

LES MATHEMATIQUES

de la maternelle jusqu'à 18 ans

*Essai d'élaboration d'un cadre global
pour l'enseignement des mathématiques*

Cette étude a été réalisée
dans le cadre des conventions de recherche 81/93 et 81/94 passées avec le
**Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation
de la Communauté française de Belgique.**

Deux postes de chargé de mission ont été affectés à cette recherche par le
**Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère non confessionnel.**

Un poste de chargé de mission a aussi été affecté à cette recherche par le
**Comité de Concertation de la Formation Continue
du Caractère confessionnel.**

Sans le soutien de ces trois instances, cette recherche n'aurait pu avoir lieu.

Le CREM a.s.b.l. a pour missions principales la recherche sur l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte et la formation continue des enseignants de mathématiques. Pour mener à bien ces missions, il a signé des conventions bilatérales d'entraide avec les groupes suivants :

- AHA, Approche Heuristique de l'Analyse
10 fond du Rondia 1348 Louvain-la-Neuve
Contact : Marisa Krysinska, tél. 32 10 45 06 50
- CDS, Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut
Faculté des Sciences,
15 Avenue Maistriau 7000 Mons
Contact : Guy Noël, tél. 32 65 37 34 15
- COJEREM, Collèges Jésuites, Réflexions sur l'Enseignement des Mathématiques
(sous-groupe du Centre de Formation à la Pédagogie des Mathématiques, FOPEMA)
Département de Mathématiques des FUNDP,
8 rempart de la Vierge 5000 Namur
Contact : Maggy Schneider, tél. 32 2 687 20 73
- GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique,
Département de Mathématiques de l'UCL,
2 chemin du Cyclotron 1348 Louvain-la-Neuve
Contact : Christiane Hauchart, tél. 32 10 47 32 72
- GEPEMA, Groupe d'Etude sur les Premiers Enseignements de la Mathématique
Université de Mons-Hainaut, Faculté des Sciences,
15 avenue Maistriau 7000 Mons
Contact : Paul van Praag, tél. 32 65 37 34 17
- SBPMef, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
15 rue de la Halle 7000 Mons
Contact : Guy Noël, tél. 32 65 37 34 15
- UEREM, Unité d'Etude et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Institut Supérieur Industriel de Liège,
6 quai Gloesener 4020 Liège
Contact : A. Pétry, tél. 32 41 41 13 85
- UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Département de Mathématiques de l'ULB
CP 216 boulevard du Triomphe 1050 Bruxelles
Contact : Francis Buekenhout, tél. 32 2 650 58 64

*Le dessin qui orne la couverture est de Rembrandt.
Il suggère que, comme on apprend très tôt la marche en marchant,
c'est en faisant des mathématiques qu'on apprend à en faire,
et cela commence très tôt.*

D/1995/7359/02 ISBN 2-930161-01-9
© CREM a.s.b.l., octobre 1995
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Emile Vandervelde B-1400 Nivelles (Belgique)
Tél. : 32 67 21 25 27 Fax : 32 67 21 22 02

LES MATHÉMATIQUES

de la maternelle jusqu'à 18 ans

*Essai d'élaboration d'un cadre global
pour l'enseignement des mathématiques*

Cet ouvrage a été conçu
comme source d'idées et base de discussion.
Souhaitons que personne n'en fasse un dogme !

CREM a.s.b.l.

Cette étude est due à Bernard Honclaire, Nicolas Rouche,
Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye
et Marisa Krysinska,

avec la collaboration de

Louis Habran, Guy Noël, Claudine Festraets et Yolande
Noël,

avec l'aide d'un Comité d'accompagnement

composé de Paule Evrard, Louis Habran, Jean-Paul Houben,
Jules Gobert, Guy Noël, Paul van Praag et Alfred Warbecq.

Nous ne pouvons nommer ici toutes les personnes et les
groupes avec lesquels nous avons eu des échanges d'idées
intéressants. Mentionnons toutefois nos relations fructueuses
avec la Commission Inter-réseaux des Programmes.

Tous nos remerciements

vont à Francis Buekenhout, Michel Demal, Georges Demol,
Roland Giot et Michel Herman qui ont relu et critiqué cer-
taines parties de notre manuscrit, sans complaisance mais
amicalement, ainsi qu'à Jacques et Pierre Sartiaux pour leur
remarquable contribution à la dactylographie et à la mise en
page du texte.

AVANT-PROPOS

1 Un projet de recherche

En 1993, Monsieur Elio Di Rupo, Ministre de l'Education, a demandé au CREM, qui venait d'être créé, de rédiger un cadre global pour l'enseignement des mathématiques de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. Plus précisément, l'objectif de la recherche était de rédiger

«un programme cadre comprenant

- a) la mise au point et la description en termes généraux d'un *noyau commun* de formation mathématique couvrant la scolarité obligatoire ;
- b) une description en termes généraux de la formation mathématique à assurer, *au delà du noyau commun*, dans les différentes filières des enseignements général, technique et professionnel.»

Les motivations de la recherche étaient présentées dans les termes suivants :

«L'enseignement des mathématiques est difficile et il aboutit trop souvent à repousser les élèves et à les mettre en échec : ce sont là des faits graves, aux conséquences sociales immenses et que tout le monde peut constater.

Deux déviations fréquentes responsables au moins partiellement des insuccès de cet enseignement sont les suivantes :

- a) le fait d'enseigner les mathématiques dans leur forme déductive, comme une succession d'axiomes, de définitions, de lemmes, de théorèmes et de corollaires, sans faire suffisamment la place à la genèse des théories, aux contextes problématiques où elles exhibent leur fonctionnement et leur sens, et à l'activité mathématique autonome des élèves ;
- b) le fait, bien pire, de réduire l'enseignement des mathématiques, pendant des moments trop longs, à l'entraînement au calcul de routine, l'attention se trouvant ainsi concentrée sur l'application de règles strictes, dont on perd de vue et l'origine et la fonction dans la culture mathématique globale.

Une autre difficulté essentielle dont souffre l'enseignement des mathématiques dans notre Communauté est qu'il n'est pas pensé comme un tout cohérent allant de la prime enfance à l'âge adulte, mais bien par tranches horizontales étanches. Il ne s'agit pas ici

de la pratique de cet enseignement sur le terrain des classes, mais bien de la manière dont il est conçu et mis en place par ceux qui en ont ou en prennent la responsabilité principale. On remarque en effet

- a) que les commissions de programme fonctionnent *séparément*, sans coordination substantielle, aux niveaux maternel, primaire et secondaire ;
- b) que les maîtres sont formés dans des filières *distinctes*, avec ici un compartimentage supplémentaire entre le secondaire inférieur et le secondaire supérieur ;
- c) que les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques sont faites *séparément*, pour le maternel et le primaire dans les facultés de psycho-pédagogie, et pour le secondaire dans les départements de mathématiques.

Il n'est pas étonnant qu'une organisation de ce type entrave la maturation d'une conception globale et cohérente de l'éducation mathématique. L'absence d'une telle conception se traduit sur le terrain des classes par des dysfonctionnements observables, surtout aux passages entre le primaire et le secondaire, et entre le secondaire inférieur et le secondaire supérieur¹».

2 Interprétation du projet

Il allait de soi pour les auteurs de la recherche que le programme-cadre ne pouvait en tout cas pas se réduire à énoncer des matières à étudier aux différents âges. Il est bien question, en effet, dans le projet, de *formation* mathématique, et s'il est vrai que la formation comporte nécessairement des connaissances, il est clair aussi qu'elle ne se réduit pas à celles-ci (cf. Chap. 1 ci-après).

D'autre part, nous avions à traiter des *grands axes* de la formation mathématique. Par conséquent notre étude ne pouvait se confondre avec un programme, qui est un document spécifiant les matières *en détail*.

Dans le domaine qui nous occupe, les certitudes sont rares, ce qui renforce l'exigence d'un examen critique constant. Nous nous sommes efforcés d'argumenter le plus clairement possible toutes les options présentées. S'il arrive par endroits que notre document emprunte un style normatif («il faut», «il faudrait que», ...), il s'agit seulement d'une commodité d'expression, car le CREM n'a et ne revendique aucun pouvoir de décision.

Ainsi, notre travail préserve la possibilité d'apporter des solutions diverses aux difficultés rencontrées, et c'est très bien ainsi. Que deviendrait en effet un système d'enseignement privé d'un large espace de liberté ?

Qui plus est, nos analyses n'ont aucune prétention à être définitives : le passé

¹ Depuis 1993, moment où le projet de recherche a été rédigé, diverses initiatives ont été prises pour atténuer ces difficultés. Mais elles demeurent, dans l'ensemble, timides et incomplètes.

récent montre à suffisance que la société, les mathématiques, les sciences et les techniques évoluent sans cesse. Une étude comme celle-ci devrait être reprise périodiquement.

3 Un cadre global pour qui ?

Notre souhait est de mettre à la disposition de tous les acteurs concernés dans le système éducatif, non pas un dogme nouveau, mais une base de discussion aisément accessible, qui permette à chacun de situer son effort et de le coordonner à ceux des autres. Nous avons cherché à rédiger ce document dans le style le plus simple possible, de sorte qu'il soit en bonne partie lisible par des personnes sans formation mathématique particulière. L'espoir est qu'il permette

- à chaque enseignant de se situer et de reconnaître son rôle entre ceux qui enseignent avant lui et ceux qui enseignent après ;
- aux enseignants et élèves des écoles normales des divers niveaux et des universités de situer de même les matières qu'ils étudient ;
- aux enseignants des autres disciplines de clarifier la relation de leur enseignement avec celui des mathématiques et leur apport à la formation des élèves considérée dans son ensemble ;
- aux parents de voir d'où vient et où va leur enfant ;
- aux élèves d'un certain âge de comprendre le sens de leur effort et de le mettre en perspective ;
- aux commissions de programmes et aux auteurs de manuels d'enchaîner leurs propositions à celles qui les précèdent et les suivent, de manière à éviter les transitions mal préparées ;
- aux responsables administratifs et politiques de l'enseignement d'apprécier plus facilement la portée et les implications globales de leurs décisions.

Enfin, *last but not least*, ce cadre global devrait aussi aider à reconnaître comment s'acquièrent et s'expriment, à travers la matière mathématique, les compétences de base qui font aujourd'hui l'objet de beaucoup d'attention dans l'enseignement.

4 Sources

Comme on pouvait le lire également dans le projet de recherche,

«Beaucoup de réflexions, de débats et de rapports ont été consacrés, surtout depuis dix ans, aux difficultés de l'enseignement des mathématiques. Signalons surtout, pour la Communauté Française de Belgique, le *Rapport de la Commission «Danblon»* [Dan90] et le *Livre blanc* de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Française [Noë91]². Les études étrangères les plus marquantes, et qui d'ailleurs ont inspiré les contributions belges, sont le *Rapport Cockcroft* [Coc82] pour l'Angleterre, le *Rapport Dacunha Castelle* [Dac89] pour la France et les *Curriculum and evaluation standards* [Rom89] pour les Etats-Unis.

Ce dernier document doit retenir particulièrement l'attention dans la mesure où il ne se borne pas à communiquer des observations, un débat d'idées et des recommandations générales : il propose pour tous les âges de la maternelle à la fin du secondaire des exemples détaillés de situations d'apprentissage et de contrôle des connaissances. Cette étude ne se contente donc pas de dire en général ce qu'il faudrait faire, mais elle montre de manière assez explicite *comment le faire dans les classes.*»

Attardons-nous un moment sur cette étude américaine, car elle a été une de nos principales sources d'inspiration. Elle est divisée en quatre parties. Les trois premières sont consacrées à des tranches d'âges (de la maternelle à 9 ans, de 10 à 13 ans, de 13 à 18 ans) et la dernière aux problèmes d'évaluation (des élèves, des enseignants, du système éducatif). On retrouve dans chaque tranche d'âges, *à peu près* les mêmes sections. Par exemple, pour la tranche d'âges de 10 à 13 ans :

- les mathématiques comme résolution de problèmes ;
- les mathématiques comme communication ;
- les mathématiques comme raisonnement ;
- les connexions mathématiques (c'est-à-dire les liens qui unissent les divers concepts et théories) ;
- les nombres et les relations numériques ;
- les systèmes de nombres et la théorie relative aux nombres ;
- le calcul et les estimations ;
- les patterns³ et fonctions ;
- l'algèbre ;
- les statistiques ;
- les probabilités ;

² Le rapport «Danblon» est repris tout entier dans le Livre blanc.

³ Nous avons décidé d'adopter le terme *pattern* tel quel en français : le lecteur pourra consulter le glossaire en fin d'ouvrage.

- la géométrie ;
- les mesures.

On note tout d'abord, dans ce plan, l'importance accordée aux questions relatives à l'activité mathématique en général, telles que la résolution de problèmes, la communication, le raisonnement. Mais on s'étonne aussi de voir ces questions traitées en quelque sorte *sur le même pied* que les matières particulières telles que l'algèbre, les probabilités, la géométrie. Les premières sections sont illustrées d'exemples au même titre que celles relatives aux matières, et on se demande pourquoi ces exemples concernant la résolution de problèmes, la communication, le raisonnement n'apparaissent pas plutôt *dans* les sections relatives aux matières.

Voyons maintenant comment et pour quelles raisons nous avons structuré notre étude de façon assez différente.

5 Plan du cadre global

Le *Premier chapitre* analyse la notion de compétence et sa relation avec celle de savoir. Il fait le lien avec le texte officiel actuellement disponible sur les socles de compétences [SOC94].

Le *Deuxième chapitre* expose une philosophie générale de l'éducation mathématique, parente de celle développée dans le *Rapport «Danblon»* [Dan90]. La philosophie en question sous-tend le reste de notre ouvrage. Son exposé s'appuie sur quelques termes techniques (tels que *phénomène*, *objet mental*, *acquis méthodologique*, ...) dont nous avons veillé à limiter le nombre. Seuls ceux qui s'avéraient indispensables ont été retenus.

Le *Troisième chapitre* montre pourquoi il faut combattre l'analphabétisme mathématique et en quoi une culture mathématique minimale concerne tout être humain, tout citoyen conscient et actif. Il essaie en outre de cerner, dans les grandes lignes, le contenu de cette culture minimale.

Les *Chapitres 4 à 9* traitent des différentes matières d'enseignement, à savoir les grandeurs, les nombres, la géométrie, l'algèbre, les statistiques et probabilités (avec le traitement des données et la combinatoire), et enfin l'analyse. Traiter ainsi chaque matière d'un bout à l'autre de la scolarité nous permet de réaliser notre objectif principal : montrer la continuité des apprentissages de la prime enfance à l'âge adulte.

Certains chapitres (ceux relatifs aux grandeurs, aux nombres et à l'algèbre) com-

mencent par une Section 0, destinée à clarifier le vocabulaire relatif à la matière traitée. Nous devons en effet, dès le départ, lever certaines ambiguïtés terminologiques.

Cette Section 0 mise à part, nous avons structuré tous les chapitres de la même façon, de manière à faciliter la circulation entre eux. Voici, à titre d'exemple, le plan commenté du Chapitre 6, celui qui est consacré à la géométrie.

Vue d'ensemble

La géométrie au niveau de base

On expose dans cette première sous-section quels sont les objets et les phénomènes qui, dans l'environnement quotidien et la pensée commune, enclenchent la pensée en direction de la géométrie : qu'est-ce qui autour de nous est en quelque sorte en attente d'une explication géométrique ?

La construction de la géométrie

On expose à grands traits ce qui doit ou éventuellement pourrait constituer l'enseignement de la géométrie depuis la maternelle jusqu'à la fin de l'école secondaire. C'est l'esquisse – et pas plus que l'esquisse – d'un programme. Cette section, exprimant et argumentant les convictions des auteurs, est rédigée dans un style parfois normatif : il s'agit là, nous l'avons déjà dit, d'une simple commodité d'expression, car si nous souhaitons proposer des idées, nous ne voulons en imposer aucune.

La géométrie approfondie

Sous ce titre, la troisième section explique, également à grands traits, ce qu'est la géométrie au niveau de l'enseignement supérieur, d'abord dans les études scientifiques, et ensuite dans la recherche : est-ce que la géométrie est aujourd'hui une science vivante et de quoi s'occupe-t-elle ? Il s'agit d'un aperçu bref.

La géométrie comme forme de pensée

On tente de dégager ce qui fait la spécificité de la pensée géométrique, ce qui la distingue des autres grands chapitres des mathématiques et les relations essentielles qu'elle entretient avec eux.

Les applications de la géométrie

On évoque les applications principales de la géométrie dans les sciences et les techniques.

La géométrie dans l'histoire, la philosophie, la culture

On explique, dans une mesure à vrai dire modeste (mais en renvoyant à des exposés plus complets), quelques grands événements qui ont jalonné l'histoire de la géométrie, quelques questions géométriques intrigantes qui ont entretenu la réflexion philosophique au cours des siècles, et enfin les relations qui ont uni la géométrie et les arts plastiques à diverses époques.

La géométrie dans l'enseignement fondamental

Cette deuxième section du chapitre dégage quelques principes susceptibles d'inspirer un enseignement fructueux de la géométrie à l'école fondamentale. On y expose au passage, comme exemples d'application de ces principes, des situations et questions diverses susceptibles d'être utilisées en classe.

La géométrie au premier degré du secondaire

On montre comment les principes appropriés à l'enseignement fondamental évoluent lorsqu'on arrive au premier degré de l'enseignement secondaire. Ici aussi, des situations-problèmes illustrent la mise en oeuvre possible des principes dans les classes.

La géométrie aux deux derniers degrés du secondaire

Cette dernière section propose et illustre, elle aussi dans le prolongement des deux précédentes, quelques principes applicables cette fois aux deux derniers degrés du secondaire, en distinguant d'une part ce qui est applicable à tous les élèves, et d'autre part ce qui concerne soit les spécialités professionnelles et techniques, soit les sections qui préparent aux carrières scientifiques.

6 Les auteurs

Les premiers responsables du cadre global sont trois enseignants du secondaire inférieur et un professeur retraité de mécanique analytique et de théorie des équations différentielles à l'université, tous quatre avec une longue pratique d'enseignement. Ces personnes assument la responsabilité à la fois des opinions exprimées dans cette étude et de toutes les imperfections que les lecteurs ne manqueront pas d'y découvrir.

Ceci dit, il était impossible qu'une équipe aussi restreinte et composée de cette façon arrive avec la pertinence voulue à bout d'une entreprise aussi vaste et hasardeuse. Aussi s'est-elle appuyée, pendant les deux ans d'élaboration du projet, sur des collaborations multiples et suivies d'enseignants et d'inspecteurs de tous niveaux. On en trouvera la liste en regard de la page de titre⁴. S'ils ont contribué de façon non négligeable à certains des chapitres du travail, ces collaborateurs ne peuvent cependant pas être considérés comme engagés par l'ensemble des opinions exprimées.

Ainsi, on le voit, l'équipe de recherche a fait ce qu'elle a pu, avec les moyens dont elle disposait. Le lecteur sera juge de la valeur intrinsèque de cette étude. Celle-ci présente en outre, indépendamment de cette valeur, l'intérêt d'être le témoignage de quelques personnes que réunit leur longue expérience des problèmes traités ainsi que des centaines d'heures de lecture et d'échanges.

⁴ Le CREM saisit l'occasion qui s'offre ici de rappeler au pouvoir politique l'intérêt d'une équipe de recherche qui comporterait des enseignants de tous niveaux, du maternel aux écoles normales et à l'université.

7 Ce qui reste à faire

Au terme de ce travail, nous en apercevons certaines limites et souhaiterions lui voir donner des prolongements.

En particulier, l'enseignement de la géométrie pose aujourd'hui des problèmes tant en ce qui concerne le choix et l'organisation des matières que les étapes de maturation de l'idée de preuve. Une étude complémentaire, nécessairement longue, serait la bienvenue.

Nous n'avons pas justifié en détail la place restreinte réservée dans notre étude aux éléments de *théorie* des ensembles et de logique. Pour une discussion détaillée de cette question, on pourra se reporter à [Rou95]. Sans doute serait-il utile de montrer, plus que nous ne l'avons fait, comment les éléments de théorie naïve des ensembles et de logique se mettent en place au fil de l'étude des matières particulières.

Enfin, nous souhaiterions, peut-être dans des contributions ultérieures, montrer plus explicitement les points d'appui que l'enseignement peut trouver dans l'histoire des mathématiques, ainsi que l'importance des problèmes de communication orale et écrite dans l'activité mathématique.

8 Indications pratiques pour la lecture

La distribution des matières entre les divers chapitres s'imposait d'autant moins que nous voulions montrer comment les théories servent les unes dans les autres. C'est pourquoi on trouvera des grandeurs et des nombres partout, de l'algèbre en géométrie et en analyse et réciproquement, etc. C'est pourquoi aussi nous n'avons pas pu éviter un certain taux de redites, en espérant que le lecteur y verra plus souvent une volonté d'insister sur certains points qu'une négligence.

Rappelons, si besoin en est, qu'aucun chapitre relatif à une matière déterminée n'épuise celle-ci. Les situations-problèmes apparaissant dans ces chapitres ont été choisies pour *illustrer* des principes d'enseignement. Elles ne forment pas une suite complète préparée pour les classes.

On trouvera, accompagnant chaque exemple de situation d'enseignement, une indication sur l'âge des élèves auxquels elle s'adresse. Il ne s'agit chaque fois que d'une indication, puisque la maturité des élèves et leurs connaissances varient selon leur âge et bien d'autres circonstances.

A défaut de pouvoir nous appuyer sur un usage constant, nous avons considéré que l'enseignement primaire se divisait en trois *cycles* de deux ans, et l'enseignement secondaire en trois *degrés* de deux ans.

Notons enfin, pour terminer, que cette étude ne doit pas nécessairement être lue dans l'ordre de ses chapitres. Elle se prête à plus d'un parcours transversal. En particulier, les lecteurs qui ne souhaiteraient pas aller jusqu'au détail mathématique des choses pourront se borner à lire les trois premiers chapitres, et ensuite les premières sections des autres, celles qui sont intitulées *Vue d'ensemble*.

COMPÉTENCES

1.1 Compétences ou connaissances ?

Le système scolaire insiste davantage aujourd'hui sur l'acquisition par les élèves de compétences plutôt que de connaissances. On lit dans le document *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire* (cf. [SOC94] p.16) , consacré par le Ministère aux socles de compétences : «... la fonction première de l'Éducation : maîtriser des compétences et non accumuler et mémoriser des connaissances». Le même document, à la page 17, parle «d'un programme intégrant les exigences définies par les socles de compétences» et, à la page 105, invite les professeurs à «procéder à une relecture concertée des programmes afin d'y choisir les contenus et les procédures permettant de rencontrer les objectifs de compétences transversales¹». Ceci est bien une invitation à concevoir l'enseignement à partir des compétences transversales et à subordonner les choix de matières au développement de celles-ci.

Cette orientation de l'enseignement est confirmée par G. Fourez ([Fou94]), observateur attentif de la réalité scolaire. Il parle de «critères d'évaluation plus centrés sur les élèves que sur les disciplines». Il évoque «un déplacement : celui de la matière d'une discipline vers la compétence d'un élève», et encore «la priorité [donnée] aux compétences de l'élève plus qu'aux matières, et à la formation solide sur laquelle on peut bâtir plus, préférablement à des connaissances particulières».

¹ Les compétences transversales sont celles qui ne sont pas propres à une discipline, mais au contraire transcendent les disciplines particulières.

Comment ne pas souscrire à l'affirmation que la formation de la personne au sens large (c'est-à-dire considérée aussi dans sa fonction sociale et de citoyen) est plus importante que toute théorie qu'on pourrait lui inculquer ? Acceptons donc cette prémisse et tâchons de situer la présente étude par rapport au courant qui porte aujourd'hui le système éducatif.

Le paradoxe est que précisément cette étude, comme son titre l'indique, est orientée vers une discipline particulière, à savoir les mathématiques. On pourrait croire que s'occuper de cela, c'est ramer à contre-courant. Pour examiner cette question de plus près, essayons d'abord de voir ce qu'est cette discipline qu'on appelle mathématiques.

1.2 Que sont les mathématiques ?

Lorsqu'ils évoquent les disciplines en général, les deux documents mentionnés ci-dessus le font dans des termes qui en donnent une vue assez restreinte. La brochure officielle sur les socles de compétences [SOC94] parle d'«accumuler et mémoriser des connaissances», elle évoque «des contenus et des procédures». G. Fourez parle des «savoirs spécialisés», «de systèmes théoriques chers à certains spécialistes». Par opposition, les compétences sont valorisées par un langage dynamique. Il est question de «construire la personne», «conquérir l'environnement», «enrichir ses outils de connaissances».

Que penser de la discipline mathématique ? En fait, les mathématiques sont une science vivante qui tend à produire des théories «mortes». Les théories naissent et grandissent sur des chantiers de problèmes, et les concepts se forment tout près des questions qu'ils servent à résoudre (cf. I. Lakatos [Lak84]), des raisonnements où ils interviennent. Mais ils ne trouvent d'emblée ni leur forme, ni leur place dans la théorie en gestation. Celle-ci n'est pas tout de suite déductive. Il faut parfois des siècles d'ajustements avant qu'elle trouve son fondement et sa forme axiomatique déductive, celle qu'on lui voit dans les traités. A ce stade, elle a souvent perdu la trace de ses origines problématiques, des questions qui l'ont motivée. Qui plus est, les concepts y sont introduits à la place que leur assigne la déduction, et qui est souvent loin de celle où on discerne le mieux leur importance. La théorie est ainsi transformée, pour obéir aux exigences de la pensée rationnelle, en un monument très beau mais immobile.

Les mathématiques que l'on enseigne ne sont pas les mathématiques de la recherche, beaucoup trop compliquées au 20^e siècle. Ce sont les mathématiques élémentaires. Celles-ci, ayant atteint le stade de la quasi-fixité, se trouvent dans les grands traités, à la place que leur assigne la logique. On les aménage pour les enseigner, mais le plus souvent en leur conservant leur architecture déductive. Ces théories bien bâties sont imposées toutes faites aux élèves. Certains les aiment et y réussissent. Beaucoup d'autres répugnent à cette pensée imposée.

Pour des raisons trop longues à exposer ici (cf. [Rou89]), l'enseignement des mathématiques prend souvent une autre forme, qui consiste à inculquer des pratiques de calcul obéissant à des règles d'apparence arbitraire. Les élèves apprennent à combiner des symboles, d'une part sans en voir le lien avec les grandes théories évoquées ci-dessus, et d'autre part sans les faire servir dans des problèmes. On appelle parfois cela le calcul nu : ce sont les mathématiques réduites à l'insignifiance. Si la discipline appelée «mathématiques» était cela, alors il y aurait quelque raison de prendre ses distances à son égard. Heureusement, il existe une troisième façon d'enseigner, dans laquelle professeurs et élèves travaillent des mathématiques, où chacun se pose des questions et apprend à penser. Dans cette optique, les grandes théories ne sont pas abandonnées : elles sont reconstruites pour répondre à des questions. Toutefois, ce type d'enseignement (souvent prôné) n'est encore pratiqué que par une minorité. Il ne faut d'ailleurs jeter la pierre à personne, car il est vraiment difficile de donner aux élèves la part d'autonomie intellectuelle la plus favorable à leur formation, et cela ne s'apprend pas en un tour de main. C'est d'autant plus difficile que les cours universitaires, qui par leur position contribuent à donner le ton, se font le plus souvent sur le modèle de la science achevée, déductive. Les cours de ce type, parce qu'ils sont si soigneusement construits, ne communiquent pas aux étudiants la pensée vivante des chercheurs qui les ont écrits.

1.3 Compétences et acquis méthodologiques

Regardons maintenant de plus près les mathématiques non plus comme un corpus d'axiomes, définitions et théorèmes organisé déductivement, mais comme une activité de l'esprit cherchant à répondre à des questions. Où situerons-nous les compétences ?

Dans tous ses écrits consacrés à l'apprentissage des mathématiques, G. Polya (cf.

entre autres [Pol45]) insiste beaucoup sur ce qu'il appelle les acquis méthodologiques. Il donne aux élèves le conseil suivant : lorsque vous avez résolu un problème, n'en restez pas là ; reconstituez mentalement votre cheminement, rappelez-vous vos difficultés, ce qui vous a aidé ou retardé, cherchez surtout à identifier ce qui pourrait vous resservir en d'autres occasions.

Les acquis méthodologiques que l'on relève ainsi sont de tous ordres. Par exemple :

- j'ai pensé à faire un tableau et j'ai vu que j'avais oublié un cas ;
- j'étais perdu jusqu'au moment où j'ai pensé à étudier un cas particulier ;
- si j'avais tout de suite dessiné soigneusement, j'aurais vu clair plus vite ;
- j'ai failli me décourager et c'est parce que j'ai résisté encore un peu que j'ai fini par trouver ;
- la nuit porte conseil ;
- maintenant j'ai bien vu que quand j'écris a , il peut s'agir d'un nombre négatif même s'il n'y a pas de signe – devant ;
- j'ai vu quel type de problèmes géométriques se résout bien «par l'analytique» ;
- j'avais toujours pensé que le théorème de Pythagore ne servait qu'à comparer trois carrés, mais maintenant j'ai vu qu'on peut s'en servir pour calculer des distances ;
- je croyais qu'avec trois bouts de bois on peut toujours former un triangle ; mais mon voisin n'y arrivait pas avec les siens : j'ai dû changer d'avis et essayer de comprendre pourquoi ;
- quand on est en contemplation stérile devant une figure géométrique, il y a (très souvent) intérêt à lui ajouter quelque chose, essayer une construction qui fasse apparaître une relation inattendue et utile ;
- si on ne s'était pas mis à trois pour réfléchir à cette question, on ne serait pas encore sorti de l'auberge ;
- dans ma copie, j'ai utilisé trop d'abréviations personnelles et le professeur n'a pas compris, pourtant j'avais la réponse.

On pourrait poursuivre ces exemples presque indéfiniment. Chaque activité nouvelle est porteuse d'acquisitions qui contribuent à la formation de la pensée mathématique, de la pensée tout court, de la personnalité intellectuelle, morale et sociale. Dans un tel schéma d'apprentissage, l'élève lui-même dégage – avec l'aide du professeur – les compétences appropriées à une activité, un objectif déterminé.

Les listes de compétences relatives à la discipline (mathématique en l'occurrence) peuvent aider les enseignants à organiser ce travail au «second degré» à propos d'une activité qui s'achève. L'évaluation s'intègre assez naturellement à ce travail.

Mais où se situent alors les connaissances ? A vrai dire pas bien loin des compétences. Il y a une sorte de continuité des compétences les plus générales aux connaissances, fussent-elles particulières. Partons de quelques exemples. La brochure sur les socles de compétences [SOC94] relève, parmi bien d'autres, les compétences transversales suivantes :

au niveau primaire :

- agir, imaginer et réaliser des projets ;
- traiter l'information ;

au niveau secondaire :

- observer, repérer ;
- analyser ;
- induire, déduire ;
- appliquer ses connaissances dans des situations nouvelles ;
- identifier et utiliser à bon escient le langage spécifique de chaque discipline.

Quel est le lien des compétences, ainsi exprimées en termes généraux, aux mathématiques (ou aux autres disciplines) ? Le moteur du développement de la personne, c'est le désir de comprendre le monde, de partager ses interrogations avec d'autres, d'entrer dans une culture. L'enfant est habité, comme ceux qui l'entourent, par ce désir qui est le point de départ essentiel. Il mobilise ses compétences et ses connaissances pour acquérir de nouvelles connaissances. En ce faisant, il améliore ses compétences et en développe de nouvelles. Certaines sont utilisables sur d'autres terrains d'apprentissage, par delà les mathématiques. D'autre part, plus l'élève a de connaissances et mieux il est armé pour résoudre des problèmes (cf. [Sch85]). Qu'on le veuille ou non, pour être bien faite, une tête doit être raisonnablement pleine.

1.4 La question du sens

Ainsi, il nous paraît difficile de dissocier compétences et connaissances. Certes, si les connaissances devaient être identifiées à des morceaux de science morte, liées ou à peu près aux seules compétences de mémorisation et de restitution, il y aurait lieu de développer d'autres compétences en plus et à côté. Mais tous nos efforts doivent

tendre à ce qu'il n'en soit pas ainsi. L'élève n'est pas un composé de compétences et de connaissances juxtaposées. Il a droit à l'unité de sa personne : son éducation prendra sens pour lui à ce prix.

Regardons cela de plus près. Un élève qui travaille sur un problème mathématique (un défi à sa mesure) est tout entier tourné vers l'objet de ce défi. Il ne s'intéresse pas, à ce moment-là, à autre chose. Il mobilise ses capacités et ses connaissances. Certaines de ces capacités sont certes transférables à d'autres travaux, mais d'autres ne le sont pas. Ses points d'appui et ses outils pour résoudre le problème ne sont pas tous des concrétisations, des cas particuliers, des applications des compétences «transversales», si importantes que soient celles-ci. Il y a des compétences propres aux mathématiques, des points de méthode, des formes de raisonnement, de symbolisation, ... et – répétons-le – des connaissances. L'effort intellectuel est un : il mobilise et oriente toutes les ressources de la personne vers l'objet de son attention.

Il est important de faire la liste des compétences transversales que l'on voudrait faire acquérir aux élèves et de dessiner ainsi le portrait de la personne idéale. Mais cela nous semble une entreprise difficile et même hasardeuse de partir de ces compétences pour choisir les terrains scientifiques où on peut le mieux les exercer. Les compétences nécessaires se reconnaissent plus facilement sur le chantier. Encore faut-il y être attentif et y rendre les élèves attentifs. La compétence transversale la plus utile n'est-elle pas celle de pouvoir, après chaque travail particulier sur une matière donnée, jeter un regard en arrière sur le cheminement de son esprit, pour y discerner «ce qui pourra resservir» ? Ainsi se construit, petit à petit, la capacité de penser mathématiquement (ou de penser dans une autre discipline), capacité qui unit indissolublement des attitudes mentales, des points de méthode, des connaissances.

Identifier les compétences sur le chantier, c'est comprendre immédiatement à quoi elles s'appliquent. C'est en agissant de manière sensée et efficace sur la réalité physique, intellectuelle et sociale que l'on acquiert les compétences essentielles.

Nous venons d'évoquer l'élève au moment où il applique ses compétences et ses connaissances à la résolution d'un problème. Considérons-le maintenant dans son parcours complet, de la prime enfance à l'âge adulte. Comment naissent, se développent et s'organisent ses compétences et ses connaissances, en l'occurrence dans le domaine des mathématiques ?

Il n'acquiert pas la science dans l'ordre de la déduction, non plus que par accu-

mulation de connaissances chacune d'emblée définitive. Il construit son savoir (le singulier est ici significatif) en s'appuyant à tout moment sur ses acquis antérieurs, en le structurant et le restructurant dans son ensemble au fur et à mesure qu'il l'augmente. Le savoir passe par des crises et des dysfonctionnements suivis de ce que Piaget appelle des rééquilibrations². Ce savoir en évolution ressemble davantage à un être vivant complexe, avec une genèse, des périodes de croissance calme, des crises et des mutations jusqu'à l'équilibre adulte, qu'à un cristal dont la croissance procède par apport ordonné de matière à la périphérie.

Tant et si bien que l'enfant qui construit son savoir se construit tout entier³.

1.5 Un héritage

Ceci dit, une question essentielle demeure : que faut-il apprendre aux élèves ? L'éducation transmet aux jeunes l'héritage des adultes de manière à ce qu'ils se l'approprient et le marquent de leur empreinte pour l'avenir. Pour y arriver, le savoir ne peut pas être transmis dans une forme trop achevée, mais il doit être construit en réponse à des interrogations partant –sans y demeurer– de l'univers quotidien. Il faut, pour provoquer la pensée et sa maturation, des questions, on dit aussi des situations-problèmes. Certaines viennent de l'histoire, d'autres sont actuelles.

Débattre de telles questions avec des jeunes situe le savoir dans sa dimension éthique de patrimoine collectif, évoluant de génération en génération.

² Parmi d'autres, l'exemple des nombres est clair. Les premiers nombres doivent d'abord intégrer leurs fonctions ordinale et cardinale ; les nombres plus grands ne peuvent être saisis que par une structure de numération, ils servent à compter et à mesurer ; mais il s'avère bientôt qu'ils ne suffisent pas à tout mesurer : de nouveaux nombres apparaissent (les rationnels positifs) qui ne viennent pas s'adjoindre aux précédents, mais qui les étendent en les absorbant, non sans difficulté ; nouvelle crise, malgré leur valeur ordinale, ces nouveaux nombres ne suffisent pas à repérer les points d'une droite, d'où l'introduction des rationnels relatifs (ceux qui sont munis d'un signe), qui étendent les précédents et les absorbent, non sans peine ; mais ces derniers nombres échouent à mesurer la diagonale d'un carré de côté unitaire : nouvelle crise. On peut continuer ainsi. Tout cela, ce sont des mathématiques, mais aussi des conquêtes de chaque élève, qui étendent son savoir et son pouvoir, sa capacité de comprendre, d'interpréter, d'agir sur les choses et dans la société.

³ C'est bien parce que le savoir croît en se restructurant dans son ensemble que l'apprentissage des mathématiques doit être étudié d'un bout à l'autre de la scolarité, comme le fait la présente étude. L'unité de la personne connaissante a été remarquablement exprimée par Schopenhauer dans le passage suivant : "Une pensée étrangère, lue, est à une pensée personnelle, grandissant en nous, ce qu'une plante fossile est à une plante fleurissant au printemps ... Et quand parfois, à force de réflexion et de combinaisons mentales, nous avons mis à jour difficilement, lentement, une vérité, une connaissance, que nous aurions pu commodément trouver toute faite dans un livre, alors cette vérité a cent fois plus

Mais des situations-problèmes à propos de quoi et dans quels contextes ? Tant qu'il s'agit des petits enfants, les premiers choix s'imposent : ils doivent apprendre ce qu'il faut pour être à l'aise dans leur milieu physique, culturel et social. Les acquis mathématiques concernés sont présentés dans le chapitre 3. Ce qu'il faut transmettre aux adolescents est moins déterminé. Une difficulté tient à ce que les choix sont confiés à des spécialistes et que chacun tend à privilégier sa discipline. Il faut donc, pour établir un programme, beaucoup de réserve et de jugement, et ... une équipe interdisciplinaire.

Il ne nous revient pas d'énoncer ici les principes qui pourraient ou devraient être suivis. Disons seulement que, les élèves n'étant pas fixés sur leur avenir, il faut préserver pour chacun la possibilité de mûrir ses choix – que ceux-ci soient culturels ou professionnels – au fil des années. Il faut en outre entretenir et développer tout au long de la scolarité la soif de savoir et la joie de connaître qu'on voit s'éveiller chez les enfants dès l'âge de deux ou trois ans.

1.6 La portée de la présente étude

La présente étude n'est pas un programme. Son objectif n'est pas de proposer une liste suffisante de situations-problèmes conduisant à une réelle compétence en mathématiques. Il est de proposer, sur des exemples, des principes susceptibles d'aider à l'acquisition de cette compétence. Deux exemples suffiront à le montrer. Si en géométrie (cf. 6.2.1 et 6.3.1) nous insistons sur les activités de manipulation et de communication, c'est bien parce que la construction des concepts de géométrie n'est pas *d'abord* une affaire d'axiomatique et de logique, mais bien de saisie des objets

de valeur parce qu'elle est sortie de notre propre pensée. Car c'est seulement alors qu'elle s'incorpore, comme une partie intégrante, comme un membre vivant au système entier de notre pensée, qu'elle s'articule à lui avec une cohérence complète et ferme, qu'elle est comprise avec tous ses antécédents et conséquents, qu'elle porte la couleur, la tonalité, l'empreinte de notre pensée entière, qu'elle est arrivée précisément au moment opportun quand le besoin s'en faisait sentir, qu'elle est fermement installée et ne peut plus disparaître. Les vers de Goethe prennent ici toute leur portée, tout leur sens :

Ce que tu as hérité de tes pères
Gagne-le pour le posséder.

La vérité simplement apprise n'adhère à nous que comme un membre rapporté, une fausse dent, un nez de cire, alors que celle qui a été conquise par notre pensée personnelle ressemble à un membre naturel : elle seule nous appartient véritablement.”

A. Schopenhauer, “Über Philosophie und ihre Methode”, cité par E. Wittmann [Wit87].

par les sens et de verbalisation, ce qui renvoie à la personne de l'apprenant. Si un peu plus loin nous suggérons d'étudier les figures par familles entières et non en une suite de monographies, c'est bien parce qu'un contexte large quoique cohérent provoque le questionnement, la mobilité de la pensée, qui sont aussi le fait de l'apprenant.

Quoiqu'il en soit, changer la pratique des enseignants sera long et difficile. Il ne suffira pas pour y arriver de documents tels que celui sur les socles de compétences, les nouveaux programmes ou la présente étude. Il faudra en plus d'authentiques *curriculums* au sens anglo-américain de ce terme (cf. la recommandation du rapport «Danblon», cf. [Dan90]), à savoir des recueils de situations-problèmes, mais accompagnés chapitre après chapitre d'une argumentation critique, d'exemples vécus dans des classes, de commentaires mathématiques et épistémologiques et d'indications méthodologiques, ainsi que de recommandations pour l'évaluation.

Un tel effort de production de curriculum est essentiel car, répétons-le, la mutation est difficile. En dépit des contributions parfois très anciennes à une pédagogie de la construction du savoir, nous venons pour l'essentiel d'une tradition qui consistait à enseigner la science toute construite. Il faut trouver les chemins d'apprentissage qui s'accordent mieux au développement de l'esprit. Il faut ensuite un effort considérable de formation des enseignants, car on leur demande de ne plus enseigner comme le faisaient leurs maîtres. Qui plus est, on voudrait qu'ayant assimilé la perspective constructiviste de l'apprentissage, ils donnent une part suffisante d'autonomie aux élèves, et cela peut leur paraître menaçant.

De tels curriculums, qui devraient être une priorité absolue pour l'avenir proche, ne pourront pas être construits par des mathématiciens seuls ; ils ne pourront pas l'être davantage par des enseignants seuls, surtout si ceux-ci travaillent par niveaux : le maternel, le primaire, le secondaire. Il y faudra l'effort conjoint d'enseignants expérimentés de tous niveaux et de mathématiciens intéressés par l'éducation.

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AUJOURD'HUI

Les idées développées dans ce chapitre dessinent à grands traits une conception globale de l'apprentissage des mathématiques d'un bout à l'autre de la jeunesse. La philosophie générale qui les inspire et beaucoup de ces idées en particulier sont aujourd'hui largement partagées au plan international (cf. parmi d'autres, [ICM94] et [Ern91]). Tel n'était pas le cas des conceptions de la réforme des « mathématiques modernes¹ ». Celles-ci en effet ont été largement reçues et appliquées en Belgique, en France et aux Etats-Unis, mais beaucoup moins en Angleterre, en Italie, en URSS.

Ce chapitre est très dense. On s'est efforcé de renvoyer le lecteur soit aux sources des idées développées, soit à des exposés de synthèse actuellement disponibles et d'accès facile. Si beaucoup d'auteurs sont cités, c'est que chacun a contribué pour sa part à expliquer l'une ou l'autre facette d'un thème unique : comment faire accéder les élèves de tous âges à une activité mathématique authentique ?

2.1 Enseigner les mathématiques d'aujourd'hui

Depuis l'Antiquité, les mathématiques progressent non seulement en accumulant des résultats, mais encore en révisant leurs fondements et en se restructurant dans toute leur masse. Au cours de cette évolution séculaire, elles produisent des concepts qui permettent de rendre compte de plus en plus efficacement d'un nombre croissant de phénomènes mathématiques. Beaucoup de ces concepts, mais non tous

¹ Nous appelons «mathématiques modernes» non pas les mathématiques d'aujourd'hui, mais bien les mathématiques enseignées dans les écoles belges dans les années 70.

(cf. n° 2.1.2), se situent très à l'écart de la pensée commune, et sont d'accès difficile (cf. [Bko91] Chap. 12). On peut même dire en général que la distance entre la pensée commune et les mathématiques vivantes, celles des chercheurs, s'accroît avec le temps. Cette observation n'a rien d'étonnant et peut d'ailleurs être transposée à toutes les sciences : que l'on songe par exemple aux subtilités de la physique quantique, de la biologie moléculaire, de la linguistique structurale, ... Mais alors se pose le problème difficile de savoir ce que peut bien vouloir dire *enseigner aux enfants d'aujourd'hui les mathématiques d'aujourd'hui*. Car il est clair que les tout jeunes enfants puis les adolescents ne peuvent accéder immédiatement aux mathématiques contemporaines. L'enseignement doit partir du terrain des élèves et de leur langage, même s'il est vrai qu'il ne peut pas camper sur ce terrain.

Alors, en quoi les mathématiques vivantes d'aujourd'hui peuvent-elles et doivent-elles intervenir dans l'enseignement élémentaire ? La réponse à cette question, on va le voir, est quadruple.

2.1.1 Elaguer

Il importe tout d'abord d'écarter des programmes certaines matières qui ont été autrefois (parfois il y a longtemps) des sujets de recherche active, mais sont devenus des branches mortes des mathématiques. Il ne faut toutefois les écarter qu'à une double condition : d'abord qu'elles ne contribuent pas de façon essentielle à la reconstruction des mathématiques dans chaque esprit (cf. n° 2.1.4), et ensuite qu'elles ne soient pas utiles dans des activités humaines importantes quoiqu'extérieures aux mathématiques.

A cet égard, même s'il est vrai que le triangle, seul polygone convexe indéformable, est un objet géométrique important, on ne doit plus aujourd'hui s'enfoncer dans la multitude des propriétés qui peuplaient les manuels de géométrie du début du siècle. Une remarque analogue vaut pour les coniques : elles jouent un rôle central en mathématiques, mais il ne faut pas les prendre, bien qu'elles s'y prêtent, comme matériau d'exercices multiples, dans la mesure où ceux-ci ne débouchent sur rien d'essentiel. De même, les recherches de lieux géométriques sont intéressantes seulement si les lieux étudiés contribuent à la connaissance d'un thème mathématique important. Un argument pour maintenir ces matières dans les programmes semble insuffisant : c'est celui qui les désigne comme des terrains d'apprentissage du raisonnement mathématique. En effet, il ne manque pas pour y arriver de matières

mieux reliées à la culture mathématique globale, et il vaut mieux occuper le temps des études à des choses plus importantes et plus vivantes².

2.1.2 Des notions nouvelles

S'il est vrai, comme nous l'avons dit ci-dessus, que les mathématiques ont produit au fil des siècles des concepts d'accès difficile, elles ont aussi produit de temps en temps des concepts essentiels, à ce point simples et utiles qu'ils sont passés dans la pensée commune et sont devenus d'indispensables outils dans la plupart des activités humaines. Ce phénomène mérite un assez long développement. Commençons par en montrer trois exemples historiques.

Le plus important de tous ces concepts est celui de *nombre décimal à virgule*. Utilisé déjà par Al Kashi au 15^e siècle, proposé ensuite indépendamment par Simon Stevin³ au 16^e, puis introduit définitivement dans l'usage par J. Néper, il a épargné à l'humanité les arcanes et la fatigue des fractions, ouvrant à tout un chacun un large accès au domaine des nombres. Et bien entendu, ces nombres ont été mis au programme des écoles primaires.

Deuxième contribution importante des mathématiques de la recherche à la pensée commune : *les fonctions et les graphiques* dans différents systèmes de coordonnées. Tout le monde s'en sert de nos jours et on les trouve dans la presse. Or ces notions, si simples et utiles, enseignées aujourd'hui dans les écoles, découlent de recherches importantes⁴ relatives :

- à la représentation des variables par des lettres et des opérations par des symboles (Viète au 16^e siècle),
- au passage des relations algébriques à leur représentation dans des axes de coordonnées (Fermat et Descartes au 17^e siècle),
- à la mise au point de la notion de fonction, par étapes et en lien avec les mathématiques les plus avancées, entre la fin du 17^e et le milieu du 19^e siècle.

Dans le même courant d'idées, *les nombres négatifs*, qui obéissent à des règles de calcul simples⁵ et sont de nos jours enseignés très tôt, ont été mis au point et puis uti-

² On doit à la réforme des « mathématiques modernes » d'avoir désigné certaines de ces matières à écarter des programmes, ce qui était un apport important.

³ L'opuscule de Simon Stevin intitulé *La Disme* est une lecture passionnante pour les enseignants et les élèves d'aujourd'hui (cf. [Ste85]).

⁴ Sur les points d'histoire mentionnés ici et plus tard, voir par exemple [Dah86].

⁵ Même si la « règle des signes » est parfois une pierre d'achoppement.

lisés avec de moins en moins de réticences par les mathématiciens entre le Moyen Age et le 19^e siècle. Un de leurs avantages principaux est qu'ils permettent de représenter par une unique formule des fonctions dont le graphe s'étend aux quatre quadrants d'un système de coordonnées ordinaire.

Mais tout ceci concerne le passé et des notions depuis longtemps incorporées aux programmes d'enseignement des écoles. Les mathématiques plus récentes ont-elles produit de même certains concepts simples et utiles, en passe de devenir des instruments de pensée quotidiens et des objets d'enseignement élémentaire ? La réponse est oui. En voici deux, parmi d'autres sans doute, mais importants.

Il y a tout d'abord le concept de *transformation*, lié au concept algébrique de *groupe*⁶. Au niveau de la recherche, les transformations sont issues de la mise en ordre des fondements de la géométrie, l'exposé de base étant celui de F. Klein (cf. [Kle74]). Dans le quotidien, les transformations renvoient à des mouvements élémentaires tels que les translations, rotations et retournements d'objets plans, à des pliages, reflats dans des miroirs, agrandissements photographiques, représentations à l'échelle, objets présentant diverses symétries. Il y a là une foule de supports intuitifs qui contribuent à rendre ces notions familières, bien que leur maturation mathématique au cours des siècles soit loin d'avoir été triviale. En outre, deux transformations particulières parentes l'une de l'autre – la translation et l'homothétie – ont un rapport profond avec les deux opérations fondamentales sur les nombres réels, à savoir l'addition et la multiplication⁷.

Le deuxième exemple est celui d'*algorithme*. Un algorithme est une suite d'instructions conduisant à la résolution d'un problème. De tous temps, les mathématiques ont produit des algorithmes, l'un des plus connus remontant à Euclide. Mais les progrès de l'informatique joints à la généralisation des machines à calculer programmables et des ordinateurs ont abouti à ce que les algorithmes sont aujourd'hui d'usage commun dans les activités humaines et que de plus en plus de gens en produisent ou s'en servent. Les algorithmes sont le canal principal par lequel les mathématiques s'appliquent à la réalité technique, économique et sociale.

⁶ On doit aux promoteurs des « mathématiques modernes » d'avoir introduit dans l'enseignement ces deux concepts « à fort pouvoir éclairant ».

⁷ C'est ce qu'a montré E. Artin dans un ouvrage (cf. [Art78]) qui a inspiré à G. Papy sa construction élémentaire des réels (cf. [Pap64] et [Pap65]). Ce lien entre transformations et opérations demeure aujourd'hui une source pour l'enseignement des réels.

2.1.3 Aller plus loin

L'enseignement évolue, parfois par à-coups, au fil des siècles. La place laissée libre dans les programmes par l'élagage de certaines matières (n° 2.1.1) et l'efficacité due à l'usage de concepts nouveaux, simples et puissants (n° 2.1.2) donnent à l'enseignement secondaire la possibilité de traiter des matières plus avancées, qui lui font faire un pas vers les mathématiques vivantes. Ce mouvement lent témoigne de la montée séculaire du niveau intellectuel de la population.

Les promoteurs des « mathématiques modernes » ont ainsi désigné avec pertinence⁸ des matières nouvelles à enseigner vers la fin du secondaire. Voyons les deux principales.

Le concept de *vecteur*, issu combien laborieusement des travaux de Grassmann et de Hamilton au 19^e siècle et mis au point définitivement au 20^e (entre autres par H. Weyl⁹), dote la géométrie d'un instrument de calcul et ouvre la voie au développement d'un des chapitres principaux des mathématiques d'aujourd'hui, *l'algèbre linéaire*. Il semble possible (cf. n° 6.1.2) de commencer à enseigner les vecteurs à des élèves d'environ 15 ans, à condition de le faire lentement, en s'appuyant sur divers contextes géométriques, cinématiques (la composition des vitesses uniformes) et mécaniques (la composition des forces)¹⁰.

Les concepts de *dérivée* et d'*intégrale*, qui remontent pour l'essentiel à Newton et Leibniz au 17^e siècle, mais n'ont trouvé leur forme rigoureuse que vers la fin du 19^e, sont apparus dans les programmes de la fin du secondaire depuis quelques dizaines d'années et méritent d'y rester, à condition qu'eux aussi soient enseignés de façon progressive et dans des contextes qui leur donnent sens (vitesses, taux de croissance, tangentes, aires, espaces parcourus, etc. cf. Chap. 9).

Il faut enfin mentionner à part les *statistiques* et les *probabilités*. Ces deux matières parentes font aujourd'hui partie de nos programmes du secondaire, mais seulement à partir de 15 ou 16 ans. Or il serait utile d'en avancer l'étude, ce qu'ont fait beaucoup de pays depuis longtemps (cf. Chap. 8).

⁸ Avec pertinence, même s'il est vrai que la manière dont ils ont proposé de les enseigner s'est avérée en moyenne peu efficace : «[...] on ne peut pas affirmer que l'effort pédagogique ait trouvé l'harmonie entre la nature axiomatique de la déduction mathématique et l'indispensable recours à l'intuition pour la découverte des propriétés des nombres et des figures» (cf. [Nac75]).

⁹ Sur ces développements historiques, voir [Kli72] Chap. 3.2.

¹⁰ Pour plus de détails, voir n° 6.1.2.

2.1.4 Des éléments indispensables

Nous l'avons dit au début de cette section : au fil des siècles, les mathématiques révisent leurs fondements et se restructurent dans toute leur masse. Ceci a pour effet que certaines matières élémentaires ou bien disparaissent complètement des mathématiques constituées, ou bien sont absorbées dans un chapitre plus général et plus abstrait.

Par exemple les *grandeurs*, que l'on peut comparer, additionner et couper en morceaux avant même toute idée de les mesurer, ont disparu des mathématiques du 20^e siècle. Or c'est par elles entre autres¹¹ que les tout jeunes enfants, à partir de l'école maternelle, apprennent les rudiments de mathématiques. Ces manipulations de grandeurs contribuent de manière essentielle à la construction des mathématiques dans chaque esprit. Elles sont irremplaçables. Il faut donc leur ménager la place qu'elles méritent (et qu'elles ont largement perdue dans les programmes du primaire).

Une partie de la géométrie (celle par exemple qui tourne autour des théorèmes de Thalès et de Pythagore) a été absorbée par l'algèbre linéaire, dont elle est devenue une application banale. Toutefois dans ce cadre algébrisé, la géométrie étudie non plus les propriétés des solides et figures inscrits dans l'espace, mais bien les propriétés de l'espace (d'un espace ...). Or il apparaît essentiel au développement de l'intuition géométrique (et plus généralement mathématique), que les élèves étudient les propriétés des figures et solides qui peuplent l'espace. Il faut donc maintenir cette géométrie (appelée souvent synthétique) dans les programmes de toutes les années¹², en veillant toutefois à ce que les figures étudiées soient celles qui conduisent le plus naturellement à l'algèbre linéaire. Ainsi, la géométrie du parallélogramme a plus de portée que celle du triangle (songer à l'équipollence).

Autre phénomène analogue : *la mesure des aires et volumes*, qui constituait le plus gros de la géométrie traditionnelle, a été complètement absorbée dans le chapitre des mathématiques actuelles appelé analyse. Or précisément, l'analyse apparaîtra comme une grosse machine incompréhensible à ceux qui n'auront pas, depuis l'école primaire, appris à mesurer des objets d'abord simples comme des rectangles, des polygones, puis moins simples comme des cercles, des pyramides. La problématique des aires et volumes doit être vécue par étapes, à travers tous les âges de la jeunesse¹³ et jusqu'à l'apprentissage de l'analyse.

¹¹ Et par les premiers nombres naturels. Sur la construction de la notion de grandeur, cf. [Rou92].

¹² Les «mathématiques modernes» avaient évacué cette matière.

¹³ Les «mathématiques modernes» avaient également supprimé cette matière des programmes du secondaire.

Ici s'achève cette section longue (et pourtant schématique) sur les matières à enseigner. Elle nous semble importante dans la mesure où aucune nation ne peut accepter d'enseigner des matières en retard sur la science vivante. Le système d'enseignement a la responsabilité d'apprendre à tous les jeunes les mathématiques élémentaires, pertinentes et utiles aujourd'hui. De plus, certains d'entre eux doivent être préparés efficacement à la carrière de chercheur. Et enfin, il importe que les autres, la grande majorité, aient la possibilité d'un dialogue avec les premiers et donc une idée honnête des mathématiques actuelles. Il est malsain pour la démocratie qu'une nation développe une intelligentsia trop à l'écart des citoyens ordinaires.

2.2 Le sens, l'autonomie de la pensée

2.2.1 Des situations-problèmes

L'objectif essentiel d'un enseignement de mathématiques est *d'apprendre à penser mathématiquement* (ce que nous allons préciser). Or on n'est amené à le faire qu'en présence de situations qui y invitent, qui posent problème.

C'est pourquoi le travail sur des *situations-problèmes* (cf. [Bar86], parmi de multiples autres documents) est celui qui s'impose d'abord dans la pratique quotidienne¹⁴. Ces situations doivent représenter pour chaque élève un *défi mesuré* (cf. [Cha85]), pas trop dur car ce serait décourageant, pas trop facile car il n'y apprendrait pas grand-chose et ne serait pas stimulé. L'hétérogénéité des classes rend difficile la conception de questions dont la difficulté soit appropriée à chacun. Il faut que les élèves qui ont le plus de peine aient un recours, puissent marquer des points (par exemple par la méthode des essais et erreurs).

Ce qui est visé est l'activité de l'élève lui-même : il doit apprendre la *pensée autonome*¹⁵ (ce qui ne veut pas dire une pensée solitaire, sans documents ni interlocuteurs). On reconnaît la pensée autonome au fait que l'élève *prend des initiatives*, qu'il agit et réfléchit avec une *intention personnelle* (en anglais, que son activité est *purposeful*).

La pensée autonome devrait d'ailleurs être exercée dans toutes les disciplines sco-

¹⁴ Même si il est vrai que les situations-problèmes ne sont pas le tout de l'enseignement.

¹⁵ Voici un exemple de stimulation de la pensée autonome : il vaut mieux, comme l'a un jour souligné J. Stordeur, ne rien rappeler en début de leçon de ce que l'élève peut retrouver lui-même dans ses souvenirs ou ses notes.

lares. Comme J. Dewey ([Dew90], Chap. V) l'a montré il y a déjà bien longtemps, il n'est pas acceptable que, sous prétexte de préparation à la vie et aux professions, l'école transmette des savoirs dont le plein sens ne puisse apparaître qu'après l'école. Celle-ci prépare d'autant mieux à la vie qu'elle est elle-même une tranche de vie où chaque jour apporte sa part d'activités pourvues de sens dans le présent. Le problème posé ainsi est celui de la *motivation* des élèves. Ceux-ci ont besoin d'un intérêt immédiat. L'expérience la plus commune prouve d'ailleurs que, sauf circonstances exceptionnelles, des défis mesurés mobilisent les élèves et étudiants de tout âge (et aussi les adultes), et qu'il y a peu de moteurs de l'énergie individuelle qui surpassent le fait d'enregistrer des succès personnels et de se les attribuer.

Un autre facteur de motivation tient au type de regard que l'on porte sur les choses. Beaucoup de phénomènes communs, qu'ils soient mathématiques ou non, paraissent naturels ou même banals jusqu'au moment où, supposant qu'ils ne vont pas de soi, on les met en cause par des questions appropriées. Cette façon de stimuler l'esprit, habituelle dans la pratique scientifique, peut être utilisée aussi dans les apprentissages élémentaires. Curieusement c'est un homme de théâtre, Bertold Brecht, qui a le mieux exprimé, en l'appelant *distanciation*, cette façon de porter un regard profond sur les phénomènes banals. Il écrit : « c'est ce que font, et depuis longtemps, les hommes de science quand ils observent et amènent à observer tels phénomènes (les oscillations des pendules, les mouvements des atomes, le métabolisme des infusoires dans une goutte d'eau, etc.). Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne la comprenaient pas ; pour découvrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux ; de la sorte ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié. Ainsi certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à dire vrai, a pour objet de les faire véritablement comprendre [...]. Ce qui va de soi, c'est-à-dire la forme particulière qu'a prise dans notre conscience l'expérience quotidienne, s'abolit lorsque son évidence est niée par l'effet de distanciation et transformée ensuite en une nouvelle compréhension » (Brecht cité dans [Bas84]).

2.2.2 Des contextes

Les situations-problèmes doivent se trouver sur *le terrain de l'élève*, c'est-à-dire dans le domaine de son savoir quotidien et de ses acquis scolaires. Elles doivent faire sens pour lui, et en même temps – on l'a vu – l'inviter à se dépasser.

Toute situation-problème puise ses matériaux dans un *contexte* : le quotidien, une

autre discipline scolaire (l'interdisciplinarité) ou les mathématiques elles-mêmes. La richesse et la structuration du contexte (les liens de sens qui le traversent) provoquent *la mobilité de la pensée, la pluralité des méthodes et celle des solutions*. Une idée reçue veut que faire des mathématiques, c'est toujours « trouver l'unique bonne solution par l'unique bonne méthode ». C'est là une idée triste, et heureusement fausse.

Il est intéressant de distinguer schématiquement, à la suite de S. Stein ([Ste87]), trois registres d'activités dans un contexte. Le premier est *l'exploration* : laisser libre cours à la pensée, essayer des exemples, suivre des analogies, varier les figures et les paramètres, passer aux extrêmes, particulariser, généraliser, essayer de comprendre ce qui va et ce qui ne va pas. Le deuxième registre est plus difficile à désigner. S. Stein évoque à ce sujet l'idée de *l'extraction* : concentrer la pensée sur un phénomène particulier, le cerner, le tirer du contexte, l'exprimer ; si le contexte n'est pas déjà mathématique, modéliser le phénomène, c'est-à-dire le styliser, l'idéaliser sans le dénaturer trop, le traduire en termes de concepts donnant prise au raisonnement. Ce registre est celui de la *conjecture*, qui consiste à formuler sans ambiguïté ce que l'on croit être vrai. Le troisième registre est celui de *l'explication*, c'est-à-dire celui de la preuve si la conjecture s'avère vraie, et du contre-exemple si elle s'avère fausse. Il est important que ces trois registres soient exercés à tous les âges de la jeunesse, car ils sont ceux de la pensée mathématique au sens plein.

Les thèmes de travail proposés aux élèves peuvent se situer d'emblée dans le champ des mathématiques qu'ils connaissent et donc sans lien explicite avec des choses extérieures aux mathématiques. Il importe cependant que tout au long des études les élèves travaillent dans des contextes relevant de la vie quotidienne ou d'autres disciplines scolaires, et où les matériaux proposés à la réflexion n'ont pas d'emblée une forme mathématique. Une partie importante du travail consiste dans ces cas-là – nous l'avons dit ci-dessus – à mathématiser la situation, ou comme on dit à en construire un *modèle mathématique*. Le modèle doit représenter le mieux possible la réalité tout en demeurant traitable mathématiquement. Le compromis entre la fidélité et la commodité du modèle doit être mis au point par va-et-vient entre la situation réelle et son image mathématique.

L'apprentissage des mathématiques élémentaires doit passer sans cesse, pour deux raisons, par des modélisations de situations réelles. La première est claire : les mathématiques ne sont pas une science autarcique ; elles sont une forme de pensée et une réserve de moyens d'analyse largement applicables, et cela doit s'apprendre. La

deuxième, peut-être moins évidente, est tout aussi importante : les mathématiques puisent en partie leur substance en dehors d'elles-mêmes (elles l'ont fait tout au long de leur histoire) et leur compréhension profonde s'appuie sur des images, des analogies, des intuitions issues de la réalité.

Une partie des contextes nécessaires à l'apprentissage des mathématiques prend la forme de divers matériels mis à la disposition des élèves dans la classe. La pratique répétée d'activités de modélisation rend l'existence d'un laboratoire aussi nécessaire en mathématiques qu'en physique, chimie ou biologie. Le matériel nécessaire est varié : livres, modèles géométriques, instruments pour faire de grands dessins, papiers quadrillés et tramés, fenêtres pour dessiner en perspective, engins pour expérimenter les équilibres d'objets et les centres de gravité, etc.

Parmi ce matériel, une place qui n'est sans doute pas la première, mais qui est fondamentale, revient aux calculatrices et ordinateurs. Des difficultés financières et pratiques s'opposent encore actuellement au plein usage de ces instruments. Mais il faut bien savoir que les progrès de la technologie vont atténuer ces difficultés dans les années qui viennent. Alors le cours de mathématiques enrichira sans peine ses contextes significatifs d'expériences possibles en arithmétique, de manipulations de figures géométriques et de graphes de fonctions, de calculs littéraux dans les domaines de l'algèbre et de l'analyse, ainsi qu'en statistiques et traitement de données.

Le contact avec la réalité extérieure aux mathématiques est important à tous les âges. Les objets et les phénomènes réels sont toujours et pour tout le monde sources de questions et de clartés. Il n'est pas vrai que le passage du maternel au primaire implique que l'on relègue la plupart des activités manuelles et d'observation pour se concentrer sur une pensée mathématique exprimée surtout en symboles. La même remarque vaut pour le passage du primaire au secondaire, et pour celui du secondaire inférieur au supérieur. Il n'est jamais *a priori* infantilisant de construire, d'expérimenter, d'observer des choses matérielles.

2.2.3 Quatre façons d'enseigner

Essayons de clarifier encore la forme d'enseignement décrite jusqu'ici, en la comparant à d'autres. A. Treffers ([Tre86]) a proposé de classer les manières d'enseigner les mathématiques en quatre catégories, issues d'une double dichotomie (*Tabl. 1*). Le point de vue *horizontal* est celui qui s'occupe du contexte, des sources familières des

mathématiques, qui pousse aux observations, aux manipulations. Le point de vue *vertical* est celui de l'architecture déductive des mathématiques, des enchaînements d'axiomes, définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, celui qui privilégie le sens interne aux mathématiques.

	horizontal	vertical
mécaniste	–	–
empiriste	+	–
structuraliste	–	+
réaliste	+	+

Tabl. 1

Un enseignement est dit *mécaniste* s'il ne se soucie ni du point de vue horizontal, ni du point de vue vertical. C'est le cas lorsque les élèves ont surtout à exécuter des calculs de routine selon les règles imposées, sans trop comprendre d'où ces règles sortent (pas de perspective verticale), ni quels phénomènes réels elles sont susceptibles de représenter ou d'expliquer (pas de perspective horizontale). Un phénomène est dit *empiriste* lorsque les élèves sont invités à beaucoup bricoler et observer, mais pas souvent à organiser leurs observations ni à démontrer les propriétés étonnantes. L'enseignement court le risque de l'empirisme lorsque l'enseignant, soit pense que les élèves sont capables de découvrir tout seuls les mathématiques cachées dans les choses, soit au contraire sous-estime leur capacité de s'attaquer à la théorie, et les confine par conséquent dans des activités pratiques supposées plus accessibles. Par ailleurs, l'enseignement des « mathématiques modernes » tendait plutôt vers le point de vue *structuraliste* : les enchaînements théoriques limpides et élégants étaient alors le souci principal.

L'enseignement que nous cherchons à décrire ici devrait tenir l'équilibre entre les points de vue horizontal et vertical, et serait donc appelé *réaliste* dans la classification de Treffers. Ce que nous avons dit montre assez que la dimension horizontale y est bien présente. Il nous reste à faire voir comment il prend en compte la dimension verticale. Le n° 2.3 ci-après esquisse la construction par étapes d'un savoir théorique ferme, enraciné dans des contextes divers.

2.3 La construction du savoir

2.3.1 Les objets mentaux

Un véritable seuil, difficile à franchir, sépare les notions quotidiennes des concepts mathématiques rencontrés à la fin du secondaire et dans l'enseignement supérieur. Nous avons déjà fait allusion à ce seuil au n° 2.1. Regardons-le maintenant d'un peu plus près. Par exemple les nombres de tout le monde (nous dirons les nombres *naïfs*) sont des décimaux limités, un peu plus longs que naguère depuis l'arrivée des calculatrices. Les nombres des physiciens et des ingénieurs n'en sont pas très différents. Comme dit Bourbaki [Bou60], ce type de nombre est « défini par la possibilité d'en obtenir des valeurs approchées et d'introduire celles-ci dans le calcul ». Il y a loin de ces nombres familiers aux nombres réels avec leur cortège de propriétés fines (l'axiome d'Archimède, celui du supremum, etc.).

Autre exemple : dans le quotidien, on calcule des aires de rectangles en multipliant « la base par la hauteur », deux mesures qui sont des nombres au sens familier évoqué ci-dessus. Pour les triangles, on multiplie la base par la moitié de la hauteur. On peut découper un polygone en triangles et additionner les aires de ceux-ci. Par contre, au terme de l'instruction scolaire, on définit le concept d'aire comme une intégrale, limite commune d'une infinité de suites de sommes de rectangles. Et l'on calcule des aires de surfaces beaucoup plus compliquées que les polygones. On pourrait multiplier les exemples de seuils entre la pensée commune et la pensée mathématique, mais nous n'aurons pas le loisir de le faire ici¹⁶.

Quoi qu'il en soit, l'existence même de ces seuils pose un problème central à l'enseignement des mathématiques. Partons de l'âge le plus jeune. Les bébés et les tout petits enfants doivent d'abord acquérir les notions les plus élémentaires de la pensée commune. C'est ensuite en partant de là que l'on peut commencer à construire avec eux les concepts et théories mathématiques. Mais cela ne peut se faire que par étapes. Il faut passer par ce que Freudenthal [Fre83] a proposé d'appeler *les objets mentaux*. De quoi s'agit-il ? Les objets mentaux sont des notions de type mathématique et qui soit appartiennent à la pensée commune, soit sont intermédiaires entre celle-ci et les

¹⁶ Dans [Bko91] Chap. 12, on trouvera une explication détaillée, avec d'autres exemples, de ces seuils, de leurs caractéristiques et des raisons de leur existence (pourquoi les mathématiques constituées sont-elles *nécessairement* loin de la pensée commune ?).

mathématiques constituées. On compte parmi eux par exemple les nombres naïfs évoqués ci-dessus, complétés par ces mêmes nombres munis d'un signe moins, les fractions (pas les nombres rationnels), les aires de polygones exprimées en nombres naïfs, l'aire πr^2 du cercle où $\pi = 3,14$ et r est un nombre naïf, les volumes d'objets simples, les angles mesurés au rapporteur, les vitesses de mouvements uniformes, certaines formes élémentaires de raisonnement. Les objets mentaux sont les instruments de la pensée mathématique en formation. Ils servent à comprendre et organiser la masse des phénomènes qui surgissent dès qu'on se pose, dans des contextes familiers, des questions qui vont « vers les mathématiques ».

Dans ce qui suit, nous opposerons le terme *objet mental* à celui de *concept* (objet techniquement défini dans une théorie axiomatisée). Insistons sur ce fait essentiel, qui n'a pas toujours été pleinement reconnu : on ne peut pas commencer l'enseignement par les concepts. Ceux-ci constituent un objectif (du moins pour certains élèves) et les objets mentaux sont un chemin pour y parvenir. Le plus souvent, les élèves à qui on tente d'enseigner les concepts sans passer par les objets mentaux ne comprennent pas ce qu'on leur veut. Ils arrivent au terme de leurs études avec un bagage négligeable et le sentiment que les mathématiques sont une science arbitraire. Ceux au contraire qui ont travaillé sérieusement à partir des objets mentaux, soit quittent l'école à ce stade avec un bagage intéressant et utile¹⁷, soit abordent les mathématiques plus générales et plus techniques avec une bonne préparation : ils ont observé et compris beaucoup de phénomènes et rencontré des questions qui appellent des développements mathématiques approfondis ; ils ont accumulé des sources d'intuition pour la suite de leurs études.

Négliger la construction par étapes des objets mentaux peut prendre deux formes. La première est radicale et nous l'avons évoquée ci-dessus. Elle consiste à écarter les objets mentaux (réputés mal bâtis) et ne plus s'occuper que des systèmes axiomatiques et des concepts, quitte à les illustrer familièrement. C'était l'option des « mathématiques modernes » en 1970.

La seconde, plus répandue de nos jours, est plus mitigée, et nous y sommes telle-

¹⁷ H. Freudenthal (dans [Fre83]) « I speak of the constitution of mental objects, which in my view precedes concept attainment and which can be highly effective even if it is not followed by concept attainment .» (Je parle de la constitution des objets mentaux qui dans mon opinion précède l'acquisition des concepts et qui peut être très efficace même si elle n'est pas suivie par l'acquisition des concepts).

ment habitués qu'elle est difficile à discerner. Expliquons-la. Les objets mentaux et les concepts sont avant tout des instruments pour réfléchir, raisonner, démontrer. Or des instruments trop généraux ou trop élaborés fonctionnent mal entre des mains encore peu expertes. Comme le dit M. Kline¹⁸ : « Avant que l'on puisse apprécier une formulation précise d'un concept ou théorème, on doit savoir quelle idée est formulée et *quelles exceptions et pièges les termes utilisés tentent d'éviter*. ».

Or ce n'est pas toujours dans cet ordre que les choses se passent. Il arrive qu'on enseigne des concepts importants, à forte connotation technique, dans des contextes pauvres, de sorte que les élèves ne peuvent pas saisir les raisons de cette technicité. En voici deux exemples.

Le calcul sur les nombres relatifs avec la fameuse règle des signes ne devient réellement utile que lorsqu'il permet des résultats tels que :

- résoudre n'importe quelle équation (ou inéquation) du premier degré ;
- représenter une droite dans un système de coordonnées à l'aide d'une seule équation ;
- donner une seule formule pour résoudre l'équation générale du second degré¹⁹.

Si on enseigne ce calcul prématurément, on ne peut pas montrer sa raison d'être. On en est réduit à proposer des trucs pour le faire avaler, puis des exercices de routine, ce qui est malsain.

Deuxième exemple : si on enseigne le concept de limite en (ε, δ) plusieurs semaines avant celui de dérivée et en ne l'appliquant qu'à des fonctions continues ou possédant des discontinuités banales, on n'en montre pas la véritable pertinence. Ce que l'on produit ainsi est un discours inutilement compliqué sur une chose simple.

Ainsi, notre enseignement est assez souvent une entreprise de conceptualisation prématurée. On doit à I. Lakatos [Lak84] d'avoir montré que dans l'histoire toute adaptation ou mutation d'un concept, toute technicité nouvelle dont on le dote, répond à des exigences dans des problèmes, c'est-à-dire dans des raisonnements, des preuves. Il appelle *proof generated concepts* les concepts ainsi construits pour permettre une démonstration.

¹⁸ « Before one can appreciate a precise formulation of a concept or theorem, he must know what idea is being formulated and *what exceptions and pitfalls the wording is trying to avoid* » (cf. [Kli77]. C'est nous qui soulignons.).

¹⁹ Le lecteur est invité à chercher les équations d'une droite dans un plan rapporté à quatre demi-axes positifs, ou encore à retrouver les trois formules d'avant Stevin pour résoudre sans nombres négatifs une équation du deuxième degré quelconque.

Lakatos remarque aussi, à la fin du même ouvrage, que l'on enseigne souvent des concepts longtemps avant d'en montrer le véritable usage. Il propose d'appeler *heuristique* un enseignement qui s'efforce de rapprocher la construction des concepts des chantiers de preuves où ils sont nécessaires ou au moins très utiles. Un tel enseignement tend à répondre par avance à la question si fréquente : à quoi ça sert ?

Pour conclure cette section, reprenons les messages concordants de Freudenthal et Lakatos : *des objets mentaux avant des concepts, et des concepts motivés par les progrès de la pensée.*

Ainsi, avant d'arriver aux grandes structures axiomatiques, l'enseignement doit passer par des mathématiques en construction, celles qu'E. Wittman et G. Müller [Wit87] appellent *informelles*. Ces auteurs font à leur sujet une remarque importante : ces mathématiques sont trop peu étudiées. Nous tirerions grand profit de documents *qui n'existent pas aujourd'hui* : «des présentations d'ensemble informelles de l'arithmétique, l'algèbre linéaire, la «stochastique» élémentaire et l'analyse élémentaire».

2.3.2 Un apprentissage en spirale

Repartons de cette option essentielle : il faut passer par des objets mentaux avant d'arriver aux concepts. Mais la distinction entre les deux n'est pas tranchée. Il n'y a pas d'un côté des objets mentaux clairement reconnaissables, puis à la suite d'une unique mutation, des concepts inscrits dans les mathématiques constituées. Revenons à l'intention première de cette étude : examiner l'apprentissage des mathématiques dans toute son extension, de la prime enfance à l'âge adulte. Même si le message de J. Piaget [Pia64] est aujourd'hui critiqué et que ses conclusions ont été améliorées, son message principal demeure. L'intelligence du bébé, puis de l'enfant et de l'adolescent se développe en une succession d'étapes que l'on peut appeler sensori-motrice, intuitive, opératoire et rationnelle. Or à travers toutes ces étapes, les objets mathématiques sont vus et revus, enrichis, structurés et restructurés. Aucun d'eux n'est acquis d'emblée.

L'expérience la plus commune prouve que, même lorsqu'il atteint l'âge de la pensée dite rationnelle, l'enfant n'a pas soudain accès aux concepts mathématiques (toujours au sens précisé ci-dessus). Il les acquiert par approximations successives et mutations, pour répondre aux besoins d'une pensée de plus en plus complexe et qui

appelle ces changements. Ou bien alors il passe à côté et s'en va dégoûté des mathématiques.

Par l'enseignement dit *en spirale*, on prend en compte et organise cette construction (reconstruction) par étapes des mathématiques dans chaque esprit. Chaque question importante est étudiée plusieurs fois, et chaque fois on en découvre de nouvelles facettes, on l'élabore davantage. Il faut pour cela programmer des suites de situations-problèmes de complexité croissante et qui motivent à chaque étape la montée d'un degré dans l'échelle de sophistication mathématique²⁰.

L'élaboration au cours des études d'une pensée mathématique de plus en plus élaborée et efficace ne se juge pas seulement sur l'accumulation des acquis théoriques, mais encore sur le progrès des modes de raisonnement. Les Chapitres 4 à 9 de cette étude montreront, pour les diverses matières mathématiques, le passage des constats d'évidences intuitives aux inférences simples (si je fais ceci, j'obtiens cela parce que ...), aux enchaînements d'inférences simples formant une preuve, puis aux enchaînements de preuves dans des îlots déductifs de taille croissante, pour aboutir enfin aux théories.

Un dernier fil conducteur, tant pour observer que pour organiser l'apprentissage des mathématiques d'un bout à l'autre de la jeunesse est celui des *acquis méthodologiques* sur lequel G. Polya (cf. [Pol45]) a tant insisté. Quand une recherche est terminée, il est utile d'en reparcourir en pensée les péripéties en se demandant quelles tentatives ont été fructueuses et pourraient inspirer la solution de nouveaux problèmes, et quels essais au contraire ont tourné court et pourquoi. L'objectif premier de l'apprentissage des mathématiques est moins d'accumuler des connaissances théoriques que d'apprendre à penser mathématiquement, même s'il ne faut pas oublier qu'on ne peut penser mathématiquement sans connaissances théoriques.

Les acquis méthodologiques dessinent aussi une perspective de l'apprentissage dans la mesure où, dans le développement de la pensée mathématique, ce qui est méthode à un stade devient souvent objet de pensée et de recherche au stade suivant. Tel est le cas par exemple lorsque les propriétés de combinatoire deviennent objet de réflexion après avoir servi à résoudre des problèmes de probabilité, ou lorsqu'on étudie les intégrales après s'en être servi pour calculer des aires.

²⁰ Sur cette idée d'enseignement en spirale, on consultera utilement l'exposé de F. Buekenhout [Bue82] qui la développe pour le cas de la géométrie.

LES MATHÉMATIQUES DU CITOYEN

3.1 Vivre dans la société et contribuer à son évolution

Tout être humain vit dans une société organisée, plus ou moins développée, plus ou moins démocratique. Il habite un logement, il agit, étudie, travaille ou chôme dans un village ou une ville, selon un horaire ou un calendrier déterminé, il se déplace à pied ou autrement. Il est consommateur de biens, de services, de média, cible de la publicité, assuré. Il bénéficie ou pâtit de la politique économique et sociale. Il est contribuable, électeur et éventuellement éligible. Il doit manier les terminaux de machines diverses. Si c'est son goût, il est bricoleur, jardinier, amateur de sports, joueur de cartes ou de Lotto.

Pour tout cela, pour être à l'aise dans cette société de plus en plus technique, il doit savoir lire et écrire, et un peu plus, mais combien plus ? Il doit savoir compter et calculer, et un peu plus, mais ici aussi combien plus ?

Bien sûr certains citoyens ont besoin de connaissances spécifiques pour exercer un métier donné. Nous ne visons pas ici ces connaissances particulières et techniques, mais bien celles qui permettent à chacune et chacun non seulement d'agir à l'aise dans la société, mais encore de « pratiquer une citoyenneté responsable » dans une société démocratique. Les citoyens doivent comprendre les rouages de plus en plus complexes de la société, car c'est d'eux que dépend son évolution. La démocratie serait menacée si les savoirs d'intérêt général avaient tendance à se concentrer dans une partie seulement de la population.

3.2 Des savoirs qui se démultiplient

On peut bien entendu tenter de dresser une liste des notions mathématiques nécessaires, ou simplement utiles, dans les diverses circonstances de la vie individuelle, sociale et politique évoquées ci-dessus. Mais le bagage minimal du citoyen ne peut se ramener à cela. Il ne suffit pas de lui fournir une boîte d'outils à usages particuliers définis une fois pour toutes.

Pour progresser dans cette société et contribuer à son évolution, le citoyen a besoin, par delà tous les savoirs d'utilisation immédiate, de connaissances susceptibles de se « démultiplier ». Il faut qu'il soit à même d'approfondir sa formation, de dépasser les niveaux d'abstraction qu'il a déjà atteints, de suivre avec profit, sans découragement, des formations nouvelles.

On dit souvent que pour survivre et progresser dans un monde en évolution, il est plus important d'apprendre à apprendre, que tout simplement d'apprendre. Cette formule séduisante peut être trompeuse. A première vue, elle donne à penser qu'apprendre à apprendre, ce serait acquérir une méthode d'étude indépendante de tout apprentissage particulier. Or une telle méthode n'existe pas. Des connaissances mathématiques nouvelles s'appuient presque toujours sur des connaissances antérieures et s'articulent à elles pour former un tout structuré. Les connaissances antérieures, tout autant qu'une méthode d'étude efficace, sont nécessaires pour progresser en mathématiques. Les connaissances contribuent de manière essentielle à la capacité de penser mathématiquement et de progresser dans cette capacité. Certaines connaissances clés y contribuent plus que d'autres et sont comme des tremplins de départ vers de nouvelles acquisitions. Nous essayerons ci-après de les discerner une par une, car ce sont celles qu'il faut privilégier dans la formation minimale des citoyens.

3.3 Un esprit confiant et actif

Pour nous aider à concevoir une formation mathématique minimale, essayons maintenant de voir ce qui manque le plus à beaucoup de citoyens d'aujourd'hui. Force est bien de rappeler l'omniprésence dans la société de l'analphabétisme mathématique. Un très grand nombre d'adultes n'ont jamais réussi à apprendre un peu de mathématiques intéressantes par delà les opérations arithmétiques. Ils avouent leur

incapacité (« je suis nul en math. ! »), prennent peur et déclarent forfait devant des questions même très simples.

On peut espérer changer cette situation désolante, tout en sachant bien qu'un si grand mal appelle un grand remède, et que le changement sera lent. Le minimum à atteindre serait que toute personne ait vaincu sa peur des mathématiques, ait appris à aborder chaque question avec confiance, ait le réflexe, quand les choses ne sont pas claires, d'explorer, d'expérimenter, de chercher des régularités, d'examiner des cas particuliers, d'essayer les outils disponibles, de se poser des questions, d'en poser à d'autres. Ceci implique de mettre fin à la pratique encore trop répandue qui consiste à enseigner les mathématiques comme une discipline où il faut toujours trouver l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode, celle que le professeur a exposée.

Le problème est de développer chez chacun une personnalité intellectuelle confiante et active en mathématiques comme dans tous les autres domaines. On ne peut atteindre cet objectif qu'en amenant chacun à penser de manière autonome, à communiquer avec d'autres, à enregistrer des succès personnels sur des problèmes à sa mesure et à s'attribuer ces succès.

3.4 Un minimum culturel ?

Prenons le terme culture dans un des sens que lui attribue le Robert : « Ensemble des connaissances acquises qui permettent de développer le sens critique, le goût, le jugement ». Si la culture est cela, pourquoi *ajouter du culturel* aux mathématiques ? En effet, les connaissances mathématiques, même très élémentaires, appartiennent à la culture : elles servent à exprimer la structure logique des choses et des phénomènes et sont par là un instrument du sens critique ; elles développent le goût des raisonnements qui allient la sobriété, l'intuition et la généralité, ou en termes plus brefs, des raisonnements élégants. Plus d'un lecteur pensera sans doute qu'il s'agit là d'un registre des mathématiques réservé « à une élite ». Il n'en est rien. Nous reviendrons sur ce point dans l'appendice de ce chapitre, en nous appuyant sur un exemple.

Puisque les connaissances mathématiques, même assez modestes, que l'on souhaite à tout citoyen, appartiennent à la culture, ce dont l'enseignement a besoin n'est donc pas d'un supplément culturel, mais d'une attention particulière à la portée culturelle des connaissances enseignées, c'est-à-dire à la possibilité qu'on y trouve de

développer le sens critique, le goût et le jugement.

Mais le terme culture renvoie aussi aux conquêtes intellectuelles de nos ancêtres. Nous les avons reçues en héritage et nous en sommes redevables à nos descendants. L'enseignement a pour mission de transmettre l'expérience de l'humanité à chaque génération nouvelle. Il importe que les jeunes le sachent et en prennent conscience. Il ne faut pas leur laisser croire que les mathématiques sont un monument intemporel. Il ne manque pas d'occasions de leur montrer que certaines des connaissances aujourd'hui les plus familières, par exemple les nombres décimaux à virgule, ont été acquises au prix de longs tâtonnements, en dépit de leur apparente simplicité.

3.5 Un programme pour les citoyens ?

Essayons maintenant de cerner les matières susceptibles de constituer le bagage du citoyen. Nous marquons d'un D en marge les connaissances qui possèdent le plus visiblement « un pouvoir démultiplicateur » (cf. n°3.2), celles qui, ayant servi à organiser des contextes significatifs, peuvent le mieux servir de point d'appui à des connaissances nouvelles plus élaborées.

3.5.1 Grandeurs

D • Idée fondamentale du mesurage (choisir une unité, la « reporter », évaluer le reste à l'aide d'une sous-unité) ;

- mesures de longueurs, aires, volumes, capacités, masses, angles ;

D • estimations, encadrements, estimation d'erreurs de mesure ;

- systèmes de mesure ;
- aire du rectangle, du triangle, du cercle ;
- fractionnement de grandeurs (numérateurs et dénominateurs tout petits) ;

D • reconnaissance des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité ; tableau de proportionnalité ;

- grandeurs-quotients : prix au m^2 , au kg, vitesse, tours par seconde, masse volumique.

3.5.2 Nombres

D • Numération décimale ; nombres décimaux à virgule ;

- les quatre opérations sur des nombres à deux ou trois chiffres ;

D • calcul mental : ce qui est nécessaire au contrôle d'une calculatrice « 4 opérations » ;

- calculatrice « 4 opérations » ;
- arrondi, erreur d'arrondi ;
- pourcentages et relation avec les fractions simples (par exemple $80\% = 4/5$) ;

D • nombres entiers et calcul sur les nombres entiers ;

- puissances de 10.

3.5.3 Géométrie

- Dessins de triangles, quadrilatères, cercles ;
- développement de solides simples ;

D • projections orthogonales, coordonnées ;

- lecture de perspectives cavalières ;
- similitude, représentations à l'échelle ;
- rapport des longueurs, aires et volumes dans les similitudes ;
- motifs répétitifs, isométries simples ;

D • propriétés d'incidence, parallélisme, orthogonalité ;

- médiatrice et bissectrice ;

D • théorèmes de Thalès et de Pythagore, distances ;

- trigonométrie du triangle rectangle ;

D • repérages, systèmes de coordonnées.

3.5.4 Algèbre

D • Notion de fonction ;

D • tableaux, graphiques, formules ;

D • mise en équation de situations simples ;

- fonctions polynomiales, pente et croissance ;

D • suites arithmétiques et géométriques (croissance exponentielle).

3.5.5 Traitement de données

D • Tableaux et graphiques divers ;

D • moyenne, médiane et leurs usages spécifiques ; quartiles ;

D • fréquence et probabilité ;

- probabilités totale et composée ;

- combinatoire élémentaire ;
- D • taux de croissance ;
- D • suite temporelle indicée (index des prix) ;
- loterie, sondages, assurances.

3.5.6 Analyse

Pour mémoire

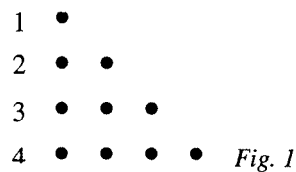
3.6 Appendice : une culture mathématique pour tous

Prenons un exemple, parmi ceux que les manuels proposent aujourd'hui. Il est facile de calculer la somme des nombres naturels de 1 à 4 :

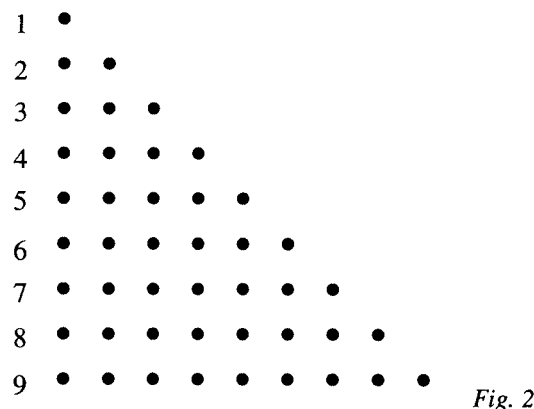
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Jusqu'à 20, cela demande un peu plus de peine. Jusqu'à 1 000, jusqu'à 1 000 000, cela devient vite pratiquement impossible, même avec une calculatrice.

