont le rapport soit égal à $(ABCD)$. Notons O le centre de projection. Par B,

[1] Dans cette première approche du birapport, nous n'envisageons que des birapports positifs

menons une droite parallèle à OA, cette droite coupe OC en P et OD en Q. Montrons que

$$(ABCD) = \frac{|BQ|}{|BP|}.$$

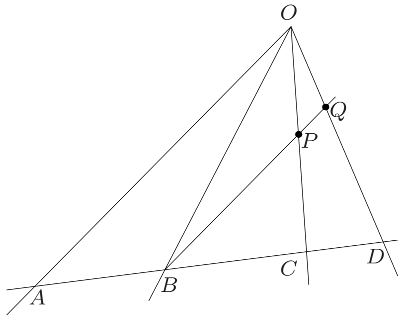


Fig. 28

La similitude des triangles CAO et CBP nous donne

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AO|}{|BP|},$$

et celle des triangles DAO et DBQ nous donne

$$\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|AO|}{|BQ|}.$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\frac{\frac{|CA|}{|CB|}}{\frac{|DA|}{|DB|}} = \frac{|BQ|}{|BP|},$$

et donc $(ABCD) = \dfrac{|BQ|}{|BP|}$.

Pour montrer l'égalité des deux birapports, déterminons pour chacun d'eux deux segments dont les rapports valent respectivement

$$(ABCD) \text{ et } (A'B'C'D').$$

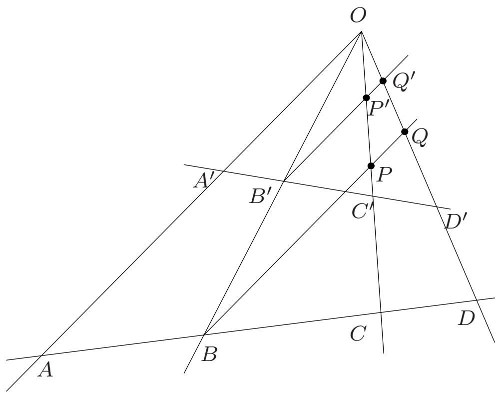


Fig. 29

Nous obtenons

$$(ABCD) = \frac{|BQ|}{|BP|} \quad \text{et} \quad (A'B'C'D') = \frac{|B'Q'|}{|B'P'|}.$$

Comme les sécantes OB, OC et OD déterminent sur les droites parallèles BQ et $B'Q'$ des segments proportionnels, nous avons :

$$\frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{|B'Q'|}{|B'P'|},$$

ce qui implique l'égalité des birapports $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$.

2 Théorème de Desargues

De quoi s'agit-il ?

À partir de l'ombre à la lampe d'un prisme tronqué à base triangulaire, illustrer et démontrer le théorème de Desargues.

Enjeux

Matières couvertes. – Le théorème de Desargues dans l'espace et le plan. La démonstration fournira l'occasion de *traiter un problème concernant l'incidence et l'alignement* en se fondant sur les propriétés de la projection centrale.

Compétences. – Dégager une nouvelle propriété géométrique et la *démontrer en exploitant des modes de raisonnement déjà exercés.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Un prisme droit en plexiglas d'environ 15 cm de hauteur, dont la base est un triangle, ou un prisme tronqué en tiges.

Des feuilles de papier blanc de format A3.

Des marqueurs sur transparents.

Prérequis. – Les propriérés d'incidence des droites et plans de l'espace (activité 2 à la page 274).

Les propriétés de la projection centrale (activité 1 à la page 344). Les prolongements de cette dernière activité sont indispensables pour aborder les cas particuliers.

2.1 Ombre à la lampe d'un prisme

Comment s'y prendre ?

Dans l'activité 2 à la page 274, l'observation de l'ombre au soleil du prisme tronqué nous a permis de conjecturer et ensuite de démontrer le théorème de Desargues dans le cas où les sommets des deux triangles sont deux à deux sur des droites parallèles. Rappelons cet énoncé.

7. *Si deux triangles sont tels que leurs sommets sont deux à deux sur des droites parallèles et que leurs côtés correspondants se coupent, alors les points d'intersection sont des points alignés.*

Quelle est l'ombre à la lampe du prisme tronqué ?

Les élèves tendent sur une table la feuille de papier blanc de format A3 et y déposent le prisme pour en observer l'ombre. Ils utilisent soit un prisme tronqué en tiges, soit un prisme en plexiglas sur lequel un triangle GHJ a été tracé au marqueur sur les faces, comme le montre la figure 30.

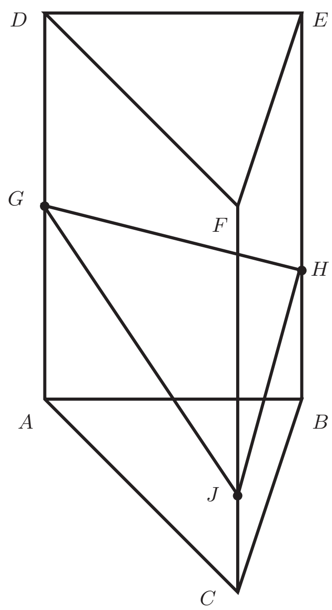


Fig. 30: Prisme tronqué

La lampe est fixée de telle manière que la feuille puisse contenir entièrement l'ombre du prisme tronqué $ABCGHJ$. Après avoir tracé la base ABC du prisme, les élèves marquent également la position des ombres des points G, H, J et les notent respectivement G', H' et J'. Les arêtes parallèles AG, BH et CJ ont pour ombres les segments non parallèles AG', BH' et CJ'. Le théorème 5 à la page 353, qui est exactement illustré par l'ombre du prisme, permet aux élèves de justifier rapidement que ces segments appartiennent à des droites concourantes dont le point de rencontre, noté L', est la projection orthogonale du point lumineux sur le plan de la feuille (ou, plus généralement, sa projection parallèlement à la direction AG si le prisme est oblique). Les sommets des triangles ABC et $G'H'J'$ sont donc deux à deux sur des droites concourantes.

Le théorème 7 reste-t-il vrai si les sommets des triangles sont deux à deux sur des droites concourantes ?

Les côtés des triangles ABC et $G'H'J'$ sont prolongés, les droites AB et $G'H'$, BC et $H'G'$, AC et $G'J'$ se coupent respectivement en trois points M, N et P qui semblent alignés. Les différents groupes d'élèves constateront que, aux erreurs expérimentales près, cet alignement se reproduit sur chacun des dessins et qu'il n'est donc pas le fruit du hasard (figure 31).

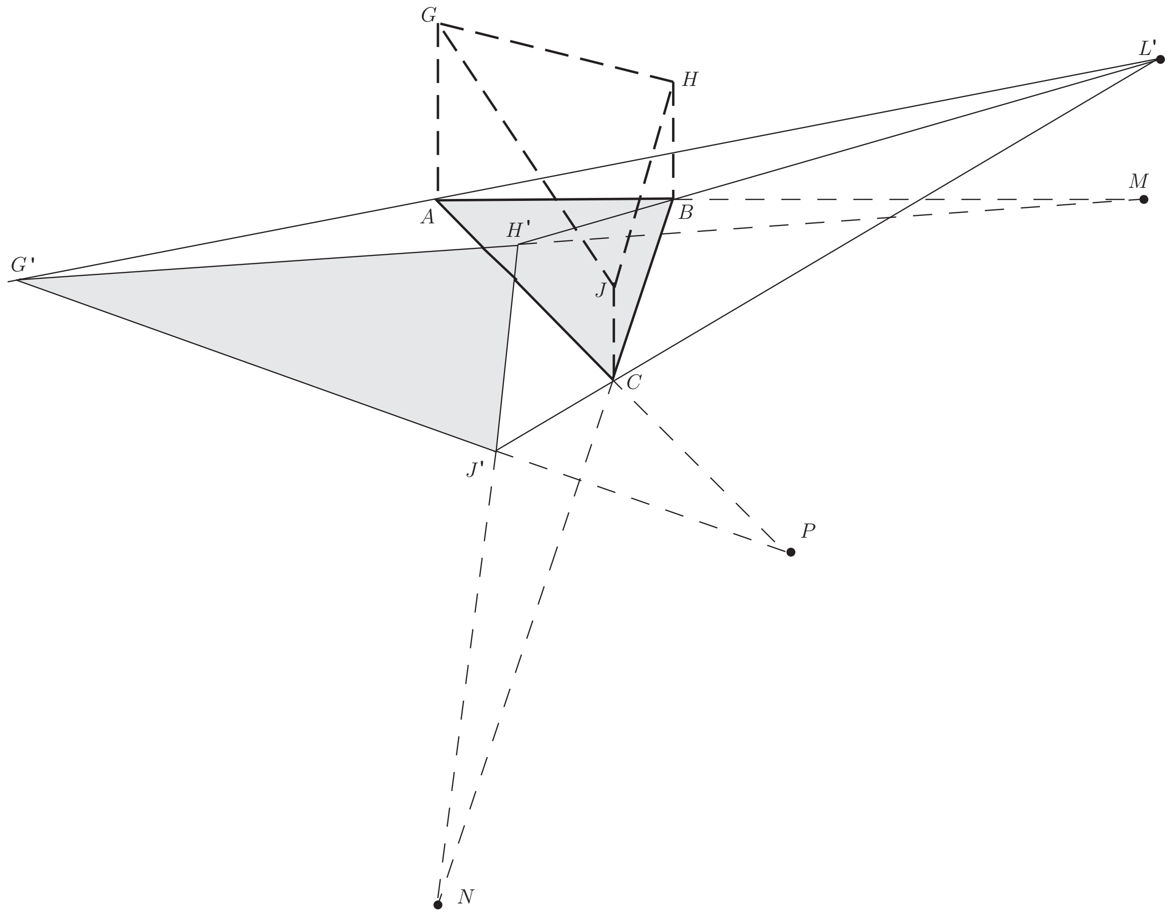


Fig. 31

Les élèves sont invités à formuler une conjecture à propos de la propriété d'alignement observée dans le plan de projection et à la démontrer.

La conjecture peut s'énoncer de la manière suivante :

8. *Si deux triangles sont tels que leurs sommets sont deux à deux sur des droites concourantes, et que leurs côtés correspondants se coupent, alors les points d'intersection sont des points alignés.*

La démarche proposée peut être adaptée à des élèves qui n'auraient pas rencontré le théorème de Desargues lors de l'activité 2 à la page 274. Dans ce cas, ils retrouveront comme cas particulier, en éloignant indéfiniment la lampe, la configuration dans laquelle les sommets sont deux à deux sur des droites parallèles . En effet, nous avons observé que la projection parallèle peut être considérée comme une projection centrale dont le centre se trouve à l'infini.

2.2 Démonstration du théorème

L'idée est d'utiliser les propriétés d'incidence des droites de l'espace et les propriétés de la projection centrale pour établir le théorème de Desargues dans le plan. Les triangles ABC et $G'H'J'$ sont respectivement les images des triangles ABC et GHJ par une projection centrale dont le centre est le point lumineux et le plan de projection est le plan ABC (figure 32). Ces deux triangles ABC et GHJ appartiennent à des plans sécants dont la droite d'intersection peut être déterminée par les élèves.

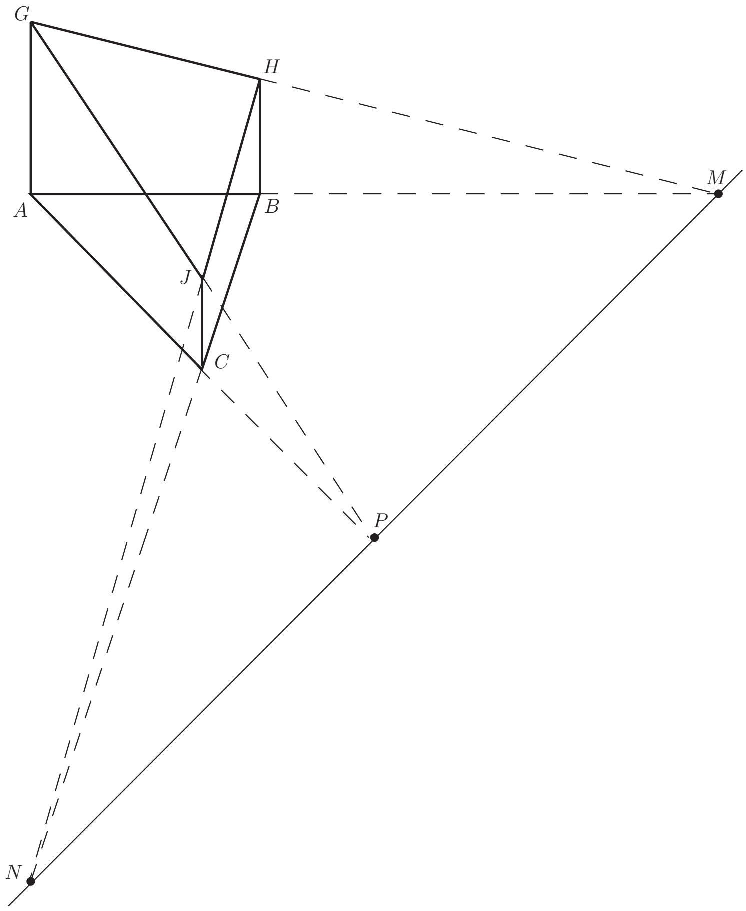


Fig. 32

Les deux droites coplanaires AB et GH se coupent en un point noté M qui appartient aux deux plans ABC et GHJ et donc à leur droite d'intersection. Par un raisonnement similaire, le point N, point d'intersection des droites BC et HJ, et le point P d'intersection des droites AC et GJ, sont également des points de la droite d'intersection des deux plans. Ces trois points M, N et P sont donc alignés.

