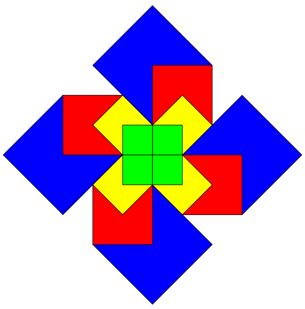
Rapport de recherche 2004-2005

Apprenti Géomètre, un outil de différenciation des apprentissages en mathématique



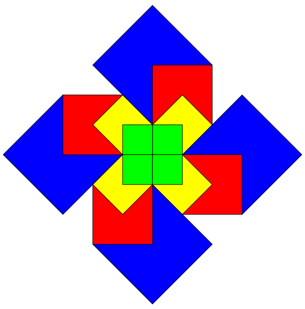
Communauté française
de Belgique

Centre de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

2005

Rapport de recherche 2005-2006

Apprenti Géomètre, un outil de différenciation des apprentissages en mathématique



Communauté française
de Belgique

Centre de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

Auteurs

Cet ouvrage est le fruit de la collaboration de Laetitia Desmet, licenciée en logopédie et institutrice primaire, Bernard Honclaire, régent en mathématique, Philippe Mairesse, instituteur primaire, Philippe Skilbecq, instituteur primaire, Guy Noël, professeur honoraire de l'Université de Mons-Hainaut, Nicolas Rouche, professeur honoraire de l'Université de Louvain-la-Neuve.

Remerciements

Nous remercions vivement les enseignants qui nous ont ouvert leur classe et aidés dans les expérimentations :

Mmes Diane Denies, Annick Marick, Nathalie Motte, Claire Mourlon-Beernaert et Maud Versluys.

Nous remercions aussi les directions des écoles qui nous ont accueillis : École Saint-Martin à Horrues, École Notre-Dame des Champs à Uccle, École communale de Villers-Perwin, École de la Sapinière à Watermael-Boitsfort.

Commanditaires

La réalisation de cet ouvrage a été financée par le Ministère de la Communauté française à l'initiative de Monsieur Jean-Marc Nollet, Ministre de l'Enfance, dans le cadre d'une convention portant sur la différenciation dans l'enseignement des mathématiques s'appuyant sur le logiciel *Apprenti Géomètre*.

CREM a.s.b.l., juin 2005
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde
B-1400 Nivelles (Belgique)
Tél. : 32 (0)67 21 25 27 Fax : 32 (0)67 21 22 02
crem@sec.cfwb.be
apprenti.geometre@cfwb.be
`http://www.profor.be/crem`
`http://www.enseignement.be/geometre`

Table des matières

Un élève ne fait de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus.

G. Brousseau

L'essentiel n'est pas d'arriver à l'objectif avant tout le monde. L'essentiel est d'y arriver en prenant clairement conscience de ce qu'on fait, car c'est là que se cache un nouveau savoir.

N. Rouche

Voilà pour l'obstacle qui, [...] nous montre à quel point le béhaviorisme se trompe quand il propose de commencer par le simple pour complexifier les choses pas à pas. En réalité, la simplicité, loin d'être initiale est le fruit même de la construction intellectuelle. [...] Bref, on l'a dit, les fondements ne sont pas les commencements !

J.-P. Astolfi, à partir de l'exemple de la flottaison des corps, traité successivement par Piaget et Bachelard

Avant-propos

Apprenti Géomètre est un logiciel conçu comme une aide pour apprendre la géométrie et ses applications (notamment aux grandeurs, fractions et mesures). Réalisé en 2003 à la demande du Ministère de la Communauté Française, il a été distribué gratuitement dans toutes les écoles fondamentales de la partie francophone du pays. Il peut de plus être téléchargé sur le site `http://www.enseignement.be/geometre`. Accueilli très favorablement dans les écoles, tant belges qu'étrangères, *Apprenti Géomètre* a été utilisé dans de nombreuses classes, comme en témoignent les échanges qui s'établissent via le site Internet mentionné ci-dessus.