On peut alors se mettre à dessiner la situation, peut-être parce qu'on a compris en traitant d'autres questions, que les petits dessins sont parfois éclairants. On dessine $1 + 2 + 3 + 4$ comme sur la *Fig. 1*.



Chaque unité est représentée par un point. Tous les points se mettent en triangle. Si on veut aller plus loin, par exemple jusque 9, on y arrive sans peine (*Fig. 2*).



Toutefois autant renoncer tout de suite à dessiner le triangle jusque 1 000, et *a fortiori* jusqu'à 1 000 000, d'autant qu'il faudrait ensuite compter tous les points.

Mais on peut continuer à rêver. Le triangle est une forme simple, et avec deux triangles de ce type on fait un rectangle. Revenons à la *Fig. 1* et doublons-la pour en faire un rectangle, comme le montre la *Fig. 3*. Ce rectangle a quatre points en largeur et 5 en longueur.

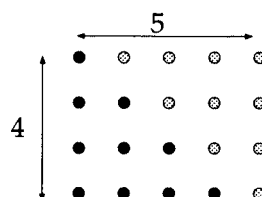


Fig. 3

En tout, il est formé de 20 points (4×5). Donc, la somme $1 + 2 + 3 + 4$, qui y est contenue deux fois, vaut $20 / 2 = 10$.

Ce que l'on a fait et vu là sur le papier, on ne peut pas *le faire* pour des nombres très grands. On ne peut pas continuer *avec un crayon*, pas non plus *avec une calculatrice*. Mais ce qui s'arrête ainsi quand on veut tout faire en détail peut continuer *dans la tête*, grâce à l'idée simple des deux triangles assemblés en rectangle.

On peut imaginer (et esquisser par le dessin (*Fig 4*)) le triangle jusqu'à 1 000 000 accolé à son jumeau.

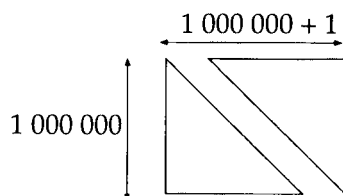


Fig. 4

Et donc la somme des nombres naturels de 1 à 1 000 000 vaut

$$1\,000\,000 \times 1\,000\,001,$$

divisé par 2, soit

$$500\,000\,500\,000.$$

Plus généralement, si n est un nombre naturel quelconque, si grand soit-il, la somme des nombres de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ (*Fig. 5*).

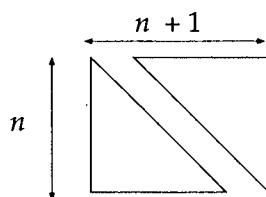


Fig. 5

Les Pythagoriciens du 6^e siècle av. J.-C. connaissaient les nombres triangulaires et d'autres nombres polygonaux. Ils nous ont légué cette idée souvent féconde de trouver des propriétés des nombres en les représentant géométriquement.

Ce bref exemple, parmi une multitude d'autres possibles, illustre notre propos du n°3.4 sur le minimum culturel. La démonstration ci-dessus est élégante par sa sobriété (l'idée simple d'accoler deux triangles), son caractère intuitif (les images des triangles et du rectangle) et sa généralité (l'esprit empêtré dans les nombres croissants accède soudain à tous les nombres naturels). Qui plus est, il n'est pas indifférent que cette propriété des nombres triangulaires nous vienne d'un passé lointain, dont on peut parler un peu davantage aux élèves. Dans l'histoire de l'humanité, la conquête des nombres vaut bien celle des Amériques.

GRANDEURS

4.1 Vue d'ensemble

4.1.0 Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Soient par exemple les objets pesants. Si on en considère deux, on peut les poser sur les plateaux d'une balance à fléau pour vérifier s'ils équilibrent la balance, ou s'ils la déséquilibrent et dans quel sens. Le résultat d'une telle observation s'exprime le plus souvent par des adjectifs comparatifs : on dit qu'un objet est *plus lourd*, ou *moins lourd*, ou *plus léger* ; l'expression *également lourd* est moins fréquente et on dira plus volontiers que les deux objets ont *même masse* (même poids¹). Quoiqu'il en soit, ce dont il est question à ce premier stade, ce sont des *objets* et une *relation entre des objets*. Cette relation est souvent dite *qualitative*, pour souligner le fait qu'il n'y intervient aucun nombre, aucune mesure.

C'est comme exemple que nous venons d'évoquer l'ensemble des objets pesants. Une explication analogue vaut pour les objets allongés que l'on peut comparer en les portant l'un sur l'autre pour voir si l'un est *plus long*, ou *plus court*, ou *de même longueur* que l'autre. Et de même pour les surfaces, ou les objets volumineux, ou les intervalles de temps, avec dans chaque cas une manœuvre de comparaison appropriée, plus ou moins difficile.

¹ La distinction entre *masse* et *poids* n'est pas facile. On peut toutefois la négliger sans dommage dans une première approche des grandeurs.

Pour expliquer ce qu'est une grandeur, nous allons devoir parler *abstraitement* d'une classe d'objets que l'on peut comparer entre eux relativement à une propriété qu'ils posséderaient en commun : *une certaine grandeur*. Ci-après, nous remplaçons donc les locutions *plus lourd*, *plus léger*, *plus long*, *plus court*, etc. par les expressions génériques : *plus grand*, *plus petit* (ou *moins grand*)².

Une question se pose d'emblée : comment définir le terme *grandeur* ? Les dictionnaires donnent à cette question des réponses décevantes (qui tournent en rond). En fait, pour l'usage courant et l'apprentissage mathématique à son début, il n'est pas nécessaire de disposer d'une définition du mot grandeur. Il suffit d'accepter que dans toute opération de comparaison, on peut toujours remplacer un objet par un autre de même grandeur³. Tant que l'on en reste aux opérations de comparaison, aucun nombre, et en particulier aucune mesure, n'est en jeu.

Les objets se prêtent aussi souvent à l'*addition* ⁴. Par exemple on rassemble deux objets pesants (on peut penser à deux boules de plasticine), on ajoute un certain volume d'eau à un autre, on met deux tiges bout à bout (nous négligeons ici le problème de la ligature), etc. Dans les opérations d'addition, comme dans celles de comparaison, on ne change jamais le résultat si on remplace un objet par un autre de même grandeur. C'est pourquoi, au lieu de dire qu'on *additionne des objets*, on dit souvent qu'on *additionne des grandeurs* (selon le cas, des masses, des longueurs, etc.). Il va de soi pourtant que toute opération concrète de comparaison ou d'addition s'effectue avec des objets.

Nous pouvons maintenant étendre une de nos remarques ci-dessus : tant que l'on en reste aux opérations de comparaison et d'addition, aucun nombre ne se mêle à l'idée de grandeur, même pas les nombres naturels⁵.

² Soulignons que ce vocabulaire nous sert à l'explication théorique de la notion de grandeur. Dans la pratique, on a affaire à une seule sorte de grandeur à la fois, et il vaut mieux utiliser un vocabulaire adapté à chaque cas : dire *plus lourd* ou *plus léger*, *plus long*, *moins long*, *plus court*, *plus étendu*, *plus gros*, *moins gros*, etc.

³ Dans les mathématiques un peu plus avancées, il est commode de définir la grandeur d'un objet comme la classe des objets qui lui sont équivalents. Le reste du chapitre ne s'appuie pas sur cette définition.

⁴ Nous n'utilisons l'expression *additionner deux objets* que pour les besoins de l'explication théorique. Dans la pratique, il vaut mieux caractériser chaque fois la manipulation : ajouter le contenu d'un récipient dans un autre, juxtaposer deux rectangles pour faire une surface plus grande, etc.

⁵ Et pourtant, les comparaisons et additions des grandeurs obéissent aux mêmes lois (transitivité, commutativité, associativité, etc. que les nombres positifs). C'est pourquoi la comparaison et l'addition des grandeurs servent de points d'appui dans la construction des nombres.

Toutefois, les nombres naturels ne tardent pas à intervenir. En effet, on peut *multiplier* un objet par un naturel n (mettre n tiges équivalentes bout à bout), et aussi le *diviser* par un naturel n (le couper en n morceaux équivalents). A ce stade également, on peut remplacer tout objet par un autre équivalent sans affecter le résultat de la multiplication ou de la division. C'est pourquoi on a pris l'habitude de dire que l'on multiplie ou que l'on divise une grandeur.

Tant que l'on en reste aux opérations de comparaison, addition, multiplication par un naturel et division par un naturel, seuls les naturels sont en jeu, et la notion de *mesure n'est pas présente* ⁶.

Mais cette notion apparaît enfin. Moyennant le choix d'un objet-unité, on peut mesurer un objet par des manœuvres appropriées : par exemple, pour le cas d'une longueur, report de l'objet-unité jusqu'à ne laisser paraître qu'un reste inférieur à l'objet-unité, choix d'un objet sous-unité et report de celui-ci le long du reste, et ainsi de suite (éventuellement⁷). Dans les opérations de mesure aussi, on peut toujours remplacer l'objet que l'on mesure et l'objet-unité par des objets équivalents, si bien que l'on parle sans ambiguïté de mesurer non plus un objet, mais une grandeur, avec non plus un objet-unité, mais une unité. Mais pratiquement une opération de mesure s'effectue toujours avec des objets.

La mesure introduit dans l'étude des grandeurs un point de vue quantitatif. Par ailleurs, elle amène une difficulté nouvelle, à savoir qu'il y a autant de mesures possibles d'une grandeur qu'il y a de choix possibles pour l'unité de mesure, et ce choix est infini. A ce stade de notre exposé, nous avons donc rencontré deux libertés : d'abord celle de remplacer un objet par un autre équivalent, et ensuite celle de remplacer une unité de mesure par une autre.

Même si on se borne à considérer une seule unité, la mesure est un type d'opération *très élaboré*. Il suffit pour s'en rendre compte de réaliser que les mesures engendrent tout le système des nombres rationnels et irrationnels (positifs⁸).

Les notions d'objet, de grandeur et de mesure introduites jusqu'ici ont suscité dans le passé des controverses terminologiques assez vives. Nous espérons que les explications ci-dessus suffiront à les clarifier. Pour plus de sûreté, reprenons-les succinctement.

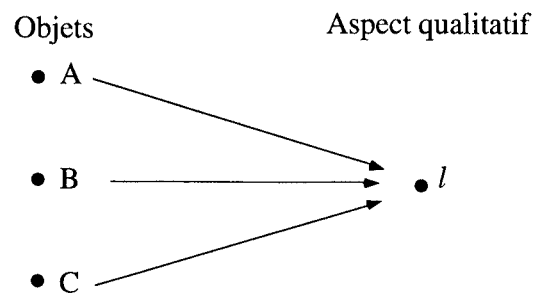
⁶ Nous soulignons cela, parce qu'il est très commun que l'idée de grandeur évoque celle de mesure, et que l'on confonde *grandeur* et *mesure de grandeur*.

⁷ Sur la construction par étapes de l'idée de mesurage, cf. n°4.2.4.

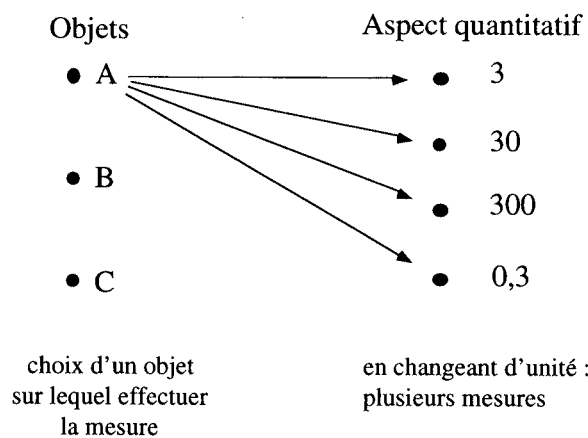
⁸ Les nombres négatifs apparaissent avec les repérages.

Des grandeurs mesurées telles que 3 cm, 20 kg ou 15 minutes ont un double aspect : qualitatif par la mention de l'unité qui renvoie à un type d'objet (long, lourd, qui dure,...) et quantitatif par la présence de la mesure. Suivons maintenant, à titre d'exemple, la construction de la notion de longueur.

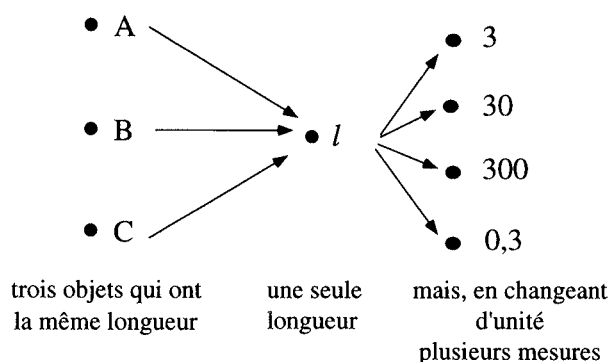
a) Il y a d'abord des objets, et on en repère qui ont même longueur :



b) La longueur est une qualité qu'ils ont en commun. Ensuite on mesure cette longueur sur *un de ces objets* équivalents, mais éventuellement dans diverses unités, ce qui fournit plusieurs mesures :



c) On arrive enfin à une vue d'ensemble dans laquelle, selon le vocabulaire courant, c'est la grandeur même que l'on mesure (même si les opérations concrètes de mesure s'effectuent avec des objets) :



On écrit : $l = 0,3 \text{ m} = 3 \text{ dm} = 30 \text{ cm} = 300 \text{ mm}$, avec comme signification : voici des écritures différentes d'une même longueur.

Ainsi les longueurs deviennent progressivement des objets familiers qui vont constituer un support concret pour effectuer des opérations sur des nombres.

Dans ce qui précède, nous avons pris le terme *grandeur* dans son *sens étroit*⁹ : nous n'avons pas parlé de grandeurs positives ou négatives, ni de grandeurs vectorielles, ni d'aucun autre type de grandeur qui déborde l'exemple canonique des masses ou celui des longueurs. En d'autres termes, une grandeur au sens adopté jusqu'ici est caractérisée par un ordre total, une addition (l'addition répétée engendre la multiplication par un naturel), et la division en n parties égales (où n est un nombre naturel).

Il est intéressant de comparer les grandeurs (au sens étroit) aux ensembles finis. On munit ceux-ci d'un ordre total (la comparaison se faisant par essai de mise en correspondance des deux ensembles terme à terme) et d'une addition (par réunion d'ensembles disjoints). Par contre, un ensemble fini ne peut être partagé en n parts égales que si n divise le nombre d'éléments de l'ensemble. Les ensembles finis ne sont pas, comme les grandeurs (au sens étroit), indéfiniment divisibles.

Par ailleurs, le terme *grandeur* n'étant plus usité dans les mathématiques d'aujourd'hui, il est opportun de souligner que les grandeurs peuvent être considérées à deux niveaux : d'une part dans le quotidien et les sciences de la nature, d'autre part dans un cadre défini mathématiquement. Le second niveau modélise le premier. On ne peut comprendre le présent exposé si l'on pose *a priori* que les grandeurs sont une affaire « de physiciens ». Répétons que les grandeurs envisagées ici sont, *du côté mathématique des choses*, des ensembles munis d'un ordre total, d'une addition et d'une division par un naturel n .

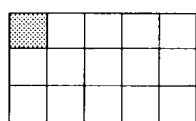
⁹ C'est le sens original, celui d'Aristote et Euclide.

Ceci dit, il est vrai que la mesure des grandeurs ne conduit chez les physiciens qu'aux décimaux limités. Par contre, la mesure idéalisée des grandeurs conduit en mathématiques aux nombres réels positifs. Un problème canonique à cet égard est la mesure de la diagonale d'un carré lorsqu'on prend son côté pour unité¹⁰.

Pour terminer cet exposé sur les grandeurs et mesures, il nous reste à expliquer la construction des *grandeurs composées*. Ceci nous amènera à déborder du domaine des grandeurs au sens étroit pour parler de vitesses, de prix, etc.¹¹. Ces mesures sont celles que l'on obtient non plus par report de l'unité, encadrement, recours à des sous-unités, etc., mais bien en mesurant d'abord d'autres grandeurs que la grandeur visée et en appliquant ensuite une formule. L'exemple le plus simple est celui des rectangles : on obtient le plus souvent l'aire d'un rectangle non pas en le pavant de petits carrés, mais plutôt en mesurant les longueurs de ses côtés, puis en faisant le produit de ces longueurs. Autre exemple typique : on ne mesure pas une vitesse en reportant, ce qui serait bien difficile, des unités de vitesse, mais bien en mesurant la distance parcourue et la durée du mouvement, puis en divisant l'une par l'autre.

Voyons sur quelques exemples comment on construit les grandeurs composées.

a) L'aire d'un rectangle s'obtient d'abord en comptant des carrés-unités (*Fig. 1*).

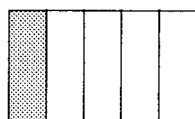


$$1 \text{ carré} \times 15 = 15 \text{ carrés}$$

Fig. 1

Ensuite on l'évalue plus rapidement (surtout si le nombre des carrés-unités est grand) en comptant par bandes verticales ou horizontales (*Fig. 2*).

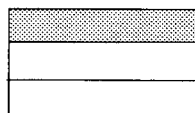
Dénombrer par bandes verticales



1 bande
5 bandes

3 carrés
3 carrés $\times$ 5

ou dénombrer par bandes horizontales



5 carrés $\times$ 3

Fig. 2

¹⁰ Sur la construction mathématique des grandeurs, cf. [Rou92] et [Rou94].

¹¹ Sur les précautions à prendre pour assimiler une vitesse à une grandeur, cf. [Rou92], p.242 et ss.

Ensuite vient une étape d'abstraction : remplacer un comptage astucieux des unités d'aires par un produit de deux longueurs (Fig. 3).



5 cm $\times$ 3 cm
Produit de deux longueurs

Fig. 3

Et comme toutes ces mesures sont équivalentes, on arrive finalement à l'égalité

$$5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2.$$

b) Deuxième exemple de grandeur composée : la vitesse d'un mobile. Nous nous bornons ici au cas d'un mouvement uniforme (ou que l'on supposera tel).

Une voiture parcourt 180 km en 3 heures. Sa vitesse est le nombre de km qu'elle fait en 1 heure. On peut dresser un petit tableau de proportionnalité (Tabl. 1).

: 3	
3 heures	1 heure
180 km	60 km
: 3	

Tabl. 1

On passe de 3 heures à 1 heure en divisant par 3, et donc de même de 180 km à 60 km en divisant par 3. La voiture fait 60 km en une heure. L'opérateur :3 dans le tableau est ce que l'on appelle un rapport *interne* (parce qu'il s'établit entre grandeurs de même espèce : deux temps, deux distances).

Mais comme le montre le Tabl. 2, on peut aussi passer directement de la première ligne à la seconde à l'aide du rapport *externe*, en l'occurrence l'opérateur $\times 60 \text{ km/h}$.

$\times 60 \text{ km/h}$	<table><tr><td>3 heures</td><td>1 heure</td></tr><tr><td>180 km</td><td>60 km</td></tr></table>	3 heures	1 heure	180 km	60 km	$\times 60 \text{ km/h}$
3 heures	1 heure					
180 km	60 km					

Tabl. 2

On pourra écrire

$$180 \text{ km} = 60 \text{ km/h} \times 3 \text{ h},$$

et plus tard, pour calculer la distance parcourue pendant un temps quelconque :

$$d = v t,$$

ou encore, en rappelant les unités choisies,

$$d \text{ (km)} = v \text{ (km/h)} \times t \text{ (h)}.$$

c) L'exemple des prix obéit au même schéma que celui des vitesses. Par exemple, on achète 3 unités d'une denrée à 5 F pièce. Le *Tabl. 3* résout le problème en passant par le rapport *interne*.

1 pièce	3 pièces
5 Fr	15 Fr

Tabl. 3

Le *Tabl. 4* montre comment le concept de *prix à la pièce* se conceptualise sous forme de rapport externe.

1 pièce	3 pièces
5 Fr	15 Fr

Tabl. 4

Le prix est de 5 F/pièce, le prix total est donné par $5 \text{ F/pièce} \times 3 \text{ pièces} = 15 \text{ F}$.

On réalise, au terme de cet exposé, que les grandeurs existent *d'abord* indépendamment des nombres. Elles rejoignent les nombres (positifs) par l'intermédiaire de la notion (très élaborée) de mesure. Les grandeurs sont proches des perceptions quotidiennes et des manipulations. Les nombres, qui s'écrivent avec des symboles (les chiffres), sont déjà plus loin des choses. Ils sont, dans certains types de questions, des substituts mentaux des choses : au lieu de comparer des baguettes (des segments), on compare leurs mesures, etc. Dans la construction des mathématiques à partir des actions et des notions quotidiennes, les objets et les grandeurs sont la première marche d'un escalier qui en comporte trois, dans une échelle d'abstraction croissante. La deuxième marche est celle des mesures et des nombres. La troisième est celle où l'on remplace les nombres par des variables algébriques, ce que nous aborderons au Chapitre 7.

Pour une étude plus détaillée des grandeurs, voir [Blo82], [Leb75], [Rou92], [Rou94].

4.1.1 Les grandeurs au niveau de base

Les grandeurs sont omniprésentes dans le quotidien. On compare sans cesse des objets en utilisant des locutions du type : plus grand, plus petit, plus lourd, moins

lourd, plus léger, de même poids, plus haut, moins haut, de même taille, etc. De même on ajoute des objets et des grandeurs, on les augmente et on les fractionne : on prend deux paquets de farine, une demi-bouteille de limonade. On parle du temps pour aller à la gare, et on le double pour l'aller et retour.

La plupart des opérations quotidiennes sur les grandeurs sont faciles : on ne se soucie pas, dans la vie de tous les jours, de comparer le volume d'un cône à celui d'un cylindre, non plus que la distance entre la terre et la lune à la distance entre la terre et le soleil.

Les grandeurs au niveau de base, ce sont précisément les premiers phénomènes qui se présentent lorsqu'on compare, additionne, fractionne et mesure des choses. Ces questions, qui portent en germe des développements physiques et mathématiques importants, sont certes rencontrées souvent dans le quotidien, mais pourtant beaucoup moins qu'autrefois.

En effet, le citoyen du 20^e siècle est abreuvé de mesures de toutes sortes. Mais il ne doit que très rarement manier des grandeurs pour faire lui-même des opérations de mesure : il est entouré d'appareils qui font cela pour lui, vite et bien, et lui fournissent d'emblée l'information chiffrée. Paradoxalement, dans la civilisation d'aujourd'hui, plus on utilise de mesures et moins on en fait soi-même ; et donc on a d'autant moins d'occasions d'apprendre ce qu'est fondamentalement une mesure. La situation à cet égard a beaucoup évolué au cours du 20^e siècle. Que l'on compare simplement, par exemple, le prix des denrées donné automatiquement par une balance électronique à la pesée sur une balance de Roberval, suivie du calcul du prix.

4.1.2 La construction des grandeurs

Le premier apprentissage des grandeurs se fait dès l'âge le plus tendre dans les familles, les crèches et les écoles maternelles. Il est en partie spontané, mais peut être stimulé par du matériel et en particulier des jouets appropriés. L'enfant apprend à utiliser les mots de la langue commune relatifs aux grandeurs des diverses sortes.

A l'école primaire, on apprend non seulement à comparer et à additionner des grandeurs de diverses natures, mais encore à les multiplier par un nombre naturel. Tant que l'on en demeure à ces trois opérations, les ensembles finis peuvent être traités comme des grandeurs (cf. n°4.1.0) : on les compare par bijection, on les additionne en les réunissant, etc.

Mais très tôt on apprend aussi, dans les cas les plus simples, à diviser une grandeur en parts égales. Dans les cas les plus simples, car selon la nature de la grandeur considérée, diviser en parts égales peut s'avérer difficile mathématiquement ou physiquement : que l'on songe au partage d'un segment par application du théorème de Thalès, au partage d'une surface plane de forme compliquée, ou au partage d'un intervalle de temps. Rappelons que le parallélisme entre grandeurs et ensembles finis se termine dès qu'on introduit la division en n parties égales.

Les opérations de multiplication d'une grandeur par un naturel et de fractionnement d'une grandeur conduisent par étapes aux fractions opérateurs et aux nombres rationnels. Les opérations sur ces derniers trouvent leur source dans les opérations sur les grandeurs. Nous y reviendrons au chapitre suivant, qui est consacré aux nombres.

Les mesures des diverses sortes de grandeurs sont aussi introduites à l'école primaire, soit avec des unités de rencontre, soit avec les unités des systèmes officiels (décimal, partiellement¹² sexagésimal pour les temps, les angles) .

Les mesures directes, essentiellement celles des longueurs, masses et temps, sont celles que l'on obtient par report direct de l'unité. En général ce report ne tombe pas juste et ne fournit qu'un encadrement. Il y a un reste, et l'on reporte une sous-unité sur le reste. Si cette dernière opération ne tombe à nouveau pas juste, on poursuit de manière analogue.

À l'école primaire, on arrête le processus assez tôt : pour les élèves, les mesures de longueur par exemple s'arrêtent au millimètre, eu égard aux règles graduées courantes. Il faut vaincre l'illusion qu'il s'agit d'une mesure exacte en évoquant d'une part des instruments gradués plus performants, et d'autre part, en imaginant des processus de mesure qui ne s'arrêtent pas et qui engendrent ainsi une infinité de décimales¹³. Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

Le processus de report de l'unité et de sous-unités fonde l'idée même de mesure, y compris pour les grandeurs beaucoup plus difficiles à mesurer telles que les lignes courbes ainsi que la plupart des aires et des volumes. Par exemple, on n'arrive pas à recouvrir un disque avec des carrés-unités, mais on définit l'aire du disque en s'appuyant sur des recouvrements approximatifs, soit à l'aide de carrés, soit à l'aide de

¹² Car il y a 360° dans un tour complet et 24 heures dans un jour.

¹³ C'est comme cela que H. Lebesgue [Leb75] propose d'introduire les nombres réels.

polygones dont on connaît l'aire. On arrive ainsi aux mesures *indirectes*, qui sont données par des formules (par exemple, pour le disque : πr^2).

Les mesures indirectes sont élaborées une par une, à partir des plus simples (celle du rectangle par exemple), en s'appuyant à chaque étape sur celles qui sont déjà connues et en utilisant quand c'est nécessaire (et comme on vient de l'évoquer pour le disque) des approximations, des encadrements. Cette étude s'étend sur tout le primaire et le secondaire et aboutit au calcul intégral. Nous y revenons aux chapitres 6 (géométrie) et 9 (analyse).

L'étude des mesures englobe aussi celles des changements d'unités et de la proportionnalité inverse : plus l'unité de mesure est grande et plus la mesure est petite. Elle comporte aussi la pratique des estimations, les ordres de grandeur, le choix d'une unité commode et l'appréciation des erreurs de mesure. Ces dernières conduisent à des éléments de statistique descriptive et plus tard (dans le secondaire et au-delà) à l'étude probabiliste des mesures et à l'ajustement de courbes par régression.

La rencontre des erreurs de mesure en physique et ailleurs amène à prendre conscience de la différence entre un objet matériel et un objet mathématique: la longueur mesurée d'un cercle fait à *peu près* $2\pi r$, sa longueur théorique égale $2\pi r$. Les mathématiques, pour s'appuyer sur le raisonnement, ont besoin de définitions univoques. En effet, lorsqu'on dit qu'un segment a une certaine longueur, ou qu'un prisme a un certain volume, cette longueur et ce volume sont, en mathématique, deux nombres entièrement déterminés, même si la longueur d'un trait de crayon ou le volume d'une boîte prismatique ne peuvent jamais être mesurés exactement.

Les grandeurs sont présentes d'un bout à l'autre du secondaire, même si le programme ne les mentionne pas explicitement. Les longueurs, aires et volumes sont associés à des théorèmes géométriques importants, en tout premier lieu ceux de Thalès et de Pythagore. Les démonstrations chinoises du théorème de Pythagore (celles qui utilisent des sortes de puzzles polygonaux, cf. n° 6.3.5) s'appuient sur des fractionnements et des sommes de grandeurs sans aucune considération de nombres ou de symboles. De même, des puzzles appropriés de rectangles ou de parallélépipèdes donnent une représentation (et une preuve « par les grandeurs ») de certaines identités algébriques remarquables (cf. n° 4.3.1). Enfin, d'assez nombreuses sommes de séries infinies peuvent être obtenues en imaginant des segments mis bout à bout ou des polygones de diverses sortes côte à côte (cf. n°4.3.1).

Au cours du secondaire, de nouvelles grandeurs apparaissent, principalement en physique : l'énergie, la charge électrique, le courant, etc. Elles se trouvent dans des formules et sont le plus souvent mesurées indirectement. Chacune d'elles possède des dimensions physiques exprimées à partir des grandeurs fondamentales. Il est important d'adopter un système d'unités cohérent pour toute la physique.

Ces grandeurs nouvelles et les procédés pour les mesurer relèvent naturellement du cours de physique. Il nous semble toutefois qu'en mathématiques on devrait étudier, sur des cas simples, le mécanisme de construction des unités dérivées et l'usage des équations aux dimensions. Souvent dans le cours de mathématiques, on introduit un mouvement en spécifiant l'espace parcouru en fonction du temps comme une fonction réelle d'une variable réelle et sans mentionner aucune unité. On évite ainsi l'étude d'un phénomène géométrique significatif : les compressions du diagramme espace-temps parallèlement aux axes, correspondant aux changements d'unités de temps et de distance. Les élèves ont de la peine à appliquer à des cas concrets une théorie cinématique ainsi construite à l'écart des contingences pratiques.

4.1.3 Les grandeurs approfondies

Comme nous l'avons dit, les grandeurs ne sont plus mentionnées dans les traités de mathématiques d'aujourd'hui. Néanmoins, on apprend en analyse à mesurer des volumes par des intégrales triples, des surfaces par des intégrales de surface et des courbes par des intégrales curvilignes. Ces matières sont bien les héritières des mesures d'aires et de solides de la géométrie élémentaire. Par ailleurs, le chapitre des mathématiques qui s'intitule *théorie de la mesure et de l'intégration* est aussi l'héritier lointain de la théorie des grandeurs. On y apprend à associer un nombre appelé *mesure* (qui partage certaines propriétés de base avec les mesures au sens ordinaire) à des ensembles de points parfois très complexes.

En complétant l'idée de grandeur au sens étroit (cf. n° 4.1.0) par celles d'orientation, de direction, etc., on engendre de nouveaux objets que l'on désigne parfois aussi du nom de grandeur, quoiqu'en y ajoutant un qualificatif : on parle de grandeurs relatives (munies d'un signe), vectorielles, matricielles, etc. L'étude de ces matières est entamée dès l'enseignement secondaire.

Enfin, les systèmes d'unités et les équations aux dimensions demeurent un sujet important dans les cours de physique et dans toutes les techniques étudiées dans l'enseignement supérieur.

4.1.4 Les grandeurs comme forme de pensée

On pourrait dire que les grandeurs et les comptages élémentaires appartiennent à la *pensée mathématique première*, aussi bien dans l'histoire de l'humanité que dans chaque histoire individuelle. Lorsqu'on dit cela, il s'agit bien entendu des phénomènes de base liés aux manipulations d'objets, et non des questions évoluées auxquelles les idées primitives de grandeur et de mesure ont conduit ultérieurement.

Les grandeurs (au sens étroit) représentent le *continu* face au *discret* (ce qui est dénombrable). La pensée conçoit les choses, selon les circonstances, soit comme continues, soit comme discrètes, et il y a une forme d'incompatibilité immédiate entre le continu et le discret. Nous verrons au n°4.1.6 qu'il a fallu des millénaires pour que l'humanité jette un pont entre le discret par excellence (les nombres naturels) et le continu. Ce pont est constitué par les nombres réels, objets mathématiques situés à grande distance de la pensée commune.

Le fait que les grandeurs élémentaires appartiennent à la pensée mathématique première fait qu'elles sont bien souvent le premier recours face à un problème. C'est pour cette raison que les grandeurs sont aussi, bien souvent, le premier recours de la pensée mathématisante : on dessine des choses qui ont une étendue et on considère leurs rapports.

Nous avons évoqué plus haut certaines preuves qui ne font appel qu'à des juxtapositions de grandeurs appropriées (cf. n° 4.1.2 : théorème de Pythagore, certaines identités algébriques, certaines sommes de séries).

Ces preuves sont jugées d'autant plus élégantes qu'elles s'appuient seulement sur cette pensée que nous venons d'appeler première. Elles sont extrêmement économes de moyens intellectuels. Les étapes de ces preuves sont souvent tellement évidentes qu'on peut se dispenser de les énoncer : telle cette preuve indienne du théorème de Pythagore qui se présente sous forme d'une figure accompagnée du seul mot « contemple » ; telles aussi ces preuves que la revue américaine *Mathematical Magazine* propose mensuellement à ses lecteurs sous le titre : *Preuves muettes* ¹⁴.

4.1.5 Les applications des grandeurs

Les grandeurs considérées indépendamment de toute mesure jouent un rôle dans la vie quotidienne, comme lorsqu'on plie une feuille de papier en deux, voire en trois

¹⁴ Proofs without words.

ou en quatre pour la glisser dans une enveloppe, qu'on choisit un emballage à la taille d'un objet donné, que l'on partage un gâteau en parts égales, que l'on essaie des chaussures, etc. Quant à la mesure des grandeurs, elle est d'application tant dans la vie quotidienne que dans toutes les disciplines quantitatives. Cette observation est trop évidente pour qu'il faille s'y étendre.

Il y a moins d'un demi-siècle, avant que les techniques de numérisation de l'information ne soient développées, on se servait de grandeurs continues pour représenter et expérimenter des faits mathématiques : les machines qui faisaient cela s'appelaient *machines analogiques*, par opposition aux calculatrices et ordinateurs qu'on appelait alors *machines digitales* (dérivé de l'anglais *digit*, chiffre).

Tous les diagrammes formés de courbes et de surfaces sont des représentations analogiques de phénomènes mathématiques, au moins dans la mesure où l'œil ne discerne pas, sur un écran, la décomposition digitale de l'image en « pixels ».

4.1.6 Les grandeurs dans l'histoire, la philosophie, la culture

Partons d'une question simple : étant donné deux segments de droite, y a-t-il moyen d'en trouver un troisième qui puisse être reporté un nombre exact de fois le long du premier segment, mais aussi un nombre exact de fois le long du second ?

Au début de son existence, la secte des Pythagoriciens pensait que c'était toujours possible. Cette conviction lui a permis de fonder sa conception de l'univers sur les nombres naturels 1, 2, 3, ... Toute chose pouvait être interprétée en termes de nombres naturels.

Or un événement intellectuel majeur dans l'histoire de l'humanité a été la découverte qu'il n'existe pas toujours de commune mesure entre deux segments, et en particulier qu'il n'en existe jamais entre le côté et la diagonale d'un carré.

A dater de cette constatation, et puisque les nombres (naturels) ne pouvaient pas suffire à l'étude de la géométrie, les mathématiques se sont scindées en deux : la géométrie d'une part, qui s'occupait des grandeurs, et l'arithmétique d'autre part qui s'occupait des nombres naturels. Cette scission est parfaitement claire dans les *Éléments* d'Euclide. Rappelons qu'à cette époque aucun nombre autre que les naturels n'était considéré en mathématiques. Le Cinquième Livre des *Éléments*, dont la substance est attribuée à Eudoxe, donne une théorie des grandeurs incommensurables indépendante des naturels et qui est l'un des chapitres les plus profonds des mathématiques grecques. La mise au point de nombres plus compliqués (rationnels, réels),

susceptibles de réconcilier la géométrie avec les nombres, a pris plus de vingt-deux siècles. Elle ne s'est achevée qu'aux alentours de 1870.

Les grandeurs débouchent naturellement sur la problématique de l'infini, qui a alimenté la philosophie à toutes les époques. Pour en témoigner, mentionnons seulement deux philosophes. Aristote pensait que l'univers était fini et que, par conséquent, il ne pouvait exister de grandeur infinie. En effet, une telle grandeur serait plus grande que l'univers, ce qui est impossible. Par contre, toute grandeur était pour lui indéfiniment divisible. Pour Pascal, les grandeurs pouvaient non seulement être divisées, mais aussi multipliées autant qu'on veut : d'où ces deux infinis dont il a parlé en termes impressionnants, dans des textes connus surtout pour leur portée mystique et religieuse, mais dont certains sont tout autant mathématiques.

L'histoire des grandeurs est aussi marquée par l'émergence tardive du système décimal de mesures proposé par Stévin au 16^e siècle, et promulgué seulement deux siècles plus tard en France par la Convention Nationale.

Le choix des unités de mesure a quelque chose d'arbitraire, et l'expression de chaque loi physique varie selon les unités choisies. Cette remarque montre l'importance qu'il y avait d'adopter un système universel d'unités et sous-unités, pour faciliter la communication entre les nations et les hommes, ainsi que la circulation des biens et des techniques. Les discordances entre les unités décimales et les unités anglo-saxonnes sont des cicatrices de l'histoire.

Autre point intéressant : pendant des siècles, les lois physiques s'exprimaient dans le langage des proportions, hérité d'Euclide. Galilée au 16^e siècle caractérisait un mouvement uniforme en disant « les espaces parcourus sont entre eux comme les temps mis à les parcourir ». Il ne disait pas comme nous : « l'espace parcouru égale la vitesse multipliée par le temps ». La formulation de Galilée, plus lourde que celle d'aujourd'hui, a pourtant l'avantage d'être indépendante du choix des unités de mesure. Elle a survécu jusqu'à nos jours en de rares occurrences. Par exemple certains traités de mécanique expriment encore la troisième loi de Képler comme suit : les carrés des temps de révolution des planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites. Une expression moderne de cette loi serait : les temps de révolution des planètes sont proportionnels aux longueurs des grands axes élevés à la puissance $3/2$.

4.2 Les grandeurs dans le fondamental

4.2.1 Comparer et additionner des grandeurs, et pas seulement les mesurer

Comparer, additionner et soustraire¹⁵ des objets d'une même espèce (longueurs, masses, durées,...) sont des opérations qui ne recourent pas aux nombres. Il faut les pratiquer beaucoup. Elles donnent naissance à des images mentales qui sous-tendent les notions d'ordre et d'addition sur les nombres.

Avant un certain âge, les enfants n'ont pas la notion que les grandeurs ne varient pas lorsqu'on les soumet à certaines transformations simples¹⁶ telles qu'un changement de position, d'orientation, de forme (une ficelle en pelote ou tendue), parfois même un changement de matière (remplacer une tige de bois par une tige de fer), etc. Comme l'a montré J. Piaget, l'invariance doit être apprise, pour chaque type de grandeur en particulier, par l'expérience, que celle-ci soit spontanée ou provoquée.

On peut, pendant un certain temps, laisser les élèves libres d'utiliser leur propre vocabulaire pour exprimer les comparaisons. Il est important que l'enseignant utilise les termes propres, ceux-ci s'installeront petit à petit.

Exemple 1 (de 5 à 7 ans).

Ranger un lot de réglettes, ou de bougies plus ou moins consumées.

En maternelle, il faut commencer par deux réglettes. Le passage à trois est un seuil de difficulté. Lorsque le nombre des réglettes croît, des tactiques originales permettent aux élèves du primaire de traiter de plus grands nombres d'objets. L'une d'elles consiste à appuyer toutes les bougies sur une même base rectiligne (Fig. 1).

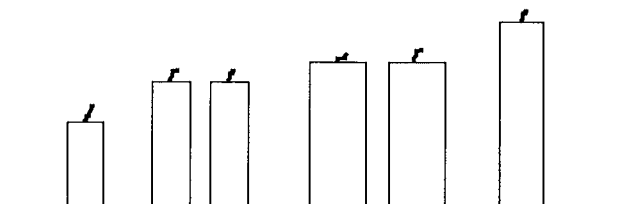


Fig. 1

Exemple 2 (de 6 à 11 ans)

Ranger par ordre de masse un lot de sachets contenant un matériau en vrac (sable,

¹⁵ Dans cette section et dans les suivantes, nous parlons de comparer, additionner et soustraire des *grandeurs*. Il faut se souvenir toutefois que ces comparaisons, additions et soustractions se font en manipulant des *objets*.

¹⁶ Les transformations « violentes » comme comprimer une éponge, tirer sur un élastique, etc., ne sont pas envisagées ici.

billes,...), d'abord en les soupesant, puis à l'aide d'une balance à plateaux, mais sans utiliser de poids.

Exemple 3 (vers 8-9 ans)

Classer par contenance un lot de verres de formes diverses, puis des récipients plus variés.

Exemple 4 (vers 6-7 ans)

Avant d'installer un meuble devant un pan de mur, vérifier sans mesurer que le pan de mur est assez large.

Exemple 5 (vers 7-8 ans)

Combien doit-on aligner de cartes à jouer côte à côte par le grand bord pour couvrir la même longueur que si on les aligne côte à côte par le petit côté (Fig.2).

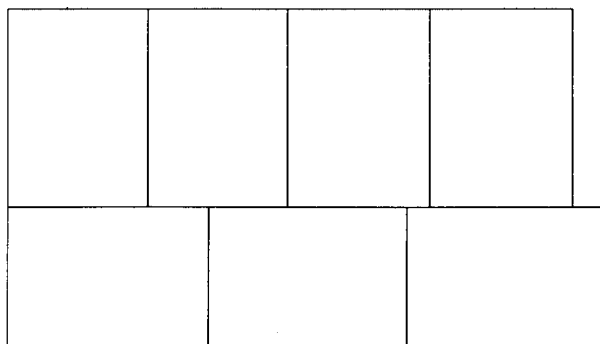


Fig. 2

On peut poser cette question en utilisant des réglettes Cuisenaire de deux longueurs.

Voici une autre variante : on choisit un adulte et un enfant (ou un enfant grand et un autre petit). Ils partent au même instant, côte à côte, du même pied (par exemple le pied gauche). Après combien de pas se retrouveront-ils dans la situation de départ, c'est-à-dire tous deux avec le pied droit au sol et le gauche qui commence à avancer ?

Exemple 6 (vers 8-9 ans)

Comparer sans les mesurer les périmètres de deux rectangles.

Exemple 7

Comparer les deux rectangles de la Fig. 3 (vers 5 ans), de la Fig. 4 (de 6 à 8 ans), de la Fig. 5 (de 9 à 11 ans).

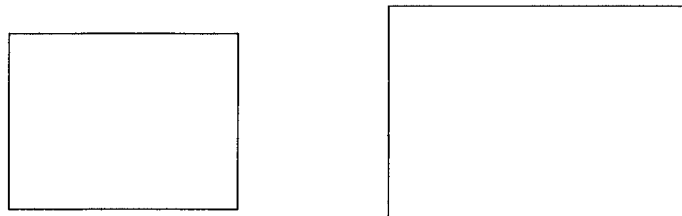


Fig. 3

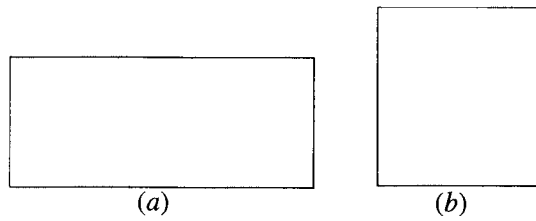


Fig. 4

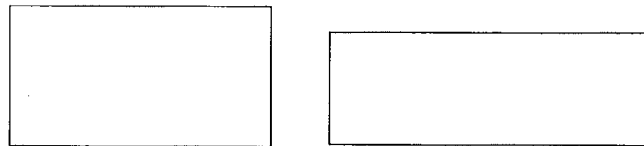


Fig. 5

Dans le premier cas, si la perception ne suffit pas, on superpose les deux rectangles (Fig. 6).

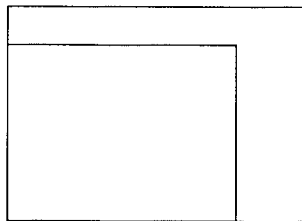


Fig. 6

Dans le second, les rectangles superposés se présentent comme sur la Fig. 7. Le morceau qui dépasse de la partie commune est plus grand pour le rectangle (a) que pour le rectangle (b). C'est donc le rectangle (a) qui est le plus grand.

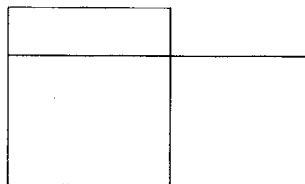


Fig. 7

Dans le troisième cas, une première superposition des deux rectangles ne permet pas de trancher (Fig. 8).

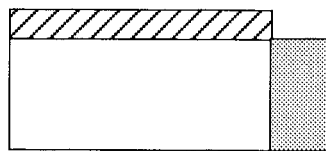


Fig. 8



Fig. 9

On superpose alors les deux rectangles qui dépassent de la partie commune (Fig. 9). Ceci permet de conclure que le rectangle le moins large était le plus petit.

4.2.2 Multiplier et diviser des grandeurs par un nombre naturel, et pas seulement les mesurer

L'idée de grandeur se complète lorsqu'on apprend à multiplier ou diviser un objet par un nombre naturel. Il faut pratiquer beaucoup ces opérations. Elles suscitent des images mentales qui sous-tendent la construction ultérieure des nombres rationnels.

Pour pouvoir multiplier un objet (allongé, pesant,...) par un nombre naturel n , on doit disposer de n exemplaires de cet objet. Diviser un objet par un nombre naturel n , c'est-à-dire le partager en n parties égales, est plus ou moins facile selon l'objet que l'on partage et le nombre de parts que l'on fait.

Au cours de l'enseignement fondamental, il faut aussi apprendre, dans les cas les plus simples, c'est-à-dire avec des nombres tout petits, à enchaîner deux opérations de multiplication par un nombre, deux opérations de fractionnement (Exemple 8), et aussi un fractionnement suivi d'une multiplication par un nombre, et enfin une multiplication par un nombre suivie d'un fractionnement (Exemple 11). Il faut aussi apprendre, à nouveau dans les cas les plus simples, à combiner les opérations de comparaison, addition, multiplication par un nombre et fractionnement. Il est beaucoup plus important, dans l'enseignement fondamental, d'expérimenter ces opérations « en travaillant sur des objets » que d'apprendre à calculer sur les fractions. De telles expérimentations fondent, pour plus tard, la compréhension du calcul sur les fractions.

Exemple 8 (de 5 à 7 ans)

Couper un rectangle en deux parts égales, puis en quatre (par pliage, par tracé).

La question comporte diverses solutions (Fig. 10).

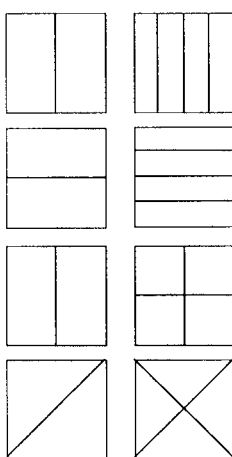


Fig. 10

Exemple 9 (vers 6-7 ans)

Faire deux carrés avec les quatre triangles de la Fig. 11, puis faire un seul carré avec les quatre triangles.

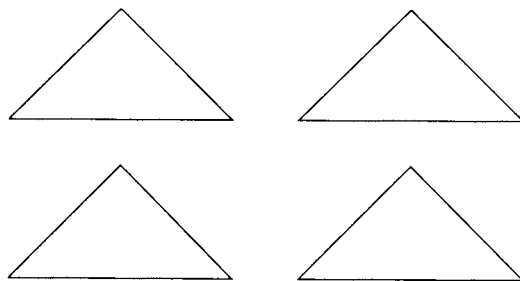


Fig. 11

La solution est donnée par la Fig. 12

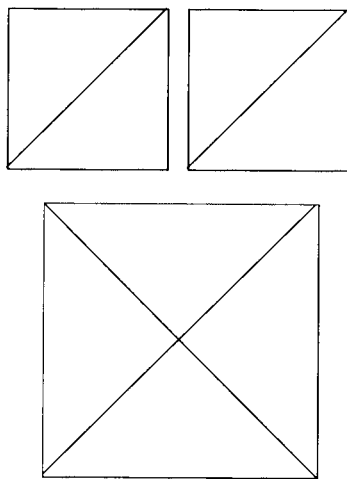


Fig. 12

Exemple 10 (vers 7-8 ans)

Partager une bouteille de coca entre cinq amis, dans des verres identiques. Cela se réalise par essais et corrections.

Exemple 11 (vers 10-11 ans)

Première question : prélever trois quarts d'une tarte. Deuxième question : nous sommes quatre amis et nous avons trois tartes. Comment les partager équitablement ? Comparer les réponses aux deux questions.

Remarque importante. Au n° 4.2.1, nous avons insisté pour que les élèves comparent des objets sans les mesurer. Au n° 4.2.2, nous avons insisté pour qu'ils multiplient et divisent des objets par des nombres naturels, à nouveau sans les mesurer. L'idée était d'expérimenter les grandeurs elles-mêmes, sans leur substituer leurs mesures. Les exemples qui illustrent ces deux numéros n'épuisent pas, et de loin, les phénomènes variés qui se rencontrent à ces deux premiers niveaux de manipulation

des grandeurs. H. Freudenthal [Fre83] pense que si l'enseignement des fractions est si souvent inefficace, c'est parce que les enfants n'explorent pas suffisamment ce champ de phénomènes. Il donne de ceux-ci, dans cet ouvrage, un inventaire étoffé susceptible d'inspirer les auteurs de programmes et de manuels (voir aussi [Rou92]).

4.2.3 Remplacer les objets par des représentants

Remplacer les objets par des représentants de ces objets est un degré d'abstraction à ne pas sauter.

L'étude des objets des divers types doit être poursuivie tout au long de l'enseignement fondamental. Néanmoins il est parfois aussi éclairant de remplacer ces objets par du matériel standard approprié ou des représentations schématiques. Par exemple on remplacera des objets longs par des réglettes ou des segments, des objets lourds par des boules de plasticine, etc. En ce faisant, on monte d'un degré dans l'abstraction (sans recourir encore aux symboles). Les représentants des objets de départ sont parfois moins ambigus que ceux-ci, en ce sens que la grandeur qu'ils représentent s'impose plus naturellement.

Il n'est pas nécessaire d'illustrer par des exemples le principe ici développé. Au cours des études, les objets sont de plus en plus souvent remplacés, quand cela s'avère commode, par des représentants. Cette pratique n'a pas de terme : elle est le recours spontané de tous ceux qui ont à traiter de grandeurs.

4.2.4 Construire la notion de mesurage sans recourir aux unités conventionnelles

Les idées de base de la notion de mesure méritent une étude approfondie. Il s'agit du choix d'une unité de mesure, du report de l'unité, des encadrements et de l'usage des sous-unités.

Mesurer un objet consiste d'abord à choisir une unité commode, c'est-à-dire qui ne conduira pas à une mesure trop grande ou trop petite. Il faut ensuite reporter l'unité (ce qui correspond à des manœuvres diverses selon le type de grandeur envisagé), puis constater que l'on tombe juste, ou juste trop court, ou juste trop grand. On exprime alors l'encadrement de la mesure vraie (inconnue) par deux mesures approximatives. Pour affiner l'encadrement, on recommence avec une unité plus petite.

Tant que l'on mesure avec une unité de rencontre, on est peu tenté de recourir à une sous-unité pour mesurer le reste laissé par la mesure avec une unité donnée. Les

sous-unités se découvrent plutôt lors de l'apprentissage des systèmes conventionnels d'unités de mesure (cf. néanmoins l'Exemple 15).

Faut-il nécessairement attendre d'avoir construit l'idée de mesurage avant d'introduire ces systèmes conventionnels ? Sans doute non. Dès que les élèves manient bien une règle graduée, qu'ils aient appris cela à l'école ou à la maison, pourquoi les empêcher de le faire ?

Cette remarque ne contredit pas la recommandation faite au n° 4.2.2 que les élèves manient des grandeurs indépendamment de leurs mesures (et d'ailleurs, ne serait-ce qu'à l'école maternelle, comment pourraient-ils faire autrement ?).

Exemple 12 (vers 7 ans)

Comparer les deux dimensions de la classe.

Le pas d'une personne est une unité appropriée.

Variante significative : mesurer la largeur des différentes fenêtres d'une maison. Chacun pourra se servir de la distance entre le bout de son pouce et le bout de son petit doigt, sa main étant la plus ouverte possible (cette unité de mesure s'appelle l'*empan*).

Exemple 13 (de 6 à 11 ans)

Mesurer des surfaces en les couvrant par un quadrillage.

La Fig. 13 montre des cas simples. On peut déposer sur les surfaces à mesurer des quadrillages sur papier transparent de plus en plus fins.

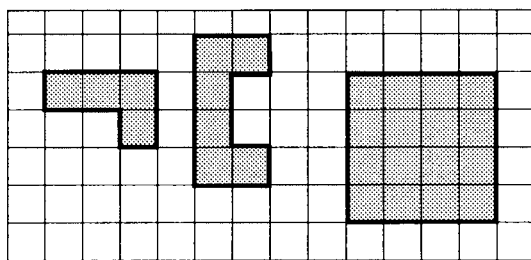


Fig. 13

La Fig. 14 montre un cas compliqué, qu'on ne peut saisir que par encadrement.

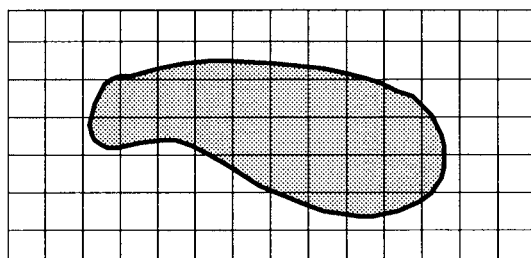


Fig. 14

On peut raffiner la mesure en choisissant un papier millimétré. Le nombre des carrés à compter devient alors si grand qu'il faut mettre au point une tactique de comptage.

Exemple 14 (vers 8-9 ans)

Mesurer la durée d'une course de 100 m avec son pouls.

La personne qui mesure ne participe pas à la course !

Exemple 15 (vers 10-11 ans)

Mesurer le grand côté d'une table en prenant le petit comme unité de mesure. Ensuite faire l'inverse : mesurer le petit côté avec le grand.

Le fait d'imposer l'unité de mesure oblige à fractionner celle-ci pour créer une sous-unité.

Exemple 16 (vers 8 ans)

Mesurer les aires des grands triangles de la Fig. 15 avec le petit pour unité.

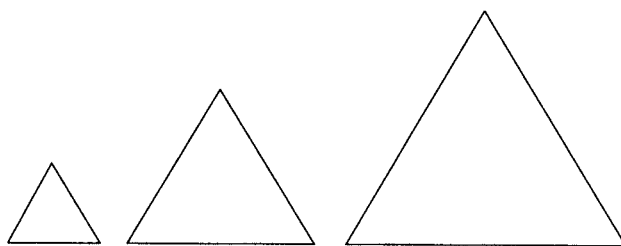


Fig. 15

La solution s'obtient par les pavages de la Fig. 16.

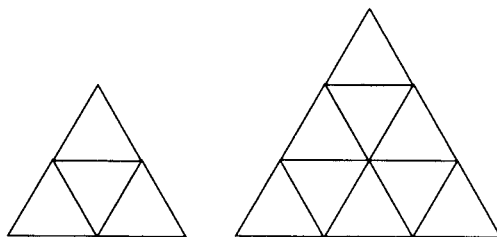


Fig. 16

Exemple 17 (vers 8 ans)

Mesurer la contenance d'un coquetier avec une cuillère à café.

Exemple 18 (vers 10-11 ans)

Mesurer toutes les pièces du puzzle appelé tangram (Fig. 17) avec la plus petite pour unité. Puis avec la plus grande. Puis avec le carré du tangram complet.

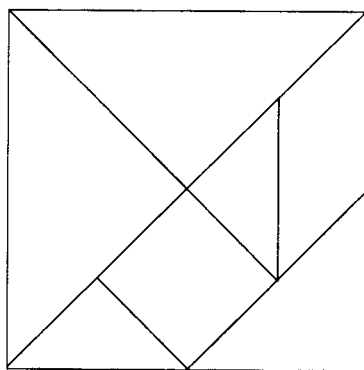


Fig. 17

4.2.5 Mesurer dans les systèmes d'unités conventionnels

Il faut apprendre les principales manipulations de mesures dans les systèmes d'unités conventionnels. Il importe d'utiliser d'abord les unités rencontrées dans la vie quotidienne, puis de les situer progressivement dans des tableaux d'unités plus complets.

Il est important d'apprendre à manipuler les règles graduées, rapporteurs, chronomètres... Il nous semble utile aussi d'apprendre à utiliser une balance à deux plateaux associée à un système décimal de poids, même si les mesures de poids sont aujourd'hui fournies la plupart du temps par des balances automatiques.

Par ailleurs, l'enfant est mis quotidiennement dans son milieu en présence de grandeurs mesurées, dont la plupart répondent à des besoins immédiats (apporter 180 F pour la cantine, avoir fait 85 km pour aller à la mer, ...). Les unités utilisées apparaissent ainsi dans un contexte naturel et doivent être étudiées d'abord. Si des unités ne sont rencontrées que dans le cadre scolaire, elles ont peu de sens pour les élèves.

Il faut toutefois construire petit à petit les systèmes cohérents d'unités conventionnelles. Ceux-ci contribuent à structurer la pensée. Certains enfants sont intéressés par les cases vides d'un tableau d'unités et souhaitent qu'on leur montre comment le remplir. Quoiqu'il en soit, la construction d'un tableau complet des unités du système décimal est hors de portée de l'enseignement primaire. Il est beaucoup plus important de faire des changements d'une unité usuelle à une autre dans des contextes problématiques appropriés.

Du premier contact avec les divers types d'objets (longs, lourds, etc.) jusqu'aux mesures conventionnelles, le vocabulaire s'enrichit en se précisant, et la notion même de grandeur se construit.

On dit

- A est trois fois plus long que B ;
- B va trois fois dans A ;
- si je prends B comme unité de mesure, la mesure de A vaut 3 ;
- la longueur de A est trois fois plus grande que celle de B ;
- si la longueur de B est 1 cm, celle de A est 3 cm.

On dit aussi

- X est aussi long que Y ;
- X et Y ont même longueur, cette longueur est de 5 cm.

Des occasions de mesurer avec les unités conventionnelles doivent être rencontrées tout au long de l'école primaire. En voici quelques exemples.

Exemple 19 (à partir de 8 ans)

Réaliser une recette de cuisine en rassemblant les ingrédients selon des instructions précises.

Exemple 20 (vers 10-11 ans)

Comparer les compositions de plusieurs produits (par exemple des fromages, des confitures) telles qu'elles sont données par plusieurs fabricants.

Un tel exercice peut s'accompagner de notions de diététique. Une variante : apprendre à lire des articles appropriés dans une revue pour consommateurs.

Exemple 21 (vers 10-11 ans)

Faire un plan précis de la classe, de l'école, du quartier en relevant les mesures nécessaires.

Exemple 22 (vers 10-11 ans)

Quelle est l'aire de la classe en m^2 ? en dm^2 ? en cm^2 ? Et le volume de la classe en m^3 ? en dm^3 ?

Question subsidiaire : combien de temps peut-on rester dans la classe avant d'aérer ?

Exemple 23 (vers 10-11 ans)

On part en classe de neige en France. Comment fera-t-on la conversion des prix des francs belges aux francs français ?

Exemple 24 (vers 10 ans)

Faire un graphique des records du 100 m au cours du 20^e siècle.

4.2.6 Introduire prudemment les grandeurs composées

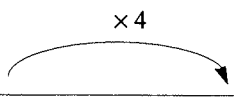
Au cours du primaire, il faut introduire les grandeurs composées (prix unitaire, vitesse, masse volumique,...) seulement dans des contextes simples et en soulignant leur lien à la proportionnalité.

Les grandeurs composées telles que la vitesse, la masse volumique, etc. peuvent être introduites prudemment dans des situations expérimentales simples. Il est éclairant de décrire les situations proposées à l'aide de tableaux de proportionnalité qui mettent en évidence les rapports internes et le rapport externe (cf. [Sot93]). Ce sont d'abord les rapports internes que les enfants doivent apprendre, car ils sont plus immédiats et moins abstraits que le rapport externe. C'est ce dernier qui constitue la grandeur composée, variable selon les unités choisies. On peut se borner à n'étudier que les grandeurs composées les mieux représentées dans le quotidien : celles par exemple qui s'expriment en kilomètre par heure, en kilos par décimètre cube, en francs à l'unité.

Exemple 25 (vers 11 ans)

Si je fais 3 km en une heure, combien ferai-je en 4 heures, si je marche à la même vitesse ?

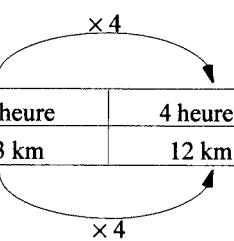
On peut commencer par dresser le *Tabl. 1* ci-dessous, qui comporte une case vide.



1 heure	4 heures
3 km	?

Tabl. 1

Le rapport interne $\times 4$ est immédiatement perceptible. En quatre fois plus de temps, on fera quatre fois plus de chemin. D'où le *Tabl. 2*.



1 heure	4 heures
3 km	12 km

Tabl. 2

Dans ce problème, le marcheur fait 3 km/h.

Voici un peu plus difficile : si je fais 9 km en 3 heures, combien ferai-je en 4 heures ?

3 heures	4 heures
9 km	?

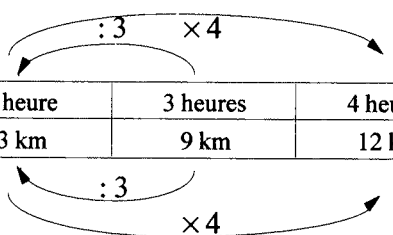
Tabl. 3

Ici le rapport interne n'est pas immédiat. On peut s'en tirer en complétant le tableau de manière à faire apparaître 1 heure (cf. *Tabl. 4*).

1 heure	3 heures	4 heures
	9 km	?

Tabl. 4

Ce tableau se remplit alors en deux temps (*Tabl. 5*).



1 heure	3 heures	4 heures
3 km	9 km	12 km

Tabl. 5

Mais on peut aussi partir directement du *Tabl. 3* en calculant le rapport interne correspondant : pour passer de 3 à 4, il faut multiplier par $4/3$. D'où le *Tabl. 6*, qui complète le *Tabl. 3*.

3 heures	4 heures
9 km	?

Tabl. 6

On pourra poursuivre ce problème en faisant réaliser sur du papier millimétré un graphique de la distance parcourue en fonction du temps. Les élèves calculeront quelques points du graphique en allongeant le tableau de proportionnalité. Puis ils s'apercevront que les points s'alignent, que le graphique est une droite et que dès lors deux points suffisent pour dessiner le graphe.

Exemple 26 (vers 11-12 ans)

Une bouteille de limonade de 1,5 l est vendue 44 F et une boîte d'un litre de lait 30 F. Qu'est-ce qui coûte le plus cher, la limonade ou le lait ?

4.2.7 Les choses petites, grandes, inaccessibles, intransportables

Les choses petites, grandes, inaccessibles, intransportables provoquent des défis intéressants quant aux manœuvres pour mesurer et au choix des unités.

Exemple 27 (vers 11 ans)

Observer un escargot et mesurer sa vitesse.

Cette question fera peut-être sourire. Nous connaissons au moins une classe qui s'est remarquablement animée en la traitant.

Exemple 28 (vers 11 ans)

Mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier (lorsqu'on dispose d'un paquet de 500 feuilles identiques).

4.3 Les grandeurs dans le secondaire

4.3.1 Encore les grandeurs sans les nombres

Les grandeurs considérées soit sans référence aux nombres, soit comme représentant des nombres, demeurent jusqu'à la fin du secondaire une source de démonstrations particulièrement intuitives.

Les exemples illustrant cette proposition sont très nombreux. En voici quelques-uns.

Exemple 1 (vers 12 ans)

Les nombres m , n et p étant trois nombres naturels, si m divise n et n divise p , alors m divise p .

Une représentation des nombres par des segments permet de saisir immédiatement la vérité de cette proposition. La Fig. 1 correspond à

$$n = 4m \quad \text{et} \quad p = 2n.$$

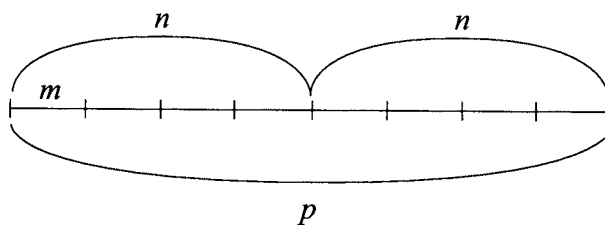


Fig. 1

Puisque m va exactement dans n et que p est formé d'un nombre entier de n , m va exactement dans p .

Exemple 2 (vers 13 ans)

D'un carré de côté a , on ôte un carré de côté b comme dans la Fig. 2 et on obtient une surface en équerre. Dessinez un rectangle qui a la même aire que cette surface et écrire l'aire du rectangle en fonction de a et de b .

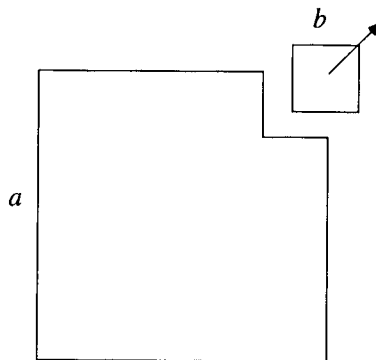


Fig. 2

On trouvera à la section 7.3.1, Exemple 1, la solution de cet exercice.

Exemple 3 (vers 14 ans)

Les deux rectangles grisés de la Fig. 3 ont-ils la même aire ?

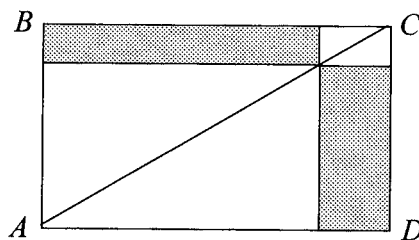


Fig. 3

La solution saute aux yeux dès que l'on voit chaque rectangle grisé comme une partie d'un grand triangle duquel on a ôté deux autres triangles.

Exemple 4 (vers 16 ans)

Dans un carré de côté $a + b$, on dessine quatre rectangles de côtés a et b .

1) Ecrire l'aire du carré comme somme des aires des figures ainsi dessinées.

2) Montrer que la moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ est plus grande ou égale à la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$.

La première question conduit, entre autres, à la Fig. 4 et à l'identité :

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab .$$

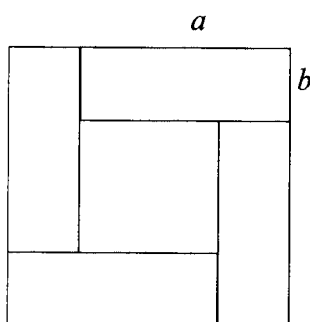


Fig. 4

La réponse à la seconde question se base également sur la Fig. 4 qui montre que

$$(a + b)^2 \geq 4ab .$$

On a l'égalité si et seulement si $a = b$. De cette inégalité, on tire que

$$a + b > 2\sqrt{ab} ,$$

d'où l'inégalité cherchée.

Exemple 5 (vers 14-15 ans)

Montrer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Ceci devient évident lorsqu'au lieu d'imaginer d'abord la succession des fractions, on part d'un segment de longueur 1 comme sur la Fig. 5.

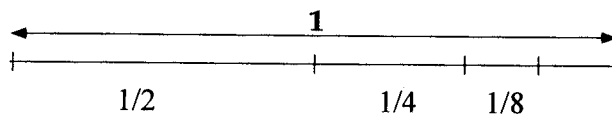


Fig. 5

4.3.2 Continuer l'étude des aires et volumes

La construction des formules pour les aires et volumes doit se poursuivre d'année en année. Elle a une valeur en soi, et prépare la grosse machinerie du calcul intégral.

La source première de toutes les formules, c'est le mesurage (le report de l'unité et des sous-unités) et les difficultés auxquelles il se heurte. Les moyens de construction des formules sont divers : des décompositions en figures partielles, des sommes et différences de grandeurs, la méthode de Cavalieri (qui mérite un certain intérêt pour sa simplicité et son caractère intuitif). Viennent ensuite les essais pour recouvrir le plus exactement possible une figure d'aire inconnue par d'autres d'aires connues (par ex. les approximations du disque par des polygones réguliers). Et on débouche enfin sur la méthode standard que fournit le calcul intégral.

Attendre, comme on l'a fait pendant des années, d'arriver aux intégrales pour traiter des aires et volumes simples aboutit à priver de ces notions essentielles les élèves qui ne vont pas jusqu'aux intégrales. D'autre part, reporter ainsi ces notions simples empêche les autres élèves d'apercevoir la motivation principale du calcul intégral. Cette motivation est que le calcul intégral, machine très élaborée, résout commodément une foule de problèmes, dont beaucoup à défaut demeurent particuliers et difficiles.

Les démonstrations des formules pour les aires polygonales sont illustrées au n° 6.3.6 (Exemple 12). De même pour les volumes au n° 6.4.2 (Exemple 4), où la méthode de Cavalieri est également utilisée.

Exemple 6 (vers 12 ans)

On découpe un disque dont on connaît le rayon et le périmètre, en un assez grand nombre de secteurs isométriques, puis on les rassemble comme le montre la Fig. 6. Le disque est ainsi transformé en une figure qui est presque un rectangle. Quelle est l'aire de ce «rectangle» ?

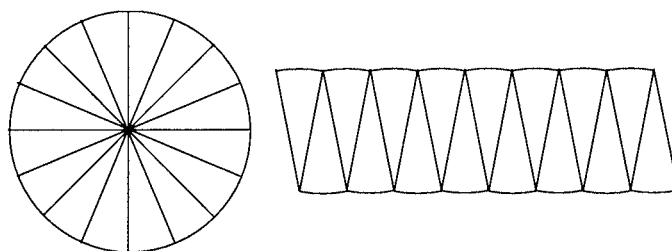


Fig. 6

Il est souvent nécessaire, lorsqu'on travaille cette question en classe, de réaliser d'autres figures à partir de disques découpés en quatre, puis en huit parties, pour saisir que plus le découpage est fin, plus la figure s'approche d'un rectangle. L'aire de ce rectangle vaut le produit du demi-périmètre du disque par son rayon.

Exemple 7 (vers 15 ans)

On enroule une feuille rectangulaire de deux façons, d'abord en faisant coïncider ses deux petits côtés, puis en faisant coïncider ses deux grands côtés. On obtient ainsi successivement deux cylindres. Ont-ils le même volume ?

Soient a et b les mesures des deux côtés, avec $a > b$ (Fig. 7).

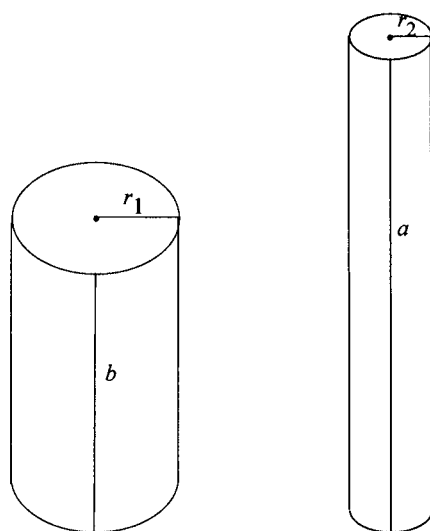


Fig. 7

Le rayon r_1 du premier cylindre est donné par

$$a = 2\pi r_1 .$$

Ainsi son volume est

$$v_1 = \pi r_1^2 . b = \pi \frac{a^2 b}{(2\pi)^2} = \frac{a^2 b}{4\pi} .$$

De même, pour le second cylindre,

$$b = 2\pi r_2 ,$$

et

$$v_2 = \pi r_2^2 . a = \pi \frac{ab^2}{(2\pi)^2} = \frac{ab^2}{4\pi} .$$

On a ensuite

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a^2 b}{ab^2} = \frac{a}{b} > 1 .$$

Et donc v_1 est plus grand que v_2 .

4.3.3 Grandeurs composées, unités dérivées

La proportionnalité entre grandeurs d'espèces différentes, et donc les grandeurs composées et unités dérivées sont objets d'étude et instruments de résolution de problèmes jusqu'au bout du secondaire.

Les grandeurs composées et les unités dérivées ne pouvant qu'être abordées au niveau primaire, elles doivent être approfondies au niveau secondaire. Il est en particulier important que l'étude des mouvements ne soit pas réduite à celle de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: les distances s'expriment dans une unité à choisir de façon appropriée

dans chaque problème, et il en va de même pour les temps ; ces deux choix d'unité entraînent l'usage d'une unité dérivée pour les vitesses. Les diagrammes donnant la distance parcourue par rapport au temps sont des diagrammes affines, c'est-à-dire dont le message est indépendant des compressions parallèles aux axes que provoquent les changements d'unités et les échelles géométriques choisies pour les unités.

Les changements d'unités de base entraînent un changement dans les unités dérivées : c'est là un phénomène complexe qu'il faut étudier en allant des cas simples aux cas compliqués.

Ces apprentissages débouchent sur un ou plusieurs systèmes d'unités cohérents, tels que le système MKSA. La construction d'un tel système relève du cours de physique, mais il est souhaitable que les principes de sa construction soient aussi présents dans le cours de mathématiques (pour peu de grandeurs et dans des cas simples).

L'expression symbolique des unités, leur présence ou leur absence dans les équations, ainsi que ce que l'on appelle les équations aux dimensions, font partie de cette étude des grandeurs composées et des unités dérivées. Il s'agit là de questions susceptibles d'un exposé mathématique rigoureux. Leur absence des cours de mathématiques dans les dernières décennies est une des raisons qui expliquent le divorce entre les enseignements de mathématiques et de physique. Ne pourrait-on songer dans cette perspective à une collaboration interdisciplinaire ?

Exemple 8 (vers 12-13 ans)

Quelle est la masse de 1000 billes d'acier de 1 mm de diamètre chacune ? Estimer la masse (donner une impression), puis la calculer.

La plupart des gens pensent que l'acier c'est lourd et que 1000 c'est beaucoup : à l'estime, ils arrivent largement au-dessus de la valeur réelle. Contentons-nous de borner celle-ci supérieurement. Les mille billes tiennent toutes dans un cm^3 . Or 1 cm^3 d'acier pèse environ 7,5 g. D'où les mille billes pèsent un peu moins que 7,5 g.

Exemple 9 (vers 14 ans)

Quel est, à peu près, le volume de mon corps ?

Le volume du corps est très difficile à estimer directement. Par contre, comme on peut s'en apercevoir lorsqu'on va nager, la densité moyenne du corps est à peu près celle de l'eau. Donc le volume d'une personne de 60 kg est d'environ 60 l.

Exemple 10 (vers 14 ans)

Quand on dit qu'un avion vole à Mach 2,5, combien fait-il en km/h ?

Le *Tabl. 1* montre deux façons de procéder :

- dans l'une (à gauche du tableau), on calcule d'abord le passage de Mach 1 à Mach 2,5 en partant de Mach 1 qui vaut 340 m/s ; puis on convertit le nombre de m/s obtenus en km/h ;
- dans l'autre (à droite du tableau), on établit au préalable la conversion de Mach 1 en km/h ; puis on calcule la vitesse de Mach 2,5 en km/h.

v (en Mach)	v (en m/s)	e		t	v (en km/h)
Mach 1	340 m/s ↓ $\times 2,5$	340 m	en	1 s	1224 km/h ↓ $\times 2,5$
		0,34 km	en	1 s	
		$\times 3600$		$\times 3600$	
		1224 km	en	1 h	
Mach 2,5	850 m/s	850 m	en	1 s	3060 km/h
		0,85 km	en	1 s	
		$\times 3600$		$\times 3600$	
		3060 km	en	1 h	

Tabl. 1

Exemple 11 (vers 14-15 ans)

Combien de kilomètres vaut une année lumière ?

Exemple 12 (vers 15-16 ans)

Le newton (N), c'est la force qui communique à une masse de 1 kg une accélération de 1 m/s². Quelle est, en newton, la force d'attraction que la terre exerce sur une masse de 1 kg ? Et sur une masse de 2 kg ?

La loi fondamentale de la dynamique du point matériel s'écrit¹⁷

$$f = ma ,$$

où f est la force appliquée à un objet, m la masse de l'objet et a son accélération. Si on choisit pour unité de masse le kg et pour unité d'accélération le m/s², on peut récrire l'équation fondamentale en tenant compte des unités sous la forme

$$f(\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = m(\text{kg}) \times a(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) .$$

Le newton s'identifie au $\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Cette équation peut donc se récrire sous la forme

$$f(\text{N}) = m(\text{kg}) \times a(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) .$$

On sait par ailleurs que l'accélération de la pesanteur vaut 9,81 m/s². D'où pour la force cherchée

$$\begin{aligned} f(\text{N}) &= 1 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 9,81 \text{ N} . \end{aligned}$$

Pour 2 kg on trouverait bien entendu le double.

Question complémentaire : quelle est la masse sur laquelle la terre exerce une force de 1 newton ?

On a dans ce cas

¹⁷ Nous nous contentons ici de son expression scalaire, appropriée à un mouvement en ligne droite.

$$1 \text{ N} = m(\text{kg}) \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

D'où

$$\begin{aligned} m(\text{kg}) &= \frac{1}{9,81} \text{ kg} \\ &= 0,1019... \text{ kg} , \end{aligned}$$

soit environ 100 grammes, ce qui est une valeur ronde assez utile à retenir.

4.3.4 Les choses petites, grandes, inaccessibles, intransportables

La mesure des choses qui résistent aux manipulations ordinaires est liée à des apprentissages importants.

Rappelons pour mémoire les interventions des théorèmes de Thalès et de Pythagore, et de la trigonométrie dans les mesures d'objets inaccessibles. Ces questions sont traitées au chapitre 6 (cf. n° 6.4.2).

Par ailleurs, la mesure de grandeurs s'étendant de valeurs très petites à des valeurs très grandes ne se prête pas à représentation sur une échelle régulière. Les échelles logarithmiques d'une part sont d'usage courant, et d'autre part forment parmi d'autres un contexte pour l'étude des logarithmes.

5

NOMBRES

5.1 Vue d'ensemble

5.1.0 Diverses sortes de nombres

Commençons par définir les diverses sortes de nombres dont nous parlerons dans la suite.

Les nombres 0, 1, 2, 3, ... sont appelés nombres *naturels*. L'ensemble de ces nombres est désigné par **N**.

Les nombres ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... sont appelés nombres *entiers*. L'ensemble de ces nombres est désigné par **Z**.

On appelle nombres *rationnels* les quotients exacts de deux nombres entiers. Ils admettent des écritures fractionnaires¹. Les dénominateurs 1 et -1 étant admis (pas 0 bien sûr), les nombres entiers tels que $\frac{3}{1} = 3$ ou $\frac{4}{-1} = -4$ sont aussi des rationnels. L'ensemble des nombres rationnels est désigné par **Q**. Ces nombres sont aussi ceux qui ont une écriture décimale se terminant par une suite de chiffres infinie et périodique (cette suite pouvant être constituée uniquement de zéros²).

Les nombres *réels* sont ceux qui permettent de repérer tous les points d'une droite. L'ensemble de ces nombres est désigné par **R**.

On peut démontrer que les nombres rationnels ne suffisent pas à repérer tous les

¹ Dans ce qui suit, le terme fraction renvoie à une forme d'écriture des nombres rationnels. De même, l'adjectif décimal renvoie à une forme d'écriture, non à un ensemble particulier de nombres.

² Par exemple, $2,3=2,3000\dots$ est un nombre rationnel.

points d'une droite. Certains nombres, tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , ne peuvent pas être écrits sous forme de fraction. Ces nombres sont appelés *irrationnels*.

Les nombres réels sont aussi ceux dont l'écriture décimale peut se terminer par une suite infinie de chiffres, périodique ou non (et ici aussi cette suite infinie peut n'être constituée que de zéros).

Enfin, les nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont deux nombres réels et où $i^2 = -1$ sont appelés nombres *complexes*. L'ensemble de ces nombres est désigné par $\mathbb{C}$.

Chacun de ces ensembles de nombres est muni d'une addition, d'une multiplication, et de façon naturelle (sauf pour les complexes) d'une relation d'ordre. De plus chacun, à partir du second, généralise le précédent : les entiers positifs s'identifient aux naturels, les rationnels qui n'ont que des zéros après la virgule s'identifient aux entiers, les réels qui se terminent par une suite périodique de chiffres s'identifient aux rationnels, et enfin les complexes $a + bi$ pour lesquels $b = 0$ s'identifient aux réels.

Les élèves acquièrent au cours des études un stock de nombres qui croît au fil des besoins et se structure petit à petit. Ces nombres n'ont en cours de route dans leur esprit qu'un statut théorique incomplet. Ce sont soit les naturels, soit les nombres un peu vagues dont Bourbaki [Bou74] parle en ces termes : « un nombre est considéré comme défini par la possibilité d'en obtenir des valeurs approchées et d'introduire celles-ci dans le calcul ».

Nous dirons parfois de ces nombres qu'ils sont *naïfs*. Ainsi les nombres naïfs sont théoriquement inachevés, mais pourtant munis de propriétés qui en font de bons instruments pour organiser une foule de phénomènes. Ils sont des exemples frappants de ce que nous avons appelé des *objets mentaux* (cf. Chap. 2).

Les nombres naïfs évoluent avec l'âge des élèves. Le contexte suffira, chaque fois que nous utiliserons ce terme, à préciser de quels nombres il s'agira. Au début de la scolarité, les élèves ne connaissent et n'utilisent que des nombres positifs (naïfs). Au moment où ils apprennent les nombres négatifs, il est commode de rassembler les positifs et les négatifs sous la dénomination commune de *nombres relatifs*.

Selon le contexte aussi, il nous arrivera de parler de nombres *pour compter* (ou pour dénombrer), de nombres *pour mesurer*, *pour fractionner* et de nombres *pour repérer*. Il s'agira dans chaque cas de nombres naïfs (voir ci-dessus) que nous trouvons éclairant de désigner par l'usage qui en est fait.

Enfin, en ce qui concerne l'usage des nombres, nous distinguerons :

- les *opérateurs additifs* qui envoient un nombre sur un autre ; par exemple l'opérateur $+2,5$ envoie 4 sur 6,5, ce que l'on schématise comme suit :

$$4 \xrightarrow{+2,5} 6,5 ;$$

- les *opérateurs multiplicatifs* qui envoient aussi un nombre sur un nombre ; ainsi l'opérateur $\times 3$ envoie 2,5 sur 7,5, ce que l'on schématise comme suit

$$2,5 \xrightarrow{\times 3} 7,5 ;$$

- l'*opération d'addition* qui envoie deux nombres sur un troisième, comme dans l'exemple suivant

$$3,2 + 2,8 = 6 ;$$

- l'*opération de multiplication* qui envoie deux nombres sur un troisième, comme dans l'exemple suivant

$$2 \times 1,5 = 3.$$

Nous parlerons aussi, en donnant à ces expressions le sens qui va de soi, d'opérateurs de soustraction, de division, ainsi que d'opérations de soustraction et de division.

5.1.1 Les nombres au niveau de base

Que sont les nombres au niveau de base ou en d'autres termes, quels sont les premiers phénomènes quotidiens qui enclenchent la pensée numérique ? Ils correspondent, pour l'essentiel, à quatre types d'action : dénombrer, mesurer, fractionner, repérer. Les nombres servent à remplacer des *manipulations* (souvent longues) par des *opérations symboliques* ou *mentales* efficaces.

Commençons par quelques exemples concernant les dénombrements :

- pour s'assurer qu'il y a plus d'objets dans un ensemble que dans un autre, on peut mettre physiquement les deux ensembles en correspondance terme à terme ; si on a préalablement compté les deux ensembles, il est plus facile de comparer les deux nombres ;
- pour savoir combien il y a d'œufs dans six douzaines d'œufs, on peut compter tous les œufs ; il est plus facile de multiplier 12 par 6 ;
- pour savoir combien de douzaines il y a dans 132 objets, on peut faire des paquets

de 12 ; on va plus vite en divisant 132 par 12 ;

- pour savoir combien de couples différents on peut former avec 5 filles et 6 garçons, on peut écrire tous les couples de prénoms possibles ; mais il est plus simple de multiplier 5 par 6 ;
- un arbre a trois maîtresses branches dont chacune se divise en cinq branches ; pour connaître le nombre total de branches, on peut les compter ; on peut aussi multiplier 5 par 3.

Voici maintenant des exemples concernant des mesures :

- pour savoir si une corde est plus grande qu'une autre, on peut les tendre côte à côte ; si on les a mesurées auparavant, on comparera plutôt les mesures ;
- on veut connaître la charge d'un avion qui embarque du fret ; il n'est pas possible de peser d'un seul coup la cargaison ; on fera donc la somme des poids de tous les colis à embarquer ;
- si on marche pendant trois heures et demie en faisant quatre kilomètres et demi par heure, quel chemin parcourt-on ? Il est plus rapide de faire la multiplication que la promenade ;
- pour connaître l'aire d'une feuille de papier, il est plus facile de faire le produit des mesures en cm de ses côtés que de couvrir la feuille de petits carrés d'un cm et d'un mm de côté.

En ce qui concerne les fractions :

- pour ajouter $\frac{1}{2}$ heure à $\frac{3}{4}$ d'heure, savoir additionner $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ évite de faire la manoeuvre sur un cadran ;
- pour savoir ce qui reste d'un objet dont on a prélevé un demi puis un tiers, on peut effectuer les deux prélèvements et puis reporter le reste sur l'objet de départ pour s'apercevoir enfin qu'il y est contenu 6 fois ; il est plus commode de calculer d'emblée

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Considérons enfin les repérages :

- pour savoir à quel étage d'un immeuble on se trouve, il est plus commode de lire le n° inscrit à l'étage que de laisser une marque là où l'on est, redescendre au rez-de-chaussée et remonter en comptant les étages ;

- pour situer une case de mots croisés, il est plus facile de consulter des nombres marquant les lignes et les colonnes que de recompter chaque fois.

Ces exemples suffisent à montrer que les nombres, même au niveau de base, sont des instruments intellectuels qui transcendent les manipulations de grandeurs.

On trouvera dans l'ouvrage de Freudenthal [Fre83] un inventaire abondant de ces phénomènes qui provoquent et motivent la pensée numérique à son début.

5.1.2 La construction des nombres

Les premiers nombres que rencontrent les enfants sont les nombres naturels les plus petits. Pour accéder à ces nombres, il faut apprendre à compter, c'est-à-dire à dérouler la suite des nombres en pointant des objets et à associer les nombres ainsi nommés à des quantités stables (deux ensembles d'objets pour lesquels le comptage s'arrête au même nombre peuvent être mis en correspondance terme à terme). Les enfants doivent acquérir la notion de conservation (étudiée dans divers contextes par J. Piaget), c'est-à-dire l'idée que le nombre d'objets d'un ensemble ne varie pas notamment selon la disposition, la nature ou l'ordre de présentation de ces objets.

Une fois que les tout premiers nombres naturels sont acquis, se pose le problème des nombres plus grands et des façons commodes de les écrire : la numération décimale est introduite progressivement, pour répondre aux besoins liés aux situations rencontrées.

On ne prendra pas pour fil conducteur de la construction des nombres, au long de la scolarité, les généralisations successives qui vont des naturels aux entiers, de ceux-ci aux rationnels, puis aux réels et enfin aux complexes. Au contraire, on enrichira progressivement le stock des nombres réellement rencontrés dans des contextes problématiques³ et on apprendra les opérations correspondantes selon les besoins.

Les contextes principaux sont au départ (cf. n°5.1.1) ceux où il faut dénombrer, mesurer, fractionner, repérer.

Les mesures ou les divisions écrites engendrent des rationnels dans leur écriture décimale, qui prennent place chacun entre deux naturels.

Les opérations de fractionnement amènent des rationnels dans leur écriture fractionnaire. Ils peuvent aussi servir à mesurer et à exprimer des quotients exacts.

Ce n'est que lorsqu'on arrive à les utiliser dans des additions, soustractions, multiplications et divisions qu'ils atteignent leur véritable statut de nombre.

³ Sachant que ces contextes seront par moments purement théoriques.

Les repérages conduisent à utiliser des nombres positifs et des nombres négatifs (les nombres relatifs). Avec l'arrivée de ces nombres, la notion d'ordre qui jusque-là exprimait les relations «plus petit», «plus grand», change de nature et exprime les relations «vient avant» ou «vient après» dans un sens de parcours. Les opérations aussi changent de nature et d'ancrage intuitif : l'addition exprime avant tout la composition de deux déplacements dans un sens ou l'autre, la multiplication devient une opération abstraite utile avant tout pour faire de la géométrie en coordonnées⁴.

Les nombres irrationnels apparaissent en quelque sorte un par un⁵ en géométrie à travers le théorème de Pythagore et la mesure du cercle. L'ensemble des réels muni des propriétés d'Archimède et des intervalles emboîtés sert surtout à construire l'analyse mathématique.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, on enrichit le stock des nombres au fur et à mesure qu'on les rencontre dans des problèmes. Mais en même temps, on les structure en s'approchant par étapes des ensembles emboîtés $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Les types d'équations servent de points d'appui : les entiers sont les solutions des équations du type

$$x + m = n, \text{ où } m \text{ et } n \text{ sont des naturels ;}$$

les rationnels sont les solutions des équations du type

$$ax = b, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers ;}$$

enfin, pour exprimer les solutions des équations du type

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des entiers,}$$

non seulement il faut introduire les racines carrées (qui fournissent des nombres irrationnels particuliers), mais encore il faut recourir aux nombres complexes, qui débordent les réels.

Il importe de souligner que les nombres naturels sont les premiers et ceux auxquels on revient sans cesse :

- ils servent de modèle (par exemple la commutativité et l'associativité des opérations se transfèrent à tous les types de nombres),

⁴ Que l'on songe à la difficulté que l'on aurait à écrire l'équation d'une droite $y = ax + b$ si on ne disposait pas de la règle des signes.

⁵ Nous parlons ici de la géométrie reconstruite pas à pas dans l'enseignement. La théorie géométrique des traités s'appuie elle sur le corps des réels tout entier.