Les élèves reviennent alors à la figure dans le plan ABC par la projection du prisme tronqué $ABCGHJ$ (figure 33).

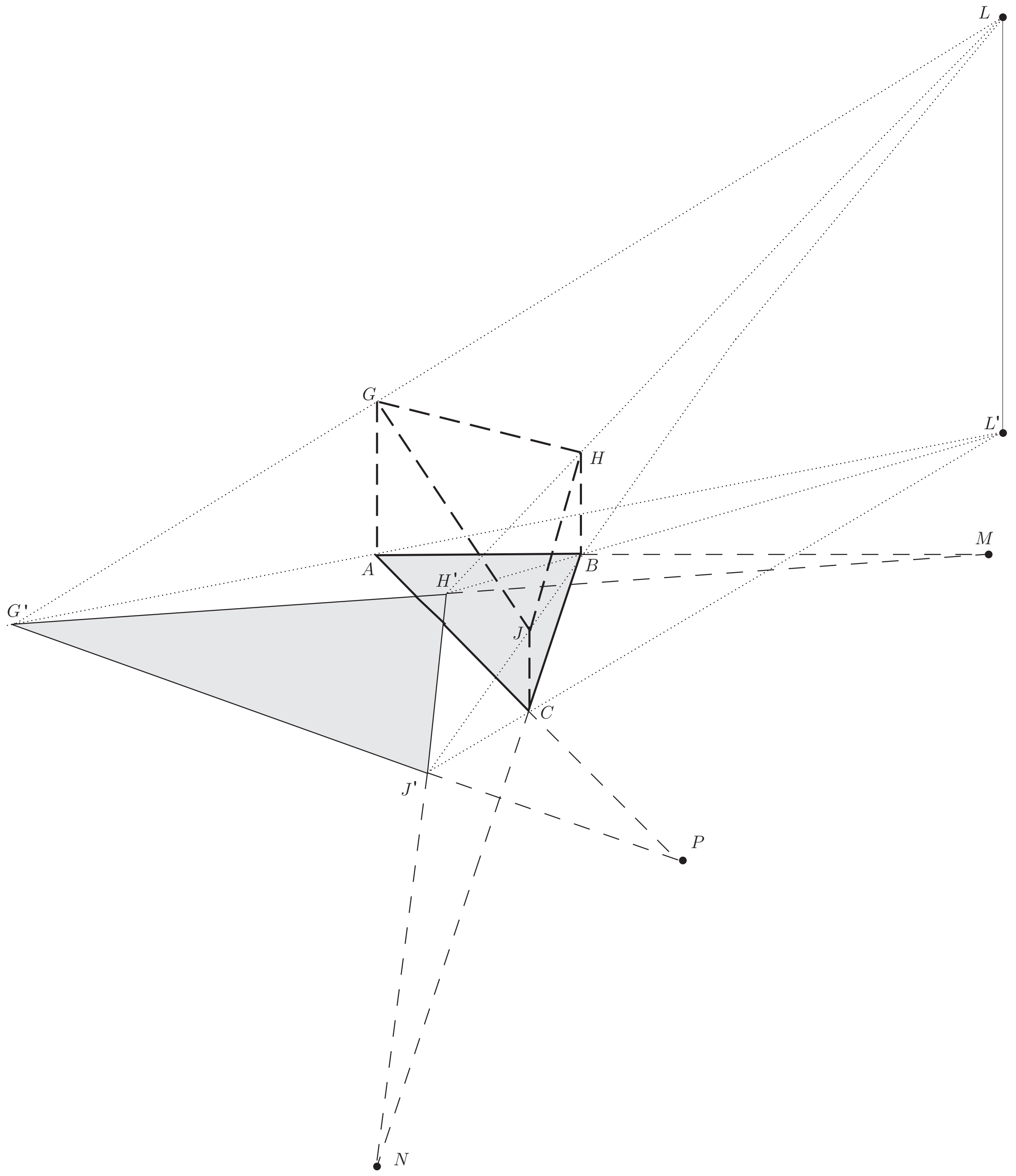


Fig. 33

Comme le plan ABC est le plan de projection de la projection centrale considérée, celle-ci envoie chacun des trois points M, N et P sur lui-même. Le point M, point d'intersection des droites AB et GH, est donc aussi le point d'intersection des droites AB et $G'H'$ dans le plan ABC. Le théorème de Desargues est ainsi établi, puisque ce raisonnement peut être répété pour les points N et P.

Il reste à montrer que toute configuration de Desargues dans le plan peut être obtenue comme l'image par une projection centrale d'un prisme tronqué. Le problème posé aux élèves est de reconstituer le prisme tronqué à partir des triangles ABC et $G'H'J'$ dont les sommets sont deux à deux sur des droites concourantes.

Indications : le point L est placé arbitrairement, par exemple sur une verticale tracée en L'. La direction LL' permet de construire les arêtes du prisme qui lui sont parallèles. Dans le plan $G'AL$, la droite $G'L$ coupe l'arête issue de A en G. En procédant de la même manière, les points H et J sont retrouvés et le prisme $ABCG'H'J'$ est reconstitué.

Quelques figures, réalisées avec le logiciel Cabri-Géomètre et présentées ci-dessous, nous le montrent dans différents cas, même lorsque certains sommets du triangle $G'H'J'$ ne sont pas situés du même côté de L' que les points ABC. Bien entendu, la projection centrale qui apparaît dans ces figures ne peut plus être interprétée comme une ombre.

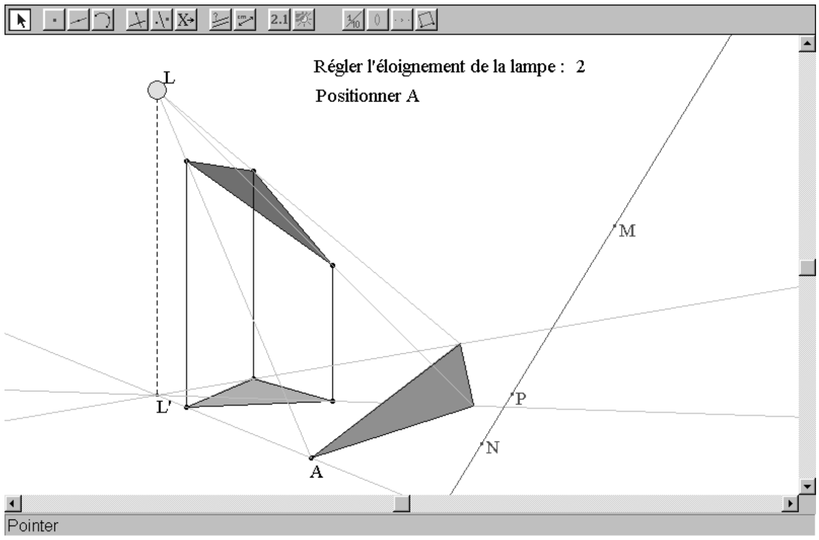


Fig. 34

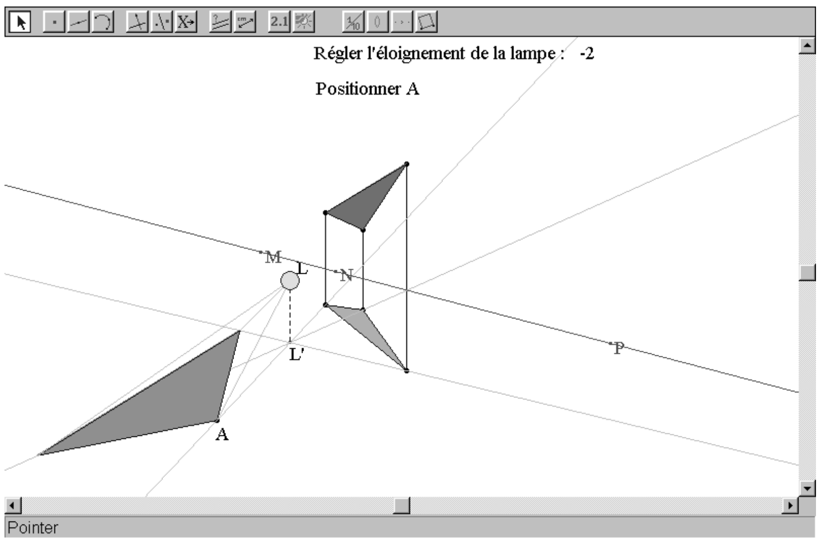


Fig. 35

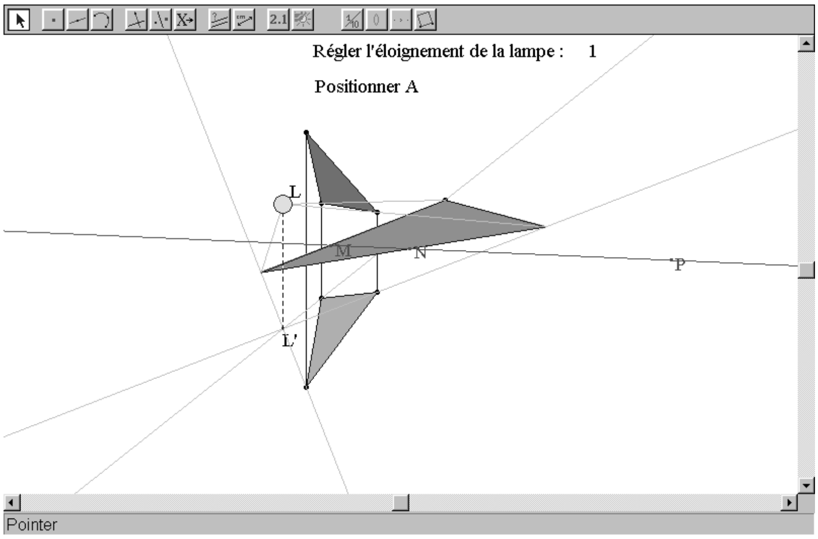


Fig. 36

2.3 Version spatiale

Dans le cas où les droites concourantes qui contiennent les sommets des triangles ne sont pas coplanaires, la démonstration du théorème de Desargues ne présente aucune difficulté. En effet, les droites AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$, coplanaires deux à deux, se coupent respectivement en M, N et P, ces trois points appartiennent aux deux plans ABC et $A'B'C'$ et donc à leur droite d'intersection. Ce qui prouve que M, N et P sont alignés.

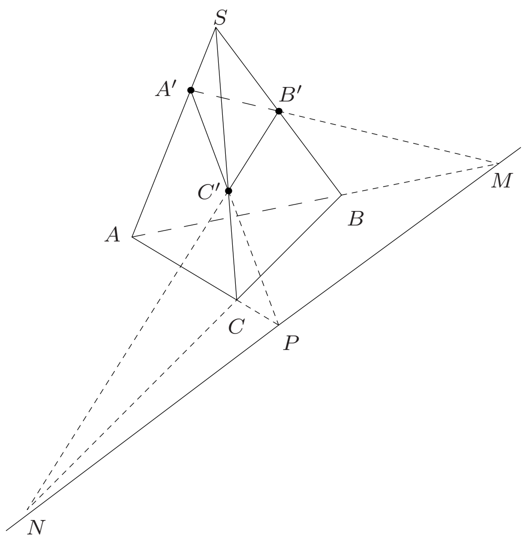


Fig. 37

Cas particuliers

Il peut arriver que l'un des couples de droites AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$ soit formé de droites parallèles :

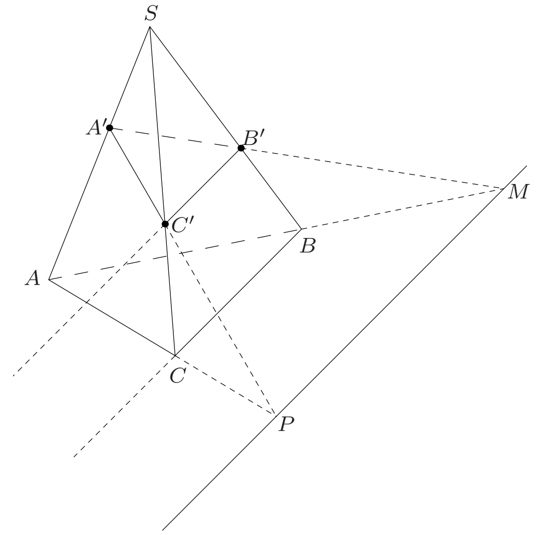


Fig. 38

Dans ce cas, le point N est le point à l'infini sur la droite MP.

Est-il possible que deux des trois couples de droites AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$ soient formés de droites parallèles ? Dans ce cas, le troisième couple est, lui aussi, formé de droites parallèles. Les élèves peuvent découvrir et justifier cette propriété (au moyen du critère de parallélisme de deux plans). C'est la droite de l'infini qui joue alors le rôle de la droite MNP.