En juin 2004, le Ministre Jean-Marc Nollet a chargé le CREM de poursuivre les recherches entamées à l'aide d'*Apprenti Géomètre* en s'intéressant au rôle possible de ce logiciel dans la différenciation des activités proposées d'une part aux enfants en difficulté scolaire, d'autre part aux enfants dits « à haut potentiel ».

Pour le CREM, il s'agissait là d'un nouveau défi, mais un défi parfaitement compatible avec son principe selon lequel tout enfant, tout adolescent a droit à ce que son cas particulier reçoive la même attention, la même considération que celui qui s'écarte peu de la moyenne.

Il convenait donc, dans un premier temps, de rassembler un maximum de renseignements concernant les caractéristiques des deux catégories d'enfants constituant le « public cible ». Très vite, il est apparu aux auteurs du présent rapport qu'il était plus facile de repérer des élèves appartenant à ce public que d'énumérer des caractéristiques permettant scientifiquement d'établir cette appartenance[1].

Mais cette affirmation doit immédiatement être tempérée par la crainte de voir une « étiquette » attribuée de façon définitive à un élève alors que sa situation peut évoluer. Combien n'y a-t-il pas d'élèves dont les difficultés scolaires sont purement circonstancielles et peuvent disparaître d'une année à l'autre ? N'en existe-t-il pas aussi dont les capacités paraissent exceptionnelles puis semblent s'affaiblir ? Et par ailleurs, n'existe-il pas des enfants à haut potentiel ou en difficulté qui restent non détectés ?

Clairement, les considérations de ce type dépassent le cadre du présent travail. Il ne s'agit pas pour nous de coller des étiquettes aux élèves. Il s'agit d'aider l'enseignant aux prises avec l'hétérogénéité de sa classe, hétérogénéité qui peut être renforcée par la présence d'enfants en difficulté ou à haut potentiel, mais qui existe, à des degrés variables, dans

[1]Ce problème de définition est abordé au chapitre 1.

n'importe quelle classe.

Aussi les idées concernant les principes et la pratique de la différenciation que l'on découvrira dans la première partie de ce travail restent-elles très générales. Elles peuvent inspirer l'enseignant, certainement pas lui dicter sa conduite. Au chapitre 1, on trouvera essentiellement quelques caractéristiques des enfants en difficulté et des enfants à haut potentiel. Le chapitre 2 mentionne notamment des méthodes se prêtant bien à la différenciation : la résolution de problèmes, la narration de recherche et la pédagogie du projet. Le chapitre 3 est plus orienté vers l'analyse du contenu de l'enseignement, une analyse que tout enseignant pratique quand il prépare ses cours, et qui porte aussi sur les comportements — corrects ou non — que les élèves pourraient adopter.

Et *Apprenti Géomètre* dans tout cela ?

Apprenti Géomètre est un outil didactique. Il apparaît donc essentiellement dans la seconde partie de ce travail, consacrée à l'expérimentation réalisée avec des élèves de 8 à 12 ans. Dans chaque classe concernée, l'expérimentation a débuté par une initiation au logiciel. Cette phase du travail est présentée au chapitre 6. Contentons-nous ici de dire que l'accueil réservé par les enfants à *Apprenti Géomètre* est toujours très positif et que l'initiation ne pose généralement aucun problème particulier. *Apprenti Géomètre* a d'ailleurs été conçu pour être d'un accès facile.

Le sujet choisi était le premier apprentissage des fractions à partir de la manipulation de grandeurs. Aussi le chapitre 5 est-il consacré à une description mathématique de l'enchaînement qui conduit des grandeurs aux fractions simples. Il s'agit d'une analyse globale dont seules trois phases ont fait l'objet d'une expérimentation.