- ils constituent un repoussoir (par exemple ajouter un naturel provoque une augmentation, ajouter un entier pas nécessairement, etc.),
- les notions de diviseur et multiple, nombre premier, décomposition en facteurs, plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple constituent pour ainsi dire l'anatomie et la physiologie des nombres naturels.

De même que les éléments de géométrie aident à saisir l'espace et à s'y mouvoir, les notions liées à la divisibilité et à la division aident l'esprit à se mouvoir dans l'univers des nombres. Qui plus est, ces notions donnent accès à l'univers des nombres rationnels. Pour certains élèves elles préparent l'algèbre des polynômes.

Enfin qui dit nombre, dit calcul et le calcul est indispensable : on doit pouvoir par moments calculer sans réfléchir (cf. 5.1.4). Mais d'une part il est important d'avoir compris les règles de calcul et de pouvoir y revenir au besoin, et d'autre part on dispose aujourd'hui de calculatrices qui peuvent prendre en charge tous les calculs un peu longs. La virtuosité calculatoire est ainsi devenue sans objet : il faut arriver à comprendre les règles de calcul sur des exemples pas trop compliqués et arriver à traiter ces exemples à vitesse raisonnable. Le reste sera confié à la machine. Par contre il est important de savoir, selon le contexte dans lequel on travaille, quelle opération on doit faire et sur quels nombres.

5.1.3 Les nombres approfondis

Approfondir la connaissance des nombres, ce n'est pas seulement regarder du côté des nombres les plus compliqués tels que les irrationnels ou les complexes. En effet, les naturels 0, 1, 2, 3, ..., malgré leur apparente simplicité, posent des problèmes difficiles, ne serait-ce que ceux qui concernent les nombres premiers. Par exemple, il n'est pas évident du tout qu'il existe une infinité de nombres premiers (ceci a été démontré par Euclide, environ 300 ans avant J.-C.). Par exemple encore on a, depuis le début du 20^e siècle, une idée de la loi de raréfaction des nombres premiers lorsqu'on avance dans la suite des nombres naturels (La Vallée-Poussin et Hadamard).

Par ailleurs, les nombres réels et complexes peuvent être construits, en même temps que les lois de calcul auxquelles ils obéissent, à partir de la théorie des ensembles. Il s'agit là d'un cheminement assez long, dont on ne peut donner que quelques échos dans le secondaire. Les étapes de cette construction obéissent à une sorte de rythme : on commence par définir les nombres naturels comme cardinaux d'ensembles, en les munissant d'une addition et d'une multiplication d'une manière

très simple et conforme au bon sens⁶. On définit ensuite les entiers (0, 1, -1, 2, -2, etc.) comme classes d'équivalence d'ensembles de couples de naturels, avec des définitions appropriées pour l'addition et la multiplication. On passe ensuite aux rationnels, vus comme classes d'équivalence de couples d'entiers, avec aussi des définitions appropriées pour les opérations. Vient ensuite le passage des rationnels aux réels, et à cette étape le rythme est rompu : les nombres réels ne peuvent pas être définis à partir de couples de rationnels. Il y a pour les construire différents procédés (équivalents) que nous n'avons pas le loisir d'approfondir ici : les coupures de Dedekind, les suites de Cauchy, ... Bien entendu, les lois d'addition et de multiplication sont étendues des rationnels aux réels par des définitions appropriées. Le rythme de la construction reprend ensuite pour l'étape suivante : les nombres complexes sont définis comme classes d'équivalence de couples de réels, avec des lois appropriées pour l'addition et la multiplication. Cette étape est marquée par un accident : alors que tous les types de nombres envisagés jusqu'aux réels inclusivement possèdent, outre leurs propriétés de calcul, une propriété d'ordre (pour chaque paire de nombres distincts, il y en a un plus petit), cette propriété est perdue⁷ dans le passage des réels aux complexes.

La construction des nombres se poursuit par une étape supplémentaire qui conduit aux quaternions, sortes de nombres super-complexes. Ce passage s'accompagne d'un nouvel accident : la perte de la commutativité de la multiplication.

Approfondir les nombres, c'est aussi regarder de plus près les irrationnels pour y discerner ceux qui sont racines d'une équation polynomiale à coefficients entiers (les nombres algébriques) et ceux qui ne le sont pas (les nombres transcendants tels que π et e).

C'est également se demander si l'on peut construire des nombres infinis, qui expriment par exemple la «quantité» (le cardinal) de l'ensemble des nombres naturels, ou de l'ensemble des points sur une droite, et qui permettent d'exprimer qu'il y a plus de points sur une droite qu'il n'y a de nombres naturels. On arrive ainsi à montrer que tous les infinis ne se valent pas. C'est ce qu'a fait Cantor à la fin du 19^e siècle en introduisant les nombres *transfinis*.

Depuis quelques années, d'autres nombres, infiniment grands et infiniment petits,

⁶ L'addition correspond à la réunion disjointe et la multiplication au produit cartésien

⁷ Munir les complexes d'une relation d'ordre est une possibilité théorique qui sort du cadre de cet exposé.

ont été introduits en analyse (on parle à leur propos *de nombres non standard*) pour faciliter les problèmes de limites.

5.1.4 Les nombres comme forme de pensée

Les nombres ne prennent en compte que l'un ou l'autre aspect particulier des choses. Ils sont des abstractions au premier sens de ce terme : on les extrait des situations concrètes en laissant tomber tout ce qui ne relève pas du dénombrement, de la mesure ou du repérage.

Ils font l'objet d'une élaboration mentale qui s'appuie au départ sur la langue naturelle. Mais ils s'écrivent de façon commode avec des chiffres, c'est-à-dire des symboles dont les formes sont arbitraires. Pour avoir un sens, ces symboles doivent être décryptés, interprétés.

De plus, les nombres sont structurés de façon précise par la numération (et d'autres formes de représentation) et par les règles conventionnelles pour les opérations. Ils sont, avant l'algèbre, les matériaux d'un calcul, d'une pensée *automatique*. Lorsqu'on exécute une opération suivant les règles, on est sensé avoir compris celles-ci, on les applique sans réfléchir, ce qui soulage la pensée.

Bien que les nombres obéissent ainsi à des structures contraignantes, ils sont un champ de pensée ouvert à l'imagination, comme en témoignent de multiples phénomènes : les voies diverses du calcul mental, les nombres carrés, triangulaires, pythagoriciens, les décimaux périodiques, etc.

Comme nous l'avons vu au n° 5.1.1, les nombres sont *au départ* un substitut mental aux ensembles finis et aux grandeurs : on combine des nombres dans sa tête plutôt que de manipuler des grandeurs dans l'univers concret. Les nombres donnent aussi accès aux objets très petits et très grands, difficiles ou impossibles à manipuler, depuis les atomes jusqu'aux astres. Ils sont un moyen d'expression essentiel de la science. Ils ouvrent une fenêtre sur l'infini : lorsqu'on a écrit un nombre, si grand soit-il, on peut toujours en écrire un plus grand, il n'y a pas de fin.

L'univers des nombres qui est régi par des règles à caractère universel, est souvent pris comme modèle dans l'expression d'une vérité. De là à privilégier les aspects quantifiables d'une réalité, il n'y a qu'un pas qui est (trop) souvent franchi. Ainsi en est-il par exemple du Quotient Intellectuel. Les batteries de questions qui s'y rapportent ne mesurent que la capacité d'un individu à répondre à ces questions-là, à ce moment-là. Croire qu'il s'agit d'une mesure de l'intelligence et sous-entendre ainsi

que l'intelligence est une grandeur mesurable est abusif et souvent lourd de conséquences pour des personnes. Un quotient intellectuel de 99 (qui est sous la «moyenne» de 100) n'est pas essentiellement distinct d'un quotient de 101.

5.1.5 Les applications des nombres

Les nombres naturels et rationnels servent entre autres à étudier l'analyse combinatoire, les probabilités dans les cas finis, certains problèmes de cryptographie.

Les décimaux servent, est-il besoin de le rappeler, à exprimer la plupart des grandeurs rencontrées dans le quotidien et dans toutes les sciences. Ce sont les nombres du type de ceux que fournissent les calculatrices.

Ces mêmes nombres sont en passe de devenir, depuis peu d'années, le véhicule universel de l'information. Grâce aux progrès de l'électronique et de la miniaturisation des mémoires et des organes de calcul, les phénomènes continus tels que les sons et les images sont dorénavant transmis plus fidèlement sous forme numérique (c'est-à-dire comme des suites de nombres) que sous forme analogique⁸. Déterminer le nombre de décimales à prendre en compte pour satisfaire aux exigences de fidélité sans que cela coûte trop cher est un problème de grande importance économique⁹.

Enfin voici une question cruciale quant aux applications des nombres : nous avons dit plus haut que les nombres naïfs, en gros ceux des calculatrices, suffisent à l'immense majorité des usages quotidiens, scientifiques et techniques ; alors à quoi sert de pousser l'étude des nombres jusqu'à une mise au point nette des irrationnels, jusqu'aux propriétés d'Archimède et des intervalles emboîtés ? La raison, qui n'est donc pas l'usage immédiat, est que le système bien poli des nombres réels est un instrument irremplaçable dans la construction de l'analyse mathématique, et que celle-ci est à son tour un outil irremplaçable dans presque toutes les sciences et les techniques. On avance en analyse en s'appuyant sur l'ensemble des propriétés des nombres réels (et complexes...). Une fois établis les théorèmes et les formules, on peut alors les exploiter en se servant d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

5.1.6 Les nombres dans l'histoire, la philosophie, la culture

Les nombres (au sens de nombres *naturels*) sont en premier lieu des propriétés des

⁸ La reproduction analogique est celle qui respecte le caractère continu des signaux à transmettre.

⁹ Les nombres, qui au 19^e siècle ont pris la place des grandeurs à la base des mathématiques, ont dorénavant pris la place des grandeurs continues dans le traitement de l'information.

collections finies d'objets. On les reconnaît par comptage. Les systèmes de numération donnent à la fois des tactiques de comptage et des façons d'écrire les nombres, de les comparer et de les engager dans des opérations.

Les systèmes de numération sont plus ou moins commodes. Les plus pratiques sont ceux que l'on appelle *systèmes de numération de position*. Ce sont ceux dans lesquels la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre (nous parlons, pour le système décimal, du chiffre des unités, du chiffre des dizaines, etc.).

Il est curieux que les systèmes de numération n'aient pas sans cesse progressé au cours des siècles. En particulier les Assyro-Babyloniens utilisaient déjà une numération de position (en base 60) 2000 ans avant J.-C., alors que les Grecs des 4^e et 3^e siècles avant J.-C. notaient les nombres de manière très incommode, en dépit du fait qu'ils étaient de remarquables mathématiciens. C'est un étonnant paradoxe.

Un événement considérable se passe aux alentours du 15^e siècle. Al Kashi d'abord et Stévin ensuite ont étendu la numération décimale des nombres naturels aux fractions décimales, donnant ainsi aux nombres la forme qui nous est la plus familière, et qui se prête au calcul tellement mieux que les fractions ordinaires.

Nous manquons de place ici pour parler de l'histoire des opérations sur les nombres, bien instructive pourtant pour les enseignants. C'est qu'il nous faut esquisser maintenant une histoire plus importante : celle des extensions successives de la notion de nombre au cours des siècles.

Les Pythagoriciens, au 6^e siècle avant J.-C., pensaient que les nombres naturels étaient le principe d'explication de toutes choses. Grâce à ces nombres, appliqués entre autres à la géométrie, on pouvait selon eux découvrir des vérités par la seule force de l'esprit. Ce credo idéaliste (dont Platon a été héritier) faisait aussi partie de leurs convictions religieuses. Au moins est-ce là ce que la tradition en rapporte.

En particulier, les nombres auraient été, selon eux, des instruments assez puissants pour servir dans tous les cas à la comparaison de deux grandeurs. Considérons par exemple deux segments de droite. On pensait qu'il y avait toujours moyen de trouver un troisième segment, fût-il tout petit, qui serait contenu un certain nombre de fois dans le premier et aussi un certain nombre de fois dans le second (un tel segment faisant le lien entre les deux segments donnés est appelé *commune mesure* pour ceux-ci). Si bien qu'étant donné deux segments, on pourrait toujours dire que *le premier est au second comme m est à n*, où *m* et *n* sont le nombre de fois qu'une commune mesure est contenue respectivement dans le premier et dans le second.

La possibilité (ou non) de trouver toujours une commune mesure entre deux grandeurs est une question de portée considérable. En effet, l'objectif principal de la géométrie – au moins à ses débuts – était de comparer des grandeurs (longueurs, aires, volumes). L'enjeu était aussi de savoir si les nombres étaient ou n'étaient pas un instrument approprié à l'étude des grandeurs. Les Pythagoriciens croyaient aux nombres. Or il se fait – selon la tradition – qu'un disciple de Pythagore découvrit que dans un carré, quel qu'il soit, on ne peut pas trouver de commune mesure entre le côté et la diagonale. Le premier exposé connu de cette découverte se trouve dans les *Éléments* d'Euclide.

Cet événement considérable a provoqué un divorce entre la géométrie (c'est-à-dire l'étude des grandeurs) et les nombres. Dans Euclide, ces deux types d'objets sont étudiés séparément. Le divorce a duré plus de deux millénaires.

C'est là une chose à peine croyable pour qui n'a pas regardé le problème de près : comment en effet peut-on penser qu'étant donné un segment de droite et un autre choisi comme unité de mesure, il soit parfois *impossible* d'exprimer la mesure du premier segment à l'aide d'un nombre «raisonnable», comme ceux par exemple que proposent les calculatrices électroniques ?

Les nombres auxquels il faut souvent recourir sont appelés *irrationnels* : ce sont d'un certain point de vue des monstres. On ne peut les écrire dans aucun système de numération ni avec un nombre fini de chiffres, ni même avec des chiffres en kyrielles infinies se répétant périodiquement. On peut en calculer autant de décimales que l'on veut (à condition d'avoir le temps), mais sauf exception une infinité de décimales resteront toujours inconnues. Si de tels nombres sont si malaisés à saisir par l'écriture, on comprend qu'il ne soit pas facile non plus de montrer comment calculer avec eux.

Une fois acquise la notion de nombre irrationnel, on disposait enfin d'un instrument pour mesurer une grandeur quelconque. Mais à ce stade un chaînon manque encore pour constituer les nombres que nous appelons réels, c'est-à-dire ceux qui permettent de repérer tous les points d'une droite. En effet, il fallait encore pour cela introduire les nombres dits *négatifs*. Au début, c'est-à-dire chez les mathématiciens indiens et arabes, puis chez les algébristes européens du 16^e siècle, les nombres négatifs étaient utilisés comme des instruments de calcul purement formels, et donc ne renvoyant à rien dans la réalité. Il était entendu en effet que les nombres exprimaient

des quantités, or on ne peut concevoir de quantités plus petites que zéro. Bien qu'entrés dans l'usage commun des mathématiciens dès la fin du 17^e siècle, les nombres négatifs ont suscité de véhémentes oppositions jusqu'en plein 19^e siècle.

Les nombres réels ont été définitivement mis au point aux alentours de 1870 par Dedekind, Cantor, Weierstrass et Méray. Ainsi, après tant de siècles d'incompréhension, la géométrie et les nombres étaient-ils enfin réconciliés ! Ce qui avait été en jeu pendant tant de siècles, c'était la difficile conciliation du discret (ce qui procède pas à pas, par sauts) et du continu. Ce débat a résonné dans toute l'histoire de la philosophie, au moins depuis Aristote (dans la *Physique* [Ari83]). Il serait bien risqué d'affirmer qu'il est clos, même sur le plan mathématique. L'analyse non standard, dans les années 60 de ce siècle, a proposé d'élargir encore le système des nombres qui permettent de repérer les points d'une droite.

Mais revenons à 1870. L'effet, sur les mathématiques en général, de la mise au point des nombres réels ne s'est pas fait attendre longtemps. Puisque les nombres, en un sens considérablement étendu, étaient redevenus de bons instruments pour étudier la géométrie, ils ont tout simplement éliminé les grandeurs. La géométrie (ordinaire) a été tout entière rebâtie à partir des nombres, dans le cadre nouveau appelé *algèbre linéaire*.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, on construit les nombres à partir des ensembles, puis on s'en sert pour élaborer la géométrie. Auparavant, les nombres étaient *d'abord* conçus, dans un cadre géométrique, comme ce qui permet de mesurer un segment ou de repérer un point sur une droite¹⁰. La portée de cette inversion est considérable. On reconnaît assez clairement aujourd'hui que la construction des nombres dans l'enseignement ne peut pas être naïvement «mise à jour» par élimination des grandeurs et des mesures.

5.2 Les nombres dans le fondamental

5.2.1 Écrire, utiliser et organiser les nombres rencontrés dans le quotidien

Les enfants rencontrent des nombres dans leur univers quotidien. Il faut leur

¹⁰ Il faut cependant nuancer cette affirmation. On doit à E. Artin [Art78] d'avoir proposé une construction axiomatique des nombres dans un cadre d'abord géométrique. C'est là que G. Papy [Pap64], [Pap65] a trouvé naguère l'inspiration des nombres réels pour les classes.

apprendre à les nommer, à les écrire, à s'en servir dans des calculs, à les ranger sur la droite des nombres.

On peut imaginer d'enseigner les nombres selon un ordre théorique d'engendrement et sans tenir compte des nombres qui s'offrent spontanément à l'attention des enfants dans leur vie familiale et sociale. Nous pensons qu'il vaut mieux partir de l'expérience des élèves et des connaissances qu'ils acquièrent en dehors de l'école, pour compléter et organiser ces connaissances. Parcourons rapidement cet apprentissage.

La notion de nombre doit s'abstraire (s'écarter) de la nature des objets et de la façon dont ils sont disposés : il y a autant de chaises que d'élèves, le nombre de chaises est égal au nombre d'élèves. Le nombre n'est fait ni de chaises, ni d'élèves ; il ne change pas lorsqu'on dispose les chaises en cercle. On arrive à nommer le nombre en apprenant à compter. Une première abstraction consiste à remplacer les objets par des bâtonnets ou des points¹¹.

Les premiers nombres rencontrés par les enfants sont des naturels tout petits. On les appelle les nombres *intuitifs*. Ils ne dépassent pas cinq ou six : ce sont ceux que l'on reconnaît à vue (*Fig. 1*).

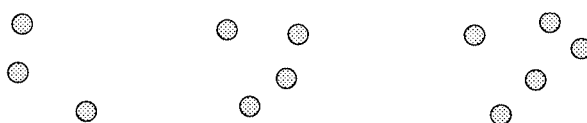


Fig. 1

On les reconnaît encore plus facilement quand ils sont présentés symétriquement (*Fig. 2*).

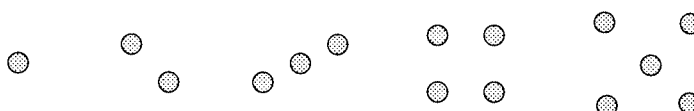


Fig. 2

Après viennent les nombres *figuratifs*, ainsi appelés parce qu'on ne les reconnaît à vue que s'ils sont structurés. Par exemple, on ne perçoit pas immédiatement les nombres de points présentés à la *Fig. 3*, mais on les reconnaît sans peine à la *Fig. 4*.

¹¹ Voir du côté des grandeurs l'idée analogue de remplacer les objets par des représentants conventionnels (n° 4.2.3).



Fig. 3

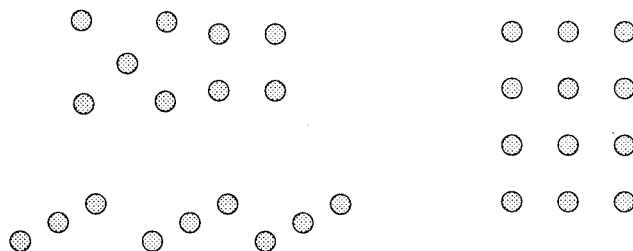


Fig. 4

La constitution de paquets et la numération décimale aident à reconnaître et comparer des nombres plus grands : 324 est fait de 3 paquets de 100, de 2 paquets de 10 et de 4 unités.

Les nombres évoqués jusqu'ici sont des nombres naturels. Par ailleurs, les grandeurs mesurées rencontrées *dans le quotidien* donnent un visage aux nombres qui n'ont pas trop de chiffres : 1 m 50 est entre 1 m et 2 m ; 1 kg 500 est entre 1 kg et 2 kg ; 1,5 l est entre 1 l et 2 l. Souvent, ces grandeurs sont lues sur une échelle graduée, ce qui prépare la construction de la droite des nombres.

Les fractions d'une unité de grandeur (ce sont également des grandeurs, pas des nombres, mais elles préparent aux nombres) se rencontrent aussi dans le quotidien ($\frac{3}{4}$ l, $\frac{3}{4}$ kg) et se lisent sur des représentations (Fig. 5).

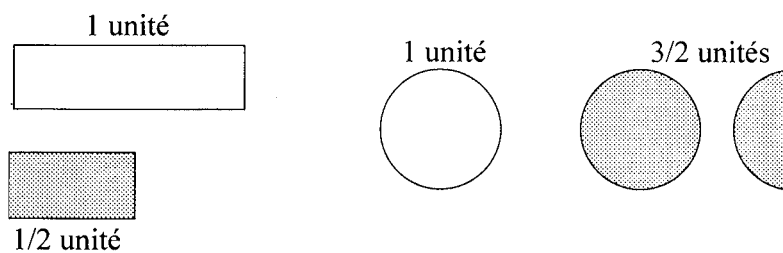


Fig. 5

Au fur et à mesure que les enfants avancent en âge, ils ont moins besoin de représentations figurées et ils reconnaissent les nombres à leur représentation symbolique, c'est-à-dire à leur écriture.

Une difficulté essentielle tient à ce qu'un même nombre, quelle que soit la situa-

tion concrète dont il est issu, peut toujours s'écrire de diverses façons, plus ou moins commodes selon les circonstances.

Ainsi lorsqu'on veut calculer $7 + 5$, on peut *remplacer* 5 par $3 + 2$, ce qui permet de calculer $7 + 3$ qui vaut 10, et d'ajouter enfin 2. Ou encore si on veut calculer 98×7 , il est commode de remplacer d'abord 98 par 100 et d'arriver à 700, et de retirer ensuite 2×7 c'est-à-dire 14, ce qui donne le résultat 686.

Ces opérations de remplacement conduisent à l'égalité entre diverses formes d'un même nombre. On peut écrire

$$\begin{aligned} 5 &= 3 + 2, \\ 98 &= 100 - 2, \\ 98 \times 7 &= 700 - 14. \end{aligned}$$

Le signe $=$ placé entre deux expressions signifie que celles-ci représentent un même nombre. Voici deux autres exemples :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{2}{6} = 0,333\dots, \\ \pi &= 3,14\dots \end{aligned}$$

Dans le domaine des grandeurs, on peut de même remplacer un demi-litre par 5 décilitres et écrire

$$\frac{1}{2} \text{ l} = 0,5 \text{ l} = 5 \text{ dl}.$$

Ainsi les symboles $+$, $-$, $\times$ et la barre de fraction n'indiquent pas nécessairement qu'il faut faire une opération : ils servent aussi à représenter un même nombre de toutes sortes de façons, comme le montrent encore les exemples 1 et 2. Cette observation prépare à l'utilisation du signe $=$ en algèbre (cf. n° 7.2.3).

Exemple 1 (vers 6-7 ans)

a) Classer les 18 élèves d'une classe selon plusieurs critères.

On pourrait par exemple avoir les classements suivants : 10 garçons et 8 filles, 12 enfants viennent à l'école en voiture, 6 en vélo, ce qui amène à étiqueter de plusieurs façons l'ensemble des élèves de la classe (*Fig. 6*).

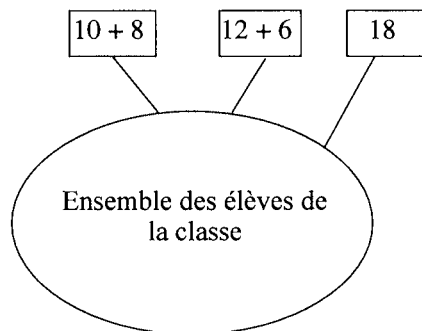


Fig. 6

Cette activité illustre la notion d'addition en tant qu'opération et introduit au sens de l'égalité sans même que l'on doive écrire un seul signe = !

b) Jean possède 8 billes ; il joue et en gagne 7. Paul possède 18 billes, il joue et en perd 3. A la fin qui en a le plus ?

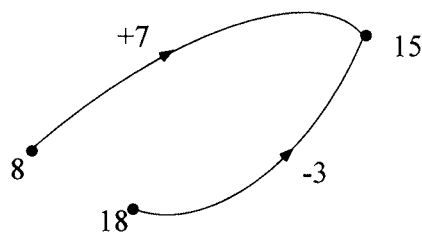


Fig. 7

La Fig. 7 schématise la situation. Cette représentation à l'aide d'un graphe sagittal donne elle aussi une vision de l'égalité qui n'utilise pas le signe = .

c) Compléter les expressions suivantes en y insérant = ou ≠

$$\begin{aligned} 4 + 8 &\dots 10, \\ 7 + 4 &\dots 6 + 5, \\ 8 &\dots 1 + 7, \\ 9 + 5 &\dots 8 + 7. \end{aligned}$$

Nous entrons ici dans l'univers abstrait des nombres, accessible aux enfants seulement après une manipulation des mêmes opérations dans des contextes.

L'exemple 2 s'adresse à des enfants plus âgés. Ici la situation conduira naturellement à élaborer des égalités

Exemple 2 (vers 8-9 ans)

Dessiner sur du papier quadrillé tous les rectangles dont l'aire vaut 24 petits carrés.

Outre qu'il donne l'occasion d'écrire des égalités entre produits, cet exercice conduit à construire une image mentale de la notion de diviseur : le nombre 3 divise 24 car on peut répartir les 24 petits carrés en trois rangées de 8 petits carrés chacune. A chaque figure on peut faire correspondre un produit et écrire

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12, \\ 24 &= 3 \times 8, \\ 24 &= 4 \times 6, \\ 2 \times 18 &= 3 \times 8, \text{ etc.} \end{aligned}$$

et aussi

On peut proposer une situation analogue à propos des rectangles qui ont même périmètre.

Mettre de l'ordre dans les nombres (les organiser) dans l'enseignement fondamental, c'est en particulier les ranger sur le *ruban*, puis sur *la droite des nombres*.

D'abord les enfants alignent des blocs et les comptent. Il n'y a pas de zéro au début de ces alignements. Il y a des objets que l'on compte, et le premier est numéroté 1.

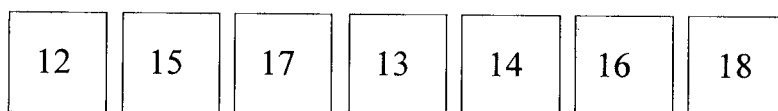
Ce ruban des nombres n'est rien d'autre qu'une écriture de la «comptine», c'est-à-dire l'énoncé des premiers naturels dans l'ordre. Il exhibe l'aspect *ordinal* des nombres. On sait que pour acquérir l'idée de nombre, les enfants doivent arriver à associer aux mots de la comptine, aux signes alignés sur le ruban, les nombres *cardinaux* correspondants, ceux qui expriment la quantité de blocs alignés depuis le premier.

À l'étape suivante, on écrit les nombres face aux traits d'une graduation. Les nombres en représentation décimale sont les plus faciles à situer. Ceux qui sont représentés par des fractions présentent des difficultés dont les élèves ne viennent pas à bout avant le secondaire. Les enfants ayant appris que diverses écritures peuvent représenter un même nombre, ils réalisent que ce nombre correspond à un point, mais qu'on peut y reconnaître aussi la distance entre ce point et le zéro, et la situation du point d'un côté ou de l'autre du zéro.

Exemple 3

a) (vers 6-7 ans)

On dispose d'un petit train (vrai ou dont chaque wagon est représenté sur une carte) et de wagons numérotés comme suit :



Remettre les wagons dans l'ordre.

b) (vers 8-9 ans)

Compléter les graduations sur le ruban numérique de la Fig 8.

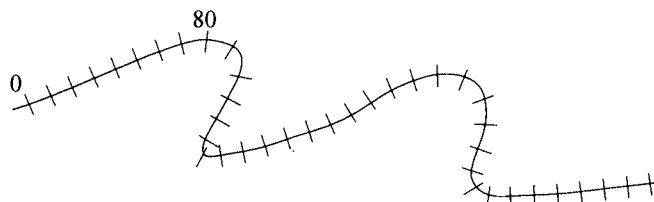
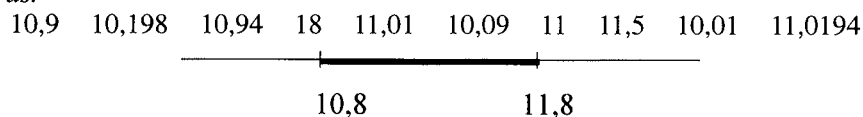


Fig. 8

c) (vers 10-11 ans)

Dans la liste ci-dessous, entourer les nombres qui figurent dans l'intervalle en trait gras.

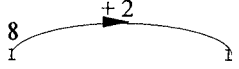
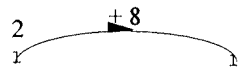
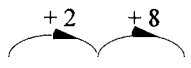
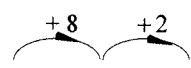


5.2.2 Des contextes, sources d'images mentales

Si on évoque des nombres et si on calcule, c'est pour trouver des réponses à des questions, et les contextes dans lesquels on travaille sont sources d'images mentales qui donnent du sens aux nombres et aux opérations.

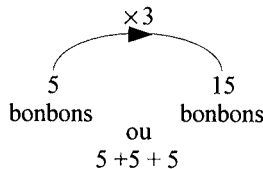
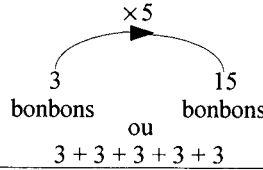
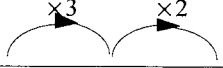
Au n° 5.2.1 nous avons proposé d'accepter dans la classe les nombres que les enfants rencontrent dans le quotidien. C'est une façon d'inscrire d'emblée les nombres dans des contextes. Insistons à présent sur l'importance des contextes pour donner du sens aux opérateurs et aux opérations. Dans le cas des nombres naturels, l'addition sert à trouver le nombre d'éléments que l'on obtient par réunion de deux ensembles disjoints. Lorsqu'on passe à des nombres servant à mesurer, l'addition donne par exemple la longueur totale de deux bâtons mis bout à bout, ou le poids total de deux objets que l'on colle l'un à l'autre.

Dans les situations additives qui sont liées à la réunion d'ensembles disjoints, la commutativité est évidente. Par contre dans les situations additives qui mettent l'accent sur l'opérateur, la commutativité n'apparaît qu'au prix d'une abstraction, car les deux situations qui conduisent à la même somme ne sont pas les mêmes. Par ailleurs dans les situations de composition d'opérateurs additifs, la commutativité est à nouveau évidente. Ces observations sont illustrées par le *Tabl. 1*, qui montre cinq codages distincts pour la somme de 8 et 2.

situation	codage	on met l'accent sur
dans le minibus, il y a 8 filles et 2 garçons	$8 + 2$ ou $2 + 8$	la réunion de deux ensembles disjoints
Jean a 8 billes, il en gagne 2		l'opérateur + 2
Jean a 2 billes, il en gagne 8		l'opérateur + 8
Jean gagne 2 billes puis 8 billes		une composition d'opérateurs
Jean gagne 8 billes puis 2 billes		une composition d'opérateurs

Tabl. 1

De même dans les situations multiplicatives qui sont liées au produit cartésien, la commutativité est évidente, alors qu'elle demande à être établie dans les situations où il s'agit de prendre tant de fois un même nombre. Pour la composition d'opérateurs multiplicatifs, la commutativité n'est pas toujours évidente (Tabl. 2).

situation	codage	on met l'accent sur
nombre de carreaux d'un rectangle de 3 sur 5, dessiné sur un papier quadrillé	3×5 ou 5×3	le calcul d'une aire
3 paquets de 5 bonbons	 5 bonbons ou 15 bonbons $5 + 5 + 5$	l'opérateur $\times 3$
5 paquets de 3 bonbons	 3 bonbons ou 15 bonbons $3 + 3 + 3 + 3 + 3$	l'opérateur $\times 5$
agrandir des longueurs par 3, puis par 2		la composition de deux opérateurs
agrandir des longueurs par 2, puis par 3		la composition de deux opérateurs

Tabl. 2

Le sens qu'on donne aux opérations intervient de deux façons :

- une situation étant donnée et maîtrisée, elle déclenche l'apparition d'un calcul, d'une opération ;

- une opération étant donnée, elle doit pouvoir être accrochée à une situation qui lui donne sens.

L'exemple suivant suscite des images mentales pour la commutativité et l'associativité de la multiplication.

Exemple 4 (vers 10-11 ans)

En utilisant 48 petits cubes, construire des parallélépipèdes rectangles et écrire leur volume en utilisant d'une part le produit des trois dimensions, et d'autre part – de diverses façons – l'expression résumée par base $\times$ hauteur.

Pour le parallélépipède (2,4,6), on obtient

$$\begin{aligned} 2 \times 6 \times 4 &= (2 \times 6) \times 4 = 12 \times 4 \\ &= (2 \times 4) \times 6 = 8 \times 6 \\ &= (6 \times 4) \times 2 = 24 \times 2. \end{aligned}$$

5.2.3 Étudier des patterns, des familles de nombres

De multiples relations introduisent dans l'ensemble des nombres des régularités, des symétries, des rythmes qui stimulent la pensée et donnent sens aux opérations.

Le pattern de base, c'est la suite même des nombres naturels

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

La suite des nombres pairs s'obtient en commençant à 0 et en ajoutant tout le temps 2

$$0, 2, 4, 6, 8, \dots$$

On obtient de manière analogue les multiples de n'importe quel naturel, par exemple les multiples de 3

$$0, 3, 6, 9, 12, \dots$$

En partant de 1 et en ajoutant tout le temps 2, on obtient les nombres impairs

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

En répétant l'addition d'un nombre naturel à lui-même, on engendre la multiplication des naturels. Par exemple

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3.$$

De manière analogue, une multiplication répétée engendre une puissance

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6.$$

En passant chaque fois au double à partir de 1, on engendre

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

En prenant les carrés des nombres naturels, on obtient

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

En quittant les nombres naturels, on découvre aussi beaucoup de patterns intéres-

sants. Par exemple, en passant chaque fois à la moitié à partir de 1, on obtient

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

La proportionnalité est un type de pattern particulier qui s'obtient en multipliant tout le temps par un même nombre. Par exemple

$$1 \times 1,5 = 1,5,$$

$$2 \times 1,5 = 3,$$

$$3 \times 1,5 = 4,5,$$

$$4 \times 1,5 = 6.$$

Notons pour terminer que tous ces patterns prennent d'avantage de sens lorsqu'on les découvre dans des contextes, géométriques ou autres. C'est ce que montrent les exemples ci-après.

Exemple 5 (vers 6-7 ans)

Compléter la Fig. 9 en insérant les numéros des maisons des deux côtés de la rue.

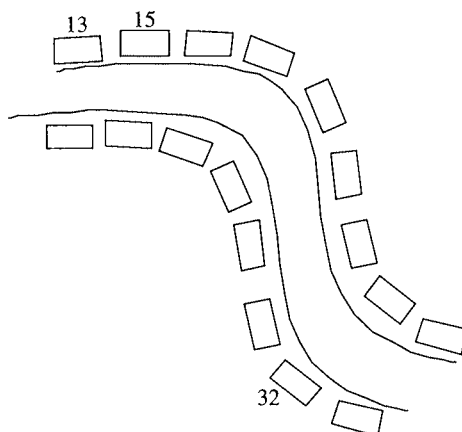


Fig. 9

Exemple 6

a) (vers 6-7 ans)

Assembler des carrés (en bois ou en carton) pour former des carrés plus grands.

Compter le nombre de carrés que l'on emploie.

Les élèves arrivent à compter par lignes ou par colonnes :

$$2 + 2 = 4, \quad 3 + 3 + 3 = 9, \dots$$

Ils s'initient à la notion d'aire.

b) (vers 8-9 ans)

Sur un quadrillage, continuer à colorier des carrés de plus en plus grands. Pour chaque carré colorié, noter le nombre de petits carrés le long d'un côté et le nombre total de petits carrés. Faire un tableau ordonné des résultats.

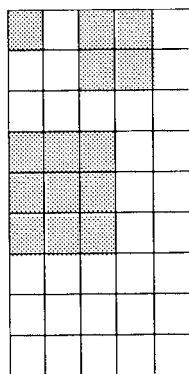


Fig. 10

Nombres	Carrés
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Tabl. 3

La Fig. 10 et le Tabl. 3 montrent qu'on construit la suite ordonnée des carrés à partir d'une image mentale à caractère géométrique.

5.2.4 Comprendre les techniques de calcul mental et écrit ; contrôler les calculatrices

Mieux vaut comprendre les techniques de calcul que calculer en virtuose ; les machines font les calculs compliqués, mais il faut les contrôler. Les machines peuvent aider à apprendre les nombres.

Le calcul se situe à trois niveaux : calcul mental, calcul écrit, calcul à la machine (pour ne pas parler du calcul à l'ordinateur, qu'il faudra nécessairement prendre en compte d'ici peu d'années).

Le calcul mental – à ne pratiquer que sur des nombres pas trop grands et sans accorder d'importance à la vitesse – donne l'occasion aux élèves d'exercer leur esprit d'invention, chacun trouvant la voie qui lui convient le mieux pour arriver au résultat. En expliquant, oralement ou par écrit, le chemin qu'ils ont suivi, ils clarifient et approfondissent leur connaissance des propriétés des opérations. Certaines d'entre elles fondent les règles du calcul écrit. Tout ce qui prépare à celui-ci, et en particulier le passage par la dizaine, doit être vu dans le calcul mental.

Le calcul écrit, au contraire, n'est pas un lieu de liberté : on y applique des règles fixes. Il est important de comprendre ces règles sur des nombres de deux ou trois chiffres, même si la pratique efficace du calcul exige qu'on les applique aveuglément.

Exemple 7

a) (vers 6-7 ans).

On lance deux dés. Calculer la différence entre les deux nombres affichés par les dés.

Imaginer d'autres lancers donnant la même différence.

b) (vers 8-9 ans).

Lancer un dé et inscrire le chiffre obtenu dans la première case du Tabl. 4. Remplir de même les quatre autres cases, et ensuite effectuer la soustraction indiquée.

—		

Tabl. 4

Imaginer deux séries de cinq lancers qui donnent la même différence.

La propriété mise en évidence ici et qui s'exprime par l'égalité

$$(a + m) - (b + m) = a - b,$$

où a , b et m sont des naturels, est fondamentale en calcul mental et pour la méthode de soustraction écrite par compensation.

c) (vers 10-11 ans).

Compléter la table de division (Tabl. 5). Repérer les quotients identiques.

		Diviseur			
		2	4	8	16
Dividende	256				
	128				
	64				
	32				
	16				

Tabl. 5

Même question pour le Tabl. 6.

		Diviseur			
		1	10	100	1000
Dividende	1000				
	100				
	10				
	1				

Tabl. 6

La propriété exprimée par l'égalité :

$$(am):(bm) = a:b$$

où a , b et m sont des naturels, est indispensable au calcul mental et à la division écrite par un décimal.

Venons-en maintenant aux fractions. Les échecs nombreux et bien connus de leur apprentissage tiennent vraisemblablement à une expérimentation trop incomplète de tous les phénomènes liés au fractionnement des grandeurs (cf. [Fre83]). Il nous semble que, dans le fondamental, seules les opérations correspondant à des manipulations et des représentations graphiques de grandeurs doivent être maîtrisées par les élèves. Dans cette perspective, les fractions n'acquièrent leur statut abstrait de nombre qu'au cours du secondaire.

Quelle place enfin faire aux calculatrices ?

Les jeunes enfants ont de la peine à résoudre les questions qui comportent trop d'étapes : ils perdent souvent le fil conducteur en cours de route. Les calculettes offrent à cet égard une possibilité intéressante : en débarrassant l'esprit du fardeau des calculs, elles lui permettent de se concentrer sur le sens des opérations dans le problème proposé. Nous pensons pour cette raison qu'il faut utiliser les calculatrices non pas constamment, mais très tôt et très régulièrement.

D'autre part, les élèves doivent apprendre, dans chaque circonstance, à choisir opportunément un mode de calcul approprié : oral, écrit ou à la machine.

Il est raisonnable de demander la plupart des calculs compliqués à des machines. Qu'on le veuille ou non, celles-ci font partie de notre univers et les enfants doivent en apprendre l'usage. Ceci implique qu'ils gardent le contrôle des résultats par l'estimation des ordres de grandeur (il y a là une forme de calcul mental à maîtriser).

Exemple 8 (vers 10-11 ans)

Dessiner dans la cour de récréation, un carré de 6 m de côté, relier ensuite les milieux de ses côtés pour former un nouveau carré et déterminer les mesures de celui-ci.

Cet exercice illustre également le principe 6.2.2 concernant les objets extrêmes de la géométrie. La construction à grande échelle d'angles droits et de segments de même longueur nécessite l'invention d'autres méthodes que celles que l'on utilise pour les dessins sur une feuille. Attardons-nous ici aux aspects numériques du problème posé.

Le grand carré mesure 36 m^2 , et le carré intérieur a une aire deux fois plus petite, c'est-à-dire 18 m^2 . On mesure le côté du carré intérieur, et on *calcule* son aire : on n'obtient pas 18 m^2 . La mesure de longueur est imprécise. Comment l'améliorer ? En se reportant à une table de carrés (cf. *Tabl. 3*), on trouve un premier encadrement,

$$16 \text{ m}^2 < 18 \text{ m}^2 < 25 \text{ m}^2 \quad \text{et} \quad 4 \text{ m} < c < 5 \text{ m}.$$

On cherche une longueur située entre 4 m et 5 m, c'est-à-dire entre 40 dm et 50 dm. On construit une table des carrés des nombres compris entre 40 et 50. C'est l'occasion de faire des multiplications écrites (à répartir entre les élèves de la classe). On trouve :

$$1\,764 \text{ dm}^2 < 1\,800 \text{ dm}^2 < 1\,849 \text{ dm}^2 \quad \text{et} \quad 42 \text{ dm} < c < 43 \text{ dm}.$$

L'étape suivante conduit à construire la table des carrés compris entre 420 et 430. C'est le moment d'utiliser une calculatrice. On trouve :

$$179\,776 \text{ cm}^2 < 180\,000 \text{ cm}^2 < 180\,625 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad 424 \text{ cm} < c < 425 \text{ cm}.$$

Le passage au mm^2 conduit à la limite de la capacité d'affichage d'une calculatrice à huit chiffres. On cherche ensuite dans quels encadrements se trouve la valeur mesurée.

La calculatrice fournit des occasions de s'intéresser aux nombres pour eux-mêmes et est ainsi source d'investigations.

Exemple 9 (vers 8-9 ans)

On entre un nombre de trois chiffres dans une calculatrice, par exemple 627. Sur quelles touches faut-il frapper pour changer le 2 en 3 » et garder les deux autres chiffres ?

On peut faire varier à l'infini ce type de questions : partir de nombres qui contiennent plus de chiffres, de décimaux, faire changer deux chiffres à la fois, ... On travaille ainsi à la fois la numération et les opérations.

Exemple 10 (de 8 à 11 ans)

On dispose d'une calculatrice de poche qui possède une procédure automatique d'itération d'une même opération. Avec une TI 106 par exemple, entrer un nombre donné, puis taper successivement les touches suivantes :

1) $\boxed{+}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

2) $\boxed{-}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

3) $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

4) $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

Étudier les suites de nombres que l'on obtient ainsi.

On engendre des suites de multiples de naturels, de négatifs, de puissances, et des puissances de l'inverse d'un nombre.

Exemple 11 (vers 10-11 ans)

On dispose d'une calculatrice de poche qui possède une procédure automatique d'itération d'une même opération. Avec une TI 106, par exemple, on affiche 0 sur la calculatrice et on pousse sur les touches $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$, après avoir poussé sur $\boxed{=}$ un certain nombre de fois, le nombre x apparaît. Une autre fois, en partant de 13 et en utilisant $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$, on voit le même nombre x apparaître à nouveau. Quel nombre x peut-il être ?

Après avoir réparti le travail entre les élèves et ordonné les nombres que l'on obtient avec les deux procédures, on voit apparaître la suite suivante :

28, 48, 68, 88, 108, ...

5.2.5 Aller toujours plus loin

Les suites de nombres qui croissent et décroissent constamment préparent l'étude de l'infini.

Il vient un moment où l'enfant réalise que, dans le système décimal, il peut écrire des nombres à n'en plus finir. C'est là une prise de conscience importante et fascinante. De même, il peut multiplier un nombre par 10, puis encore par 10, et ainsi de suite. Les zéros s'alignent à la droite du nombre et celui-ci croît de façon fantastique. Ou encore, on peut diviser un par 2, et le résultat encore par 2, et ainsi de suite, sans trouver de raison de s'arrêter, et le résultat devient vite extrêmement petit.

L'infini est quelque part au-delà de tout cela. Sans doute à cet âge continue-t-il à se confondre avec un très grand nombre, ou un très petit (dans le cas de l'infiniment petit). Mais il est utile d'expérimenter la possibilité de « continuer toujours »

Ces bouts de chemin sur la route de l'infini se multiplient au début du secondaire. Ils débouchent sur l'analyse (qualifiée à juste titre d'infinitésimale).

Exemple 12 (vers 10-11 ans)

Combien de fois faut-il plier une grande feuille en deux pour obtenir un cahier d'au moins 500 pages ?

On peut d'abord essayer de deviner, c'est-à-dire de donner seulement son impression. Ensuite on considère les nombres 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Il faut plier 8 fois seulement.

5.3 Les nombres au premier degré du secondaire

5.3.1 Écrire, utiliser et organiser de nouveaux nombres selon les besoins

Certains problèmes imposent l'usage de nouveaux nombres, qui généralisent ceux connus jusque-là. Le foisonnement des nombres ainsi utilisés impose une mise en ordre appropriée. La droite des nombres continue à se remplir.

Parfois au début du secondaire, on reprend la construction des nombres à la base, en étudiant successivement les naturels, les entiers, les rationnels et jusqu'à un certain point les réels dans l'ordre de leur engendrement logique. Nous pensons qu'il vaut mieux, ici comme dans l'enseignement fondamental, s'appuyer d'abord sur une pratique des nombres, et structurer ceux-ci progressivement selon les besoins.

Au début du secondaire, les nombres viennent encore de la vie quotidienne, mais ils naissent aussi sur des chantiers de problèmes nouveaux.

Les *fractions* dépassent le stade où elles expriment un fractionnement d'une grandeur : elles rejoignent le statut de nombre, parce qu'on les utilise dans des mesures et des opérations, comme quand on calcule le périmètre d'un rectangle dont une au moins des dimensions est donnée sous forme fractionnaire.

Exemple 1 (vers 12-13 ans)

Soit un rectangle de 20 cm^2 . On donne la longueur d'un de ses côtés. On demande la longueur de l'autre côté et le périmètre du rectangle.

aire	longueur d'un côté	longueur de l'autre	périmètre
20	4		
20	8		
20	7		
20	a		

Tabl. 1

Le but de cet exercice est de faire acquérir à la fraction le statut de nombre. Pour les deux premiers rectangles proposés, les nombres décimaux suffisent. Pour le troisième, on ne trouve pas de solution sous forme décimale limitée. Même si l'élève propose encore une solution sous forme décimale pour $20/7$, le calcul du périmètre pose le problème des opérations sur les nombres décimaux illimités et motive le maintien de l'écriture fractionnaire.

L'emploi d'une variable pour la longueur du premier côté rend l'écriture fractionnaire inévitable.

Les *entiers*, et plus généralement les nombres *réels* (qui resteront encore long-

temps «naïfs») interviennent pour repérer des points dans un système d'axes, pour exprimer puis enchaîner des transformations du plan (voir 6.3.5, Exemple 11), pour calculer des valeurs moyennes, pour écrire des équations de droites et de courbes. Ceux-ci acquièrent leur plein statut de nombre du fait qu'on les utilise dans des calculs.

Exemple 2 (vers 12-13 ans)

On relève la température à midi et la température à minuit, puis on fait la moyenne de ces deux relevés. Que peut-on dire de deux relevés dont la moyenne est de 3°C ?

On suppose que la température nocturne est inférieure à la température diurne. Il s'agit de trouver deux nombres dont le premier est inférieur au second et dont la somme est 6. Le *Tabl. 2* ci-dessous ordonne les résultats pour des valeurs entières.

T° à midi	4	5	6	7	8	9	...
T° à minuit	2	1	0	-1	-2	-3	...

Tabl. 2

Les nombres négatifs arrivent dans le prolongement d'une famille ordonnée de nombres positifs. On prolonge pour ces derniers la propriété de compensation : lorsqu'on augmente un terme d'une somme et qu'on diminue l'autre d'une même valeur, la somme ne change pas.

Certains *irrationnels* apparaissent, surtout dans des contextes géométriques, que ce soit en liaison avec le théorème de Pythagore ou parce que l'on veut calculer le côté d'un carré dont l'aire s'exprime par un naturel non carré parfait.

Les irrationnels, et déjà avant eux les rationnels dont l'écriture décimale est infinie, sont approchés d'abord par des encadrements. Ceux-ci constituent la seule façon de les utiliser dans des calculs, et en outre ils préparent l'idée de limite.

Exemple 3 (vers 12 - 13 ans)

Répartir les pièces du Tangram de la Fig. 1 en deux carrés. Calculer les aires et les côtés de chaque carré.

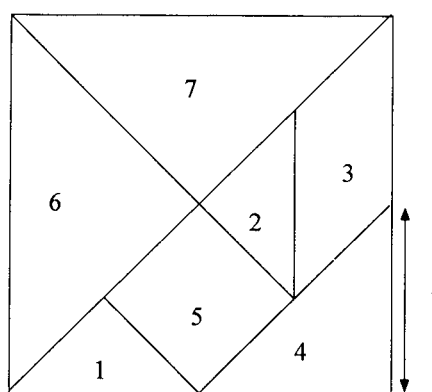


Fig. 1

On y arrive en construisant deux carrés identiques dont l'aire vaut 2. Le côté c de chaque carré est donc le nombre dont le carré est 2.

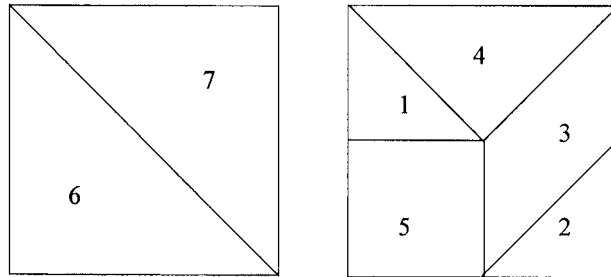


Fig. 2

Les élèves situent d'abord ce nombre entre 1 et 2 et conjecturent souvent qu'il vaut 1,5 ; mais la multiplication de 1,5 par lui-même leur donne tort. Ils essaient alors avec 1,4 et ainsi de suite. On construit ainsi les encadrements suivants :

$$\begin{aligned} 1 &< c < 2, \\ 1,4 &< c < 1,5, \\ 1,41 &< c < 1,42, \\ 1,414 &< c < 1,415, \\ 1,4142 &< c < 1,4143. \end{aligned}$$

A ce stade un raisonnement sur le dernier chiffre de c conduit à réaliser que ce décimal ne peut pas être limité. C'est l'occasion d'introduire la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice et de donner du sens à l'écriture $\sqrt{2}$.

En même temps que les sortes de nombres se multiplient, les façons de les imaginer et de les écrire se multiplient aussi, et toujours pour de bonnes raisons.

Ainsi par exemple, pour calculer $7 - 9$, il est utile de réaliser qu'on peut *remplacer* 9 par $7 + 2$. De même pour calculer

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5},$$

on remplace $\frac{1}{3}$ par $\frac{5}{15}$ et $\frac{1}{5}$ par $\frac{3}{15}$.

Ici comme au primaire, ces remplacements d'une expression d'un nombre par une autre conduisent au signe $=$, car on peut écrire

$$\begin{aligned} 9 &= 7 + 2, \\ \frac{1}{3} &= \frac{5}{15}, \\ \frac{1}{5} &= \frac{3}{15}. \end{aligned}$$

Le signe = sert à relier deux expressions d'un même nombre (et il n'est pas nécessairement ce que beaucoup d'élèves croient : une invitation à faire un calcul). Ces approches du signe = conduisent au principe algébrique de substitution (cf. n° 7.3.3).

Exemple 4 (vers 12-13 ans)

On se donne un nombre naturel a et deux opérateurs f_1 et f_2 qu'on utilise dans un ordre, puis dans l'autre. Dans quels cas obtient-on un diagramme comme celui de la Fig. 3, et dans quels cas un diagramme comme celui de la Fig. 4 ?

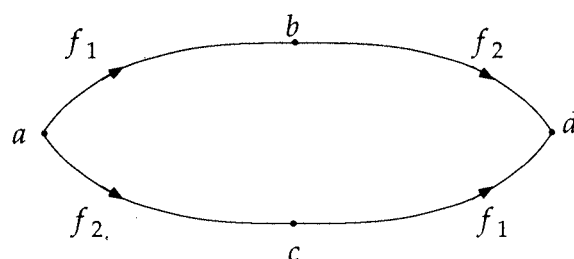


Fig. 3

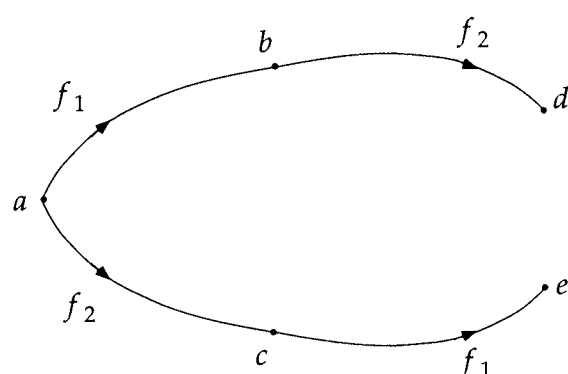


Fig. 4

Lorsque les opérateurs f_1 et f_2 sont tous deux des additions, ou des soustractions, ou des multiplications, ou des divisions, cela ne pose pas de problème nouveau.

Lorsque f_1 est une addition et f_2 une soustraction, on est amené dans certains cas à introduire (ou à utiliser) des nombres négatifs.

Lorsque f_1 et f_2 sont l'un une multiplication, l'autre une division, on est amené dans certains cas à utiliser des rationnels dans leur écriture fractionnaire ou décimale. On observera que pour tous les opérateurs f_1 et f_2 qui correspondent à la Fig. 3, on peut facilement remplacer les deux opérateurs par un seul. Ici aussi on sera amené à utiliser des nombres munis d'un signe ou des écritures fractionnaires.

Le schéma de la Fig. 4 amène une question curieuse. Appliquons-le une première fois à des données particulières, par exemple comme sur la Fig. 5.

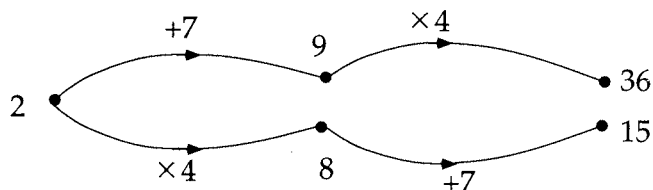


Fig. 5

Remplaçons le nombre 2 de départ par 3, tout en gardant les mêmes opérateurs. Nous obtenons la Fig. 6.

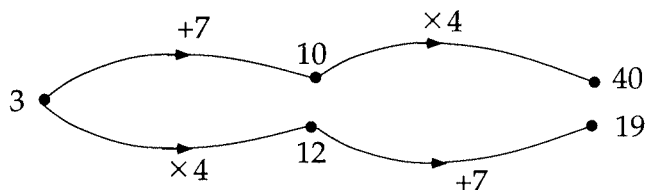


Fig. 6

La différence des deux résultats à l'arrivée vaut 21 pour la Fig. 5 et aussi 21 pour la Fig. 6. D'où la conjecture : on obtiendrait peut-être toujours la même différence, quel que soit le nombre de départ !

Démontrons-le. On a, pour une nombre a de départ

$$d = 4(a + 7) \text{ ou } d = 4a + 28 \text{ et } e = 4a + 7.$$

La différence $d - e$ s'écrit

$$(4a + 28) - (4a + 7) = 21.$$

Les nouveaux nombres rencontrés par les élèves prennent place sur la droite numérique : ils sont de plus en plus nombreux, de plus en plus denses.

Exemple 5 (vers 12-13 ans)

Chercher les abscisses x des points obtenus, dans chacune des figures ci-dessous, par projection d'un point de la droite a sur la droite b (Fig. 7).

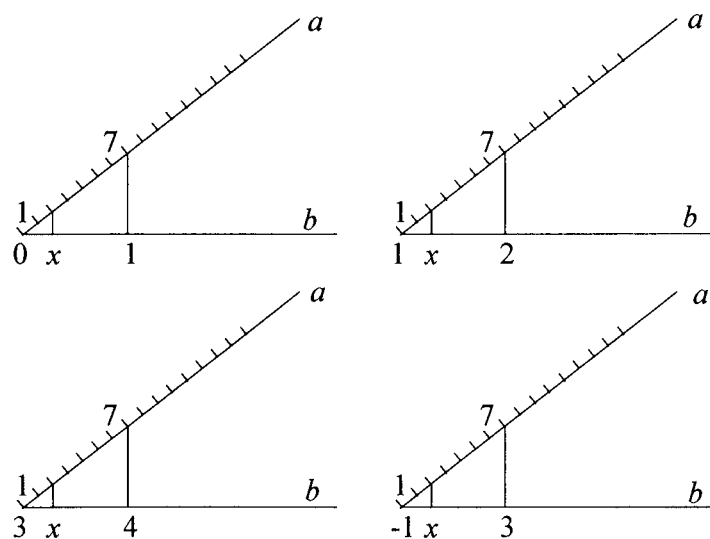


Fig. 7

L'extension de la propriété d'ordre des positifs à tous les nombres est un passage délicat, car la notion d'ordre issue des grandeurs (plus grand, plus petit) est remplacée par une notion d'ordre tout autre : venir avant ou après dans un parcours des négatifs vers les positifs (souvent, mais non toujours de gauche à droite).

La droite numérique n'est pas le seul instrument qui serve à organiser les nombres et à les classer. Les diverses formes d'écriture amènent déjà à discerner certaines classes de nombres. Par exemple, il y a ceux qui s'écrivent comme fractions à numérateur et dénominateur entiers, tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots; \quad (1)$$

il y a ceux qui s'écrivent comme différences de deux naturels, comme

$$0 - 2 = 1 - 3 = 2 - 4 = 3 - 5 = \dots, \quad (2)$$

et d'autres analogues.

Des suites d'égalités comme (1) et (2) sont des patterns de nombres. Ils sont comme des sentiers sur lesquels s'engage l'imagination des nombres. Et puisqu'au premier degré du secondaire on étudie certains types simples d'équations, on peut faire correspondre à ces motifs réguliers des classes d'équations.

Ainsi l'équation

$$ax = b \quad (a \text{ et } b \text{ entiers})$$

a la même solution pour une infinité de couples de valeurs a et b . Il en va de même

de l'équation

$$a + x = b \quad (a \text{ et } b \text{ naturels}).$$

Tels sont, nous semble-t-il, les moyens d'avancer à cet âge vers les structures numériques emboîtées **N**, **Z**, **Q**, **R**.

Terminons par une remarque à propos de la droite numérique. En privilégiant l'association de chaque nombre à un point de la droite, on montre une facette des nombres. Une autre facette est celle qui associe à chacun de ces points sa distance à l'origine (la valeur absolue de son abscisse), et qui fait ainsi le lien entre nombres et grandeurs. Les deux facettes sont à l'œuvre dans les systèmes de coordonnées, puisque deux nombres (si on est dans le plan) servent à situer un point, mais qu'on doit se souvenir des distances de ces points aux axes lorsqu'on veut par exemple associer au graphe d'une fonction $f(x)$ celui de $af(x)$ ou de $f(x+a)$ où a est un nombre donné.

C'est pourquoi, en parallèle avec la construction de la droite numérique, il faut développer d'autres représentations qui montrent plus directement l'interprétation des nombres comme mesures. Par exemple, la représentation des fréquences statistiques par des diagrammes en bâtonnets aide les élèves à associer à une ordonnée l'idée d'une distance à l'origine.

5.3.2 Des contextes, sources de nouvelles images mentales

Lorsqu'ils sont appris dans des contextes significatifs, les nouveaux nombres et les nouvelles opérations sont soutenus par des images mentales qui leur donnent du sens.

Même si on les a déjà touchés au primaire, les nombres les plus intrigants au début du secondaire sont les relatifs. Non seulement la notion d'ordre, mais les opérations subissent une mutation dans l'extension des nombres vers les négatifs.

L'addition des nombres relatifs est liée à des compositions de déplacements sur une droite, dans un sens ou dans l'autre. On la rencontre aussi dans des calculs de moyennes (moyenne des températures un mois d'hiver) (cf. 5.3.1, Exemple 2).

Exemple 6 (vers 12-13 ans)

En faisant glisser deux règles graduées l'une contre l'autre, imaginer une « machine » à faire des additions.

Construire ensuite, à l'aide de deux bandes de papier, deux règles graduées de -20 à 20, et imaginer une machine à additionner les nombres tant positifs que négatifs.

Chercher de même, avec deux règles ordinaires, un mécanisme pour la soustraction. Étendre ce mécanisme aux nombres positifs et négatifs.

La Fig. 8 montre une façon naturelle de réaliser $3 + 4$ (par exemple) :

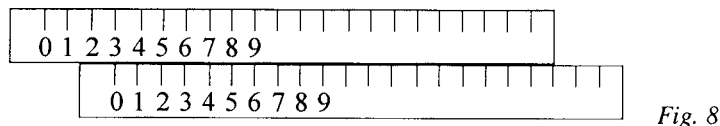


Fig. 8

- on repère 3 sur la première règle,
- on place le 0 de la seconde règle en face de ce 3,
- on repère 4 sur la seconde règle,
- on lit le résultat 7, sur la première règle, en face de ce 4.

La Fig. 9 montre une façon de réaliser $8 - 3$. Pour ce faire, on a retourné la deuxième règle. Ce procédé induit lorsqu'on a prolongé la graduation vers les négatifs, une image mentale reliant le mécanisme de la soustraction à celui de l'addition.

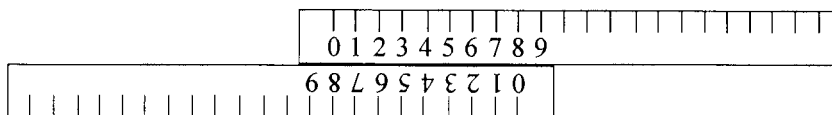


Fig. 9

Notons au passage que la construction, par les élèves eux-mêmes, d'une règle prolongée vers les négatifs n'est pas facile pour celui qui n'a pas encore une image mentale de la droite des entiers, et qu'elle montre à l'enseignant les obstacles à surmonter par chacun.

D'autres supports intuitifs éclairent les opérateurs d'addition et de soustraction : la composition des mouvements sur une même droite, les avoirs et les dettes, certains jeux. L'activité ci-dessus distingue bien l'addition de la soustraction : soustraire 3 est différent d'ajouter -3 , même si au total ces deux opérateurs aboutissent au même résultat et peuvent être ultérieurement identifiés.

La multiplication des relatifs intervient dans la composition des homothéties ; elle sert aussi à étudier des compressions dans un système d'axes (cf. n° 6.3.5, Exemple 11). Elle devient indispensable pour écrire les équations rencontrées en géométrie analytique. L'Exemple 7 montre une situation qui introduit la règle de la multiplication comme ce qui permet de prolonger la régularité d'une suite de couples en même temps que l'alignement de points dans un repère.

Exemple 7 (vers 12-13 ans)

Le Tabl. 3 donne les abscisses et ordonnées de quelques points.

x	3	2	1	0	...
y	-6	-4	-2	0	...

Tabl. 3

1. Reporter ces points dans un système d'axes.
2. Écrire la formule qui donne y quand on connaît x .
3. Prolonger le tableau pour des x négatifs et compléter le graphique.

Les élèves proposent deux formules qui correspondent aux composées :

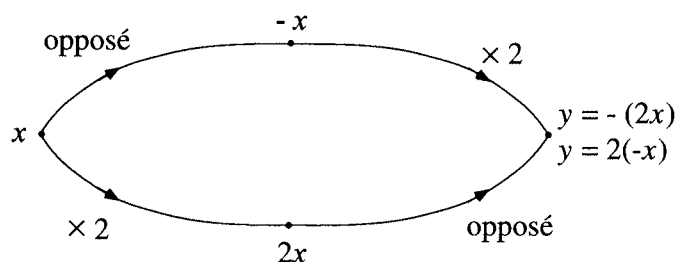


Fig. 10

La composée de ces deux opérateurs (que l'on peut commuter) définit la multiplication par -2 . D'emblée la multiplication par un négatif est reliée à l'opposé.

Les nombres dont l'écriture décimale est infinie (périodique ou non périodique) sont liés, au début du secondaire, aux théorèmes de Thalès et de Pythagore (cf. n°5.3.1, Exemple 5 et 5.4.1, Exemple 2). Mais on les rencontre déjà dès qu'on veut connaître le côté d'un carré d'aire connue, ou encore dans le problème des rectangles de même aire.

Exemple 8 (vers 12-13 ans)

Dans le repère de la Fig. 11, on a dessiné un rectangle dont trois sommets appartiennent aux axes.

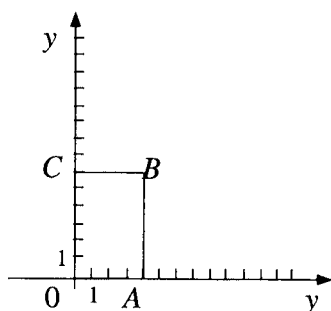


Fig. 11

Dessiner dans ce repère tous les rectangles analogues possédant la même aire que le rectangle donné.

La Fig. 12 montre quelques-uns de ces rectangles.

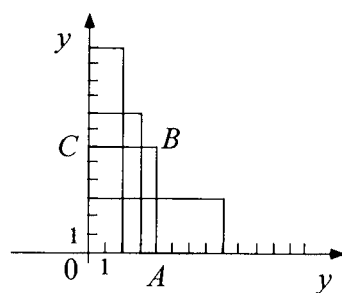


Fig. 12

En cours de travail, se pose la question du carré d'aire 24. On sait que le côté de ce carré est inférieur à 5 et supérieur à 4. On procède par encadrements, car l'élévation au carré ne donne jamais 24. Lorsqu'on utilise la touche $\sqrt{}$ d'une calculatrice, on trouve, pour une calculatrice à huit chiffres et selon la machine utilisée 4,8989795 ou 4,8989794. Si de fait deux résultats différents apparaissent ainsi, on retourne au calcul écrit. La prévision du dernier chiffre pour chacune de ces multiplications permet d'éviter un calcul fastidieux et de voir que les deux valeurs sont des approximations.

Dans cette voie, on peut prouver que, quel que soit le dernier chiffre à droite d'un décimal limité, on ne peut, en le multipliant celui-ci par lui-même, arriver au nombre 24. De plus, on n'entrevoit pas de période et on ne sait même pas s'il y en a une. Le problème reste ouvert, et c'est bien ainsi. Dans le contexte des grandeurs, on rencontre des irrationnels avant de disposer de moyens théoriques pour les distinguer des autres.

5.3.3 Étudier des patterns, des familles de nombres

L'exploration de nouveaux patterns, de nouvelles familles de nombres, augmente la familiarité des élèves avec l'univers numérique et stimule leurs réflexions.

Du côté des nombres naturels d'abord, il y a les nombres triangulaires, les nombres carrés (et les autres nombres pythagoriciens), les diviseurs et les multiples d'un nombre, les nombres premiers, les diviseurs premiers d'un nombre, ...

Certaines relations invitent à étendre l'ensemble des nombres naturels. Soient par exemple les deux patterns ci-dessous :

$7 - 5 = 2$	$(-2) \times 5 = -10$
$6 - 4 = 2$	$(-2) \times 4 = -8$
$5 - 3 = 2$	$(-2) \times 3 = -6$
$4 - 2 = 2$	$(-2) \times 2 = -4$
$3 - 1 = 2$	$(-2) \times 1 = -2$
$2 - 0 = 2$	$(-2) \times 0 = 0$
$1 - (-1) = 2$	$(-2) \times (-1) = 2$
$0 - (-2) = 2$	$(-2) \times (-2) = 4$

$$\begin{array}{l} (-1) - (-3) = 2 \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (-2) \times (-3) = 6 \\ \text{etc.} \end{array}$$

Le premier pattern est formé de couples de nombres dont la différence est constante. Prolongé au-delà de zéro, ce pattern rend plausible la règle de soustraction d'un négatif.

Le second pattern est formé de produits d'un même nombre négatif par des entiers décroissants ; on passe d'un produit au suivant en ajoutant chaque fois deux. Cette suite rend plausible la règle du « moins par moins ».

Les couples de naturels dont le quotient est constant, comme par exemple

$$(2;3) \quad (4;6) \quad (6;9) \quad (8;12) \quad \dots$$

engendrent les fractions équivalentes et les nombres rationnels. On peut présenter ces couples dans un tableau de proportionnalité (Tabl. 4).

2	4	6
3	6	9

Tabl. 4

De tels tableaux se prêtent à représentation dans un système d'axes.

Ces patterns de nombres ont d'autant plus de sens qu'ils peuvent souvent naître dans des contextes divers.

Exemple 9 (vers 12-13 ans)

Les diviseurs de 27 peuvent être présentés comme sur la Fig. 13 ; ceux de 6 comme sur la Fig. 14 ; ceux de 30 comme sur la Fig. 15.

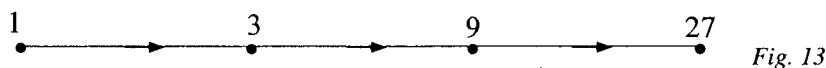


Fig. 13

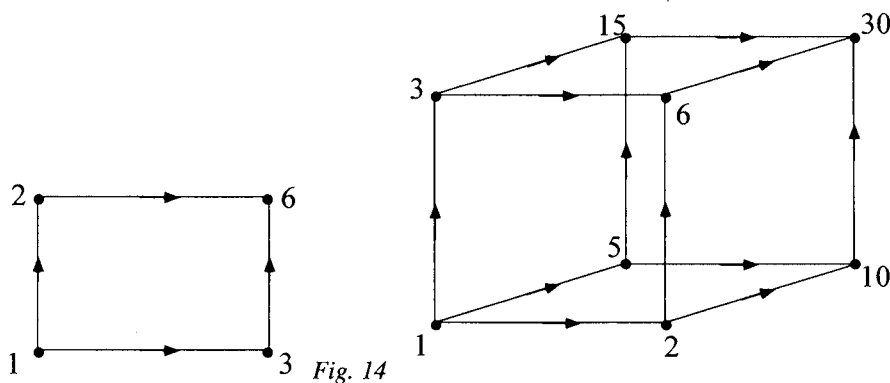


Fig. 14

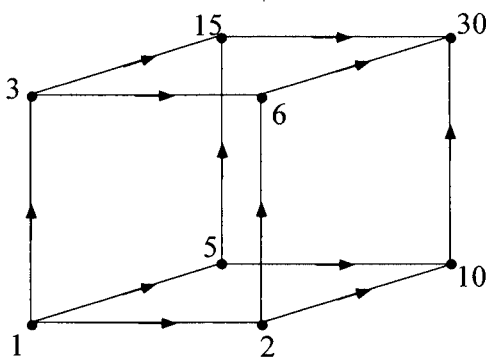


Fig. 15

Que signifient les flèches de ces schémas ?

Cherchez d'autres nombres pour lesquels les diviseurs peuvent être organisés de cette façon.

Ce type d'activité fait apparaître des familles de nombres naturels puissances d'un nombre premier, produits de nombres premiers, ...

Exemple 10 (vers 12-13 ans)

Dans le repère de la Fig. 16, on a dessiné un rectangle dont trois sommets appartiennent aux axes.

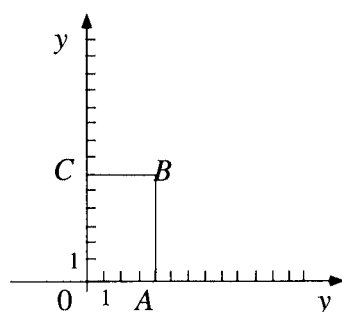


Fig. 16

Dessiner quelques rectangles analogues, avec des dimensions proportionnelles à celles du rectangle donné. Comment sont disposés les sommets de ces rectangles qui n'appartiennent pas aux axes ?

Les longueurs des côtés des rectangles construits peuvent être placés par couples dans un tableau de proportionnalité (Tabl. 5).

Base	4	2	1	3	5	...
Hauteur	6	3	1,5	4,5	7,5	...

Tabl. 5

Les ordonnées des quatrième sommets valent une fois et demie leurs abscisses. Tous ces sommets appartiennent à la droite

$$y = \frac{3}{2}x.$$

On construit ici une image mentale de la famille des couples formant des fractions égales

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1,5}{1} = \frac{4,5}{3} = \frac{7,5}{5}.$$

5.3.4 Calculer efficacement, piloter les calculs, explorer les nombres avec une calculatrice

Il faut savoir quand et pourquoi calculer, et critiquer les résultats des calculs . Il faut aussi savoir comment calculer, quand et comment recourir à une machine. Les machines aident à explorer les nombres et leurs propriétés.

Il importe d'entretenir la pratique du calcul mental et du calcul écrit sur des

nombres pas trop grands.

Les machines peuvent se charger de tous les calculs qui coûteraient trop d'efforts. En libérant l'esprit de tâches routinières, elles donnent l'occasion de se concentrer sur l'essentiel (déjà relevé au n°5.2.4) : devant un problème, quel calcul faut-il faire, et dans quel ordre ?

Il faut donc bien entendu apprendre à manier une calculatrice. Le nombre de fonctions à maîtriser s'accroît au long du premier degré : les racines et les exposants, les puissances de 10 et la notation scientifique, les signes des nombres et les valeurs absolues.

En outre, il faut apprendre à contrôler les résultats obtenus à la machine par estimation des ordres de grandeur, à calculer avec des encadrements et prendre conscience des erreurs d'arrondi. Constater les limites d'une machine est souvent l'occasion de s'interroger sur les nombres, en particulier ceux que la machine ne maîtrise pas.

Exemple 11 (vers 12-13 ans)

On suppose que dans une classe on dispose de différents types de calculatrices dont au moins une est une « quatre opérations » qui affiche huit chiffres et « tronque » les résultats quand ils comportent plus de huit chiffres (pas d'arrondi). On demande aux élèves de vérifier si leur calculatrice respecte l'associativité de l'addition pour les trois nombres suivants :

$$1\,111\,111,8 \quad 9\,999\,999,5 \quad 8\,888\,888,4.$$

Cet exercice donne l'occasion d'explorer l'associativité de l'addition et d'étudier les problèmes d'arrondi des différentes calculatrices.

Pour les calculatrices scientifiques, on peut conjecturer que la calculatrice travaille avec plus de chiffres qu'elle n'en affiche et poser la question de faire apparaître les chiffres « cachés ».

Exemple 12 (vers 12-13 ans)

Choisir deux nombres a et b dont la somme vaut 1. Calculer $a^2 + b$ et $a + b^2$. On dispose d'une calculatrice.

Après un temps d'expérimentation libre qui peut déboucher sur la conjecture que (lorsque $a + b = 1$) ces deux expressions sont égales, on peut rassembler les résultats dans un tableau et étendre le type d'exemples choisis par les élèves (voir *Tabl. 6*).

a	b	$a^2 + b$	$a + b^2$
0,71	0,29		
-3	4		
0,1234	0,8766		
-2,17	3,17		

Tabl. 6

Le « phénomène » numérique trouve une explication et une preuve lorsqu'on remplace

les nombres par des lettres : soient a et $1 - a$ les nombres choisis. On doit vérifier si $a^2 + 1 - a = a + (1 - a)^2$.

On peut aussi poser la question de savoir si seules les paires de nombres dont la somme vaut 1 vérifient cette propriété. On cherche donc à savoir pour quels nombres a et b on a l'égalité :

$$a^2 + b = a + b^2$$

$$a^2 - b^2 = a - b$$

$$(a + b)(a - b) = a - b .$$

Cette dernière égalité est vraie lorsque $a = b$. Dans ce cas l'expression $a^2 + b$ représente le produit de deux nombres consécutifs. L'égalité est encore vraie lorsque $a + b$ est neutre pour la multiplication, c'est-à-dire quand $a + b = 1$.

5.3.5 L'infini est de plus en plus là

L'infini rencontré dans les nombres côtoie l'infini géométrique.

Voici quelques exemples :

- un tiers d'un segment unité mesure 0,333...,
- il y a autant de fractions (de rationnels) qu'on veut sur un bout quelconque de la droite des nombres,
- la diagonale d'un carré de côté 1 et la circonférence d'un cercle de rayon 1 ne peuvent s'écrire dans le système décimal qu'avec une infinité de chiffres.

L'infini surgit un peu partout, y compris dans des suites numériques ou géométriques qui conduisent à petits pas vers l'analyse mathématique.

Si les élèves du premier (et du deuxième) degré ont quelques occasions de réfléchir (un peu) à l'infini, alors ils seront moins perturbés lorsque, vers seize ans, ils devront l'aborder en analyse.

5.4 Les nombres aux deuxième et troisième degrés

5.4.1 Écrire, utiliser et structurer les nombres selon les besoins ; poursuivre le remplissage de la droite des nombres

De nouveaux problèmes amènent l'usage de nombres de toutes sortes ainsi qu'une connaissance sans cesse meilleure de leurs propriétés. Les démonstrations en analyse requièrent une connaissance appropriée de l'ensemble des réels.

Au fur et à mesure que les élèves avancent en âge, ils rencontrent des nombres

écrits de façons de plus en plus variées, chaque écriture ayant son utilité.

Par exemple on évite souvent le passage à l'écriture décimale pour garder aux nombres leur visage : il est plus suggestif d'écrire

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots,$$

ou même

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

que $0,333\dots + 0,111\dots + 0,03701\dots + \dots$

Les puissances de 10 permettent des expressions compactes de nombres très grands et très petits.

Dans un cas particulier important, l'écriture décimale est double : tout nombre qui se termine par une suite infinie de 9 peut être écrit avec un nombre fini de chiffres. C'est ainsi que lorsqu'une calculatrice fournit un nombre tel que 2,399999999, on peut se demander si le nombre cherché n'est pas 2,4.

Exemple 1 (vers 14-15 ans)

On sait que $\frac{1}{3} = 0,33333\dots$ et que $\frac{2}{3} = 0,66666\dots$. Peut-on en déduire que $0,99999\dots = 1$?

La plupart des élèves hésitent à identifier au nombre 1 un nombre qui comporte une infinité de décimales. Il y a ici un paradoxe à lever. Tout un chemin est nécessaire.

Selon la procédure habituelle de comparaison (par les chiffres de même rang) on est tenté de croire que 0,999... est inférieur à 1. Par ailleurs, sur le plan mathématique, l'écriture 0,999... n'est identifiée à un nombre que si on prend en compte l'axiome des intervalles emboîtés. Pour cheminer d'un point de vue à l'autre, on raisonne comme suit :

lorsqu'on écrit le nombre 0,999... sous la forme

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots,$$

il apparaît comme la limite de la suite

$$\begin{aligned} &\frac{9}{10}, \\ &\frac{9}{10} + \frac{9}{100}, \\ &\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}, \end{aligned}$$

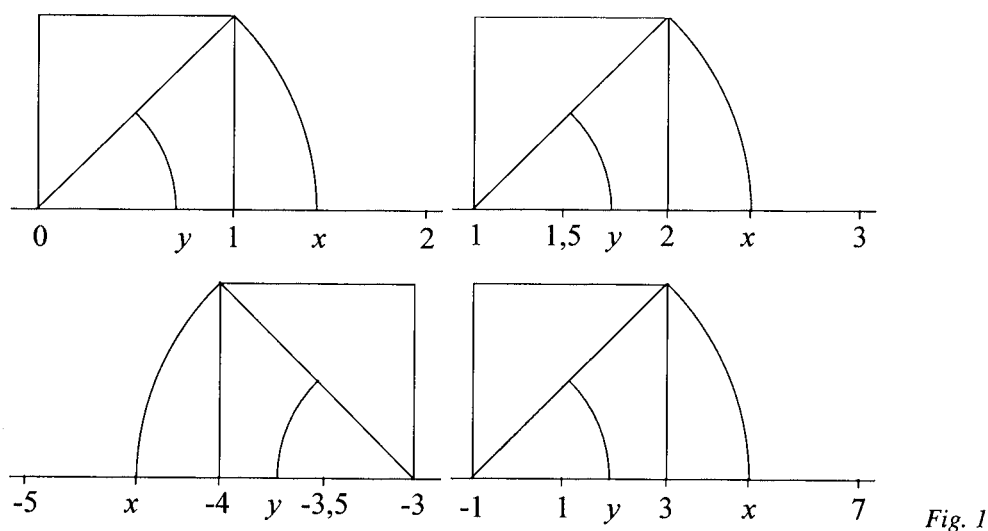
etc

A la n^{e} étape, ce qui manque par rapport à 1 s'écrit sous la forme $\frac{1}{10^n}$, et $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi l'écriture 0,999..., considérée comme limite d'une suite qui tend vers 1, représente le nombre 1.

Au cours des deux derniers degrés du secondaire, la droite des nombres continue à se remplir et à se densifier. Les théorèmes de Thalès et de Pythagore ainsi que la trigonométrie amènent une profusion de nombres réels (rationnels et irrationnels). C'est toujours par des encadrements qu'on les utilise dans des calculs, mais aussi qu'on les approche sur un plan théorique.

Exemple 2 (vers 14-15 ans)

Chercher les abscisses x et y des points obtenus, dans chacune des figures ci-après (Fig. 1), par rabattement de la diagonale d'un carré et de son point milieu.



Au second degré, il est nécessaire de revenir sur l'impossibilité d'écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'un décimal limité.

Au troisième degré, pour certains élèves, on démontrera que cette abscisse n'est pas un nombre rationnel. La démonstration ci-après s'adapte aux autres racines de nombres premiers.

Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

où a et b sont deux nombres naturels. Alors

$$a^2 = 2b^2.$$

Après tâtonnements, on s'aperçoit qu'on ne trouve pas facilement de nombres a et b qui vérifient cette égalité. Si de tels nombres existent et qu'on les décompose en facteurs premiers on voit que le premier membre de l'égalité $a^2 = 2 b^2$ contiendrait un nombre pair de facteurs 2, tandis que le second membre en contiendrait un nombre impair, ce qui n'est pas possible car la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est unique.

On fera aussi le lien entre l'impossibilité d'écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction et le fait que son expression décimale est un nombre décimal illimité non périodique.

On réalisera enfin que, pour pouvoir faire des calculs exacts, c'est-à-dire éviter de propager des erreurs d'arrondi, on évite l'écriture décimale. Par exemple, on écrira plus volontiers

$$\sqrt[2]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{13}{6}}$$

que les expressions décimales correspondantes.

Exemple 3 (vers 16-17 ans)

Dans un problème de croissance exponentielle, on trouve l'égalité $2^x = 3$. Est-ce que x est rationnel ou irrationnel?

Supposons que x soit un rationnel et posons $x = \frac{m}{n}$ (m et n naturels). On a donc

$$2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \text{et par conséquent} \quad 2^m = 3^n.$$

Cette dernière égalité est impossible car le premier membre représente un nombre pair et le second un nombre impair. Donc x est un nombre irrationnel.

Pas plus qu'au premier cycle du secondaire, il ne nous semble opportun, à partir de 14 ans, d'étudier l'engendrement théorique des ensembles structurés $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$. Il ne manque ni de situations, ni de questions qui invitent à approfondir les propriétés des nombres. Et bien entendu certaines de ces questions ont trait aux nombres eux-mêmes, ainsi qu'à la façon de les écrire.

Par ailleurs, c'est sans doute l'analyse qui pratiquement oblige à munir les réels de toutes leurs propriétés, y compris celles d'Archimède et des intervalles emboîtés : les élèves les plus intéressés aux mathématiques devraient apprendre que l'analyse ne peut se suffire des rationnels (cf. [Noë92a]).

Les ensembles $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, même si, comme nous l'avons dit, on ne les construit pas axiomatiquement, devraient au cours des études montrer de mieux en mieux leur structure emboîtée, et se distinguer les uns des autres par leurs propriétés et leurs usages. Les acquis principaux de la fin du secondaire sont la propriété d'induction des naturels (et le raisonnement par récurrence), la propriété d'Archimède des rationnels et des réels, et la propriété des intervalles emboîtés pour les réels.

Enfin la découverte des complexes, dans des contextes algébriques, géométriques et trigonométriques, est importante pour les élèves qui suivent le plus d'heures de mathématiques et pour ceux de l'enseignement technique de la spécialité électricité.

5.4.2 Nouveaux contextes, nouvelles images mentales

Dans les deux derniers degrés du secondaire comme dans le premier, introduire de nouveaux nombres et explorer le champ des réels dans des contextes significatifs permet de bien comprendre le rôle des nombres et de leur associer des images mentales utiles.

Considérons d'abord les décimaux illimités périodiques déjà mentionnés au n°5.4.1. Un nombre tel que 0,333... peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots,$$

et être représenté géométriquement par

$$3 \text{ dm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ mm} + \dots$$

Les irrationnels sont découverts à partir du théorème de Pythagore et de l'inexistence d'une commune mesure pour certains types de segments. La notion d'aire d'un rectangle est remise en cause : certains rectangles ne peuvent pas être pavés exactement à l'aide de carrés ayant pour longueur un sous-multiple, si petit soit-il, d'une unité donnée. Les coefficients de projection et la trigonométrie amènent aussi des irrationnels. Le nombre e surgit dans le contexte des problèmes de croissance et des fonctions exponentielles.

Du côté des opérations, la composition des homothéties offre un contexte à la règle du produit des nombres réels.

L'axiome d'Archimède, lié au comportement à l'infini des suites arithmétiques et géométriques, s'appuie d'abord sur l'image mentale du marcheur (fût-il petit comme une fourmi) qui, avançant d'un pas égal sans jamais s'arrêter, va aussi loin qu'on veut. L'axiome des intervalles emboîtés, surtout quand la longueur des intervalles tend vers zéro, est lié à un contenu géométrique assez clair.

Exemple 4 (vers 14-15 ans)

Avec quels carrés peut-on quadriller exactement une feuille de format A4 ? Quadriller exactement veut dire couvrir complètement la feuille de carrés identiques entiers.

Indication : une propriété utile de la feuille A4 est que si on la coupe en deux comme

le suggère la *Fig. 2*, on obtient deux feuilles qui ont même rapport longueur/largeur que la feuille A4.

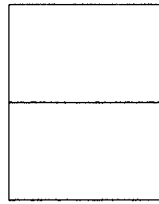


Fig. 2

Soient L et l les deux dimensions d'une feuille A4. Si un carré de côté a quadrille exactement la feuille, on aura

$$L = ma \quad (1)$$

et $l = na. \quad (2)$

La propriété de la feuille A4 rappelée ci-dessus permet d'écrire (*Fig. 3*) que

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}},$$

ce qui s'écrit encore

$$L^2 = 2l^2.$$

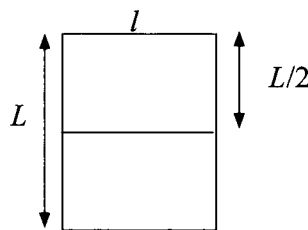


Fig. 3

Remplaçons dans cette égalité L et l par leurs valeurs (1) et (2). Il vient

$$m^2 a^2 = 2n^2 a^2,$$

ou encore

$$m^2 = 2n^2 \quad (3)$$

La démonstration faite pour l'Exemple 2 montre qu'il n'existe pas de nombres naturels m et n satisfaisant à (3), et donc qu'il n'est pas possible de quadriller exactement une feuille A4.

Exemple 5 (vers 16-17 ans)

On souhaite doubler le volume d'un cube unitaire. Quelles sont les dimensions du nouveau cube ? Si on les calcule avec une calculatrice, le résultat est-il exact ?

Le côté c du cube souhaité est tel que

$$c^3 = 2,$$

ou encore que

$$c = \sqrt[3]{2}.$$

Une calculatrice TI-66 donne

$$c = 1,25992105.$$

Ce nombre ne peut pas être le résultat exact, car lorsqu'on l'élève au carré, on trouve un nombre dont la dernière décimale est 5, et si on multiplie ce carré par 1,25992105, on trouve non pas 2, mais à nouveau un nombre dont la dernière décimale est 5.

On vérifie qu'aucun nombre décimal limité ne peut être la racine cubique de 2. En effet,

si ce nombre se termine par 1, son cube se termine par 1,
 si ce nombre se termine par 2, son cube se termine par 8,
 si ce nombre se termine par 3, son cube se termine par 7,
 si ce nombre se termine par 4, son cube se termine par 4,
 si ce nombre se termine par 5, son cube se termine par 5,
 si ce nombre se termine par 6, son cube se termine par 6,
 si ce nombre se termine par 7, son cube se termine par 3,
 si ce nombre se termine par 8, son cube se termine par 2,
 si ce nombre se termine par 9, son cube se termine par 9.

On peut établir que ce n'est pas un rationnel, en utilisant la même procédure que pour $\sqrt{2}$ (cf. Exemple 2).

5.4.3 Explorer de nouvelles relations entre les nombres, de nouveaux patterns

Les patterns de nombres continuent à stimuler la pensée numérique jusqu'au bout du secondaire.

Un des patterns les plus célèbres est le triangle de Pascal, étudié en lien avec la combinatoire et les probabilités. Mentionnons aussi parmi bien d'autres, les factorielles

$$1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4, \dots,$$

la suite de Fibonacci dont chaque terme à partir du troisième est la somme des deux précédents,

$$1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, \dots,$$

la suite des quotients des termes successifs de la suite de Fibonacci, à savoir

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots,$$

la suite harmonique

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$$

Chacun de ces patterns peut être étudié dans un contexte approprié.