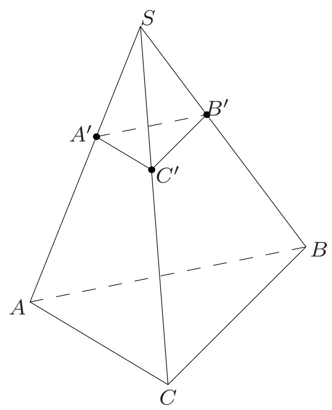


Fig. 39

Ces deux dernières figures peuvent être interprétées comme des tétraèdres tronqués dans l'espace, mais également comme des figures planes.

Remarques

1. Le théorème de Desargues dans le plan peut être obtenu de différentes manières :

- par projection centrale d'un prisme tronqué (c'est ce qui a été développé dans cette activité),
- par projection parallèle d'un tétraèdre tronqué,
- par projection centrale d'un tétraèdre tronqué.

Chacune de ces démonstrations fait appel au même type de raisonnement. Des dessins illustrant ces deux dernières méthodes ont été réalisés avec Cabri-Géomètre et sont présentés ci-dessous.

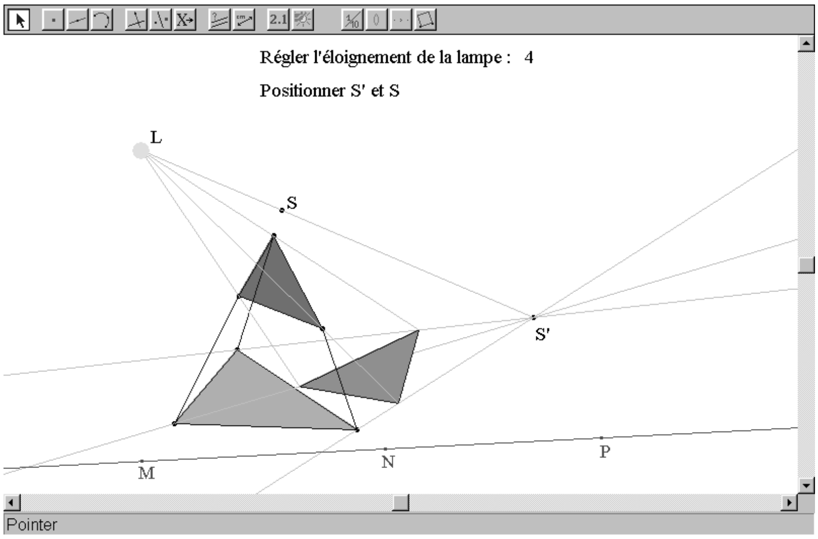


Fig. 40

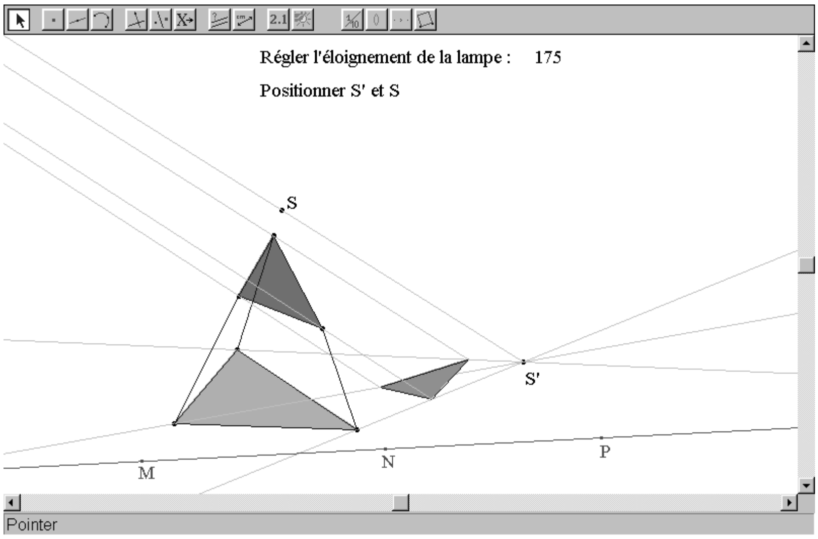


Fig. 41

2. Toute section plane triangulaire dans un tétraèdre fait apparaître une configuration de Desargues.

Annexe

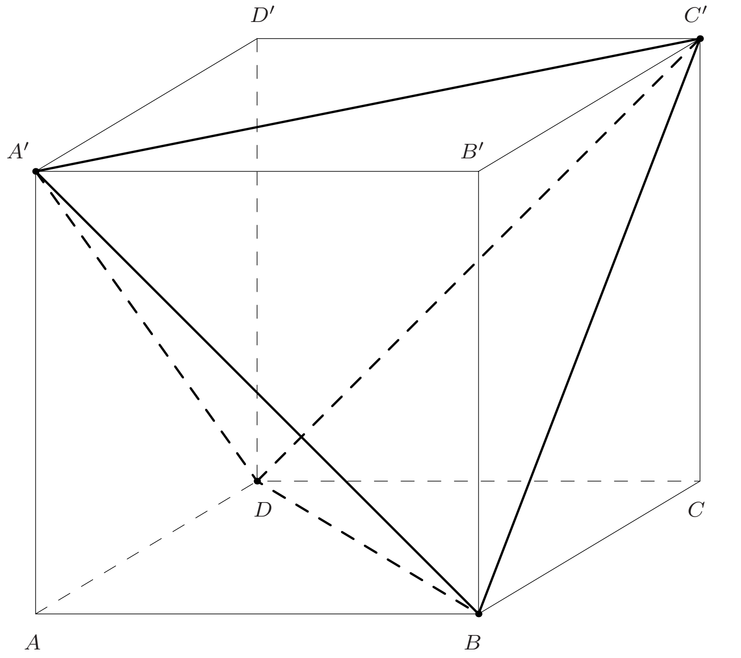
Documents à photocopier

Coucher de soleil à La Panne (Belgique) 28 décembre 1998

Grand Central Station (New York), inondée par la lumière

Modèle à photocopier sur transparent

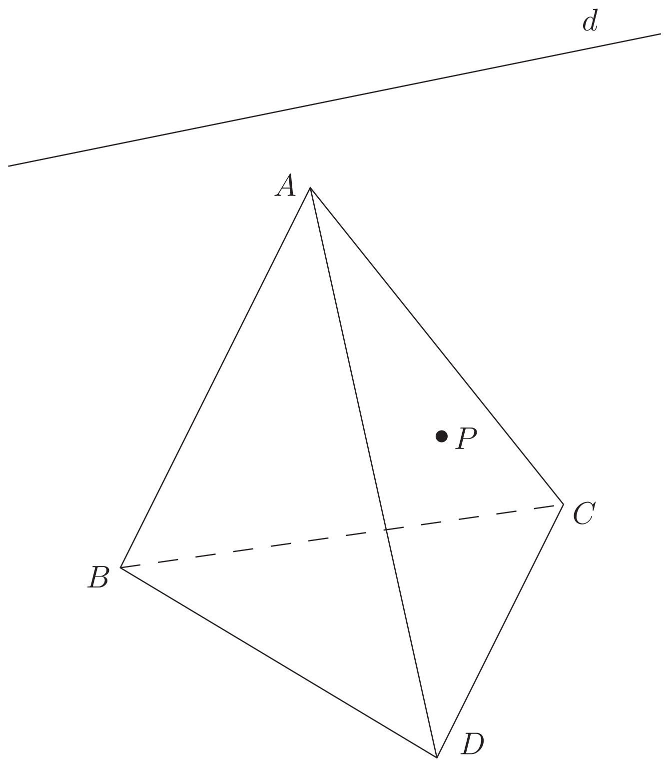
Le tétraèdre $DA'C'B$ est inscrit dans un cube en perspective cavalière. Démontrer qu'il est régulier.



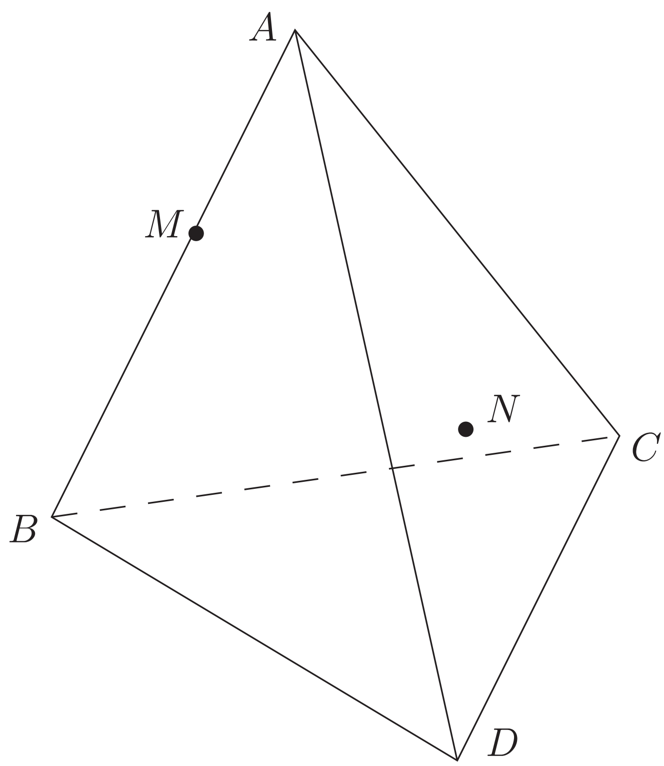
Ce qui nous servira de bâton

Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π, dans les cas suivants :

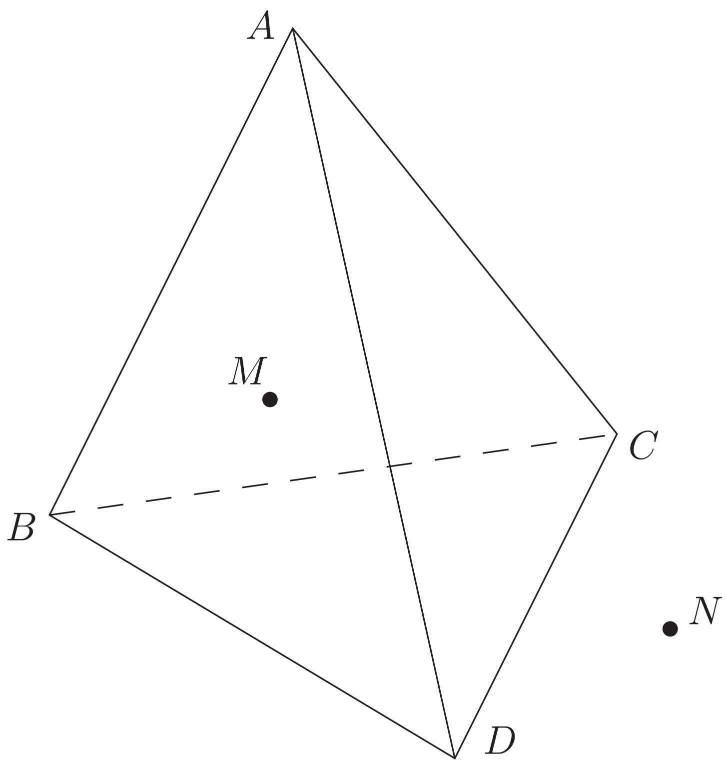
1. Π est le plan déterminé par d et P où $d \subset ABC$ et $P \in ACD$.
2. Π est le plan déterminé par d et P où $d \subset ABD$ et $P \in ACD$.



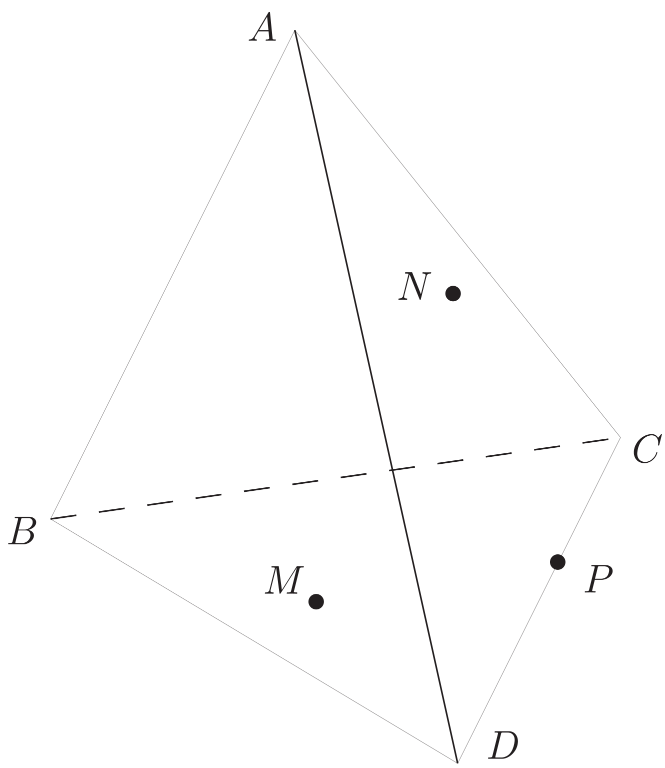
Construire le point de percée de la droite MN dans le plan de la face BCD. Le point M est sur l'arête $[AB]$ et N est dans le plan ACD.