La première expérimentation, réalisée dans des classes de 3^{e} et 4^{e} année, a porté sur le concept d'*unité de mesure commune*. Ce concept est fondamental du point de vue théorique : il permet de déterminer si des relations simples peuvent associer deux grandeurs de même espèce. Il l'est aussi du point de vue pratique : on connaît l'importance de l'usage d'un étalon de mesure, lequel ne permet de mesurer *exactement* que les grandeurs avec lesquelles il a une unité de mesure commune.

La deuxième expérimentation, organisée en 5^{e} année, porte sur le *fractionnement* d'une grandeur et la composition de deux fractionnements consécutifs. Elle débouche sur la multiplication des fractions.

La troisième expérimentation, également organisée en 5^{e} année, à la suite de la précédente, utilise des découpages de figures en vue de faire apparaître une fraction comme somme de plusieurs autres, ayant ou non le même dénominateur. Il s'agit donc d'une première approche de l'addition des fractions. L'étude de cette opératon ne s'achèvera que dans l'enseignement secondaire.

Dans ces trois expérimentations, *Apprenti Géomètre* permet de disposer aisément de situations à la portée des élèves. Les outils de découpage et de fusion de figures qu'il comporte sont particulièrement bien adaptés à l'étude de situations ayant pour objectif l'introduction au calcul des fractions.

De plus, le recours au logiciel étant libre, on constate effectivement que certains élèves, en difficulté, y recourent plus que les autres. Quant aux élèves à haut potentiel, ils choisissent volontiers des situations assez complexes,... parfois pour constater qu'ils ont été quelque peu présomptueux.

Pour plus de détails, le lecteur consultera l'introduction à la deuxième partie, puis les chapitres 7 à 9.

Nous espérons que ce travail apportera non une solution miracle, mais une certaine aide concrète aux enseignants aux prises avec la difficulté bien réelle de l'hétérogénéité des classes.

Première partie

Analyse théorique

Chapitre 1

La différenciation des apprentissages

Différencier la pédagogie de façon rationnelle, c'est, en quelque sorte, se faire violence pour prendre en compte la nature de l'élève en contrepoint de la nature propre et des contenus de savoirs fixés par l'institution.

L. Legrand

1 La pédagogie différenciée

Dans la pratique quotidienne des écoles, deux conceptions s'affrontent lors de la constitution des groupes d'élèves traditionnellement appelés « classes », et cela particulièrement dans les « grosses » écoles. Si la doctrine officielle est de constituer des groupes hétérogènes, il arrive que l'on rencontre une école — surtout au début de l'enseignement secondaire — qui constitue des classes plus ou moins homogènes, en s'aidant des résultats obtenus par les élèves dans les années antérieures, voire en réalisant des tests lors de la première semaine de cours.

On voit immédiatement les avantages des classes homogènes pour l'enseignant. Pour les élèves les plus performants, la fréquentation quotidienne d'autres élèves tout aussi performants peut engendrer une émulation très fructueuse. Mais se limiter à ces considérations serait négliger l'influence bénéfique qu'un élève performant peut avoir sur un condisciple qui l'est moins. Et surtout, pratiquer à l'extrême une politique de constitution de groupes homogènes ne peut qu'entraîner l'apparition de classes « dépotoirs », véritables ghettos scolaires dont aucun élève ne parviendrait à sortir quelle que soit son évolution personnelle.

Par ailleurs, dans une classe hétérogène, la pratique d'une pédagogie traditionnelle, de type « frontal », revient à nier les différences entre élèves et amène l'enseignant à situer son enseignement à un niveau de difficulté moyen, adapté sans doute à une majorité d'élèves, mais qui ne convient ni aux plus doués, ni à ceux qui éprouvent de vraies difficultés[1].