Par ailleurs, c'est principalement aux fonctions qu'aboutissent les relations entre les nombres. Nous ne nous attarderons pas ici sur l'exploration des fonctions, car celles-ci seront amplement traitées au Chapitre 9, consacré à l'analyse.

Certains patterns de nombres sont liés à des situations géométriques.

Exemple 6 (vers 14-15 ans)

Quels sont les nombres cachés dans la spirale de la Fig. 4 ? Prolonger la spirale.

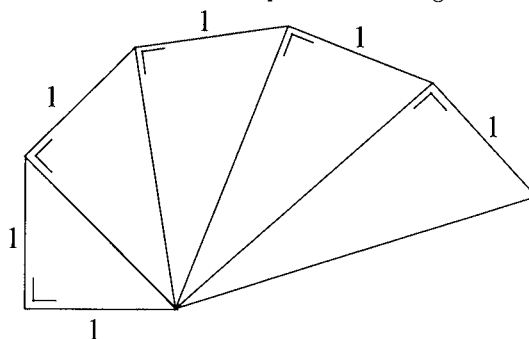


Fig. 4

Pour chacun des nombres non entiers rencontrés dans la spirale, on peut démontrer qu'il est irrationnel selon la même méthode déjà appliquée ci-dessus à $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

On découvre progressivement que dans cette suite les nombres naturels vont en se raréfiant.

Exemple 7 (vers 16-17 ans)

On part d'un carré de côté 1 et on lui accole un deuxième carré identique (Fig. 5), ce qui donne un rectangle. On accole un carré au grand côté de celui-ci, ce qui donne une autre rectangle. On accole à nouveau un carré au grand côté de ce dernier. Et ainsi de suite.

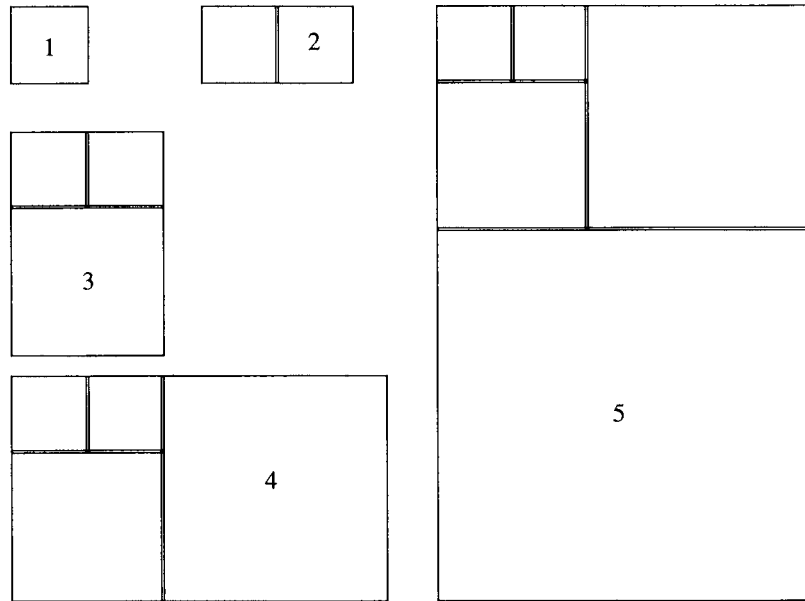


Fig. 5

Comment évolue le coefficient de forme (c'est-à-dire le rapport du plus grand côté au plus petit) pour cette suite de rectangles ?

Les coefficients de forme successifs, à partir du carré initial, s'écrivent

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$$

Chacune de ces fractions a pour numérateur la somme du numérateur et du dénominateur de la précédente, et pour dénominateur le numérateur de la précédente. En d'autres termes, si la n^e de ces fractions est

$$\frac{a_n}{b_n}, \text{ la } (n+1)^e \text{ est } \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{a_n}. \quad (4)$$

Mais que deviennent ces fractions lorsqu'on allonge la liste. En les calculant à la machine, on obtient

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1} = 1,0000000000, & \frac{8}{5} = 1,6000000000, \\ \frac{2}{1} = 2,0000000000, & \frac{13}{8} = 1,6250000000, \\ \frac{3}{2} = 1,5000000000, & \frac{21}{13} = 1,615384675, \\ \frac{5}{3} = 1,6666666667, & \frac{34}{21} = 1,619047619. \end{array}$$

La suite semble bien tendre vers un nombre qui commence par 1,61. On confirme cela en calculant encore quelques fractions :

$$\begin{array}{ll} \frac{55}{34} = 1,617647059, & \frac{144}{89} = 1,617977528, \\ \frac{89}{55} = 1,618181818, & \frac{233}{144} = 1,618055556. \end{array}$$

Mais quel est ce nombre vers lequel la suite tend ? On peut réécrire l'égalité (4) sous la forme

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\frac{a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n}} \quad (5)$$

Si $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers un certain nombre Φ (celui que nous cherchons), alors $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ tend vers le même nombre. En passant à la limite dans (5), on obtient

$$\Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi},$$

ou encore

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

D'où deux candidats pour Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } \Phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Phi &= 1,61\dots \text{ ou } \Phi = -0,61\dots \end{aligned}$$

La deuxième valeur doit être écartée, car un coefficient de forme est positif.

Le nombre Φ est traditionnellement appelé *nombre d'or*. Pour un traitement plus complet de ce problème de limite, cf. [GEM81].

5.4.4 Calculer efficacement, utiliser des machines

Il faut apprendre à manier, de façon contrôlée, de nouvelles fonctions de la calculatrice, en lien avec l'étude de fonctions variées. Les limites des machines continuent à déboucher sur des questions relatives au statut des nombres.

Jusqu'au bout de l'enseignement secondaire, les nombres avec lesquels on travaille le plus communément sont les nombres naïfs. Les élèves apprennent, face à des situations problématiques déterminées, à concevoir un schéma de calcul approprié et à contrôler la vraisemblance des résultats. Ceci consiste à vérifier les ordres de gran-

deur et encadrer les erreurs (ce qui est utile à tous les élèves et non seulement à ceux des sections techniques). Mais les calculatrices continuent à fournir des occasions de s'intéresser aux nombres sur le plan théorique. On se demande en particulier en quoi consistent, théoriquement et pratiquement, les opérations ordinaires sur les nombres impossibles à écrire dans le système décimal. Il est intéressant de s'apercevoir que les nombres de la calculatrice n'obéissent pas nécessairement aux lois d'associativité et de distributivité. Les nombres naïfs ont des défauts. C'est une raison pour faire un bout de chemin vers une définition moins ambiguë des nombres et des opérations (cf. n°5.4.1).

5.4.5 L'infini arrive en force

L'infini devient un thème d'étude majeur.

Il ne suffit pas de le rencontrer implicitement derrière la notion de limite. L'infini a d'autres visages, à commencer par la notion d'ensemble infini (ensemble équipotent à une de ses parties propres : il y a «autant» de nombres pairs que de nombres naturels). L'infini mérite, vers la fin du secondaire, une approche historique et philosophique.

Exemple 8 (vers 16-17 ans)

On range toutes les fractions possibles en un tableau infini (Tabl. 1).

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	
.	.	.	.	.	

Tabl. 1

Ce tableau contient-il tous les rationnels positifs (non nuls) ?

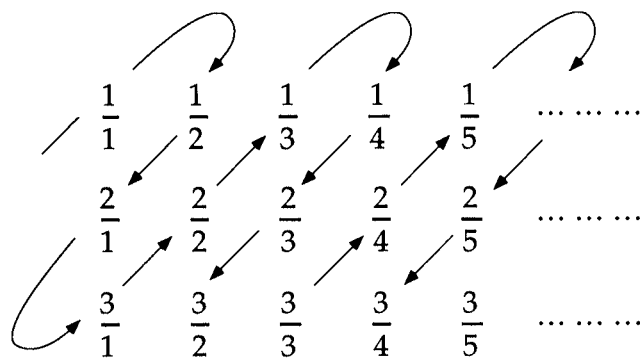
Certains rationnels y apparaissent-ils plusieurs fois ?

Y-a-t-il moyen de numérotter tous les nombres de ce tableau, dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, ...

Le tableau contient toutes les fractions de la forme $\frac{n}{m}$ où n et m sont des naturels quelconques. Donc il contient tous les rationnels positifs. Certains de ceux-ci y apparaissent plusieurs fois, par exemple $\frac{1}{2}$ qui est égal à $\frac{2}{4}$, à $\frac{3}{6}$, etc.

Si on imagine un parcours du tableau commençant comme sur le Tabl. 2, on passe en revue *tous* les nombres du tableau, et on peut les numérotter 1, 2, 3, ... dans l'ordre où

on les rencontre.



Tabl. 2

A fortiori, on peut numéroté tous les rationnels, et donc ceux-ci sont dénombrables.

6

GÉOMÉTRIE

6.1 Vue d'ensemble

6.1.1 La géométrie au niveau de base

« Qu'est-ce que la géométrie au niveau de base ? » demande Freudenthal ([Fre73], p. 403). Il poursuit : « Il n'y a pas de doute que nous devons répondre : la géométrie, c'est saisir l'espace. Et puisque nous parlons de l'éducation des enfants, c'est saisir l'espace dans lequel l'enfant vit, respire et se meut. L'espace que l'enfant doit apprendre à connaître, explorer, conquérir pour mieux y vivre, respirer et se mouvoir. »

La géométrie naît , dès le plus jeune âge, de l'observation, des manipulations, des constructions et des représentations d'objets simples. Elle s'interroge sur les surprises que réservent les ajustements de ces choses entre elles, leurs emboîtements les unes dans les autres. Ainsi par exemple :

- quatre baguettes identiques mises bout à bout en cycle donnent toujours une forme symétrique (un losange), cinq bouts de bois identiques non ;
- trois triangles identiques assemblés côte à côte comme sur la *Fig. 1* forment un angle plat, et ceci qu'ils soient obtusangles, acutangles, isocèles, rectangles, ...
- lorsqu'on reporte un segment identique au rayon d'un cercle le long de sa circonférence, on constate qu'il y va exactement six fois ;
- etc.

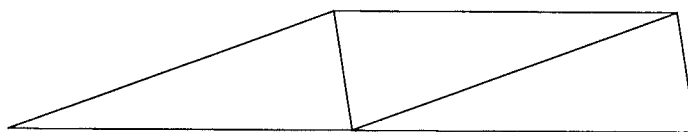


Fig. 1

Les régularités géométriques apparaissent souvent lors de pliages, découpages, assemblages, vues dans des miroirs, constructions simples (de pavages, de boîtes nommées polyèdres), ombres au soleil ou à la lampe, etc. Ces activités font en général apparaître des figures par familles entières.

Elles sont aussi souvent associées à des mouvements simples tels que le glissement d'une figure dans son plan sans rotation, la rotation d'un demi-tour, le retournement d'une feuille de papier, etc.

Les objets de la géométrie au niveau de base ne sont pas des sous-ensembles d'un espace abstrait. Il n'y a pas d'espace au départ. Ces objets sont de nature physique et conservent leur individualité et leurs propriétés quels que soient les déplacements qu'ils subissent.

Les notions, les objets mentaux (cf. 2.3.1), qui servent *tout d'abord* à parler des objets et phénomènes géométriques et à les organiser sont empruntés avec peu de retouches à la pensée commune, et ne devront être élaborés mathématiquement qu'en cours de route, chaque fois que la nécessité s'en fera sentir. Ces objets mentaux sont le triangle, carré, cercle, angle, côté (la droite n'est pas entièrement discernée du segment), perpendiculaires, parallèles, et quelques autres.

6.1.2 Construire la géométrie

Les premières inférences géométriques se ramènent presque à des constats : un objet est connu par un ensemble de propriétés, et certaines de celles-ci sont reconnues comme déterminant l'objet. Par exemple les losanges sont des figures familières que l'on peut décrire. Or l'expérience prouve que si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, il est un losange ; ou que s'il a ses diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu, il est un losange. Autre exemple : une scie comme celle de la Fig. 2 est un type d'objet familier que l'on décrit par ses angles de même amplitude et deux jeux de segments parallèles. Or l'expérience montre que le parallélisme des segments entraîne que les angles ont même amplitude, et réciproquement.

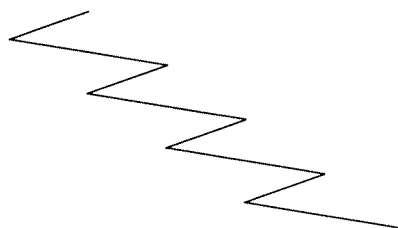


Fig. 2

Bientôt apparaissent des phénomènes étonnants, qui appellent une explication. Par exemple, la somme des angles d'un quadrilatère fait quatre angles droits. Ou encore, si un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit, c'est qu'un de ses côtés est parallèle au plan. De telles propositions se prouvent, c'est-à-dire sont amenées à l'évidence, par un enchaînement d'inférences simples. La pensée géométrique devient ainsi discursive, c'est-à-dire qu'elle procède par étapes.

Il ne faut pas non plus attendre très longtemps pour que des propriétés se groupent par familles et que les plus surprenantes d'entre elles se prouvent en prenant appui sur les plus simples, l'ensemble formant ce que l'on a proposé d'appeler un *îlot déductif*. L'un des plus accessibles au début de la géométrie est celui qui concerne les angles des polygones.

La géométrie est au départ l'étude des figures (planes ou de l'espace) et elle doit le demeurer longtemps (avant de devenir l'étude des propriétés d'un espace : voir ci-dessous). Il est éclairant d'étudier les figures non pas une à la fois, en une succession de monographies, mais bien par familles cohérentes. Les thèmes principaux sont les suivants :

- les situations qui impliquent le théorème de Thalès et les similitudes ;
- celles qui impliquent le théorème de Pythagore ;
- les représentations planes de solides, inséparables de l'étude des solides ;
- les polyèdres ;
- les cercles et les sphères ;
- la trigonométrie ;
- les aires et volumes, avec passage progressif de la géométrie à l'analyse ;
- les surfaces étudiées à l'aide de coupes et de courbes de niveau.

L'étude de ces thèmes s'appuie entre autres sur la découverte de patterns, de symétries, ainsi que sur les isométries et les similitudes, toutes choses présentes dans le quotidien. Chacun des thèmes forme un chapitre cohérent, où chaque propriété non

évidente peut être démontrée à partir de propriétés évidentes.

Faut-il par ailleurs, vers la fin du secondaire, entamer avec certains élèves une construction axiomatique de la géométrie prise dans son ensemble ? Nous laissons cette question en suspens. Mais si on le fait, il serait peu opportun de choisir un système d'axiomes minimal, obligeant à démontrer un nombre non négligeable d'évidences. Mieux vaut donc adopter des axiomes redondants. Par ailleurs, les propriétés démontrées dans ce cadre pourraient être retrouvées à peu de frais dans celui de l'algèbre linéaire.

La géométrie envisagée jusqu'ici est celle des figures et des transformations simples. On l'appelle souvent la *géométrie synthétique*. Elle ne mobilise ni les systèmes de coordonnées, ni les vecteurs.

Il est par ailleurs possible et utile d'aborder très tôt la géométrie en coordonnées (dans le plan et l'espace). En effet, elle est mieux adaptée que la géométrie synthétique au traitement de certaines catégories de questions. En outre, elle ouvre un champ d'action irremplaçable à l'algèbre (cf. 7.1.2), ainsi qu'aux fonctions et aux transformations.

La géométrie utilisant les vecteurs ne peut être abordée que plus tard. En effet, les vecteurs sont d'un abord assez difficile. Ils ne sont pas des objets reconnaissables dans le quotidien ou dans le répertoire des figures élémentaires. Les vecteurs liés à l'origine sont les plus accessibles. Les vecteurs libres, associés aux translations, présentent la difficulté de leur statut de classe d'équivalence.

Les vecteurs sont néanmoins assimilables si on y met le temps. De plus, outre leur efficacité propre comme instruments de pensée, ils constituent une introduction appropriée à l'étude ultérieure de l'algèbre linéaire.

On peut étudier d'abord la loi du parallélogramme, en l'appuyant entre autres sur l'étude expérimentale et intuitive de la composition des vitesses uniformes et de la composition des forces, et en l'utilisant dans de nombreuses applications (la relation de Chasles). Cette loi du parallélogramme peut être préparée par l'importance accordée dans les études antérieures à la géométrie *du parallélogramme*, comparée à celle du triangle (cf. [Cho64], p.10).

Une fois cette loi bien assimilée, on peut introduire le produit d'un vecteur par un scalaire en partant de situations qui y recourent naturellement, telles que les calculs de barycentres.

Enfin, et seulement bien après que ce qui précède ait été assimilé, on peut introduire le produit scalaire sur le champ de ses applications naturelles en géométrie et en physique.

Dans tous ces développements de la géométrie en construction, les nombres réels jouent un rôle clé. Il serait illusoire d'en exiger d'emblée une connaissance intime. Beaucoup de questions peuvent être étudiées de manière significative en s'appuyant sur les nombres que nous avons appelés naïfs (cf. 5.1.0).

Enfin, bien que la géométrie étudiée à l'école ait d'abord pour fonction d'organiser les phénomènes géométriques familiers, elle peut assez souvent appuyer cette organisation sur la distinction des propriétés topologiques, projectives, affines et métriques, ainsi que sur les propriétés distinctives des géométries non euclidiennes. L'idée n'est pas d'étudier systématiquement *les* géométries au niveau scolaire, mais bien de se souvenir que ces géométries (sur lesquelles nous revenons au n° suivant) ont un pouvoir éclairant dans l'apprentissage de la géométrie élémentaire.

6.1.3 La géométrie approfondie

La géométrie, telle qu'elle s'inscrit dans les connaissances mathématiques d'aujourd'hui, est liée à la notion d'espace et de groupe de transformations. A ce stade, il n'y a plus d'abord les figures, mais bien d'abord un espace, qui est un ensemble de points. Dans cet espace, il y a aussi des droites et des plans. On considère ensuite les transformations de l'espace. Transformer l'espace, c'est le déplacer, ou l'étirer, ou le gonfler, ou le tourner... dans toute son extension, selon une loi déterminée. On fixe son attention sur une classe cohérente de transformations (ces classes s'appellent *groupes* et ce sont par exemple les isométries, les similitudes, les affinités, les projectivités) et on étudie les propriétés des droites, points et plans qui se conservent lors de ces transformations. Bien entendu, les géomètres d'aujourd'hui étudient encore des figures (polyèdres, pavages, empilements d'objets, surfaces), mais ces objets sont dès l'abord plongés dans un espace aux propriétés connues.

Le cadre dans lequel s'inscrit aujourd'hui la géométrie élémentaire est celui d'espace affine. En portant l'attention sur les vecteurs liés à un point donné, choisi comme origine, on caractérise l'espace affine en espace vectoriel. Le concept d'espace vectoriel est le cadre naturel de l'étude des phénomènes linéaires, et la géométrie élémentaire a été en quelque sorte absorbée par l'algèbre linéaire.

On peut se demander alors pourquoi on n'enseigne pas d'emblée l'algèbre linéaire aux élèves du secondaire. Mais s'il est vrai que la géométrie élémentaire est aisément accessible à celui qui connaît familièrement la structure abstraite d'espace vectoriel, celle-ci est un instrument trop général et trop puissant entre les mains de celui qui *s'initie* à la géométrie élémentaire. Par exemple, les théorèmes d'existence d'une base et d'une dimension sont, appliqués au plan et à l'espace de la géométrie ordinaire, des sortes de béliers pour enfoncer des portes ouvertes.

La géométrie approfondie aborde aussi une autre question importante, celle du postulat des parallèles. On obtient la géométrie habituelle si l'on suppose que par un point on peut mener une et une seule parallèle à celle-ci. On obtient d'autres géométries, appelées *géométries non euclidiennes*, selon qu'on suppose l'inexistence de la parallèle, ou l'existence de plusieurs parallèles. Outre leur intérêt spéculatif, ces géométries ont révélé leur pertinence le jour où la théorie de la relativité a montré que la géométrie du monde physique n'est pas euclidienne.

La géométrie d'aujourd'hui comporte encore d'autres chapitres. Deux des plus importants sont la *topologie* qui étudie les rapports de voisinage et les connexions entre les objets indépendamment de leurs dimensions et la *géométrie différentielle* qui étudie les courbes et les surfaces, et d'autres objets analogues (par exemple dans des espaces à plus de trois dimensions, en utilisant les moyens de l'analyse (cf. Chap. 9).

6.1.4 La géométrie comme forme de pensée

La géométrie est d'abord le premier chapitre de la physique. Elle appartient ensuite aux mathématiques dès qu'elle idéalise les objets et les saisit à travers des propriétés univoques de forme et de grandeur.

Comparée aux autres branches des mathématiques, la géométrie a ceci de particulier : les objets qu'elle propose à la réflexion ne sont pas immédiatement symbolisés de manière arbitraire, à la façon dont l'arithmétique traite les nombres en les représentant par des chiffres, ou l'algèbre par des chiffres et des lettres. Les objets de la pensée géométrique sont d'abord des figures. Ils s'offrent à la perception visuelle. On les construit.

Malgré cela, la géométrie entretient des relations capitales avec les nombres, surtout à travers les mesures (cf. nos 6.2.5 et 6.3.5). Et même plus profondément, les deux opérations principales sur les nombres, à savoir l'addition et la multiplication,

ont un lien étroit avec deux transformations géométriques importantes, la translation et l'homothétie (cf. [Art78], [Pap64], [Pap65]).

Le lien privilégié de la géométrie avec l'univers des perceptions fait de celle-ci une source d'intuitions dans les autres domaines des mathématiques. La pensée mathématique, à quelque niveau qu'elle s'exerce, ne peut se passer d'intuitions : c'est ce qu'ont bien montré H. Poincaré et J. Hadamard (cf. [Poi47] et [Had45]). Ce dernier signale que les types d'intuitions varient considérablement d'un individu à l'autre. Elles peuvent être principalement géométriques, ou cinématiques, ou emprunter des chemins inattendus et parfois non élucidés. Mais les intuitions les plus communes sont clairement géométriques, et elles servent de point d'appui dans toutes les branches des mathématiques.

6.1.5 Les applications de la géométrie

Les éléments de géométrie sont d'application constante dans les professions techniques telles que la construction et l'architecture, la menuiserie, la mécanique, l'électricité. Il n'y aurait pas de physique sans géométrie : la géométrie est en quelque sorte consubstantielle à la physique. Elle fournit en outre un cadre théorique à la perspective, la cartographie, la stéréochimie, la cristallographie, l'astronomie et plusieurs secteurs de la biologie.

La géométrie analytique est dorénavant l'outil de base des métiers graphiques lorsqu'ils utilisent les ordinateurs pour créer des formes, ou représenter des objets réels dans des positions diverses.

6.1.6 La géométrie dans l'histoire, la philosophie, la culture

Parmi plusieurs autres, relevons deux événements majeurs qui ont marqué l'évolution de la géométrie depuis vingt-cinq siècles.

Le premier est la découverte de l'inexistence d'une unité commune de mesure entre le côté et la diagonale du carré. Cette découverte, déjà mentionnée au n° 5.1.6, a enclenché des siècles de recherches tâtonnantes pour aboutir, à la fin du 19^e siècle, à donner un statut clair aux nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$.

Le deuxième est l'aboutissement, vers les années 1820, de plus de vingt siècles de recherches infructueuses pour démontrer l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes de la géométrie. Plusieurs axiomes contradictoires s'offraient dorénavant comme point de départ légitime, chacun engendrant une géométrie conforme aux lois

de la logique ordinaire.

Ces deux événements témoignent des difficultés d'ajustement de l'esprit aux choses. Ils montrent comment se créent des êtres de pure raison (les irrationnels, les géométries non euclidiennes) et la relation que ceux-ci entretiennent avec la réalité perçue ou mesurée.

L'évolution d'ensemble de la géométrie depuis l'antiquité grecque est significative. Au départ, cette science s'appliquait à déterminer les dimensions des figures en s'appuyant sur les propriétés d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité. Ces dernières sont aujourd'hui, à la suite d'une restructuration séculaire, étudiées dans le cadre de l'algèbre linéaire (où il n'est pas souvent question des figures au sens ordinaire). Quant aux dimensions des figures (longueurs, aires, volumes) elles ont disparu de la géométrie pour être incorporées à l'analyse. On obtient les dimensions des figures (le plus souvent courbes) par des intégrales, qui font intervenir des sortes de sommes infinies de morceaux tout petits. Il serait contre-indiqué d'enseigner la géométrie élémentaire dans l'état où l'a amenée l'évolution historique. Le premier apprentissage doit d'abord se faire au contact direct des objets et des figures.

La géométrie est source d'émotions esthétiques intenses : les figures géométriques les plus structurées avec leur cortège de propriétés sont comme des cristaux brillants dans le champ de la pensée. La géométrie a fasciné et inspiré les artistes au cours des siècles, à travers les problèmes de stabilité en architecture, les recherches de symétries en architecture et en peinture, et les questions de perspective qui ont conduit à la géométrie projective.

Ce dernier cas est par ailleurs intéressant et sans doute unique : un art, la peinture, a posé vers la fin du Moyen Age et à la Renaissance, le problème d'une représentation plane réaliste des choses. Ce sont les peintres qui ont d'abord exploré la question et trouvé les premières solutions. Les mathématiciens sont venus ensuite, à partir du 17^e siècle, exploiter cette mine de phénomènes géométriques.

Des œuvres et des noms témoignent de la relation entre la géométrie et les arts : parmi bien d'autres, les Pyramides d'Égypte, Piero della Francesca, Dürer, Le Corbusier, Escher, pour ne pas parler des œuvres musicales où la symétrie s'étend à la dimension temporelle, comme chez J.-S. Bach et d'autres musiciens jusqu'à nos jours.

6.2 La géométrie dans le fondamental

6.2.1 Manipuler, construire et communiquer

Manier, construire et dessiner des objets, comme on le fait depuis le plus jeune âge, prépare l'apprentissage de la géométrie. Par ailleurs, le premier apprentissage systématique de la géométrie passe par la création, le dessin aux instruments et la description de figures planes.

Dès son plus jeune âge, l'enfant manie, construit et dessine des objets. La plupart de ceux-ci sont des solides, puisque nous vivons dans un espace à trois dimensions, mais certains sont des feuilles, des cartons, des plaques, des images, et sont à ranger dans les objets à deux dimensions. L'enfant manipule, construit, dessine, non pas pour apprendre la géométrie, mais pour son plaisir et pour réaliser des objectifs immédiats dans son environnement. Pour ce faire, il accumule les observations, il acquiert l'expérience visuelle, manuelle et tactile des choses. Souvent les manipulations de solides conduisent à produire ou travailler des surfaces, comme lorsqu'un solide laisse des empreintes dans le sable ou qu'on orne les faces d'une boîte en les coloriant ou en y collant des papiers.

Par ailleurs, si la découverte et l'observation de solides précèdent souvent celles des surfaces planes, l'étude des propriétés géométriques commence naturellement sur des figures planes (parce que celles-ci sont plus simples) avant de se poursuivre sur des solides.

Plutôt que de donner aux élèves des formes toutes faites, mieux vaut les leur faire créer par manipulation. Ils reconnaîtront au passage les formes qui leur sont familières et en verront apparaître de nouvelles. Mais les manipulations ne peuvent être un aboutissement en soi. Pour provoquer la maturation des objets mentaux dans l'esprit des élèves, il est important qu'ils parlent de ce qu'ils font, comparent les formes qu'ils obtiennent, les dessinent, les décrivent et en expriment les propriétés, oralement et par écrit.

Ces quelques observations s'accordent avec ce qu'écrit E. Wittman [Wit87], p. 53 : « les objets géométriques ne doivent être étudiés ni statiquement, ni isolément les uns des autres » (cf. 6.2.2) « mais en relation avec leur construction et avec les « opérations » qu'on peut leur appliquer ».

Exemple 1 (vers 4-5 ans)

On dispose d'une boîte dont le couvercle est percé de trous polygonaux et de plaques de même forme qui peuvent être introduites dans la boîte, chacune à travers le trou correspondant. Le jeu consiste à remettre de cette façon les polygones dans la boîte.

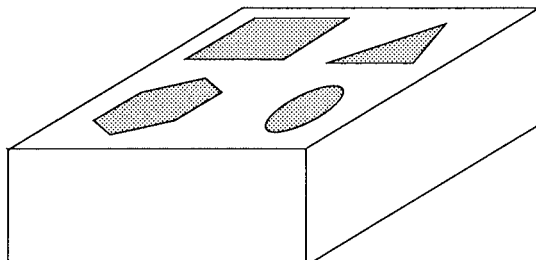


Fig. 1

Que ce soit dans la famille ou à l'école maternelle, ce jeu n'est accompagné d'aucun enseignement théorique. Mais il familiarise l'enfant avec des formes simples (dont certaines peuvent être nommées) et avec les manœuvres qu'il faut faire pour les superposer, ce qui prépare pour bien plus tard l'idée de congruence des figures planes.

Exemple 2.

On propose, dans une classe 5-8 (regroupement d'une dernière maternelle et des deux premières classes du primaire) de construire une maquette de l'école et des quartiers avoisinants.



Fig. 2

La Fig. 2 montre une vue partielle d'une maquette réalisée à l'IPEP¹ de Mons. Il s'agit d'un travail de grande ampleur, qui a mobilisé les classes pendant plusieurs mois. Les enfants ont exploré systématiquement le quartier pour réaliser le projet.

L'objectif est bien d'abord de construire la maquette et pas d'apprendre la géométrie.

¹ IPEP : Institut Provincial d'Enseignement Pédagogique

Mais de la géométrie passe au niveau de la construction de chaque objet (faces planes, développements, assemblages). Les problèmes d'échelle sont imparfaitement résolus à cet âge, mais la disposition générale du quartier est respectée.

Exemple 3 (vers 8-9 ans)

On dispose de bandes de papier semi-transparentes de deux largeurs. On demande de fabriquer des quadrilatères en croisant deux bandes, puis de classer les quadrilatères obtenus. On demande de dessiner les diverses situations pour en garder le souvenir et de consigner les résultats par écrit.

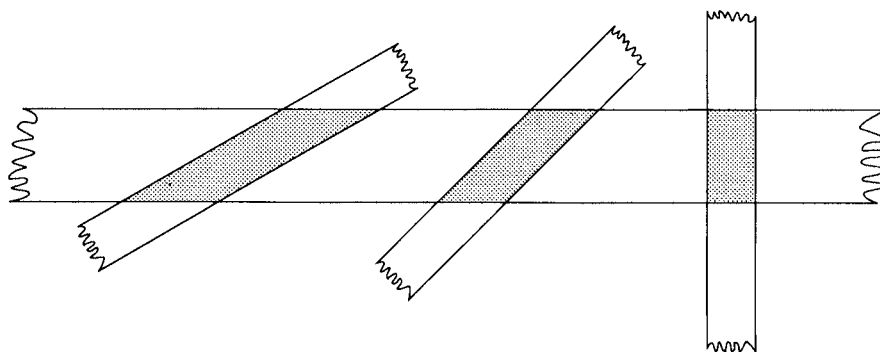


Fig. 3

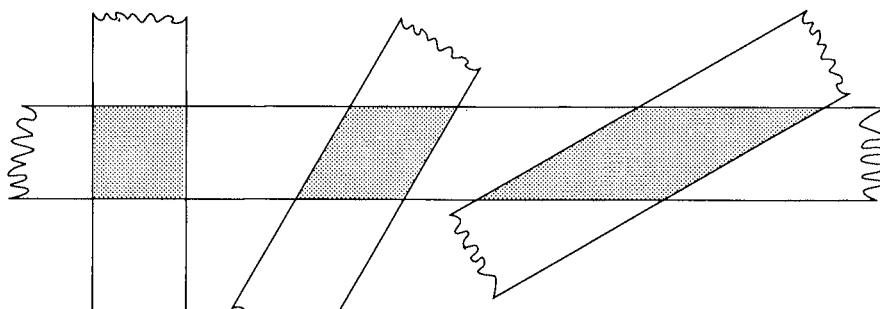


Fig. 4

La Fig. 3 montre ce que l'on obtient avec deux bandes de largeurs inégales, et la Fig. 4 avec deux bandes de même largeur. Les mots *parallélogramme* et *losange* sont appris au cours de cette activité. On peut espérer des élèves des conclusions du genre :

- en croisant deux bandes, nous avons fabriqué des parallélogrammes ;
- les parallélogrammes fabriqués avec deux bandes de même largeur sont appelés losanges ;
- nous reconnaissons des rectangles : les bandes forment un angle droit ;
- nous reconnaissons des carrés : les bandes sont de même largeur et forment un angle droit.

Le dessin des diverses situations peut se faire à l'aide de gabarits (bandes en carton ou en plastique rigide, règles en bois, ...). C'est seulement plus tard que d'autres instruments serviront à construire des parallèles.

Exemple 4 (vers 10-11 ans)

On demande de fabriquer des quadrilatères en dessinant deux segments de même longueur sur les bords d'une bande. Classer les quadrilatères obtenus, les dessiner sur un quadrillage et écrire un compte rendu des résultats.

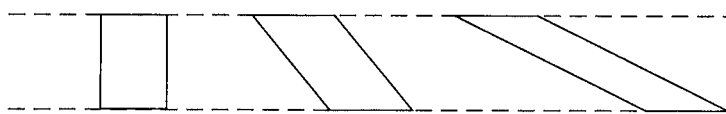


Fig. 5

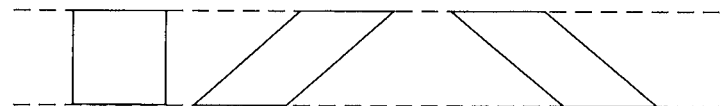


Fig. 6

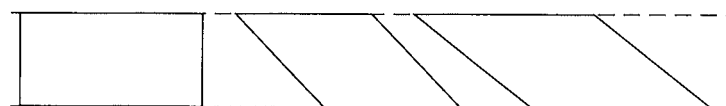


Fig. 7

La bande sur laquelle on travaille peut-être dessinée sur une feuille quadrillée. Les types de quadrilatères obtenus sont exactement les mêmes que ceux de l'Exemple 2. Mais ils sont obtenus autrement, ce qui en fait voir d'autres propriétés. Une différence significative est, entre autres, que les losanges sont ici clairsemés (un losange sur la Fig. 7 ; pour ne pas parler du carré de la Fig. 6), alors que la Fig. 4 ne fournissait que des losanges.

6.2.2 Explorer des familles de figures, aller jusqu'aux objets extrêmes

Explorer une famille de figures parentes amène à dégager leurs propriétés générales. Les figures extrêmes d'une famille jettent sur celle-ci des éclairages originaux.

Les Exemples 3 et 4 le montrent déjà, il est plus intéressant d'aborder les figures par familles qu'en une succession d'études monographiques. Comme l'écrit R. Hutin [Hut74] : «Lorsqu'il s'agit de passer d'une simple reconnaissance perceptive à l'analyse des propriétés d'une figure, la tentation est grande, pour le maître, de proposer l'exploration systématique et successive de chaque figure géométrique. Cette manière d'envisager les choses présente l'inconvénient de rendre plus difficile l'acquisition des propriétés prises dans leur sens le plus général. Il semble plus utile de partir de l'exploration des symétries, des diagonales, des angles, des côtés, et de se livrer à des comparaisons entre figures différentes.»

La considération des figures par familles entières illustre, pour ce qui est de la géométrie au maternel et au primaire, l'intérêt et le rôle d'un *contexte* (cf. n° 2.2.2) : l'esprit se met en route dans un univers où des objets analogues présentent assez de ressemblances et de différences pour que des questions surgissent.

Dans une famille de figures ou d'objets, les extrêmes provoquent des défis et un intérêt particulier chez les élèves. Par exemple, on peut imaginer un polygone régulier avec autant de côtés qu'on veut ; lorsqu'un parallélogramme articulé se referme,

il se transforme en un segment de droite ; un parallélogramme très incliné n'a pas une aire plus grande qu'un autre plus trapu, de même base et de même hauteur ; un mètre cube contient un million de centimètres cubes.

Parmi les objets extrêmes, ceux qui sont grands ou très grands méritent l'attention. On ne peut pas les poser sur sa table et les manier comme des objets petits. Certains sont inaccessibles en tout ou en partie. C'est pourquoi on doit les approcher avec des méthodes originales, tenant compte de ces contraintes.

Avant de passer aux exemples, signalons que le géoplan est un matériel très riche pour produire des figures ; c'est une planche munie de clous disposés en réseau carré, autour desquels on peut passer des élastiques.

Exemple 5 (6-7 ans)

Chaque élève trace une grande ligne fermée sur une feuille qu'il va peindre et veille à ce que la ligne ne touche pas les bords de la feuille. Il colorie toute la feuille en changeant de couleur chaque fois qu'il change de plage. Ensuite on compare les dessins des élèves et le nombre de couleurs employées par chacun.

Lorsque la ligne ne se recoupe pas, on utilise seulement deux couleurs qui permettent de distinguer l'intérieur et l'extérieur de la courbe. Si, tout en restant fermée, la courbe se recoupe, le nombre de plages est supérieur à deux.

La possibilité de colorier les diverses régions est due au fait que si deux points se trouvent dans des régions différentes, il est impossible de tracer un chemin allant de l'un à l'autre sans traverser la courbe.

Cette remarque, triviale dans le plan, devient pertinente si on trace une ligne fermée sur la chambre à air d'un pneu d'auto. Il est possible en effet d'y tracer un cercle qui ne découpe pas cette surface en deux parties

Exemple 6 (vers 10-11 ans)

On donne un lot de polygones en carton, de formes et de tailles diverses : triangles, quadrilatères, pentagones, ... et on demande de les classer selon leur nombre de côtés, de sommets, d'angles.

Cette activité qui a pour effet de renforcer l'acquisition des nombres naturels ne nécessite aucune définition préalable de côté, sommet ou angle. On peut marquer de couleurs différentes ces trois types d'éléments.

Exemple 7 (vers 10-11 ans).

On donne à chaque élève une bande de papier et une paire de ciseaux. On leur demande de découper des quadrilatères aussi variés que possible par des coups de ciseaux en ligne droite à travers la bande.

A la suite des Exemples 3 et 4, celui-ci utilise à nouveau une bande comme matériel de départ. Ceci illustre la richesse des activités possibles sur des objets simples.

La Fig. 8 montre le résultat d'un premier découpage anarchique. La Fig. 9 illustre un effort pour retrouver des quadrilatères connus.



Fig. 8

fournissent quantité d'occasions d'étudier des surfaces planes. Mais comme dit Freudenthal, l'enfant vit et se meut dans l'espace.

L'analyse et la comparaison de solides sont des occasions de retrouver des figures connues, d'en rencontrer de nouvelles et de rendre familières des notions telles que faces planes, faces parallèles, faces perpendiculaires. Lorsque celles-ci seront familières aux élèves, les concepts de plans parallèles, plans perpendiculaires seront définis (sans doute pas avant le début du secondaire).

La famille des *parallélépipèdes rectangles* doit être privilégiée. Il faut que les élèves construisent d'abord de tels parallélépipèdes avec des baguettes pour les arêtes, et des rectangles en carton pour les faces. Ils doivent apprendre à les développer, puis à les construire en partant d'un développement.

Les notions de parallélépipède et de cube servant à élaborer celle de volume, il est intéressant de faire construire des parallélépipèdes avec des cubes identiques, d'en construire des modèles aux échelles 2, 3, ... et de comparer alors les longueurs, aires et volumes.

Enfin, les représentations planes des solides méritent elles aussi l'attention à tous les âges. Jusqu'à 12 ans, il s'agira de représentations simples de solides simples telles que les figures en plan ou élévation d'objets triorthogonaux (boîtes parallélépipédiques, maisons de formes simples, ...) ou de perspectives cavalières construites sur un réseau de points triangulé (Exemple 11). Il est utile que les élèves apprennent à décoder des figures en perspective cavalière, car c'est en s'appuyant sur de telles perspectives qu'on étudie plus tard la géométrie de l'espace.

Exemple 11 (vers 10-11 ans)

On donne 24 cubes isométriques et on demande de les assembler pour fabriquer des parallélépipèdes rectangles. Trouver toutes les solutions.

Cette consigne provoque une expérimentation des diviseurs d'un nombre et donne de ceux-ci une interprétation géométrique (cf. n° 6.2.5). Selon le niveau des élèves, on peut leur demander de comparer les aires totales de ces parallélépipèdes, d'en construire d'analogues en assemblant des tiges et de comparer les longueurs totales des tiges utilisées dans chaque cas. On peut aussi bien entendu recommencer avec 64 cubes, ou avec 17.

Exemple 12 (vers 10-11 ans)

On dispose de quatre petits cubes identiques qu'on peut accoler face contre face. Quels sont tous les solides que l'on peut construire ainsi ? On demande ensuite de les dessiner chacun de plusieurs façons possibles sur du papier pointé triangulé.

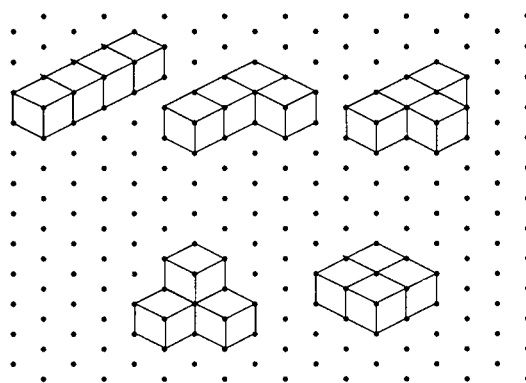


Fig. 11

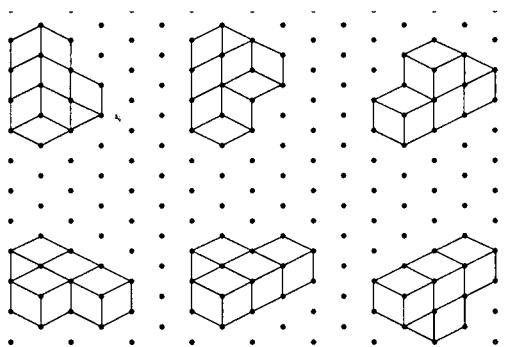


Fig. 12

La Fig.11 montre différents solides que l'on peut construire. La Fig.12 montre quelques représentations de l'un d'eux.

6.2.4 Mouvements simples et symétries

L'expérience de mouvements élémentaires et d'objets symétriques simples donne un premier contact avec les translations, symétries orthogonales et rotations.

Les translations, symétries orthogonales et rotations sont communes dans l'environnement quotidien. Il importe que les élèves les observent, les expérimentent et apprennent à en parler. Il serait prématuré de leur en imposer une théorie.

Elles prennent la forme de mouvements divers des parties du corps, puis d'autres mouvements tels que le glissement le long de rails ou d'une règle, le mouvement d'un translateur, celui des aiguilles d'une montre, d'une clé dans une serrure, d'un calque que l'on retourne, etc.

Elles prennent aussi la forme de symétries observées dans les objets quotidiens : soit symétrie bilatérale, soit symétrie par translation dans les frises et papiers peints, ou par rotation dans les rosaces. Les symétries centrales sont un peu plus rares. Ces

objets sollicitent le sens esthétique.

L'expérience des transformations doit être la plus variée possible. Il faut les saisir par manipulations avant de passer à des constructions par dessin : on pourra par exemple prolonger une frise, un pavage, ou compléter une rosace en disposant adéquatement des figures prédécoupées, ou en collant des gommettes, faire tourner une nappe ronde, une assiette, une roue de vélo (en utilisant les mots centre, demi-tour, quart de tour, ...) ou encore, une figure étant donnée, en choisir une autre qui peut être son image par une rotation d'un demi-tour et la placer au bon endroit.

Les constructions par dessin de motifs isométriques à un motif donné doivent au niveau primaire demeurer très simples et se faire par exemple sur du papier quadrillé ou pointé, ou utiliser un gabarit que l'on tourne autour d'un centre pour dessiner une rosace.

Les constructions sur du papier quadrillé ou sur un géoplan peuvent aider à associer à certains polygones simples les transformations qui expriment leur symétrie : les parallélogrammes associés aux translations, les triangles et trapèzes isocèles aux symétries orthogonales, etc.

Exemple 13 (vers 10-11 ans)

Sur le papier peint de la Fig.13, colorier de la même façon plusieurs motifs obtenus par translation du premier motif (celui du dessus à gauche). Attention, il y a un petit piège.

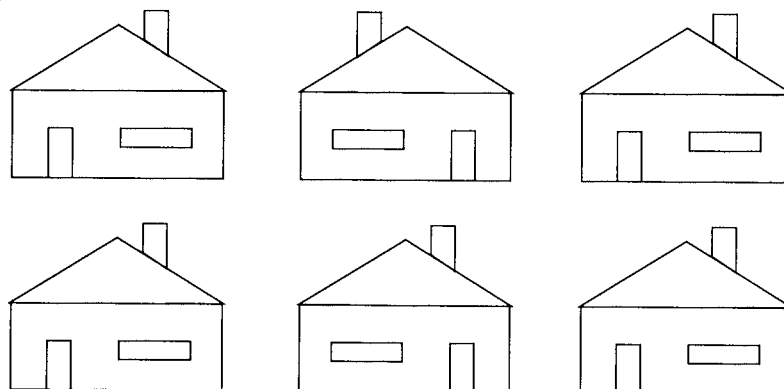


Fig. 13

Exemple 14 (vers 10-11 ans)

On considère le pavage de la Fig.14 et on enlève le carré grisé. De combien de façons peut-on le remettre à sa place ? Et s'il s'agit du parallélogramme grisé de la Fig.15 ?

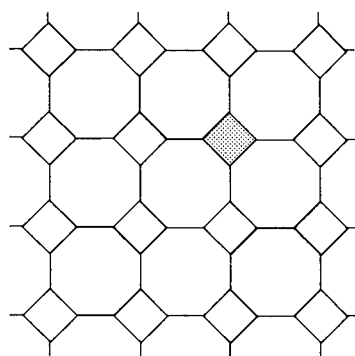


Fig. 14

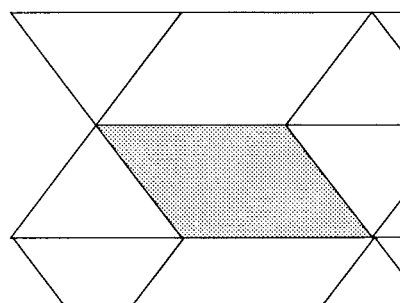


Fig. 15

Pour répondre à la question, il faudra marquer la pièce de façon à repérer ses faces et son orientation. Cette activité prépare l'étude de l'invariance des figures pour certaines transformations, étude qui n'interviendra qu'au niveau secondaire.

6.2.5 Et aussi des nombres...

La géométrie n'est pas une discipline isolée : elle côtoie sans cesse les nombres.

A l'Exemple 5, nous avons vu déjà les nombres naturels utilisés dans un premier classement des polygones. A l'Exemple 10, ils étaient associés au volume des parallélépipèdes. Il est important de proposer aux élèves des situations où les nombres et les notions géométriques jouent des rôles complémentaires. Les exemples ci-dessous montrent le rôle des naturels et de quelques fractions simples. D'autres exemples se trouvent au Chap. 3 (sur les grandeurs) et au Chap. 4 (sur les nombres) et renvoient aux nombres décimaux. Les nombres et la géométrie s'épaulent dès le tout début. Ils se marient définitivement lorsqu'apparaît la géométrie en coordonnées.

Exemple 15 (6-7 ans)

Sur un quadrillage, construire des figures variées par accollement de 3 carrés, puis de 4, de 5, etc. Classer ces figures.

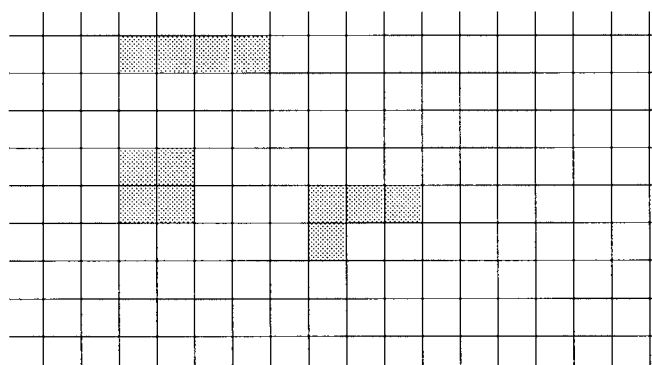


Fig. 16

La Fig.16 donne un exemple de réponse. Cette activité engendre de nombreuses figures parmi lesquelles les quadrilatères sont appelés rectangles. Certains de ceux-ci sont des carrés. Ce sont ceux que l'on peut faire avec un nombre de petits carrés égal à 4, ou 9, ou 16, ... Plus généralement, on rencontre en dessinant des rectangles les notions de diviseur d'un nombre, carré d'un nombre.

Exemple 16 (vers 10-11 ans)

On considère à nouveau les assemblages de triangles de la Fig. 10, et on demande de comparer leurs aires.

Cette question n'est pas immédiatement appelée par la situation de l'Exemple 8, mais elle en constitue un complément intéressant. Il s'agit en effet d'une situation dans laquelle aucun calcul n'est nécessaire pour établir des rapports entre les aires des figures. Elle amène à construire des opérateurs fractionnaires.

6.2.6 Les objets mentaux ; agir c'est aussi penser

Les objets mentaux sont les instruments efficaces de la pensée géométrique à l'école primaire ; les propriétés des objets et des figures se découvrent dans l'activité même de les fabriquer.

Les solides et figures les plus simples sont, pour les élèves entrant en primaire, des associations d'impressions motrices et visuelles. Ils les reconnaissent et les nomment, quoiqu'en dehors de toute analyse de leurs propriétés : ce sont principalement les carrés, cubes, triangles, ronds (ou disques), ... Cette reconnaissance est au début hésitante. C'est ainsi qu'un carré une fois reconnu ne le sera peut-être plus dans une autre position, ou qu'un rectangle sera nommé carré. Ces notions se précisent par la suite lors des apprentissages par comparaison et de la structuration par familles.

Les objets et figures sont pendant longtemps suffisamment décrits par les notions familières de sommets, faces, arêtes, angles, côtés, bords, etc., par d'autres notions qu'il faut introduire, telles que médiane et diagonale, et des relations simples telles que parallèle ou perpendiculaire.

Parallèle veut dire *partout également écarté*, comme les deux bords d'une bande, d'une règle plate, ... Plus tard, on apprendra à dessiner des parallèles en utilisant deux fois une équerre en liaison avec l'étude du rectangle ou du trapèze rectangle (Fig.17) ; encore plus tard, cette construction se fera en liaison avec la notion de translation (glissement) et en faisant glisser une équerre sur une règle (Fig.18).

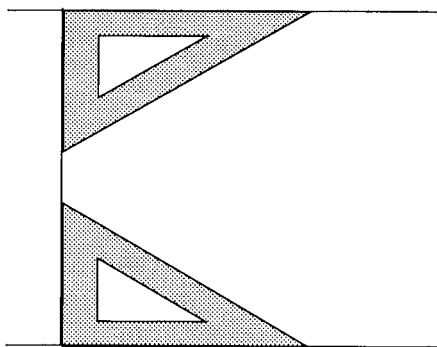


Fig. 17

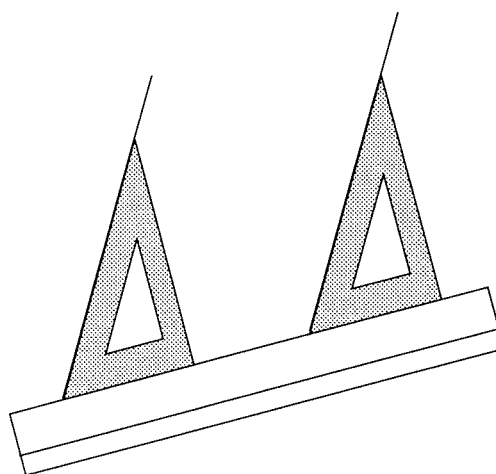


Fig. 18

Perpendiculaire veut dire, entre autres, *dessiné à l'équerre, obtenu après un double pliage (Fig.19).*

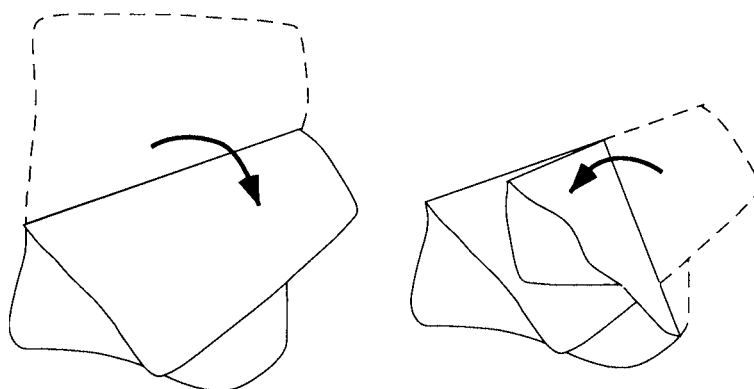


Fig. 19

Ainsi la pensée géométrique commençante s'exprime avec assez de précision en termes d'objets mentaux. Les concepts de point, droite, plan, ... définis comme objets idéaux satisfaisant aux axiomes bien connus, ne doivent être introduits que lorsque la nécessité s'en fait sentir, c'est-à-dire si l'on étudie ou si l'on veut utiliser les propriétés d'alignement et d'incidence de points, droites et plans (cela se fait dans le secondaire). Ces concepts servent à fonder une géométrie déductive dont les élèves du primaire sont encore loin.

Dans la création (la fabrication) des familles de figures, les propriétés de celles-ci sont découvertes dans l'action même de les faire. Les figures ne se laissent pas construire n'importe comment, car certaines propriétés en entraînent d'autres. Les élèves réalisent cela très progressivement. Par exemple ils diront tout d'abord : « j'ai

fabriqué des parallélogrammes ; parmi ceux-ci, certains ont des diagonales de même longueur, et ce sont des rectangles ». Un peu plus tard : « j'ai construit un parallélogramme qui a des diagonales de même longueur, et j'ai obtenu un rectangle ». Ceci conduit au stade suivant (au début du secondaire) : « je sais que ce parallélogramme a des diagonales de même longueur, j'en déduis que c'est un rectangle ». Et plus tard encore : « pour démontrer qu'un parallélogramme est un rectangle, il suffit de prouver que ses diagonales ont même longueur ».

On voit ainsi le passage par étapes de l'acte à la pensée, des yeux et de la main au cerveau. C'est pourquoi les enfants trouvent naturel d'énoncer les propriétés en termes d'action, et il est bon de les laisser faire. Ils diront « nous avons fabriqué des quadrilatères avec quatre angles droits, ce sont des rectangles ; parmi ceux-ci, certains ont leurs côtés de même longueur et ce sont des carrés ». On perçoit l'avantage, pour des jeunes enfants, de ce type de découverte et de langage, sur les définitions qui résultent d'une étude monographique des rectangles (le rectangle a quatre angles droits), suivie d'une étude monographique des carrés (le carré a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur).

Notons enfin qu'une brève liste de notions telles que *parallèle*, *perpendiculaire*, *superposable*, *tourner*, *retourner*, ... peut servir comme point de départ aux élèves pour questionner les figures, pour en entamer l'analyse.

6.3 La géométrie au premier degré du secondaire

Jusque dans les années 60, la géométrie dite intuitive s'arrêtait après la première année du secondaire pour devenir une géométrie axiomatique, directement inspirée d'Euclide, avec son cortège de définitions et de théorèmes. Ceux-ci s'enchaînaient dans une logique difficile à contester, mais qui ne montre guère ses raisons. D'où le paradoxe d'une science qui s'adresse à la raison sans donner aux débutants les moyens d'exercer la leur de manière autonome. Montrons comment, dans les premières années du secondaire, on peut enclencher une transition progressive de la géométrie intuitive vers la géométrie comme théorie unifiée.

6.3.1 Construire et communiquer

Construire des figures et expliquer les constructions amène à reconnaître les propriétés déterminantes des figures.

L'idée est de proposer aux élèves de produire des figures dans des contextes divers et avec toutes sortes de matériels (tiges articulées, papier plié, papier calque, instruments de dessin, logiciels de dessin...). On leur demande ensuite d'expliquer leur construction (de dire comment ils ont fait) ce qui les amène à de brefs enchaînements de propriétés et à une vue dynamique des notions : « j'ai fait ceci et cela, et voilà ce que j'ai obtenu. » (cf. n° 6.2.6). Il est souvent intéressant d'examiner le même objet produit de façons différentes, car on découvre et confronte ainsi plusieurs propriétés. Il importe de mettre au point avec les élèves les outils de communication orale et écrite pour décrire les phénomènes et les mettre en relation. C'est par le langage que les perceptions engendrent des objets mentaux. Il n'est pas utile d'introduire pour cela des symboles mathématiques particuliers. De tels symboles introduits à ce stade en géométrie peuvent même, en leur imposant un effort stérile, détourner certains élèves de la matière qu'on veut leur enseigner. Quelques mots nouveaux doivent être appris, et pour le reste la langue maternelle possède les structures de phrases nécessaires.

Exemple 1. (vers 12 ans)

On peut construire des polygones en articulant des tiges bout à bout en chaîne fermée. Quels types de triangles peut-on obtenir avec trois tiges ? Et quels types de quadrilatères avec quatre tiges ?

On croise deux tiges et on relie leurs extrémités par des segments. Quels types de quadrilatères obtient-on ainsi ?

Voici quelques éléments de réponse. D'abord, avec trois tiges quelconques, on ne peut pas toujours faire un triangle, et avec quatre tiges on ne peut pas toujours faire un quadrilatère. Un triangle est déterminé (à une isométrie près) par les longueurs de ses côtés ; un quadrilatère non. Avec quatre tiges de même longueur, on obtient toujours un losange (qui peut être un carré). Ceci paraît évident si l'idée que l'on a du losange est celle d'un quadrilatère à quatre côtés de même longueur.

Avec deux tiges croisées en leur milieu on obtient des parallélogrammes. Si les deux tiges sont perpendiculaires, on obtient un losange. Celui-ci n'est carré que si les deux tiges ont même longueur.

Les élèves étant amenés à énoncer leurs résultats, ils réalisent que certaines propriétés sont déterminantes d'un type de figure. Par contraste, lorsqu'une figure représentative d'une famille est soumise toute faite à leur observation, ils dissocient difficilement ses propriétés et discernent mal quels rôles elles jouent. Les Exemples 2 et 4 ci-après montrent que les constructions aux instruments ont de même pour effet de faire voir les conditions déterminantes d'une figure. Remarquons, en terminant l'exposé de cet exemple, qu'il illustre à nouveau l'intérêt de créer des figures par familles entières (cf. 6.2.2).

Exemple 2. (vers 12 ans)

Le motif de la Fig. 1 a été obtenu en découpant un papier plié en deux. Construire aux instruments l'image que l'on obtiendrait par un pliage selon la droite de la Fig. 2.

Expliquer les étapes de la construction.

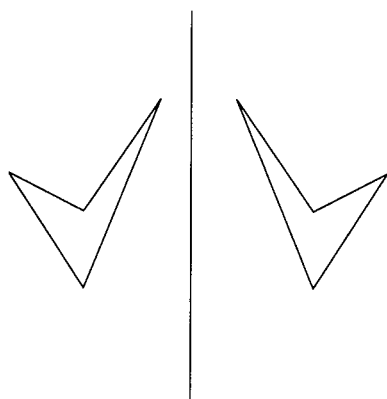


Fig. 1

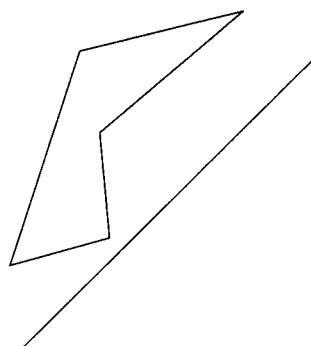


Fig. 2

Le pliage est une opération qui a lieu dans l'espace. La construction demandée amène à transposer cette opération en une construction dans le plan. Il faut pour cela isoler mentalement les points clés de la figure, les associer par couples original-image et chercher la propriété déterminante de ces couples. On voit la pensée à l'œuvre lorsqu'elle abstrait pour transposer.

Une définition dynamique sort de là : dans une symétrie orthogonale, chaque point est envoyé perpendiculairement à l'axe, de l'autre côté de l'axe et à une distance de celui-ci égale à la distance de départ.

L'exemple suivant peut être traité après une première initiation aux isométries.

Exemple 3 (vers 12-13 ans)

La Fig. 3 reproduit un pavage de M.-C. Escher. En s'aidant d'un calque, décrire les mouvements divers qui envoient un lion sur un autre.

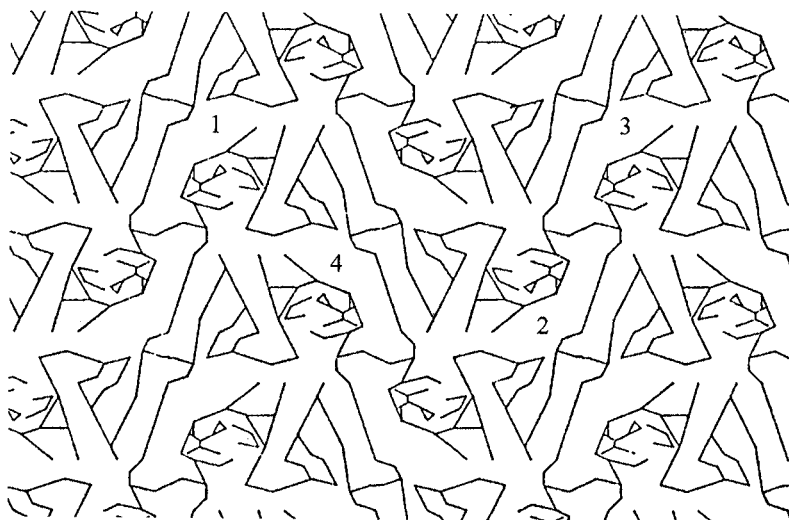


Fig. 3

L'usage d'un calque, sur lequel on aura reproduit le pavage, conduit à associer à chaque isométrie l'image d'un mouvement qui l'engendre. On retrouve l'idée d'une vue

dynamique des notions.

Quelques éléments de réponse : pour passer du lion 1 au lion 2, on fait tourner le calque d'un demi-tour autour d'un point fixé par une épingle ou une pointe de compas (c'est une symétrie centrale) ; entre le lion 1 et le lion 3, le calque glisse en ligne droite (translation) ; pour passer du lion 1 au lion 4, il faut retourner le calque (c'est un retournement).

Prolongement : sur le même pavage, repérer des couples de lions images l'un de l'autre par une même symétrie centrale. Une telle question tend à étendre l'idée de transformation au plan entier.

Exemple 4 (vers 13 ans)

La Fig. 4 montre une droite a portant un point A , une droite d , et le point A' symétrique du point A par rapport à d . En n'utilisant qu'une règle non graduée, construire l'image de a par la symétrie d'axe d . Expliquer la construction.

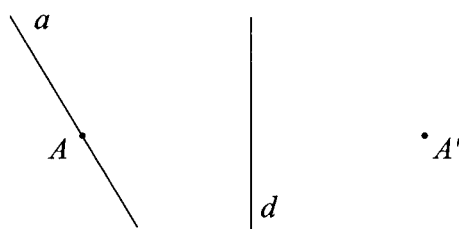


Fig. 4

Il faut songer à prolonger le dessin de a jusqu'à son point d'intersection avec d , puis joindre ce dernier à A' . On réalise la construction en la décomposant en une suite linéaire d'actions (toujours le point de vue dynamique). La solution mobilise en les enchaînant plusieurs propriétés : la conservation de l'incidence (l'image de a passe par l'image de A), l'existence de points fixes, la détermination d'une droite par deux points. Ces propriétés, triviales et sans intérêt lorsqu'on les rencontre une à une, montrent ici leur utilité. Il n'est pas nécessaire de les apprendre au préalable. L'enchaînement des propriétés dans la construction a valeur de preuve et est une démonstration.

6.3.2 Explorer des familles de figures, découvrir, argumenter

Apprendre la géométrie, ce n'est pas seulement démontrer des propriétés données, c'est aussi explorer des champs de figures, découvrir et s'étonner, argumenter.

Lorsque le professeur expose des démonstrations, les arguments qu'il invoque apparaissent comme des astuces qu'il est seul à pouvoir découvrir. Si au contraire, on ménage à la classe des phases d'exploration et de découverte, non seulement on augmente l'attrait de la géométrie, mais encore les champs d'exploration (les familles de figures) sont des sources d'arguments.

Exemple 5. (vers 12 ans)

La somme des angles d'un triangle varie-t-elle avec la grandeur et la forme de celui-ci (depuis les minuscules triangles dessinés dans un cahier jusqu'aux grands triangles qu'on peut dessiner dans la cour) ?

Même s'ils ont appris à l'école primaire que la somme des angles fait 180° , les enfants ne répondent jamais unanimement. Beaucoup disent : «ce serait quand même étonnant que la somme des angles reste la même quand on fait varier la forme du triangle et les longueurs de ses côtés ! » Posée ainsi, la question provoque un pourquoi. Voici, parmi d'autres possibles, une piste qui fournit des réponses.

Soit un triangle découpé dans du carton. On juxtapose ses trois angles en se servant de trois copies du triangle. Cela donne une disposition comme celles que montre la Fig. 5.

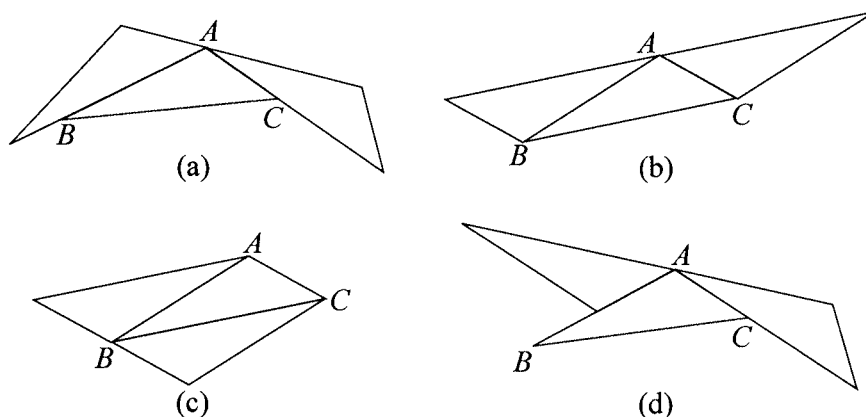


Fig. 5

La disposition (b) fait apparaître une parallèle à BC passant par A et la disposition (c) une parallèle à AC passant par B . On voit ainsi apparaître naturellement, au cours de l'exploration, l'idée mise en œuvre dans la preuve classique du théorème : dessiner par A une parallèle à BC (Fig. 6) et se servir deux fois de la propriété des angles alternes-internes. A défaut d'une telle découverte sur le tas, cette parallèle est parachutée on ne sait d'où.

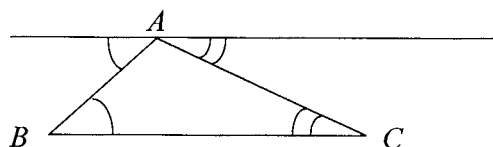


Fig. 6

Certaines dispositions de la Fig. 5 (à savoir (b), (c)) se retrouvent dans les pavages de triangles. On les obtient en déposant les trois triangles sur la même face et en juxtaposant les côtés de même longueur. Dans ces figures, on peut passer d'un triangle à un voisin par symétrie centrale autour du milieu du côté commun. On relie ainsi deux propriétés de la symétrie centrale (la conservation des angles et de la direction) avec la propriété de la somme des angles d'un triangle et l'axiome d'Euclide.

La situation suivante peut être proposée comme initiation au théorème de Thalès, à des élèves qui ont déjà observé des figures construites à l'échelle et savent leur associer des tableaux de proportionnalité.

Exemple 6. (vers 13-14 ans)

Une publicité annonce un téléviseur dont l'écran mesure 63 cm en diagonale (les publicités donnent habituellement cette seule dimension). C'est beaucoup plus que ma

TV dont l'écran mesure 20 cm sur 25 cm. Comment trouver la longueur et la largeur de la télévision annoncée ?

Pour que les images ne soient pas déformées d'un écran à l'autre, il faut que les écrans aient des dimensions proportionnelles : si on agrandit la longueur, il faut agrandir la largeur dans la même proportion. Mais qu'est-ce qui arrive alors à la diagonale ?

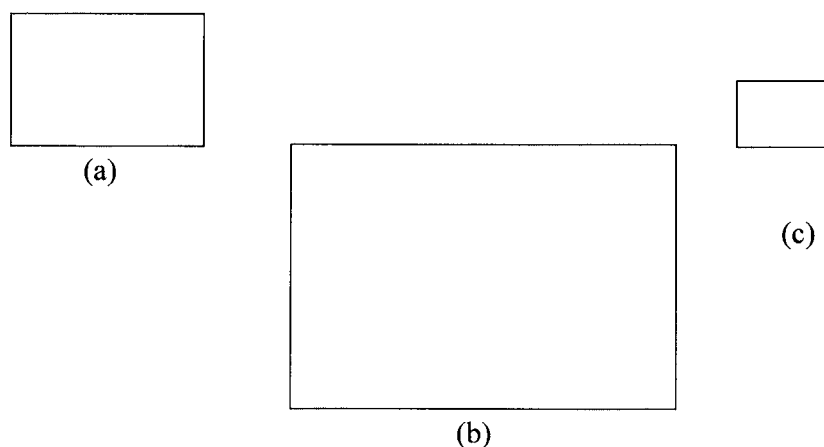


Fig. 7

Le rectangle (b) (Fig.7) a été obtenu en doublant les dimensions du rectangle (a), et le rectangle (c) en les diminuant de moitié. Si on les porte l'un sur l'autre comme le montre la Fig.8, on voit que les diagonales viennent l'une sur l'autre, et sont agrandies ou rapetissées

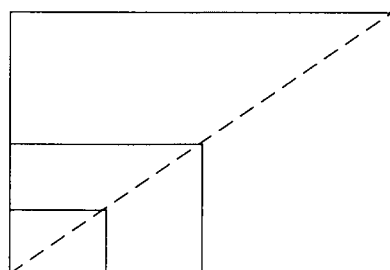


Fig. 8

Pour les deux TV considérées, on peut amorcer un tableau de proportionnalité (Tabl. 1).

	longueur	largeur	diagonale
ma TV	25	20	
la TV annoncée			63

Tabl. 1

Il faut d'abord relever (ou calculer) la diagonale de la petite TV (elle mesure 32 cm) et inscrire cette valeur dans le tableau. Ensuite, on peut compléter le tableau (cf. Tabl. 2). Les valeurs y sont seulement approximatives, car les bords des écrans de TV ne sont pas tout à fait bien marqués.

	longueur	largeur	diagonale
ma TV	25	20	32
la TV annoncée	49	39	63

Tabl. 2

On voit bien dans cet exemple l'exploration d'une famille de rectangles semblables, le contexte attirant l'attention sur la diagonale. Une propriété est découverte, à laquelle s'associe une image mentale : des rectangles semblables disposés comme sur la Fig. 8 ont leur diagonale inclinée de la même façon sur leur base.

Le théorème de Thalès est retrouvé dans ce contexte, à partir d'objets familiers regardés sous un angle neuf. Il peut être réinvesti comme outil de construction de rectangles semblables utilisant, non pas des rapports de longueurs, mais un tracé de parallèles. La propriété des diagonales des rectangles semblables sera retrouvée aussi lors de l'étude des pentes de droites et des coefficients de direction.

On a ici un exemple d'enseignement en spirale. Celui-ci n'est pas seulement une pratique pédagogique consistant à revenir plusieurs fois sur une matière pour l'approfondir, c'est aussi une démarche inhérente à la construction d'un savoir.

6.3.3 Des solides et des représentations planes

L'étude de solides simples et de leurs représentations en projection orthogonale et en perspective cavalière contribue à approfondir la faculté de voir et de se situer dans l'espace.

Au début du secondaire, les projections orthogonales peuvent être étudiées en référence aux deux directions physiques principales : la verticale et l'horizontale. Une table et un fil à plomb objectivent la projection, c'est-à-dire la rendent indépendante de la perception visuelle (ce qu'on appelle la *vue du dessus* dans les dessins techniques n'est jamais exactement ce que l'on voit lorsqu'on *regarde* l'objet du dessus). Bien entendu, les élèves devront plus tard se libérer des directions physiques.

Quant à la perspective cavalière, elle doit sans doute être conçue dans un premier temps comme une suite de règles et de conventions de représentation des objets tridimensionnels, plutôt que comme une projection parallèle. En effet, les projections parallèles sont un sujet assez difficile. On peut les aborder à travers les ombres au soleil.

Exemple 7 (vers 15-16 ans)

Mesurer la distance entre deux sommets opposés d'un cube donné (on dispose d'un cube en baguettes et d'un cube plein).

Dans le cube en baguettes, on peut tenter d'introduire une règle graduée entre les deux sommets choisis, mais ce n'est pas commode. On peut alors passer par l'intermédiaire d'un fil tendu.

Pour le cube plein, une façon de procéder est de dessiner un rectangle dont un côté a même longueur qu'une arête du cube et dont l'autre côté a même longueur qu'une dia-

gonale d'une face du cube. La diagonale de ce rectangle a même longueur que la diagonale du cube (*Fig. 9*) et on peut la mesurer facilement.

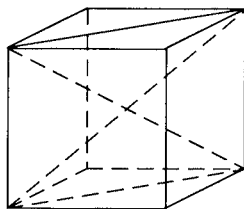


Fig. 9

On peut aussi poser le cube sur un coin de table (*Fig. 10 (a)*), puis le basculer ou le glisser dans une positions adjacente (*Fig. 10(b)*), et enfin mesurer entre les points A et B.

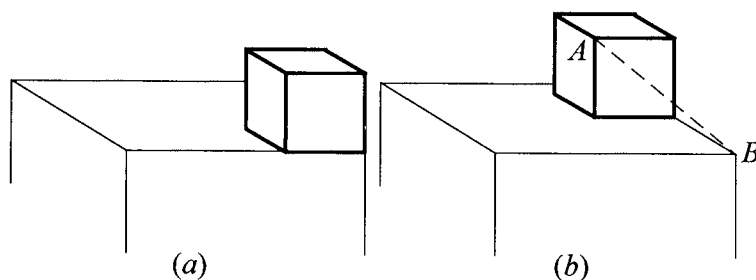


Fig. 10

Remarquons que l'explication donnée par la *Fig. 9* aurait été plus difficile à saisir par certains sur une figure inscrite dans un hexagone régulier (*Fig. 11*). Cette configuration symétrique la fait souvent percevoir comme une figure plane et non comme la représentation d'un cube.

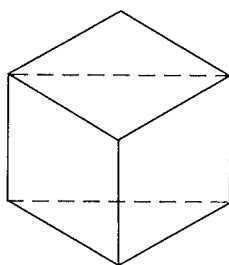


Fig. 11

Exemple 8 (vers 12 ans)

La *Fig. 12* montre une maison vue d'avion et la *Fig. 13* cette même maison telle qu'on la voit de différents points cardinaux. De quel point cardinal s'agit-il dans chaque cas ?

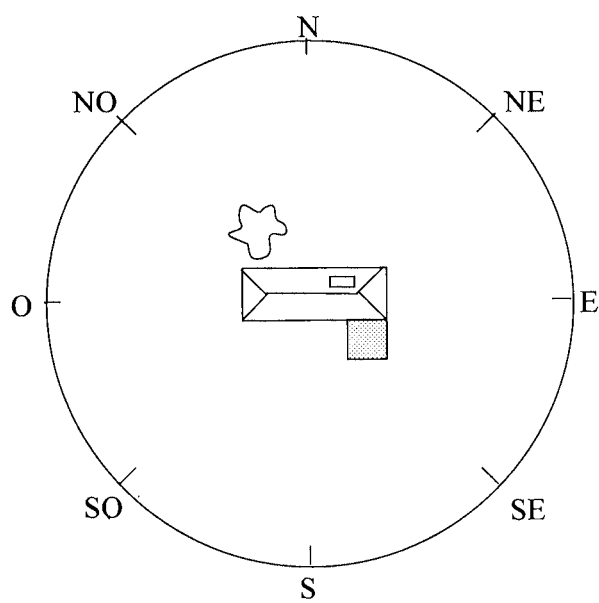


Fig. 12

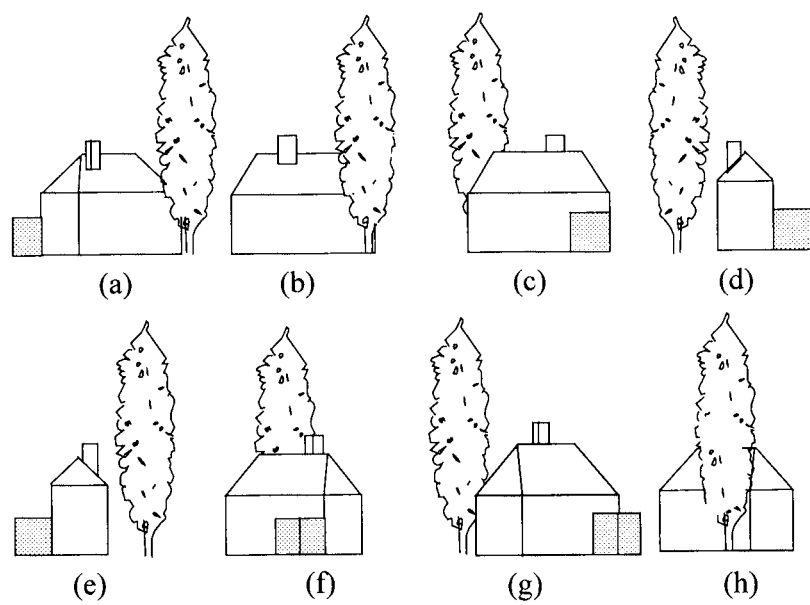


Fig.13

Exemple 9 (vers 12 ans)

La Fig.14 montre un cube quadrillé. On propose à chaque élève de dessiner ses initiales sur la face avant du cube, puis de les reporter sur les autres faces visibles.

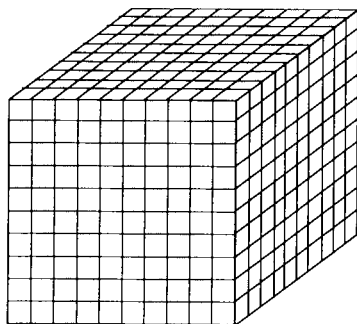


Fig. 14

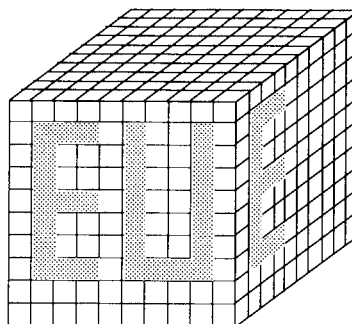


Fig. 15

La Fig.15 montre un début de solution. Cette activité amène à observer la conservation des rapports dans la perspective cavalière.

6.3.4 Mouvements simples, symétries, transformations

Des transformations planes simples, isométriques ou non, sont intéressantes en elles-mêmes et donnent des clés d'étude pour les figures.

L'étude des isométries, et plus généralement des transformations affines contribue à former le regard : quand on est passé par cet enseignement, qui s'amplifie au début du secondaire, on ne voit plus de la même façon le porche d'une cathédrale, un pavement, une grille, ... L'Exemple 3 illustre ce point de vue, dans une modeste mesure.

L'étude des invariants des transformations ne prend tout son sens que lorsqu'apparaissent certaines transformations *qui transforment vraiment* (c'est-à-dire qui ne sont pas des similitudes : cf. la compression à l'Exemple 11 ci-après ; on n'oubliera pas les transformations qui ne conservent pas l'alignement).

Les transformations servent à étudier les figures, comme en témoignent les Exemples 5 et 6.

On dispose de nos jours d'une motivation importante à l'étude des transformations, à savoir la compréhension des principes qui président à la création des images de synthèse. Pour créer de telles images, il est nécessaire en effet de codifier numériquement, puis algébriquement, les transformations dans des axes de coordonnées (cf. à nouveau l'Exemple 11).

Une telle codification met en relief le caractère commun des transformations étudiées, à savoir que chacune envoie un point (choisi n'importe où dans le plan) sur un point du plan. L'idée de transformation se détache ainsi quelque peu de celle de figu-

re bornée à transformer. En outre, mais sans qu'il soit besoin d'insister, les transformations apparaissent alors comme des fonctions (définies sur le plan et à valeurs dans le plan).

6.3.5 Théorèmes clés, outils de calcul

Quelques grands théorèmes structurent la pensée géométrique. Ils provoquent des calculs utilisant des nombres variés.

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle (cf. Exemple 5) permet de calculer des amplitudes d'angles dans des polygones variés. Ces amplitudes sont des nombres positifs, en général des nombres entiers de degrés dans les exemples simples rencontrés avant 14 ans.

Les figures semblables et le théorème de Thalès (cf. Exemple 6) conduisent à travailler la proportionnalité et utiliser les fractions dans des contextes géométriques.

Les repères constitués de deux axes gradués perpendiculaires permettent la représentation analytique de droites et de courbes, mais aussi des principales transformations du plan (voir Exemple 11). La géométrie analytique est sans doute le premier contexte important qui justifie l'introduction des nombres relatifs avec toutes leurs propriétés de calcul (cf. 5.1.2).

Enfin le théorème de Pythagore (cf. Exemple 12) peut être vu simplement. Il conduit à des calculs d'aires et de longueurs et débouche sur l'usage de nombres irrationnels. Ceux-ci seront appréhendés par des valeurs approchées : on n'en approfondira les propriétés que très progressivement.

Au n° 6.2.5, nous avons remarqué que la géométrie à ses débuts côtoyait les nombres. On voit que, pour les élèves entre 12 et 14 ans, ce lien de la géométrie et des nombres s'approfondit dans des directions multiples.

L'exemple ci-dessous est destiné à des élèves qui ont appris à calculer les angles d'un polygone régulier.

Exemple 10 (vers 13-14 ans)

Calculer les angles d'un pentagone régulier étoilé (voir Fig.16).

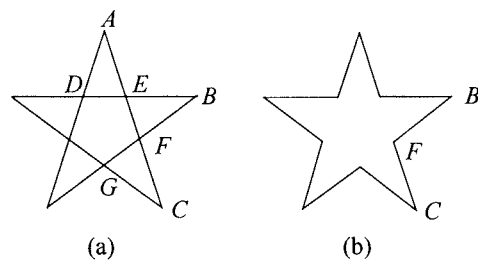


Fig. 16

Si les élèves disposent d'un polygone étoilé construit comme celui de la Fig. 16(a), ils utilisent l'angle du pentagone régulier convexe, les angles opposés par le sommet, les angles supplémentaires... pour calculer l'angle saillant ainsi que l'angle rentrant du pentagone régulier étoilé.

S'ils disposent d'un polygone tel que celui de la Fig. 16(b), ils peuvent être conduits à utiliser directement les symétries du pentagone (voir Fig. 17).

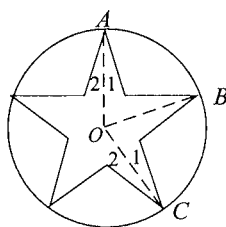


Fig. 17

Dans le triangle isocèle AOC, on sait que $\widehat{AOC}$ vaut 144° . On en déduit que

$$\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 36^\circ$$

et donc que l'angle saillant du pentagone étoilé vaut 36° .

Une autre façon de traiter cet exemple reposerait sur la programmation en Logo.

Exemple 11.

La Fig. 18 montre une tasse dessinée dans des axes de coordonnées sur du papier quadrillé.

Dessiner l'image de la tasse

- 1) si on ajoute -4 aux abscisses de chacun de ses points et 2 aux ordonnées ;
- 2) si on multiplie les abscisses par -2 tout en conservant les ordonnées ;
- 3) si on prend l'opposé de chacune des deux coordonnées.

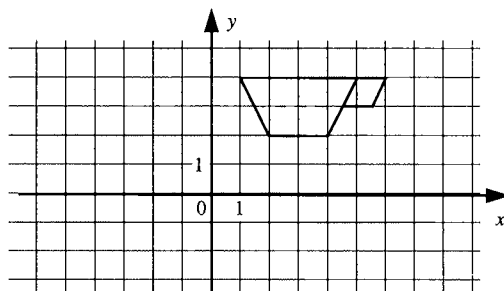


Fig. 18

La Fig. 19 montre le résultat de ces constructions. Il va de soi pour les élèves de cet âge que les transformations envisagées transforment les droites en droites.

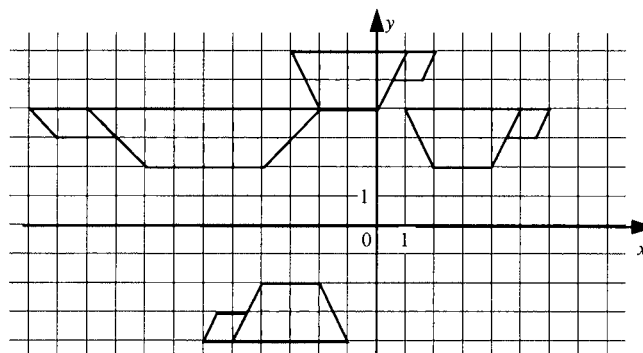


Fig. 19

On peut poser les questions analogues en sens inverse : étant donné une figure et son image par une certaine transformation, trouver les opérations sur les coordonnées qui commandent cette transformation.

Entre 12 et 14 ans, on peut étudier de cette façon des transformations qui laissent le quadrillage invariant et en particulier des translations, des symétries centrales de centre quelconque, des symétries orthogonales d'axes parallèles à l'un des axes du repère et des rotations de $+90^\circ$ ou -90° autour de l'origine.

Dans ce genre de questions, chaque transformation est associée à une opération sur les coordonnées. Les opérations sur les nombres sont vérifiables grâce aux propriétés géométriques des transformations et vice versa. L'opération est applicable à tout point de coordonnées (x, y) , ce qui fait progresser l'image mentale d'une transformation qui affecte tous les points du plan.

Ce type d'activité montre l'importante association entre l'addition et la translation, ainsi qu'entre la multiplication et l'homothétie (ou la compression). Il prépare l'étude ultérieure des symétries des fonctions, ainsi que celle des transformations dans le cadre de l'algèbre linéaire.

Exemple 12 (vers 12-13 ans)

Calculer l'aire du triangle de la Fig. 20 ; puis les aires des deux quadrilatères.

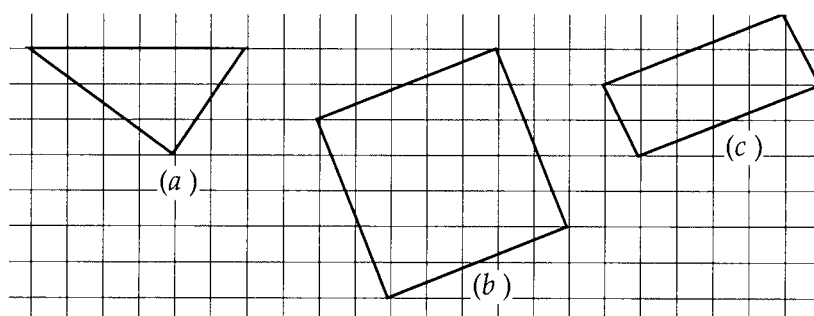


Fig. 20

Lorsque les élèves calculent les aires après avoir mesuré côtés et longueurs, ils obtiennent des résultats significativement différents, au moins pour les Fig. (b) et (c). Tel n'est plus le cas s'ils songent à encadrer chacune des figures dans un rectangle ou un carré comme le montre la Fig. 21, et qu'ils calculent les aires demandées par différence d'aires plus simples à évaluer sur le quadrillage. Cette question peut aussi être tra-

vaillée sur un géoplan.

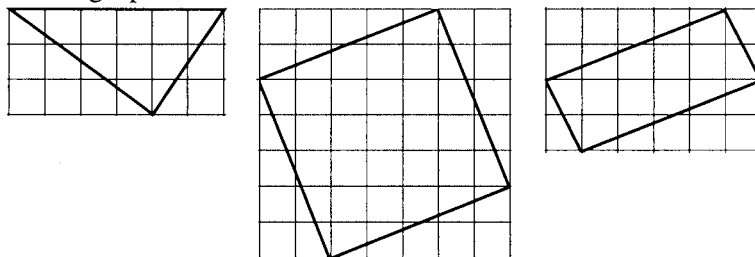


Fig. 21

Des élèves qui ont résolu quelques questions de ce genre accèderont plus facilement que d'autres au théorème de Pythagore et à sa démonstration inspirée par la Fig. 22.

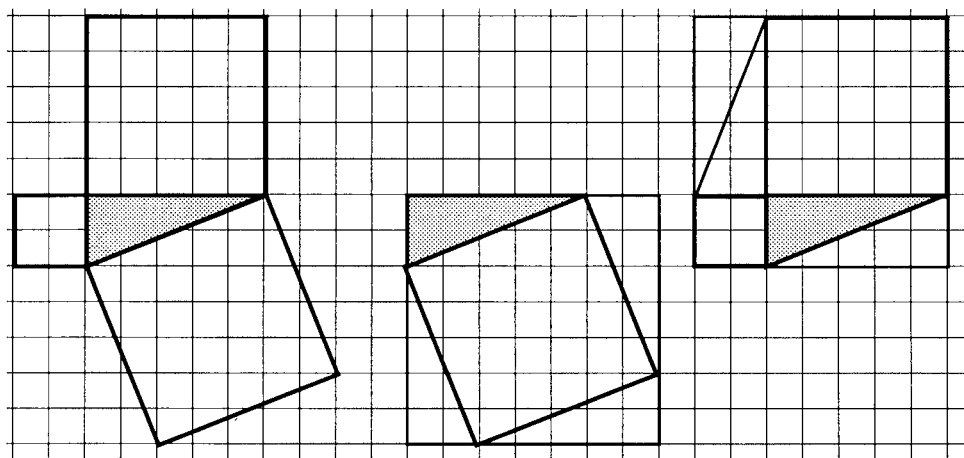


Fig. 22

L'évaluation de la longueur de l'hypoténuse conduit aux racines carrées et à la touche $\sqrt{x}$ de la calculatrice.

6.3.6 Des objets mentaux ; relier des phénomènes, enchaîner des propriétés

Les objets et relations considérés en géométrie jusqu'à 14 ans sont munis des propriétés qui suffisent à en faire des instruments efficaces d'organisation des phénomènes rencontrés jusqu'à cet âge.