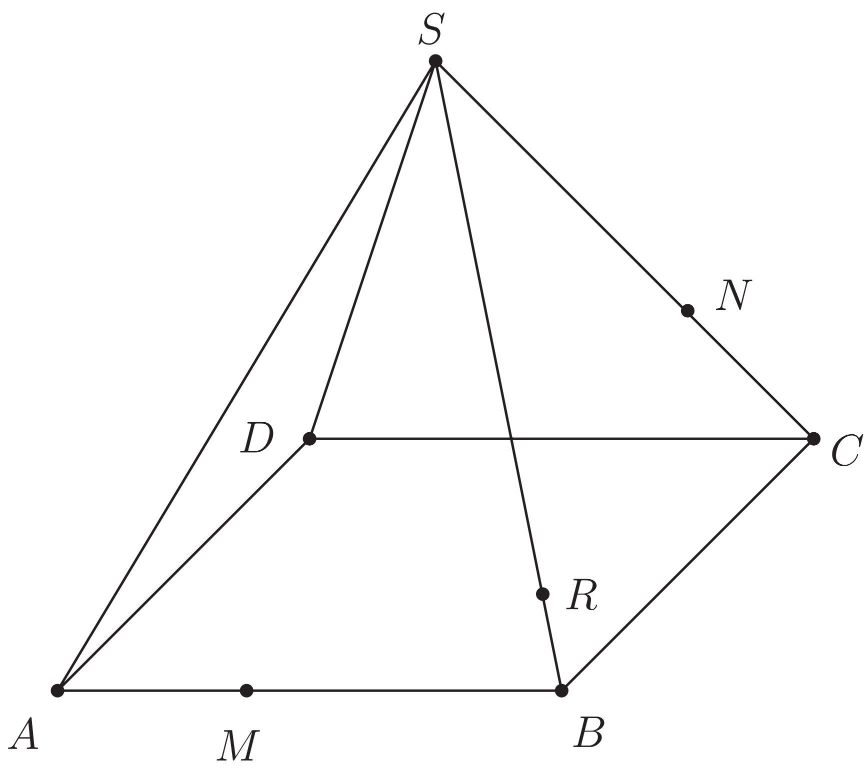
Construire le point de percée de la droite MN dans le plan de la face ACD. Le point M est dans le plan ABD et N est dans le plan BCD.



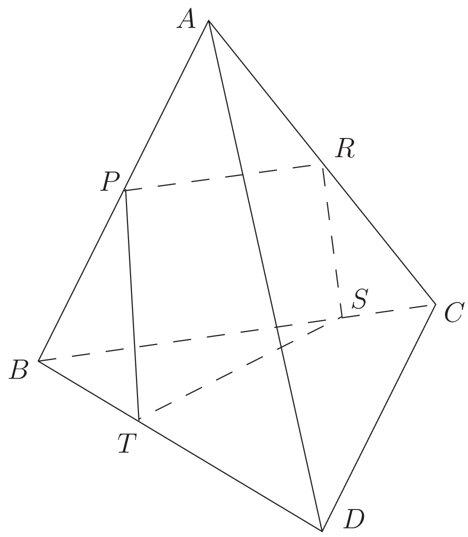
Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan Π déterminé par les trois points M, N et P. M appartient au plan de la face BCD, N, au plan de la face ACD et P à l'arête $[CD]$.



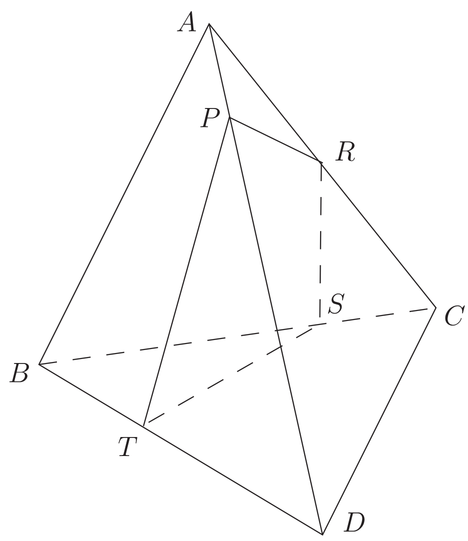
Construire la section de la pyramide à base carrée $SABCD$ par le plan MRN.



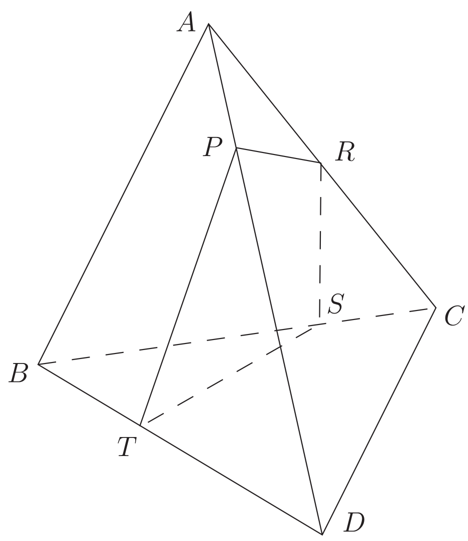
Dans chacun des cas suivants, $PRST$ est-il une section du tétraèdre $ABCD$ par un plan ?