De là, l'idée d'une « pédagogie différenciée » ayant pour but de pallier les inconvénients dûs à l'hétérogénéité des classes. Louis Legrand, [21], met en évidence, pour la première

[1]Aux paragraphes 3 et 4, nous essaierons de « définir » ces deux catégories d'élèves.

fois en 1973, cette pédagogie qui trouve sa source dans la psychologie différentielle. Des pédagogues comme Cousinet, Freinet ou Decroly avaient précédemment déjà souligné la nécessité de tenir compte des potentialités, désirs, intérêts et soucis particuliers de tout apprenant. C'est ainsi qu'ils avaient aussi proposé des pédagogies centrées sur l'élève. Piaget a également contribué à l'avènement de cette pédagogie lorsqu'il affirme que « le maître devrait toujours chercher quelles opérations sont à la base des notions qu'il cherche à faire acquérir aux élèves » (citation extraite de [13]).

Plus officiellement, en Communauté française de Belgique, la pédagogie différenciée a été définie dans le décret *Missions de l'école*, [1], de juillet 1997 à l'article 5, alinéa 12, comme suit :

> *Démarche d'enseignement qui consiste à varier les méthodes pour tenir compte de l'hétérogénéité des classes ainsi que de la diversité des modes et besoins d'apprentissage des élèves.*

L'article 15 du décret précise les objectifs de cette pédagogie :

> *Chaque établissement scolaire permet à chaque élève de progresser à son rythme, en pratiquant l'évaluation formative et la pédagogie différenciée.*

Ces objectifs s'inscrivent dans une philosophie générale de l'éducation. Ainsi, l'article 6 du décret mentionne, en substance, que tous les élèves doivent s'épanouir dans ce que l'on appelle les *logiques personnelle, économique et civique* et avoir accès à des *chances égales d'émancipation sociale.*

Le texte énonce également des outils de différenciation à l'article 8, alinéa 7°. Il propose notamment l'utilisation des nouvelles technologies de la communication et de l'information comme outils *d'individualisation des parcours scolaires*[2].

Un des premiers postulats qui fondent la pédagogie différenciée est celui qui donne à l'apprenant un statut de personne à part entière. Ceci constitue un changement de perspective dans la vision de l'enfant. En effet, ce postulat implique que chaque apprenant a le droit d'apprendre à son rythme, selon sa propre méthode d'appropriation de savoirs ou de savoirs-faire et suit un itinéraire qui lui est personnel[3]. Ceci ne signifie nullement qu'il n'existe aucune compétence fondamentale à acquérir par tous, par exemple celles transcrites dans le document *Socles de compétences.*

Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, l'enseignant est déchargé de son rôle de transmetteur, de distributeur de savoir pour exercer un rôle de médiateur et de soutien méthodologique. Il guide l'apprenant dans ses recherches et dans ses choix de lectures, il le stimule à explorer les personnes et les ressources de son environnement, il l'aide à traiter l'information. Il a aussi pour tâche de stimuler l'autonomie des apprenants. Ph. Meirieu appelle cela la « pédagogie de l'entraînement » où le maître se considère comme l'entraîneur d'une équipe dans laquelle tout le monde doit progresser.

---

[2] Notons que nous n'assimilons pas la différenciation à la seule individualisation des apprentissages.

[3] « Apprendre à apprendre en apprenant », Ph Meirieu, [22].

L'objectif principal de la pédagogie différenciée est la réussite du plus grand nombre possible d'élèves, en tenant compte de l'hétérogénéité du groupe. Pour ce faire, ce que l'on pourrait appeler « un pragmatisme pédagogique » est de rigueur. Les moyens mis en œuvre sont, entre autres, l'adaptation des contenus et de la méthodologie aux particularités individuelles et l'évaluation formative. Cette pratique pédagogique se veut donc variée, utilisant toutes les ressources d'apprentissage.