Petit à petit, en s'appuyant sur des évidences immédiates ou acquises par l'expérience, on démontre des propriétés non évidentes. Puis on démontre des propriétés nouvelles en s'appuyant sur des propriétés démontrées. Ainsi se constituent des enchaînements (parfois en arborescence) qu'on peut appeler des îlots déductifs.

Les objets mentaux construits au début du secondaire ne sont pas des concepts mis en forme définitive. En particulier, les transformations planes sont le plus souvent

appliquées à des figures et non au plan entier, car les définitions qui les considèrent comme appliquées au plan entier deviennent nécessaires seulement dans des théorèmes qu'on ne voit pas avant quatorze ans (à commencer par les théorèmes sur les compositions d'isométries). De même ces transformations sont utilement associées à des mouvements, alors que ceux-ci seront ultérieurement exclus de la géométrie.

Les angles sont des objets familiers apparaissant dans des polygones et marqués par de petits arcs de cercle. Leurs amplitudes sont mesurées en fractions de tour ou en degrés. On évite les situations qui justifieraient une théorie compliquée.

On ne pose pas la question de savoir si les polygones dont on calcule les aires comprennent ou non leur frontière.

Les nombres rencontrés sont le plus souvent des approximations de nombres définissables plus précisément. Sur cette question des nombres et les occasions de les approfondir, voir le Chapitre 5.

En comparant la situation entre douze et quatorze ans avec celle du primaire, on voit que les phénomènes étudiés sont plus nombreux et plus variés. Qui plus est, des méthodes diverses apparaissent pour analyser les phénomènes (propriétés déterminantes d'un type de figure, transformations, calculs, ...) ainsi que des moyens d'expression pour décrire, relier, enchaîner des phénomènes. Des propriétés non évidentes peuvent être démontrées et des paradoxes résolus. Les enchaînements de propriétés prennent progressivement l'ampleur d'îlots déductifs. Pour les élèves du début du secondaire, ces îlots ne sont pas des morceaux détachés d'une géométrie construite déductivement dans sa globalité. La motivation à démontrer n'est donc pas d'inscrire un énoncé dans un système déductif. Elle est plutôt soit d'amener un énoncé à l'évidence (est-ce bien toujours comme ça ?), soit d'expliquer une évidence (c'est curieux, mais pourquoi est-ce que c'est toujours comme ça ?)

L'exemple suivant est destiné à des élèves qui ont étudié les propriétés des quadrilatères et rencontré la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment.

Exemple 13 (vers 13 ans).

Construire la médiatrice d'un segment donné en utilisant uniquement un compas et une règle non graduée.

Dans un losange, les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre et axes de symétrie de la figure. On regarde le segment donné comme diagonale d'un losange (dont le côté doit être choisi plus grand que la moitié du segment) et on construit l'autre diagonale en déterminant au compas les deux sommets que l'on n'a pas tout de suite. Ainsi la propriété de distance de la médiatrice est liée à sa définition comme axe de symétrie et aux propriétés des losanges.

L'exemple suivant s'adresse aux élèves qui connaissent les symétries des figures planes

Exemple 14 (vers 13 ans)

En partant de la formule qui donne l'aire d'un rectangle, établir successivement les formules des aires d'un triangle rectangle, d'un triangle quelconque, d'un parallélogramme, d'un trapèze.

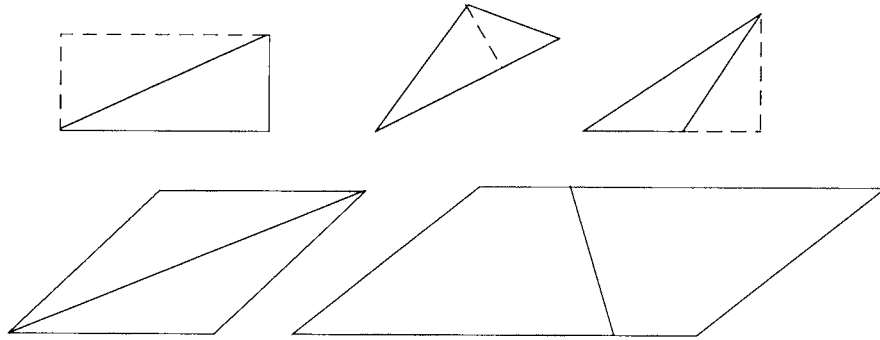


Fig. 23

La Fig. 23 suggère les étapes de l'enchaînement. A chaque étape, on utilise la formule établie à l'étape précédente. On s'appuie en cours de route sur les propriétés suivantes :

- tout rectangle est formé de deux triangles rectangles superposables (par symétrie centrale) ;
- tout triangle peut être vu comme formé par accolement ou différence de deux triangles rectangles ;
- tout parallélogramme est formé de deux triangles superposables par symétrie centrale ;
- tout trapèze joint à son image par une symétrie centrale bien choisie forme un parallélogramme.

6.4 La géométrie aux deuxième et troisième degrés

6.4.1 Des figures, des objets ; diverses disciplines par delà la géométrie

Les figures, les objets construits, observés, manipulés demeurent importants jusqu'à la fin du secondaire ; certaines disciplines, en dehors des mathématiques, motivent l'étude de questions géométriques.

Les figures demeurent jusqu'au bout de l'école secondaire le matériau principal de la géométrie. Elles sont la source des problèmes qui appellent et justifient la construction théorique. Elles sont aussi le support d'un grand nombre d'intuitions essentielles à la pensée mathématique, bien au-delà des limites de la géométrie. C'est

pourquoi il importe de poursuivre chaque année l'étude de la géométrie dite synthétique.

Il y a tout avantage, pour étudier la géométrie en fin de secondaire, à s'appuyer comme auparavant sur du matériel approprié tel que des photographies, des maquettes, des polyèdres en tiges ou en carton, des cartes, des lampes et projecteurs pour faire des ombres, des vitres pour dessiner des perspectives au marqueur, etc. Il n'y a pas d'âge où, en vertu d'on ne sait quelle exigence de sérieux, il faille éviter les manipulations et les observations. Bien entendu, le recours aux supports matériels n'est pas un objectif en soi. Mais il se justifie souvent, même aux stades les plus avancés de l'apprentissage, lorsqu'il peut provoquer ou faciliter une exploration, une conjecture, une intuition.

De nombreuses questions de géométrie peuvent être utilement abordées sur des terrains qui débordent la géométrie : par exemple la topographie, l'astronomie, la perspective, la photographie, la cartographie, les problèmes de croissance et de pente et aussi - au moment où on aborde les vecteurs - les compositions de vitesses et de forces, les problèmes d'équilibre en statique. Lorsqu'une théorie a été dégagée de ses terrains d'application principaux, elle les retrouve sans peine par la suite. Par contre on n'aperçoit qu'avec difficulté ce que l'on peut faire d'une théorie étudiée hors de tout contexte. Le travail en géométrie dans des contextes tirés d'autres disciplines ou des techniques pose le problème de la coordination entre les enseignements de ces disciplines et des mathématiques. La tradition du cloisonnement disciplinaire rend ce problème difficile. Il ne faudrait pas le négliger pour autant. La question suivante peut être traitée dès que l'on aborde la géométrie d'incidence et de parallélisme. Elle est particulièrement bien adaptée aux sections artistiques. Il n'est pas difficile de la remplacer par une question analogue sur la photographie.

Exemple 1 (vers 16 ans)

On dispose une vitre encadrée devant un observateur assis à table (Fig. 1) et un quadrillage derrière la vitre. L'observateur est prié de dessiner, à l'aide d'un marqueur, le quadrillage tel qu'il le voit à travers la vitre, en fermant un œil et en maintenant l'autre devant un œilleton. Le dessin donne une image déformée du quadrillage. Comment ? Pourquoi ? Comment se prolongerait le dessin si le damier s'étendait à l'infini ?

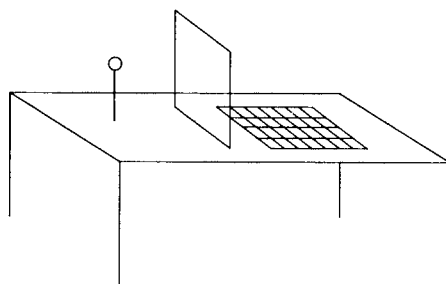


Fig. 1

Bornons-nous à quelques indications sur la réponse. On observe que les droites du quadrillage sont représentées par des droites sur la vitre : c'est que le rayon visuel qui part de l'œil et balaie une droite engendre un plan et que ce plan coupe la vitre suivant une droite.

Les droites du damier qui sont parallèles à la vitre sont représentées sur la vitre par des droites horizontales. En effet, si une droite donnée est parallèle à un plan, tout plan contenant la droite coupe le premier plan suivant une parallèle à la droite donnée (et toute parallèle à une horizontale est horizontale).

Une vue de profil en projection orthogonale (Fig. 2) permet de déterminer les images sur la vitre des lignes du quadrillage parallèles à la vitre.

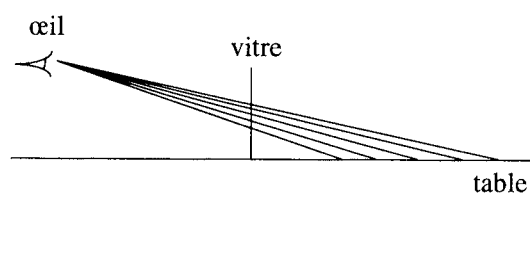


Fig. 2

Si le damier se prolongeait à l'infini, on observerait des images de ces lignes de plus en plus serrées sous l'horizontale dessinée sur la vitre à hauteur de l'œil. On s'aperçoit aussi que les lignes du damier perpendiculaires à la vitre semblent converger vers un point : celui-ci est le *point de fuite principal de la perspective* (pour plus de détails sur cette situation, cf. [Gil87]).

L'exemple suivant n'est pas de nature géométrique. Mais il introduit la représentation vectorielle des forces qui, elle, est géométrique.

Exemple 2

Sur une table horizontale, on place un anneau O fixé par un clou. On tire sur l'anneau à l'aide de deux dynamomètres exerçant, avec un écart angulaire de 120° , deux forces de même intensité (Fig. 3). Dans quelle direction et avec quelle force faut-il appliquer un troisième dynamomètre à l'anneau pour que celui-ci soit en équilibre (c'est-à-dire qu'on puisse enlever le clou et que rien ne bouge) ?

Dans des expériences ultérieures, on variera l'angle entre les deux premiers dynamomètres, et les forces exercées par ceux-ci.

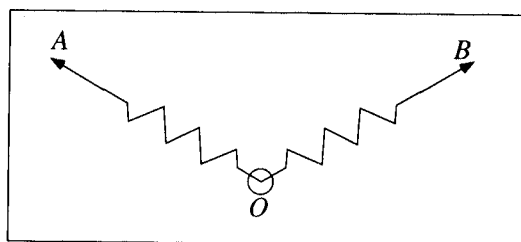


Fig. 3

Dans les conditions de symétrie proposées par l'énoncé, il est assez clair que le troisième dynamomètre doit être appliqué dans la direction bissectrice de l'angle en O. La force à transmettre par ce dynamomètre se trouve par tâtonnement. Elle est égale en intensité à la force exercée par chacun des deux autres dynamomètres. Il est surprenant pour beaucoup d'élèves qu'il ne faille pas faire la somme des intensités.

En explorant d'autres angles, mais toujours avec des forces appliquées d'égale intensité, et en représentant graphiquement la situation, on arrive à une représentation comme celle de la Fig. 4, première illustration de la composition vectorielle des forces.

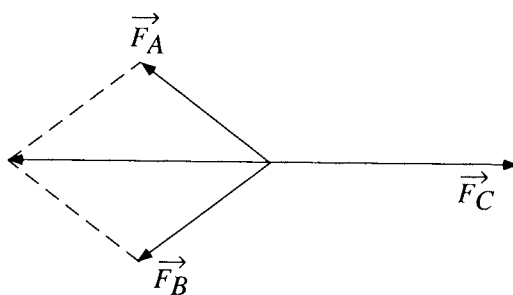


Fig. 4

Il faut compléter cette expérience en se demandant par quelle force unique on peut remplacer $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ pour équilibrer $\vec{F}_C$. On arrive alors à

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = -\vec{F}_C .$$

On peut poursuivre cet exemple en examinant le plan incliné comme engin de levage : cela revient à montrer qu'il faut en général une force moindre pour traîner une charge le long d'un plan incliné que pour la soulever directement.

La composition des vitesses uniformes est un autre contexte pour introduire la somme vectorielle (un bateau traverse avec telle vitesse par rapport à l'eau un fleuve qui s'écoule à telle vitesse ...). Ces questions intéressantes pour tous les élèves sont particulièrement utiles pour les sections techniques de mécanique et construction.

6.4.2. Explorer les situations géométriques par familles

Étudier les figures et les situations par familles est nécessaire à la construction du sens et à la constitution d'une réserve d'arguments.

Il est intéressant d'étudier les figures et les situations non pas une à la fois, en une succession de monographies, mais bien par familles cohérentes, pour assurer la richesse du sens, la mobilité de la pensée, et pour fournir aux élèves des sources

d'exemples, de contre-exemples, et plus généralement d'arguments.

Il est intéressant aussi, à ce niveau d'enseignement comme aux précédents, d'étudier particulièrement les objets extrêmes de chaque famille, car ils illustrent les limites d'un concept. De même les objets immenses ou simplement inaccessibles opposent à la réflexion géométrique des contraintes qui leur sont propres et provoquent des développements originaux et stimulants.

L'Exemple 3 est destiné à des élèves qui ont une connaissance élémentaire du théorème de Thalès et qui savent construire un tableau de proportionnalité.

Exemple 3 (vers 16 ans)

On veut depuis la plage estimer la distance d'un phare sur un îlot en pleine mer. Comment faire ?

On peut viser le pied du phare P à partir du point A où l'on se trouve (Fig. 5). Ensuite on s'éloigne de A perpendiculairement à la ligne de visée jusqu'à un point B d'où on vise à nouveau le phare

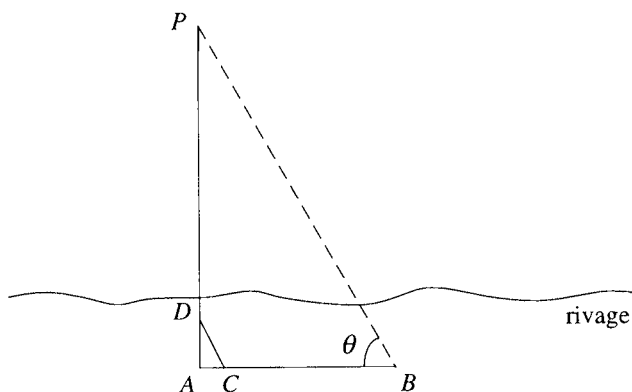


Fig. 5

On relève la distance $|AB|$ et l'angle θ en B . On revient en A et sur une base AC de un mètre, on dessine un triangle ACD semblable à ABP . On sait que

$$\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Si toutes ces distances sont exprimées en mètres, et puisque $|AC| = 1$ on a

$$|AP| = |AD| |AB|.$$

Les distances $|AB|$ et $|AD|$ étant connues, on a ainsi déterminé $|AP|$.

Les élèves qui connaissent la trigonométrie des triangles rectangles peuvent s'épargner la peine de tracer le triangle ACD , car il suffit de se souvenir que

$$|AP| = |AB| \tan \theta$$

et de demander $\tan \theta$ à une calculatrice.

Il existe de nombreux problèmes de mesure d'objets inaccessibles. Rappelons la mesure de la hauteur d'un arbre ou d'une tour grâce à la mesure de l'ombre d'un piquet vertical (Fig. 6), ou par temps couvert à l'aide d'un petit miroir (Fig. 7), ou encore la mesure de la profondeur d'un puits (Fig. 8). Certaines mesures astronomiques sont aussi sources de questions de ce type.

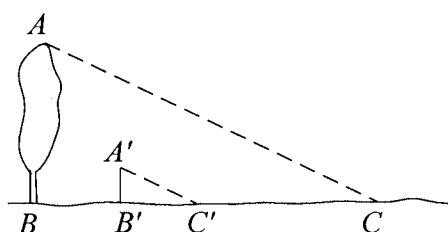


Fig. 6

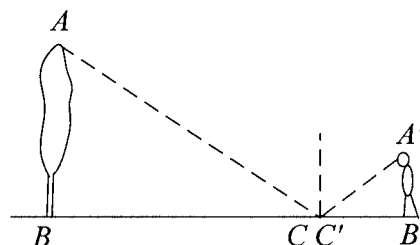


Fig. 7

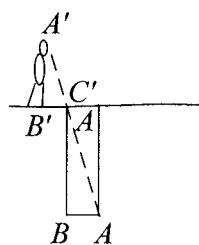


Fig. 8

Pour la plupart des sections professionnelles, techniques, ou générales à peu d'heures de mathématiques, l'accès aux principales formules de volumes par la méthode de Cavalieri devrait s'avérer suffisante. Certaines sections techniques ou générales avec davantage d'heures de mathématiques iront bien entendu jusqu'aux intégrales de volume.

Exemple 4 (vers 16 ans)

a) On connaît la formule du volume du parallélépipède rectangle. Trouver celle du parallélépipède oblique. Trouver celles des cylindres droit et oblique. On dispose comme matériel de départ d'un paquet de fiches en carton.

Le passage du parallélépipède droit au parallélépipède incliné que montre la Fig. 9 suffit tout d'abord à assurer que le volume du parallélépipède oblique s'obtient en multipliant « sa base par sa hauteur ». Mais cette expérience rend aussi plausible le principe de Cavalieri :

Si les aires des sections de deux solides par des plans parallèles à un plan donné sont toujours égales, les volumes des deux solides sont égaux.

Les volumes des cylindres droit et oblique s'obtiennent par une comparaison de ce type entre un cylindre et un parallélépipède approprié.

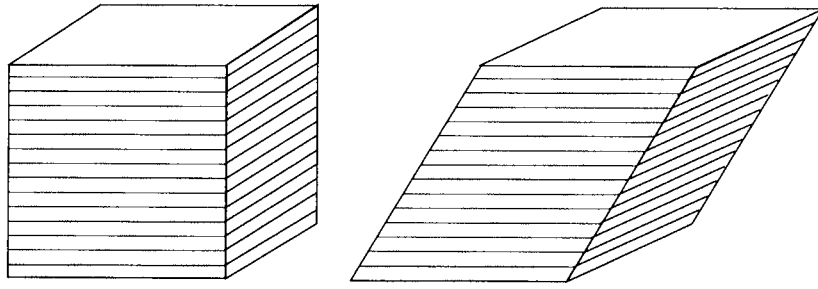


Fig. 9

b) On peut décomposer un cube en six pyramides isométriques : comment ? Et comment à partir de là trouver le volume d'une pyramide quelconque ? Et d'un cône ?

La Fig. 10 suggère la façon de décomposer un cube en six pyramides isométriques, chacune ayant son sommet au centre du cube.

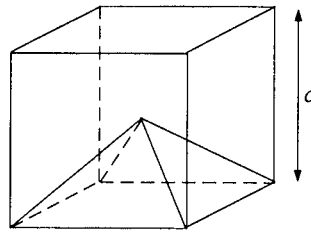


Fig. 10

Le volume de la pyramide vaut

$$V = \frac{1}{6}c^3 = \frac{1}{3} \times c^2 \times \frac{1}{2}c,$$

c'est-à-dire un tiers de fois « sa base par sa hauteur ».

Comment trouver maintenant le volume d'une pyramide quelconque à base carrée et de hauteur h (Fig. 11) ? Posons à côté de celle-ci une pyramide de même hauteur extraite d'un cube de côté $2h$ (Fig. 12).

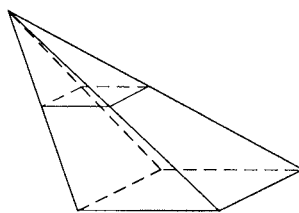


Fig. 11

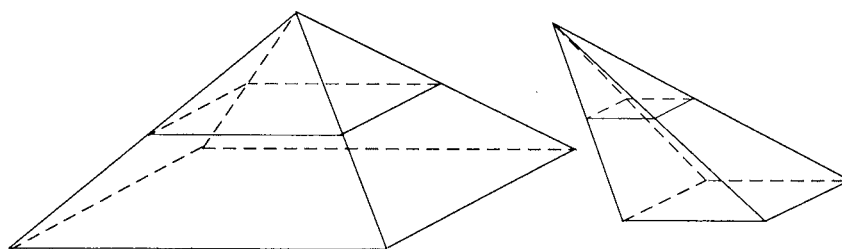


Fig. 12

Les deux pyramides ont même hauteur, mais non même base. Coupons-les par des plans parallèles aux bases. Les sections à une hauteur donnée sont dans le même rapport que les bases (pour établir cela, il faut se baser sur le fait que toutes les sections parallèles d'une pyramide sont homothétiques). Autrement dit, le rapport entre les aires des sections est constant et égal au rapport des bases. On utilise alors le principe de Cavalieri généralisé comme suit :

Si les aires des sections de deux solides par des plans parallèles sont toujours dans un même rapport, les volumes des deux solides sont dans ce même rapport.

On obtient ainsi le volume de la pyramide quelconque à base carrée. Mais on voit qu'on peut, par un procédé analogue, établir la formule du volume pour une pyramide quelconque (quelle que soit sa base) ou pour un cône quelconque. La formule unique est :

$$V = \frac{1}{3} S \times h,$$

où S est l'aire de la base et h la hauteur.

6.4.3 Solides et représentations planes

Il faut poursuivre l'étude des solides, indissociable de leurs représentations planes.

L'étude des solides et autres objets plongés dans l'espace à trois dimensions doit être poursuivie dans la deuxième moitié du secondaire. Les représentations planes de ces objets font plus que d'aider à s'expliquer sur les situations spatiales, elles posent elles-mêmes des questions intéressantes de géométrie de l'espace et contribuent à la construction de la théorie.

Exemple 5. (vers 16 ans)

On dispose d'un cube en baguettes et d'une plaque blanche (carton, polystyrène). Observer diverses ombres au soleil de ce cube. Dessiner chaque ombre, mais comme

s'il s'agissait d'un cube plein et en utilisant un trait interrompu pour les « arêtes cachées » (celles qui ne seraient pas atteintes par le soleil).

La Fig. 13 montre quelques-uns des dessins possibles. Cette question attire l'attention sur certaines symétries du cube. Mais le professeur peut n'engager la classe dans cette voie que si les élèves sont suffisamment préparés.

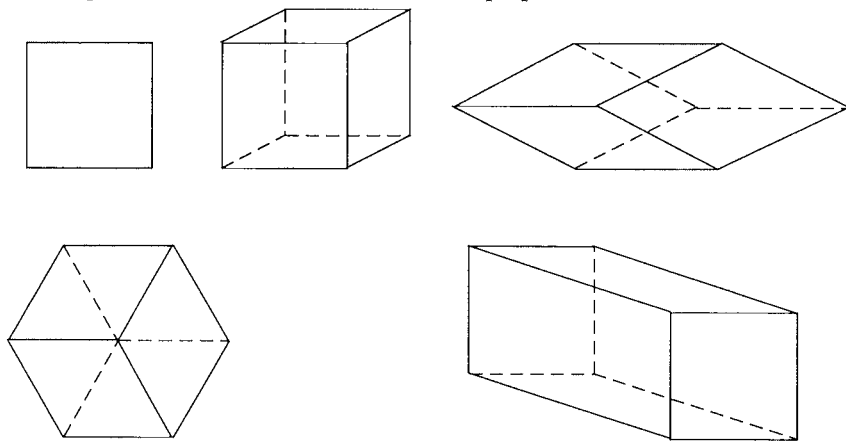


Fig.13

Exemple 6.

On dispose de deux tôles rectangulaires, et on veut les enrouler pour en faire deux tuyaux, et ensuite souder les deux tuyaux à angle droit. Comment faut-il découper les deux rectangles pour que le raccord soit correct ?

Le dessin en perspective de la pièce achevée est montré par la Fig. 14.

La Fig. 15 montre deux projections orthogonales d'un tuyau. Le problème consiste à sectionner le cylindre à 45° selon AB.

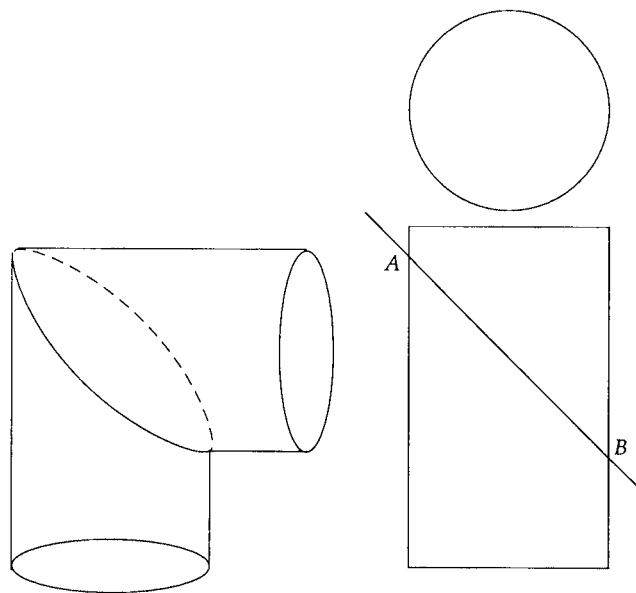


Fig. 14 et Fig. 15

La Fig. 16 reproduit la Fig. 15, mais elle montre en outre, sur la droite, le rectangle de

départ, c'est-à-dire le développement du cylindre.

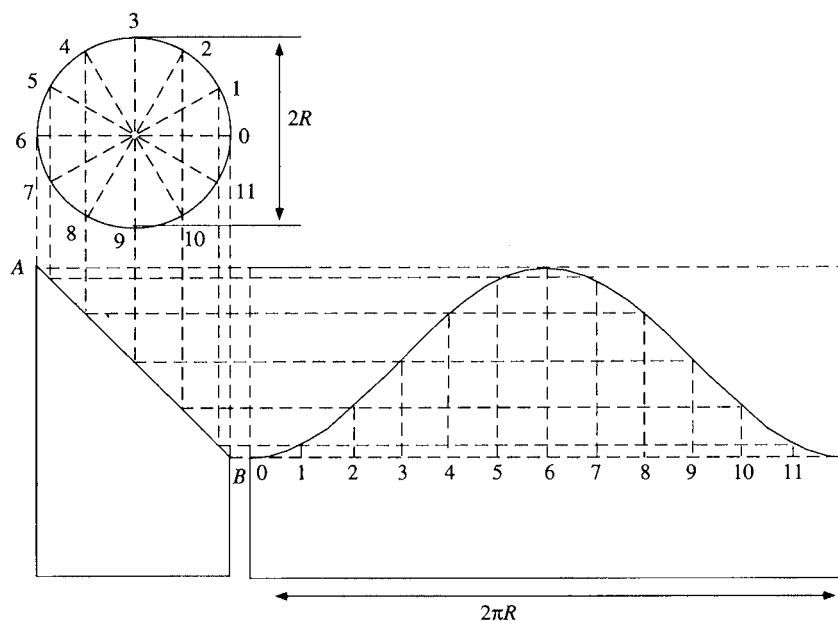


Fig. 16

Le cercle projection verticale est divisé en douze parties égales, et de même pour son développement. La découpe demandée est construite point par point.

Cette question peut servir à introduire les fonctions trigonométriques.

Exemple 7 (vers 16 ans)

a) Décrire le paysage représenté dans chacun des trois cas pour les courbes de niveau de la Fig. 17.

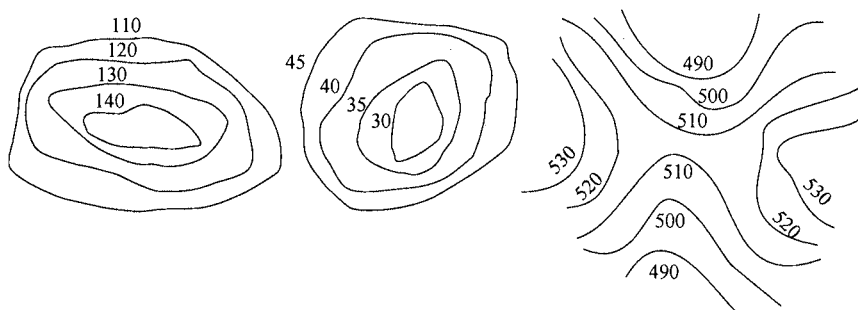


Fig. 17

b) Une demi-sphère et un cône droit sont posés sur un plan horizontal (Fig. 18). Représenter ces deux objets à l'aide de courbes de niveau.

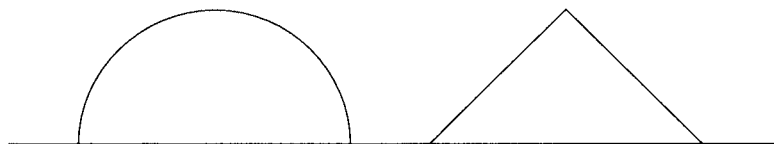


Fig. 18

Les trois bouts de carte de la Fig. 17 représentent respectivement un sommet, un fond

et un col.

La Fig. 19 montre les courbes de niveau de la demi-sphère et du cône. Ce sont des cercles concentriques dans les deux cas. Pour le cône, ils sont équidistants. On voit sur la demi-sphère que plus les courbes sont rapprochées, plus la pente est raide.

Avec des élèves suffisamment avancés, on peut étudier ces problèmes analytiquement (par exemple en coordonnées polaires).

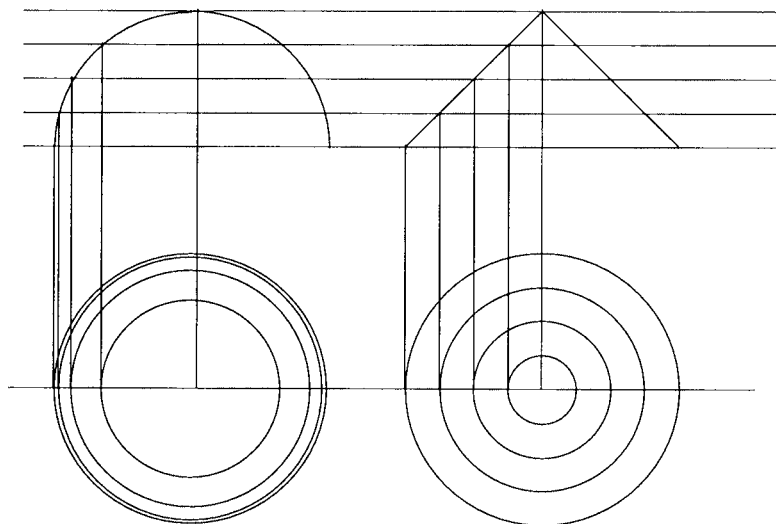


Fig. 19

6.4.4 Symétries et transformations

L'étude des symétries et transformations contribue à faire « saisir l'espace » (cf. n° 6.1.1) et fournit des outils de raisonnement.

Les transformations et les symétries sont encore un thème important dans la deuxième moitié du secondaire. Plusieurs raisons justifient leur étude : leur présence dans l'environnement quotidien (les objets symétriques, les agrandissements, réductions et déformations, les mouvements de solides), leur utilité dans l'étude des fonctions et leur parenté avec les changements de coordonnées, leur lien avec l'algèbre des groupes et le fait qu'elles introduisent à l'algèbre linéaire. En outre, elles demeurent d'importants instruments de démonstration.

Exemple 8 (vers 17 ans)

Un dé est posé sur une table dans la position qu'indique la Fig. 20 (a). On le fait tourner sur lui-même, ce qui amène à le voir comme à la Fig. 20 (b). On le soumet ensuite à une deuxième rotation qui amène à le voir comme en (c). Décrire ces deux rotations. Pourrait-on, en une seule rotation, passer de la position (a) à la position (c) ? (Rappelons que la somme des points marqués sur deux faces opposées d'un dé fait toujours sept. Pour traiter ce problème, il n'est pas mauvais d'avoir un vrai dé en main).

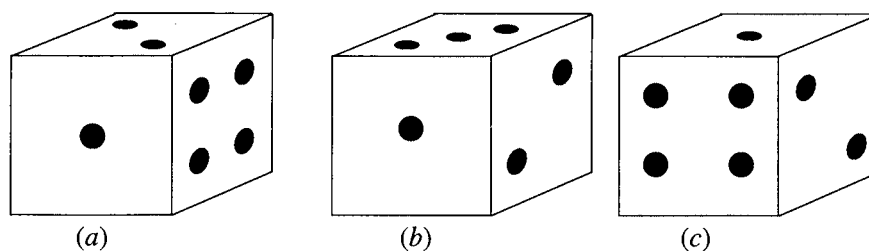


Fig. 20

La première rotation se fait autour d'un axe perpendiculaire à la face frontale marquée 1 (Fig. 21 (a)). Elle est d'un quart de tour dans le sens horloger.

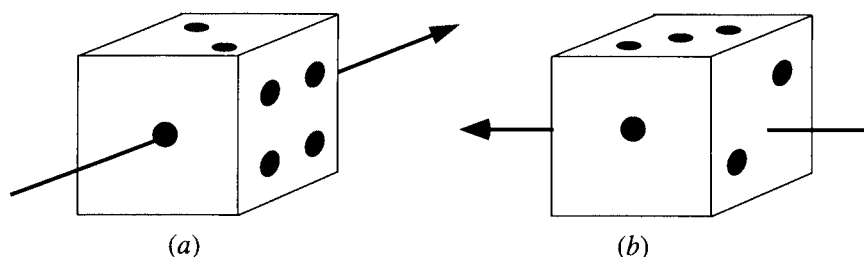


Fig. 21

La deuxième rotation se fait autour d'un axe perpendiculaire à la face debout marquée de deux points. Elle est d'un quart de tour, dans le sens de rotation d'un tire-bouchon ordinaire qui progresserait vers la gauche (Fig. 21 (b)).

On peut passer de la position (a) à la position (c) par une rotation autour d'un axe diagonal du cube (Fig. 22).

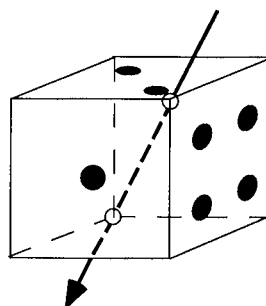


Fig. 22

C'est une rotation d'un tiers de tour dans le sens qui fait progresser un tire-bouchon ordinaire comme l'indique la flèche.

Cette étude des rotations d'un cube est manipulative et intuitive. Il est utile de développer ce genre d'intuitions et de vue dans l'espace, même chez des élèves qui ne partiront pas de là pour construire une théorie. Par ailleurs, avec des élèves plus avancés, on peut représenter les rotations du cube par des matrices. On peut aussi étoffer cette étude pour explorer le groupe des symétries du cube.

Exemple 9 (vers 17 ans)

Tous les cercles sont semblables. Et les paraboles ?

Il y a matière à hésitation, car par exemple les deux paraboles de la Fig. 23, l'une très ouverte et l'autre très étroite, n'ont pas vraiment l'air semblables.

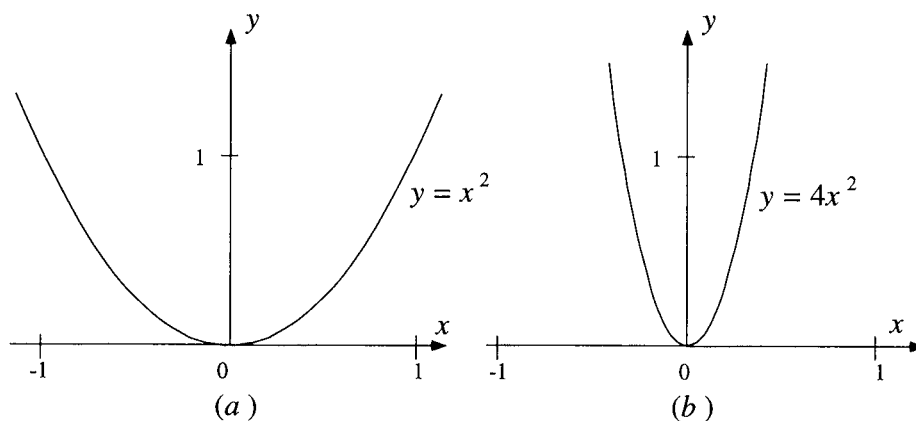


Fig. 23

Il faut expérimenter. Une façon de le faire est d'agrandir la parabole (b) avec un rétro-projecteur. On se convainc que la partie visible de la parabole (a) (Fig. 23) est semblable au bas de la parabole (b). La propriété est-elle générale ?

Représentons dans un même système d'axes (Fig. 24) la parabole $y = x^2$ et une parabole quelconque $y = ax^2$. Y a-t-il une homothétie de centre O qui envoie l'une sur l'autre ?

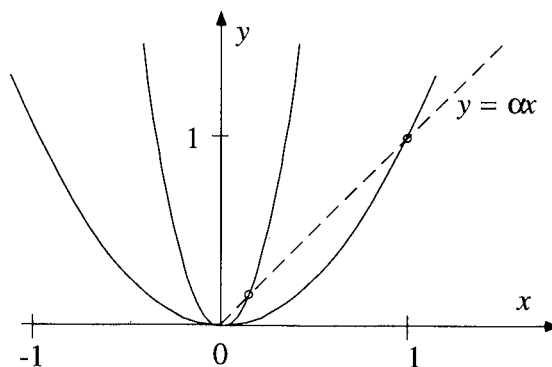


Fig. 24

Une droite de pente quelconque $y = \alpha x$ coupe $y = x^2$ en
 (α, α^2) ;

elle coupe $y = ax^2$ en

$$\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\alpha^2}{a}\right).$$

Donc l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a}$ envoie la première parabole sur la seconde.

Mais il était peut-être plus simple de prendre le problème par un autre bout. Toute parabole est le lieu des points équidistants d'un point (son foyer) et d'une droite (sa directrice). Une parabole large est déterminée par un grand écart entre son foyer et sa directrice (Fig. 25 (a)) et une parabole étroite par un petit écart (Fig. 25 (b)). Or les

figures (a) et (b) sont semblables. Comme la similitude conserve l'égalité des distances, elle envoie une parabole sur l'autre.

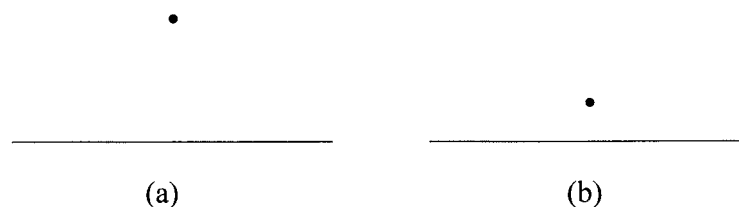


Fig. 25

6.4.5 La géométrie algébrisée

Les coordonnées et les vecteurs sont des instruments efficaces de la pensée géométrique. L'algèbre vectorielle doit être construite par étapes lentes.

Cette section répond aux Sections 6.2.5 et 6.3.5 (relatives respectivement au primaire et au début du secondaire) dans lesquelles on montrait que la géométrie se construit aussi avec des nombres et en particulier avec des coordonnées. La progression dans ce sens se poursuit au secondaire supérieur, d'abord par un approfondissement de la géométrie en coordonnées, puis par une introduction très progressive des vecteurs. Ce sujet est tellement important que nous l'avons déjà développé au début de ce chapitre (cf. Section 6.1.2) et il nous suffit d'y renvoyer.

Les points de vue synthétique, analytique et vectoriel ne peuvent être développés comme des chapitres disjoints de la géométrie. Il faut savoir passer d'une méthode à l'autre. Selon la question que l'on veut étudier, on trouvera plus ou moins commode de réfléchir directement sur une figure (point de vue synthétique), ou de traiter le problème en coordonnées (point de vue analytique) ou encore d'utiliser le calcul vectoriel.

Exemple 10 (vers 16 ans)

On s'est aperçu expérimentalement que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation de direction perpendiculaire aux axes. On voudrait prouver cela et trouver le sens et la norme de la translation selon la position des deux axes.

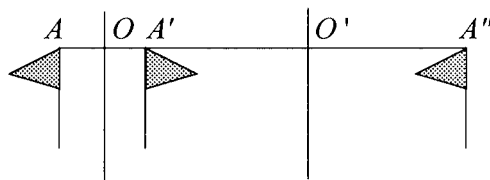


Fig. 26

La Fig. 26 montre un exemple d'une telle composée. Suivons les changements de position d'un point A . Ce point saute en A' de sorte que

$$|AO| = |OA'|.$$

Ensuite A' saute en A'' de sorte que

$$|A'O'| = |O'A''|.$$

Ainsi le point A avance d'une distance totale

$$\begin{aligned} |AA''| &= |AA'| + |A'A''| \\ &= |AO| + |OA'| + |A'O'| + |O'A''| \\ &= 2|OA'| + 2|A'O'| \\ &= 2(|OA'| + |A'O'|) \\ &= 2|OO'|. \end{aligned}$$

Le point A ayant été choisi arbitrairement, on a envie de dire que le raisonnement peut être répété pour n'importe quel point. Et ensuite que si n'importe quel point avance de $2|OO'|$, tous les points avancent de la même distance (dans la même direction et dans le même sens). Donc la composée des deux symétries est bien une translation.

Ce raisonnement est incomplet. En effet, il ne tient pas compte de ce que, selon la position de départ de A , les distances doivent être tantôt additionnées, tantôt soustraites (Fig. 27).

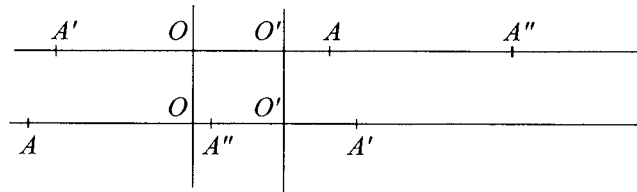


Fig. 27

On voit ainsi que si on raisonne en termes de distances, il va falloir d'abord déterminer tous les cas de figure, puis raisonner à part pour chacun.

Pour le problème en question, il est beaucoup plus simple de raisonner vectoriellement, en s'appuyant sur la relation de Chasles : celle-ci englobe tous les cas de figure. On a d'abord

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'O'} = \overrightarrow{O'A''}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA''} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} \\ &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'A''} \\ &= 2\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{A'O'} \\ &= 2(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'O'}) \\ &= 2\overrightarrow{OO'}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Exemple 11 (vers 17-18 ans)

Les cinq constructions suivantes produisent chacune une courbe « ovale ».

a) On plante deux piquets A et B dans le sol, puis on passe autour de ces deux piquets une corde nouée en boucle (Fig. 28). On tend la corde à l'aide d'un troisième piquet T, puis on utilise celui-ci pour tracer une courbe au sol en tournant autour de A et B et en veillant à ce que la corde demeure tendue. On obtient ainsi une courbe « ovale » (on dit une ellipse) que les jardiniers utilisent pour tracer les parterres.

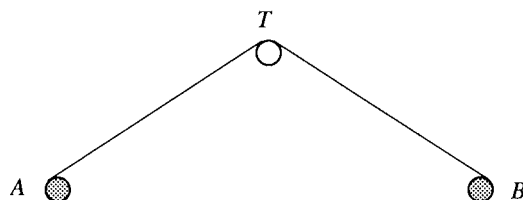


Fig. 28

b) On dispose une plaque plane perpendiculairement aux rayons du soleil et on regarde l'ombre sur cette plaque d'un cerceau ou d'un anneau : nouvelle ellipse ou en tous cas nouvelle courbe qui semble parente de la précédente.

c) La section d'un cylindre droit par un plan donne aussi une courbe fermée ressemblant aux précédentes.

d) La section d'un cône par un plan donne parfois une courbe analogue.

e) Soit C un cercle (Fig. 29) et d un de ses diamètres. On comprime le cercle dans un rapport de 1 à a perpendiculairement à d (avec par exemple $a < 1$). On obtient ainsi à nouveau une courbe qui ressemble aux précédentes.

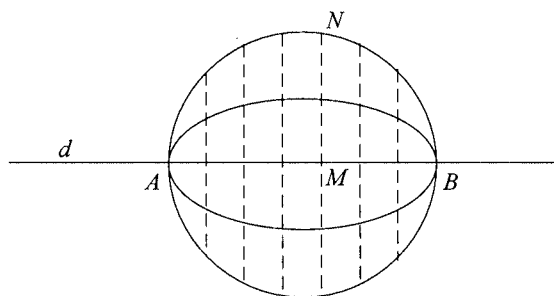


Fig. 29

Est-ce que toutes ces courbes sont bien de la même nature? En d'autres termes, chacune d'elles peut-elle être engendrée par les procédés qui ont donné les autres?

1) Montrons d'abord que l'ombre du cercle au soleil (cf. b)) peut-être obtenue par compression d'un cercle comme en e).

Pour y voir plus clair, supposons que le plan qui reçoit l'ombre soit horizontal et donc que les rayons du soleil arrivent verticalement (Fig. 30).

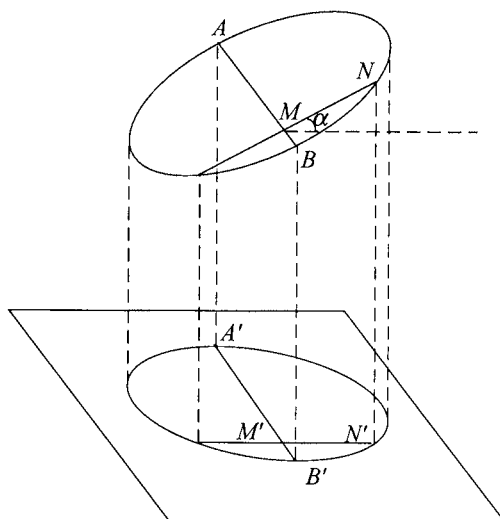


Fig. 30

Soit AB le diamètre horizontal du cerceau et $A'B'$ son ombre. Soit N un point quelconque du cerceau et N' son ombre. Le plan passant par NN' et orthogonal aussi bien à AB qu'à $A'B'$ coupe AB en M et $A'B'$ en M' . Le point M' est aussi la projection orthogonale de M sur le plan de l'ombre (M et M' sont sur un même rayon de soleil). Si α est l'angle du plan du disque avec l'horizontale, on a

$$|M'N'| = |MN| \cos \alpha$$

où $\cos \alpha$ est indépendant du point N choisi. En se reportant à la Fig. 29, on voit que l'on peut obtenir une figure superposable à l'ombre du cerceau en se plaçant dans le plan de celui-ci et en le comprimant dans le rapport de 1 à $\cos \alpha$ perpendiculairement à la droite d (ici AB).

2) Montrons qu'une section plane d'un cylindre droit (cf. *c*)) est une ellipse de jardinier (cf. *a*)).

Soit un cylindre droit et un plan Π qui le coupe (Fig. 31). Inscrivons dans le cylindre, de part et d'autre du plan, des sphères tangentes au plan et au cylindre. Soient M et N les points de contact des sphères avec Π . Soit P un point de la section du cylindre par le plan.

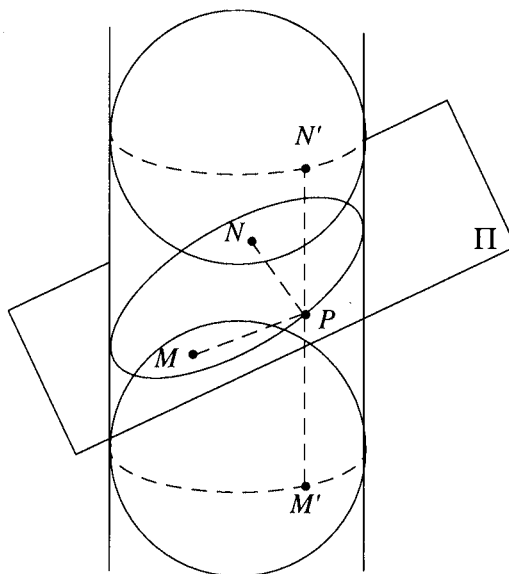


Fig. 31

Alors NP est tangente à l'une des deux sphères, et MP à l'autre. Soit $M'N'$ la génératrice du cylindre passant par P . Cette droite est tangente à l'une des deux sphères en N' (Fig. 31) et à l'autre en M' . On a

$$|NP| = |N'P| \text{ et } |MP| = |M'P|.$$

En effet, si d'un point pris hors d'une sphère on mène toutes les tangentes à celle-ci, toutes les distances point donné - point de tangence sont égales. On obtient donc

$$|M'N'| = |M'P| + |PN'| = |MP| + |NP|.$$

Mais $|M'N'|$ est une constante, d'où le résultat annoncé.

3) Considérons maintenant une section plane d'un cône (Fig. 32).

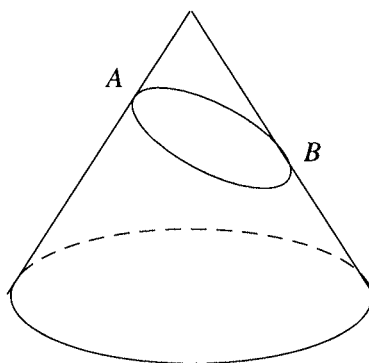


Fig. 32

Un doute survient ici, car on croirait volontiers que la courbe est plus pointue lorsqu'elle passe en A près du sommet que lorsqu'elle en est loin, en B . Et donc elle ressemblerait d'avantage à un œuf. Par comparaison, la courbe du jardinier et la section plane d'un cylindre ont clairement deux axes de symétrie.

Pourtant, à l'aide de deux sphères tangentes au plan de la section (Fig. 33) et en raisonnant exactement comme pour une section plane de cylindre, on montre que la section du cône est aussi une courbe de jardinier.

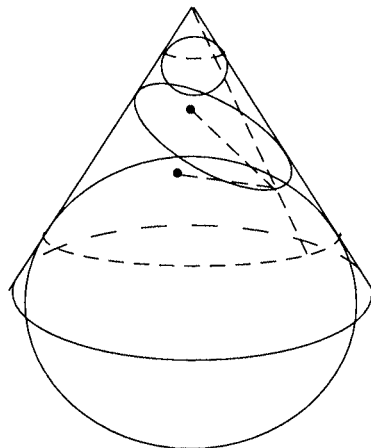


Fig. 33

4) Montrons maintenant que l'ellipse du jardinier (cf. a)) et le cercle comprimé (cf. e)) sont aussi équivalents. Soit deux points F_1 et F_2 (Fig. 34) et un point P de la courbe du jardinier.

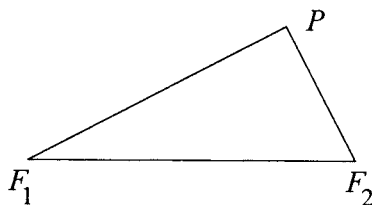


Fig. 34

Choisissons des axes cartésiens comme sur la Fig. 35.

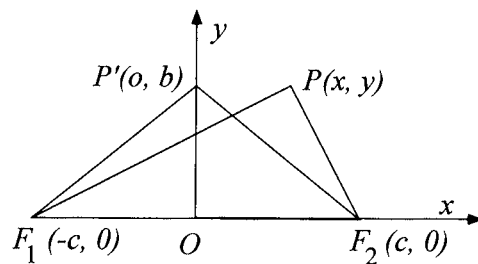


Fig. 35

L'équation de la courbe peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (1)$$

En évacuant les radicaux et en tenant compte de ce que $a^2 = b^2 + c^2$, on met (1) sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Soit maintenant le cercle de la Fig. 36.

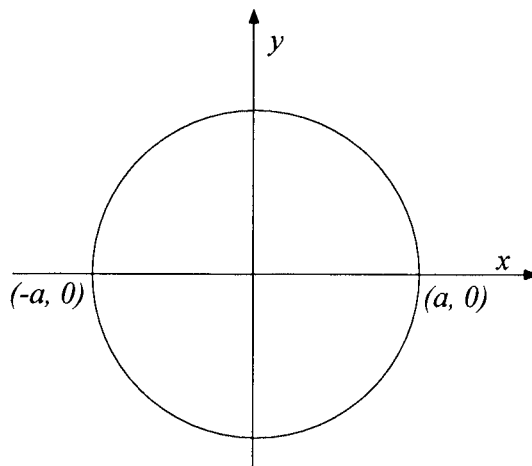


Fig. 36

Comprimons-le dans la direction de l'axe des y et dans le rapport b/a . Autrement dit, transformons son équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

en posant

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{a} y.$$

Il vient

$$x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2,$$

ou encore

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Ainsi le cercle comprimé et l'ellipse du jardinier se correspondent.

Cet exemple montre l'intérêt d'explorer diverses facettes d'une notion, en l'occurrence la notion d'ellipse.

6.4.6 Une certaine amplification de la théorie

Les petits îlots déductifs construits au premier cycle du secondaire doivent naturellement être amplifiés entre 14 et 18 ans. Mais cela doit être fait de façon diversifiée selon la destination des élèves. Certains n'ont pas vocation de faire ultérieurement beaucoup de mathématiques. Plutôt que de leur enseigner de longues chaînes déductives, mieux vaut les familiariser avec les phénomènes géométriques impor-

² Cf. à ce sujet [Rou95].

tants liés aux grandes familles de situations, celles qui tournent autour des théorèmes de Thalès et de Pythagore, de la trigonométrie, des représentations planes, etc... et leur apprendre à argumenter en termes d'objets mentaux. Les matières enseignées varieront d'ailleurs selon les professions auxquelles les élèves se préparent. Le travail du bois et du fer ainsi que les métiers de la construction imposent une formation géométrique particulière, liée dorénavant aux techniques de dessin par ordinateur. L'apprentissage des arts graphiques et décoratifs s'accorde bien avec un enseignement de la géométrie liée à l'histoire des arts plastiques et décoratifs.

Quant aux élèves qui se préparent à des professions utilisatrices de mathématiques, voire à celle de mathématicien, ils doivent aller plus loin que les autres sur le chemin de la géométrie déductive, et il ne faut pas leur épargner la peine de certaines démonstrations quelque peu difficiles pour eux. Sinon, ils subiront un choc dange-reux à leur arrivée dans l'enseignement supérieur. Néanmoins il vaut mieux, même pour ces élèves-là, ne pas chercher à unifier la géométrie *synthétique* en une théorie globale déduite d'un petit nombre d'axiomes. C'est ce que nous avons déjà expliqué au n° 6.1.2. Mieux vaut les amener à une certaine dextérité dans le maniement des vecteurs (tant en physique qu'en mathématiques) et des transformations linéaires.

D'autre part, il n'est pas exclu que *certain*s élèves reçoivent, sur une matière géométrique bien choisie, une initiation d'ampleur raisonnable aux mathématiques formelles, celles dans lesquelles on doit tout déduire des axiomes, y compris les évidences. Celles où il devient par conséquent impossible de continuer à croire que démontrer, c'est toujours amener à l'évidence. Par ailleurs, il est nécessaire d'accompagner une telle initiative d'un débat sur les raisons qui motivent la mise en forme axiomatique des théories. En d'autres termes, il faut discuter avec les élèves du formalisme comme instrument parfois bien utile de la rigueur, de l'économie de pensée que procurent les systèmes abstraits utilisables dans divers contextes, et des transferts d'intuition d'un contexte à un autre². Il s'agit là d'un débat philosophique, susceptible d'intéresser beaucoup une partie des élèves. Il aura au moins l'avantage d'indiquer à tous que le statut axiomatique des théories constituées a des raisons d'être plus profondes qu'une quelconque bizarrerie d'esprit des mathématiciens. Les exemples d'exposés axiomatiques pas trop amples et illustrant ces différents points de vue ne sont pas légion : peut-être quelques éléments de théorie des groupes ou l'une ou l'autre géométrie finie, peut-être un examen sur un plan théorique des systèmes emboîtés de nombres.

ALGÈBRE

7.1 Vue d'ensemble

7.1.1 L'algèbre au niveau de base

Dans le quotidien, tout le monde utilise des nombres et manie des objets de forme géométrique. Par contre, rares sont les personnes qui recourent spontanément à l'algèbre. C'est pourquoi on ne saurait expliquer ce qu'est l'algèbre au niveau de base sans déborder des formes les plus communes de la pensée.

Partons d'un problème pratique : il est 14 heures et j'ai fait déjà 6 km en une heure et demie. Il me reste 11 km à parcourir. A quelle heure arriverai-je ?

Tout d'abord, si je veux calculer mon heure d'arrivée, je dois supposer que je marcherai tout le temps d'un même pas, sans faire de pause. En d'autres termes, je prendrai en compte non pas mon mouvement réel, mais un mouvement régulier qui en constitue une approximation raisonnable. On dit qu'en faisant cela, on *modélise* la situation réelle, pour donner prise au calcul.

Ceci dit, le problème se ramène au calcul du temps que je mettrai pour parcourir 11 km. Je dispose des données que résume le *Tabl. 1*

temps	$1\text{ h } \frac{1}{2}$	?
distances	6 km	11 km

Tabl. 1

Une démarche assez spontanée – et qui n'est pas algébrique – consiste à se dire que si on parcourt 6 km en $1\text{ h } \frac{1}{2}$, alors on en parcourt 2 en $\frac{1}{2}$ h. Donc, pour parcourir

11 km, il faudra d'abord 5 fois $1/2$ h pour en faire 10, plus $1/4$ h pour le kilomètre restant. Il faudra donc en tout $2\text{ h } 3/4$. Le *Tabl. 2* complète le *Tabl. 1* en montrant les valeurs particulières par lesquelles nous sommes passés

temps	1 h $1/2$	$1/2$ h	2 h $1/2$	$1/4$ h	2 h $3/4$
distances	6 km	2 km	10 km	1 km	11 km

Tabl. 2

La solution du problème s'obtient en ajoutant $2\text{ h } 3/4$ à 14 h, ce qui donne 16 heures 45. Le retour à la pratique m'indique qu'une demi heure de pause ne sera pas de trop, et donc j'annoncerai mon arrivée vers 17 h 15.

Supposons maintenant que nous devons résoudre un problème analogue, mais avec des nombres beaucoup moins maniables, par exemple ceux que propose le *Tabl. 3* pour un mobile quelconque (plus nécessairement un marcheur).

temps	2,83 h	?
distances	9,7 km	27,2 km

Tabl. 3

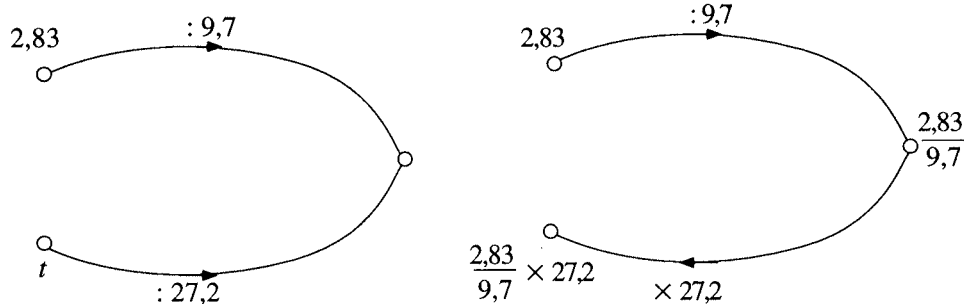
Ici l'algèbre peut intervenir à un premier niveau. On se souvient (voir par ex. n° 4.1.0) que dans des tableaux de proportionnalité tels que les *Tabl. 1, 2, 3*, le rapport de deux éléments d'une même ligne est égal au rapport des éléments correspondants d'une autre ligne. Cette observation abstraite sur la structure du tableau nous permet, en remplaçant par t le point d'interrogation du *Tabl. 3*, d'écrire, en conservant comme unités l'heure et le kilomètre, que

$$\frac{2,83}{9,7} = \frac{t}{27,2} \quad (1)$$

La lettre t désigne l'inconnue de notre problème. L'égalité (1) est une *équation* du problème : nous allons nous en servir pour résoudre celui-ci. La *solution* (dans le problème particulier que nous examinons, il n'y a qu'une solution) est le nombre qui, mis à la place de t , donne au quotient $\frac{t}{27,2}$ la valeur obtenue en divisant 2,83 par 9,7.

Comment calculer cette solution ? Diverses techniques existent, elles mettent en jeu des notions mathématiques plus ou moins complexes.

- En utilisant des opérateurs élémentaires :



• En utilisant des égalités équivalentes (on obtient encore une égalité en multipliant les deux membres d'une égalité par un même nombre). Multiplions les deux membres de (1) par 27,2, cela donne

$$\frac{2,83}{9,7} \times 27,2 = \frac{t}{27,2} \times 27,2 ,$$

ou encore

$$\frac{2,83}{9,7} \times 27,2 = t . \quad (2)$$

D'une manière comme de l'autre, nous obtenons

$$7,94 \cong t .$$

Le temps nécessaire au mobile pour parcourir 27,2 km est de 7,94 heures, soit environ 7 heures et 56 minutes.

Le problème que nous venons de résoudre témoigne d'un *premier échelon de l'algèbre*. Résumons la procédure : on décide de désigner l'inconnue du problème par une lettre, en l'occurrence t ; ensuite on écrit l'équation du problème, ce qui est une sorte de traduction (idéalisée) de l'énoncé ; ensuite on résout l'équation, ce qui revient à isoler l'inconnue, en se servant de propriétés bien choisies des nombres et des égalités (on calcule) ; enfin on interprète le résultat comme solution du problème pratique posé.

Par ailleurs, le problème traité est tout à fait particulier : il concerne un seul mobile et le temps qui lui est nécessaire pour parcourir une distance donnée.

On peut généraliser la question et chercher à établir une formule qui donne commodément le temps que mettra le mobile pour parcourir n'importe quelle distance. Pour cela, on peut étendre le *Tabl. 3* en y inscrivant un couple t, d , où t représente le

temps nécessaire pour parcourir la distance d (voir *Tabl. 4*).

temps	2,83 h	7,94 h	t h
distances	9,7 km	27,2 km	d km

Tabl. 4

On exprime alors que le rapport du temps t à un autre temps du tableau est égal au rapport de la distance d à la distance correspondant à cet autre temps :

$$\frac{d}{9,7} = \frac{t}{2,83} . \quad (3)$$

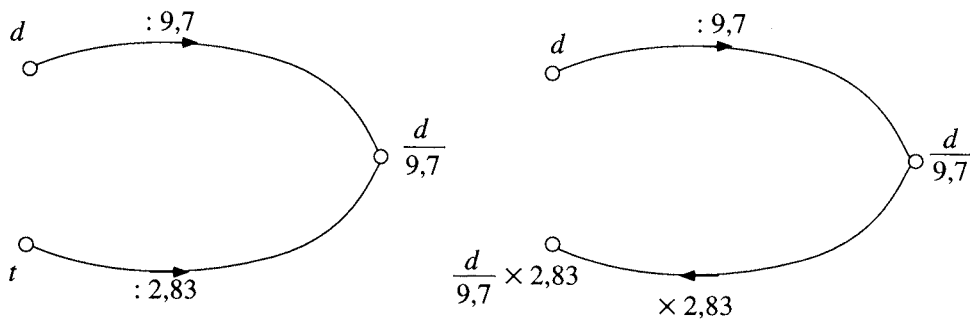
C'est là une nouvelle équation, mais qui comporte cette fois deux inconnues, à savoir d et t . Pour la résoudre, il faut choisir une distance d et un temps t tels que le quotient $\frac{d}{9,7}$ soit le même que le quotient $\frac{t}{2,83}$. Il y a bien des façons de faire un tel choix. Si on prévoit qu'à l'avenir on voudra surtout calculer des temps nécessaires pour parcourir des distances données, on peut, en utilisant la méthode des égalités équivalentes, multiplier les deux membres de (3) par 2,83, ce qui isole t au deuxième membre. On obtient alors

$$\frac{d}{9,7} \times 2,83 = t ,$$

ou encore après calcul

$$t \approx 0,292d . \quad (4)$$

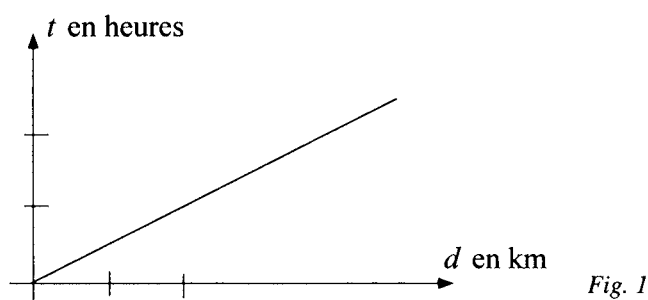
On pourrait aussi, même en présence de deux inconnues, utiliser la méthode des opérateurs :



Ainsi le mobile qui nous intéresse est mis en équation une fois pour toutes. Si nous voulons savoir combien de temps il lui faut pour parcourir 2 km, nous remplaçons d par 2 dans l'équation (4), si c'est 3 km, nous remplaçons d par 3 dans la même équation.

tion, et ainsi pour n'importe quelle distance.

L'équation (4) témoigne d'un *deuxième échelon de la pensée algébrique*, où apparaît la notion de fonction. La distance parcourue est donnée par (4) en fonction du temps. Cette fonction peut être représentée sur un graphique (*Fig. 1*) qui donne la distance parcourue pour chaque intervalle de temps t .



On dit parfois que d est la *variable indépendante*, celle que l'on choisit comme on veut, et que t est la *variable dépendante*, celle que l'on peut calculer lorsqu'on connaît la première. On voit toutefois, en l'occurrence, que l'on peut sans peine permuter les rôles de ces deux variables. Si on divise les deux membres de (4) par 0,292, on obtient

$$d = \frac{1}{0,292}t \approx 3,43t \quad (5)$$

et cette équation donne la distance parcourue pendant n'importe quel temps que l'on se donne.

On dit alors que t est la *variable indépendante*, celle que l'on choisit comme on veut, et que d est la *variable dépendante*, celle que l'on peut calculer lorsqu'on connaît la première.

Le problème que nous venons de résoudre à ce deuxième échelon de l'algèbre demeure encore, en un sens, très particulier. En effet, il ne traite que d'un seul mouvement à vitesse constante, celui où le mobile met 2,83 heures pour parcourir 9,7 km. D'où la question : n'y aurait-il pas moyen, jusqu'à un certain point, de résoudre, une fois pour toutes, tous les problèmes de mouvement à vitesse constante ?

Pour y arriver, on remarque que dans tous les tableaux de proportionnalité tels que les *Tabl. 1 à 4*, on passe d'un nombre situé sur une ligne au nombre situé en face sur l'autre ligne en multipliant par un facteur constant. Dans un problème de mouvement comme le nôtre, on passe de la première ligne à la seconde en multipliant par la vites-

se, qui est effectivement constante. Dans le *Tabl. 2*, cette vitesse est de 4 km/h dans le *Tabl. 4*, elle est d'environ 3,43 km/h

$$\frac{9,7}{2,83} \cong 3,43 .$$

L'équation (5) fait apparaître cette vitesse. La distance parcourue s'obtient en multipliant le temps par la vitesse. On n'obtient ce résultat qu'en utilisant des unités qui se correspondent : dans notre cas, les temps sont mesurés en heures, les distances en km, et donc la vitesse doit être mesurée en km/h.

A ce stade, on peut décider de ne pas spécifier à l'avance la vitesse du mouvement considéré, et de désigner simplement cette vitesse par la lettre v . On se réserve ainsi la possibilité de remplacer v par une vitesse particulière quelconque, celle du mouvement que l'on aura choisi d'étudier. D'où la formule, cette fois tout à fait générale,

$$d = vt \tag{6}$$

applicable à n'importe quel mouvement à vitesse constante.

La formule (6) témoigne d'un *troisième échelon de la pensée algébrique*. Au lieu de traiter un problème à l'aide d'une fonction d'où on tire une équation, on a résolu une fois pour toutes tous les problèmes d'un type donné. Ceci fait apparaître la notion de *paramètre*. La vitesse v est le paramètre de notre classe de problèmes : on donne une valeur à v , ce qui revient à fixer son attention sur un problème particulier, et ensuite on peut traiter le problème de ce mouvement.

Cet exemple d'un problème de proportionnalité montre ce qu'est la pensée algébrique élémentaire. C'est une pensée par nature abstraite et généralisante, qui recourt à des symboles arbitraires (les chiffres et les lettres).

7.1.2 Construire l'algèbre

La notion d'inconnue apparaît très tôt dans l'enseignement primaire, à savoir dès qu'on propose aux enfants de trouver la solution (une solution...) d'un problème. Il n'est pas opportun à ce stade de formaliser l'idée d'inconnue. Il est bon que la plupart des problèmes renvoient à des situations concrètes. On propose parfois aux élèves de véritables équations où l'inconnue apparaît sous forme d'un point d'interrogation.

Les fonctions d'une variable apparaissent aussi en primaire, par exemple sous

forme d'un relevé des températures heure après heure, ou de la taille d'une plante qui pousse jour après jour, ou d'un tableau de proportionnalité. On reconnaît là dans chaque cas les éléments constitutifs d'une fonction. Ainsi, dans un tableau ou un graphique de températures, l'heure de la journée est la variable indépendante, et à chaque heure correspond une valeur de la température, variable dépendante. Il ne faut certes pas non plus formaliser la notion de fonction à ce stade. Mais ces fonctions exprimant des situations concrètes préparent bien les élèves à rencontrer plus tard des fonctions écrites sous forme symbolisée.

Vers la fin du primaire, on apprend aussi quelques formules donnant des longueurs, aires ou volumes d'objets géométriques. Ces formules expriment en fait, sous forme symbolisée, des fonctions de plusieurs variables. Il faut se garder d'y insister trop, car elles risquent de cacher l'essentiel : la maturation des idées de longueur, aire et volume au départ de reports de l'unité, en affrontant les difficultés que ces manœuvres comportent. En d'autres termes, mieux vaut insister, plutôt que sur les formules et leur application, sur leur construction et l'idée de mesurage (cf. n° 4.2.4).

Au début du secondaire, des expressions algébriques simples peuvent apparaître pour exprimer une propriété arithmétique générale et même la démontrer. Par exemple si on a observé, sur quelques cas, que la différence des carrés de deux nombres naturels consécutifs est un nombre impair, on peut démontrer cette propriété en écrivant

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1.\end{aligned}$$

Les équations et inéquations doivent être étudiées dans des contextes, c'est-à-dire comme moyens de répondre à des questions. Savoir mettre en équation, ou en d'autres termes modéliser une situation (en ayant conscience des limites du modèle choisi) est plus important encore que savoir résoudre l'équation.

On étudie d'abord les équations du premier degré, puis celles du second, en se bornant aux cas de coefficients numériques. Il nous paraît fondamental d'étudier, en même temps que les équations, les fonctions qui leur sont naturellement associées, ainsi que les tableaux de nombres et les courbes qui les représentent.

En bref, les contextes les plus divers (la modélisation) et la géométrie analytique (les graphes) soutiennent l'apprentissage de l'algèbre, donnent des points d'appui à la pensée, l'empêchent de tomber dans l'absence de sens.

Les lois de calcul (commutativité, associativité, distributivité) et quelques for-

mules générales (les produits remarquables) doivent être appris et pratiqués. Il en existe de bonnes représentations géométriques, en termes de longueurs, aires et volumes, pour les réels positifs. Comme ces lois de calcul ne changent pas dans le passage des naturels aux entiers, puis de ceux-ci aux rationnels et aux réels, autant il nous paraît utile de les reconnaître sur des exemples divers et de les connaître pour pouvoir les appliquer, autant il nous paraîtrait exagéré d'en faire une étude théorique complète. Il y a à ce niveau d'études des occasions plus stimulantes d'exercer la pensée mathématique.

La notion de variable est délicate : il faut apprendre qu'une lettre renvoie à un ensemble déterminé de nombres, cet ensemble étant imposé par le contexte qui est modélisé. Il est difficile d'accepter que les symboles a ou x puissent, dans certaines circonstances, représenter des nombres négatifs, bien qu'ils ne soient pas précédés du signe $-$.

Dans cette perspective, il n'y a pas besoin d'enseigner une formule pour le développement de $(a+b)^2$ et une autre pour $(a-b)^2$, ou si on les enseigne toutes deux, il est bon de montrer que l'une se ramène à l'autre.

Les objets algébriques et géométriques à étudier se diversifient dans la deuxième moitié du secondaire : équations et inéquations du premier degré en lien avec la géométrie analytique des droites et plans, certains lieux géométriques caractérisés analytiquement, équations à coefficients paramétriques.

Les vecteurs apparaissent comme méthode efficace d'étude de ces nouvelles matières : d'une part ils permettent de raisonner directement sur les objets géométriques en question (on parle de leur caractère *intrinsèque*, par rapport au caractère extrinsèque des axes de coordonnées) ; d'autre part, ils remplacent deux ou trois équations par une seule, réalisant ainsi une économie d'écriture.

L'arrivée des vecteurs s'accompagne d'une réflexion nouvelle sur les lois de calcul. Nous avons dit ci-dessus que les principales lois de calcul demeuraient stables dans le passage de $\mathbf{N}$ à $\mathbf{Z}$, puis à $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$. Tel n'est plus le cas avec les vecteurs : des lois nouvelles apparaissent, avec leurs règles propres et des chocs intellectuels intéressants, tel que le produit scalaire qui peut être nul parfois, sans qu'aucun des deux facteurs le soit (existence de diviseurs de 0).

Certains élèves abordent, avec l'algèbre linéaire, des transformations du plan et de l'espace, représentées par des matrices. La composition des transformations (qu'il

faut avoir abordée d'abord en géométrie synthétique) apporte la surprise de la non-commutativité, qui s'ajoute ici à celle des diviseurs de zéro. Les élèves réalisent que l'algèbre, science du calcul abstrait, est bien plus qu'une mise en ordre des règles ordinaires de calcul sur les nombres.

Enfin, les élèves qui vont le plus loin pourront aborder la notion abstraite de groupe. Il la saisiront comme une structure dans laquelle on sait résoudre des équations. A ce stade, les symétries de polygones et polyèdres ainsi que les composées de permutations de n objets sont des applications intéressantes des groupes.

7.1.3 L'algèbre approfondie

L'algèbre linéaire, nous le verrons ci-après (cf. n°7.1.5) comporte une multitude d'applications dans les domaines les plus variés. C'est pourquoi elle est un des chapitres les plus importants (l'autre est l'analyse) dans la plupart des cours universitaires de mathématiques générales.

Voici, à l'intention des lecteurs non mathématiciens, en quoi consiste pour l'essentiel l'algèbre linéaire. Partons de la notion ordinaire de proportionnalité, par exemple telle qu'on la trouve dans les mouvements uniformes. Dans ces mouvements, si on double le temps, on double la distance parcourue, si on triple le temps, on triple la distance, etc. ... On retrouve une propriété analogue dans la relation entre un pays plat et une carte de ce pays : si on double une distance dans le pays, on double la distance correspondante sur la carte, etc. Si on parcourt deux côtés d'un triangle dans le pays, on parcourt deux côtés d'un triangle semblable sur la carte. Ces exemples donnent une première idée de ce qu'est une *application linéaire*.

Le mouvement était un exemple d'application linéaire à une dimension, le pays et sa carte montraient l'application d'un espace à deux dimensions sur un espace à deux dimensions. L'algèbre linéaire étudie des applications linéaires, c'est-à-dire des fonctions qui généralisent la notion de proportionnalité, dans des espaces à un nombre quelconque de dimensions (et même parfois, nous le verrons, dans des espaces comportant un nombre infini de dimensions). Pour caractériser une application linéaire entre deux espaces, il ne suffit généralement pas d'un seul coefficient de proportionnalité, il faut tout un tableau carré ou rectangulaire de coefficients. Ce sont ces tableaux que l'on appelle *matrices*.

Mais l'algèbre linéaire n'épuise pas le domaine de l'algèbre. Dans les études uni-

versitaires de mathématiques, on étudie aussi les structures abstraites qui s'appliquent à des ensembles divers de nombres, de polynômes, de transformations géométriques, de propositions (telles qu'on les considère en logique), etc. Ces structures portent souvent des noms familiers, quoiqu'en l'occurrence détournés de leur signification habituelle : ce sont les groupes, anneaux, idéaux, champs, corps, etc. Les recherches en algèbre s'efforcent de répondre à des questions précises dont voici deux exemples, le premier assez ancien, le second récent. Peut-on résoudre toutes les équations du cinquième degré à l'aide de radicaux seulement ? La réponse est non. Peut-on et comment classer tous les groupes simples finis ? La réponse est oui et la classification a été terminée en 1981 à l'aide d'une démonstration dont la longueur est frappante (cf. [Bue83]).

7.1.4 L'algèbre comme forme de pensée

Regardons pour commencer ce qui se passe lors de la mise en équation d'un problème à une inconnue. En ce faisant, nous reprenons de façon plus générale ce que nous avons montré dans le cas du mouvement uniforme au n° 7.1.1. Pour mettre un problème en équation, on s'inspire d'une démarche très ancienne appelée *analyse* du problème. Voici de quoi il s'agit. On cherche à déterminer une quantité inconnue en partant de données et de conditions que fournit l'énoncé. Donc on ne peut pas exhiber tout de suite l'inconnue, puisque si c'était le cas, le problème serait déjà résolu. Toutefois, cette quantité que l'on appelle inconnue n'est pas totalement inconnue : on sait qu'elle satisfait aux conditions données par l'énoncé. Si le problème était résolu, on pourrait *vérifier que la solution* (la valeur trouvée pour l'inconnue) *satisfait aux conditions de l'énoncé*. Alors, *on fait comme si on connaissait la solution*, on lui donne un nom (x par exemple) et on exprime qu'elle satisfait à ces conditions. Ceci revient à écrire une relation (le plus souvent une égalité) qui montre comment l'inconnue x s'articule aux données. Cette relation est de pure forme, puisqu'elle contient un élément non précisé, à savoir x : on l'appelle une équation du problème. L'avantage est que l'équation se prête au calcul, et qu'en la transformant judicieusement, on arrive à en extraire l'inconnue x , et le problème est alors résolu.

La résolution d'un problème de ce type comporte ainsi deux phases : la mise en équation suivie du calcul, c'est-à-dire de la résolution de l'équation.

Comparons cette procédure en deux temps à la résolution sans recours à l'algèbre, telle qu'on la pratique traditionnellement à l'école primaire. Dans ce cas, on ignore

ce qu'est une équation et sa résolution par calcul. On part de l'énoncé et par raisonnement, sans quitter le sens du problème, *en n'évoquant à chaque étape que des choses connues*, on détermine à la fin la quantité inconnue.

Ainsi, jusqu'à un certain point, la possibilité de calculer avec des choses non entièrement déterminées est caractéristique de l'algèbre. Par ailleurs on fait en algèbre bien d'autres choses que résoudre des équations. Montons encore d'un cran sur l'échelle de la généralité. On considère un ensemble d'objets (par exemple des nombres). Ces objets se combinent entre eux selon des lois déterminées, en général assez simples. On symbolise ces objets (non entièrement déterminés) par des lettres et on utilise une sténographie particulière pour exprimer les relations qu'ils ont entre eux. Cette sténographie comporte des signes tels que $+$, $-$, $\times$, $=$, etc. Ces signes et ces lettres se prêtent à des transformations par calcul. En résumé donc, l'algèbre, au moins telle qu'elle apparaît aujourd'hui (jusqu'au 15^e siècle, les problèmes d'équations se traitaient dans la langue commune, sans recours à des symboles), amène la pensée à une expression symbolique compacte (une sténographie) soumise à des lois de calcul.

Quel est l'intérêt d'une telle forme de pensée ? C'est qu'en fait la concision de l'écriture et le recours à des règles de calcul soigneusement codifiées aident à penser plus vite et plus loin.

Pourquoi calcule-t-on ? C'est, comme ailleurs en mathématiques, pour démontrer des choses, produire des connaissances nouvelles.

Mais il y a deux sortes de calculs, et ceci est un élément nouveau de cet exposé. Certains problèmes mathématiques sont connus depuis longtemps et leur solution passe par un calcul stéréotypé, mis au point une fois pour toutes. Il s'agit souvent d'appliquer une formule sans plus. Tel est le cas, par exemple, lorsqu'on résout une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0 ,$$

en appliquant la formule qui dort dans toutes les mémoires

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \quad (1)$$

Toutefois, même lorsqu'on a affaire à un tel type de problème, il y a avantage à discerner les cas particuliers justiciables d'une solution plus rapide. Par exemple il serait absurde de résoudre l'équation $x^2 - 9 = 0$ en appliquant la formule (1).

L'autre sorte de calcul est précisément celle où on ne connaît à l'avance aucune formule toute faite, aucun mode d'emploi à suivre aveuglément. Dans ces cas-là, on doit garder l'objectif bien en vue et combiner des manœuvres de calcul (codifiées) pour l'atteindre.

Revenons un moment sur l'idée que l'algèbre permet de penser plus vite et plus loin. Une personne qui réfléchit ne peut amener à sa conscience claire (on dit aussi à sa mémoire «brève» ou à sa mémoire de travail) que peu de choses à la fois. Elle ramène ces choses de sa mémoire à long terme pour les traiter par le raisonnement. Si elle devait, au prise avec une question déterminée, s'embarrasser de tous les détails, elle encombrerait sa conscience, celle-ci déborderait et elle manquerait le nœud de la question. Heureusement, chacun selon sa culture mathématique peut s'appuyer sans réfléchir sur des routines, des automatismes qui libèrent la pensée et lui permettent de s'attaquer à l'essentiel. Un petit enfant apprend avec toute sa force d'attention que deux fois quatre égale huit. Un peu plus tard, ce fait important ne l'absorbera plus du tout. Plus tard encore, il apprendra, peut-être non sans difficulté, que trois vecteurs dans un plan sont toujours linéairement dépendants. Après, il intériorise ce fait et arrive à l'énoncer, presque sans réfléchir, en recourant aux symboles appropriés. On peut dire qu'un mathématicien est quelqu'un qui a amené au stade de l'évidence et de la routine un grand nombre de faits mathématiques, et qui est capable de les exprimer symboliquement avec aisance et sans devoir s'y appesantir. Ainsi beaucoup de choses ne font plus problème pour lui, et il est disponible pour ce qui lui fait problème et de ce fait l'intéresse. Telle est la raison pour laquelle les mathématiques ont commencé à s'algébriser à partir du 16^e siècle, pour arriver au 20^e siècle à se trouver quasi totalement algébrisées. Il s'avère très important, pour chaque secteur des mathématiques, de trouver un système de notations et de calcul commode, qui traduise bien le fond des choses et libère la pensée. Au cours des siècles, les mathématiciens ont déployé des trésors d'inventivité dans cette direction.

Par ailleurs, s'il est vrai comme nous venons de le dire que les mathématiques sont aujourd'hui presque entièrement algébrisées, le terme *algèbre* demeure utilisé dans un sens plus étroit pour désigner l'étude *abstraite* des principales structures munies d'un calcul. «L'algèbre, au sens moderne, écrit J.-P. Tignol, désigne la discipline qui traite abstraitement des structures mathématiques fondamentales.»

7.1.5 Les applications de l'algèbre

Puisque, comme nous venons de le voir longuement, l'algèbre abstrait et exprime par des symboles concis et éclairants les relations les plus diverses, à commencer par celles qui existent entre les nombres, il n'est pas étonnant qu'elle soit devenue un moyen d'expression universel des sciences et des techniques. Un moyen seulement – important certes – mais non le seul, car toutes les disciplines s'expriment d'abord dans la langue commune, et en outre d'autres moyens d'expression offrent des avantages que l'algèbre ne possède pas. Par exemple les graphiques, qui par ailleurs ne se prêtent pas au calcul, surpassent les formules dès qu'il est question de présenter une vue d'ensemble d'une situation.

Cette complémentarité des moyens de pensée et d'expression a des implications pédagogiques : en montrant que l'algèbre n'est pas *le* langage (unique) des mathématiques, elle indique que pour penser mathématiquement, il faut toujours plus qu'une suite de formules.

Parmi les théories algébriques, c'est l'algèbre linéaire qui possède les applications les plus nombreuses et les plus variées. Ceci est dû en partie au fait que la proportionnalité et ce qui mathématiquement la généralise (la linéarité) sont parmi les choses les plus aisément concevables par l'esprit humain, même s'il est vrai qu'elles donnent du fil à retordre aux écoliers. Ceci fait que beaucoup de situations qui, prises dans toute leur complexité, ne sont pas linéaires, sont néanmoins, par raison de commodité, représentées par un modèle mathématique linéaire, choisi le moins inadéquat possible. L'algèbre linéaire sert à résoudre des problèmes de mécanique des vibrations, de réseaux électriques, d'évolution de population, de systèmes chimiques, économiques, sociaux, etc.

L'algèbre peut-elle servir aux citoyens dans la vie quotidienne ? La réponse n'est pas évidente. Les médias, les modes d'emploi d'appareils techniques, les instructions fiscales, etc. proposent plus souvent des explications en phrases et des graphiques que des formules. Néanmoins, celui qui sait « mettre en équation » une situation familière de partage, de proportionnalité, de pourcentage, d'aires ou volumes, etc. y voit plus clair qu'un autre et va plus vite au résultat. On se convainc de l'efficacité de l'algèbre élémentaire en évoquant la situation – bien connue, fréquente et significative – de l'élève du primaire qui n'arrive pas à résoudre « par le raisonnement pur » un problème élémentaire et qui demande l'aide de l'un de ses parents. Et celui-ci, s'il

a gardé quelques souvenirs scolaires, lui répond : je ne sais pas le faire non plus, mais par l'algèbre cela va tout seul.

7.1.6 L'algèbre dans l'histoire, la philosophie, la culture

L'antiquité n'a pas connu l'usage des symboles littéraux pour représenter les variables, ni des symboles tels que $+$, $-$, $\times$, $=$. Pourtant les anciens calculaient avec des nombres et avec des grandeurs. Les seuls nombres présents dans les *Eléments* d'Euclide sont les nombres naturels. Lorsqu'Euclide veut démontrer une propriété des nombres, ou de certains nombres, au lieu de montrer la propriété sur un exemple paradigmatique (un exemple assez clair pour que le lecteur étende sans peine la propriété à tous les nombres concernés), il représente les nombres par des segments qu'il additionne en les mettant bout à bout, qu'il multiplie en dessinant un rectangle, etc. Ainsi ces segments renvoient à des nombres quelconques : ils jouent le rôle des variables littérales d'aujourd'hui. Mais le fait qu'ils soient des segments marque leur parenté avec les grandeurs.

On trouve aussi dans Euclide un calcul sur les grandeurs elles-mêmes, des grandeurs dont la nature n'est pas précisée au départ mais qui sont, comme les nombres, représentés par des segments.

Les calculs développés par Euclide portent tout d'abord sur les nombres et les grandeurs proportionnelles, dont il démontre de multiples propriétés. Mais on trouve aussi entre autres choses dans les *Eléments* l'équivalent de nos équations du premier et deuxième degrés. Dans ces problèmes, l'inconnue est un segment – on ne s'en étonnera pas – et la solution prend la forme d'une construction géométrique.

Cette tradition d'algèbre géométrique a été recueillie et développée par les algébristes arabes du Moyen Âge, puis transmise à l'Europe. Le terme même d'*algèbre* vient de l'arabe *al-djabr* qui veut dire contrainte, réparation. Les grands algébristes italiens du 16^e siècle s'appuyaient encore beaucoup sur la géométrie, mais on trouve pourtant chez eux des nombres variés, y compris négatifs et complexes, quoique dotés d'un statut encore incertain. Chose remarquable, chez eux comme chez leurs prédécesseurs, toute l'algèbre s'énonce en phrases, ce qui veut dire qu'on n'y trouve aucune équation écrite avec des symboles. Qui plus est, les coefficients apparaissant dans les problèmes ont toujours des valeurs numériques particulières. Ces algébristes étudiaient par exemple l'équivalent (énoncé en latin) de

$$x^2 = 3x + 2 ,$$

mais non de

$$x^2 = ax + b ,$$

où le choix de a et b est laissé à l'utilisateur éventuel.

On doit à François Viète (1540 – 1603) l'introduction de signes et d'abréviations pour les opérations, ainsi que des lettres pour les paramètres. Dès lors, les équations et les calculs s'écrivent à peu près comme aujourd'hui. Il s'agissait là d'un progrès immense.

Le 17^e siècle a vu cette algèbre nouvelle appliquée par Descartes et Fermat à l'étude des courbes (la géométrie analytique), puis principalement par Newton et Leibniz à celle des tangentes et des aires.

Le 19^e et le 20^e siècles ont alors développé les grandes structures algébriques inspirées soit par les diverses variétés de nombres (les rationnels, les réels, les complexes), soit par d'autres êtres mathématiques (vecteurs, permutations, transformations géométriques, matrices, polynômes, ...).

Ainsi l'algèbre, qui plonge de profondes racines historiques dans la géométrie et les nombres, évoque aujourd'hui principalement – nous l'avons déjà dit – la pensée symbolisée et réduite au calcul, quels que soient les objets mathématiques dont elle s'occupe.

On observe tout au long de l'histoire des tentatives pour ramener, dans la mesure du possible, l'exercice de la pensée à quelques règles simples. La logique d'Aristote allait dans ce sens. Leibniz a posé les jalons d'une langue universelle des sciences, construite avec des symboles soumis à des règles de calcul. Boole au 19^e siècle a créé le calcul des propositions dans son *Investigation des lois de la pensée*. La logique d'aujourd'hui est symbolisée. Semblable en cela à toutes les théories mathématiques en développement, elle n'est certes pas entièrement réduite à un calcul. Mais le fait qu'elle ait réduit au calcul certains de ses aspects importants lui permet de se poser des questions nouvelles, sans s'empêtrer dans ce qui va dorénavant de soi et relève de simples routines.

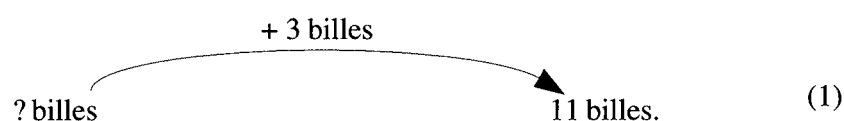
De façon plus générale, on peut voir dans le structuralisme, tel qu'il s'est développé au 20^e siècle par exemple en linguistique et en anthropologie, un effort pour dégager, dans des domaines scientifiques particuliers, des relations abstraites exprimant le fonctionnement des choses et des êtres, plus que leur nature concrète. Ces efforts de schématisation vont dans le sens de l'algèbre et la côtoient.

7.2 L'algèbre dans l'enseignement fondamental

7.2.1 Quelques symboles simples pour traduire des situations

Exprimer, avec des symboles, des actions et des situations réelles, prépare le domaine de sens de l'algèbre et est source d'images mentales.