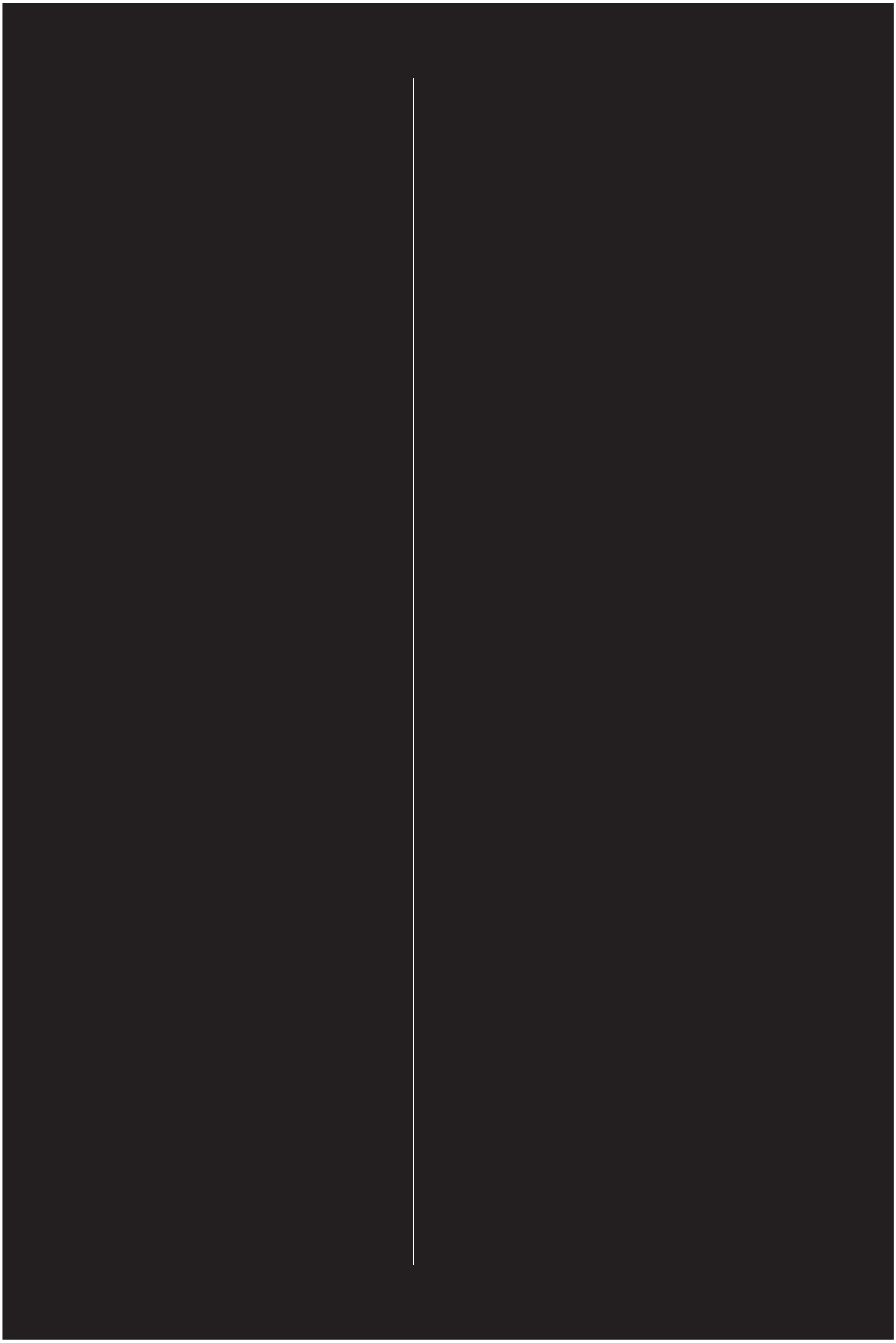
Premier cas

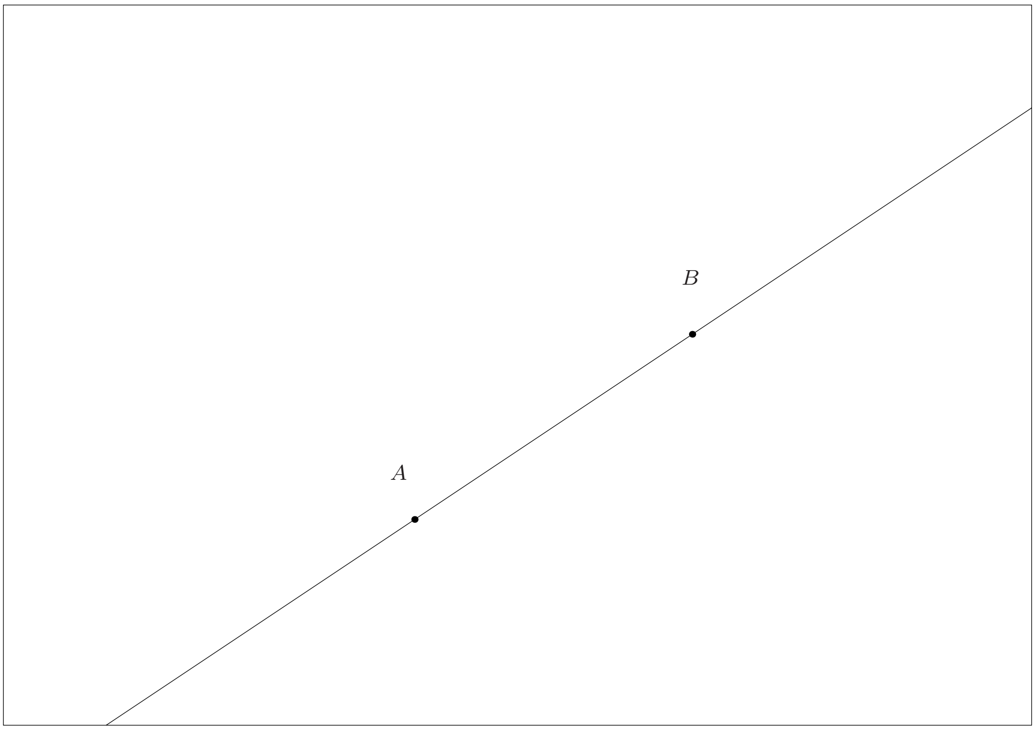


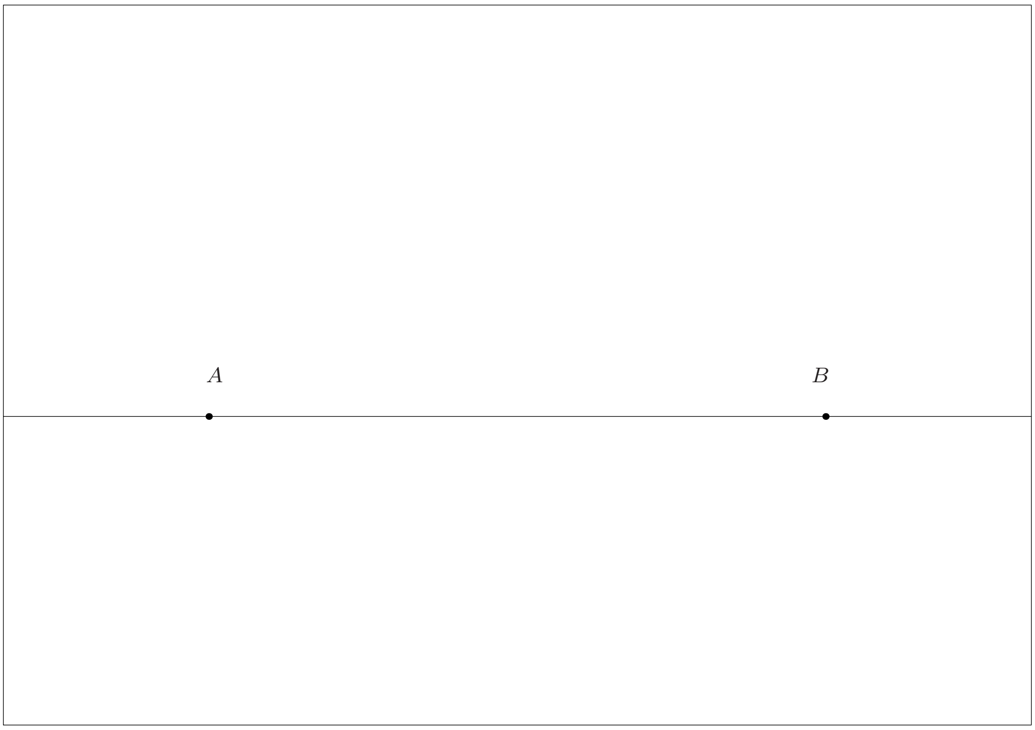
Deuxième cas



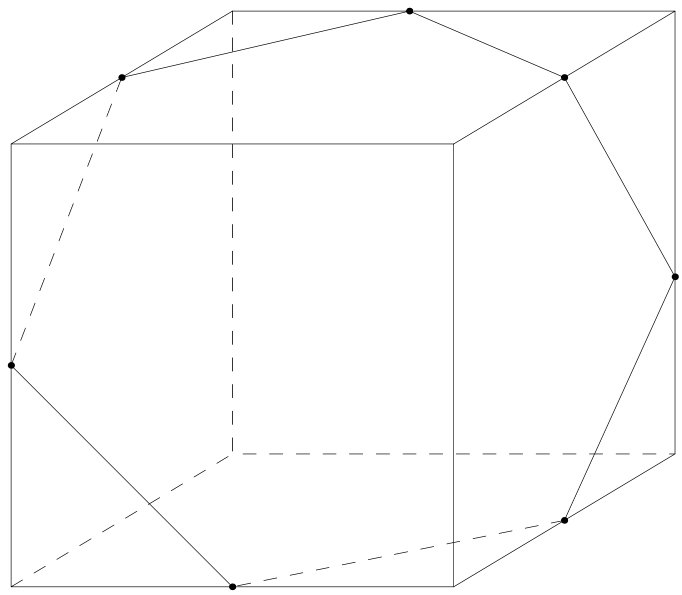
Troisième cas



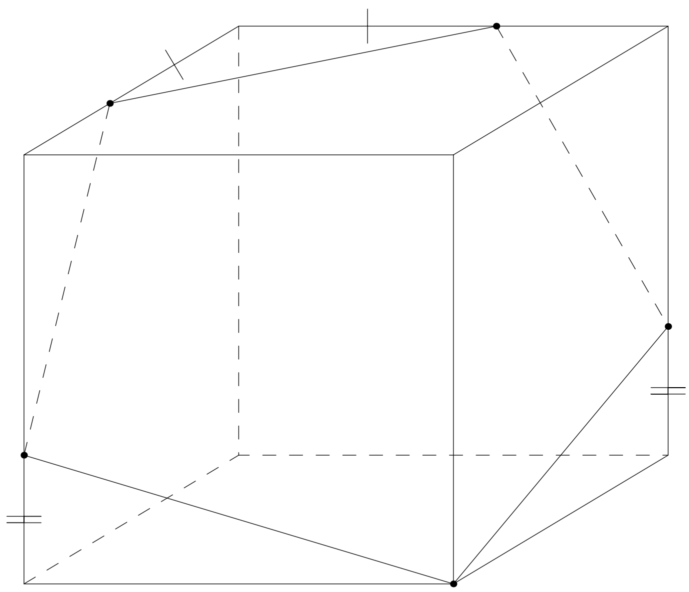

B
A


A
B

Est-il possible que la section plane d'un cube soit un heptagone ou un pentagone régulier comme le suggèrent ces deux figures ?

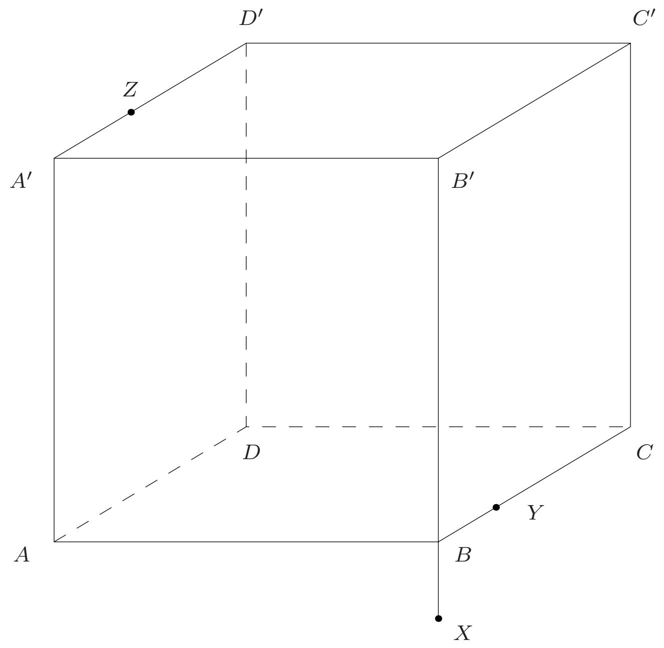


Heptagone

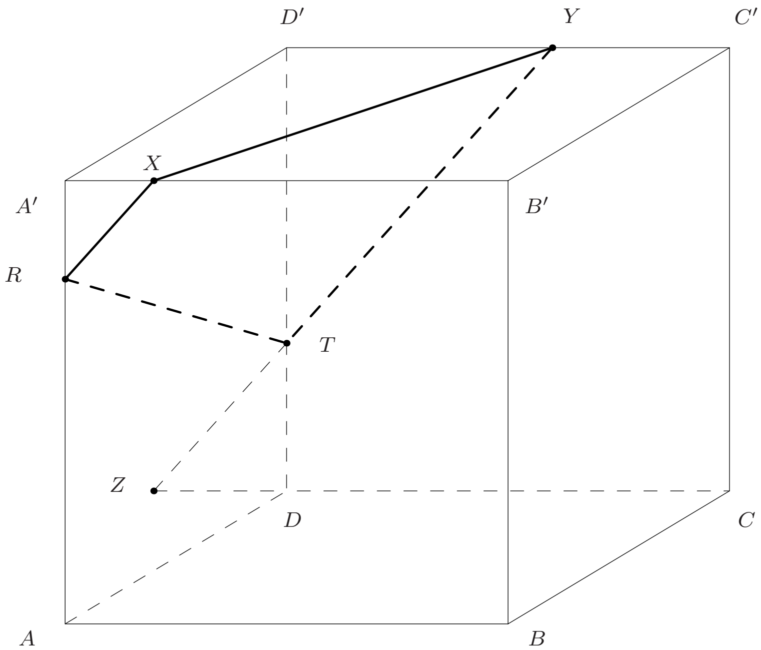


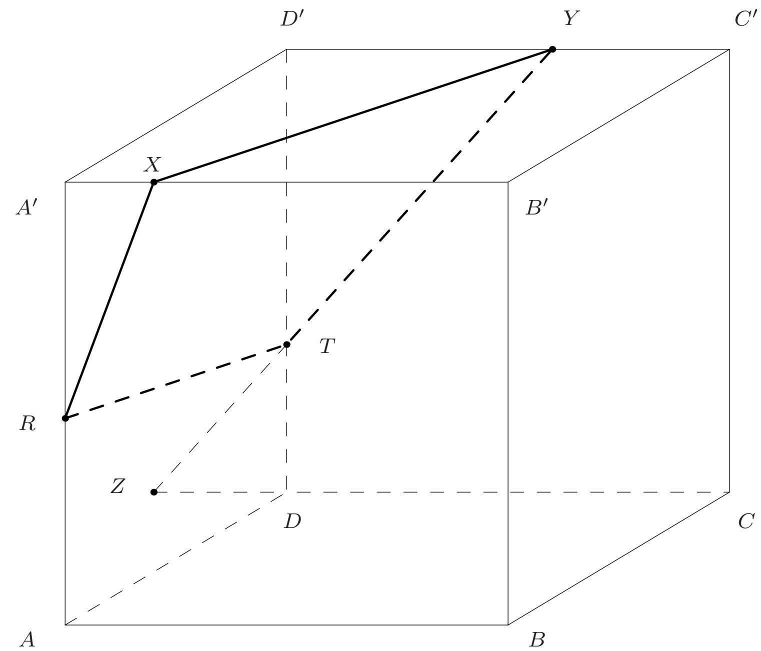
Pentagone régulier?

Construire la section du cube par le plan XYZ où $X \in BB'$, $Y \in BC$ et $Z \in A'D'$.

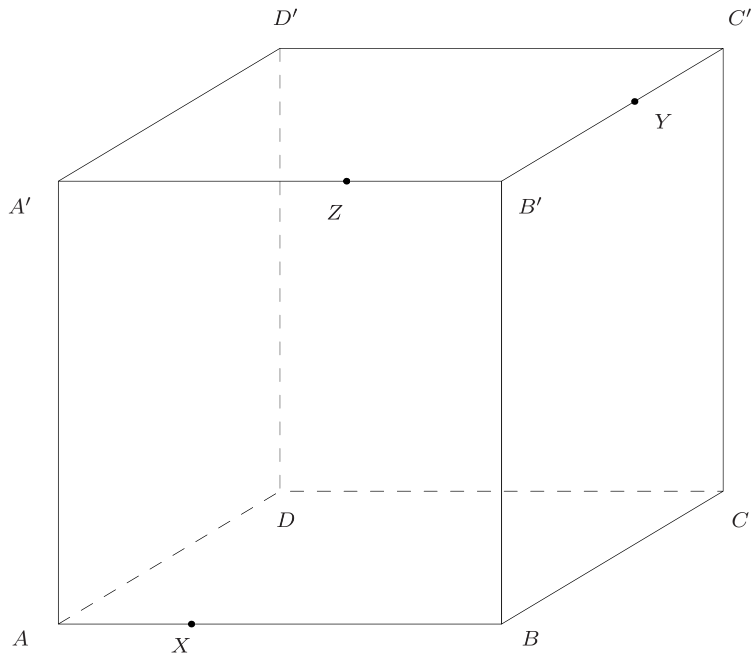


Dans une seulement de ces deux figures, le quadrilatère $XYTR$ est la section du cube par le plan XYZ, où $X \in A'B'$, $Y \in C'D'$ et $Z \in CD$. Laquelle et pourquoi ?

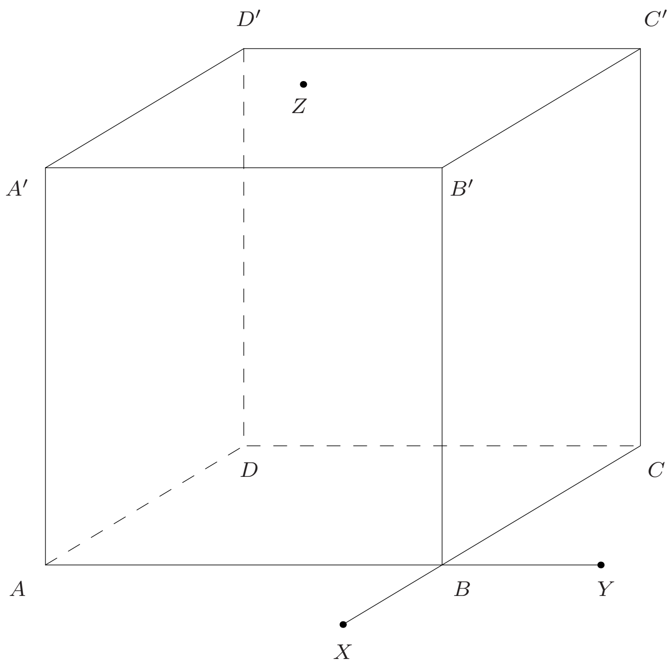




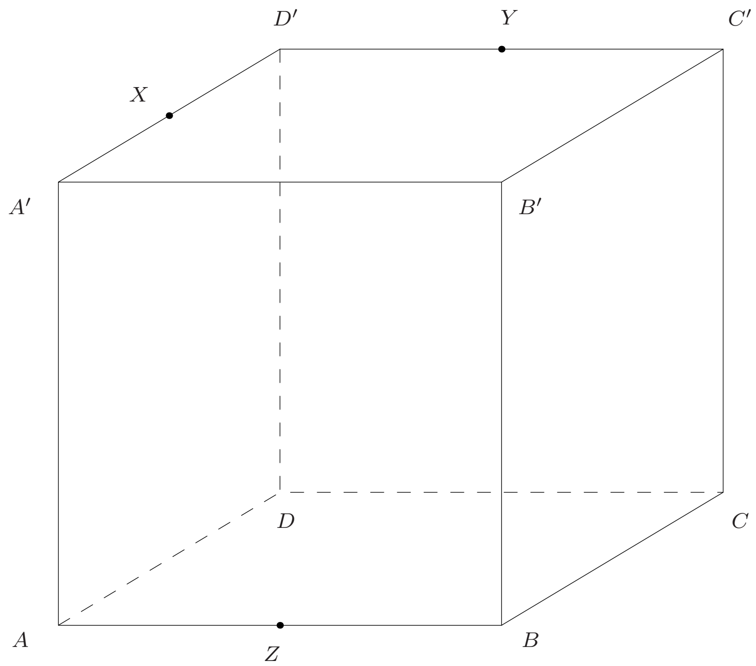
Construire la section du cube par le plan XYZ où $X \in AB$, $Y \in B'C'$ et $Z \in A'B'$.