2 L'hétérogénéité

H. PRZESMYCKI, [26], distingue les caractéristiques suivantes qui contribuent à l'hétérogénéité d'une classe :

les différences cognitives : le degré d'acquisition des connaissances et leur niveau d'opérationalisation, la richesse des processus mentaux qui s'articulent autour des représentations, du développement opératoire et des stratégies d'apprentissage ;

les différences socio-culturelles : valeurs, croyances, histoire familiale, code de langage, type de socialisation, spécificités culturelles ;

les différences psychologiques : vécu, personnalité révélant la motivation, les intérêts, la volonté, le plaisir d'apprendre.

Ainsi, la pédagogie différenciée met en avant la nécessité d'une observation et d'une évaluation de chaque enfant dans ses dimensions cognitives, socio-culturelles et psychologiques. Nous n'aborderons dans la suite que le traitement des différences cognitives, les autres dimensions nécessitant une approche très différente.

Une des démarches possibles est l'évaluation des pré-acquis et des représentations de chacun dans le domaine de l'apprentissage ! Cette évaluation *diagnostique*, permettra de prendre en compte l'état initial de chacun des apprenants et d'établir un schéma d'apprentissage prévoyant des parcours différents, avec un même point d'arrivée. La méthode de travail ou d'acquisition soumise aux élèves ne sera donc ni standardisée, ni mécanisée. Elle doit au contraire être souple, reposer sur des activités pouvant être abordées ou exécutées à des niveaux différents.

La pédagogie différenciée sous-entend également une évaluation différenciée s'appuyant sur le diagnostic de départ, mais aussi sur une évaluation formative qui permet de réguler la pratique méthodologique. Par ailleurs, tout au long de l'apprentissage, l'apprenant aura à s'auto-évaluer et à comparer sa propre évaluation à celle de l'enseignant ou de l'équipe éducative. Chaque apprenant pourra ainsi mieux se connaître, mieux connaître son profil d'apprentissage et organiser ses apprentissages[4].

[4]Cette pratique réflexive sur les apprentissages et les méthodes d'apprentissage ou de résolution de tâche est appelée « métacognition ».

3 Les élèves en difficulté

> *Le progrès de l'élève ne dépend pas tellement de ses caractéristiques personnelles que de la nature des opportunités et de l'aide qui lui sont offerts.*
>
> Giné Giné Y Ruiz Bel

La citation ci-dessus vient à point pour nous rappeler qu'un enfant ayant des difficultés scolaires n'est pas nécessairement « sous-doué », encore moins débile mental. Ses difficultés peuvent en effet être passagères, résulter de circonstances très variées ou relever des dimensions socio-culturelle et psychologique qui ont été évoquées au paragraphe précédent. Elles peuvent résulter aussi de connaissances insuffisamment acquises antérieurement.

Quelle que soit la situation, un des objectifs de la pédagogie différenciée est aussi de donner une nouvelle chance aux enfants concernés en leur procurant les savoirs, aptitudes et attitudes nécessaires à leur développement personnel, en les motivant et en les rendant autonomes.

Dès la maternelle et dans les premières années du primaire, les enseignants repèrent les enfants en difficulté. Souvent, ils sont capables de prédire quels enfants sont susceptibles de présenter des difficultés dans la suite de leur cursus scolaire. L'expérience des enseignants joue un rôle important dans leurs prédictions.

Les indices directement observés par les enseignants reposent généralement sur une conception pragmatique du « bon » fonctionnement d'un élève à l'école. Les enseignants estiment que, pour réussir, l'élève doit posséder un ensemble de compétences, d'aptitudes et de connaissances constituant un modèle de référence. Un enfant est alors considéré en difficulté lorsqu'il présente des écarts qualitatifs et quantitatifs par rapport au modèle. Plus les écarts sont jugés importants, plus la probabilité d'apparition de dysfonctionnements semble inévitable.

Certains enfants peuvent aussi avoir des déficiences persistantes, nécessitant un suivi spécifique basé sur la collaboration entre l'école et des spécialistes.