Les symboles en question peuvent intervenir dans les schémas d'opérateurs. Soit le problème suivant : Pierre avait quelques billes ; il en a gagné 3 et maintenant il en a 11 ; combien en avait-il avant ? On peut exprimer ce qui est arrivé à Pierre par le schéma suivant



On peut peut-être remplacer le point d'interrogation par une lettre. Le pouvoir suggestif du contexte est considérablement renforcé si l'action est mimée plutôt que simplement mise par écrit et lue.

Dans d'autres circonstances, le signe = sera utilisé. Par exemple, avec des élèves qui connaissent la formule de l'aire du rectangle : soit un rectangle de 18 cm^2 , dont un des côtés mesure 3 cm ; quelle est la longueur de l'autre côté ? La situation est traduite par l'équation

$$3 \times ? = 18. \quad (2)$$

Il nous semble important ici aussi que la situation soit vécue concrètement, c'est-à-dire que le problème soit résolu par construction géométrique avant de l'être par usage de symboles comme en (2).

7.2.2 Essais et erreurs avant toute méthode systématique

Pour comprendre les notions d'inconnue et de solution, il faut d'abord résoudre les problèmes par tâtonnements.

Par exemple, il vaut mieux laisser des élèves essayer divers nombres pour résoudre un problème tel que (1), plutôt que de leur enseigner tout de suite le recours à l'opérateur réciproque qui conduit à écrire



Il est utile de traiter des problèmes analogues portant sur des nombres plus grands et donc moins maniables, car alors le tâtonnement devient pénible et la méthode standardisée qui consiste à inverser l'opérateur apparaît comme un soulagement. Mais passer trop tôt à cette méthode a pour effet de faire perdre à l'élève le sens, les raisons de la manœuvre : il se retrouve alors simple exécutant d'une opération abstraite imposée par l'enseignant.

Exemple 1 (vers 10-11 ans)

On a posé, sur les plateaux d'une balance, trois bouteilles identiques et des poids d'un kg. La balance est en équilibre. Quel est le poids d'une bouteille ?

Cette question est posée à partir de dessins à des élèves qui savent déjà faire pratiquement des pesées.

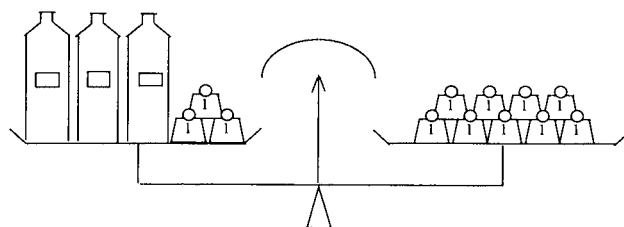


Fig. 1

En un premier temps, l'élève essaie de voir en comptant les poids (nous supposons que ce sont des poids de 1 kg), si l'équilibre est maintenu lorsqu'il suppose, par exemple que chaque bouteille pèse 1 kg. Comme ce n'est pas le cas, il essaie 2 kg. En un second temps, pour d'autres situations analogues, il peut mettre en place la stratégie qui consiste à ne garder que les objets à peser sur un plateau et les poids sur l'autre.

7.2.3 Construire patiemment un premier principe de substitution

Il est important mais difficile de faire comprendre aux élèves que les nombres ont des écritures diverses et que le sens du signe $=$ est de montrer que deux écritures distinctes représentent le même nombre.

Au Chapitre 4, nous avons déjà insisté sur les écritures diverses des nombres et sur le sens de l'égalité. Un premier principe de substitution découle de là : on peut toujours, n'importe où, remplacer une expression numérique par une autre qui lui est égale.

Il est important que le sens du signe $=$ et ce principe de substitution soient suffisamment travaillés au primaire. C'est en effet une des conditions pour que l'algèbre passe bien au secondaire.

7.2.4 Quelques formules à introduire prudemment

Quelques formules exprimant chacune une classe de situations peuvent être introduites au primaire. Elles sont moins importantes que les situations qu'elles représentent et que l'expression de ces situations avec des mots.

Partons d'un exemple. Dans une classe, chaque élève a dessiné un triangle, mesuré ses côtés dans une unité donnée (des cm par exemple), puis additionné les mesures pour déterminer le périmètre. On peut recourir à des lettres pour attirer l'attention sur les opérations qui viennent d'être faites par chacun et en garder le souvenir. On écrira en l'occurrence

$$a + b + c = p,$$

où a , b et c représentent les mesures des côtés du triangle de chaque élève et où p est le périmètre.

Il faut toutefois être prudent lorsqu'on introduit de telles expressions, car souvent les élèves considèrent une lettre comme une simple abréviation. Soit par exemple la formule

$$n = f + g,$$

où n est le nombre d'élèves de la classe, f le nombre de filles et g le nombre de garçons. Certains élèves imaginent que f veut dire « une fille ».

Des formules pour certains périmètres, aires et volumes apparaissent au cours du primaire. Ces formules sont moins importantes que la construction même des notions de périmètre, aire et volume. Nous avons déjà insisté sur ce point au n°7.1.2 : si les diverses notions de mesurage sont imparfaitement acquises, le travail avec de telles formules (substitution de mesures concrètes aux lettres, etc.) ne correspond plus à rien dans l'esprit des élèves. Ils obéissent alors aux consignes de calcul données par l'enseignant, mais sans comprendre ce qu'ils sont en train de faire.

7.3. L'algèbre aux premier et deuxième degrés du secondaire

7.3.1 Modéliser des situations, faire de l'algèbre dans des contextes

L'algèbre est une discipline abstraite. Pour qu'elle ait un sens aux yeux des élèves, il faut qu'elle renvoie sans cesse à un contexte.

Le contexte est parfois utilement constitué d'*illustrations* de la théorie, c'est-à-dire de *situations simples qui aident à la comprendre*. Ainsi en va-t-il en tout premier lieu des exemples numériques. Qui plus est, la plupart des lois de calcul et les identités les plus communes possèdent des illustrations géométriques en termes de longueurs, d'aires et de volumes (illustrations intéressantes même si elles ne portent que sur des quantités positives).

Exemple 1 (vers 12-13 ans)

La Fig. 1 présente un certain nombre d'objets géométriques et des expressions algébriques fournissant tantôt une longueur, tantôt une aire, tantôt un volume. A quoi correspond chacune de ces expressions ?

Les exemples ci-dessous utilisent de nombreuses conventions et techniques de calcul. Il va de soi qu'on en échelonnera l'étude sur un temps suffisant.

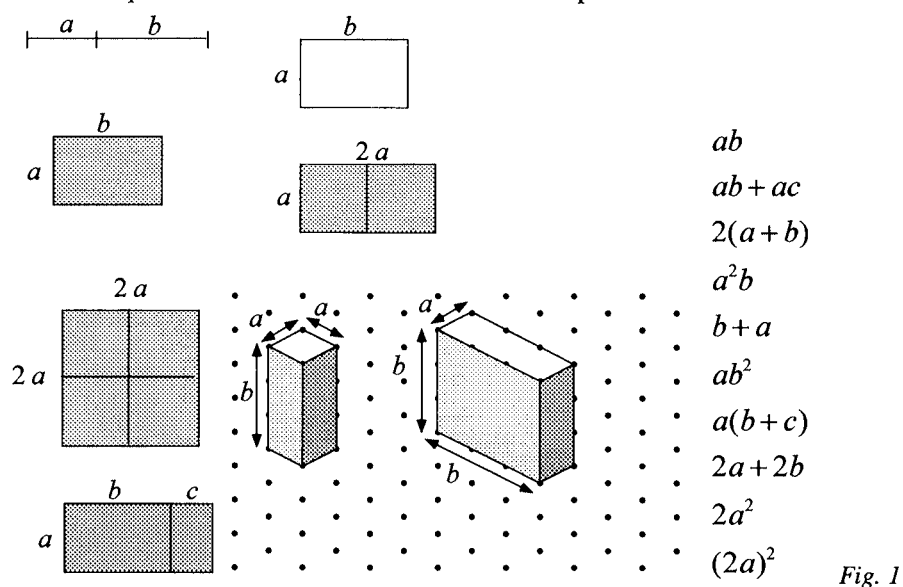


Fig. 1

Exemple 2.

Écrire l'aire de la Fig. 2 en fonction de a et de b . Partager ensuite cette figure d'un seul coup de ciseaux et juxtaposer les surfaces obtenues de manière à former un quadrilatère.

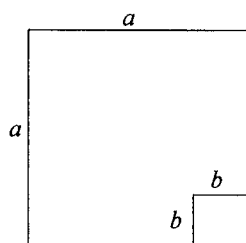


Fig. 2

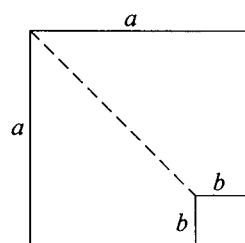


Fig. 3

Plusieurs découpages différents peuvent conduire à établir que

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

L'un d'eux consiste à couper selon la diagonale comme dans la Fig. 3 et à juxtaposer les deux surfaces de manière à former l'un des quadrilatères de la Fig. 4.

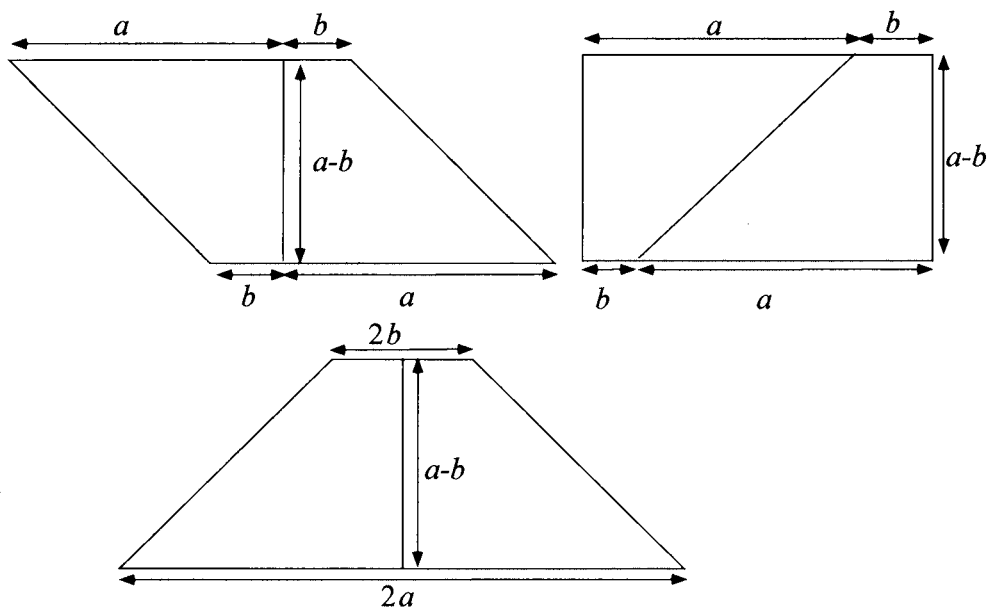


Fig. 4

L'algèbre est le terrain où les élèves tombent le plus souvent dans l'absence de sens, dans des manipulations purement formelles, et donc arbitraires (à leurs yeux). C'est pourquoi le retour au sens, à des illustrations numériques, géométriques ou autres doit être pratiqué chaque fois que nécessaire.

Mais les contextes les plus significatifs sont ceux des *applications* de l'algèbre : en opposition avec une illustration, une application est une *situation qui présente une difficulté que l'algèbre aide à résoudre*. Il peut s'agir d'une situation qui exige la résolution d'une équation ou qui appelle une démonstration, car l'algèbre est aussi, et peut-être surtout, un instrument de démonstration. Il serait peu utile de connaître l'algèbre si on ne savait pas où et quand s'en servir. On apprend par la pratique à reconnaître les situations qui peuvent être utilement traitées à l'aide d'une équation, d'une formule. On apprend aussi par l'expérience à modéliser les situations, c'est-à-dire à les idéaliser sans les dénaturer, pour en donner une représentation qui se prête au traitement algébrique. Les activités de modélisation sont de loin plus importantes que les activités de calcul : nous défendons l'idée que l'on devrait consacrer nettement plus de temps aux premières qu'aux secondes.

Exemple 2 (vers 12-13 ans)

On observe, dans le *Tabl. 1*, qu'à partir de 5, tous les nombres premiers se trouvent seulement dans deux colonnes du tableau. Cette observation reste-t-elle vraie pour tous les nombres premiers ?

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Tabl. 1

Pour y voir clair, renforçons dans ce tableau tous les nombres premiers : cf. *Tabl. 2*.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Tabl. 2

On voit que, dans le tableau, et à part 2 et 3, chaque nombre premier est soit un multiple de 6 augmenté de 1, soit un multiple de 6 augmenté de 5. D'où une conjecture : tout nombre premier supérieur à 3 serait soit un multiple de 6 augmenté de 5 soit un multiple de 6 augmenté de 1. Pour prouver cela, il suffirait de montrer que tout nombre (supérieur à 3) qui n'est pas de l'une ou l'autre de ces deux formes ne peut être premier. Tout nombre est de l'une des formes suivantes :

$$6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5,$$

où n est un nombre naturel.

Par ailleurs $6n$ n'est pas premier. De plus

$$6n+2 = 2(3n+1)$$

est multiple de 2,

$$6n+3 = 3(2n+1)$$

est multiple de 3,

et enfin,

$$6n+4 = 2(3n+2)$$

est multiple de 2. Ceci achève la démonstration de la conjecture.

Exemple 3 (vers 15 ans) (emprunté au CUEEP)

On assemble deux pièces de machine : l'une est un cylindre droit, l'autre est un tronc de cône (Fig. 5 (a)). On complète ensuite l'ensemble par une pièce d'un autre métal de manière à former un nouveau tronc de cône (Fig. 5(b)). Les dimensions sont les suivantes :

$$a = 42 \text{ mm}, b = 23 \text{ mm}, R = 2r, r = 19 \text{ mm}.$$

1) Calculer le volume du métal ajouté (pour rappel, le volume d'un tronc de cône est donné par la formule

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) ,$$

où h est la hauteur du tronc, et R et r sont les rayons de ses deux bases).

2) Calculer le volume du métal ajouté en conservant les valeurs ci-dessus pour a , R et r , mais en donnant à b la valeur de 15 mm.

3) Calculer de même pour $b = 20$ mm, puis pour $b = 25$ mm.

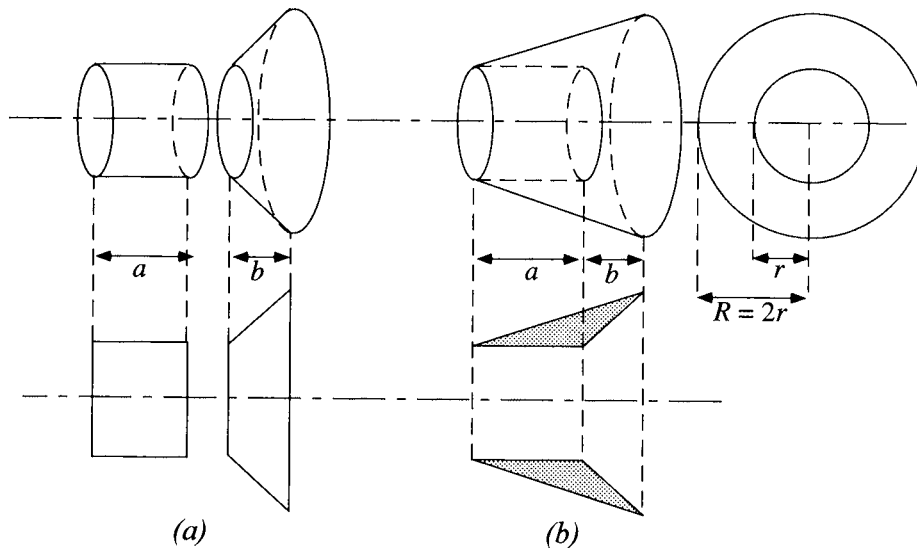


Fig. 5

Après avoir fait les calculs pour différentes valeurs de b , on s'aperçoit que le volume est toujours le même. Celui-ci pourrait donc être indépendant de b . Ce qui signifierait que le volume du métal ajouté est constant, quelle que soit la hauteur du tronc de cône de la pièce initiale.

Pour valider cette conjecture, on peut raisonner algébriquement ou géométriquement. Algébriquement d'abord : on commence par écrire le volume de la pièce, à savoir

$$\frac{n(a+b)}{3}(4r^2 + r^2 + 2r^2) - \frac{3\pi ar^2}{3} - \frac{\pi b}{3}(4r^2 + r^2 + 2r^2).$$

Pour savoir si cette expression est indépendante de b , on établit par calcul qu'elle est égale à

$$\frac{4a}{3}\pi r^2.$$

Non seulement elle est indépendante de b , mais elle est beaucoup plus facile que la première pour les calculs numériques. Morale : il est parfois bien avantageux, avant de substituer des valeurs numériques dans une expression littérale, de réduire cette dernière autant qu'on peut.

Pouvons-nous établir la même propriété géométriquement ? Une première observation est que l'aire du triangle hachuré sur la Fig. 6 est indépendante de b (comme le montre son évaluation à l'aide de a et r).

Pour prouver le résultat annoncé, il faudrait être sûr que les volumes engendrés par rotation de ces divers triangles sont égaux. Ce résultat ne pourra être établi que par les élèves qui auront appris, au 3e degré du secondaire, à calculer par intégration des volumes de révolution¹.

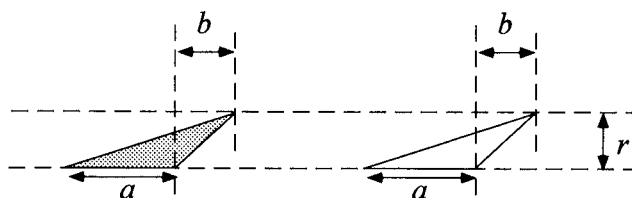


Fig. 6

La géométrie analytique est un contexte privilégié de l'algèbre et une source d'images mentales pour les expressions algébriques simples. L'algèbre est en effet un moyen d'étude des fonctions et de leurs graphes, des lieux géométriques et de leurs équations. Il nous paraît raisonnable que l'étude de l'algèbre et celle de la géométrie analytique commencent en même temps et soient poursuivies de manière coordonnée. Ceci renforce l'idée que la géométrie analytique devrait être abordée très tôt : nous avons déjà observé au n° 5.1.2 qu'elle est le premier terrain d'application justifiant pleinement l'introduction des nombres relatifs (avec leurs lois d'addition et de multiplication).

Exemple 4 (vers 15 ans)

Voici l'écriture analytique de quelques transformations du plan. Déterminer pour chacune d'elles, l'ensemble de leurs points fixes.

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $f(x, y) = (x, -y + 4)$ | d) $f(x, y) = (-x, -y)$ |
| b) $f(x, y) = (y, -y + 2x)$ | e) $f(x, y) = (-2x, -2y)$ |
| c) $f(x, y) = \left(\frac{y}{2}, x\right)$ | f) $f(x, y) = (x + 3, y - 5)$. |

Ceci conduit à résoudre des systèmes qui n'ont aucune solution, qui en ont une, ou qui en ont une infinité et à donner de cela une interprétation géométrique.

Exemple 5 (vers 15-16 ans))

Cet exemple est emprunté à [Cas80].

Le théorème de Pythagore dit que pour tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse vaut la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés. Cette propriété reste-t-elle vraie si on y remplace les carrés par des demi-cercles ?

Soit le triangle (3,4,5) (Fig. 7) dont nous connaissons les mesures exactes.

¹ On peut aussi invoquer le théorème de Guldin qui dit que le volume vaut le produit de l'aire de la surface qui tourne par la longueur du cercle que décrit son centre d'inertie. Ce résultat n'est lui aussi accessible qu'en analyse.

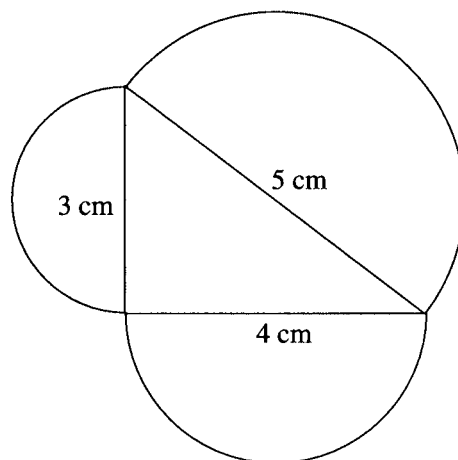


Fig. 7

On a ici

$$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 6,25$$

et

$$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 6,25 .$$

Sur cet exemple particulier, la conjecture est vérifiée. Est-elle toujours vérifiée pour le triangle suivant

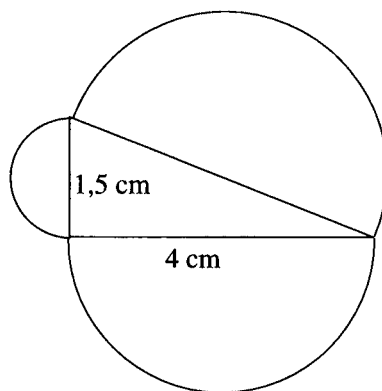


Fig. 8

Dans ce cas en calculant l'hypoténuse on obtient $\sqrt{18,25}$ cm. On obtient pour la somme des deux demi-cercles de diamètre 4 cm et 1,5 cm

$$\frac{1}{2} \pi 2^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 4,5625 ;$$

l'aire du demi-cercle construit sur l'hypoténuse vaut

$$\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{18,25}{2}}^2 .$$

Ce qui semble confirmer la conjecture. On ne peut pas essayer par calcul tous les tri-

angles rectangles de la création ! Passons alors à l'algèbre, et représentons par a , b les longueurs des deux côtés de l'angle droit et par c la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle quelconque. Nous savons que

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Pour les demi-cercles, nous obtenons d'une part

$$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2,$$

et d'autre part

$$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{c}{2} \right)^2.$$

Compte tenu de (1), on montre par calcul que ces deux expressions sont égales.

Exemple 6 (vers 14-15 ans)

Désignons par d_r (distance de réaction) la distance qu'une auto parcourt entre l'instant où le chauffeur aperçoit un obstacle soudain et celui où il appuie sur le frein. Appelons d_f la distance de freinage, celle que l'auto parcourt depuis l'instant où le chauffeur commence à freiner jusqu'à celui où l'auto s'arrête.

Dans un dépliant «toutes boîtes», nous avons trouvé le Tabl. 3, qui donne les moyennes de nombreuses mesures².

vitesse v en km/h	30	50	70	90	120
distance de freinage sur route sèche d_f , en m	9	15	21	27	36
distance de réaction d_r , en m	5	13	25	41	72

Tabl. 3

Peut-on, à partir de ce tableau, prévoir la distance d'arrêt ($d_r + d_f$), pour une vitesse qui ne se trouve pas dans le tableau, par exemple $v = 100$?

Une première idée est de vérifier si la distance de réaction est proportionnelle à la vitesse (ce qui paraît bien devoir être le cas !). Cette propriété se vérifie, car

$$\frac{9}{30} = \frac{3}{10}, \quad \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \quad \frac{21}{70} = \frac{3}{10}, \quad \frac{27}{90} = \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Donc, si la vitesse est de 100 km/h, la distance de réaction vaut

$$d_r = 100 \cdot \frac{3}{10} = 30 \quad (\text{mètres}). \quad (1)$$

Deuxième conjecture : la distance de freinage serait proportionnelle à la vitesse. Conjecture clairement fausse car

$$\frac{5}{30} \cong 1,66 \quad \frac{13}{50} = 0,26 \quad \frac{25}{70} \cong 0,35 \quad \text{etc.}$$

² On utilise ici des unités incohérentes (vitesse en km/h et distance en m), mais c'est sans conséquence dans le problème posé.

Peut-être la distance de freinage serait-elle proportionnelle au carré de la vitesse ? On calcule

$$\frac{5}{900} = 0,00555...$$

$$\frac{13}{2500} = 0,00520$$

$$\frac{25}{4900} = 0,005102...$$

$$\frac{41}{8100} = 0,0050617...$$

$$\frac{72}{14400} = 0,005$$

Les quotients obtenus diffèrent mais de peu : l'écart est de l'ordre d'un demi-millième. Modélisons la situation en prenant 0,005 pour valeur constante du rapport. Ceci revient à dire que

$$\frac{d_f}{v^2} = 0,005 .$$

Par conséquent, pour une vitesse de 100 km/h,

$$d_f = 100^2 \cdot 0,005 = 50 \quad (\text{mètres}). \quad (2)$$

En tenant compte de (1) et (2), on obtient pour la distance d'arrêt à partir de 100 km/h :

$$30 + 50 = 80 \quad (\text{mètres}).$$

On peut aussi obtenir une formule générale pour la distance d'arrêt, sous la forme

$$d_r + d_f = 0,3v + 0,005v^2 .$$

7.3.2 Tâtonner avant d'apprendre une formule automatique

Chercher la solution d'un problème par les moyens du bord conduit à explorer la nature même de la solution ainsi qu'à comprendre et apprécier ultérieurement une formule générale qui résout ce type de problème.

Etablir a priori des formules, les appliquer répétitivement, engendre une activité de pure forme, dénuée de sens. On perçoit clairement l'utilité d'une formule lorsque celle-ci apparaît comme réglant une fois pour toutes, économiquement et automatiquement, une catégorie de questions longuement explorée. La formule acquiert alors du sens indépendamment des problèmes considérés. La démonstration de la formule se trouve facilitée du fait qu'on la construit en terrain familier.

L'exploration tâtonnante entraîne des maladroites et des erreurs. Celles-ci contribuent par la négative à montrer les chemins qui vont quelque part, évitant les pièges et les fondrières.

Exemple 7 (vers 13-14ans)

- a) Trouver cinq nombres naturels consécutifs dont la somme est 85.
- b) Trouver un nombre qui est son propre inverse.
- c) Trouver un nombre dont l'inverse et l'opposé sont égaux.
- d) Trouver deux nombres dont la somme est -3 et la différence $+8$.

De telles questions, parce qu'elles sont présentées comme des problèmes ouverts et non comme des appels à mettre en équation, sont abordées la plupart du temps par des tâtonnements numériques.

Exemple 8 (vers 13-14 ans)

Un Anglais et un Français se rencontrent et disent : « c'est la première fois que nos thermomètres indiquent le même nombre ». La scène se passe-t-elle à l'un des pôles ou à l'équateur ? (0° Celsius correspond à 32° Fahrenheit et 100° Celsius à 212° Fahrenheit).

Exemple 9 (vers 15 ans)

On considère une droite d et un point P . On dispose deux axes comme sur la Fig. 9. Quel est l'ensemble des points situés à égale distance de la droite et du point ?

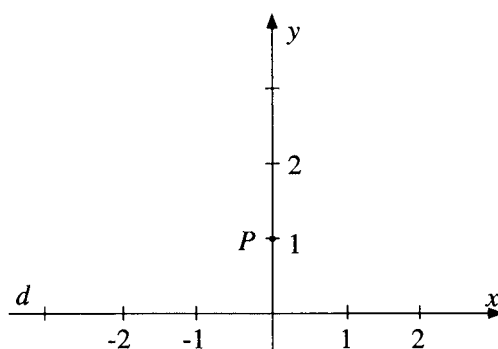


Fig. 9

On laisse tâtonner les élèves. Le point $(0, 1/2)$ convient évidemment. Le point $(1,1)$ sera peut être aussi rapidement identifié. On en essaie d'autres : par exemple $(2,3)$ ne convient pas. Alors, en gardant l'abscisse 2, on tâtonne avec d'autres ordonnées, etc. La symétrie du lieu sera peut être perçue en cours de route.

Les élèves qui auront ainsi tâtonné percevront avec soulagement la méthode algébrique directe qui consiste à écrire

$$|y| = \left(x^2 + (y-1)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

puis à simplifier l'équation. Après simplification, l'égalité des distances ne sera plus perceptible dans la formule. Il faut donc être conscient du danger de perte de sens.

7.3.3 Bien saisir l'égalité et le principe de substitution

Il faut apprendre à reconnaître des expressions algébriques équivalentes, substituables les unes aux autres, ainsi que les équations équivalentes.

Nous avons insisté dans l'étude des nombres (cf. n°5.2.1 et 5.3.1) sur le fait que tout nombre est susceptible d'écritures diverses, parmi lesquelles on choisit opportunément celles qui conviennent au traitement d'un problème donné. L'égalité n'a d'autre fonction que d'indiquer deux écritures équivalentes d'un même objet, substituables l'une à l'autre en toute circonstance et sans condition. On peut dire la même chose des expressions algébriques équivalentes et du signe = utilisé aussi en algèbre. Pas plus en algèbre qu'en arithmétique, ce signe n'est l'indication d'une opération à exécuter.

Les égalités équivalentes sont aussi une clé de l'algèbre : ce sont celles que l'on obtient en additionnant ou soustrayant une même quantité (nombre, expression algébrique) aux deux membres d'une égalité, ou en multipliant ou divisant les deux membres par une même quantité non nulle. Des égalités équivalentes sont substituables l'une à l'autre. Le fondement de leur équivalence doit être compris et soutenu par des illustrations numériques, géométriques. Les règles automatiques, du type « on peut toujours faire passer d'un membre dans un autre, de telle ou telle façon » risquent de faire basculer les élèves dans le formel pur.

Exemple 10 (vers 14 ans)

On considère deux quantités a et b égales, et on écrit

$$a = b.$$

On multiplie les deux membres de l'égalité par a :

$$a^2 = ab.$$

On soustrait b^2 des deux membres :

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

On calcule banalement

$$(a - b)(a + b) = b(a - b).$$

En divisant les deux membres par $(a - b)$, on obtient

$$a + b = b,$$

et puisque $a = b$

$$b + b = b,$$

ou encore

$$2b = b.$$

On divise les deux membres par b , ce qui donne

$$2 = 1.$$

Vous avez dit bizarre ?

Mais pouvait-on diviser les deux membres par $a - b$?

Exemple 11 (vers 15 ans)

Entourer toutes les fractions ci-dessous égales à $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) et encadrer celles qui ne sont égales à $\frac{a}{b}$ que sous certaines conditions

$$\frac{a^4}{b^4}, \quad \frac{2a^2}{2ab}, \quad \frac{b^{-1}}{a^{-1}}, \quad \frac{ab^{-5}}{b^{-4}}, \quad \frac{a^{m+3}}{a^{m+2}b}, \quad \frac{a+5}{b+5}, \quad \frac{2a-a}{2b-b},$$

$$\frac{-a}{-b}, \quad -\frac{a}{b}, \quad -\frac{a(x-y)}{b(y-x)}, \quad \frac{a^2+a}{a^2b}.$$

7.3.4 Établir une stratégie de calcul, analyser des expressions

Un calcul n'est pas toujours une suite standardisée d'opérations : souvent pour atteindre un objectif, il importe de se donner une stratégie de calcul. L'examen critique d'une expression algébrique lui fait dire des choses sur son contenu.

Certains calculs sont totalement automatiques. Tel est le cas par exemple de la résolution d'une équation du deuxième degré selon la formule classique. Il serait pourtant maladroit d'appliquer cette formule à une équation telle que $x^2 - 9 = 0$. Par ailleurs, dans bien des cas, il n'y a pas de formule toute faite et c'est en confrontant les données de départ avec l'objectif souhaité que l'on peut – parfois par essais et erreurs – déterminer une voie de calcul qui atteigne le but. Par ailleurs un calcul correct peut être maladroit ou élégant.

La réponse à un problème n'est jamais une formule – fût-elle exacte – dont on ne peut rien dire. Toute formule exige une interprétation, un retour aux données du problème et à la question posée. Des graphes dessinés avec des échelles appropriées donnent souvent une bonne vue d'ensemble du contenu d'une formule.

Exemple 12 (vers 14 ans)

Chaque ligne du Tabl. 4 donne trois nombres a , b et c . Calculer pour chaque cas le nombre

$$d = a(b + c) = ab + ac,$$

en choisissant la voie la plus commode.

a	b	c	$d=a(b+c)$	$d=ab+ac$
9	$3/7$	$4/7$		
12	$3/4$	$7/6$		
$1/2$	17,3	2,7		
24	$7/8$	$1/6$		
12	-29	14		

Tabl. 4

Tout en conduisant à une fixation des routines, cet exercice requiert une analyse des données et le choix d'une stratégie.

Exemple 13 (vers 14 ans)

Dans le Tabl. 5, A et B sont donnés sous forme d'une somme ou sous forme d'un produit. On demande de compléter le tableau.

	Écriture "somme"	Écriture "produit"	$A - B$	A / B	Valeurs de x pour lesquelles $A=0$ et $B=0$
A	$2x - 2$				
B		$6(x - 1)$			
A		$(x - 1)^2$			
B		$(1 - x)^2$			
A		$(2 + 3x)(2 - 3x)$			
B	$9x^2 - 12x + 4$				

Tabl. 5

Calculer une différence ou un quotient montre l'intérêt de bien distinguer une écriture somme d'une écriture produit et de pouvoir passer de l'une à l'autre. Dans cet exemple on exerce une habileté à repérer les « formes » des expressions algébriques. Il est intéressant de faire un lien entre ces formes d'écriture et l'étude des graphiques correspondants.

Exemple 14 (vers 15 ans)

Un nombre impair de pierres sont disposées tous les 10 m le long d'une route. Un cantonnier doit les entasser toutes sur la pierre centrale et n'est capable d'en transporter qu'une à la fois. Il part d'une pierre située à une des extrémités, et quand il a terminé, il a parcouru 3 km. Combien y a-t-il de pierres ?

Soit $2n + 1$ le nombre de pierres. Supposons que le cantonnier s'occupe d'abord des pierres d'un seul côté. Il parcourt

$10n$ mètres pour la première pierre,

$2(10n - 10)$ pour la deuxième,

$2(10n - 20)$ pour la troisième,

.....

2×20 pour la $(n - 1)^{\text{e}}$,

2×10 pour la n^{e} .

Il passe aux n pierres de l'autre côté, et s'il commence par la plus éloignée, il parcourt
 $2 \times 10n$ mètres pour la première pierre,
 $2(10n - 10)$ pour la deuxième,
 $2(10n - 20)$ pour la troisième,

 2×20 pour la $(n - 1)^{\text{e}}$,
 2×10 pour la n^{e} .

Il parcourt en tout 3 000 m.

Écrire, simplifier puis résoudre l'équation n'est pas facile pour un élève de 15 ans. Sauf s'il songe à adopter la disposition

$$\begin{array}{rcl}
 & & 10n \\
 + & 2(10n - 10) + 2 \times 10 & \\
 + & 2(10n - 20) + 2 \times 20 & \\
 + & \dots \dots \dots & \\
 + & 2 \times 20 + 2(10n - 20) & \\
 + & 2 \times 10 + 2(10n - 10) & \\
 + & 2 \times 10n & \\
 \hline
 = & 3\,000. &
 \end{array}$$

Une simplification s'impose et donne

$$10n + n \times 20n = 3\,000,$$

ou encore

$$20n^2 + 10n - 3\,000 = 0.$$

Des deux solutions possibles, seule $n = 12$ est satisfaisante. Donc il y avait $2 \times 12 + 1$ pierres, c'est-à-dire 25 pierres.

Des élèves qui, vers 16 ans par exemple, connaissent la somme d'une progression arithmétique, iront plus droit au but.

7.3.5 Appliquer (à bon escient) la formule adéquate

On apprend par l'usage, dans des contextes significatifs, à choisir une formule en vue d'un objectif et à l'appliquer fidèlement.

Si, chaque fois que l'on doit résoudre un problème, on devait réfléchir en détail à toutes les phases des calculs qui jalonnent sa solution, on perdrait la vue d'ensemble du problème et on serait paralysé. Ce serait comme de vouloir aller quelque part en voiture en s'interrogeant à tout moment sur la structure de la boîte de vitesse, les positions des pédales, de la commande des feux clignotants, etc. Il faut apprendre par l'usage à reconnaître d'un coup d'œil les cas banals d'application des principales formules toutes faites, puis à utiliser celles-ci sans erreur.

Les calculs répétitifs dans lesquels on applique simplement des formules amènent une partie (et une partie seulement) des élèves à calculer correctement, encore cet

acquis est-il de courte durée (cf. n° 5.1.4). Les exercices de ce type sont comme un long entraînement à la conduite d'une voiture que l'on donnerait à quelqu'un dans une voiture à l'arrêt. Répétons-le, il faut apprendre à calculer dans des chantiers de problèmes significatifs (apprendre à conduire en roulant) en y mettant le temps nécessaire et en constatant chaque fois, dans le contexte où on travaille, le succès ou l'insuccès du calcul.

D'autre part, autant il est important d'avoir bien compris les manœuvres algébriques de base et les expressions algébriques simples, autant il est utile de pouvoir sous-traiter à une machine les calculs tant soit peu compliqués. Il est dorénavant plus important de savoir quel calcul faire (cf. n° 7.3.4 sur les stratégies de calcul) que de savoir exécuter le calcul.

Exemple 15 (vers 13-14 ans)

Cet exemple doit venir après un travail en situation montrant l'intérêt des factorisations.

Voici trois règles usuelles de factorisation :

$$R_1 : ab + ac = a(b + c),$$

$$R_2 : a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$R_3 : a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Voici ensuite quelques expressions algébriques. Dans tous les cas où c'est possible, factoriser l'expression en signalant la règle utilisée.

$a^2 + 4a$	$a^2 + ab^2$
$a^2 - 4$	$a^2 + 4b^2 + 4ab$
$a^2 + 4$	$a^2 + 4ab$
$a^2 + 4a + 4$	$a^2 + 4b^2$
$a^2 - 4b^2$	$a^2 + 6a - 9$.

7.3.6 Une première idée des lois de l'algèbre

Il faut reconnaître les lois algébriques applicables aux diverses sortes de nombres.

Ces lois, qui se transfèrent avec peu de changements de $\mathbf{N}$ à $\mathbf{Z}$ ou à $\mathbf{Q}$, puis à $\mathbf{R}$, comportent trop peu de contre-exemples (de non-commutativité, de diviseurs de 0, ...) pour qu'on fasse une étude systématique de chaque structure.

7.4 L'algèbre au troisième degré

7.4.1 Modéliser des situations, faire de l'algèbre dans des contextes

Jusqu'au bout du secondaire, l'algèbre doit être pratiquée dans des contextes qui montrent sa fonction et lui donnent sens.

Plusieurs des observations que nous avons faites pour les premier et deuxième degrés (cf. n°7.3.1) demeurent d'application au troisième degré. Jusqu'au bout des études secondaires, l'algèbre demeure un terrain d'où on glisse facilement vers le pur formel et l'absence de sens. Aussi faut-il continuer à recourir, chaque fois que cela s'indique, aux exemples numériques, géométriques, etc. qui illustrent la théorie et la pratique de l'algèbre.

Les activités de modélisation demeurent plus importantes que celles de calcul : elles montrent les terrains d'application de l'algèbre. Construire des modèles plausibles de situations réelles s'apprend beaucoup par l'expérience, par essais et erreurs.

La géométrie analytique est un terrain privilégié d'application de l'algèbre : celle-ci est, avant même l'analyse, un instrument d'étude des fonctions, des courbes et des surfaces.

Les équations linéaires traduisent des situations d'incidence et de parallélisme de droites et de plans. L'algèbre linéaire prend tout son sens dans l'étude des transformations du plan et de l'espace [Noë95a].

Notons enfin que l'analyse devient, au cours du troisième degré, un nouveau terrain d'application et de sens pour l'algèbre.

Exemple 1 (vers 16-17 ans)

On veut fabriquer un chauffe-eau cylindrique d'une contenance de 100 litres. On sait par ailleurs que la perte de calories par unité de temps est proportionnelle à l'aire totale du chauffe-eau. Quelles proportions faut-il donner au cylindre pour que la perte soit la plus petite possible ?

Un cylindre de 100 litres peut être réalisé avec une petite base et une grande hauteur, mais aussi avec une large base et une faible hauteur. Il peut paraître étonnant que, la contenance demeurant la même, l'aire puisse varier d'un cas à l'autre. Vérifions pourtant que tel est bien le cas.

Soit une base circulaire dont le rayon mesure 4 dm. L'aire de cette base est

$$s = \pi \cdot 4^2 .$$

La hauteur du cylindre vaut alors

$$h = \frac{100}{\pi \cdot 4^2} ,$$

et son aire totale

$$S = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \frac{100}{\pi \cdot 4^2}.$$

L'aire totale vaut donc environ 150 dm².

Si on choisit un rayon de 3 dm, on obtient de même

$$S = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \frac{100}{\pi \cdot 3^2}.$$

Donc une aire d'environ 123,2 dm².

Ainsi l'aire varie avec le rayon. Comment déterminer le rayon qui, pour un volume de 100 litres, donnera la plus petite aire ? Dans les formules ci-dessus, remplaçons le rayon par la lettre r . Nous obtenons pour l'aire du cylindre

$$S = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \frac{100}{\pi \cdot r^2},$$

ce qui s'écrit encore

$$S = 2\pi \cdot r^2 + \frac{200}{r}.$$

Dessignons le graphique de cette fonction. On l'obtient en additionnant les valeurs de $y = 2\pi r^2$ et de $y = \frac{200}{r}$, comme l'indique ce graphique (Fig. 1).

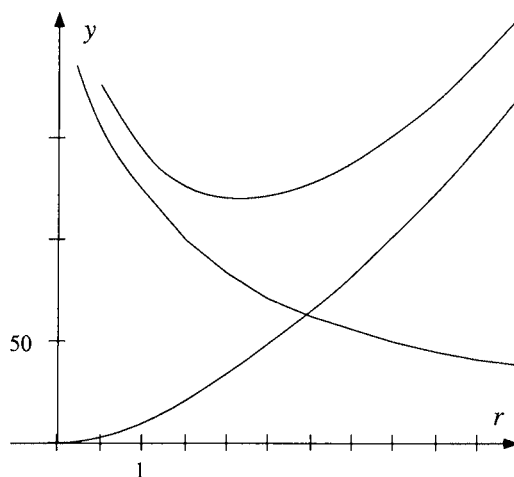


Fig. 1

La courbe obtenue montre l'existence d'un minimum de S aux environs de $r = 2,5$ dm. Ce minimum vaut donc à peu près 120 dm².

La question est ainsi résolue de façon pratiquement satisfaisante, même si les élèves pourront obtenir ultérieurement un résultat plus précis en utilisant une dérivée.

Exemple 2 (vers 17 ans).

Les courants alternatifs peuvent être représentés par des vecteurs tournants auxquels on peut faire correspondre des nombres complexes. C'est une matière intéressante pour tous les élèves qui étudient les complexes, et plus spécialement ceux qui s'intéressent aux techniques électriques. Par exception, ceci n'est pas l'énoncé d'une question, mais une invitation à étudier une certaine matière dont voici les éléments.

Un courant électrique alternatif est représenté par une fonction du temps de la forme

$$I(t) = I_0 \sin \omega t ,$$

où I_0 est l'*amplitude* du courant et ω sa *pulsation*.

Lorsque, comme en Europe, la fréquence du courant est de 50 périodes par seconde, on a

$$\omega = 2\pi \times 50 \text{ s}^{-1}.$$

Considérons (Fig. 2) un vecteur de norme I_0 fonction du temps : il tourne autour de l'origine des axes et fait avec l'axe des x un angle égal à ωt .

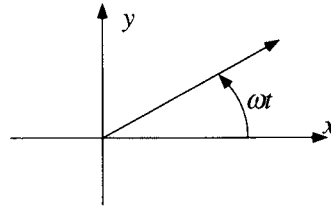


Fig. 2

Ce vecteur s'écrit

$$(I_0 \cos \omega t, I_0 \sin \omega t) .$$

En interprétant l'axe des x et l'axe des y respectivement comme axes réel et imaginaire du plan complexe, on peut faire correspondre au courant le nombre complexe

$$I_0 \cos \omega t + i I_0 \sin \omega t .$$

Faire correspondre ainsi un nombre complexe à un courant paraît bien artificiel. Mais l'utilité de cette représentation apparaît bientôt.

Dans une installation électrique dite triphasée, on amène vers un point d'utilisation trois courants, chacun sur un fil distinct (Fig. 3).

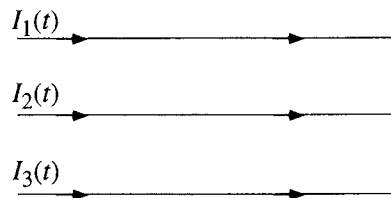


Fig. 3

Si l'installation est équilibrée, ces trois courants sont donnés par

$$I_1(t) = I_0 \sin \omega t ,$$

$$I_2(t) = I_0 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) ,$$

$$I_3(t) = I_0 \sin \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right) .$$

On dit que le second a une avance de phase de $\frac{2\pi}{3}$ sur le premier, et le troisième une avance de phase de $\frac{2\pi}{3}$ sur le second et de $\frac{4\pi}{3}$ sur le premier. Ces trois courants sont représentés vectoriellement sur la Fig. 4.

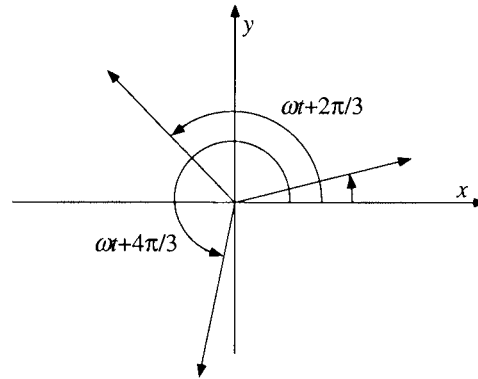


Fig. 4

Ils tournent ensemble sans jamais changer leur position l'un par rapport à l'autre. La Fig. 5 les représente au temps $t = 0$.

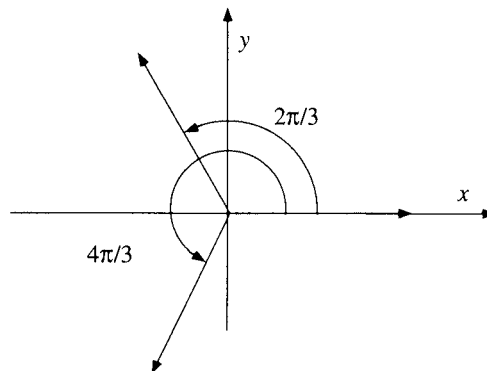


Fig. 5

Ils correspondent aux nombres complexes :

$$I_0,$$

$$I_0 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$I_0 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

La somme de ces derniers est nulle : ils sont, à la constante I_0 près, les trois racines cubiques de l'unité. Ceci explique un fait techniquement important : la somme de trois courants triphasés équilibrés est nulle. C'est pourquoi, lorsqu'on amène trois courants triphasés équilibrés en un point, il n'est pas nécessaire de prévoir un câble de retour.

En pratique, aucun réseau triphasé n'est parfaitement équilibré. Mais on s'arrange pour qu'il soit presque équilibré. Alors, le courant de retour n'est pas nul, mais il est très petit. C'est pourquoi, lorsqu'on regarde une ligne haute tension, on y voit trois câbles de gros diamètre qui amènent le courant, et un câble beaucoup plus fin pour le retour.

7.4.2 Tâtonner pour conjecturer une formule

Il est toujours préférable de commencer par tâter un problème en s'appuyant sur ses connaissances antérieures que de recevoir à l'avance, par le biais d'une formule, la clé de sa solution automatique.

Les commentaires que nous avons faits au n°7.3.2 s'appliquent encore ici. Le danger du formalisme prématuré existe jusqu'au terme des études.

Exemple 3 (vers 16 ans)

On place un capital à intérêt composé au taux annuel de $p\%$. Quel est le montant du capital après n années ?

Souvent les élèves entament le calcul comme suit :
après un an, le capital se monte à $C + iC$ où on a posé $i = p/100$,
après deux ans :

$$C + iC + i(C + iC),$$

après trois ans

$$C + iC + i(C + iC) + i[C + iC + i(C + iC)] .$$

La formule s'allonge rapidement, et on a donc intérêt à la simplifier. Essayons de supprimer les parenthèses dans la dernière expression trouvée. Elle devient

$$\begin{aligned} C + iC + iC + i^2C + iC + i^2C + i^2C + i^3C \\ = C + 3iC + 3i^2C + i^3C \\ = C(1 + 3i + 3i^2 + i^3). \end{aligned}$$

En calculant de même, on obtient comme capital après 4 ans :

$$\begin{aligned} &= C(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + iC(1 + 3i + 3i^2 + i^3) \\ &= C(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + C(i + 3i^2 + 3i^3 + i^4) \\ &= C(1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4). \end{aligned}$$

Il semble difficile de conjecturer une formule pour n (voir toutefois l'exemple 4 ci-après). On songe alors à organiser le calcul autrement. Capital après un an :

$$C + iC = C(1 + i) .$$

après deux ans

$$C(1+i) + i[C(1+i)] = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2 .$$

après trois ans

$$C(1+i)^2 + iC(1+i)^2 = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3 .$$

D'où le capital après n années :

$$C(1+i)^n .$$

Exemple 4 (vers 17 ans)

Déterminer la formule qui donne la n^e puissance du binôme $a + b$.

Les élèves calculent les premières puissances. Sans parler de $(a+b)^0$, ils écrivent

$$(a+b)^1 = a+b ,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

Les choses se compliquent assez vite. Pour calculer $(a+b)^4$, ils passent parfois par $[(a+b)^2]^2$.

Ils observent que chaque formule est homogène en (a, b) . La régularité observée permet de conjecturer que la formule cherchée s'écrit

$$(a+b)^n = a^n + (?)a^{n-1}b + (?)a^{n-2}b^2 + \dots \\ \dots + (?)ab^{n-1} + b^n .$$

Mais quels sont les coefficients ? Certains élèves connaissent le triangle de Pascal et établissent le lien :

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & 1 & & 2 & & \\ & 1 & 2 & & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \end{array}$$

Les autres cherchent $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, et en général à ce moment la formule est proposée :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \dots + \binom{n}{n}b^n .$$

Reste à la démontrer.

7.4.3 Entretenir la compréhension de l'égalité et du principe de substitution

Les expressions algébriques équivalentes se font de plus en plus variées. Il impor-

te de continuer à donner son vrai sens au signe $=$, et à reconnaître les égalités équivalentes.

Exemple 5 (vers 17 ans)

On a $\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx$, puis, selon la manière dont on continue à cher-

cher cette primitive, on trouve $\sin^2 x$ ou $-\cos^2 x$. Peut-on pour autant écrire que $\sin^2 x = -\cos^2 x$?

Cette question déborde sur le chapitre consacré à l'analyse. C'est que le problème du sens de l'égalité est présent partout en mathématiques, et pas seulement en algèbre. L'égalité suggérée équivaut à

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0,$$

ce qui est évidemment faux. C'est que $\int \sin 2x dx$ désigne non pas une fonction particulière, mais bien une classe de fonctions qui ne diffèrent les unes des autres que par des constantes. L'égalité $\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx$ est une égalité entre deux ensembles de fonctions.

7.4.4 Établir des stratégies de calcul, analyser des expressions

Il faut apprendre à concevoir des stratégies de calcul en confrontant les données du problème et la question posée. De plus il faut savoir interroger les formules pour qu'elles révèlent leur contenu.

Exemple 6 (vers 16 ans)

Quelle est l'allure de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$?

On observe que

$$y = \sqrt{(x+1)^2 + 1}, \quad (1)$$

ce qui montre que l'ordonnée est minimale en $x = -1$, où elle vaut $y = 1$.

En $x = 0$, on a $y = \sqrt{2}$.

De (1), on tire que

$$y = |x+1| \sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}}.$$

La courbe s'approche donc asymptotiquement de $y = |x+1|$. Il n'est pas difficile non plus de voir qu'elle est symétrique par rapport à $x = -1$. Ces quelques observations permettent d'esquisser son graphique à la Fig. 6.

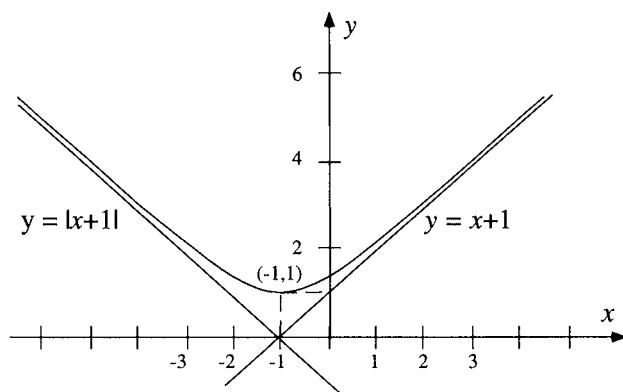


Fig. 6

Une remarque pour terminer : il est en général plus intéressant d'interroger une fonction en scrutant sa forme que de lui appliquer le traitement canonique et figé « d'étude d'une fonction ».

Exemple 7 (vers 17 ans)

La suite de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

se construit en partant de ses deux premiers termes

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 1, \quad (1)$$

et en spécifiant que chacun des termes ultérieurs est la somme des deux précédents. Cette condition peut s'exprimer sous la forme

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Y a-t-il moyen d'écrire le terme général de la suite comme une fonction de n ? En d'autres termes, existe-t-il une fonction $f(n)$ telle que

$$x_n = f(n) ?$$

Supposons que les élèves connaissent les suites arithmétiques par leur terme général

$$b + an \quad (3)$$

et aussi les suites géométriques par leur terme général

$$ba^n. \quad (4)$$

Ils trouveront sans doute naturel d'essayer ces deux fonctions pour satisfaire à (2).

En substituant (3) dans (2), on obtient

$$b + a(n+2) = b + a(n+1) + b + an,$$

ce qui s'écrit encore

$$a(1-n) = b \quad n = 1, 2, \dots$$

Les seules valeurs possibles pour a et b sont

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

qui ne conviennent pas.

Substituons maintenant (4) dans (2). Il vient

$$ba^{n+2} = ba^{n+1} + ba^n.$$

Les valeurs $a = 0$ et $b = 0$ sont toutes deux exclues. Donc l'équation obtenue équivaut à

$$a^2 = a + 1,$$

ce qui laisse pour a les deux possibilités

$$a_* = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad a_{**} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \quad (5)$$

D'où deux solutions pour l'équation (2), à savoir ba_*^n et ba_{**}^n quel que soit b non nul. Encore faudrait-il qu'elles satisfassent aux conditions initiales (1), ce qui n'est pas le cas.

Que faire ? Nous avons deux solutions : essayons de les combiner pour satisfaire à (1). Le plus simple est d'essayer d'abord une combinaison linéaire, c'est-à-dire une expression du type

$$x_n = b_* a_*^n + b_{**} a_{**}^n \quad (6)$$

où b_* et b_{**} sont deux constantes à déterminer pour satisfaire à (1).

Vérifions d'abord que (6) est bien une solution de (2). Il vient

$$b_* a_*^{n+2} + b_{**} a_{**}^{n+2} = b_* a_*^{n+1} + b_{**} a_{**}^{n+1} + b_* a_*^n + b_{**} a_{**}^n,$$

ou encore

$$b_*(a_*^{n+2} - a_*^{n+1} - a_*^n) + b_{**}(a_{**}^{n+2} - a_{**}^{n+1} - a_{**}^n) = 0,$$

équation qui est évidemment vérifiée.

Reste à ajuster b_* et b_{**} par les deux conditions

$$b_* a_* + b_{**} a_{**} = 1$$

et

$$b_* a_*^2 + b_{**} a_{**}^2 = 1.$$

Si on se souvient des valeurs (5) de a_* et a_{**} , on résout ces équations, ce qui donne après calcul

$$b_* = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad b_{**} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Ainsi le terme général cherché s'écrit enfin

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Cet exemple introduit en fait à la résolution des équations aux différences finies linéaires. On trouvera ce type de questions plongé dans un contexte plus large dans [Vil95]. Il ouvre un champ d'application à l'algèbre linéaire.

7.4.5 Appliquer des règles automatiquement

Souvent la pensée ne peut se concentrer sur l'essentiel d'un problème que si l'accessoire peut être traité aveuglément. Les élèves, abordant au fil des années des problèmes de plus en plus difficiles, doivent pouvoir refouler vers la pensée automatique un nombre croissant de démarches auxiliaires.

Autant au dernier degré qu'aux deux premiers, la capacité de calculer correctement s'acquiert mieux lorsqu'on fait un nombre raisonnable de calculs dans des contextes significatifs, en payant chaque fois le prix de ses erreurs, que lorsqu'on accumule les exercices répétitifs en l'absence de contexte (et donc en se privant a priori d'une possibilité de retour au sens).

Par ailleurs et de plus en plus, les machines prennent avantageusement en charge les calculs tant soit peu compliqués.

L'Exemple 14 (problème des pierres transportées par un cantonnier, cf. n°7.3.4) illustre déjà ce principe au niveau d'une cinquième année d'études : en effet, comme nous l'avons noté, l'élève qui se souvient de la formule de somme d'une progression arithmétique dispose d'une méthode automatique de solution.

Exemple 8 (vers 16 ans)

Sur une calculatrice, on pousse successivement les touches 1, cos, cos, cos, ... Suivre les résultats de ces manoeuvres sur la Fig. 7 et calculer, avec une précision de l'ordre de 10^{-6} , la racine de l'équation $\cos x = x$.

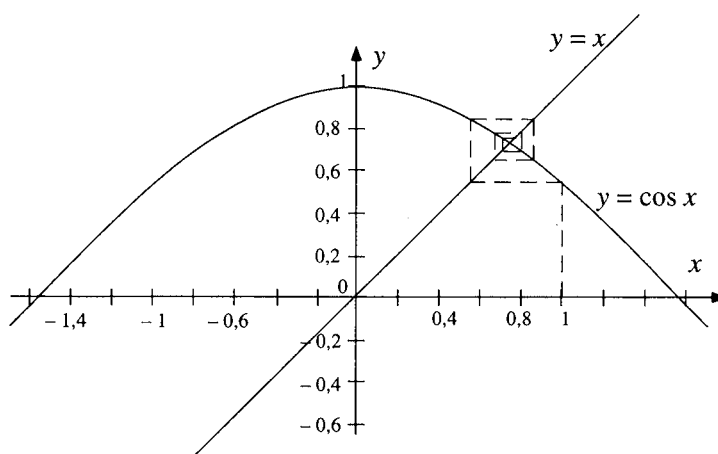


Fig. 7

Les manoeuvres de calcul suivies sur la Fig. 7 montrent que la suite des nombres affichés par la calculatrice tend vers la racine de l'équation $\cos x = x$. Les premiers nombres affichés sont :

1
 0,540302306
 0,857553216
 0,654289
 0,793480359
 0,701368774
 0,763959683
 0,722102425
 0,750417762
 0,731404042
 0,744237355
 0,73560474
 0,741425087
 0,737506891
 0,740147336
 0,738369204
 0,739567202
 0,73876032
 0,739303892
 0,738937757
 ...

à ce stade, $0,701 < x < 0,794$, $x \approx 0,7$

à ce stade, $0,731 < x < 0,745$

à ce stade, $0,7383 < x < 0,740$, $x \approx 0,73$

En 60 secondes, on obtient $x \approx 0,739085133$.

Cette méthode peut se généraliser. En effet, chaque fois qu'on doit résoudre une équation $f(x) = x$ avec une configuration locale comme celle de la Fig. 8, on pourra calculer successivement :

$$a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$$

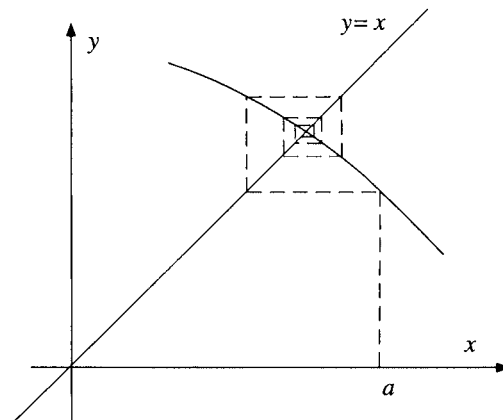


Fig. 8

On trouvera d'autres développements sur cette façon de résoudre des équations au n°9.4.3, Exemple 2.

7.4.6 Une première notion des structures algébriques

L'étude de l'algèbre débouche naturellement pour les élèves qui suivent le plus d'heures de mathématiques, sur une idée des structures algébriques et de leur usage.

La notion de groupe, appliquée à des contextes variés, y compris géométriques, est particulièrement importante.

Exemple 9 (vers 16 ans)

Décrire les isométries d'un cube dont un sommet a est fixe (Fig.9). Montrer qu'elles forment un groupe pour l'opération de composition. Ecrire la table de composition du groupe.

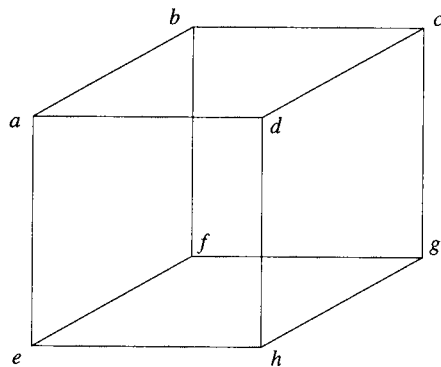


Fig 9

Les isométries cherchées sont

- la transformation identique 1_E de l'espace E ;
- les rotations r_1 et r_2 de $1/3$ et $2/3$ de tour autour de l'axe ag ;
- les symétries s_1, s_2, s_3 par rapport aux plans bissecteurs $abgh, acge$ et $adgf$.

La table de composition du groupe, partiellement remplie est

$\circ$	1_E	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
1_E	1_E	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	1_E	s_3		
r_2	r_2	1_E				
s_1	s_1					
s_2	s_2					
s_3	s_3					

Fig. 10

et vérifie que $\{1_E, r_1 \text{ et } r_2, s_1, s_2, s_3\}$ est un groupe pour la composition.

Remarque : pour faciliter le calcul des composées, on peut écrire

$$r'_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ a & d & h & e & b & c & g & f \end{pmatrix},$$

$$s'_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ a & b & f & e & d & c & g & h \end{pmatrix}$$

$$s'_1 \circ r'_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ a & b & f & e & d & c & g & h \end{pmatrix} = s'_3$$

r'_1 , s'_1 , s'_3 représentant les *restrictions* des transformations r_1 , s_1 , s_3 aux 8 sommets du cube.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Ce chapitre devrait avoir comme titre complet : Traitement des données, statistiques, combinatoire et probabilités. Nous l'avons abrégé par raison de commodité.

8.1 Vue d'ensemble

8.1.1 Statistiques et probabilités au niveau de base

On est parfois, dans le quotidien, au prise avec des données nombreuses qu'il faut tenter de saisir et d'interpréter. Parfois aussi, à partir d'un ensemble de données, on essaye d'estimer la chance de voir se réaliser tel ou tel événement. Les questions de ce type les plus simples et les réponses élémentaires qu'on leur donne constituent ce que nous appelons ici le traitement de données et les statistiques *au niveau de base*.

On rencontre d'ailleurs plus souvent dans la vie des données traitées que des données à traiter. Regardons néanmoins les manœuvres élémentaires de traitement et les questions qu'elles posent plutôt que les produits finis.

Ces manœuvres consistent, devant des données en désordre, à les classer selon des critères inspirés par les questions que l'on se pose (seules les données numériques peuvent être classées par tailles), à les compter, à les grouper, à calculer des pourcentages et des moyennes, à représenter les résultats graphiquement.

Voyons maintenant comment un relevé statistique peut conduire à des prévisions probables. Par exemple, on relève l'âge du décès d'un grand nombre de personnes dans un pays donné. Si on remarque que dans 50% des cas, le décès survient avant 68 ans, on dit que la probabilité pour un nouveau-né de vivre jusqu'à 68 ans est de $1/2$.

Dans certains jeux de hasard, on obtient des probabilités sans devoir faire de rele-

vé statistique des résultats. Il s'agit de jeux qui reposent sur la manipulation d'objets « symétriques » : pièce de monnaie, dé, jeu de cartes, ... La structure de l'objet permet de se faire à l'avance une idée des résultats d'une longue série d'expériences. Si on jette de nombreuses fois une pièce, on s'attend à obtenir pile *à peu près une fois sur deux*.

Une probabilité calculée à partir de la fréquence d'un événement dans un relevé statistique est appelée probabilité *a posteriori*. Une probabilité calculée en s'appuyant sur les symétries ou les conditions de régularité d'une expérience, est appelée probabilité *a priori*.

Ces deux types de probabilités obéissent à des règles de calcul identiques. C'est pourquoi les jeux de hasard, parce qu'ils sont aisément accessibles à l'imagination, sont souvent pris pour modèles dans l'étude des probabilités.

Mais qu'est-ce que cela veut dire que l'on a la même probabilité d'obtenir pile que face ? Cela signifie-t-il que si on a obtenu 10 fois pile, on ait plus d'une chance sur deux d'avoir face au onzième essai ? Quand peut-on dire que deux événements dépendent l'un de l'autre ? Si deux événements se suivent invariablement dans le même ordre, le premier est-il la cause de l'autre ? Quand peut-on dire que deux événements sont indépendants ? On le voit, les probabilités au niveau de base soulèvent pas mal de questions. Les réponses ne sont pas toujours évidentes : elles viendront progressivement au cours des études.

8.1.2 Construire les statistiques et les probabilités.

A l'école primaire, on apprend à classer des lots d'objets selon des critères variés : formes, couleurs, tailles, poids, etc. et on compte les objets classés. Au lieu de classer physiquement des objets, on peut aussi classer des mesures d'objets (longueurs, masses, durées, ...). Des enquêtes simples se prêtent au comptage des réponses. Chacune de ces activités conduit à des représentations graphiques, les plus faciles à comprendre étant figuratives.

De même, comme l'expérience dans d'autres pays tend à le prouver (cf. [Mor94], [Hil87]), des enfants peuvent lancer une pièce de monnaie, un dé, tirer des cartes d'un jeu et s'essayer à deviner les résultats. Ils peuvent compter les résultats, les représenter, améliorer leur façon d'anticiper les résultats. Ils peuvent expérimenter la régularité statistique en jouant de nombreuses parties. On peut argumenter avec eux

les notions de symétrie et d'équiprobabilité pour une pièce de monnaie, un dé. Par ailleurs, les objets asymétriques (un dé pipé, une punaise) leur apprendront à estimer la probabilité par de longues séries statistiques de lancers. Ils expérimenteront qu'une probabilité déterminée statistiquement ne permet nullement de prévoir le résultat d'une épreuve, mais qu'elle permet, avec un bon degré de confiance, de prévoir le résultat d'*une longue série d'épreuves à venir*.

Au premier degré du secondaire, les élèves peuvent classer et représenter des données plus nombreuses : il ne manque pas de questions intéressantes, touchant la vie quotidienne ou sociale, susceptibles de motiver la récolte et le traitement de données. Les valeurs centrales (moyenne, médiane, mode) peuvent être étudiées à cet âge. Elles ne sont pas équivalentes et l'on apprend à choisir celle qui convient à un type de distribution déterminé : par exemple la médiane est mieux adaptée que la moyenne aux distributions fortement asymétriques. Il en va de même des indices de dispersion.

Divers types de représentation graphique, figuratifs ou non, correspondent aux sujets traités et au message que l'on veut transmettre. Les élèves peuvent apprendre à choisir parmi plusieurs représentations possibles et à les réaliser.

Le traitement de données répond également à des questions relatives aux cours de sciences, d'étude du milieu, de géographie, d'histoire, ... Cette matière se prête donc particulièrement à une approche interdisciplinaire.

Dans l'étude des jeux de hasard, on peut envisager des événements un peu plus compliqués que ceux abordés dans le primaire, et utiliser des diagrammes en arbre pour évaluer les nombres de cas possibles et favorables. De même on poussera un peu plus loin l'étude de la combinatoire. Les probabilités sont un terrain d'application pour les fractions.

Au cours des deux derniers degrés du secondaire, on continuera à répondre par la récolte et le traitement de données à des questions de portée sociale. On achèvera l'étude de la statistique descriptive, sans oublier de développer l'esprit critique des élèves vis-à-vis des usages trompeurs des statistiques.

Parmi les matières qu'il semble raisonnable d'étudier, citons :

- les lois classiques des probabilités totales et probabilités composées, ainsi que les probabilités conditionnelles ;
- un approfondissement de la loi des grands nombres, même si cette étude demeu-

re qualitative ; il faut signaler à ce propos le grand intérêt des simulations d'événements aléatoires par un ordinateur ; celui-ci est en effet capable, en peu de temps, de «jouer» une longue suite de parties, et même un grand nombre de longues suites de parties ;

- une idée de l'échantillonnage et de la statistique inférentielle, même si ici aussi cette étude demeure qualitative (voir se resserrer les fréquences au fur et à mesure que l'on multiplie le nombre des épreuves, ou la taille des échantillons) ;

- la notion de corrélation et l'ajustement d'une droite ou d'une courbe à des données expérimentales (sans oublier de discuter la confusion commune entre corrélation et causalité) ;

- la distribution normale, les circonstances où on peut s'attendre à la voir apparaître, l'usage que l'on peut en faire ;

- pour certains élèves, une étude axiomatique des probabilités, en se bornant à l'axiomatique élémentaire (par opposition à celle de Kolmogorov) tant que l'on traite des cas discrets.

Cette dernière réserve est justifiée par l'observation suivante : il faut s'être heurté aux difficultés que provoquent les probabilités continues pour comprendre les raisons qui justifient l'axiomatique de Kolmogorov. A défaut, celle-ci apparaît comme bien arbitraire.

Certaines applications de la statistique ont une importance telle pour les citoyens qu'elles nous semblent devoir être apprises et discutées dans le secondaire, fut-ce au niveau des principes et sans qu'on y passe un temps exagéré : ce sont les assurances, les sondages et les diverses formes de loteries organisées par l'Etat.

8.1.3 Les statistiques et probabilités approfondies

Dans l'enseignement supérieur, presque toutes les disciplines utilisent les statistiques, dont l'étude est par conséquent imposée à la majorité des étudiants. Mais l'essentiel à ce niveau est de comprendre un certain nombre de procédures dont le fondement mathématique est établi par des spécialistes, de savoir choisir parmi les procédures celles qui sont appropriées au traitement des données dont on doit s'occuper, et enfin de savoir appliquer ces procédures.

Du côté mathématique des choses, les probabilités sont d'abord une théorie axiomatique applicable à des ensembles finis ou infinis d'événements élémentaires. Cette

théorie est grande consommatrice de théorie de la mesure et de l'intégration. Les théorèmes principaux dont elle s'occupe sont la loi des grands nombres et le théorème central limite. Les probabilités sont ensuite appliquées à la justification mathématique des procédures utilisées dans ce qu'on appelle la statistique inférentielle. Voici pour l'essentiel ce dont il s'agit. La statistique *descriptive* apprend à présenter des données de façon suggestive pour en faciliter la communication et l'analyse. La statistique *inférentielle* apprend à répondre à des questions dont voici un exemple typique (il s'agit d'un problème d'*estimation* d'une valeur moyenne) : on prend un échantillon d'une certaine population et on mesure une même caractéristique de chacun des individus de la population. On calcule la valeur moyenne (ou un autre paramètre) de cet ensemble de mesures. Quelle est la probabilité que cette moyenne tombe dans un intervalle donné autour de la moyenne correspondante pour toute la population ? Un tel intervalle est appelé *intervalle de confiance*. On pose aussi la question dans l'autre sens : une probabilité étant fixée *a priori*, par exemple 95%, quel est l'intervalle à considérer pour que la moyenne de l'échantillon ait la probabilité de s'y trouver ?

Un tel problème d'estimation est lié à des *tests d'hypothèses*. L'hypothèse testée dans le problème ci-dessus est que la moyenne de la population totale se situe entre telle et telle valeur. Mais on peut vouloir tester bien d'autres hypothèses, comme par exemple que la variance de la population est comprise entre telle et telle valeur ; ou encore que la distribution de la population dans son ensemble est une distribution normale ou que la moyenne de telle population est plus grande ou plus petite que la moyenne de telle autre ou d'autres encore. Dans chaque cas, on élabore et démontre des méthodes qui permettent de dire que la probabilité de vérité de l'hypothèse vaut autant. On voit par là que la statistique est orientée vers la prise de décision, ou plus précisément vers l'estimation des risques que l'on prend en décidant telle chose ou son contraire.

Par ailleurs, la théorie des probabilités s'est développée au 20^e siècle dans diverses directions spécialisées telles que, parmi d'autres, la théorie des jeux, la théorie de l'information, la théorie des files d'attente, la théorie des fonctions aléatoires, l'étude des suites d'événements déterminés par le hasard (chaque événement dépendant ou non d'un certain nombre de ceux qui l'ont précédé), etc.

8.1.4 Les statistiques et probabilités comme forme de pensée

Les grands rassemblements de données apparaissent décourageants à beaucoup de gens, surtout s'il s'agit de données chiffrées. Les nombres sont déjà dissuasifs par eux-mêmes, ils le sont donc davantage quand il y en a beaucoup. C'est relever un défi que de soumettre un grand nombre de données à des rangements et des calculs pour les obliger à révéler leur message.

Les mathématiques construisent des déductions certaines et les sciences expérimentales établissent les lois déterministes de la nature. Les premières et les secondes produisent des énoncés réputés vrais. Elles réduisent dans notre univers la part du doute et de l'opinion. Le paradoxe des probabilités, c'est qu'elles proposent des raisonnements et des énoncés certains à propos de ce qui est incertain. La difficulté tourne autour de la loi des grands nombres ; la fréquence d'apparition d'un événement, lorsque l'on répète de nombreuses fois une expérience, s'approche d'autant plus d'une valeur déterminée que le nombre des expériences est plus élevé. Ce nombre est une *mesure* de la probabilité de l'événement. Cette observation a deux conséquences : la première est que lorsqu'on a mesuré la probabilité grâce à une première suite d'expériences suffisamment nombreuses, on peut prévoir avec très peu de chance d'erreur importante la fréquence d'apparition de l'événement lors de nouvelles suites longues d'expériences ; la deuxième est que, si l'on veut parier sur l'issue d'une seule expérience, ou d'un petit nombre d'expériences, et si la probabilité mesurée est suffisamment différente de $1/2$, on dispose d'un argument raisonnable pour parier sur la réalisation ou non de l'événement.

Les statistiques et probabilités sont des aides à la décision. Toutefois – et ceci découle de ce qui nous venons de voir – l'aide qu'apporte la connaissance d'une probabilité est d'un ordre différent selon que la décision porte sur un grand nombre de cas ou sur un petit. Qui plus est, dans certaines circonstances, l'argumentation dans l'incertain est moralement inacceptable. C'est ce qui se produit le plus souvent lorsque le destin d'êtres humains est en cause et qu'il faut par conséquent plutôt s'efforcer de changer les circonstances que d'en supputer les effets.

Lorsque le cours de choses est assuré, il n'y a qu'à se soumettre. Mais l'avenir incertain provoque l'espoir ou la crainte, qui font mauvais ménage avec la raison. C'est sans doute pourquoi beaucoup de gens s'accrochent à des raisonnements faux. Par exemple, si un chiffre est sorti quelques fois de suite à la loterie, certains parient sur lui, alors que chaque tirage est indépendant des précédents ; d'autres concluent à

l'opposé, estimant que puisqu'une longue suite de résultats identiques est peu probable, le chiffre en question a moins de chance de revenir (alors que le tirage se fait toujours dans les mêmes conditions).

8.1.5 Les applications des statistiques et probabilités

La théorie des probabilités explique les jeux de pur hasard en utilisant des raisonnements combinatoires pour calculer les nombres de «cas possibles» et de cas «favorables». Certains de ces jeux, tels que le Lotto et le Joker, ont une importance sociale considérable.

Les assurances sont un autre domaine d'application important, car il touche la totalité des citoyens et presque tous les aspects de leur existence.

Les sondages sont utilisés en politique, en publicité et dans l'étude des marchés.

L'économie et la sociologie, dans la mesure où elles étudient des phénomènes de masse sujets à fluctuation, s'appuient sur les statistiques.

La biologie et la médecine étudient des phénomènes dont les causes sont multiples et ne peuvent le plus souvent pas être isolées les unes des autres : de ce fait, elles expriment leurs résultats par des relevés statistiques et estiment les relations de cause à effet par des corrélations de données.

La recherche opérationnelle a pour but d'établir l'organisation la plus rationnelle et la plus économique d'un ensemble de réponses techniques à des demandes fluctuantes. Par exemple, comment planifier un central téléphonique pour qu'il coûte le moins cher possible tout en n'imposant aux usagers qu'un minimum de temps d'attente ? Ou encore, comment organiser les guichets d'une administration publique pour minimiser les files d'attente ?

La théorie de l'information, née au milieu du siècle, propose une mesure de l'information telle que la quantité d'information d'un message soit d'autant plus grande que sa probabilité est petite (si on m'annonce que le soleil se lèvera demain, je n'apprends pas grand chose, mais j'apprends beaucoup si on me dit qu'une éclipse totale de soleil sera visible demain de chez moi). La théorie de l'information permet une conception efficace des grands canaux de communication (les «autoroutes de l'information»).

Toute mesure, dans quelque domaine scientifique que ce soit, est entachée d'erreur. Celles qu'on appelle systématiques proviennent de défauts des instruments de mesure auxquels on peut remédier. Les autres erreurs sont aléatoires. La théorie des

erreurs de mesure apprend à calculer la valeur la plus probable d'une grandeur mesurée plusieurs fois.

La physique, comme toutes les autres sciences, utilise la théorie des erreurs de mesure. Mais elle entretient avec la théorie des probabilités une relation de loin plus fondamentale. D'abord la théorie cinétique des gaz, due à Maxwell et Boltzmann au siècle dernier, établit déductivement les propriétés des gaz parfaits en supposant ceux-ci constitués de molécules animées d'un mouvement purement aléatoire : de petites boules élastiques qui s'agitent dans le plus parfait désordre. De ce désordre maximal, naissent, à travers la loi des grands nombres, les comportements tout à fait réguliers des gaz considérés à l'échelle macroscopique. Lorsqu'on évoque ici la loi des grands nombres, il s'agit de nombres défiant l'imagination. Ensuite, la physique des particules, née dans le premier quart du 20^e siècle, s'appuie dès le départ sur une conception probabiliste des positions et vitesses des particules : cette physique, aussi paradoxal que cela puisse paraître, est indéterministe. Une particule s'identifie à une «onde de probabilité» : tel ou tel événement attribuable à la particule peut se produire en tel ou tel lieu avec telle ou telle probabilité. La théorie des probabilités est un outil de base d'élaboration de la physique d'aujourd'hui.

8.1.6 Les statistiques et probabilités dans l'histoire, la philosophie, la culture

Parce qu'elle s'oppose à l'idée du déterminisme, la notion de probabilité pose plus de problèmes philosophiques que beaucoup d'autres. Ceci explique la longueur quelque peu inhabituelle de la présente sous-section.

La naissance du calcul des probabilités remonte à la résolution par Pascal et Fermat, au milieu du 17^e siècle, du problème des «partis», c'est-à-dire des partages. Voici ce dont il s'agit. Deux joueurs jouent plusieurs parties successives d'un jeu de hasard qu'il n'y a pas lieu de préciser. La règle est que celui qui totalise le premier un nombre donné de parties empoche la mise totale. Comment répartir équitablement la mise lorsque les deux joueurs se quittent avant que l'un d'eux ait gagné le nombre requis de parties ? Comme le remarquent E. Barbin et J.-P. Cléro [Dho87], «il s'agit peut-être autant d'un problème juridique de partage que d'un problème touchant aux jeux de hasard». Nous n'exposerons pas ici la solution du problème. Observons simplement que les probabilités utilisées par Pascal et Fermat sont du type dit *a priori* : elles ne sont pas estimées expérimentalement au terme d'une longue suite

d'épreuves, mais au contraire déduites des conditions de symétrie du jeu (comme lorsqu'on dit qu'une pièce de monnaie a une chance sur deux de tomber pile).

Frappé par la possibilité de soumettre l'incertain au raisonnement, Pascal¹ écrit, parlant de la théorie des probabilités : «Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du sort, et conciliant ces deux choses en apparence contradictoires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : 'La géométrie du hasard'».

Les probabilités *a priori* ne s'appliquent, nous venons de le voir, qu'aux expériences obéissant à des symétries visibles. Le hasard intervient pourtant dans bien des circonstances où de telles symétries n'existent pas. Le bon sens indique alors qu'un événement arrivé un grand nombre de fois dans des conditions déterminées a des chances de se reproduire si ces conditions sont réalisées à nouveau. On conçoit donc la possibilité d'estimer une probabilité *a posteriori*, par l'observation d'un grand nombre de cas.

C'est bien ce qui a été fait dès le 17^e siècle, et même auparavant [Dho87], pour traiter des problèmes d'assurance maritime, des calculs de rentes viagères (dépendant de l'espérance de vie du prêteur), etc ...

Christiaan Huygens définit l'espérance mathématique dès 1657, et calcule une espérance de vie d'après des tables de mortalité d'une paroisse anglaise, en 1669.

Jakob Bernoulli établit en 1713 la loi des grands nombres, qui fonde mathématiquement la notion de probabilité *a posteriori*.

A la fin du 18^e siècle, Condorcet fait le projet d'une *mathématique sociale*, qui étend l'application du calcul des probabilités à toutes sortes de questions nouvelles, y compris l'appréciation des décisions rendues à la majorité par des assemblées. Partageant l'optimisme du siècle des lumières, il écrit ([Con74], p.197) : «Cette exposition montrera toute l'utilité de cette science ; on verra qu'aucun de nos intérêts individuels ou publics ne lui est étranger, qu'il n'en est aucun sur lequel elle ne nous donne des idées plus précises, des connaissances plus certaines ; on verra combien, si cette science était plus répandue, plus cultivée, elle contribuerait et au bonheur et au perfectionnement de l'espèce humaine.»

Dans la lignée de Condorcet, A. Quételet au 19^e siècle développe ce qu'il appelle une *physique sociale*. Il étudie les lois de la natalité, de la croissance physique de l'homme, du développement de ses facultés physiques et intellectuelles, de la mortalité.

¹ Cf. [Pas63] p. 102. Notons qu'au temps de Pascal, *géométrie* est synonyme de *mathématiques*.

Pour Laplace (fin du 18^e et début du 19^e siècle), «presque toutes nos connaissances ne sont que probables», mais s'il en est ainsi, c'est à cause de notre ignorance. Rappelons le passage célèbre où il affirme le déterminisme absolu de l'univers : «Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.»

Sans sortir du cadre du déterminisme, Poincaré à la fin du 19^e siècle éclaire les causes d'apparition des phénomènes qui semblent relever du hasard. Selon le déterminisme, l'évolution d'un système donné est entièrement déterminée par l'état de ce système au départ, ou, comme on dit aussi, par ses conditions initiales. Mais il existe des systèmes très sensibles aux variations de ces conditions : un changement minime au départ provoque des changements considérables après un certain temps, au point que le système évolue vers ce que l'on appelle aujourd'hui un comportement chaotique. Un tel comportement relève du calcul des probabilités, en dépit de son origine déterministe.

La position de la majorité des physiciens d'aujourd'hui est antidéterministe. Pour eux, le comportement des particules élémentaires relève fondamentalement du hasard, et il n'y a pas lieu d'expliquer celui-ci comme un avatar particulier d'un comportement déterministe.

Vers la fin du 19^e siècle, le calcul des probabilités s'est heurté à des paradoxes qui apparaissent dans les cas où on examine une infinité d'événements possibles. On trouvera certains de ces paradoxes dans [Dho87] p.231. L'exemple de la section 8.4.5 donne une idée des difficultés qui ont conduit Kolmogorov [Kol56] en 1933, à élaborer une théorie axiomatique des probabilités, fondée sur l'idée de mesure.

Par ailleurs, l'émergence d'une théorie *axiomatique* des probabilités a permis de jeter un regard nouveau sur la notion même de probabilité *a posteriori*. Dans une vue première des choses, on dit, concernant la répétition d'une même expérience : le rapport du nombre d'occurrences d'un événement donné au nombre total des expériences «s'approche» d'un nombre donné, qu'on appellera *probabilité* de l'événement.

ment. Mais il est difficile, sinon impossible, d'expliquer ce que l'on entend par «s'approche» sans parler déjà de probabilité, c'est-à-dire sans tomber dans un cercle vicieux. En effet, «s'approche» veut dire que la fréquence de l'événement mesurée après n expériences a d'autant plus de *chance* de se resserrer dans un intervalle donné que le nombre n est plus grand.

L'intervention d'une théorie axiomatique des probabilités a pour effet de couper ce cercle vicieux en rendant la définition du terme *probabilité* indépendante de toute spéculation empirique sur de longues suites d'expériences. La théorie axiomatique clarifie entièrement la structure logique des probabilités. Elle laisse alors à la pensée philosophique autant que pratique, le soin de discuter de la relation de la théorie à la réalité.

On le voit, l'enjeu philosophique de la théorie des probabilités est considérable : il est de construire un intermédiaire sérieux entre le vrai et le faux. Comme l'a dit Leibniz : «L'opinion, fondée dans le vraisemblable, mérite peut-être aussi le nom de connaissance».

8.2 Le traitement de données dans l'enseignement fondamental

8.2.1 Compter et dénombrer, rassembler, classer et présenter des objets, des réponses, des nombres, toujours pour répondre à des questions

Dès l'école maternelle, les enfants classent des objets. On peut trouver, au cours de l'école primaire, bien des occasions de leur faire mener une petite enquête, une suite de mesures, ... puis de leur en faire discuter et présenter les résultats. Ils s'habitueront petit à petit à traiter des données assez nombreuses, à la mesure de leur âge.

Exemple 1 (vers 6-7 ans)

Au cours d'un atelier, les enfants fabriquent des marionnettes de guignol. Ce sont des marionnettes dans lesquelles on glisse une main pour les animer. Les enfants disposent de différents matériaux qu'ils décorent et assemblent librement.

Il y a des têtes en papier mâché, en mousse et en chiffons ; des poches (dans lesquelles on glisse la main) en tissus jaune, vert, rouge et bleu ; des chapeaux en carton et en plastique.

Combien a-t-on fabriqué de marionnettes différentes dans la classe (du point de vue des matériaux utilisés) ?

Combien y en a-t-il qui ont une tête en mousse ?

Peut-on fabriquer une marionnette qui a une tête en mousse et qui est différente de celles qu'on a faites en classe ?

Combien de marionnettes différentes avec une tête en mousse pourrait-on fabriquer ?

Combien de marionnettes différentes pourrait-on fabriquer ?

En même temps qu'on examine chaque marionnette, on élabore un tableau (Tabl. 1) qui peut recourir à des niveaux de symbolisation différents : collage des matériaux eux-mêmes, gommettes, dessins, ...

n° marionnette	tête	corps	chapeau
1	mousse	jaune	carton
2	papier	bleu	plastique
3	mousse	vert	plastique
4	chiffon	rouge	carton
...			

Tabl. 1

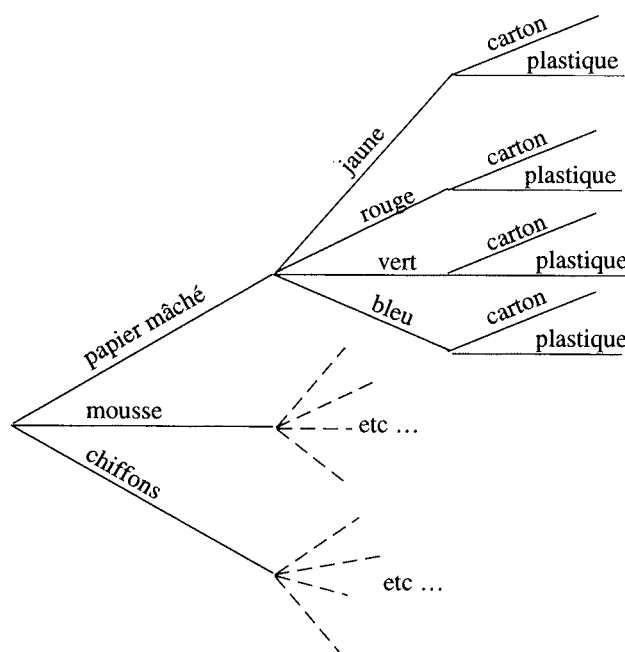


Fig. 1

Les réponses aux questions peuvent conduire à modifier le tableau de manière à regrouper toutes les marionnettes qui ont la tête en mousse, puis toutes celles qui ont la tête en papier, puis en chiffon, etc. L'ultime étape est un diagramme en arbre, ébauché dans la Fig. 1, qui fournit la réponse à la dernière question.

Cette situation amène une image mentale de la multiplication (et, en l'occurrence, de la structure du nombre 24).

Plus généralement, toutes les situations de dénombrement peuvent être traitées dans la double optique de donner du sens aux opérations et d'initier à l'un ou l'autre aspect de la pensée combinatoire. Citons-en quelques-uns :

- Dans la classe, on dispose de trois emplacements pour la cage du hamster, l'étagère bibliothèque et l'armoire. Quelles sont toutes les possibilités de placer ces trois meubles dans ces trois emplacements ?
- On dispose de timbres de 3F et de 2F. Quelles sont toutes les façons d'affranchir un colis de 15F ?
- Dans le système décimal de numération, combien existe-t-il de nombres de trois chiffres (un chiffre peut apparaître plusieurs fois) ?

Exemple 2 (vers 8-9 ans)

On demande aux enfants d'observer les voitures qui passent dans une rue et de noter le nombre d'occupants de chaque voiture. On leur demande de présenter et commenter les données recueillies de la manière la plus claire possible.

Ils proposeront sans doute des solutions originales, que l'on pourra confronter avec les présentations classiques : tableau et diagramme de répétitions, calcul des fréquences sous forme de fractions du total ou de pourcentages, valeur centrale. L'occasion sera sans doute rencontrée d'observer le mauvais taux d'occupation des voitures.

8.2.2 Une première idée de la régularité statistique ; des obstacles dans l'acquisition de la notion d'équiprobabilité

Le lien entre les symétries des objets (dés, pièces de monnaie, ...) et les résultats de longues suites d'épreuves mérite une grande attention ; de même que les probabilités non liées à des objets symétriques.