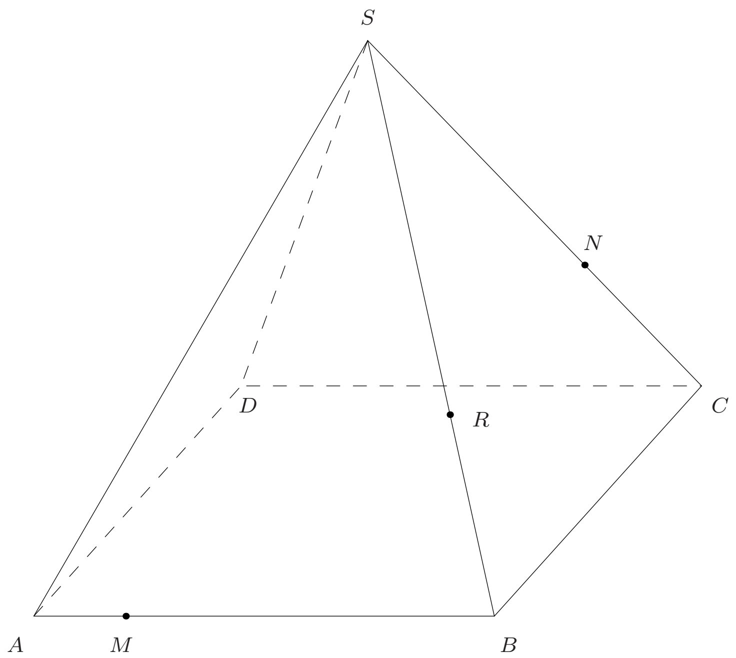
Construire la section du cube par le plan XYZ où $X \in BC$, $Y \in AB$ et $Z \in A'B'C'D'$.

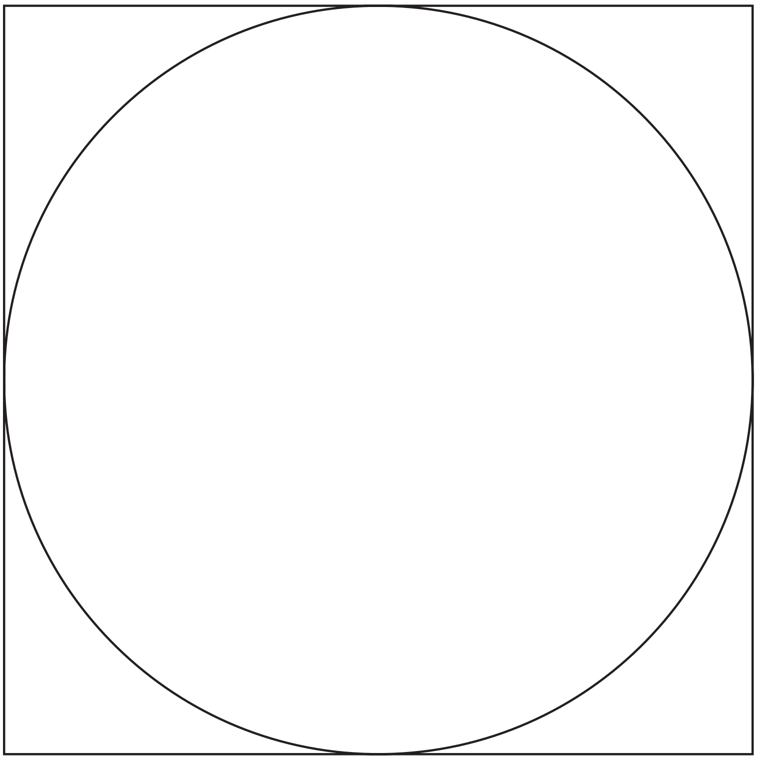


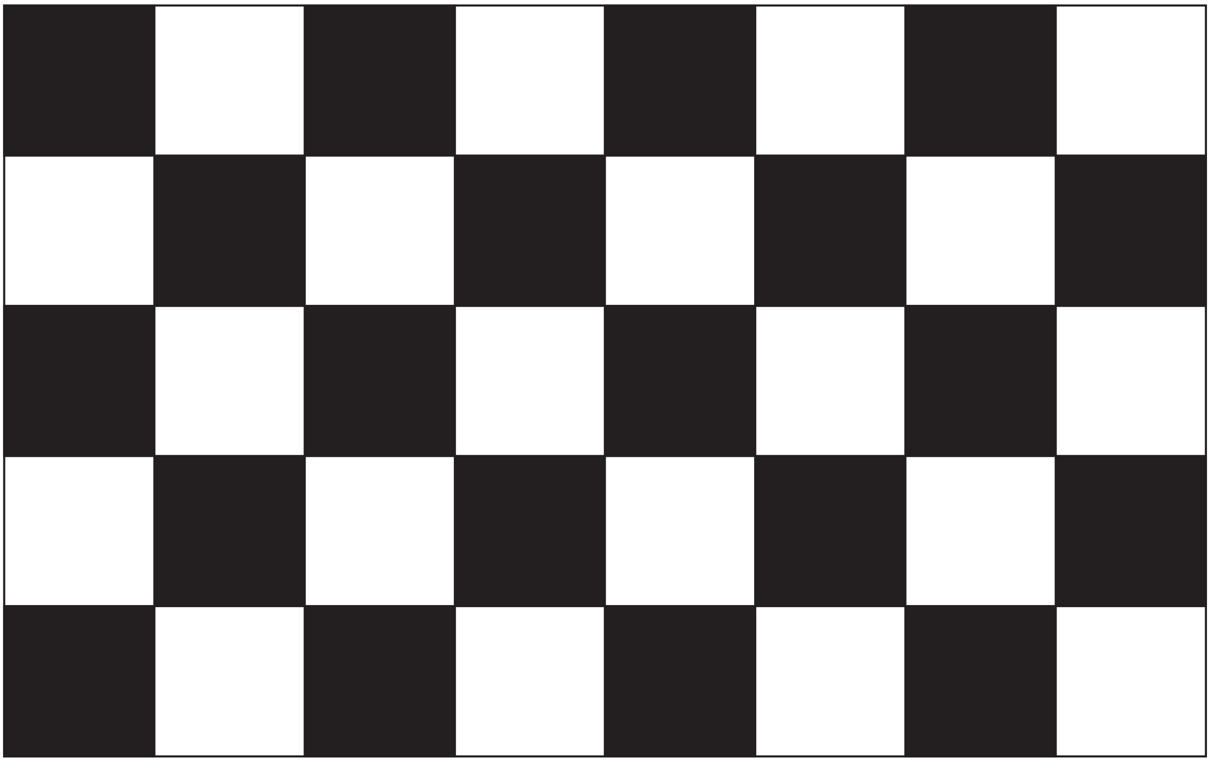
Construire la section du cube par le plan XYZ où X, Y et Z sont respectivement les milieux des arêtes $[A'D']$, $[D'C']$ et $[AB]$. Démontrer ensuite que la section obtenue est un hexagone régulier.



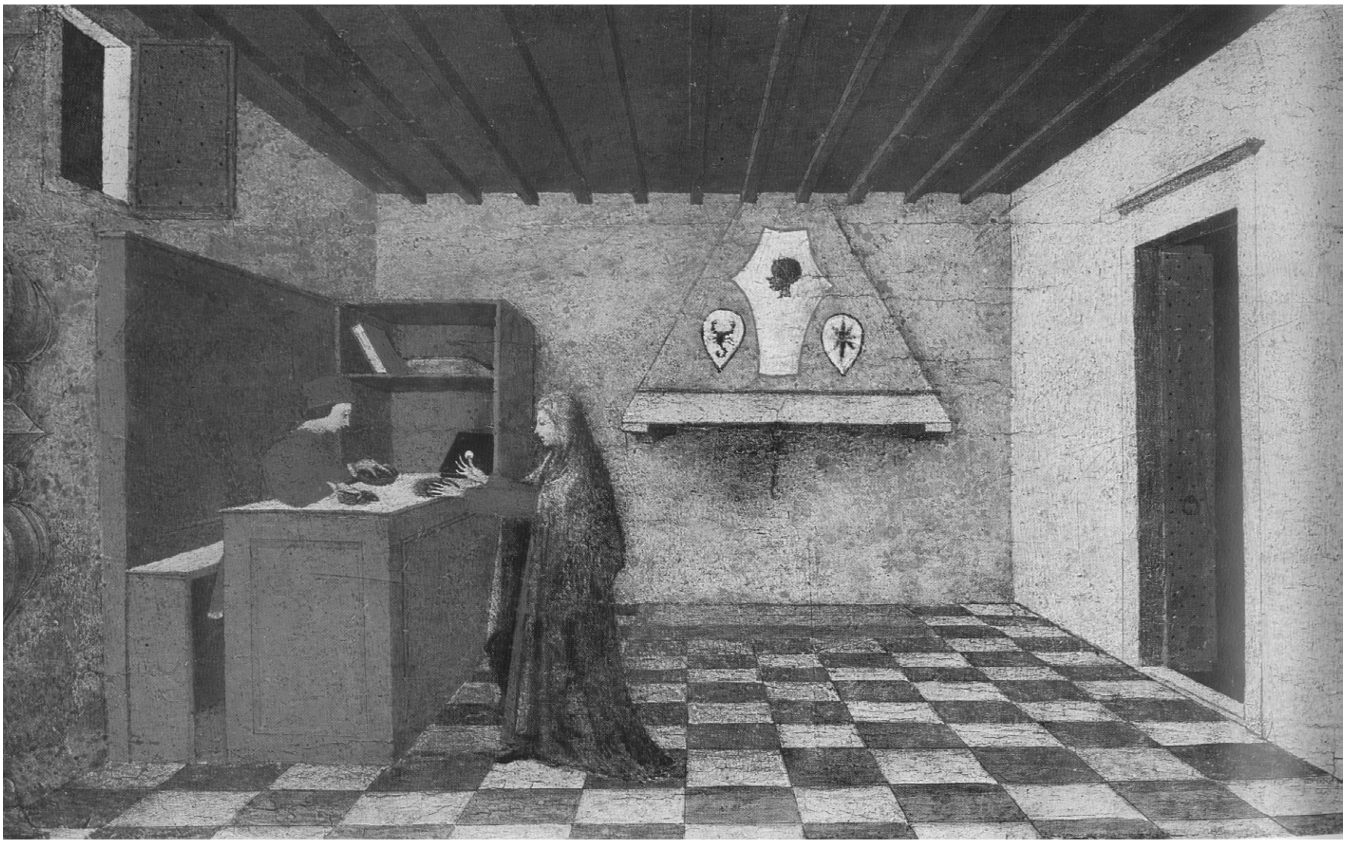
6. Construire la section de la pyramide à base carrée par le plan MNR dans le cas où RN est parallèle à BC.



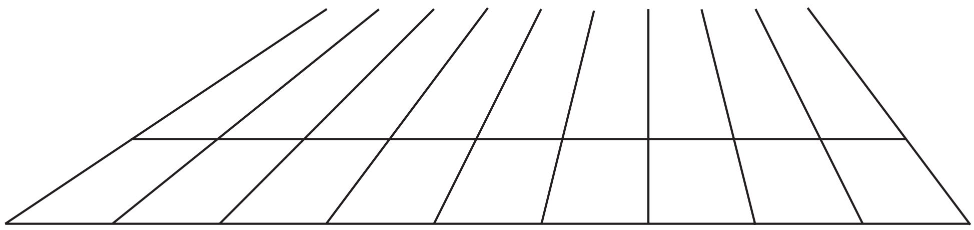





BRASSERIE

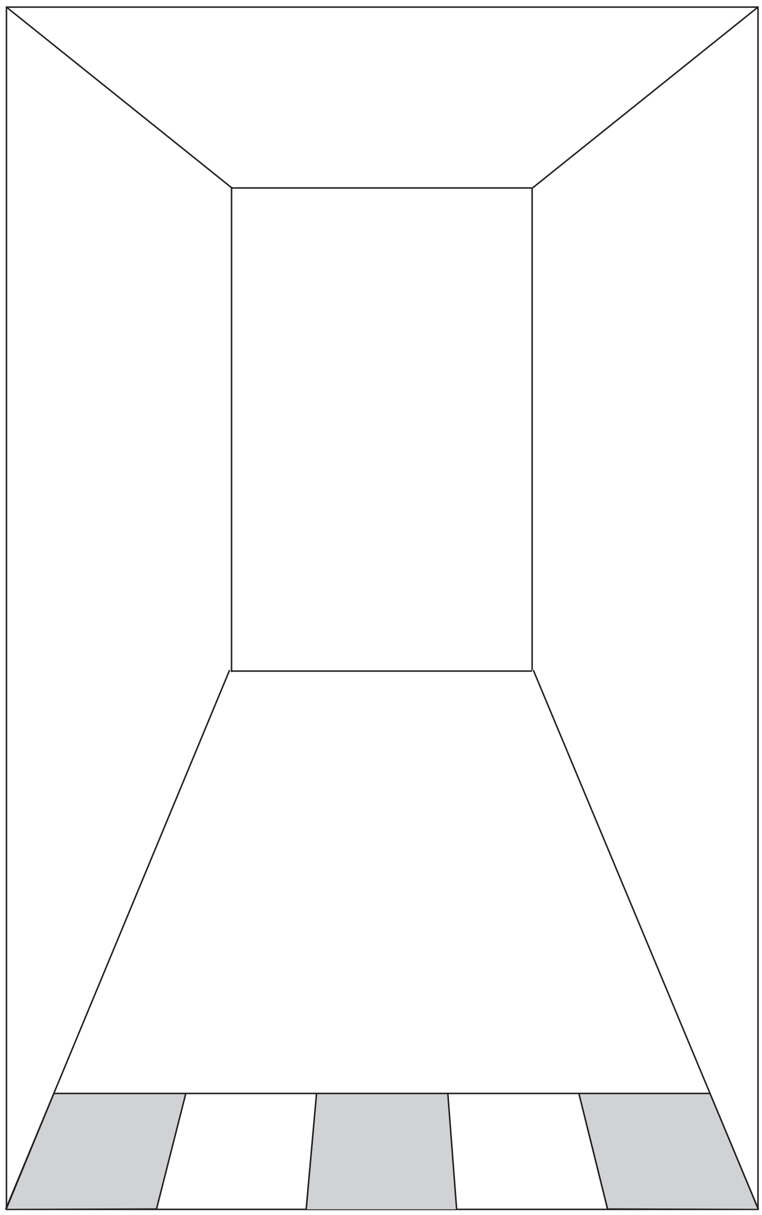


Voici la première rangée d'un carrelage.