3.1 Un essai de définition

Par delà l'approche pragmatique de la détection des enfants en difficulté qui vient d'être rappelée, des chercheurs ont tenté d'élaborer une définition plus précise susceptible de guider les efforts de remédiation. Ce n'est guère facile, comme nous pouvons le découvrir en parcourant les textes écrits à ce sujet depuis de nombreuses années.

Jusqu'au début des années soixante, les études réalisées sur le sujet étaient essentiellement d'ordre médical. Les difficultés d'apprentissage étaient principalement attribuées à une dysfonction cérébrale mineure. Cette position a perduré très longtemps puisque l'*Association des troubles d'apprentissage du Québec*, (`www.aqueta.qc.ca`) l'adoptait encore en 1990. S'il y a bien souvent une corrélation entre cette dysfonction et des troubles d'apprentissage, la relation de cause à effet n'est, à l'heure actuelle, pas clairement démontrée.

Au début des années soixante, Kirk, [20], a été le premier à introduire les notions d'écart entre le potentiel de l'enfant et le rendement scolaire ainsi que la notion d'exclusivité par rapport aux autres conditions handicapantes qu'elles soient culturelles, émotionnelles, motrices ou sensorielles. Dans les années septante, cet écart entre les aptitudes des élèves et leurs performances amène une alternative alléchante pour une recherche et une intervention rapide à l'école. L'accent est mis sur l'organisation du contenu et de l'environnement en attribuant à l'enfant le rôle de récepteur.

En 1985, dans une critique des définitions fournies jusqu'alors, Kavale, Nye, et Forness, [19] [18], considèrent les difficultés d'apprentissage comme un phénomène complexe, difficile à définir à partir d'un seul aspect du fonctionnement de l'élève, qu'il soit linguistique, scolaire, neuropsychologique ou comportemental. Ces chercheurs dégagent cinq phénomènes qui pourraient expliquer les difficultés d'apprentissage mais arrivent à la conclusion qu'aucune de ces explications ne peut être acceptée sans équivoque comme étant la bonne.

En 1990, Hammill [16], analyse onze définitions majeures des difficultés d'apprentissage et dégage neuf paramètres qui permettent de caractériser et distinguer ces définitions. En conclusion de son étude, il remarque d'abord un degré important d'accord entre les différentes définitions existantes. Ensuite, il estime que la définition proposée par le *National Joint Committee on Learning Disabilities*[5] est probablement le meilleur énoncé descriptif au sujet de la nature des difficultés d'apprentissage. Voici, en substance, l'énoncé de cette définition :

> *Les difficultés d'apprentissage sont un terme générique désignant un ensemble hétérogène de troubles se manifestant par des difficultés persistantes dans l'acquisition et l'utilisation de l'écoute, de la parole, de la lecture, de l'écriture, du raisonnement ou des mathématiques, ou des habiletés sociales. Ces désordres sont intrinsèques à la personne. On peut les supposer causés par un dysfonctionnement du système nerveux central. Même si une difficulté d'apprentissage peut se manifester en concomitance avec d'autres conditions handicapantes (par exemple, les déficiences sensorielles, le retard mental, les perturbations sociales ou émotionnelles), avec d'autres influences socio-environnementales (par exemple, les différences culturelles, une instruction insuffisante ou inappropriée, des facteurs psychogénétiques), et particulièrement avec un trouble de l'attention, les difficultés d'apprentissage ne sont pas les conséquences directes de ces conditions ou influences.*

Selon Swanson, [34], cette définition, malgré des qualités reconnues, n'est pas suffisamment opérationnelle. Comme le dit Molina Garcia, [23], la science n'a jusqu'à maintenant, guère réussi à identifier les causes des difficultés d'apprentissage. Il nous faut, à ce stade-ci, faire le deuil d'une définition synthétique de cette notion et accepter les ambiguïtés et les approximations qui caractérisent ce domaine.

Il convient de conserver un point de vue pragmatique. L'enseignant doit repérer les difficultés d'apprentissage, faire face à leur complexité, puis intervenir pour tenter d'y remédier.