Le mot «chance» chez les enfants ne recouvre pas le sens que les mathématiciens lui donnent en probabilités. Beaucoup de paradoxes et de préjugés doivent être levés avant que soit acquise la notion d'événements équiprobables. Beaucoup d'enfants sont persuadés qu'ils ont un nombre «fétiche» qui sortira plus facilement que les autres lors d'un lancer de dés. De même si les trois premiers lancers d'une pièce de monnaie ont comme résultat Pile, Pile, Pile, il sera très difficile de persuader les élèves que la probabilité de l'événement Pile reste de $1/2$.

La notion d'équiprobabilité se fonde non seulement sur les symétries des objets manipulés (pièces de monnaie, dés, ...) mais aussi sur la régularité statistique observée lors de longues suites d'épreuves. On peut sans peine organiser de nombreuses épreuves dans une classe : il suffit de confier un nombre raisonnable d'épreuves à chaque élève.

Dans cette perspective statistique, il est bon d'étudier aussi des événements non équiprobables, par exemple en utilisant une punaise au lieu d'une pièce de monnaie ou encore à partir de jeux de hasard que l'on introduit de façon à attirer l'attention

des enfants sur les « chances » de gagner.

Les courses et les jeux de hasard sont excitants parce qu'on ne sait pas d'avance qui va gagner. Cependant dans certaines situations, on dit que la « chance » de gagner est la même pour tous, ou encore que l'un a plus de chance que l'autre de gagner. On arrive même parfois à « chiffrer » cette chance. Ce sont ces nombres que l'on appelle « probabilités ». Après avoir travaillé à partir de jeux tels que celui montré ci-dessous, on réalise mieux ce que peut signifier un nombre qui représente une « chance ».

Exemple 3 (vers 10-11 ans)

Le jeu du lièvre et de la tortue se joue avec un dé et en groupe. Au sein du groupe on répartit les rôles : jeter le dé, avancer les pions, compléter les diagrammes,... La règle du jeu est la suivante :

Si le 6 sort, le lièvre gagne ; si c'est un autre nombre, la tortue avance d'une case (voir Fig. 2).

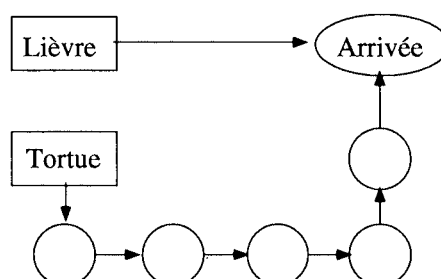


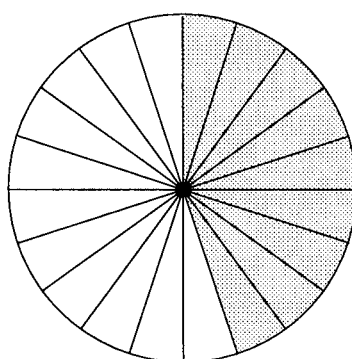
Fig. 2

Avant de jouer, essayer de prévoir qui, du lièvre ou de la tortue, a le plus de chances de gagner.

Chaque groupe joue vingt parties et dresse un tableau ou un diagramme (comme ceux des Tabl. 2 et Fig. 3)

gagnant	relevé	répétition
lièvre	I	11
tortue		9

Tabl. 2



disque partagé en 20;
colorier un secteur chaque fois
que la tortue gagne.

Fig. 3

Qui gagne le plus souvent ? Les prévisions sont-elles vérifiées ?

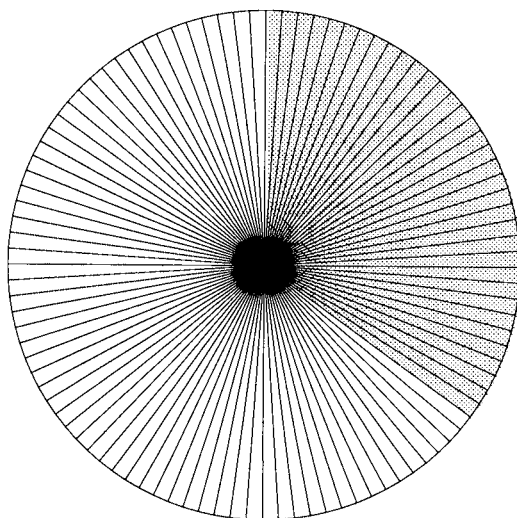
Le professeur rassemble les résultats de cinq équipes et fait compléter un nouveau tableau (Tabl. 3) et un nouveau diagramme circulaire (Fig. 4).

Comment peut-on « chiffrer » les chances de gagner de la tortue ?

Le Tabl. 3 et la Fig. 4 montrent un exemple de résultats possibles.

gagnant	répétitions					
	1	2	3	4	5	totaux
lièvre	14	15	15	9	12	65
tortue	6	5	5	11	8	35

Tabl. 3



disque partagé en 100

Fig. 4

On voit que le lièvre a plus de chances de gagner que la tortue et que cette chance est à peu près de 65%. Cet «à peu près» sera précisé si on fait plus de parties. Ajoutons (pour l'enseignant) que cette probabilité est de 66,5...%. En effet, à chaque jet du dé, la probabilité que la tortue avance d'une case est 5/6. Elle doit avancer six fois pour gagner. Sa probabilité de gain est donc

$$\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

et par conséquent celle du lièvre est de

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,665...$$

8.3 Le traitement de données aux premier et deuxième degrés du secondaire

8.3.1 Pour répondre à des questions : rassembler, classer, élaborer et présenter des données, des nombres

Au début du secondaire, les élèves peuvent s'habituer à rassembler et traiter des données plus nombreuses que dans le primaire, à les traiter plus à fond en calculant des valeurs centrales et des indices de dispersion, et à les présenter de manière plus variée, en discutant des avantages et inconvénients de chaque type de diagramme. Des problèmes de dénombrement plus complexes peuvent initier progressivement à la pensée combinatoire.

Exemple 1 (vers 13-14 ans)

Quand n personnes se rencontrent et se disent bonjour en se serrant la main, combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

Un menu propose n entrées différentes, m sortes de plats et p desserts. Combien de repas différents peut-on commander ?

Avec n points disposés sur un cercle, combien peut-on former de triangles ?

Combien peut-on tracer de diagonales dans un polygone convexe de n côtés ?

Pour répondre à de telles questions, les élèves procèdent à des calculs pour des valeurs particulières des variables, observent ce qui relie une étape à une autre, font des schémas, des diagrammes, ... puis généralisent. Ces situations conduisent à élaborer une formule. Elles contribuent à faire franchir le degré d'abstraction correspondant au début de l'enseignement de l'algèbre.

Exemple 2 (vers 15 ans)

Une école veut installer un système de ramassage des élèves.

Les distances du domicile à l'école pour l'ensemble des élèves qui habitent à plus d'un kilomètre de l'école sont donnés par le Tabl. 1 (voir page suivante).

Dans quel rayon autour de l'école devraient se déplacer les bus pour toucher au moins 50 % de la population des élèves ?

Comparer cette distance au mode du tableau et à la moyenne.

Il y a au total 105 élèves. La «moitié» des élèves (50%), c'est 53 élèves (pas 52,5). Or dans les trois premières classes de distances (qui vont de 1 à 7 km), il y a 55 élèves. Les bus devront donc travailler dans un rayon de 7 km. La classe de distances contenant le plus d'élèves est celle qui va de 7 à 9 km. La moyenne des distances est donnée par

$$\frac{1}{105}(2 \times 18 + 4 \times 13 + 6 \times 24 + 8 \times 25 + 10 \times 3 + 12 \times 5 + 14 \times 2 + 16 \times 2 + 18 \times 1 + 22 \times 2 + 24 \times 1 + 30 \times 1 + 32 \times 2 + 38 \times 2 + 40 \times 2 + 44 \times 2) \cong 10,4 \text{ km.}$$

Distance en km		nombre d'élèves
>	< ou =	
1	3	18
3	5	13
5	7	24
7	9	25
9	11	3
11	13	5
13	15	2
15	17	2
17	19	1
19	21	0
21	23	2
23	25	1
25	27	0
27	29	0
29	31	1
31	33	2
33	35	0
35	37	0
37	39	2
39	41	2
41	43	0
43	45	2

Tabl. 1

Aucune de ces valeurs (7 à 9 km et 10,4 km) ne correspond à la distance de ramassage.

8.3.2 Faire une place aux questions de portée pratique ou sociale

Dès le premier degré du secondaire, le traitement de données, les statistiques et probabilités peuvent répondre à l'une de leurs destinations principales, qui est d'éclairer des questions de portée pratique ou sociale.

Exemple 3 (vers 12 ans)

On sait qu'il est nécessaire pour la santé de boire suffisamment, mais qu'il faut éviter l'excès de café et de boissons trop sucrées telles que les limonades et les cocas. Chaque élève relève quotidiennement la quantité de boisson qu'il consomme durant une semaine dans chacune des catégories :

- lait et eau
- limonades
- café et thé.

A partir de là, on fait une étude statistique pour l'ensemble de la classe.

Le traitement d'un tel sujet permet de faire le tour de la plupart des notions de statistique descriptive :

- organiser un relevé de données,
- créer des intervalles sur une variable continue,
- représenter les données par des diagrammes en bâtons (relatifs aux répétitions, aux

fréquences), par des diagrammes circulaires,

- s'intéresser aux valeurs centrales et les interpréter,
- calculer des indices de dispersion tels que l'étendue du tableau, l'intervalle inter-quartiles,...

Après cette étude (et non avant !) on consultera un manuel de diététique.

Exemple 4 (vers 15 ans)

Le *Tabl. 2* (page suivante) est intitulé «Répartition par fractions interdéciles du revenu total net imposable, de l'impôt total et analyse des composantes du revenu imposable globalement». Il est extrait de la revue *Statistiques financières*, n°64, 1994. Ce numéro de la revue porte un titre particulier : «Statistique fiscale des revenus soumis à l'impôt des personnes physiques, Exercice 1993, Revenus de 1992».

Déciles et pourcentiles	Limite supérieure	Revenu total net imposable		Impôt total		Montant moyen par déclarant		
		Montant absolu (1000F)	En % du total	Montant absolu (1000F)	En % du total	Revenus (a) (1000F)	Impôt (b) (1000F)	Rapport (b/a)
DECILES	1	2	3	4	5	6	7	8
1	287 386	67 649 262	2,0	1 328 936	0,2	165,5	3,3	2,0
2	409 226	145 940 033	4,3	8 114 700	1,0	357,0	19,9	5,6
3	491 581	184 026 051	5,4	17 688 764	2,1	450,2	43,3	9,6
4	577 147	218 138 972	6,4	28 888 313	3,5	533,6	70,7	13,2
5	671 967	254 884 068	7,5	42 858 448	5,2	623,5	104,8	16,8
6	789 487	297 500 122	8,7	58 350 527	7,1	727,8	142,7	19,6
7	946 281	353 270 735	10,3	79 993 970	9,7	864,2	195,7	22,6
8	1 157 577	427 611 072	12,5	108 437 682	13,1	1 046,1	265,3	25,4
9	1 512 766	536 795 221	15,7	154 485 758	18,7	1 313,2	377,9	28,8
10	-	933 768 554	27,3	327 301 210	39,6	2 284,3	800,7	35,1
POURCENTILES								
91	1 568 981	62 966 331	1,8	19 603 401	2,4	1 540,3	479,6	31,1
92	1 632 160	65 407 147	1,9	20 738 983	2,5	1 600,1	507,3	31,7
93	1 705 295	68 172 713	2,0	21 997 213	2,7	1 667,7	538,1	32,3
94	1 791 109	71 410 204	2,1	23 508 801	2,8	1 746,9	575,1	32,9
95	1 894 298	75 262 084	2,2	25 266 439	3,1	1 841,1	618,1	33,6
96	2 023 712	79 955 657	2,3	27 537 230	3,3	1 956,0	673,6	34,4
97	2 203 939	86 181 298	2,5	30 528 957	3,7	2 108,2	746,8	35,4
98	2 490 312	95 407 067	2,8	34 974 330	4,2	2 233,9	855,6	36,7
99	3 118 141	112 353 224	3,3	43 125 534	5,2	2 748,5	1 055,0	38,4
100	-	216 652 829	6,3	80 020 322	9,7	5 299,9	1 957,5	36,9
TOTAL		3 419 584 091,0	100,0	827 448 308,0	100,0	836,5	202,4	24,2

Tabl. 2

On propose de déchiffrer ce tableau, puis d'élaborer des questions et des réponses relatives à la répartition des revenus et des impôts en Belgique.

Voici quelques exemples de questions et réponses :

- Comment concevoir un diagramme qui montre d'un coup d'oeil la répartition des revenus imposables ?

On peut, par exemple, sur une base de 10 unité, faire correspondre 10% des déclarations à chaque unité et porter en ordonnée le revenu déclaré total de chaque tranche de 10% (Fig. 1).

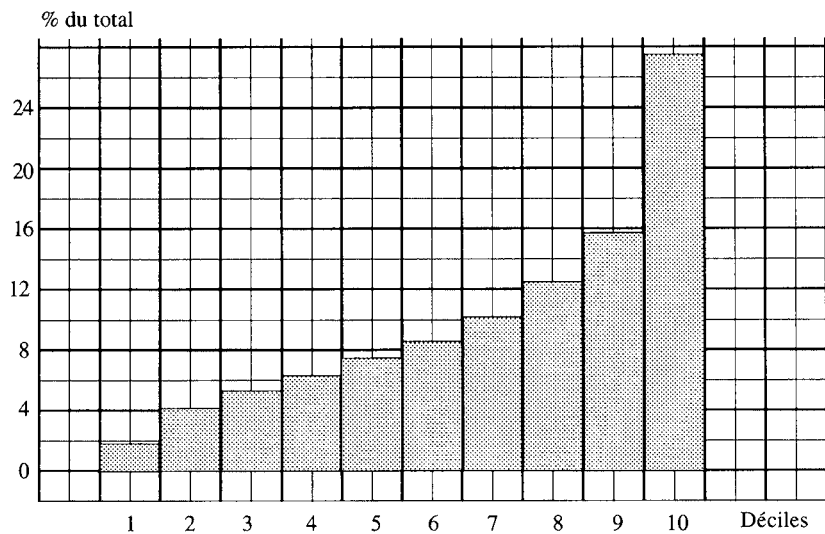


Fig. 1

- 50% de la population déclare moins que ...?

10% de la population déclare plus que ...?

1% de la population déclare plus que ...?

Les réponses se lisent directement sur le *Tabl. 2* :

50% de la population déclare moins que 671 967 F ;

10% de la population déclare plus que 1 512 766 F ;

1% de la population déclare plus que 3 118 141.

- Quel est le montant total, effectif et en %, que se partagent les 50% des déclarants les plus modestes ? Et les 10% des déclarants les plus favorisés ?

Les 50% des déclarants les plus modestes se partagent des revenus fiscaux égaux à 870 638 386 millions, soit 25,6% du total des revenus déclarés.

Les 10% des déclarants les plus favorisés se partagent un revenu fiscal de 933 768 554 millions soit 27,3%.

Le dernier 1% des déclarants les plus favorisés se partagent un revenu fiscal de 216 652 829 millions soit 6,3 %.

Il ne faut pas confondre ces montants avec des revenus réels, car ils ne tiennent (évidemment) pas compte de la fraude fiscale.

8.3.3 La régularité statistique sert de base à l'étude des probabilités

La régularité statistique observée lors de longues séries d'épreuves doit être expérimentée et discutée au premier degré du secondaire, plus à fond qu'au primaire.

Il s'agit là d'approcher la loi des grands nombres d'un point de vue qualitatif, et de bien distinguer la probabilité d'un événement lors d'une épreuve isolée de la fréquence de cet événement lors d'une longue suite d'épreuves.

L'équiprobabilité se rattache à la fois aux symétries des objets manipulés et à la régularité statistique.

Exemple 5 (vers 13-14 ans)

Chaque groupe d'élèves dispose d'un sac opaque dans lequel on a placé cinq billes, dont un certain nombre sont rouges et un certain nombre sont bleues (les mêmes nombres dans tous les sacs). Il s'agit de déterminer par tirages successifs, avec remise, combien de billes de chaque couleur figurent dans le sac ?

Chaque groupe procède à 30 tirages, puis fait une prévision. On rassemble ensuite les répétitions observées dans les groupes et on calcule une fréquence pour 60, 90, 120, ... et enfin pour l'ensemble des tirages de la classe.

Une telle situation contribue très efficacement à former la notion même de probabilité : elle se rapporte à une probabilité a priori que l'on découvre par une étude statistique.

Exemple 6 (vers 13-14 ans)

On distribue des dés dans la classe (certains sont pipés). Il s'agit d'identifier les dés équilibrés et les dés pipés.

En cherchant un peu, on trouve des dés pipés dans le commerce ; on peut aussi simuler des jets de dés, pipés ou non, sur un ordinateur. Le *Tabl. 3* présente une telle expérience, qui a l'avantage de pouvoir comporter un beaucoup plus grand nombre de jets qu'il n'est pratiquement possible d'en faire à la main.

	dé 1						dé 2						dé 3					
jets	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
20	7	1	2	3	6	1	2	7	1	3	5	2	5	4	2	4	2	3
60	13	8	8	9	11	11	6	12	12	10	13	7	7	6	6	11	9	21
300	51	51	44	49	56	49	45	58	48	54	48	47	47	39	44	56	42	72
600	113	95	100	87	109	96	93	109	94	103	99	102	89	84	82	111	104	130
1200	228	177	206	180	204	205	203	200	202	194	197	204	174	166	185	203	207	265
2400	420	381	411	378	403	407	409	385	416	376	401	413	362	345	387	396	407	503
6000	997	1040	997	976	992	998	975	978	998	990	1020	1039	946	885	1002	993	941	1233
18000	3010	3040	2973	3014	2931	3032	3042	3065	2985	2937	3003	2968	2911	2851	2833	2766	2806	3833

Tabl. 3

L'examen de la première ligne du *Tabl. 3* (20 essais) ne révèle aucune asymétrie significative. La deuxième ligne, confirmée en cela par la troisième, amène à soupçonner que la face 6 du troisième dé est favorisée au détriment des autres.

La situation s'éclaire lorsqu'on calcule toutes les fréquences relatives pour 18 000 jets, ce que montre le *Tabl. 4*

	dé 1	dé 2	dé 3
F1	0,167	0,169	0,162
F2	0,169	0,170	0,158
F3	0,165	0,165	0,157
F4	0,167	0,163	0,154
F5	0,163	0,169	0,156
F6	0,169	0,165	0,216

Tabl. 4

Un calcul de fréquence d'apparition de chaque face permet une induction plus rapide que l'examen du tableau. On observera aussi dans le tableau que la fréquence d'apparition d'une face pour un dé équilibré n'est pas très souvent égale à la probabilité a priori.

Exemple 7 (vers 14 ans)

On estime qu'à chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est 515/1000 ; d'où celle d'avoir une fille : 485/1000. Quelle est la probabilité pour les familles de deux enfants

- a) d'avoir deux garçons,
- b) d'avoir deux filles,
- c) d'avoir deux enfants de sexes différents ?

Il s'agit d'une probabilité tirée de séries statistiques. Comme tous les problèmes de calcul de probabilités présentés à des débutants, on le résout en dénombrant tous les cas possibles et en sélectionnant les cas demandés. Pour l'exemple présent ce n'est possible qu'avec des élèves qui ont appris à construire les arbres relatifs à des jets de pièces ou de dés dans lesquels les cas possibles sont dénombrables «à vue» et on suppose qu'on a fait apparaître des multiplications et des additions de probabilités.

La présentation en arbre est éclairante :

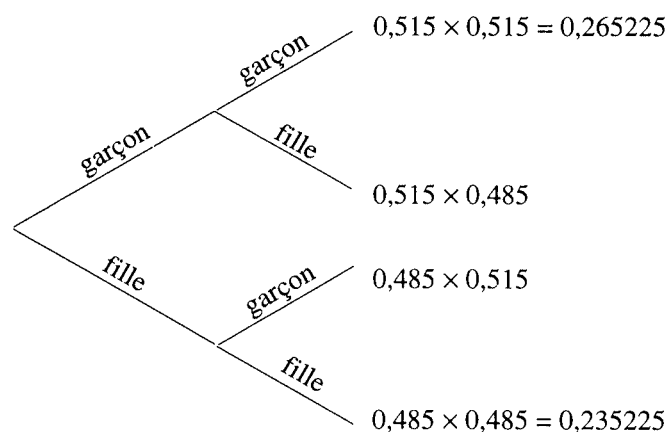


Fig. 2

La probabilité d'avoir deux enfants de sexes différents s'obtient en effectuant la somme :

$$0,515 \times 0,485 + 0,485 \times 0,515 = 0,49955,$$

ou encore en calculant la probabilité complémentaire par rapport aux deux autres :

$$1 - 0,265225 - 0,235225 = 0,49955.$$

Lorsqu'on choisit des exemples à propos de lancers d'une pièce de monnaie ou de jets de dés, le calcul des probabilités conduit aux fractions simples ; cet exemple met en jeu des calculs sur les puissances et les décimaux.

8.3.4 Apprendre à déjouer les pièges

Les premiers pièges liés par exemple aux questions biaisées dans les enquêtes et aux diagrammes fallacieux sont à portée des élèves au début du secondaire. Ils peuvent commencer à acquérir l'esprit critique avec lequel il importe d'aborder toute statistique.

Qu'il nous suffise d'évoquer ici deux pièges classiques.

Dans le premier, on souhaite illustrer les étapes d'une croissance et on utilise pour cela des figures semblables dont les hauteurs croissent comme la variable en question. Le piège est que l'œil perçoit plutôt l'aire que la hauteur des figures, et que l'aire croît comme le carré de la hauteur, c'est-à-dire beaucoup plus vite que celle-ci.

Le second piège est celui auquel on se laisse prendre lorsqu'on ne s'aperçoit pas que, dans un diagramme cartésien, on a situé l'origine des ordonnées loin du point de croisement des axes.

Exemple 8 (vers 14 ans)

La Fig. 3 montre, pour cinq pays, en 1986, les dépenses militaires en % du produit national brut.

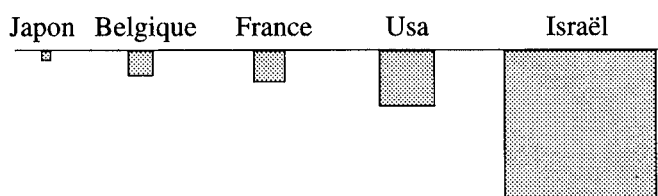


Fig. 3

Dans cette figure, les côtés des carrés sont proportionnels aux dépenses. La perception visuelle des aires tend à faire croire que les différences sont plus grandes encore que dans la réalité.

Exemple 9 (vers 14 ans)

La Fig. 4 montre les PIB (produits intérieurs bruts) par habitant de la Belgique et des pays voisins (en 1990).

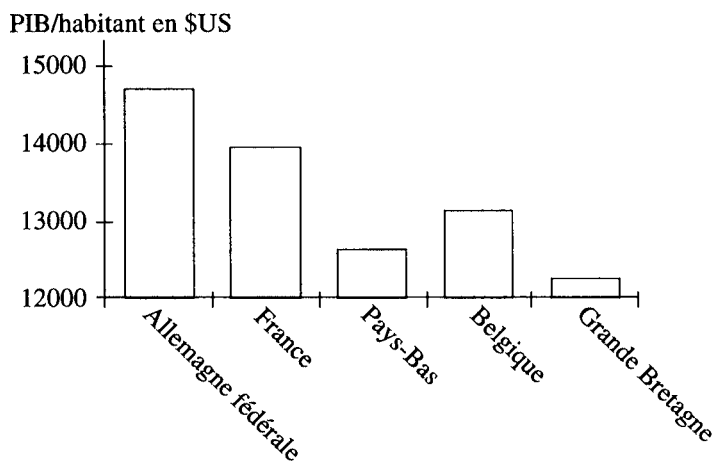


Fig. 4

L'origine des ordonnées étant placé à 12 000 (et non à 0), ce diagramme tend à faire croire que les différences de PIB entre ces différents pays sont beaucoup plus grandes qu'en réalité. En fait, si on ramène la République Fédérale à la base 100, on obtient 83 pour la Grande Bretagne.

8.4 Le traitement de données au troisième degré du secondaire

8.4.1 Pour répondre à des questions, rassembler, classer, élaborer et présenter des données, des nombres

A partir de 14 ans et surtout vers la fin du secondaire, on apprend utilement les modes de traitement de données plus complexes : entre autres les ajustements de courbes polynomiales sur des diagrammes empiriques, les corrélations, les échelles logarithmiques.

Exemple 1 (vers 17 ans)

Le Tabl. 1 donne les gains au Lotto le 27 mai 1995. Combien de fois doit-on jouer pour avoir une chance sur deux de gagner le gros lot ?

Lotto						
MERCREDI SAMEDI, 2 CHANCES D'ÊTRE VERNI						
TIRAGE DU SAMEDI 27.5.1995.						
NUMÉROS GAGNANTS						
10	16	28	30	33	42	12
GAGNANTS				MONTANTS		
6 n°	7 ⇒		6.579.000			
5 n°+cpl.	19 ⇒		538.700			
5 n°	936 ⇒		21.870			
4 n°	46.374 ⇒		550			
3 n°	761.908 ⇒		50			
Nombre de bulletins : 2.011.689. Montant des mises : 280.897.410						

Tabl. 1

La probabilité de gagner le gros lot quand on achète un seul billet est

$$\frac{7}{2\,011\,689},$$

d'où celle de ne pas gagner :

$$1 - \frac{7}{2\,011\,689}.$$

Si on veut que la probabilité de le gagner au moins une fois soit 1/2, il faut que la probabilité de ne jamais le gagner soit elle aussi de 1/2. On a donc l'équation

$$\left(1 - \frac{7}{2\,011\,689}\right)^n = \frac{1}{2},$$

$$n \log\left(1 - \frac{7}{2\,011\,689}\right) = \log \frac{1}{2},$$

$$n = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log\left(1 - \frac{7}{2\,011\,689}\right)},$$

$$n = 199\,199,1679.$$

Pour que ce nombre soit significatif, situons-le sur une échelle de temps. A supposer que l'on achète deux billets par semaine, il faudrait jouer pendant 1915,375 années, on aurait dû commencer au début de l'ère chrétienne !

La somme consacrée aux achats de billets serait de 27 887 883 francs , soit quatre fois plus que le lot gagnant !

Bien entendu, pendant toutes ces années, on aurait aussi gagné des petits lots. Mais ceci est une autre histoire avec de nouvelles questions.

Exemple 2 (vers 17 ans) (problème inspiré par [Pes87])

Le Tabl. 2 donne les tailles et les poids de 22 joueurs de basket. Il est présenté par ordre croissant des tailles. Représenter graphiquement ces données sur du papier millimétré.

taille en cm	poids en kg	taille en cm	poids en kg
178	70	197	95
182	82	197	103
183	85	200	84
184	82	202	98
185	87	203	91
186	87	204	98
188	87	207	100
190	83	208	105
193	92	208	112
195	89	213	115
195	89	219	109

Tabl. 2

Comment remplacer le nuage de points obtenus par une droite qui permette, dans la mesure du possible, de prévoir le poids d'un joueur de taille donnée ?

La Fig. 1(a) montre le nuage de points. Une façon très sommaire de répondre à la deuxième partie de la question consiste à observer l'allure du nuage de points et à le modéliser par une dépendance linéaire entre le poids et la taille. On peut déterminer deux points de cette droite de la façon suivante : calculer les coordonnées du point P correspondant à la taille moyenne et au poids moyen des 11 premiers joueurs. Puis calculer, de manière analogue, les coordonnées du point Q pour les 11 derniers joueurs. La droite PQ représente la fonction cherchée (Fig. 1(b)) .

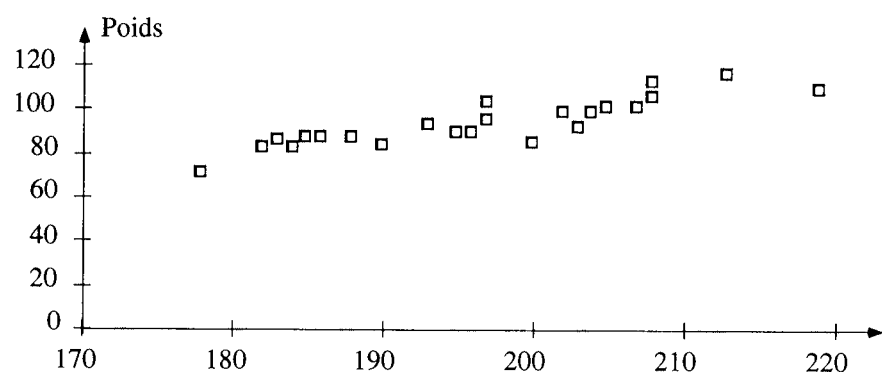


Fig. 1(a)

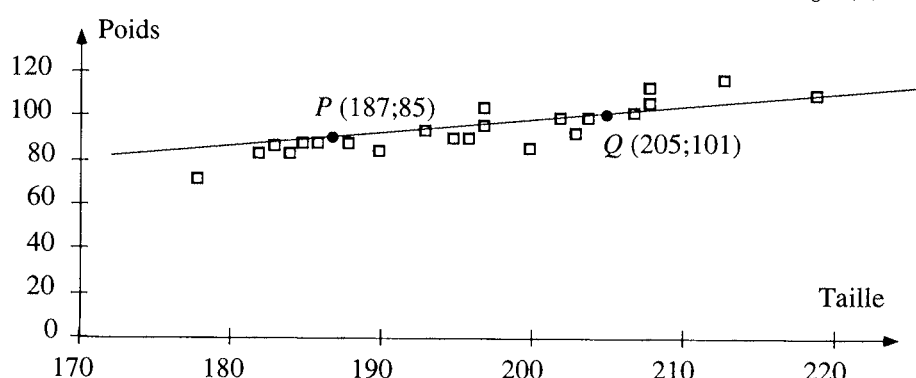


Fig. 1(b)

Ce travail élémentaire peut introduire une étude plus fine qui consiste à calculer le coefficient de corrélation et la droite de régression des moindres carrés. Ceci pourrait être considéré comme une application, dans le domaine statistique, d'un problème d'optimisation.

8.4.2 Faire une place aux questions de portée sociale

Au cours du secondaire, les élèves devraient acquérir quelques notions sur des questions de portée sociale aussi importantes que les enquêtes d'opinion, les assurances, les loteries et les systèmes de vote.

Ce principe est illustré par ailleurs (cf. n°8.4.1, 8.4.4).

8.4.3 La régularité statistique sert de base à l'étude des probabilités

La loi des grands nombres, de nouveau abordée qualitativement, demeure une référence obligée pour approfondir les phénomènes de probabilité. Les distributions fortement asymétriques méritent une attention particulière. Une discussion qualitative du théorème central limite conduit à apprécier la portée particulière de la distri-

bution normale. Sans qu'il soit besoin de l'obtenir déductivement, cette distribution peut être exploitée dans des applications.

L'approche qualitative du théorème central limite proposée ici est classique. On commence par étudier la distribution binômiale en liaison avec le jeu de pile ou face utilisant une pièce équilibrée. C'est l'occasion d'introduire le triangle de Pascal. La «planche de Galton» permet d'expérimenter cette distribution et de la visualiser.

On apprécie la difficulté d'utiliser la loi du binôme lorsque le nombre d'expériences devient grand. Le théorème central limite discuté qualitativement conduit à introduire la loi normale.

La même démarche peut être reprise pour une pièce de monnaie asymétrique, ce qui conduit cette fois à la loi normale sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_p}{\sigma}\right)^2}$$

avec $\sigma = \sqrt{npq}$, où p est la probabilité de face (ou de pile, c'est au choix) et n le nombre d'épreuves. Ce résultat s'emploie de la manière suivante. Soient n épreuves, soit S_n le nombre de fois que l'événement choisi est arrivé. Si on choisit un seuil ε , la probabilité que l'on ait

$$-\varepsilon \leq \frac{S_n - np}{\sigma} \leq +\varepsilon$$

ou en d'autres termes

$$\frac{-\varepsilon\sigma}{n} \leq \frac{S_n}{n} - p \leq \frac{+\varepsilon\sigma}{n},$$

est égale à

$$\Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon),$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition normale. Les valeurs requises de Φ se lisent dans une table.

Les applications de cette théorie sont nombreuses et significatives. Par exemple, on peut y trouver l'explication du choix de la taille d'un échantillon de population pour un sondage d'opinion, et l'explication de ce qu'on appelle le niveau de signification du sondage. Ce que nous venons de rappeler très sommairement (et que nous ne pouvons pas développer ici) mérite que l'on s'y attarde longtemps en classe. De telles notions sont utiles à tous les citoyens. De plus elles préparent aux enseignements de statistiques présents dans les programmes de la plupart des écoles supérieures.

8.4.4 Apprendre à déjouer les pièges

Il serait très utile qu'au troisième degré du secondaire les élèves apprennent systématiquement à déjouer les principaux pièges que recèlent les enquêtes et les statistiques involontairement mal conçues ou volontairement biaisées.

Exemple 3 (vers 16-17 ans)

Dans un jeu télévisé, l'animateur montre trois portes à un spectateur. Un trésor est caché derrière l'une d'elles. Derrière les deux autres, rien. Le spectateur peut gagner le trésor s'il désigne la bonne porte au terme d'une double épreuve. Dans un premier temps, il désigne une porte. L'animateur, qui sait où est le trésor, ouvre alors une des deux autres portes, toujours une porte derrière laquelle il n'y a rien. Le spectateur fait alors son choix définitif.

Quelle est la meilleure tactique pour le spectateur

- *s'en tenir à son premier choix,*
- *joûenger de porte ?*

Cet exemple est emprunté à [Sha92].

La plupart des spectateurs non prévenus pensent qu'il est bon de s'en tenir à son premier choix. Ils se disent en effet que la probabilité d'avoir désigné la bonne porte au premier essai étant de $1/3$, cette probabilité passe de facto de $1/3$ à $1/2$ dès que l'animateur a ouvert une porte, puisqu'il ne reste plus à ce moment-là que deux possibilités.

Toutefois, en raisonnant ainsi, le spectateur n'a pas profité de l'information nouvelle que lui apporte l'ouverture de la porte. De ce fait, sa probabilité demeure égale à $1/3$.

Si, au contraire, il joue à pile ou face les deux portes restantes, effectivement, il fait monter sa probabilité de gagner à $1/2$.

Par ailleurs, remarquant qu'au premier essai il avait une chance sur trois de tomber juste, s'il change délibérément son choix au deuxième essai, en choisissant la porte que l'animateur n'a pas ouverte, il a alors deux chances sur trois de tomber juste.

Exemple 4 (vers 16 ans)

On cherche à comparer l'efficacité d'un médicament chez les hommes et chez les femmes. Lors d'une première étude, 5 hommes sur 11 ont été guéris, et 3 femmes sur 7. Lors d'une seconde étude, 6 hommes sur 9 ont été guéris, et 9 femmes sur 14.

Peut-on conclure de ces résultats que le médicament a été plus efficace pour les hommes que pour les femmes ?

La première étude montre une proportion de guérisons plus élevée chez les hommes que chez les femmes, puisque

$$\frac{5}{11} \cong 0,45 > \frac{3}{7} \cong 0,43 .$$

Il en va de même de la deuxième étude, puisque

$$\frac{6}{9} \cong 0,67 > \frac{9}{14} \cong 0,64 .$$

Et pourtant, si on cumule les deux recherches, on trouve une proportion de guérisons plus élevée chez les femmes que chez les hommes. En effet

$$\frac{5+6}{20} = 0,55 < \frac{3+9}{21} \cong 0,57 .$$

Si les échantillons d'hommes et de femmes testés avaient été de même taille dans les deux études aucun paradoxe ne se serait manifesté. Dans la première étude, les hommes et les femmes se sont révélés plus réceptifs au médicament, mais l'échantillon des femmes était nettement plus petit que celui des hommes (7 contre 11), et c'est pour cela qu'il pèse peu au total. On observe l'effet opposé pour la deuxième étude.

8.4.5 Une théorie appropriée aux difficultés rencontrées

Les probabilités sont des modèles mathématiques d'une certaine réalité. Elles sont justiciables d'un traitement axiomatique et déductif, dont la relation avec la réalité doit être discutée (voir ci-dessus l'insistance que nous avons mise à évoquer la loi des grands nombres).

Les espaces probabilisés finis sont normalement étudiés avant les infinis. Les premiers peuvent être abordés par l'axiomatique élémentaire, sans recours à l'idée de mesure. L'introduction de l'axiomatique de Kolmogorov sera utilement justifiée par l'étude de quelques paradoxes auxquels conduisent les probabilités dans les cas infinis.

Exemple 5 (vers 17 ans)

Imaginons un jeu de fléchettes dans lequel chaque lancer aboutit en un point d'une cible circulaire dont chaque point a la même probabilité d'être atteint. Comment calculer la probabilité d'arriver à une distance du centre inférieure ou égale à la moitié du rayon ?

Il s'agit là d'un jeu de fléchette quelque peu idéalisé pour les besoins du raisonnement (dans un jeu réel, la fléchette touche non un point, mais une petite surface). C'est ce que l'on appelle une *expérience de pensée*.

Il paraît raisonnable de dire que la probabilité d'atteindre une région donnée vaut le quotient de l'aire de cette région par l'aire du disque ; en l'occurrence on trouve $1/4$.

En utilisant cette même idée pour calculer la probabilité d'atteindre un point donné, on trouve une probabilité nulle. Or dans la conception élémentaire des probabilités, on obtient la probabilité d'un événement composé en sommant les probabilités des événements élémentaires qui la composent. Dans le cas présent on aboutirait à ce qu'une somme de zéros soit égale à $1/4$. Par ailleurs, on ne peut pas imaginer que la probabilité d'atteindre un point soit plus grande que 0, car en additionnant toutes les probabilités analogues (toutes égales et en nombre infini) on n'aboutirait pas à 1. Nous voici donc en présence d'un événement possible de probabilité nulle !

Ainsi donc les procédures élémentaires de calcul des probabilités sont mises en défaut : on n'arrive à rien en sommant des probabilités d'événements élémentaires. Dans le présent problème, une méthode simple (un rapport d'aires) permet d'aboutir à la solution, mais ce n'est pas toujours le cas. Le paradoxe soulevé ici a été résolu de manière générale par Kolmogorov lorsqu'il a fondé la notion de probabilité sur celle de mesure.

ANALYSE

9.1 Vue d'ensemble

9.1.1 L'analyse au niveau de base

Certains objets ou phénomènes quotidiens amènent à se poser des questions qui conduisent à l'analyse mathématique. Ces questions, qui s'énoncent en termes eux aussi quotidiens, constituent ce que nous appelons l'*analyse au niveau de base*.

Voici quelques exemples de ces questions. Elles paraîtront de prime abord hétéroclites¹. Après les avoir exposées, nous montrerons ce qui les rassemble, ce qui leur confère une unité.

Certains de ces phénomènes se rencontrent tôt dans la scolarité, et nous les avons déjà mentionnés à propos des nombres. Par exemple :

- lorsqu'on divise 1 par 3, la division « ne tombe pas juste », elle engendre le nombre 0,333... dont l'écriture ne se termine pas;
- quand on obtient comme résultat d'un calcul un nombre de cette sorte, impossible à écrire exactement, on conserve un certain nombre de chiffres et on laisse tomber les suivants. L'approximation que l'on fait, et donc l'erreur que l'on tolère dépendent des circonstances.

D'autres questions qui conduisent à l'analyse sont :

- trouver l'aire d'une surface qui ne se laisse pas recouvrir exactement par des carrés unités;

¹ Par contraste, on saisit sans trop de peine ce qui rassemble au niveau de base les phénomènes qui relèvent des grandeurs, ou des nombres, ou de la géométrie, ou des autres matières traitées dans cet ouvrage.

- déterminer la longueur d'un arc de courbe;
- déterminer la tangente à une courbe en un point;
- calculer exactement la vitesse d'un mobile en un instant donné;
- calculer le centre de gravité d'un solide;
- déterminer la pente d'une route en un point donné;
- trouver le taux de croissance d'une population.

Comme nous l'avons annoncé, la plupart de ces questions sont à première vue étrangères les unes aux autres. Mais beaucoup ont un point commun : *l'apparition de l'idée d'infini*, qu'il s'agisse de l'infiniment grand ou de l'infiniment petit. Pour pouvoir manipuler un nombre dont la valeur exacte est inconnue, il est souhaitable que l'on puisse en calculer des valeurs approchées aussi précises qu'on le souhaite. L'erreur doit donc être aussi petite qu'on le veut. Pour trouver l'aire d'une surface limitée par une courbe, on essaie de la remplir avec des polygones de plus en plus petits et de plus en plus nombreux, mais on n'arrive jamais au bout. Pour trouver la vitesse à un instant donné d'un mobile en mouvement non uniforme, on peut songer d'abord à mesurer l'espace qu'il parcourt dans la seconde qui suit cet instant. Mais pendant cette seconde, sa vitesse a changé, et il faut donc considérer un intervalle de temps plus court. On songe à un dixième de seconde, mais on retrouve la même objection : la vitesse change pendant ce temps. Et aussi pendant un centième, un millièm, ... de seconde. On montrerait de même comment chacun des exemples ci-dessus conduit l'esprit à buter sur l'infini. En un certain sens, *l'analyse est l'étude de l'infini*.

Une autre raison pour laquelle des phénomènes très variés relèvent de l'analyse, c'est que chacun d'eux se décrit à l'aide de fonctions numériques. Il est vrai que le concept de fonction est fondamental partout en mathématique. Les fonctions *numériques* revêtent une importance particulière en analyse, car elles possèdent (éventuellement) des propriétés telles que la décroissance et la croissance, des extrema, des limites, la continuité, la périodicité, divers comportements à l'infini, etc. On peut donc dire aussi, sans dénaturer les choses, que *l'analyse est l'étude des fonctions numériques*.

9.1.2 La construction de l'analyse

Voyons maintenant comment construire l'analyse tout au long de la scolarité.

Comme nous l'avons déjà remarqué à propos des nombres (n° 5.2.5), les enfants

rencontrent l'infini dès qu'ils réalisent la possibilité d'écrire des nombres aussi grands qu'ils le veulent.

Les nombres naturels donnent accès aux suites infinies d'objets géométriques ou de nombres. Chaque suite de nombres renvoie à une suite de points sur un axe gradué.

Les suites conduisent à la notion de limite, et c'est la limite nulle qui est rencontrée d'abord, comme par exemple dans

$$\begin{aligned} &\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right), \\ &\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right), \\ &\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right), \end{aligned}$$

ou encore

$$(1 \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0,0001 \quad \dots).$$

Des exemples de limites non nulles sont aussi fournis par des suites. Tel est le cas pour les nombres dont l'écriture décimale est infinie : par exemple 0,45454545... est la limite de la suite

$$(0,45 \quad 0,4545 \quad 0,454545 \quad 0,45454545 \quad \dots).$$

D'autre part, et bien avant que les élèves n'abordent systématiquement l'étude de l'analyse, ils rencontrent des fonctions numériques à l'occasion des problèmes les plus divers (voir les chapitres sur la géométrie, l'algèbre, le traitement de données). Ces fonctions apparaissent sous forme de graphiques, de tableaux ou de formules, chacune de ces expressions étant porteuse d'un message qui lui est propre, complémentaire des autres. La familiarité avec la notion de fonction s'acquiert par un va-et-vient entre ces trois formes. Les premières fonctions envisagées sont simples, mais il importe qu'elles soient aussi variées que possible, pour que la notion de fonction n'ait pas un caractère étriqué.

Telles sont les prémisses de la construction de l'analyse. Elles peuvent être travaillées bien avant l'âge de seize ans, celui où le programme situe traditionnellement l'introduction de cette matière.

La notion de limite introduite à propos des suites est ensuite adaptée aux fonctions. Elle permet entre autres de parler du comportement des fonctions à l'infini, soit qu'une fonction tende vers l'infini, ou moins l'infini, lorsque son argument s'ap-

proche d'une valeur finie, soit qu'elle tende vers une valeur finie lorsque son argument tend vers l'infini, ou moins l'infini. Mais les limites deviennent indispensables dès que l'on aborde les dérivées et les intégrales, qui sont au cœur de l'analyse. Venons-en donc à ces deux notions.

La plupart des questions évoquées au n° 9.1.1 comme conduisant à l'analyse, se classent naturellement en deux catégories : d'une part celles qui mènent à des différences et des quotients de différences de plus en plus petites (les problèmes de tangente, pente, vitesse, taux de croissance, maxima et minima), et d'autre part celles qui mènent à des sommes de plus en plus longues de termes de plus en plus petits (séries, aires, longueurs de courbes, centres de gravité). Les premiers problèmes sont ceux que l'on résout à l'aide de *dérivées* et les seconds à l'aide d'*intégrales*. La dérivation et l'intégration sont deux opérations réciproques, dont le lien est exprimé par le théorème fondamental de l'analyse. C'est précisément ce théorème qui confère une étonnante unité théorique à toutes ces questions dont nous avons noté au départ le caractère apparemment hétéroclite.

Par-delà les dérivées et les intégrales, quelques équations différentielles simples pourraient être proposées vers la fin du secondaire aux élèves les plus avancés.

Demandons-nous maintenant à quel niveau de rigueur il faut situer l'enseignement de l'analyse. Toutes les matières mentionnées ci-dessus (y compris le théorème fondamental et les équations différentielles) peuvent être abordées et travaillées pendant un temps avec un stock de fonctions simples et des notions non formalisées (des objets mentaux). En particulier, la notion intuitive de limite suffit à beaucoup d'usages. La limite en ϵ et δ n'est pas nécessaire pour introduire les notions de dérivée et d'intégrale pour les fonctions polynomiales ou rationnelles.

Il est intéressant de construire l'analyse en termes d'objets mentaux jusqu'au moment où l'on perçoit que ceux-ci ne suffisent pas et où on peut comprendre les raisons qui imposent la formalisation en ϵ et δ .

Ce moment arrive de toutes façons, au moins pour les élèves qui suivent le plus d'heures de mathématiques. Lorsqu'on continue en effet à se poser des problèmes de plus en plus variés et difficiles, on doit construire pour les résoudre une théorie plus ample et plus ferme. Cela se traduit de plusieurs façons.

D'abord le stock de fonctions s'amplifie et se diversifie. De nouvelles fonctions sont nécessaires pour modéliser de nouvelles situations (entre autres les fonctions tri-

gonométriques, exponentielles et logarithmiques). Nous avons dit ci-dessus que l'analyse était, en un certain sens, l'étude des fonctions : elle est aussi, et de manière essentielle, un *atelier de construction de nouvelles fonctions*.

Ensuite, alors qu'une idée naïve des nombres pouvait suffire pendant un certain temps, avancer dans l'analyse exige de polir l'idée des nombres réels, de leur conférer deux ou trois propriétés non élémentaires (propriétés des intervalles emboîtés, du supremum).

Enfin, il devient aussi nécessaire de reprendre l'analyse au niveau du fondement, en appuyant les notions de dérivée et d'intégrale sur celles, maintenant formellement définies, de limite et de continuité (en ε et δ).

Arrivée à ce niveau, l'analyse se détourne par moments des questions variées qui lui ont donné naissance pour se concentrer sur les difficultés de sa propre construction. Dans ce cadre, elle augmente encore son stock de fonctions, mais il s'agit alors de fonctions qui servent d'exemples et de contre-exemples à des théorèmes, plutôt que de modèles de phénomènes réels.

Enfin, on l'a vu, un double calcul est associé à l'analyse à toutes ses étapes : le calcul des dérivées et le calcul des intégrales. Pour pouvoir résoudre les problèmes d'analyse, il faut en maîtriser les principes. L'existence, depuis très longtemps, de tables de dérivées et d'intégrales, a rendu obsolètes les longs entraînements pratiques à ces deux types de calcul.

9.1.3 L'analyse approfondie

Parmi les objets mathématiques les plus importants que l'analyse étudie au-delà des concepts de dérivée et d'intégrale, se trouvent les équations différentielles. C'est un type d'équations qui permet de passer de l'observation locale d'un phénomène (*local* veut dire peu étendu dans l'espace ou le temps) à son développement à grande échelle. Les équations différentielles ont pour solutions, non pas des nombres comme les équations algébriques, mais des fonctions. Elles constituent l'outil principal dans un très grand nombre d'applications.

Par ailleurs, beaucoup des théories avancées de l'analyse ont pour matériau des fonctions plus générales que les fonctions réelles d'une variable réelle auxquelles on se borne le plus souvent dans le secondaire.

Les plus faciles sont les fonctions d'une variable réelle mais qui ont des valeurs vectorielles. Ces fonctions permettent de définir des courbes dans un espace à trois

(ou plus de trois) dimensions. Elles permettent de définir le mouvement d'un point dans l'espace, c'est-à-dire qu'elles sont l'outil principal de la cinématique (la science des mouvements).

Ensuite viennent les fonctions de plusieurs variables réelles (on dit aussi les fonctions d'une variable vectorielle), mais à valeurs réelles. Les fonctions de deux variables réelles permettent de définir des surfaces dans un espace à trois dimensions. Les fonctions de trois variables permettent de définir la densité d'un corps. Dans ce cadre, le concept de dérivée cède le pas à celui de dérivée partielle, et celui de différentielle s'impose.

On le voit les fonctions permettent de décrire des objets géométriques tels que des courbes et des surfaces situés dans des espaces vectoriels (analogues à l'espace de la géométrie ordinaire). En s'enfonçant dans cette direction, l'analyse a engendré la géométrie différentielle. Celle-ci étudie des objets, les variétés, qui généralisent les notions de courbe et de surface, et qu'il serait trop long de présenter ici.

Nous n'avons jusqu'ici parlé que de fonctions définies dans des espaces possédant un nombre fini de dimensions. Mais certaines applications ont conduit, au 20^e siècle, à étudier des fonctions dont soit le domaine, soit l'ensemble des valeurs, soit les deux ont un nombre infini de dimensions. Les théories correspondantes sont regroupées sous la dénomination générale d'analyse fonctionnelle. L'origine de cette locution est la suivante : alors qu'une fonction réelle d'une variable réelle peut être vue comme envoyant un point (de l'axe des x) sur un point (de l'axe des y), les fonctions de l'analyse fonctionnelle envoient des fonctions sur des fonctions. Le lecteur non averti demeurera sans doute perplexe en lisant cette affirmation. Il faudrait, pour la rendre naturelle, plus d'explications que nous n'avons le loisir d'en donner ici.

Les développements de l'analyse fonctionnelle n'ont été possibles que moyennant un approfondissement des fondements de l'analyse et des mathématiques elles-mêmes, principalement par l'introduction de la théorie des ensembles. Cette dernière a permis le développement de la topologie, discipline qui s'organise autour de la notion de voisinage.

Un survol aussi rapide de l'analyse approfondie ne peut procéder presque que par allusions et ne donner qu'une idée incomplète du développement considérable de l'analyse au 20^e siècle. Mentionnons encore trois domaines de recherche importants.

Tout d'abord, l'analyse ne se construit pas seulement à partir des nombres réels.

Depuis le 19^e siècle, de nombreux travaux ont été consacrés aux fonctions de variables complexes, avec entre autres des retombées dans la théorie des équations différentielles de la physique.

Ensuite, compléter le corps des nombres rationnels pour obtenir un ensemble de nombres plus riche ne conduit pas seulement au corps des nombres réels. Depuis le début du 20^e siècle existent aussi les nombres p -adiques, fondés sur une notion de convergence originale. Ces nombres sont utilisés notamment en géométrie algébrique, c'est-à-dire dans la théorie des courbes définies par des équations algébriques.

Enfin, alors que la théorie des limites en ε et δ évite de parler des infiniment petits et des infiniment grands (parce qu'ils sont sources de paradoxes), une théorie nouvelle, appelée *analyse non standard* permet aujourd'hui d'évoquer directement ces infinis sans risque de faute logique. On ne sait pas encore très bien si cette théorie amènera à modifier l'enseignement élémentaire de l'analyse.

9.1.4 L'analyse comme forme de pensée

Pour apprendre les mathématiques à travers des problèmes, on *modélise* des situations réelles, c'est-à-dire qu'on en traduit au mieux les propriétés essentielles en termes de concepts mathématiques, d'idées pures qui se prêtent au raisonnement. On dit aussi que l'on *idéalis*e les situations réelles. Cette observation s'applique aux mathématiques en général. Mais l'idéalisation est particulièrement significative et frappante en analyse, car on y remplace les imprécisions et les approximations de la réalité par des objets aussi délicatement cernés, aussi idéalisés, que les limites, les taux de variation instantanés et d'autres analogues, s'appuyant sur l'une ou l'autre forme d'infini. C'est là une première raison qui fait de l'analyse un véritable laboratoire de modélisation.

Mais il y a aussi le fait que les applications de l'analyse sont nombreuses et variées, et en outre qu'elles recourent sans cesse à des fonctions, et ces dernières sont sans doute l'instrument le plus commun de la modélisation.

L'idéalisation du monde réel procède par dépassements successifs : les fonctions peuvent être données par des graphes dessinés au crayon, mais le crayon est imprécis ; elles peuvent être données par des nombres maniables «à la main», mais on ne va pas sans peine au-delà de trois ou quatre décimales ; les machines à calculer viennent ensuite, mais ne disent rien au-delà d'une dizaine de chiffres significatifs ; enfin

les formules sont dotées de propriétés qui permettent, quand tout va bien, des raisonnements dépourvus d'imprécision. Le triplet graphiques-tableaux-formules jalonne l'apprentissage de l'analyse. Mais il jalonne aussi sa pratique, car les étapes «graphiques» et «tableaux» demeurent souvent, même pour l'analyste chevronné, des sources d'intuition ainsi que des moyens d'expérimentation et de communication.

Ce que nous venons de dire de l'idéalisation nous amène naturellement à parler des instruments de base du travail en analyse, à savoir les inégalités. Les objets que l'on manie en analyse - nombres réels, suites et séries infinies, etc. - échappent à l'appréhension immédiate et complète parce que leur écriture comporte un nombre infini de chiffres ou de termes. Dans ces conditions, on cherche à les situer le plus précisément possible par rapport à des repères précis et maniables : fractions, décimaux d'écriture finie, sommes finies, etc. On les situe à l'aide d'inégalités, et la démarche est à ce point générale que J. Dieudonné a pu écrire : «Le calcul infinitésimal (c'est le début de l'analyse) est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : *majorer, minorer, approcher*». Le maniement des inégalités est presque une des caractéristiques de l'analyse et il en est une des difficultés principales.

Le concept clé de l'analyse est celui de limite, particulièrement délicat. Une suite infinie telle que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Les choses ne sont pas trop perturbantes tant que l'on en reste à dire que la suite tend vers 0. Mais on affirme ensuite que la limite de la suite *est* 0. Or 0 n'est pas *dans* la suite, mais est toutefois (par définition, c'est-à-dire par une décision libre de l'esprit) la limite *de* la suite. Encore la situation n'est-elle pas trop mauvaise ici, puisque 0 est un être familier. Tel n'est plus le cas lorsque l'on considère une suite de fractions qui tend vers un nombre irrationnel. En effet, à supposer que l'on ne connaisse pas les irrationnels, la limite de la suite est alors un nombre dont l'existence même fait problème.

C'est ici qu'intervient l'axiome dit *des intervalles emboîtés*. On considère une suite d'intervalles fermés (c'est-à-dire comprenant leurs points extrêmes) et on les désigne par $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ (Fig. 1).

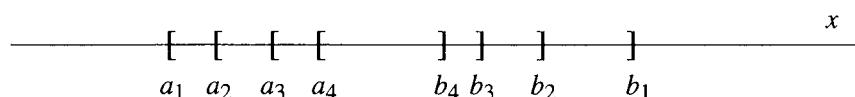


Fig. 1

On suppose que tous les a_n et b_n sont des nombres rationnels et que les intervalles en question sont emboîtés comme des poupées russes. On suppose que $b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc les intervalles deviennent aussi petits que l'on veut. Y a-t-il un point qui se trouve dans *tous* les intervalles ? Le piège se referme, mais ne se referme-t-il pas sur rien ? On répond souvent à cette question par un axiome, c'est-à-dire par une décision intellectuelle libre, en affirmant que les intervalles en question ont en commun un et un seul point.

En analyse, on rencontre par nécessité beaucoup des paradoxes et des pièges de l'infini. Ainsi par exemple, on croirait volontiers que tout ce qui est vrai de tous les termes d'une suite infinie qui possède une limite est aussi vrai pour cette limite. Cette affirmation que l'on a crue vraie pendant des siècles, était supposée dispenser de bien des démonstrations. Pourtant, la suite $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, dont tous les termes sont strictement positifs, a pour limite 0 qui n'est pas strictement positif. Et il existe beaucoup de contre-exemples plus subtils que celui-là.

Enfin, nous en avons déjà parlé au n° 9.1.2, l'analyse élémentaire rassemble, dans une structure théorique unifiée, des phénomènes à première vue étrangers les uns aux autres. Elle *abstrait* la structure commune à ces phénomènes hétéroclites en s'appuyant sur la réciprocity de la somme et de la différence.

9.1.5 Les applications de l'analyse

Si l'analyse a d'abord été construite pour répondre à des questions telles que celles mentionnées au début de ce chapitre, elle sert aussi à en résoudre d'autres dans des domaines variés. Citons seulement les principaux :

- la mécanique rationnelle qui étudie les mouvements provoqués par des forces (la mécanique a été chronologiquement le premier domaine d'application de l'analyse) ;
- plus généralement la physique (l'analyse est le langage de la physique autant dans ses parties classiques comme l'électromagnétisme et la thermodynamique, que dans la microphysique et la théorie de la relativité) ;
- la chimie quand on veut connaître ou contrôler la vitesse d'une réaction ;
- la biologie et l'écologie, lorsqu'elles étudient par exemple la dynamique des populations ;

- l'économie lorsqu'elle recherche les conditions d'équilibre d'un marché et étudie le coût de production et le coût marginal d'un bien ;
- la recherche opérationnelle dont l'objectif est d'optimiser l'exploitation de systèmes tels qu'un parc de wagons de marchandises ou un réseau de distribution d'électricité ;
- les sciences humaines, le plus souvent à travers la statistique.

Précisément la statistique et les probabilités méritent une mention à part, puisqu'elles sont elles-mêmes un outil de pensée à vocation universelle. Les deux notions essentielles de densité de probabilité et de fonction de répartition sont l'une à l'autre ce que la dérivée est à l'intégrale.

De l'extrême utilité de l'analyse dans les disciplines les plus diverses, il ne faudrait pas déduire qu'elle apporte d'office une solution à n'importe quel problème. Pour qu'une situation réelle, physique ou sociale, donne prise à l'analyse, il faut qu'elle soit modélisable en termes de fonctions, limites, dérivées, etc. Cette sorte de traduction en mathématiques a un domaine de validité qui doit toujours être délimité clairement, faute de quoi les conclusions déduites du modèle risquent d'être fautives.

9.1.6 L'analyse dans l'histoire, la philosophie, la culture

L'analyse mathématique ne s'est appelée ainsi que depuis le 18^e siècle, mais certains des problèmes dont elle traite ont préoccupé les hommes depuis très longtemps. Il nous semble éclairant de diviser cette longue histoire en cinq périodes distinctes, que nous décrirons à grands traits. On pourra trouver des nuances et des compléments entre autres dans [Kli72].

La *première période* est celle de l'antiquité grecque. Évoquons-en quelques jalons. Au 5^e siècle avant J.-C., Zénon d'Elée a proposé les paradoxes qui portent son nom et qui ont traversé toute l'histoire de la philosophie jusqu'à Bergson et au-delà. Rappelons l'un d'entre eux : la dichotomie. Pour couvrir une certaine distance, il faut commencer par en parcourir la moitié, puis la moitié du reste, et ainsi de suite. Et puisqu'il y a une infinité d'étapes, on n'arrive jamais. Par delà les problèmes physiques et philosophiques de l'infinie divisibilité du temps et de l'espace (toujours ouverts aujourd'hui), ce paradoxe invite à «additionner» une infinité de termes pour obtenir une somme finie.

Autre jalon important dans l'antiquité grecque : on trouve dans la physique

d'Aristote une discussion minutieuse sur la constitution de la droite géométrique. Aristote affirme l'infinie divisibilité de tout segment : on *peut* toujours diviser ce qui a déjà été divisé (c'est l'infini potentiel). Mais on ne peut pas constituer la droite en juxtaposant des points, puisqu'en plaçant un point «tout contre» un autre, on n'engendre pas autre chose qu'un point. Donc la droite ne peut être constituée de points (refus de l'infini actuel).

Par ailleurs, dans l'antiquité, de nombreux problèmes d'aires et de volumes ont été résolus, comme en témoignent les œuvres d'Euclide et d'Archimède. Il s'agit par exemple des aires du disque, et de la sphère et aussi du segment de parabole, des volumes de la pyramide, du cône et de la sphère. Les démonstrations étaient tout à fait rigoureuses. Chaque problème était justiciable d'une méthode particulière qu'il fallait donc chaque fois inventer à force d'ingéniosité. Au point crucial de chaque démonstration apparaissait pourtant un même mode de raisonnement, appelé *raisonnement par exhaustion*. Il permettait d'éviter la considération immédiate de l'infini (l'infini actuel), en demandant simplement d'imaginer des quantités finies arbitrairement petites (aussi petites que nécessaire : l'infini potentiel). Quelques rares problèmes de tangentes ont aussi été résolus par les mathématiciens grecs.

La fin de l'antiquité et le moyen-âge ont peu contribué à enrichir le stock de notions et de problèmes qui allaient plus tard se regrouper sous l'intitulé d'analyse mathématique. Il faut citer pourtant Oresme qui, au 14^e siècle, a posé les premiers jalons de ce qui allait devenir la notion de fonction, et a donné la limite de quelques séries infinies.

La *deuxième période* que nous distinguerons dans l'histoire de l'analyse va de la fin du 16^e siècle jusqu'à la fin du 17^e, disons juste avant Newton et Leibniz. De nombreux problèmes de longueurs de courbes, d'aires et de volumes sont résolus pendant cette période par Képler, Cavalieri, Pascal, Huygens et bien d'autres. Cette période rejette l'extrême rigueur des démonstrations grecques et en particulier la méthode d'exhaustion qui, surtout parce qu'elle utilise des raisonnements par l'absurde, convainc l'esprit sans l'éclairer. Se souciant moins que les ancêtres grecs de justifier logiquement chacun de leurs pas, les mathématiciens de cette époque ont surtout cherché à imaginer et expérimenter de nouvelles façons d'avancer. Donnons deux exemples de cette liberté de pensée.

Cavalieri a attaché son nom à une méthode pour comparer les volumes de deux solides compris entre deux plans parallèles. Si tout autre plan parallèle à ces deux-ci

et situé entre eux, découpe dans les deux solides des sections de même aire, on peut affirmer que ces deux solides ont même volume. Une image matérielle de la situation est donnée par un paquet de fiches disposées pour former un parallélépipède droit, mis à côté d'un deuxième paquet comportant le même nombre de fiches, mais disposées pour former un parallélépipède incliné (*Fig. 2*). Ces deux solides ont même volume.

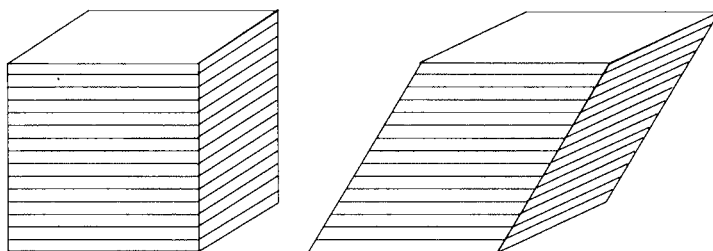


Fig. 2

Cavalieri a énoncé un principe analogue pour les surfaces. Ces deux principes, utilisés par Cavalieri lui-même et par d'autres, se sont révélés féconds dans de nombreuses comparaisons de surfaces et de solides.

Un deuxième exemple de méthode audacieuse et libre utilisée au 17^e siècle est la détermination des tangentes par Fermat. Pour déterminer une tangente à une courbe, on est amené à considérer une droite passant par deux points très voisins pris sur la courbe, et à imaginer ensuite que ces deux points se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre. Il y a donc dans ce processus une quantité qui tend vers 0. Pour déterminer techniquement la tangente, il est utile de considérer cette quantité comme très petite et non nulle jusqu'à un certain point du raisonnement et comme nulle après. Cette démarche audacieuse pose un problème de cohérence logique, mais elle réussit dans de nombreux problèmes.

Pendant cette deuxième période de l'histoire, les catégories de problèmes que l'analyse allait plus tard regrouper demeurent distinctes. En particulier les problèmes d'aire et de volume n'ont rien à voir avec les problèmes de tangentes. Mais les uns et les autres commencent à relever chacun d'une méthode générale, celle de Cavalieri pour les premiers, celle de Fermat pour les seconds.

La *troisième période* de l'histoire de l'analyse commence avec l'invention du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz vers la fin du 17^e siècle et se termine dans le premier quart du 19^e siècle.

Newton et Leibniz ont, indépendamment l'un de l'autre, montré la réciprocité (insoupçonnée jusque-là et surprenante) des problèmes de tangente d'une part, et

d'aires et volumes de l'autre. Tel est le contenu du théorème fondamental de l'analyse. Une observation préalable nous permettra d'en dire quelques mots.

Jusqu'au début du 17^e siècle, tous les problèmes que nous avons évoqués étaient résolus géométriquement, en raisonnant directement sur les figures. A la suite des travaux de Viète, Descartes et Fermat, les objets géométriques tels que courbes, surfaces et solides pouvaient être décrits par des équations et soumis à des raisonnements algébriques.

Dans ce nouveau contexte de la géométrie, la détermination des tangentes se fait par calcul de dérivées et est relativement facile. La détermination d'une aire se fait par primitivation (opération inverse de la dérivation). Cette dernière opération est plus délicate. Toutefois, lorsqu'on a établi une table de dérivées, il suffit de la lire à l'envers pour y voir une table de primitives.

Le nouveau moyen de calcul était à ce point performant qu'il a immédiatement relégué aux oubliettes les méthodes antérieures. Tout le 18^e siècle a travaillé à développer l'analyse infinitésimale de Newton et de Leibniz, apportant une impressionnante moisson de résultats. Une partie de ceux-ci n'ont été obtenus que parce que la notion de fonction, aujourd'hui si familière, a beaucoup évolué. Au début du siècle, toute fonction était décrite par une expression analytique. A la fin du siècle, on acceptait des fonctions bien plus générales.

Ainsi, cette troisième période a été féconde. L'analyse a progressé à grands pas, en dépit du fait que, comme dans la période précédente, l'imagination avait le pas sur la rigueur. Les mathématiciens étaient très conscients qu'ils laissaient traîner des questions de correction logique, mais leurs méthodes marchaient, et donc ils ne se privaient pas d'avancer. De mémorables controverses sur la solidité de leurs résultats ont émaillé le 18^e siècle. Rappelons, pour ne citer qu'un exemple, les sarcasmes du philosophe Berkeley à propos de ces quantités que l'on pouvait voir nulles ou non nulles selon les opportunités.

La quatrième période de l'histoire de l'analyse s'étend du premier quart du 19^e siècle jusqu'aux environs de 1870. La relative absence de rigueur de la période précédente peut être expliquée par quelques observations. Vers 1800, les nombres irrationnels étaient certes connus, mais les nombres réels n'étaient pas constitués en un système logiquement cohérent. La notion de fonction n'avait pas atteint sa maturité. La notion de continuité relevait de l'intuition géométrique et non d'une définition stricte. L'accumulation des résultats dans une science ainsi non entièrement fondée

sur le plan logique devait finir par provoquer des difficultés. C'est bien ce qui est arrivé.

Le 19^e siècle, tout en produisant de nombreux concepts et résultats nouveaux, a été celui où l'analyse a résolu son problème de fondement. Bolzano et Cauchy au début du siècle ont fait progresser les notions de limite et de continuité. Un peu plus tard Dirichlet a donné la définition moderne de *fonction*. Aux alentours de 1870, Dedekind, Cantor, Weierstrass et Méray ont construit les réels à partir des naturels (cf. n°5.1.4). Les instruments de base étaient ainsi acquis. Ils ont permis à Weierstrass de fonder l'analyse dite en ϵ et δ , celle que l'on enseigne encore aujourd'hui, et qui évite tout recours aux notions jusqu'alors contradictoires d'infiniment petit et d'infiniment grand. Ainsi le niveau de rigueur des Grecs était non seulement retrouvé mais dépassé, et l'analyse pouvait continuer à se développer sur cette base affermie.

Nous avons dit ci-dessus qu'au début du 19^e siècle la notion de continuité en analyse relevait encore de l'intuition géométrique. Or en géométrie aussi et depuis toujours, les questions de continuité étaient soit ignorées, soit traitées intuitivement. La mise au point du continu en analyse a réagi vers la fin du siècle sur le traitement du continu en géométrie, en lui assurant un fondement sûr.

La *cinquième période* de l'histoire de l'analyse va de Weierstrass à nos jours. Elle a apporté une profusion de théories et de résultats nouveaux dont nous avons donné un bref écho à la fin du n° 9.1.3, consacré à l'analyse approfondie. Événement significatif de cette période : la notion de fonction a été généralisée dans la théorie des distributions. Les distributions permettent de modéliser des objets qui échappaient à l'emprise des fonctions, comme par exemple une masse ponctuelle, un dipôle électrique ou magnétique.

La notion d'intégrale s'est beaucoup perfectionnée et l'on sait maintenant intégrer des classes de fonctions beaucoup plus générales qu'autrefois.

Revenons enfin, pour en souligner l'importance culturelle, sur l'émergence de l'analyse non standard. La méthode en ϵ et δ de Weierstrass aboutissait à éliminer le recours aux notions jusque là douteuses d'infiniment petit et d'infiniment grand. On pouvait croire la question définitivement réglée. Or une construction logique non élémentaire a permis à Robinson, dans les années 60, de légitimer enfin les raisonnements qui s'appuient sur les infiniment petits et les infiniment grands.

Une grande leçon de cette histoire millénaire de l'analyse est que les mathéma-

tiques ne sont pas, comme on le croit souvent, une discipline qui règle ses contradictions au fur et à mesure et ne produit que des vérités définitives. Elles sont bien plus vivantes que cela.

9.2 L'analyse dans le fondamental

L'analyse apparaissant comme une matière mathématique assez avancée, on pourrait croire qu'elle ne concerne pas l'enseignement fondamental. Pourtant, un certain nombre de phénomènes mathématiques rencontrés à ce niveau sont soit déjà du domaine de l'analyse, soit y conduisent. Contentons-nous de mentionner ici les principaux, rencontrés souvent sur d'autres terrains (car aucune cloison n'isole l'analyse des autres secteurs des mathématiques) : les classements d'objets, de grandeurs et de nombres préparent la manipulation des inégalités et l'idée de suite. La possibilité que donne le système décimal de numération de compter aussi loin qu'on veut provoque une première rencontre avec l'infini. Des suites numériques ou géométriques s'amorcent et conduisent l'imagination vers l'infiniment grand ou l'infiniment petit : compter par 2, par 3 ; construire 1, 2, 4, 8, ... ou $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; chercher combien il y a de diagonales dans un carré, un pentagone, un hexagone, ... ; les divisions «qui ne tombent pas juste» engendrent des suites infinies de chiffres. De plus, dès le primaire on rencontre des fonctions, et celles-ci ont vocation de devenir le matériau de l'analyse. Rappelons enfin les coloriations qui dès l'école maternelle font vivre aux enfants les propriétés du continu géométrique (cf. n°6.1.2 et 6.2.1).

Bien entendu, il n'est pas question d'ouvrir un chapitre *analyse* dans les programmes de l'enseignement fondamental. Mais les enseignants peuvent réaliser que les petites touches d'analyse évoquées ci-dessus ont un avenir pour leurs élèves.

9.3 L'analyse aux deux premiers degrés du secondaire

9.3.1 Aborder l'analyse dans des contextes

Les premières notions qui conduisent à l'analyse plongent des racines dans des contextes divers et significatifs.

Comme nous l'avons vu au n°9.1.1, l'analyse étudie les structures mathématiques

communes à des phénomènes qui ne semblent avoir, à première vue, aucun lien de parenté. Bien que comme telle, elle n'apparaisse pas dans les programmes du début de secondaire, certaines matières adaptées aux élèves de cet âge y conduisent : problèmes d'approximation, de croissance, de mouvements, de pentes, aires et volumes d'objets «courbes» simples, etc.

Exemple 1 (vers 15 ans)

On veut, à l'aide d'un fil de clôture de 40 m de long, délimiter un pré rectangulaire adossé à une rivière. Quelles seront les dimensions du rectangle si l'on souhaite que l'aire du pré soit la plus grande possible ?

Représentons d'abord la situation (Fig. 1)

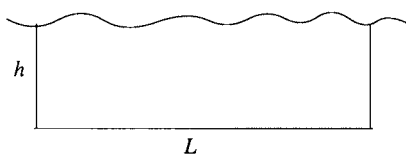


Fig. 1

Puis modélisons-la, en utilisant le mètre comme unité de longueur. Si h et L sont la hauteur et la largeur du pré, on a

$$L = 40 - 2h,$$

et pour son aire

$$\begin{aligned} S &= hL = h(40 - 2h) \\ &= -2h^2 + 40h. \end{aligned} \quad (1)$$

On peut chercher par tâtonnement la valeur de h qui donne le maximum pour S . Pour y voir plus clair, on peut dessiner le graphique de $S(h)$ (Fig. 2).

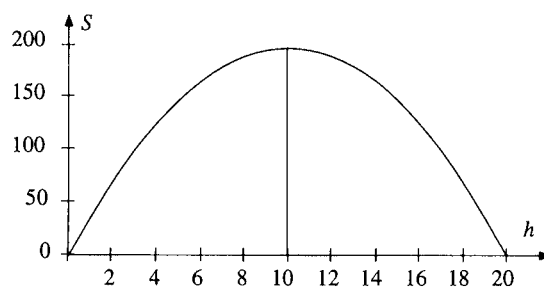


Fig. 2

C'est un morceau de parabole. Son sommet a pour coordonnées (10,200). La hauteur cherchée est donc exactement de 10 m, tandis que L vaut 20 m. Le pré est un demi-carré.

9.3.2 Tableaux, graphiques, formules

Les tableaux, les graphiques et les formules sont trois moyens complémentaires de saisir les fonctions.

Il est utile d'apprendre à les employer chacun pour ce qu'il peut apporter et à passer de l'un à l'autre à bon escient.

Ce principe est abondamment illustré par les exemples apparaissant dans les autres sections.

9.3.3 Apprendre à faire des approximations

La plupart des résultats de mesures et de calcul sont approchés : il est utile d'apprendre à les situer par des encadrements.

Par exemple, une calculatrice donne pour $2 : 7$

$$0,285714286.$$

Si on veut s'arrêter à trois chiffres après la virgule, on peut affirmer que

$$0,285 \leq \frac{2}{7} \leq 0,286,$$

ce qui est tout à fait exact, tandis que

$$\frac{2}{7} \cong 0,286$$

est vague et que

$$\frac{2}{7} = 0,286$$

est faux. Mieux vaut avoir conscience de cette erreur, même si dans certains contextes, elle n'a pas de conséquences.

Par ailleurs, sachant la façon dont la machine traite les arrondis, on peut affirmer que

$$0,2857142855 \leq \frac{2}{7} < 0,2857142865 .$$

Les encadrements apparaissent dans deux circonstances. D'abord, on vient de le voir, pour cerner les nombres qu'on ne peut écrire entièrement dans le système décimal, et ensuite pour estimer des ordres de grandeur. Ils interviennent de deux façons dans un calcul :

- 1) les données étant connues par des encadrements, encadrer le résultat ;
- 2) un résultat étant exigé avec une précision déterminée, quelle largeur d'encadrement faut-il imposer aux données ?

Dans les applications, c'est cette dernière question qui se pose le plus souvent.

La pratique des calculs approchés dans la première moitié du secondaire prépare, pour les classes de cinquième et sixième, la manipulation pratique et théorique des inégalités qui est, on l'a vu, caractéristique de l'analyse .

Exemple 2 (vers 15 ans)

Donner avec trois décimales exactes les racines de

$$x^3 - x + 2 = 0.$$

Pour savoir si cette équation a des racines, et à peu près où se trouvent celles-ci, on peut superposer les graphiques familiers de $f(x) = x^3$ et $g(x) = x - 2$ (Fig. 3)

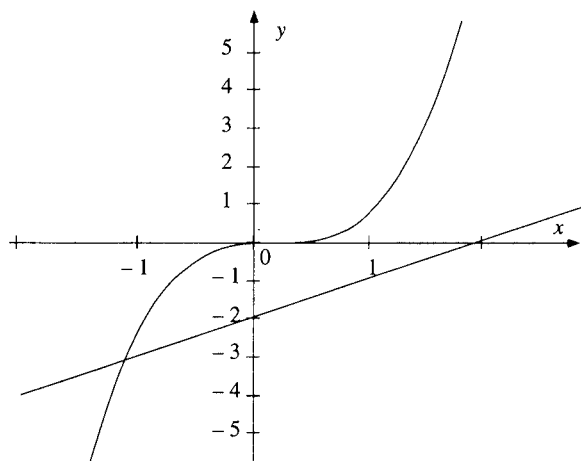


Fig. 3

On voit que l'équation en question n'a qu'une racine, à coup sûr inférieure à -1 , et sans doute supérieure à -2 . On pose

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

On calcule ensuite

$$f(-2) = -4,$$

$$f(-1) = 2,$$

ce qui confirme que la racine x_0 est telle que

$$-2 \leq x_0 \leq -1.$$

On poursuit le calcul par dichotomie. Donc on calcule $f(x)$ pour x à mi-chemin entre -2 et -1 :

$$f(-1,5) = 0,125$$

Ceci indique que

$$-2 \leq x_0 \leq -1,5.$$

On calcule alors $f(x)$ pour x à mi-chemin entre -2 et $-1,5$, et ainsi de suite.

9.3.4 Etudier les facettes des phénomènes

Les phénomènes liés à l'analyse ont des facettes nombreuses, qui contribuent à en donner l'intuition globale.

Une facette d'un phénomène est une façon de le voir, d'en parler, parfois de le définir. Se familiariser avec les facettes d'un phénomène et apprendre à passer d'une facette à l'autre, c'est aussi apprendre à le saisir «par le bon bout» dans une situation-problème déterminée.

Il nous semble qu'en analyse, à cause de la variété des contextes d'où cette discipline est issue, les phénomènes ont des facettes particulièrement nombreuses.

Prenons comme exemple la notion de suite géométrique positive. Dans une telle suite, on passe de chaque terme au suivant en *multipliant* toujours par un même nombre : c'est un procédé d'*engendrement* de la suite.

Mais une suite géométrique est aussi une suite où le *quotient* de deux termes successifs est toujours le même, ce qui donne un procédé pour vérifier si une suite est géométrique ou non.

Si la suite provient d'un problème d'intérêt composé, on y passe d'un terme au suivant en *ajoutant* chaque fois le même pourcentage. Au moins est-ce ainsi que l'on s'exprime dans la langue quotidienne.

Des suites géométriques apparaissent dans des contextes géométriques divers. La Fig. 4 montre l'un d'entre eux : on construit dans un angle une suite de segments enchaînés.

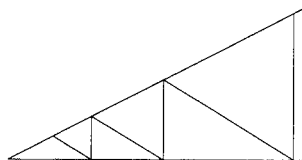


Fig. 4

Les segments de rang impair dans la chaîne ont des longueurs qui forment une suite géométrique. Il en va de même des segments de rang pair. La Fig. 5 montre la construction d'une spirale «équiangulaire» dans une croix à angle droit. Les segments de cette spirale ont des longueurs en progression géométrique.

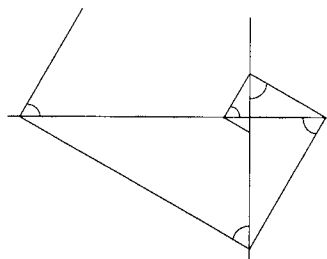


Fig. 5

Dans ces deux derniers cas, c'est par une *construction géométrique* que l'on passe d'un terme de la suite au suivant. Qui plus est, ces exemples suggèrent, peut-être plus que les précédents, qu'une suite géométrique peut être prolongée «à ses deux bouts».

Les suites d'intervalles de temps méritent d'être regardées à part. Par exemple, dans le paradoxe de Zénon appelé dichotomie, on est amené à additionner les temps successifs nécessaires pour parcourir la moitié d'une distance, puis la moitié du reste, puis la moitié du reste suivant, etc. Beaucoup de personnes admettent difficilement qu'une «somme» d'un nombre infini d'intervalles de temps puisse donner un intervalle de temps fini. Cette difficulté est encore bien plus visible lorsque l'on propose la dichotomie inversée : pour parcourir une certaine distance, il faut commencer par en parcourir la moitié ; pour parcourir cette moitié, il faut d'abord en parcourir la moitié, c'est à dire le quart de la distance donnée ; et pour parcourir ce quart, il faut commencer par parcourir un huitième, etc.

9.3.5 Un stock de fonctions qui s'accroît progressivement

Le stock des fonctions disponibles pour les élèves s'enrichit tout au long des études pour répondre aux besoins rencontrés dans des contextes divers et dans la construction de la théorie.

Les fonctions qui envoient x sur $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{10}$ sont en général trop peu connues. Il est intéressant de les faire figurer toutes sur un même graphique (par exemple sur l'intervalle $(-2, 2)$), et d'apprendre où elles se situent les unes par rapport aux autres selon les abscisses où on les considère. Ces fonctions ont quelque chose à voir avec la notion d'ordre de grandeur (et de petitesse). Elles préparent pour l'avenir la perception intuitive des séries de puissances.

Des fonctions variées, définies empiriquement ou analytiquement, peuvent être introduites selon les situations-problèmes rencontrées. Parmi celles qui sont données analytiquement, citons (à titre d'exemple) les fonctions linéaires par morceaux, les polynômes de degré peu élevé, les fonctions qui appliquent x sur $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, |x|$, plus toutes les fonctions qu'on peut déduire de celles-là par des translations ou des compressions dans les directions des axes. D'avoir ainsi manipulé quelques fonctions simples prépare les élèves à aborder des classes de fonctions plus vastes au troisième degré.

Les représentations graphiques des fonctions peuvent utilement être adaptées aux

circonstances. Le recours à des axes rectangulaires gradués régulièrement n'est pas la panacée : on songe en particulier aux diagrammes polaires, aux échelles logarithmiques (dont l'usage ne présuppose pas une connaissance profonde des logarithmes), aux diagrammes en bâton, etc.

Exemple 3 (14-15 ans ; emprunté à [AHA94])

Une ampoule de 100 W occupe le centre d'une sphère. Chaque cm^2 de la sphère reçoit une certaine puissance. La puissance reçue par unité d'aire s'appelle l'éclairement de la surface². Comment l'éclairement varie-t-il avec le rayon de la sphère ? Et si l'ampoule avait une puissance de 75 W ? de 50 W ?

Une ampoule ne rayonne habituellement pas son énergie de la même manière dans toutes les directions. Entre autres choses, elle n'envoie aucune lumière dans la direction de son culot. Nous supposerons néanmoins ici pour simplifier qu'elle irradie de manière symétrique autour de son centre.

Dans ces conditions, l'éclairement E sur une sphère de rayon r sera donné par la puissance de l'ampoule (100 W) divisée par l'aire de la sphère, soit

$$E = \frac{100}{4\pi r^2} \cong \frac{7,96}{r^2} \quad (\text{W} / \text{cm}^2).$$

Par exemple, à 3 mètres de la lampe

$$E = \frac{7,96}{300^2} \cong 0,000088 \quad (\text{W} / \text{cm}^2).$$

Si on double le rayon de la sphère, l'éclairement est divisé par 4. La Fig. 6 illustre ce résultat. Plus r augmente, plus le graphe s'approche de l'axe horizontal. Par contre, plus r s'approche de 0, plus le graphe monte sans avoir de valeur maximale. Les axes du repère sont des asymptotes au graphe.

Bien entendu, le modèle mathématique adopté n'est pas réaliste pour des valeurs de r trop petites, car alors on ne peut vraiment plus assimiler l'ampoule à une source de lumière ponctuelle. Donc, lorsque nous parlons de l'asymptote verticale du graphe, nous étudions le modèle mathématique pour lui-même, parce qu'il nous intéresse, tout en sachant que nous nous écartons de la réalité.

La Fig. 6 montre aussi l'éclairement dans le cas des ampoules de 75 W et 50 W, pour lesquelles on a respectivement

$$E = \frac{75}{4\pi r^2} \quad \text{et} \quad E = \frac{50}{4\pi r^2}.$$

L'éclairement est directement proportionnel à la puissance de l'ampoule.

² Ceci n'est tout à fait exact que si la puissance rayonnée par l'ampoule correspond à des longueurs d'onde perceptibles par l'oeil.

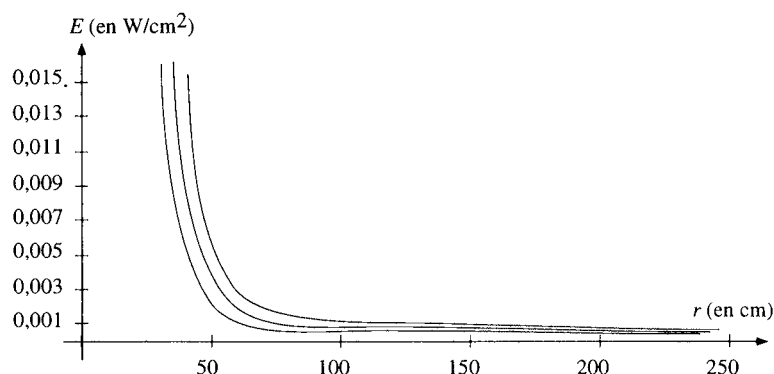


Fig. 6

9.3.6 L'apport des machines

Les machines à calculer et les ordinateurs, en exécutant les tâches routinières, permettent de réserver une attention accrue au sens.

Puisque les machines traitent les routines, l'esprit peut plus facilement se concentrer sur le fond, entre autres sur ce qu'il faut demander aux machines. La programmation et la création d'algorithmes obligent à comprendre les problèmes dans les grandes lignes et dans les détails. Elles entraînent leur propre évaluation, puisqu'une routine mal conçue passe à côté de l'objectif. Par ailleurs, les machines fournissent toujours des résultats approchés qu'il faut situer par des encadrements (nous avons déjà noté cela au n° 9.3.3).

Enfin, last but not least, en permettant une expérimentation aisée et rapide, les machines sont sources d'exploration et de conjectures.

Ces divers points ont déjà été illustrés, au niveau des deux premiers degrés, principalement dans le Chapitre 5, consacré aux nombres (cf. 5.4.4).

9.4 L'analyse au troisième degré

9.4.1 Etudier l'analyse dans des contextes

L'analyse est un instrument de modélisation de phénomènes très divers.

C'est là un constat que nous avons fait déjà au n° 9.1.1. Etudier l'analyse dans ses principaux contextes naturels a deux avantages : d'une part on comprend mieux les théorèmes lorsqu'on les a vu fonctionner dans des circonstances variées, d'autre part on trouve d'autant plus facilement la théorie appropriée à une situation donnée qu'on l'a déjà vu fonctionner dans le même contexte ou un contexte analogue.

Exemple 1 (vers 16-17 ans)

Les données qui suivent proviennent pour l'essentiel d'un périodique consacré à l'automobile. Le Tabl. 1 montre les vitesses atteintes par une voiture Saab 9000 i en 25 secondes. On a mis le tableau en graphique à la Fig. 1.

Faire un graphique des distances parcourues au cours de l'essai.

Ajuster à la courbe de la Fig. 1 le graphe d'un polynôme du quatrième degré. En se servant de cette représentation polynômiale de la courbe, chercher à nouveau la distance parcourue par la voiture au cours de l'essai.