Comment dessiner les rangées suivantes au moyen d'une construction géométrique simple ?

Compléter la représentation du couloir en terminant le dessin du carrelage, en plaçant deux portes de même largeur sur le mur de droite et une fenêtre de largeur double sur le mur de gauche.



Glossaire

Perspective à point de fuite. La *perspective à point de fuite* est aussi appelée *perspective linéaire, centrale* ou *conique*. Pour obtenir une perspective à point de fuite d'un objet, on situe celui-ci d'un côté d'un plan, on joint chacun de ses points à un point situé de l'autre côté du plan et appelé *centre de projection*. La projection du point est l'intersection, avec le plan, de la droite qui le relie au centre de projection.

Une manière commode de réaliser une projection centrale consiste à remplacer le plan par une vitre, à fermer un œil, à placer l'autre au centre de projection, et à dessiner l'objet tel qu'on le voit alors sur la vitre. Un tel dispositif est appelé *vitre de Dürer,* du nom du grand peintre allemand qui l'a popularisé.

Lorsqu'on représente, dans ce type de perspective, deux droites parallèles qui s'éloignent de l'observateur et de la vitre, leur représentation semble converger vers un point (appelé précisément *point de fuite*.) Il suffit pour imaginer cela de se souvenir de la vue que l'on a des deux bords d'une route rectiligne regardée dans son axe.

Perspective axonométrique. Une *perspective axonométrique* est une perspective orthogonale particulière. Précisons cette notion en considérant que l'objet projeté est un cube. La plupart du temps, lorsqu'on projette un cube sur un ou plusieurs plans, on s'arrange pour que ses faces soient parallèles aux plans de projection. Dans une perspective axonométrique au contraire, on dispose le cube de telle sorte qu'aucune de ses faces ne soit parallèle au plan de projection. Ainsi, aucune des faces n'est vue en vraie grandeur.

Il existe diverses variantes de perspective axonométrique. L'une des plus communes est celle où le cube est placé face au plan de projection de sorte qu'une de ses diagonales soit perpendiculaire à ce plan. Dans ces conditions, la projection du cube s'inscrit dans un hexagone régulier et toutes ses arêtes ont des projections de même longueur. C'est pourquoi on dit dans ce cas qu'il s'agit d'une *perspective isométrique*. Mais il s'agit-là d'un abus de langage. En effet, *isométrique* veut dire *qui conserve les longueurs,* mais aucune projection ne conserve toutes les longueurs. Ce qui explique le qualificatif d'isométrique dans la perspective en question n'est rien de plus que ce que nous avons dit ci-dessus : toutes les arêtes ont des projections de même longueur.

Les perspectives isométriques se dessinent le plus facilement sur du papier ligné, les lignes dessinant un pavage de la feuille par des triangles équilatéraux identiques, ou encore sur du papier pointé, les points étant les sommets des triangles équilatéraux.

Perspective cavalière. Une perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle (ou plus généralement d'un objet « triorthogonal ») est une perspective parallèle particulière, dans laquelle deux faces de l'objet sont parallèles au plan de projection. Les perspectives cavalières se distinguent entre elles par l'inclinaison que l'on donne aux représentations des droites perpendiculaires au plan de projection (les fuyantes), et par l'échelle à laquelle on dessine celles-ci.

Perspective parallèle. Une *perspective parallèle* d'un objet est une projection de celui-ci sur un plan, parallèlement à une direction non parallèle au plan. Dans la mesure où on peut considérer que les rayons du soleil sont parallèles, l'ombre d'un objet au soleil, sur le sol ou sur un mur, donne une bonne idée d'une perspective parallèle.

Il arrive qu'une perspective parallèle donne une représentation très déformée de l'objet projeté : il suffit d'imaginer l'ombre immense, sur le sol, d'un cube au soleil couchant. Comme on souhaite que les objets représentés en perspective parallèle soient ressemblants, on choisit l'inclinaison de la direction de projection en conséquence. Par exemple, dans le cas d'un cube, on s'arrange pour qu'aucune des faces ne soit représentée par un parallélogramme exagérément allongé.

Considérons la perspective parallèle d'un cube, ou plus généralement d'un parallélipipède rectangle. Si deux des faces de l'objet sont parallèles au plan de projection, elles sont représentées en vraie grandeur sur ce plan. On dit parfois de ces faces qu'elles sont alors représentées *en vue frontale*.

Position frontale. Lorsque, dans une projection parallèle, un polyèdre possède une face parallèle au plan de projection, on dit de cette face qu'elle est en position frontale. Les faces en position frontale sont représentées en vraie grandeur en projection parallèle. Il en va de même de tout ce qui est dessiné sur de telles face. Par extension de langage, si on a une projection en vraie grandeur et qu'on la reproduit à l'échelle, on dit encore qu'elle est en vraie grandeur.

Projection cotée. Pour expliquer ce qu'est une *projection cotée,* on considère un objet situé au dessus d'un plan horizontal. On le projette orthogonalement sur le plan. Sur la représentation ainsi obtenue, on indique la cote des principaux points de l'objet. La *cote* d'un point n'est autre que la hauteur à laquelle il se trouve au dessus du plan de projection. Les cartes de géographie munies de courbes de niveau dont l'altitude est indiquée sont des exemples communs de projection cotée.

Projection orthogonale. Une *projection orthogonale* d'un objet sur un plan est une représentation de celui-ci, dans laquelle à chaque point de l'objet on fait correspondre le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. On utilise souvent ce genre de projection pour représenter des objets « triorthogonaux ». On entend par là des objets qui – tels un parallélipipède rectangle, une armoire, une caisse, une maison –, possèdent des faces ou des arêtes parallèles à trois directions orthogonales de l'espace.

On représente souvent un objet en le projetant sur trois plan orthogonaux deux à deux (voir les figures de la fiche 10 à la page 210). Pour la facilité, on nomme ces plans le *plan horizontal*, le *plan vertical* et le *plan de profil*. Les projections sont appelées *vues*. On imagine le plan horizontal comme un plancher regardé du dessus. C'est pourquoi la projection horizontale s'appelle aussi *vue du dessus.* On imagine le plan vertical comme un tableau pendu au mur et que l'on considère de face. C'est pourquoi la projection verticale est aussi appelée *vue de face*. Le troisième plan sur lequel on projette l'objet est perpendiculaire aux deux autres. C'est donc un plan vertical. L'objet se trouvant devant l'observateur, on situe ce plan à droite de l'objet et de l'observateur. On appelle aussi la projection sur ce plan la *vue de gauche*. Il est intéressant de noter que les Anglo-saxons utilisent une vue de droite.

Les trois projections orthogonales sont dites *coordonnées* lorsqu'elles sont mises en correspondance par des lignes de rappel.

On prendra garde que ce qui est appelé *vue* dans le contexte des projections orthogonales n'est ainsi appelé que par une extension de langage : il ne s'agit nullement de vues au sens propre, même si pour certains points de vue (au sens propre), la perception ressemble à la projection.

Vraie grandeur. Voir *Position frontale* dans le présent glossaire.

Bibliographie

Alberti L. [1435], *De la peinture*, Macula, Dédale, Paris, 1992. Traduction par Jean-Louis Schefer.

Berti L. [sans date], *Chefs-d'œuvres de l'art, maîtres italiens*, Hachette-Fabbri (Milan).

Bkouche R. [1990], *La naissance du projectif, De la perspective à la géométrie projective*, IREM de Lille.

Boutan M. [1996], *Pochoirs*, Mila, Paris. Plusieurs volumes sont disponibles sur des sujets divers.

Boutriau E., J. Boutriau et J. Lievens [1984], *Savoir et savoir-faire en mathématique, cinquième année niveau A*, Dessain.

Boutriau E., J. Boutriau et J. Lievens [1985], *Savoir et savoir-faire en mathématique, sixième année niveau A*, Dessain.

Buekenhout F. et J.-P. Doignon [1995], *Géométrie projective*, Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques.

Castelnuovo E., D. Gori-Giorgi et C. Gori [1976], La géométrie projective à l'école, *Educational Studies in Mathematics*, 7, p. 443–463.

Comar P. [1996], *La perspective en jeu ; les dessous de l'image*, Gallimard.

CREM [1995], *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

CREM [1999], *Formes et Mouvements*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

Cuisinier G., D. Legrand et J. Vanhamme [1995], *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe*, Proposition GEM N° 18, Academia-Érasme.

Dalle A. et C. De Waele [1986], *Géométrie plane*, De Boeck–Wesmael.

De Block-Docq C. et N. Rouche [1996], Couper en deux, c'est bête comme chou ! Voire, *in Mathématiques de 10 à 14 ans. Continuité et compétences*, Cellule de pilotage du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles.

De Lièvre B. et L. Staes [1993], *La psychomotricité au service de l'enfant*, Belin, Paris.

Dürer A. [1525], *Underweysung der Messung.* Traduction française par Jeanne Peiffer sous le titre *Géométrie*, Éditions du Seuil, 1995.

Dubois C., M. Fenichel et M. Pauvert [1993], *Se former pour enseigner les mathématiques (Vol. 1 : Problèmes, géométrie ; Vol. 2 : Maternelle, grandeur et mesure)*, Armand Colin, Paris.

Focillon H. [1992], *Piero della Francesca*, Pratiche Editrice, Parma.

Gilbert T. [1987], *La perspective en questions*, Proposition Gem n° 12, Ciaco, Louvain-la-Neuve.

Hameau C. [1996], *La géométrie par le dessin au cycle* III, Nathan, Paris.

Hoban T. [1993], *Blanc sur noir*, Kaléidoscope, Paris.

HOBAN T. [1994], *Noir sur blanc*, Kaléidoscope, Paris.

HOBAN T. [1996], *Qu'est-ce que c'est ?*, Kaléidoscope, Paris.

HOBAN T. [1996], *Qui sont-ils ?*, Kaléidoscope, Paris.

KRYSINSKA M. [1992], *Géométrie dans l'espace, géométrie de l'espace*, Academia-Érasme, Louvain-la-Neuve.

LYONS M. et R. LYONS [sans date], *Architek*, Learned Entreprises International, Plattsburgh. Cet ouvrage est disponible entre autres chez les distributeurs Nathan (ISBN 2-911748-54-1).

LYONS M. et R. LYONS [sans date], *Architek Méga*, Learned Entreprises International, Plattsburgh. Cet ouvrage est disponible entre autres chez les distributeurs Nathan (ISBN 2-911748-56-8).

LYONS M. et R. LYONS [sans date], *Architek Super*, Learned Entreprises International, Plattsburgh. Cet ouvrage est disponible entre autres chez les distributeurs Nathan (ISBN 2-911748-55-x).

MACCURDY E. [1942], *Les Carnets de Leonardo da Vinci*, Gallimard. Traduit de l'anglais et l'italien par LOUISE SERVICEN, préface de PAUL VALÉRY.

PIAGET J. et B. INHELDER [1947], *La représentation de l'espace chez l'enfant*, deuxième édition, Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

PIERO DELLA FRANCESCA [1470-80], *De la perspective en peinture*, In Medias Res, Paris, 1998. Traduction par JEAN-PIERRE LE GOFF.

ROEDERER, CHARLOTTE (ILLUSTRATRICE) [1997], *Boucle d'or et les trois ours*, Nathan, Paris. Cette version du conte traditionnel ne comporte pas d'auteur.

ROTGANS H. [1988], *La perspective*, Dessain et Tolra, Paris.

TATON R. [1951], *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Presses universitaires de France, Paris.

VYGOTSKI L. [1997], *Pensée et langage*, La Dispute, Paris. Trad. F. Sève.

WALLON H. [1970], *De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée*, Flammarion, Paris.

WITTMANN E. C. et G. MÜLLER [1990 et 1994], *Handbuch produktiver Rechenübungen,* 2 vol., Ernst Klett, Stuttgart.

WITTMANN E. C., G. N. MÜLLER et M. RÖR [1997], *Schauen und Bauen, Geometrische Spiele mit Quadern*, Klett, Leipzig.

Table des matières

CONSTRUIRE ET REPRÉSENTER

Un aspect de la géométrie de 10 à 15 ans

Communauté française de Belgique

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

CONSTRUIRE ET REPRESENTER UN ASPECT DE LA GEOMETRIE DE LA MATERNELLE JUSQU' A 18 ANS

Par Nicolas Rouche et Luc Lismont
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM)

Article publié dans
Le Point sur la Recherche en Education
N° 12
Octobre 1999

et diffusé sur
http://www.agers.cfwb.be/pedag/recheduc/point.asp

Service général des Affaires générales, de la Recherche en éducation et du Pilotage interréseaux
9-13, rue Belliard 1040 Bruxelles
Tél. +32 (2) 213 59 11
Fax +32 (2) 213 59 91

Construire et représenter
Un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans

par Nicolas Rouche et Luc Lismont
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM)

Dans un article intitulé « Formes et mouvements » paru ici même en 1998, nous avons rendu compte de la partie théorique d'une recherche qui tentait de dégager des perspectives pour l'enseignement de la géométrie de la maternelle jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire.