[5] Voir `www.ldonline.org/njcld/defn_91.html`, « Learning disabilities : issues on definition », 1990

Éventuellement, il sera amené à recourir à l'aide d'un spécialiste.

3.2 Problématique

Pour les enseignants, la prédiction des difficultés d'apprentissages devrait s'opérer le plus tôt possible, idéalement avant même l'entrée à l'école primaire. Si ce point de vue semble pertinent, il néglige cependant les enfants qui ne présenteront des difficultés qu'au milieu de leur scolarité, sans avoir manifesté de signes avant-coureurs. Cela risque d'être le cas d'enfants dociles, d'enfants ambitieux, d'enfants perfectionnistes, d'enfants peu sûrs d'eux ou d'enfants indifférents. Comme l'indique NORMAND-GUÉRETTE, [24], il sera très délicat d'expliquer la trajectoire qui a mené ces enfants à l'échec.

Selon ces points de vue, et de manière générale, les enfants considérés comme étant en difficulté ont un faible rendement scolaire et rencontrent des échecs dans différentes matières, principalement les matières de base que sont la langue et les mathématiques. Dans une étude menée à Montréal, Jean-Pierre BRUNET rend compte de différents facteurs qui peuvent être observés :

– une déficience langagière avec, entre autres, un vocabulaire sous-développé, une sous-utilisation du « je », des phrases incomplètes ou encore une mauvaise prononciation ;
– une socialisation inadéquate avec, par exemple, une peur des contacts avec l'enseignant, un repli sur soi, de l'agressivité, des cris et des chuchotements ;
– un manque de contrôle ou une faible tolérance à la frustration marqués par la transgression des espaces privés, des réactions violentes, disproportionnées et inattendues, un manque d'attention et de concentration ou encore un refus d'obéissance ;
– une capacité mémorielle inadéquate, l'oubli des consignes et des repères, la difficulté à réutiliser des connaissances ;
– une difficulté à s'organiser, marquée par une faible capacité d'anticipation, un désordre incapacitant, une utilisation inappropriée du matériel ;
– un désintérêt marqué pour les activités proposées, caractérisé par de l'insouciance, de l'indifférence, de l'apathie ;
– une motricité fine déficiente avec un manque de contrôle occulo-manuel et de maîtrise du geste ;
– une pauvre organisation spatiale avec des enfants habituellement incapables de se restreindre dans l'espace ou de l'organiser en respectant des consignes ou des contraintes ;
– un rapport au temps inapproprié marqué par une difficulté à objectiver le temps et une pensée séquentielle peu courante.

C'est, en général, à partir de ces indices que les enseignants signalent un élève susceptible de présenter des difficultés d'apprentissage et qu'ils orientent les types d'interventions qu'ils vont mettre en place.

4 Les enfants et adolescents à haut potentiel

En 2000–2001, une équipe associant des chercheurs des cinq universités francophones, s'est penchée sur la problématique des enfants à haut potentiel. D'après son rapport, [14], la population des jeunes à haut potentiel représente de 2 à 5% de la population scolaire totale. On peut donc affirmer sans trop se tromper que chaque enseignant est susceptible d'en avoir un dans sa classe chaque année. Certains ne seront pas détectés et arriveront à s'adapter au système scolaire. D'autres par contre, ne parvenant pas à cette adaptation, perturberont la classe ou seront en décrochage scolaire assez important. En effet, s'il est courant d'entendre dans l'opinion publique que ces enfants ne rencontreront jamais de problèmes au cours de leur parcours scolaire puisqu'ils sont « doués », il en va tout autrement dans la réalité. Des comportements d'ennui, d'agitation exagérée... de dépression parfois sont observés chez ces enfants dits « surdoués ». En Flandre, des classes spéciales ont été créées pour ces élèves. En Wallonie, la majorité de ces jeunes se trouvent dans l'enseignement traditionnel. Cependant, du fait des problèmes qu'ils y posent, certains sont orientés — parfois à tort — vers l'enseignement spécial de type 3 qui regroupe les enfants caractériels.