Temps en secondes	Vitesse en m/s
0	
1	5,5
2	9,2
3	11,9
4	15,3
5	18
6	20,8
7	22,2
8	23,9
9	25,8
10	26,9
11	28,3
12	30
13	31,4
14	32,5
15	33,9
16	34,7
17	35,3
18	36,4
19	37,2
20	38
21	38,6
22	39,2
23	40
24	40,5
25	41,1

Tabl. 1

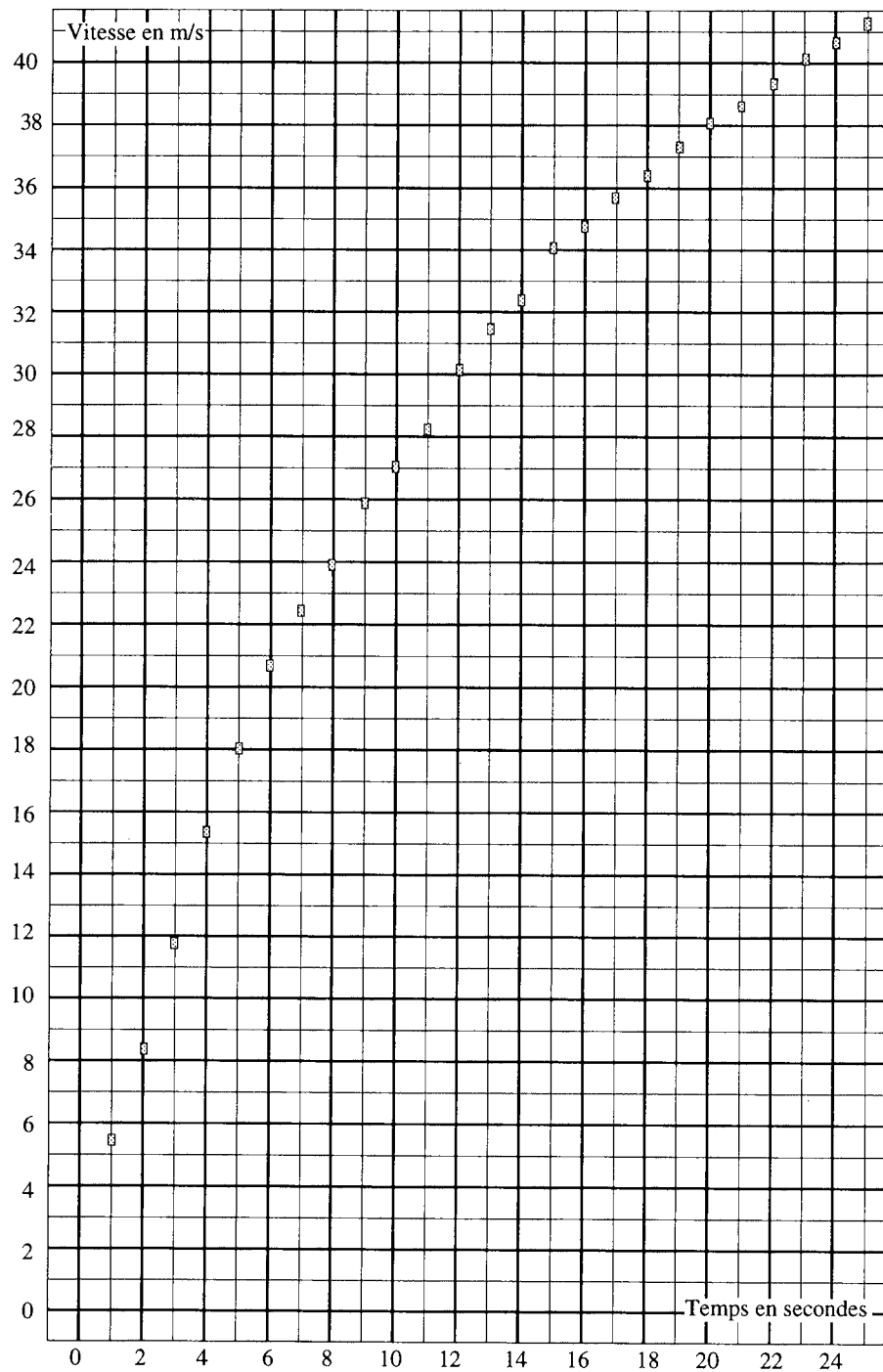


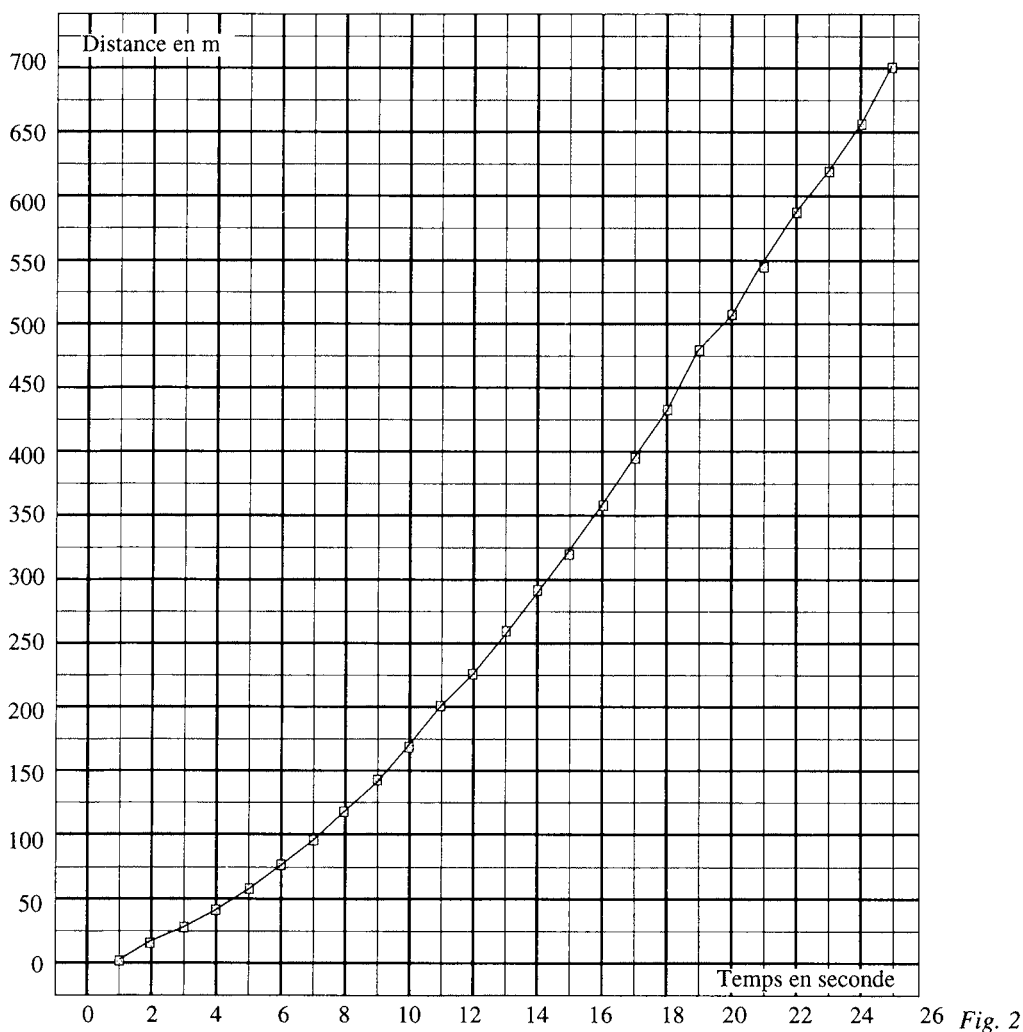
Fig. 1

Cette question est inspirée de [AHA94]. Il s'agit, en partant de vitesses instantanées, de déterminer des distances.

Une première idée est de commencer d'emblée à construire un graphique des distances parcourues en fonction du temps. Pendant la première seconde, la vitesse moyenne lue sur le graphique est de 2,25 m/s. Remplaçons le mouvement réel, pendant cette première seconde, par un mouvement à vitesse constante. Le graphique distance-temps de ce mouvement est tracé à la Fig. 2 (segment de pente 2,25 entre les abscisses 0 et 1).

Pendant la 2^e seconde, la vitesse moyenne est environ de 7,35 m/s. Faisons-lui correspondre un mouvement uniforme entre les instants 1 et 2. Le graphe de ce mouvement s'enchaîne au précédent sur la Fig. 2.

Continuons ainsi de proche en proche. Ce travail devient rapidement lassant. Certains élèves remarqueront sans doute qu'il est plus facile de travailler sur le tableau : en effet, de toutes façons, on doit calculer les vitesses moyennes ; comme chaque mouvement partiel dure une seconde, la distance parcourue pendant une seconde donnée est numériquement égale à la vitesse moyenne pendant cette seconde.



Néanmoins, il est intéressant d'esquisser la Fig. 2. Elle montre comment l'intégration des vitesses peut correspondre à la construction d'une fonction affine par morceaux.

On note en particulier, à la fin du calcul, que la distance totale parcourue est d'environ 700 m.

Une deuxième idée consiste à partir du tableau tout en suivant l'avancement du calcul sur le graphique des vitesses. Estimons la distance parcourue pendant chaque seconde. Pendant la première seconde, la vitesse passe de 0 m/s à 5,5 m/s. Donc la distance e_1 à la fin de cette seconde est telle que

$$0 \times 1 < e_1 < 5,5 \times 1.$$

De même, pendant la deuxième seconde, la vitesse passe de 5,5 m/s à 9,2 m/s et la distance e_2 correspondante est telle que

$$5,5 \times 1 < e_2 < 9,2 \times 1.$$

Sur la Fig. 3 (page suivante), on a représenté pour la première seconde deux vitesses constantes, égales à 0 m/s et 5,5 m/s. Et de même pour la deuxième seconde, deux vitesses constantes, l'une égale à 5,5 m/s et l'autre à 9,2 m/s.

On continue ainsi jusqu'à la 25^e seconde, la distance e_{25} étant telle que

$$40,5 \times 1 < e_{25} < 41,1 \times 1.$$

La distance totale $e = e_1 + e_2 + \dots + e_{25}$ parcourue pendant les 25 secondes vérifie donc

$$675,5 = (0 \times 1 + 5,5 \times 1 + \dots + 40,5 \times 1) < e < (5,5 \times 1 + 9,2 \times 1 + \dots + 41,1 \times 1) = 716,6.$$

C'est une première approximation de e . On pourrait en obtenir de meilleures par un calcul analogue fait sur des intervalles de temps plus petits. Toutefois, si on le fait, on devra tenir compte de ce que les erreurs d'arrondi seront plus nombreuses.

Si on en revient au graphique (Fig. 3), on constate que la somme de gauche

$$0 \times 1 + 5,5 \times 1 + \dots + 40,5 \times 1$$

est égale à la somme des aires des rectangles situés sous la courbe. La somme de droite

$$5,5 \times 1 + 9,2 \times 1 + \dots + 41,1 \times 1$$

est égale à la somme des aires des rectangles qui dépassent la courbe. Ainsi l'encadrement de la distance parcourue est aussi l'encadrement de l'aire sous la courbe de vitesse par les sommes des aires des rectangles inscrits et circonscrits.

Considérer des intervalles de temps de plus en plus petits améliore l'approximation tant de l'espace parcouru que de l'aire sous la courbe de vitesse. Cela nous amène à un résultat imprévu : calculer l'aire sous la fonction vitesse (dans les bonnes unités, indiquées sur les axes) revient à calculer l'espace parcouru !

Une troisième idée consiste, comme le demande l'énoncé du problème, à remplacer le graphique des vitesses par un polynôme.

La vitesse est nulle au temps $t = 0$. Donc, un polynôme du quatrième degré modélisant la courbe n'aura pas de terme indépendant. Il sera de la forme

$$v(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt.$$

Nous devons déterminer au mieux les coefficients a , b , c , d . Choisissons quatre points à peu près également répartis sur l'intervalle $[0,25]$, par exemple

$$3, \quad 9, \quad 1 \quad \text{et} \quad 22.$$

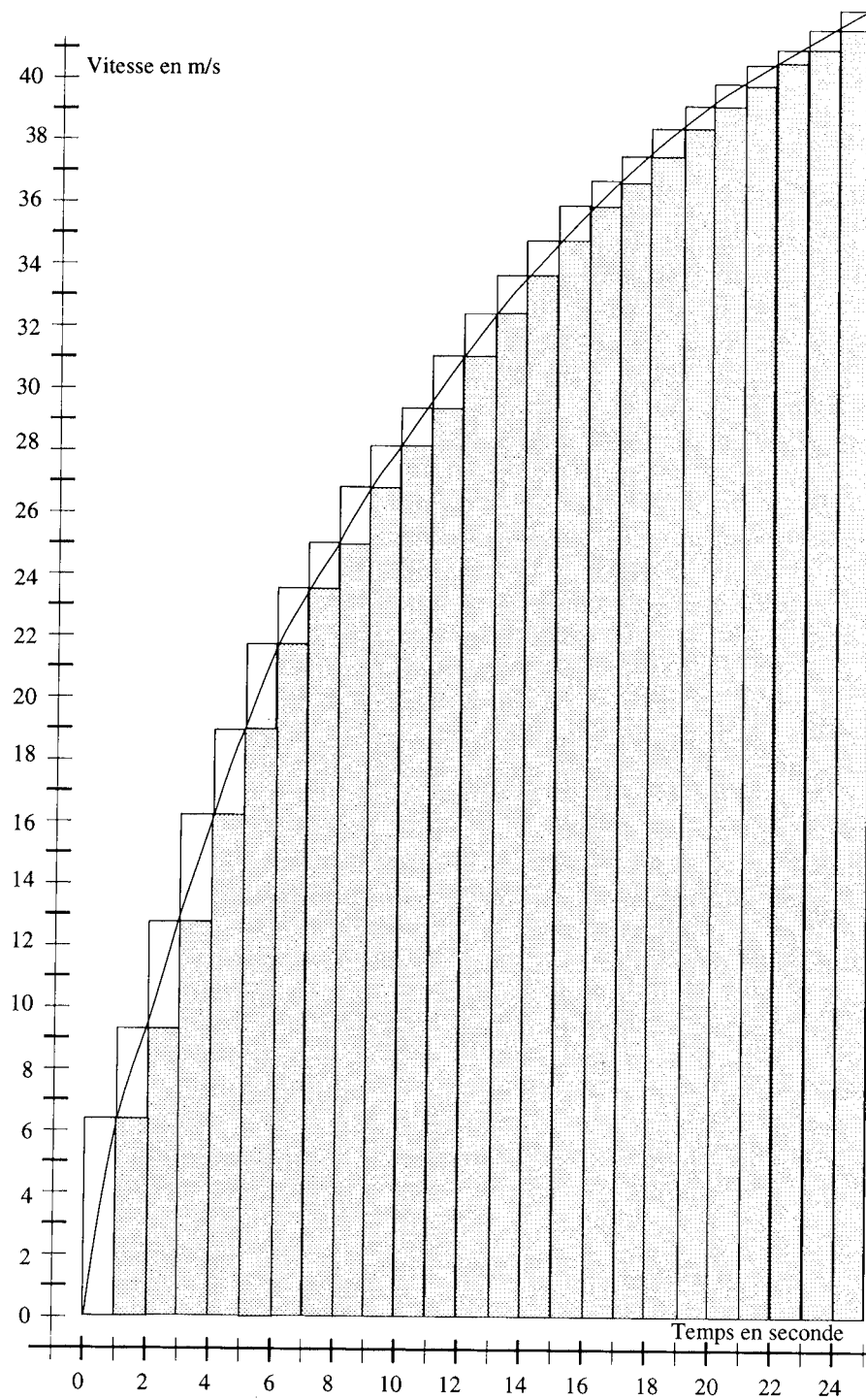


Fig. 3

Exprimons ensuite, en les lisant dans le tableau, les valeurs que nous requérons pour $v(t)$ en ces points. Il vient

$$\begin{aligned}v(3) &= a.3^4 + b.3^3 + c.3^2 + d.3 = 11,9 , \\v(9) &= a.9^4 + b.9^3 + c.9^2 + d.9 = 25,8 , \\v(16) &= a.16^4 + b.16^3 + c.16^2 + d.16 = 34,7 , \\v(22) &= a.22^4 + b.22^3 + c.22^2 + d.22 = 39,2 .\end{aligned}$$

Nous demandons la solution de ce système de quatre équations à quatre inconnues à un ordinateur (via Mathbook, Math pour Windows, Sydex). Celui-ci nous fournit

$$\begin{aligned}a &= -0,000196 & b &= 0,011922 \\c &= -0,303460 & d &= 4,775043.\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que la vitesse $v(t)$ est la dérivée de la distance $e(t)$

$$e'(t) = v(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt.$$

Mais nous savons aussi que toutes les fonctions qui ont ce polynôme pour dérivée (et qui sont donc candidates pour $e(t)$) sont de la forme

$$e(t) = a\frac{t^5}{5} + b\frac{t^4}{4} + c\frac{t^3}{3} + d\frac{t^2}{2} + C ,$$

où C est une constante quelconque. Mais comme la voiture se trouvait à la distance nulle en $t = 0$, nous avons $e(0) = 0$ et donc $C = 0$. D'où

$$\begin{aligned}e(t) &= a\frac{t^5}{5} + b\frac{t^4}{4} + c\frac{t^3}{3} + d\frac{t^2}{2} , \\&= -3,92 \times 10^{-5}t^5 + 0,002981t^4 - 0,101153t^3 + 2,387522t^2 .\end{aligned}$$

Nous obtenons enfin, en remplaçant t par 25 et en nous souvenant que nous travaillons en mètres et secondes,

$$e(25) \cong 693 \text{ (mètres).}$$

9.4.2 Tableaux, graphiques, formules

Les tableaux, les graphiques et les formules sont trois moyens complémentaires de saisir les fonctions.

L'exemple 1 (n° 9.4.1) suffit à montrer que différentes présentations d'une fonction peuvent induire différentes formes de solution d'un problème. Les tableaux, graphiques et formules sont trois registres de la langue mathématique, à pratiquer jusqu'à la fin des études.

9.4.3 Apprendre à faire des approximations

Majorer, minorer, approcher sont des buts fondamentaux du cours d'analyse.

Vers la fin du secondaire, ces opérations s'appliquent à de nouvelles fonctions. Un type d'approximation commode, et qui s'applique à la plupart des fonctions usuelles, est celui qui prend la forme

$$|f(x') - f(x'')| \leq k|x' - x''|.$$

Exemple 2 (vers 16-17 ans)

Quelles sont les racines de l'équation $x^3 + 2 = x$?

Remarque préliminaire.

Nous supposons que les élèves auxquels on pose cette question ont déjà rencontré et résolu un problème du type suivant : on demande la racine d'une équation

$$f(x) = x$$

lorsque le graphe de $f(x)$ se présente comme sur la Fig. 4.

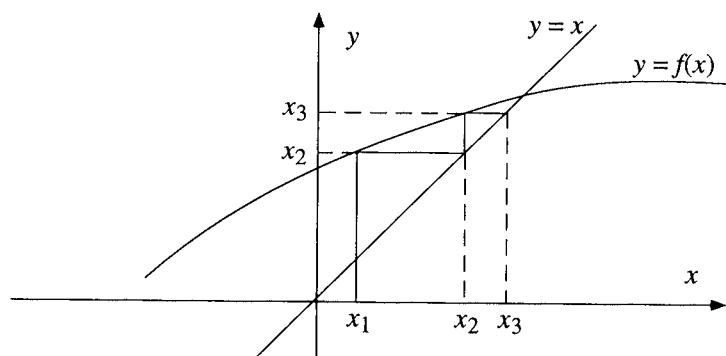


Fig. 4

Le problème est de trouver une abscisse x telle que $f(x) = x$. On essaie une valeur x_1 et on calcule

$$x_2 = f(x_1).$$

On constate que x_1 n'était pas la racine cherchée. On calcule alors

$$x_3 = f(x_2),$$

puis

$$x_4 = f(x_3),$$

et en général

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

La suite des x_n converge vers la racine cherchée, ce qu'illustre la Fig. 4.

Venons-en maintenant à la question posée. Le problème revient à trouver les points d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe $y = x^3 + 2$. La situation rapidement esquissée est celle que montre la *Fig. 5*. Il est clair que l'équation proposée n'a qu'une seule racine, et que celle-ci est inférieure à -1 .

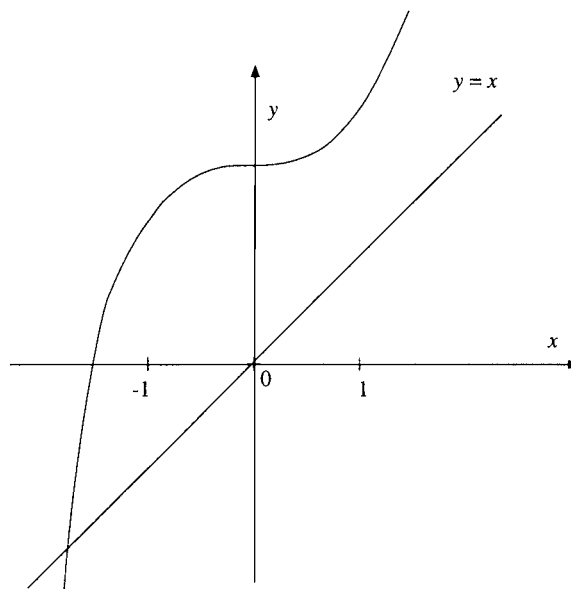


Fig. 5

Essayons de la chercher par approximations successives, par exemple en posant

$$x_1 = -1,$$

puis

$$x_2 = x_1^3 + 2,$$

$$x_3 = x_2^3 + 2,$$

et généralement

$$x_{n+1} = x_n^3 + 2.$$

La *Fig. 6* (voir page suivante) montre que ces approximations, au lieu de s'approcher de la racine cherchée, s'en écartent sans cesse davantage.

Que faire pour obtenir des approximations convergentes ? Essayons de nous rapprocher de la situation de la *Fig. 4*. L'équation proposée est équivalente à

$$x = g(x) = \sqrt[3]{x - 2}.$$

Les graphes correspondants sont esquissés à la *Fig. 7* (voir page suivante), en même temps que le comportement des approximations partant de $x_1 = -1$.

La suite a bien l'air ici de converger. Essayons de nous en assurer (avec les élèves qui font le plus de mathématiques).

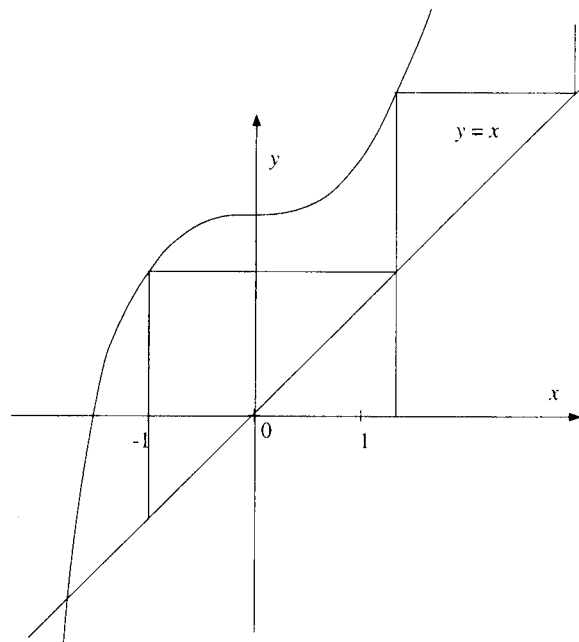


Fig. 6

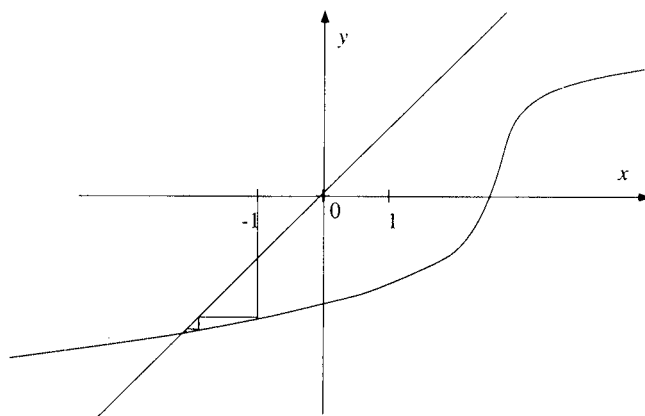


Fig. 7

La formule

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n - 2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

nous assure que si $x_n < 0$, alors $x_{n+1} < 0$. Si donc nous choisissons $x_1 < 0$, nous aurons $x_n < 0$, pour toutes les valeurs de n . Le théorème de la moyenne nous dit que

$$|g(x_2) - g(x_1)| = |g'(\theta)(x_2 - x_1)|,$$

où θ est une abscisse située entre x_1 et x_2 . D'où grâce à (1)

$$|x_3 - x_2| = |g'(\theta)| |x_2 - x_1|,$$

et encore

$$|x_3 - x_2| \leq k |x_2 - x_1|, \quad (2)$$

où k est une borne supérieure de la dérivée $g'(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. Cette dérivée atteint son maximum en $x = 0$, où elle vaut

$$\frac{1}{3 \sqrt[3]{4}}.$$

Nous pouvons donc choisir $k < 1$.

De la même façon que nous avons démontré (2), nous pouvons démontrer que

$$|x_4 - x_3| \leq k |x_3 - x_2|,$$

ce qui, compte tenu de (2), nous donne

$$|x_4 - x_3| \leq k^2 |x_2 - x_1|.$$

On raisonne ainsi de proche en proche jusqu'à obtenir pour n quelconque

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n-1} |x_2 - x_1|.$$

Mais puisque $k < 1$, et donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = \lim_{n \rightarrow \infty} k^{n-1} = 0,$$

nous obtenons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

Ce dernier résultat nous assure, grâce au critère de Cauchy, que la suite des x_n est convergente. Appelons x^* sa limite. En passant à la limite dans l'équation (1), nous obtenons alors que

$$x^* = \sqrt[3]{x^* - 2},$$

et donc x^* est bien la racine cherchée.

9.4.4 Etudier les facettes des phénomènes

Les phénomènes liés à l'analyse ont des facettes nombreuses, qui contribuent à en donner l'intuition globale.

Les concepts fondamentaux de l'analyse sont introduits au troisième degré du secondaire. Il s'agit principalement de la limite, la dérivée, la différentielle, la primitive, l'intégrale, avec leur cortège de représentations graphiques, cinématiques et autres.

Comme premier exemple, considérons l'intégrale d'une fonction continue. Il est significatif de la voir approcher, comme nous l'avons fait au n° 9.4.1 (Exemple 1),

par l'enchaînement d'une suite de fonctions affines, par des sommes d'aires de rectangles et par une primitive.

Considérons ensuite la notion de tangente, et les notions parentes de dérivée et différentielle. Une définition ne suffit pas à cerner chacune de ces notions et à la rendre disponible à l'esprit. Il importe en outre d'avoir reconnu, par exemple en ce qui concerne la tangente en un point d'une courbe,

- qu'elle est la droite qui «frôle le mieux» («qui touche») la courbe au point considéré ;
- qu'elle peut s'obtenir par l'approximation affine, particulièrement commode dans le cas des polynômes ;
- que, dans le cas où la courbe est le graphique temps–distance d'un mouvement, son équation est celle du mouvement uniforme tangent, à un instant donné, à ce mouvement ;
- que, dans le cadre de la géométrie algébrique, son équation jointe à celle de la courbe forme un système qui admet une racine double (au moins) correspondant au point de tangence.

Il importe aussi d'avoir reconnu

- que la tangente peut traverser la courbe au point de tangence ;
- qu'elle peut aussi la traverser (ou la frôler) en d'autres points ;
- qu'il y a sur certaines courbes des points qui n'ont pas de tangente ;
- qu'il peut y avoir des points (comme l'origine pour la fonction $\sqrt{x}$) où il y a une tangente (en l'occurrence plutôt une demi-tangente), mais pas de dérivée ;
- etc.

9.4.5 Un stock de fonctions qui s'accroît progressivement

Au long de l'enseignement de l'analyse, de nouvelles situations-problèmes amènent à considérer des classes de fonctions plus difficiles d'accès. La motivation principale pour approfondir la théorie vient de ce que le stock de fonctions que l'on veut étudier se diversifie et se complique.

L'enseignement systématique de l'analyse au troisième degré s'intéresse naturellement d'abord aux fonctions les plus simples, déjà rencontrées auparavant : les fonctions polynomiales et polynomiales par morceaux. Il n'est pas besoin pour les étudier du concept formalisé de limite, et encore moins de celui de continuité. Les dérivées

et les primitives de ces fonctions ne produisent pas de fonctions d'un type nouveau.

Les fonctions homographiques, et plus généralement les fonctions rationnelles, font porter l'attention sur les limites à l'infini et les limites infinies, qui sont des limites particulières. Par ailleurs, ces fonctions amènent à introduire les fonctions logarithmiques, si l'on veut que chaque fonction ait une primitive.

Toutefois, des questions moins théoriques (les tremblements de terre, les objectifs photographiques, ...) peuvent amener les fonctions logarithmiques, de même que des questions de croissance amènent les exponentielles, et que l'étude des phénomènes périodiques amènent les fonctions trigonométriques. On débouche là sur des fonctions transcendantes, qui peuvent encore être abordées de façon assez intuitive par les élèves qui font peu d'heures de mathématiques, mais motivent l'introduction de la limite pour les élèves qui en font davantage.

Les fonctions mentionnées jusqu'ici appartiennent à l'ensemble des fonctions dites *simples*. Leurs dérivées et primitives s'expriment assez simplement.

Il ne faut pas attendre longtemps toutefois pour rencontrer des fonctions dont les primitives ne s'expriment pas en fonction de fonctions simples. Tel est le cas par exemple pour la fonction de répartition normale en probabilité (cf. n° 8.4.3). Ces problèmes amènent à approfondir la notion d'intégrale.

Il serait certes irréaliste d'étudier systématiquement ces questions, fût-ce avec les élèves qui vont le plus loin en mathématiques. Ceux-ci toutefois auraient intérêt à réaliser que l'analyse est un laboratoire où se créent des fonctions nouvelles, non seulement par le biais des intégrales, mais aussi, si on arrive à leur en parler quelque peu, par celui des équations différentielles.

Rappelons enfin que lorsqu'on arrive à approfondir les notions de base de l'analyse, on construit des fonctions qui n'ont guère d'autre usage que d'aider à comprendre les subtilités techniques rencontrées dans les définitions, et le caractère nécessaire de ces subtilités.

9.4.6 Les machines à calculer et les ordinateurs, en exécutant les tâches routinières, permettent de réserver une attention accrue au sens.

Il nous suffira, pour l'essentiel, de renvoyer ici aux commentaires de ce principe, déjà énoncé au n°9.3.6.

Soulignons toutefois ici le grand intérêt, pour l'apprentissage de l'analyse, des logiciels qui combinent les calculs littéraux, les calculs numériques et la production de graphiques.

Soit par exemple à trouver une racine d'un polynôme en appliquant la méthode de Newton. Nous nous référons ici au logiciel DERIVE et à l'exposé de C. Ginoux et R. Gossez [Gin94]. On demande à la machine le graphe du polynôme en question et on y repère la racine à calculer. On amène le curseur sur l'axe des x à hauteur de la racine, et on demande au logiciel une première approximation de celle-ci. Pour aller plus loin, on applique la méthode de Newton, et c'est la machine qui calcule la dérivée du polynôme et applique l'algorithme de Newton.

Enfin, lorsqu'on s'interroge sur les conditions de convergence de l'algorithme, on peut regarder ce qui se passe graphiquement) lorsqu'on fait partir l'algorithme de valeurs diverses, dont certaines engendrent une suite convergente et d'autres non. On s'aide ainsi à conjecturer les conditions qui assurent la convergence.

BIBLIOGRAPHIE PAR CHAPITRE

Les travaux sur les mathématiques élémentaires et la didactique des mathématiques sont extrêmement nombreux. Il ne nous était pas possible de citer ici tous ceux qui, au fil des années écoulées, ont contribué à nous apporter convictions et opinions. Nous reprenons bien entendu dans cette bibliographie ceux que nous avons explicitement cités dans le texte. Nous y avons ajouté un certain nombre de travaux récents, pour permettre au lecteur de pousser plus loin sa réflexion.

Avant-propos

- [Coc82] W.H. Cockroft, coord. *Mathematics counts, Report of the Committee of Enquiry into the Teaching of Mathematics in School*. H.M.S.O., Londres, 1982.
- [Dac89] D.Dacunha Castelle. *Rapport de la mission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Education Nationale, de la Jeunesse et des Sports, Paris, 1989.
- [Dan90] P. Danblon, coord. *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté Française de Belgique, Rapport de la Commission scientifique d'étude de l'enseignement des mathématiques et des sciences*. Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles, 1990.
- [Noë91] G. Noël, coord. *Enseigner la mathématique ? Livre blanc sur l'enseignement des mathématiques en Communauté Française de Belgique*. Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Mons, 1991.
- [Rom89] T.A. Romberg, coord. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 1989.

- [Rou95] N. Rouche. *L'enseignement des mathématiques d'hier à demain*. CREM, Nivelles, 1995.
- [SOC94] P. Mahoux, coord. *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier cycle de l'enseignement secondaire*. Cabinet du Ministre de l'Education, Bruxelles, 1994.

Chap. 1 Compétences

- [Dan90] P. Danblon, coord. *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté Française de Belgique, Rapport de la Commission scientifique d'étude de l'enseignement des mathématiques et des sciences*. Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Bruxelles, 1990.
- [Fou94] G. Fourez. Les "socles de compétences". *La Revue Nouvelle*, 49 :12-16, 1994.
- [Lak84] I. Lakatos. *Preuves et réfutations, la logique de la découverte mathématique*. Hermann, Paris, 1984. Traduction Balacheff, Laborde.
- [Pol45] G. Polya. *How to solve it, a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press, Princeton, 1945.
- [Rou89] N. Rouche. Ils doivent savoir calculer ! *Mathématique et Pédagogie*, 70 :5-23, 1989.
- [Sch85] A. Schoenfeld. *Mathematical problem solving*. Academic Press, Orlando, 1985.
- [SOC94] P. Mahoux, coord. *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier cycle de l'enseignement secondaire*. Cabinet du Ministre de l'Education, Bruxelles, 1994.
- [Wit87] E. C. Wittmann. *Elementargeometrie und Wirklichkeit, Einführung in geometrisches Denken*. Vieweg, Braunschweig, 1987. Une traduction française de cet ouvrage, par C. Bouckaert, sera publiée prochainement par le CREM.

Chap. 2 Enseigner les mathématiques aujourd'hui

- [Apé82] R. Apéry et al. *Penser les mathématiques*. Seuil, Paris, 1982.

- [Art78] E. Artin. *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1978.
- [Bar86] E. Barbin et B. Charlot. *L'enseignement par situations-problèmes au collège*. IREM du Mans, Le Mans, 1986.
- [Bas84] H. Bassis. *Je cherche, donc j'apprends*. Editions Sociales, Paris, 1984.
- [Bko91] R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche. *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. A. Colin, Paris, 1991.
- [Bou60] N. Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris, 1960.
- [Bue82] F. Buekenhout. Goals of geometry teaching based on the spiral principle. In G. Noël, coord., *Colloque International sur l'Enseignement de la Géométrie*, pages 7-21. Université de l'État à Mons, 1982.
- [Car86] J. Carlot et al. *Rénover*. Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Mons, 1979-86. 14 volumes.
- [Cha85] B. Charlot. La validation des concepts et de l'activité mathématiques. *Dialogue*, 54bis :5-7, 1985.
- [Dah86] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*. Seuil, Paris, 1986.
- [Dew90] J. Dewey. *Démocratie et éducation*. A. Colin, Paris, 1990.
- [Ern91] P. Ernest. *The philosophy of mathematics education*. Falmer Press, London, 1991.
- [Fre83] H. Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, Dordrecht, 1983.
- [Gau94] G. Gaulin et al., coord. *Actes du Septième Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques*, Québec, 1994. Presses de l'Université Laval.
- [Jon94] P. Jonnaert. *L'enfant géomètre, une autre approche de la didactique des mathématiques à l'école fondamentale*. Plantyn, Bruxelles, 1994.
- [Kle74] F. Klein. *Le programme d'Erlangen, considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Gauthier-Villars, Paris, rééd. 1974.
- [Kli72] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford U.P., Oxford, 1972.
- [Kli77] M. Kline. *Calculus, an intuitive and physical approach*. J. Wiley, New York, 1977.

- [Lak84] I. Lakatos. *Preuves et réfutations, la logique de la découverte mathématique*. Hermann, Paris, 1984. Traduction Balacheff, Laborde.
- [Man87] L. Mancini Proia, *Mathématiques pour les élèves de 14 à 17 ans, en ont-ils vraiment besoin ?* Mathématiques et Pédagogie, 87(1):5-23, 1987.
- [Nac75] J. Nachtergaele. Bilan de 15 ans de réforme (2). *Mathématique et Pédagogie*, 75(3):139-147, 1975.
- [Pap64] G. Papy. *Mathématique moderne 1*. Didier, Bruxelles, 1964.
- [Pap65] G. Papy. *Mathématique moderne 2*. Didier, Bruxelles, 1965.
- [Pia64] J. Piaget. *Six études de psychologie*. Gonthier, Paris, 1964.
- [Pir90] V. Piron, coord. *La mathématique à l'école fondamentale : la résolution de problèmes*. Communauté Française, Bruxelles, 1990.
- [Pol45] G. Polya. *How to solve it, a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press, Princeton, 1945.
- [Rou92] N. Rouche. *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Didier-Hatier, Bruxelles, 1992.
- [Ste87] S. K. Stein. Gresham's law : algorithm drives out thought. *For the Learning of Mathematics*, 7 :2-4, 1987.
- [Tre86] A. Treffers. *Three dimensions : a model of theory and goal description in mathematics instruction, the Wiskobas project*. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [Wit87] E. C. Wittmann. *Elementargeometrie und Wirklichkeit, Einführung in geometrisches Denken*. Vieweg, Braunschweig, 1987. Une traduction française de cet ouvrage, par C. Bouckaert, sera publiée prochainement par le CREM.
- [Wit90] E.C. Wittmann et G. Muller. When is a proof a proof ? *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, 42 :15-42, 1990.

Chap. 4 Grandeurs

- [And89] L. Andrianne, coord. *La mathématique à l'école fondamentale : les grandeurs*, Bruxelles, 1989. Communauté Française.
- [Blo82] M. Blondel. *Mots tome VI, grandeur, mesure*. Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public, Paris, 1982.
- [Fre83] H. Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, Dordrecht, 1983.

- [Leb75] H. Lebesgue. *La mesure des grandeurs*. Blanchard, Paris, rééd. 1975.
- [Rou92] N. Rouche. *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Didier-Hatier, Bruxelles, 1992.
- [Rou94] N. Rouche. Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères-IREM*, 15 :25-36, 1994.
- [Sot93] I. Soto et N. Rouche. Résolution de problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens. *Repères-IREM*, 14 :5-19, 1993.

Chap. 5 Nombres

- [And80] B. Andrès et L. Lismont. *Approche des nombres réels en troisième à partir de la notion de mesure*. GEM-UCL, Louvain-la-Neuve, 1980. Mémoire de licence sous la direction de N. Rouche.
- [Ari69] Aristote. *Physique*. Les Belles Lettres, Paris, 1983 et 1969. 2 volumes.
- [Art78] E. Artin. *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1978.
- [Bid91] J. Bideaud et al., coord. *Les chemins du nombre*. Presses universitaires de Lille, Lille, 1991.
- [Bou60] N. Bourbaki. *Eléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris, 1974.
- [Bri89] R. Brissiaud. *Comment les enfants apprennent à calculer ; au delà de Piaget et de la théorie des ensembles*. Retz, Paris, 1989.
- [Die85] F. Van Dieren-Thomas et N. Rouche. *Mesures, pavages et nombres irrationnels*. GEM, Louvain-la-Neuve, 1985.
- [Fay90] M. Fayol. *L'enfant et le nombre*. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1990.
- [Fes77] C. Festraets et G. Noël. La précision des mini calculatrices. *Mathématique et Pédagogie*, 11/12 :151-185, 1977.
- [Fre83] H. Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, Dordrecht, 1983.
- [Gal74] E. Galion, coord. *Rencontre sur l'enseignement élémentaire, Quatrième semaine internationale*. CEDIC, Paris, 1974.
- [GEM81] GEM. *Rencontres avec l'infini*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1981.
- [Hou94] G. Van Hout. *Et que le nombre soit*. De Boeck, Bruxelles, 1994.
- [Myx75] A. Myx. *Six thèmes pour six semaines*. CEDIC, Paris, 1975.

- [Noë81] G. Noël. Calcul numérique approché ou approche du calcul numérique ? *Mathématique et Pédagogie*, 81 :13-23, 1981.
- [Noë92a] G. Noël. Les débuts de l'analyse. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, 44 :175-181, 1992.
- [Rob73] M. Robert. *Sommes de naturels, additions dans N*. CEDIC, Paris, 1973.

Chap. 6 Géométrie

- [Art78] E. Artin. *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1978.
- [Bor86] F. Borceux. *Invitation à la géométrie*. CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.
- [Cho64] G. Choquet. *L'enseignement de la géométrie*. Hermann, Paris, 1964.
- [COJ95] COJEREM. *Géométrie en situations*. De Boeck, 1995.
- [Cui95] G. Cuisinier, D. Legrand et J. Vanhamme. *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe*. Academia-Erasme-GEM, Louvain-la-Neuve, 1995.
- [Cul94] C. Culus et M. Frédérickx. Cube et fonctions ... histoire vécue en première et troisième secondaire. *Mathématique et Pédagogie*, 95 :73-78, 1994.
- [Dem95] M. Demal. *Quelle géométrie à l'école primaire pour une école de la réussite ?* Mimeo, GEPEMA-ISEPCF-UREM, Mons, 1995.
- [Doc92] C. Docq. *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'âge de douze ans*. Thèse de doctorat, Université de Louvain, Louvain-la-Neuve, 1992.
- [Eti95] N. Etienne. *La géométrie des transformations à l'école*. UREM-ULB, Bruxelles, 1995.
- [Fre73] H. Freudenthal. *Mathematics as an educational task*. D. Reidel, Dordrecht, 1973.
- [Fre95] H. Freudenthal. *Le cas de la géométrie, traduction du Chap. 16 de [Fre73]*. UREM, 1995. Trad. M. Parker.
- [Fré94b] C. Frédérickx. *Contribution au problème du sens des mathématiques par la perspective et la géométrie projective*. UREM-ULB, Bruxelles, 1994. Mémoire de licence sous la direction de F. Buekenhout et M. Parker.
- [Fré95a] M. Frédérickx. *Une étude de coniques*. CeDoP-ULB, 1995.

- [GEM81] GEM. *Rencontres avec l'infini*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1981.
- [GEM82] GEM. *Activités géométriques pour les écoles professionnelles et les autres*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1982.
- [Gil87] Th. Gilbert. *La perspective en questions*. GEM et CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987.
- [Had45] J. Hadamard. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine des mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1945. Nouvelle éd. 1975.
- [Hut74] R. Hutin. *L'enseignement de la mathématique*. Delta, Vevey, 1974.
- [Kry92] M. Krysinska. *Géométrie dans l'espace et géométrie de l'espace*. Academia-Erasme-GEM, Louvain-la-Neuve, 1992.
- [Noë95] G. Noël et B. Honclaire. *Images*. CDS-UMH, Mons, 1995.
- [Pap64] G. Papy. *Mathématique moderne 1*. Didier, Bruxelles, 1964.
- [Pap65] G. Papy. *Mathématique moderne 2*. Didier, Bruxelles, 1965.
- [Poi47] H. Poincaré. *Science et méthode*. Flammarion, Paris, 1908 (nouveau tirage 1947).
- [Rou82] N. Rouche et coll. *L'archipel des isométries*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1982.
- [Rou95] N. Rouche. *L'enseignement des mathématiques d'hier à demain*. CREM, Nivelles, 1995.
- [Sch95] M. Schneider et H. Vanderhoeven. *Des situations pour enseigner la géométrie de la première à la quatrième*. De Boeck, Louvain-la-Neuve, 1995.
- [Wit87] E. C. Wittmann. *Elementargeometrie und Wirklichkeit, Einführung in geometrisches Denken*. Vieweg, Braunschweig, 1987. Une traduction française de cet ouvrage, par C. Bouckaert, sera publiée prochainement par le CREM.
- [Wit95] E. C. Wittmann. *Idées fondamentales de la géométrie élémentaire comme base pour le développement de curriculum*. CREM, Nivelles, 1995. Compte rendu par N. Etienne et F. Buekenhout d'un exposé de E.C. Wittmann de 1994.

Chap. 7 Algèbre

- [Bar85] S. Baruk. *L'âge du capitaine, de l'erreur en mathématique*. Seuil, Paris, 1985.
- [Bat95] B. Baton, R. Giot et Y Noël. *L'initiation à l'algèbre*. CDS-UMH, Mons, 1995.
- [Bue83] F. Buekenhout. Aventure parmi les groupes simples. *Mathématique et Pédagogie*, 44 :5-12, 1983.
- [Cas80] E. Castelnuovo et M. Barra. *La mathématique dans la réalité*. CEDIC, Paris, 1980.
- [Muy95] P. Van Muylen. *Applications d'algèbre linéaire*. CDS-UMH, Mons, 1995. Mémoire de licence sous la direction de G. Noël.
- [Noë95a] G. Noël, coord. Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ? *Mathématique et Pédagogie*, 102 :5-28, 1995.
- [Tig90] J.-P. Tignol. *Encyclopédie Philosophique Universelle, tome II*, pages 60-61. Presses Universitaires de France, Paris, 1990.
- [Vil95] M. Vilers. *L'algèbre linéaire par ses applications interdisciplinaires*. CDS-UMH, Mons, 1995. Mémoire de licence sous la direction de G. Noël.

Chap. 8 Statistiques et probabilités

- [Amb91] G. Ambridge et coll. SMP 11-16, *Teachers guide to handling data*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Cas80] E. Castelnuovo et M. Barra. *La mathématique dans la réalité*. CEDIC, Paris, 1980.
- [Con74] Condorcet. *Mathématique et Société*. Hermann, Paris, 1974. Choix de textes et commentaires par Roshdi Rashed.
- [Dep94] C. Depotte. *Les difficultés des probabilités*. CDS-UMH, Mons, 1994. Mémoire de licence sous la direction de G. Noël.
- [Dho87] J. Dhombres et al. *Mathématiques au fil des âges*. Gauthier-Villars, Paris, 1987.
- [Eng75] A. Engel. *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. CEDIC, Paris, 1975.

- [ERM82] ERMEL. *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. Sermap-Hatier, 1982.
- [Hab75] L. Habran et C. Linsingh. *Mathématique moderne, livre du maître*. Labor, 1975.
- [Hab75a] L. Habran et C. Linsingh. *Mathématique moderne, livrets de l'élève, MMPI-MMP2*. Labor, 1975.
- [Hil87] P. J. Hilton et al. *Real math*. Open Court, LaSalle, Illinois, 1987.
- [Kol56] A. N. Kolmogorov. *Foundations of the theory of probability*. Chelsea, New York, 1956.
- [Lin80] A. Vander Linden. L'arbre, outil pédagogique en calcul des probabilités. *Mathématique et Pédagogie*, 80(25), 1980.
- [Mah90] Mahbub ul Haq. *Rapport mondial sur le développement humain 1990*. Economica, Paris, 1990.
- [Mor94] R. Morris éd. *L'enseignement de la statistique*. UNESCO, Paris, 1994.
- [Noë90] G. Noël et al. *Premiers rendez-vous probabilistes*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, Mons, 1990.
- [Noë93] G. Noël. *Seconds rendez-vous probabilistes*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, Mons, 1993.
- [Pas63] B. Pascal. *Œuvres complètes*. Seuil, Paris, 1963.
- [Pel82] M. Peltier, N. Rouche et M. Manderick. *Contremanuel de statistique et probabilité*. Vie Ouvrière, Bruxelles, 1982.
- [Pes87] A. Pesci et M. Reggiani. *Statistica e Probabilità nella scuola media inferiore : una proposta didattica*. Consiglio Nazionale della Ricerche, Pavia, 1987.
- [Sha92] J. M. Shaughnessy. Research in probability and statistics : reflections and directions. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pages 465-494. NCTM, McMillan, 1992.

Chap. 9 Analyse

- [AHA94] AHA. *Vers l'infini pas à pas, une première approche de l'analyse mathématique à travers des problèmes*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1994.

- [Deh95] D. Dehalleux. *Exploitation de documents historiques pour une réflexion sur la notion de tangente*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1995. Mémoire de licence sous la direction de C. Hauchart.
- [Fré94c] M. Frédérickx et C. Bouckaert. Le prix des photocopies. *Mathématique et Pédagogie*, 95 :41-52, 1994.
- [Fré95b] M. Frédérickx. *Modéliser des stratégies face à un test à choix multiples*. CeDoP-ULB, Bruxelles, 1995.
- [Fré95c] M. Frédérickx et M. Parker. *Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques*. CeDoP-ULB, Bruxelles, 1995.
- [GEM81] GEM. *Rencontres avec l'infini*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1981.
- [GEM85] GEM. *Gros plan sur les graphiques*. Groupe d'Enseignement mathématique, Louvain-la-Neuve, 1985.
- [GEM81a] GEM. *L'outil vectoriel*. Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1981.
- [Gin94] C. Ginoux et R. Gossez. *Comment utiliser un logiciel de calcul formel (DERIVE) pour illustrer certaines notions de mathématique ? A propos des fonctions*. UREM-ULB, Bruxelles, 1994.
- [Gos94] R. Gossez et J. Sengier. *Quelques propositions de leçons de mathématiques intégrant le logiciel DERIVE ; première partie : les intégrales*. CeDoP-ULB, Bruxelles, 1994.
- [Gos95] R. Gossez et J. Sengier. *Quelques propositions de leçons de mathématiques intégrant le logiciel DERIVE ; deuxième partie : à propos des fonctions*. CeDoP-ULB, Bruxelles, 1995.
- [Ham87] S. Hamer. *Analyse mathématique, réflexions et problèmes préparatoires aux études supérieures*. De Boeck et GEM, Louvain-la-Neuve, 1987.
- [Ham95] S. Hamer. *Méthodologie de l'enseignement des mathématiques, un cas d'école*. De Boeck, Louvain-la-Neuve, 1995.
- [Hau87] C. Hauchart et N. Rouche. *Apprivoiser l'infini*. CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987.
- [Hau92] C. Hauchart et al., coord. *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. Academia-Erasme, Louvain-la-Neuve, 1992.

- [Kli72] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford U.P., Oxford, 1972.
- [Noë76] G. Noël. Faut-il enseigner la continuité ? *Mathématique et Pédagogie*, 76(6 et 7) :99-116 et 139-152, 1976.
- [Noë84] G. Noël. L'analyse à 16 ans ? *Mathématique et Pédagogie*, 46 :11-22, 1984.
- [Noë92a] G. Noël. Les débuts de l'analyse. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, 44 :175-181, 1992.
- [Noë92b] G. Noël. Pourquoi l'analyse n'est pas rationnelle. In C. Hauchart et al., coord., *L'enseignement de l'analyse aux débutants*, pages 95-107. Academia-Erasme, Louvain-la-Neuve, 1992.
- [Pét77] R. Péter. *Jeux avec l'infini, voyage à travers les mathématiques*. Seuil, Paris, 1977.
- [Sae95] I. Saelens. *Proposition de repères historiques et épistémologiques pour une approche heuristique de l'analyse dans l'enseignement secondaire*. FUNDP, Namur, 1995.
- [Sch88] M. Schneider. *Des objets mentaux "aires" et "volumes" au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Université de Louvain, Louvain-la-Neuve, 1988.
- [Sch90] M. Schneider. *Quelques obstacles à la modélisation des aires et des volumes par le calcul intégral : un exemple de recherche en didactique des mathématiques, son objet, ses méthodes*. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, 42(2-13):157-168, 1990.
- [Sch91] M. Schneider. *Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente*. *Repères IREM*, 5:6582, 1991.
- [Sch91a] M. Schneider. *Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3):241-294, 1991.
- [Sch92] M. Schneider. *A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané*. *Educational Studies in Mathematics*, 23:317-350, 1992.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

Nous avons sélectionné ci-après un tout petit nombre d'ouvrages susceptibles d'aider le lecteur à aller plus loin, sans toutefois le noyer dans une mer de documents. La plupart de ces ouvrages sont rédigés en français. De plus, soit ils sont encore disponibles en librairie, soit ils valent la peine d'être photocopiés de bout en bout. Ils sont tous disponibles au centre de documentation du CREM. Mais nous pensons qu'ils devraient être à la disposition des enseignants dans toutes les écoles.

APMEP, *Évaluation du programme de mathématiques, fin de cinquième 1988*, APMEP, Paris, 1989.

APMEP, *Évaluation du programme de mathématiques de quatrième 1989 et troisième 1990*, APMEP, Paris, 1992.

Il s'agit d'une évaluation des programmes français, organisée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Elle est de grande ampleur : par exemple, pour l'évaluation de fin de cinquième, 50 000 élèves, 2 000 classes, 1 500 professeurs, 300 questions.

Chaque fascicule contient les questions relatives aux compétences exigibles ainsi qu'une analyse fouillée de la portée des questions et des résultats obtenus par les élèves.

Le professeur de mathématiques y trouvera des informations utiles pour ses préparations, l'amenant par exemple à prendre davantage en compte les obstacles rencontrés par les élèves. Il pourra, à l'occasion, appliquer l'une ou l'autre épreuve à ses propres élèves et comparer leurs réponses à celles des élèves français.

Par leur richesse, la qualité de leurs analyses et la prudence de leurs conclusions, ces documents sont des outils indispensables pour tous ceux qui s'occupent de l'évaluation des compétences en mathématiques.

E. Barbin, coord., *Vers une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Groupe inter-IREM d'Histoire et Epistémologie des Mathématiques, Lyon, 1988.

Ce petit ouvrage montre comment l'histoire peut, de diverses façons, inspirer un enseignement de mathématiques : en aidant le professeur à comprendre la genèse des théories (quels problèmes celles-ci ont permis de résoudre, à travers quelles difficultés elles ont été élaborées), en lui suggérant parfois des thèmes de travail pour les élèves ou des textes anciens à leur faire lire.

R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1989.

Les auteurs de cet ouvrage y ont rassemblé ce que dix années de réflexion et de pratique leur ont inspiré sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le livre est divisé en cinq parties intitulées : *Le virage des mathématiques modernes*, *Les formes du travail mathématique*, *La pensée mathématique et le sens*, *Pratiques d'enseignement des mathématiques*, *Le rapport au savoir*. La plupart des chapitres sont accessibles au lecteur sans formation mathématique particulière.

A. Bouvier, coord., *Didactique des mathématiques, le dire et le faire*, CEDIC/Nathan, Paris, 1986.

Ce gros ouvrage est une sorte d'encyclopédie à l'usage des enseignants de mathématiques. Une première partie, intitulée *Corpus*, présente dans l'ordre alphabétique, une centaine d'articles sur les sujets les plus divers, quoique tous pertinents pour les enseignants : par exemple *Affectivité*, *Compétence*, *Cryptographie*, *Évaluation*, *Fractions continues*, *Motivation*, *Nombre décimal*, *Recherche action*, etc. La deuxième partie s'intitule *Outils* et ses sections ont pour titres : *Analyse des pratiques*, *tests et grilles*, *Bibliographies thématiques*, *Bibliographie générale*, et *Adresses utiles*. La troisième partie, intitulée *Introduction à la didactique-action*, comporte douze sections susceptibles d'aider les enseignants à réfléchir et à s'informer sur leur métier et sur ce qui se passe dans leurs classes. Si un enseignant s'expatrie dans un pays lointain et n'emporte que peu de bagage, qu'il n'oublie pas ce livre-ci.

A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques*, [Bou79]

Ce dictionnaire abondant propose un bon choix de définitions de notions classiques et modernes.

E. Castelnuovo, *La mathématique dans la réalité*, CEDIC, Paris, 1976.

Ce petit livre rend compte d'une exposition réalisée il y a quelques années par des élèves de douze à quatorze ans dans une école de Rome. Il montre comment la vie quotidienne, la nature, l'art, l'histoire, les sciences et les techniques ainsi que l'imagination s'exerçant dans le domaine des figures et des nombres sont sources inépuisables d'apprentissages mathématiques. Il convaincra de leur erreur ceux qui pensent que les mathématiques sont une discipline sans charme. Il aidera les enseignants à trouver des thèmes de travail stimulants pour leurs élèves.

A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer, *Histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Études Vivantes, Paris, 1982 ; rééd. Seuil, 1986.

Cette histoire des mathématiques, sans être trop touffue, donne une bonne idée de l'évolution de la discipline au cours des siècles. Sa lecture est facilitée par une présentation thématique : après un chapitre de survol général et un autre consacré à la Grèce antique, les auteurs expliquent successivement l'histoire ancienne de l'algèbre, puis l'histoire des géométries. Ils passent ensuite aux notions de limite et de fonction ainsi qu'à l'analyse. Ils terminent par un chapitre sur les nombres complexes, puis un autre sur l'émergence des grandes structures.

P. Danblon, coord., *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté Française de Belgique*, Ministère de l'Éducation, Bruxelles, 1991.

Il s'agit d'un rapport sur l'enseignement des mathématiques élaboré par une Commission réunie à l'initiative du Ministre de l'Éducation. Ce document, qui a influencé l'évolution de l'enseignement des mathématiques en Belgique francophone, aborde l'ensemble des aspects de cet enseignement. Ses différentes sections s'intitulent : une conception des mathématiques, le métier de professeur (de mathématiques) aujourd'hui, les programmes, les manuels, la voie du curriculum, les ressources matérielles au service de l'enseignement, la formation initiale des professeurs, la formation continue des professeurs, la recherche, et enfin des conclusions et recommandations.

ERMEL, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, [ERM78]

Il s'agit d'une série d'ouvrages rédigés par une équipe nombreuse d'enseignants, de pédagogues et de didacticiens regroupés autour de l'Institut National de Recherches Pédagogiques de Paris. La collection recouvre toutes les années du primaire. Chaque volume présente des situations-problèmes à l'usage des classes. Ces

situations sont accompagnées de commentaires épistémologiques et didactiques ainsi que d'analyses de résultats obtenus dans des classes. Ces ouvrages ont leur place dans toutes les bibliothèques d'écoles primaires, et aussi de secondaire inférieur. Des études analogues s'occupent de l'enseignement maternel.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

Cet ouvrage examine l'ensemble des problèmes que pose l'éducation mathématique. Il explique ce que sont les mathématiques d'aujourd'hui et ce que nous a légué la tradition. Il examine la méthode socratique et celle de la réinvention, parle des niveaux de rigueur et des problèmes qu'affronte l'enseignant de mathématiques. Il traite ensuite des principaux chapitres des mathématiques (les nombres, les ensembles et fonctions, la géométrie, l'analyse, les statistiques et probabilités, la logique) du point de vue de leur apprentissage à partir de l'enfance, en renvoyant autant aux contextes quotidiens qu'aux nécessités internes de la construction théorique.

Nous mentionnons cet ouvrage bien qu'il soit rédigé en anglais, parce qu'il nous paraît irremplaçable, et que par ailleurs certains chapitres importants sont disponibles en version française (cf. la bibliographie par chapitre).

H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

Cet ouvrage parcourt systématiquement les matières mathématiques principales. Il propose pour chacune un inventaire impressionnant, d'abord de phénomènes, et ensuite d'objets mentaux qui ont pour fonction d'organiser un ensemble de phénomènes apparentés (sur *phénomène* et *objet mental*, cf. le glossaire). Cette étude capitale aidera les enseignants à reconnaître que l'on ne peut pas atteindre directement les concepts mathématiques dans leur forme définitive, et qu'il faut donc travailler d'abord avec les élèves à des niveaux préalables de formalisation et de rigueur.

Certains chapitres de cet ouvrage ont été traduits en français (cf. la bibliographie par chapitre).

J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1975.

A la suite de Henri Poincaré, Jacques Hadamard a réfléchi sur sa propre pratique de chercheur en mathématiques. Il a interviewé d'autres mathématiciens et tenté de cerner les formes d'intuition variables selon les chercheurs. Cette étude d'accès assez

aisé est susceptible d'intéresser tous les lecteurs qui s'interrogent sur le fonctionnement de la pensée créatrice. Il ne s'agit pas seulement de la pensée des chercheurs célèbres. Hadamard affirme en effet qu'«entre le travail d'un étudiant qui essaie de résoudre un problème de géométrie ou d'algèbre et un travail d'invention, on peut dire qu'il n'y a qu'une différence de degré, de niveau, les deux travaux étant d'une nature analogue.»

I. Lakatos, *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, trad. Balacheff, Laborde, Hermann, Paris, 1984.

Un théorème attribué à Euler dit que, pour une classe assez large de polyèdres, le nombre de sommets plus le nombre de faces est égal au nombre d'arêtes plus deux. Lakatos suit l'histoire de ce théorème et de ses généralisations successives depuis le 17^e siècle, en montrant que le concept de polyèdre, l'énoncé du théorème et la preuve elle-même ont évolué en s'ajustant mutuellement, au cours d'un long débat marqué par une suite de preuves et réfutations. Sur cet exemple important, il tente de cerner les modalités du travail de création mathématique, en l'opposant aux mathématiques entièrement déductives telles qu'on les trouve le plus souvent dans les traités. Vers la fin de l'ouvrage, l'auteur traite un autre exemple historique : celui du théorème de Cauchy sur les suites convergentes de fonctions continues. Il termine par un appel à l'*enseignement heuristique*, c'est-à-dire un enseignement où les concepts principaux sont construits, dans la mesure du possible, sur les chantiers de démonstration où l'on les voit servir de manière essentielle (il s'agit de la notion très importante pédagogiquement de *proof generated concept*).

Ce livre profond et assez difficile a considérablement influencé les auteurs qui argumentent en faveur d'un enseignement «constructif» des mathématiques.

Manuels scolaires

Il n'entrait pas dans le cadre de notre recherche de faire une étude des manuels scolaires. C'est pourquoi il ne nous est pas possible d'en présenter ici une sélection. Pour ce qui concerne le début de l'enseignement secondaire, on consultera utilement les analyses comparatives publiées par la SBPM (cf. [Noë91] dans la bibliographie du Chapitre 1). A notre connaissance, de telles analyses n'existent pas encore pour l'enseignement primaire, non plus que pour les années avancées du secondaire. On ne peut que souhaiter qu'il y en ait prochainement.

N. Rouche, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier-Hatier, Bruxelles, 1992.

La plus grande partie de ce livre peut être lue par des personnes qui ont oublié à peu près toutes les mathématiques apprises à l'école. Il explique en effet, à partir des situations les plus simples, comment se construisent progressivement les notions de grandeur et de mesure, de fraction et de proportionnalité et finalement de nombre rationnel. Il montre comment, en se posant des questions de bon sens sur les phénomènes quotidiens, on est nécessairement conduit à élaborer des concepts mathématiques non triviaux.

G. Papy, *Mathématique moderne I et Mathématique moderne II*, Didier, Bruxelles, 1964 et 1965.

Ces deux ouvrages contiennent, parmi d'autres matières, une construction rigoureuse des nombres réels à partir d'axiomes géométriques. Ils sont susceptibles d'intéresser les enseignants, nombreux, qui ont la charge d'initier les élèves aux généralisations successives de la notion de nombre. Il est vrai qu'une théorie aussi ample s'est avérée difficile pour les élèves jeunes auxquels elle s'adressait. Elle demeure d'un grand intérêt pour les professeurs.

J. Piaget et coll., *La géométrie spontanée de l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, 1973

Piaget et ses collaborateurs étudient les stades par lesquels passe la pensée géométrique des enfants et des adolescents, en partant de la représentation des déplacements, des mesures spontanées et de la conservation des longueurs, pour arriver à la mesure des longueurs, des angles, des surfaces et des volumes et aux systèmes de coordonnées. D'autres ouvrages du même auteur traitent de la maturation chez les enfants des notions de nombre, de probabilité, des concepts de la logique, etc. Il ne nous est pas possible de répertorier ici l'ensemble de ces études. Bien qu'elles aient été critiquées et que leurs résultats aient été nuancés ultérieurement par divers auteurs, elles demeurent une source obligée pour tous les enseignants.

G. Polya, *How to solve it, a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, 1945.

G. Polya explique comment on peut s'entraîner à résoudre des problèmes, quelles sont les initiatives intéressantes pour explorer et débroussailler une situation, pour préciser une question, pour particulariser ou généraliser une propriété, pour chercher des exemples et des contre-exemples, etc. Son objectif est d'introduire le lecteur à une véritable activité de recherche, analogue à celle des mathématiciens, même si

elle s'exerce dans le cadre de mathématiques très élémentaires. Ce livre, qui date du milieu du 20^e siècle, a considérablement influencé les méthodes d'enseignement des mathématiques.

E. Wittmann, *Géométrie élémentaire et réalité, introduction à la pensée géométrique*, Vieweg, Braunschweig, 1987.

Cet ouvrage tient les promesses de son titre : il constitue une excellente introduction à la pensée géométrique, à l'usage des lecteurs se souvenant des mathématiques apprises à l'école secondaire. Ses différents chapitres s'intitulent : Situations-problèmes géométriques, Fondements intuitifs : "objets" et "opérations" géométriques, Géométrie euclidienne du plan, La terre et le ciel, Symétries des figures planes, Constructions d'ellipses, Les corps platoniciens, Longueurs, aires et volumes, Trigonométrie plane, Éléments de géométrie analytique.

Une traduction française de ce livre par Charlotte Bouckaert est en préparation. Elle sera prochainement diffusée par le CREM.

GLOSSAIRE

Pour que cette étude soit accessible au plus grand nombre de lecteurs, nous nous sommes efforcés de n'y utiliser que les termes techniques réellement indispensables. Nous les avons pour la plupart empruntés à des auteurs connus et les avons définis de notre mieux ci-dessous. Toutefois, il s'agit souvent de termes qu'une simple définition ne suffit pas à rendre familiers : c'est en les rencontrant dans des contextes et accompagnés d'exemples que le lecteur en saisira mieux la portée. Ci-après, les termes marqués d'un astérisque sont définis par ailleurs dans le glossaire.

Acquis méthodologique. Lorsqu'on a résolu un problème, il est utile, en reparcourant mentalement les étapes de la résolution, d'y discerner les *acquis méthodologiques*, c'est-à-dire ce que l'on a acquis au passage et qui pourrait resservir, ce en quoi on a augmenté sa capacité de penser mathématiquement : formes de raisonnement, types d'erreurs à éviter, manœuvres efficaces (faire un dessin, chercher un cas particulier, ...), etc. G. Polya a souligné l'importance des acquis méthodologiques.

Application. Une *application* d'une théorie est une situation compliquée que la théorie aide à comprendre. Par opposition, une *illustration* d'une théorie est une situation simple qui aide à comprendre la théorie. On trouve cette distinction éclairante entre application et illustration dans P.J. Hilton, *Le langage des catégories*, CEDIC, Paris, 1983. Trad. J.-C. Matthys.

Concept. Nous nous sommes efforcés de réserver le terme *concept* à ce qui peut être défini mathématiquement, avec une entière précision, dans le cadre d'une théorie axiomatique. Ce terme s'oppose à *objet mental**.

Conjecture. Une *conjecture* est une propriété que l'on a certaines raisons de croire vraie, mais dont on n'est pas entièrement sûr. Les conjectures sont le moteur de l'activité mathématique. Lorsqu'on a fait une conjecture, on essaie d'abord d'argu-

menter sa vraisemblance, de l'expérimenter sur des exemples, et lorsqu'on est convaincu de sa vérité, on essaie de la prouver. Si on n'y arrive pas, on essaie de la démolir à l'aide d'un contre-exemple. Lorsqu'un cours de mathématiques ne dispense que des vérités suivies d'exercices stéréotypés, les élèves n'ont pas l'occasion de connaître le doute et ne font jamais de conjectures. Ils ne pratiquent donc pas d'activité mathématique.

Cycle. Ce terme, utilisé avec des sens variables dans les documents administratifs, s'applique dans la présente étude à l'enseignement primaire. Le *premier cycle* recouvre les deux premières années du primaire (enfants de six et sept ans), le *second cycle* les deux années suivantes (huit et neuf ans) et le *troisième cycle* les deux dernières années du primaire (dix et onze ans).

Degré. Dans la présente étude, ce terme s'applique à l'enseignement secondaire. Le *premier degré* recouvre les deux premières années (douze et treize ans), le *deuxième degré* les deux années suivantes (quatorze et quinze ans) et le *troisième degré* les deux dernières années (seize et dix-sept ans).

Enseignement en spirale. Dans l'acception que nous souhaitons en donner ici, l'*enseignement en spirale* est un enseignement dans lequel chaque question est étudiée d'abord au niveau le plus élémentaire, puis reprise, approfondie et généralisée à diverses reprises au cours des études. Dans un tel enseignement, les connaissances non seulement s'étendent, mais s'organisent de plus en plus, elles évoluent dans leur masse. L'*enseignement en spirale* tient compte du fait que, quel que soit le mode d'enseignement, rares sont les notions qui peuvent être acquises du premier coup. On oppose souvent l'*enseignement en spirale* à l'enseignement dit *linéaire*, procédant par accumulation de connaissances définitives.

Enseignement heuristique. On trouve, incorporées dans la plupart des définitions de concepts mathématiques, des spécifications techniques précises dont la portée n'est pas toujours immédiatement apparente. Ces spécifications sont destinées à assurer le bon fonctionnement du concept dans les démonstrations. I. Lakatos [Lak84] qualifie d'*heuristique* un enseignement dans lequel les concepts sont introduits le plus près possible des démonstrations où l'on peut discerner l'usage qui est fait de leurs connotations techniques.

Le lecteur d'un manuel ou d'un traité conçu *heuristiquement* ne devrait pas, lorsqu'il rencontre une définition difficile, se demander trop longtemps "à quoi sert toute

cette complication". En effet, il le verrait presque tout de suite.

A titre de contre-exemple, considérons un cours d'analyse où on étudie la limite en ϵ et δ longtemps avant de montrer *comment* elle sert dans des applications substantielles telles que les dérivées et les intégrales : un tel cours n'est pas heuristique.

Exemple paradigmatique. cf. n° 7.1.6.

Facette. Nous appelons *facette* d'un concept (parfois aussi d'une question d'un théorème) les diverses façons de le saisir, de le définir, d'en parler.

Par exemple, des facettes de la multiplication des naturels sont l'addition répétée, le produit cartésien de deux ensembles finis, l'aire des rectangles mesurés en nombres entiers, ...

Des facettes des suites géométriques sont l'expression de leur terme général, leur définition inductive (on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre), la constance du quotient de deux termes successifs, l'intérêt composé, diverses figures exhibant des mesures en suite géométrique, etc.

Les divers énoncés équivalents du cinquième postulat d'Euclide constituent des facettes de celui-ci. De même pour les divers énoncés équivalents de l'axiome d'Archimède.

On trouvera davantage d'explications et d'exemples sur cette notion de facette dans [Hau87] (voir bibliographie du Chapitre 9).

Grandeur. Ce terme est sorti de l'usage des mathématiques d'aujourd'hui, bien qu'il soit encore présent dans les programmes et les manuels de l'enseignement primaire. Toutefois, dans ceux-ci, il est pris dans un sens assez restreint, renvoyant le plus souvent soit à la mesure des formes géométriques simples, soit au système décimal de mesures pour les longueurs, aires, capacités, masses, etc. Dans la présente étude, nous utilisons le terme *grandeur* dans un sens plus large, difficile à cerner par une définition brève. Le lecteur est prié de se reporter au début du Chapitre 4.

Illustration. Voir *Application**.

Îlot déductif. On parle d'*îlot déductif* lorsqu'un petit nombre de propositions s'organisent déductivement, de manière locale, c'est-à-dire sans être incluses dans une théorie axiomatique ample.

Par exemple, la propriété des angles externes-internes conduit à la somme des angles d'un triangle, qui conduit elle-même à la somme des angles d'un polygone, cette dernière permettant de calculer l'angle de n'importe quel polygone régulier.

Un *îlot déductif* se construit le plus souvent à l'aide d'objets mentaux* et non de concepts*. Ainsi, l'*îlot déductif* des angles de polygones évoqué ci-dessus se construit à partir d'une notion élémentaire de la mesure des angles, notion qui est un objet mental*, et nullement le concept* extrêmement élaboré de mesure des angles.

Image mentale. Image qui se forme dans l'esprit et contribue à donner du sens à un objet mental*, un concept*, un théorème.

“Mathématiques modernes”. Il s'agit, dans notre exposé, des mathématiques enseignées dans les écoles secondaires belges (et aussi dans pas mal d'autres pays) en gros entre 1970 et 1980. Il ne faut clairement pas les confondre avec les mathématiques du 20^e siècle. Nous avons maintenu de bout en bout des guillemets pour cette expression.

Modéliser. Simplifier, schématiser une situation réelle, de manière à la rendre exprimable mathématiquement, sans toutefois la déformer trop, car il faut que le modèle mathématique auquel on arrive permette encore de répondre raisonnablement aux questions que l'on se pose.

Niveau de base. Dans les Chapitres 4 à 9, nous parlons des grandeurs *au niveau de base*, des nombres *au niveau de base* ; de l'algèbre *au niveau de base*, etc. Cette locution est empruntée à H. Freudenthal [Fre73] (voir bibliographie du Chapitre 6) qui parle de la géométrie *au niveau de base*. Il ne la définit pas, mais on peut inférer du contexte qu'il entend par là l'ensemble des phénomènes* quotidiens qui provoquent la réflexion géométrique, qui portent à construire les premiers éléments d'une théorie géométrique.

Nombres naïfs. Cette locution renvoie à l'ensemble des nombres qu'une personne ou un groupe de personnes connaît et utilise communément.

Par exemple, les nombres disponibles aux élèves d'une quinzaine d'années, bien qu'ils n'aient pas un statut théorique complet ni définitif, sont néanmoins munis de propriétés qui suffisent à en faire de bons instruments pour toute une catégorie d'usages. Selon l'expression de Freudenthal, ils permettent “d'organiser un assez grand nombre de phénomènes*”. Les nombres naïfs sont bien entendu variables selon les groupes de personnes qui les utilisent, et même souvent selon les individus.

Nombres relatifs. Lorsque, dans l'enseignement, on introduit pour la première fois des nombres munis d'un signe, il ne s'agit pas nécessairement d'étendre le système des nombres naturels vers les nombres entiers. Il s'agit le plus souvent de munir

d'un signe les nombres naïfs* des élèves, au moment de la scolarité où l'on se trouve. Ces nombres ne sont pas seulement les naturels. Ils comprennent aussi en général les fractions et les décimaux. Il est commode d'appeler *nombres relatifs* les nombres nouveaux ainsi munis d'un signe. Introduire cette locution assure en outre la propriété du langage, car les *nombres relatifs* ne doivent pas être confondus avec les entiers, les rationnels ou les réels.

Objet mental. H. Freudenthal [Fre83] (voir bibliographie du Chapitre 2) appelle *objet mental* toute notion telle que rectangle, parallèle, longueur, fraction, ... qui, tout en n'ayant pas atteint le stade de formalisation d'un concept mathématique et ne s'inscrivant donc pas dans une théorie axiomatique, est néanmoins dotée de propriétés qui en font un instrument d'organisation d'un ensemble de phénomènes mathématiques. Par exemple les fractions associées dans le quotidien à des découpages ou des morceaux d'objets, à des comparaisons ou des rapports de grandeurs ou de mesures, à des transformations par changement d'échelle, etc. constituent des *objets mentaux*, instruments de pensée efficaces quoique n'ayant pas atteint le stade de formalisation des fractions dans la théorie des nombres rationnels. Les nombres naïfs* sont un autre exemple important d'objet mental. Par opposition aux objets mentaux, les concepts*, dans la terminologie de Freudenthal, appartiennent à une théorie mathématique constituée. Ils répondent à des définitions dépourvues de toute ambiguïté, appropriées à l'exposé déductif de cette théorie. Un ouvrage de Freudenthal [Fre83] rassemble des descriptions, touffues par nature, d'*objets mentaux* divers et montre comment ceux-ci organisent chacun un champ de phénomènes.

Pattern. Il s'agit d'un terme anglais que nous avons adopté tel quel, à défaut de lui trouver un équivalent français fidèle. On appelle *pattern*, toutes les symétries, les régularités, les rythmes, les formes diverses que l'on découvre dans des objets ou des événements, et qui invitent l'esprit à conjecturer des propriétés mathématiques, des lois. L'homme vit entouré de *patterns* qui peuplent l'espace, le temps, l'univers des nombres. Les études anglo-saxonnes sur l'éducation mathématique accordent beaucoup d'attention aux *patterns*.

Phénomène. Ce terme est couramment utilisé en mathématiques pour désigner toute situation, toute propriété observée qui pose problème et stimule la pensée. Par exemple, la somme de trois nombres naturels consécutifs est multiple de trois, alors que la somme de quatre nombres naturels consécutifs n'est pas multiple de quatre.

Par exemple encore, on peut paver le plan avec des carrés et avec des hexagones réguliers, mais non avec des pentagones réguliers.

Seuil. Nous utilisons ce terme pour désigner la distance qui existe souvent entre une notion quotidienne, un objet mental*, et le concept* mathématique qui lui correspond. Il faut noter toutefois qu'il n'existe pas nécessairement une correspondance terme à terme entre *chaque* notion quotidienne et *un* concept. On trouve souvent plusieurs notions correspondant à plusieurs concepts : ainsi la pente, la tangente, la vitesse, le taux de croissance renvoient à la dérivée, la différentielle. Exemple de *seuil* : il y a une distance considérable, un *seuil*, entre les nombres naturels naïfs* et les nombres naturels décrits dans l'axiomatique de Peano. Par exemple encore - nous venons de l'évoquer - il y a un *seuil* entre d'une part la pente d'une route, ou la vitesse du chauffeur, et d'autre part la dérivée d'une fonction du temps.

On trouvera davantage d'explications sur la notion de seuil, ainsi que d'autres exemples, dans [Bko91] (voir bibliographie du Chapitre 2).

Structure géométrique visuelle. Cette locution est due à D. van Hiele, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Université de Utrecht, 1957. Elle désigne certaines figures simples, aisément reconnaissables et dont l'existence est déterminées par des conditions familières.

Les deux principaux exemples de *structures géométriques visuelles* que donne D. van Hiele sont les scies et les échelles (voir n° 6.1.2). Une scie (c'est le cas aussi d'une échelle) est reconnaissable soit au parallélisme de certains segments, soit à l'égalité de certains angles. Lorsque, dans une figure que l'on étudie, on reconnaît une scie au parallélisme des segments, on peut inférer l'égalité des angles, ou réciproquement.

Une *structure géométrique visuelle* est un objet saisi comme un paquet de propriétés dont certaines ont été, empiriquement et intuitivement, reconnues comme entraînant d'autres. Dans une forme assez primitive de raisonnement, la découverte d'une telle structure dans un contexte géométrique peut servir d'argument.

INDEX

- “Mathématiques modernes”, 23, 26, 317
- Acquis méthodologique, 9, 16, 38, 314
- Addition, 48
- AHA, 280, 284
- Aire, 28, 52, 75
- Al Kashi, 25, 91
- Al-djabr, 201
- Algèbre, 43, 188, 199, 201
- Algèbre linéaire, 27, 93, 196
- Algorithme, 26
- Analyse, 44, 261
- Analyse d'un problème, 197
- Analyse fonctionnelle, 266
- Analyse non standard, 267
- Analyser des expressions, 216
- Angleterre, 23
- APMEP, 307
- Application, 207, 314
- Application linéaire, 196
- Apprentissage en spirale, 37
- Approcher, 268, 289
- Approximation, 277, 289
- Aristote, 61, 93, 202
- Artin, E., 26, 93, 138
- Aspect qualitatif, 50
- Aspect quantitatif, 50
- Assyro-Babyloniens, 91
- Bach, J.S., 139
- Barbin, E., 29, 240, 308
- Barra, M., 210
- Bassis, H., 30
- Belgique, 23
- Bergson, H., 270
- Berkeley, G., 273
- Bernoulli, J., 241
- Bkouche, R., 24, 34, 308
- Bolzano, B., 274
- Boole, G., 202
- Bourbaki, N., 34, 82
- Bouvier, A., 308
- Brecht, B., 30
- Buekenhout, F., 38, 197
- Cadre global, 7,9
- Calcul écrit, 103
- Calcul mental, 103
- Calculatrice, 103, 130, 282, 294
- Cantor, G., 88, 93, 274
- Castelnuovo, E., 210, 308
- Cauchy, A., 88, 274
- Cavalieri, B., 76, 172, 271, 272
- Charlot, B., 29, 308
- Choquet, G., 135
- Classer des données, 243, 247, 255
- Cléro, J.-P., 240
- Cockroft, 8
- Combinatoire, 233
- Commune mesure, 91
- Communiquer, 140, 152
- Compétences, 14,16
- Compétences transversales, 14, 18, 19
- Concept, 35, 314
- Condorcet, 241
- Conjecture, 31, 314
- Conjecturer, 224
- Connaissances, 14, 18
- Construction des nombres, 85
- Construction du savoir, 34
- Construire, 140, 152
- Contexte, 30, 99, 114, 124, 140, 143, 152, 205, 218, 220, 275, 282
- Continu, 54
- Convention Nationale, 61

- Court, 47
 CUEEP, 208
 Curriculum and evaluation standards, 8
 Cycle, 13, 315
 Dacunha Castelle, 8
 Dahan-Dalmenico, A., 25, 309
 Danblon, P., 8, 9, 22, 301
 Dedekind, R., 88, 93, 247
 Défi, 19, 29
 Degré, 13, 315
 DERIVE, 295
 Dérivée, 27
 Descartes, R., 25, 202, 273
 Deuxième échelon de l'algèbre, 192
 Dewey, J., 30
 Di Rupo, E., 5
 Dieudonné, J., 268
 Dirichlet, G.-Lejeune, 274
 Discret, 54
 Distanciation, 30
 Distribution normale, 257, 258
 Diviser, 49
 Diviser par un naturel, 65
 Droite des nombres, 98, 112
 Dürer, A., 139
 Égalité, 204, 215, 225
 Enseignement empiriste, 33
 Enseignement en spirale, 38, 315
 Enseignement heuristique, 37, 315
 Enseignement horizontal, 32
 Enseignement mécaniste, 33
 Enseignement réaliste, 33
 Enseignement structuraliste, 33
 Enseignement vertical, 33
 Equation, 181
 Equiprobabilité, 245
 ERMEL, 309
 Ernest, P., 23
 Escher, M.C., 139, 154
 Essais et erreurs, 203
 Estimation, 237
 États-Unis, 23
 Euclide, 26, 60, 87, 92, 201
 Eudoxe, 60
 Exemple paradigmatique, 316
 Exhaustion, 271
 Explication, 31
 Exploration, 31
 Extraction, 31
 Facette, 316
 Facettes d'un phénomène, 278, 292
 Famille de figures, 143, 155
 Famille de nombres, 101, 117
 Famille de situations géométriques, 170
 Fermat, P. de, 25, 202, 240, 272, 273
 Feuille A4, 125
 Fonction, 25
 Fonction de plusieurs variables, 266
 Fonction de variable complexe, 266
 Fonction numérique, 262
 Formule automatique, 213
 Fourez, G., 14, 15
 France, 23
 Francesca, P. della, 139
 Freudenthal, H., 34, 35, 37, 85, 105, 132, 310
 Galilée, 61
 GEM, 130
 Géométrie, 43, 132
 Géométrie algébrisée, 180
 Géométrie différentielle, 137
 Géométrie synthétique, 135, 187
 Géométries non euclidiennes, 137
 George, M., 308
 Gilbert, T., 169
 Ginorese, C., 295
 Gossez, R., 295
 Grandeur, 28, 42, 47, 48, 51, 62, 316
 Grandeur composée, 52, 71, 77
 Graphique, 25
 Graphiques-Tableaux-Formules, 268, 288
 Grassmann, H., 27
 Groupe, 26, 136
 Hadamard, J., 138, 310
 Hamilton, W.R., 27
 Hilton, P.J., 234
 Hutin, R., 143
 Huygens, 271
 ICMI, 23
 Idéalisation, 267
 Illustration, 206, 316
 Ilot déductif, 134, 316
 Image mentale, 62, 99, 114, 124, 203, 317
 Inconnue, 189, 203
 Infini, 120, 130, 162
 Intégrale, 27
 Intervalle de confiance, 237
 Intervalles emboîtés, 268
 IPEP, 141
 Italie, 23
 Képler, J., 61, 271

- Klein, F., 26
 Kline, M., 27, 36, 270
 Kolmogorov, A.M., 242, 260
 La Vallée-Poussin, Ch.-J. de, 87
 Lakatos, I., 15, 36, 37, 311
 Laplace, J.-S., 241
 Le Corbusier, 139
 Le Lionnais, F., 308
 Lebesgue, H., 56
 Léger, 47
 Leibniz, G., 27, 202, 271, 272, 273
 Livre blanc, 8
 Lois de l'algèbre, 219
 Long, 47
 Losange, 142
 Lotto, 255
 Lourd, 47
 Mach, 78
 Machine analogique, 60
 Machine digitale, 60
 Majorer, 268, 289
 Manipulation, 93
 Manipuler, 140
 Manuels scolaires, 311
 Masse, 47
 Mathematical Magazine, 59
 Mathématique sociale, 241
 Mathématiques du citoyen, 39
 Mathématiques informelles, 37
 Matrice, 196
 Méray, 274
 Mesurage, 67
 Mesure indirecte, 57
 Minimum culturel, 41
 Minorer, 268, 289
 Mobilité de la pensée, 31
 Modèle mathématique, 31
 Modélisation, 267, 282
 Modéliser, 205, 220, 317
 Morris, R. 234
 Motivation, 30
 Mouvement, 147, 161
 Müller, G., 37
 Multiplier, 48
 Multiplier par un naturel, 64
 Nachtergaele, J., 27
 Néper, J., 25
 Newton, I., 27, 202, 271, 272, 273, 295
 Niveau de base, 317
 Noël, G., 124, 220
 Nombre, 42, 81, 149
 Nombre cardinal, 98
 Nombre complexe, 82
 Nombre décimal, 25
 Nombre entier, 81, 108
 Nombre figuratif, 94
 Nombre intuitif, 94
 Nombre irrationnel, 82, 92, 109
 Nombre naïf, 82, 109, 317
 Nombre naturel, 81, 90
 Nombre négatif, 25, 92
 Nombre pour compter, 82
 Nombre pour fractionner, 82
 Nombre pour mesurer, 82
 Nombre pour repérer, 82
 Nombre rationnel, 81
 Nombre réel, 81, 108
 Nombre relatif, 82, 317
 Nombre transfini, 88
 Noyau commun, 5
 Objet, 47, 62
 Objet extrême, 145
 Objet mental, 9, 34, 35, 82, 150, 165, 318
 Opérateur additif, 83
 Opérateur multiplicatif, 83
 Opération d'addition, 83
 Opération de multiplication, 83
 Opération symbolique, 83
 Ordinateur, 282, 294
 Oresme, N., 271
 Outil de calcul, 162
 Papy, G., 26, 93, 138, 312
 Parallépipède rectangle, 146
 Parallélogramme, 142
 Pascal, B., 61, 240, 271
 Pattern, 8, 101, 117, 318
 Peiffer, J., 25
 Pensée autonome, 29
 Pesci, A., 256
 Phénomène, 9, 165, 292, 318
 Physique sociale, 241
 Piaget, J., 37, 62, 85, 312
 Piloter les calculs, 119
 Planche de Galton, 258
 Platon, 91
 Pluralité des méthodes, 31
 Pluralité des solutions, 31
 Poids, 47
 Poincaré, H., 138, 242
 Point de fuite, 169

- Polya, G., 16, 17, 38, 312
 Premier échelon de l'algèbre, 190
 Preuve muette, 59
 Principe de substitution, 206, 215, 225
 Prix à la pièce, 54
 Probabilité a posteriori, 234, 241, 242
 Probabilité a priori, 234, 237, 240, 241
 Probabilités, 27, 233, 243
 Problème des partis, 240
 Proof generated concept, 36
 Pythagoriciens, 46, 60, 91, 92
 Quételet, A., 241
 Quotient Intellectuel, 89
 Rapport externe, 53, 54
 Rapport interne, 53, 54
 Reggiani, M., 256
 Régularité statistique, 245, 251
 Représentant d'un objet, 67
 Représentation plane, 145, 150, 174
 Robinson, A., 274
 Rouche, N., 12, 16, 52, 308, 311
 Ruban des nombres, 98
 Schoenfeld, A., 18
 Schopenhauer, A., 21
 Scie, 133, 134
 Sens, 18
 Seuil, 319
 Shaughnessy, J.M., 259
 Sherman, S., 31
 Situation-problème, 29
 Socles de compétences, 9, 14, 15, 18
 Solide, 145, 158, 174
 Solution, 189, 203
 Soto, I., 71
 Statistique inférentielle, 237
 Statistiques, 27, 233
 Stévin, S., 25, 61
 Stock de fonctions, 280, 293
 Stordeur, J., 29
 Stratégie de calcul, 216
 Structure algébrique, 230
 Structure géométrique visuelle, 319
 Suite de Fibonacci, 127, 227
 Suite infinie, 262
 Symbole, 203
 Symétrie, 147, 161
 Système de numération, 91
 Système d'unités MKSA, 78
 Tangram, 69
 Tâtonner, 213, 224
 Terrain de l'élève, 30
 Test d'hypothèse, 237
 Théorème central limite, 258
 Théorème clé, 162
 Théorie de la mesure et de l'intégration, 58
 Tignol, J.-P., 199
 Topologie, 137, 266
 Traitement de données, 43, 233
 Transformation, 26, 161
 Treffers, A., 32, 33
 Triangle de Pascal, 127, 258
 Troisième échelon de l'algèbre, 193
 Unités conventionnelles, 70
 URSS, 23
 Variable dépendante, 192
 Variable indépendante, 192
 Viète, F., 25, 202, 273
 Vilers, M., 228
 Vitesse, 53
 Volume, 28, 75
 Vue du dessus, 158
 Weierstrass, K., 93, 274
 Weyl, H., 27
 Wittmann, E., 21, 37, 140, 313
 Zénon d'Elée, 270, 280

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos

1 Un projet de recherche	5
2 Interprétation du projet	6
3 Un cadre global pour qui ?	7
4 Sources	8
5 Plan du cadre global	9
6 Les auteurs	11
7 Ce qui reste à faire	12
8 Indications pratiques pour la lecture	12

1. Compétences

1.1 Compétences ou connaissances	14
1.2 Que sont les mathématiques ?	15
1.3 Compétences et acquis méthodologiques	16
1.4 La question du sens	18
1.5 Un héritage	20
1.6 La portée de la présente étude	21

2 Enseigner les mathématiques aujourd'hui

2.1 Enseigner les mathématiques d'aujourd'hui	23
2.2 Le sens, l'autonomie de la pensée	29
2.3 La construction du savoir	34

3 Les mathématiques du citoyen

3.1 Vivre dans la société et contribuer à son évolution	39
3.2 Des savoirs qui se multiplient	40
3.3 Un esprit confiant et actif	40

3.4 Un minimum culturel	41
3.5 Un programme pour les citoyens ?	42
3.6 Appendice : une culture mathématique pour tous	44

4 Grandeurs

4.1 Vue d'ensemble	47
4.2 Les grandeurs dans le fondamental	62
4.3 Les grandeurs dans le secondaire	73

5 Nombres

5.1 Vue d'ensemble	81
5.2 Les nombres dans le fondamental	93
5.3 Les nombres au premier degré du secondaire	108
5.4 Les nombres aux deuxième et troisième degrés	121

6 Géométrie

6.1 Vue d'ensemble	133
6.2 La géométrie dans le fondamental	141
6.3 La géométrie au premier degré du secondaire	153
6.4 La géométrie aux deuxième et troisième degrés	168

7 Algèbre

7.1 Vue d'ensemble	189
7.2 L'algèbre dans le fondamental	204
7.3 L'algèbre aux premier et deuxième degrés	206
7.4 L'algèbre au troisième degré	221

8 Statistiques et probabilités

8.1 Vue d'ensemble	234
8.2 Le traitement de données dans le fondamental	244
8.3 Le traitement de données aux premier et deuxième degrés	249
8.4 Le traitement de données au troisième degré	256

9 Analyse

9.1 Vue d'ensemble	262
9.2 L'analyse dans le fondamental	276
9.3 L'analyse aux deux premiers degrés du secondaire	276
9.4 L'analyse au troisième degré	283
 Bibliographie par chapitre	297
 Bibliographie commentée	308
 Glossaire	315
 Index	321
 Table des matières	325