Rappelons que nous avions identifié trois grands contextes de l'apprentissage de la géométrie, à savoir la géométrie classique des figures, les représentations (principalement les représentations planes des objets à trois dimensions), les repérages et la linéarité, et enfin les problèmes d'orientation.

Dans une partie – plus pratique – de cette même recherche, nous avons rassemblé des situations-problèmes illustrant le double thème des constructions et des représentations. Le présent article rend compte de cette seconde partie. Voyons dans un premier temps ce qui nous a conduit à choisir ces deux thèmes, par ailleurs fortement liés.

Construire

Au fil des mois et des années, l'enfant manipule des objets avec une précision croissante : il porte son biberon à ses lèvres, pose un cube sur un autre et puis encore un, dépose une assiette sur la table, dispose parallèlement un couteau et une cuiller, lace ses souliers, construit une maison en briques Lego, reconstruit un puzzle, fait une cocotte en papier, monte une tente, dessine un rectangle, fait passer un cercle par deux points, puis par trois, construit une boîte en carton, un cône en papier, démonte et remonte son vélo, etc. C'est en assemblant ainsi des objets, en les ajustant les uns aux autres, en les emboîtant, ... que l'enfant se familiarise avec les formes et les grandeurs.

Assembler et construire sont des modalités d'une pensée géométrique qui se manifeste d'abord dans l'action. Il s'agit bien d'une pensée, car ces actions comportent des enchaînements que l'enfant maîtrise, adapte, garde en mémoire et peut répéter. Lorsque le langage apparaît, il fait plus qu'accompagner l'action : par son pouvoir d'évocation, il aide à la concevoir et à la corriger en cours de route. Quand les situations se compliquent, il étend son rôle jusqu'à devenir l'instrument du raisonnement. Cette évolution aboutit aux théorèmes qui fondent les constructions géométriques.

On le voit, le verbe construire désigne un thème important dans l'apprentissage de la géométrie de la prime enfance à l'âge adulte.

Représenter

On n'a pas de vue d'ensemble d'une montagne, d'un quartier de ville, d'un bâtiment, d'un navire.

Mais on peut recourir à une maquette ou un modèle réduit pour mieux appréhender l'ensemble. On ne voit pas du tout une maille cristalline, une molécule. C'est pourquoi on crée de ces objets minuscules des modèles fortement agrandis.

On voit directement un objet plan de dimensions modérées tenu devant les yeux en position frontale.

Bien entendu, s'il est opaque, on n'en voit qu'une face. On ne saisit jamais qu'en partie la forme d'un solide non plan opaque. Pour l'imaginer mieux, on le projette en plan dans diverses positions. Chaque projection est partielle et ambiguë, plusieurs projections se complètent. On fait des plans d'un objet existant pour le voir mieux, et d'un objet en projet pour montrer comment le construire.

Beaucoup d'objets et d'événements sont éphémères. On en conserve le souvenir sous forme de photographies ou autres représentations planes. Beaucoup d'objets sont intransportables, mais on en transmet des représentations planes sur du papier ou des écrans.

Ainsi les hommes se donnent, de beaucoup de choses qu'ils perçoivent malaisément, des modèles mieux à portée de leurs organes sensoriels. En particulier l'activité humaine s'appuie sur un va-et-vient fréquent entre les objets et leurs représentations, entre l'espace et le plan.

La théorie de la similitude fonde la conception des modèles réduits ou agrandis. La théorie des projections parallèles ou centrales donne la clef des représentations planes les plus communes.

On le voit, le verbe représenter désigne lui aussi un thème important de l'apprentissage de la géométrie.

Voyons maintenant quelles matières nous avons rassemblées, à l'intention des enseignants et des élèves, sur ces deux thèmes importants.

Un parcours dans la géométrie

Nous proposons des situations-problèmes pouvant servir à apprendre la géométrie, depuis ses racines perceptives et motrices jusqu'à son accomplissement théorique.

Dans le système scolaire, les situations-problèmes sont dorénavant présentées comme un moyen privilégié d'apprentissage. Elles consistent en questions auxquelles les élèves ne sauraient répondre complètement en s'appuyant seulement sur ce qu'ils savent. Des questions par conséquent qui les obligent à élaborer – avec l'aide indispensable du professeur – des éléments de théorie nouveaux pour eux. La pratique des situations-problèmes, qui n'est pas une panacée et ne devrait pas exclure d'autres formes d'enseignement, répond à une exigence de sens. En effet, tout savoir répond à des questions, aide à comprendre, et donc il ne faut pas occulter les questions.

Les situations que nous avons choisies traitent de nombreuses matières de géométrie, mais ne couvrent pas tout le programme. Elles n'épuisent pas non plus tout ce qu'on pourrait regrouper sous les deux thèmes de construire et représenter. Il ne s'agit donc ici ni d'un cours, ni d'un manuel, mais plutôt de matériaux proposés aux enseignants qui sont à la recherche de questions significatives pour leurs élèves... mais aussi et d'abord pour eux-mêmes. Chaque situation-problème est accompagnée de multiples commentaires.

Les trois volumes couvrent des tranches d'âges allant approximativement de deux ans et demi jusqu'à 10 ans, puis de 10 à 15 ans, et enfin de 15 à 18 ans. Bien que chaque volume puisse être lu indépendamment des deux autres, ils forment un tout et l'on s'est efforcé de montrer la continuité des matières traitées d'un bout à l'autre. Dans l'enseignement mathématique, on construit toujours sur des acquis antérieurs. Or une foule d'acquis de base sont fondamentaux.

Mais ils sont tellement élémentaires et évidents pour les adultes que ceux-ci auraient tendance à oublier ce qu'ils sont pour les enfants : des étapes essentielles et parfois difficiles. Notre espoir est que d'assez nombreux enseignants, à quelque niveau qu'ils se trouvent, parcourent les trois volumes : ils réaliseront mieux ainsi d'où viennent et vers où vont leurs élèves. Ils comprendront mieux le cheminement passionnant qui va des balbutiements de l'enfance à la science constituée.

Esquissons maintenant le contenu des trois volumes.

DE DEUX ANS ET DEMI A 10 ANS. – Nous avons choisi de partir d'emblée «dans l'espace», en proposant de construire des solides. On peut en former dans la masse, par exemple en pâte à modeler. On peut aussi en construire en assemblant des faces polygonales, ce qui provoque le va-et-vient entre les développements et les solides. On peut enfin assembler seulement des tiges pour construire des squelettes de solides. Ces trois modalités requièrent des manœuvres distinctes et attirent l'attention sur des propriétés variées des solides. Dans cette tranche d'âge, on peut dessiner des objets «de face et de profil», ce qui s'approche des projections orthogonales. On peut aussi dessiner des cubes et des assemblages de cubes sur du papier couvert d'un réseau régulier de points. On peut aussi jouer avec des ombres et enfin reconnaître, sans les analyser techniquement, des représentations diverses d'objets divers telles que des perspectives cavalières, des photographies, etc.

DE 10 A 15 ANS. – Le modelage d'objets géométriques simples ainsi que la fabrication de solides en papier, en carton et en tiges sont approfondis dans la tranche d'âge de 10 à 15 ans. Les constructions deviennent plus précises, elles entraînent des mises au point sur les grandeurs (problèmes d'échelles, de poids, d'aires et de volumes).

Les projections orthogonales d'objets simples nous ont paru possibles dès la fin de l'école primaire. Nous proposons au passage quelques représentations d'assemblages de cubes.

D'autre part, vers 14 ans, nous introduisons les développements comparés de pyramides et de cônes.

Les règles de la perspective parallèle – relatives à la conservation du parallélisme et des rapports – sont d'abord observées (conjecturées) sur des dessins, puis mises en œuvre pour produire des représentations.

Leur étude s'imbrique avec celle de la géométrie plane. Le niveau des problèmes envisagés demande d'enrichir et préciser le langage utilisé jusque-là. D'autre part, apprendre ces règles de perspective ainsi que le va-et-vient entre les objets et leurs représentations, reconnaître et maîtriser les inévitables ambiguïtés de celles-ci, nous a paru déjà assez difficile. Nous avons remis à une étape ultérieure, vers quinze ans, l'interprétation des perspectives parallèles comme projections parallèles et la possibilité de les engendrer par des ombres au soleil.

DE 15 A 18 ANS. – L'étude des ombres au soleil fournit l'interprétation de la perspective parallèle comme projection parallèle. Cette étude, qui conduit aux propriétés d'incidence et de parallélisme dans l'espace, recouvre une partie substantielle du programme de géométrie de l'espace de quatrième année.

Les ombres à la lampe donnent l'occasion d'étudier les projections centrales. Celles-ci s'approfondissent dans une étude élémentaire de la perspective à point de fuite. Dans ce cadre, on aborde les sections coniques, y compris dans leur présentation analytique. Ces derniers développements sont destinés aux cours à beaucoup d'heures de mathématiques.

Bien entendu, certains des principes qui nous ont inspirés apparaissent dans la partie théorique de notre étude. Pour plus de clarté, résumons néanmoins ici l'ensemble des principes que nous nous sommes donnés pour créer des suites de situations-problèmes.

Une première observation est que le savoir géométrique s'enracine dans des perceptions et des activités de la première enfance, qui ne s'expriment sur le moment dans aucune théorie. La chose est évidente pour les enfants qui ne savent pas encore ou savent à peine parler. L'erreur serait de croire que dès la première primaire l'enseignement de la géométrie débouche nécessairement sur des éléments théoriques explicités.

Une foule de gestes et de mouvements imprimés à des objets, une foule de manipulations, de constructions et de dessins, accompagnés, commandés, décrits dans un langage non théorique constituent progressivement l'expérience spatiale qui sera théorisée un jour.

L'intervention du langage – au début dans un registre non théorique, on vient de le voir –, est cruciale. C'est par le langage, venant compléter les représentations, les symboles et les signes, que les notions s'installent dans la pensée, et que se prépare la construction ultérieure d'une théorie.

Il importe donc de favoriser les fonctions naturelles du langage dans l'action[1]

En ce qui concerne la construction de la théorie, nous nous sommes efforcés d'une part de proposer des situations-problèmes appropriées à chaque âge, ni trop faciles, ni trop difficiles, mais aussi de borner chaque fois la théorie à ce que la situation traitée requiert. En d'autres termes, nous pensons que pour passer à un niveau théorique plus difficile, il faut proposer aux élèves des questions plus difficiles, dont les solutions requièrent ce supplément de théorie.

Nous pensons avoir clairement montré dans Formes et mouvements que les régularités qui constituent l'objet d'étude de la géométrie sont la source d'un sentiment esthétique élémentaire mais vrai. Nous avons fait de notre mieux pour que la beauté des figures, des symétries, des patterns traverse notre texte, comme une source de motivation et d'inspiration.

1Sur le passage de l'acte à la pensée et au langage, voir surtout,outre Formes et mouvements, H. Wallon, De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée, Flammrion, Paris 1970, et L.S. Vygotski, Pensées et langage, La Dispute, Paris 1997.

Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes que nous proposons ont été conçues chacune pour des élèves déterminés, dans une tranche d'âge donnée et possédant certaines connaissances préalables.

Toutefois, elles peuvent être adaptées, dans certaines limites, à d'autres élèves. Chaque professeur en jugera. Chaque situation est conçue le plus souvent pour une ou deux heures de cours, souvent moins d'une heure pour les classes maternelles et primaires. Ces situations sont présentées selon un plan uniforme [2]. Nous pensons que ce plan, peut – mutatis mutandis – servir aux enseignants de manière générale, c'est-à-dire dans des matières tout autres que la géométrie et peut-être même dans des disciplines autres que les mathématiques.

Chacune de nos situations-problèmes comporte, sauf exception, les rubriques suivantes :

DE QUOI S'AGIT-IL ? – Description en une ligne ou deux de l'activité proposée aux élèves.

ENJEUX. – Matières couvertes et compétences visées. Références aux Programmes, et, selon les cas, aux Socles de compétences et aux Compétences terminales.

DE QUOI A-T-ON BESOIN ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

COMMENT S'Y PRENDRE ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de théorie auxquels la situation aboutit normalement.

ÉCHO D'UNE OU PLUSIEURS CLASSES. – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

PROLONGEMENTS POSSIBLES. – Nouvelles situations-problèmes plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour élèves mordus.

VERS OU CELA VA-T-IL ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place l'activité occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

COMMENTAIRES. – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.
Les personnes suivantes ont à des degrés divers collaboré à cette recherche : Michel Ballieu, Sylvie Denis, Marie-France Guissard, Bernard Honclaire, Luc Lismont, Nicolas Rouche, Serge Sabbatini, Thaïs Sander, Françoise Van Dieren, Jacques van Santvoort et Marie-Françoise Van Troeye.

---

[2]Sur le passage de l'acte à la pensée et au langage, voir surtout, outre Formes et mouvements, H. Wallon, De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée, Flammarion, Paris, 1970, et L.S. Vygotski, Pensée et langage, La Dispute, Paris, 1997.