4.1 Un essai de définition

Donner une définition exacte de *l'élève à haut potentiel* n'est pas plus facile que définir l'enfant ayant des difficultés d'apprentissage ! Depuis que l'on s'y intéresse, les conceptions ont évolué pour englober un domaine plus vaste.

À l'origine, l'enfant à haut potentiel était principalement considéré comme tel suite à une mesure de son quotient intellectuel. En effet, si on admet que le test du QI mesure l'intelligence, alors un enfant à haut potentiel est un enfant dont le QI est supérieur à un certain seuil, lequel ne peut qu'être arbitrairement fixé. Le repère le plus communément admis est celui de 130 sur l'*Échelle d'Intelligence de Wechsler pour enfants*, [37], qui est l'échelle la plus utilisée pour évaluer le développement de l'intelligence chez les enfants entre 6 et 16 ans.

Cependant, de nombreux chercheurs ne sont pas d'accord à propos de la valeur du QI à prendre en considération. De ce fait, cette définition réductrice de l'enfant à haut potentiel intellectuel est jugée de moins en moins satisfaisante. De plus, le concept d'intelligence a fortement évolué grâce aux recherches en psychologie cognitive effectuées au cours de la deuxième moitié du XX^{e} siècle.

Parmi les différentes conceptions, on peut noter celle de GARDNER, [15], qui envisage l'intelligence comme un ensemble de capacités diverses. Il décrit huit formes d'intelligence – telles que l'intelligence musicale, l'intelligence linguistique ou l'intelligence logico-mathématique – qu'il considère présentes chez toutes les personnes, mais développées à des degrés divers.

La conception de RENZULLI, [27], [28], fait entrer trois composantes essentielles dans sa définition : une aptitude intellectuelle élevée, la créativité et l'engagement. Selon REN-

ZULLI, la conjonction de ces trois composantes est nécessaire pour réaliser des productions intellectuelles exceptionnelles.

STERNBERG, [32], a, pour sa part, développé un modèle triarchique de l'intelligence dans lequel des aptitudes exceptionnelles peuvent se manifester dans chacune des trois formes d'intelligence qu'il a définies : analytique, pratique et créative. Les potentiels « les plus élevés » sont toutefois ceux des sujets qui présentent des capacités simultanément dans les trois formes d'intelligence et qui sont capables de passer de l'une à l'autre en sachant quand et comment il est le plus approprié d'utiliser chacune d'entre elles.

Une autre théorie, le « Munich model of giftedness and talent », proposée par ZIEGLER et HELLER, [38], tente d'intégrer quatre grands paramètres : des facteurs intellectuels, de personnalité, d'environnement et des domaines de performance.

Pour sa part, le Département de l'Éducation des États-Unis donne la définition suivante des élèves considérés à haut potentiel : « *Enfants ou adolescents qui présentent des dons exceptionnels ou qui montrent le potentiel pour être performants à de très hauts niveaux d'accomplissements comparativement aux autres de leur âge, leur expérience et leur environnement. Ces enfants et adolescents ont des capacités de hautes performances dans des domaines intellectuels, créatifs et/ou artistiques, possèdent une capacité inhabituelle de leadership ou excellent dans des domaines spécifiquement scolaires. Ils ont besoin de services ou d'activités qui ne sont normalement pas fournis par les écoles.* »

Pour résumer, nous pouvons dire que trois points essentiels ressortent des définitions les plus récentes du concept de *haut potentiel*.

- Le premier est que ce potentiel peut s'exprimer dans des formes différentes d'intelligence. On y retrouve bien entendu chez la plupart des auteurs une intelligence analytique ou générale, mais aussi la créativité, l'intelligence sociale, l'intelligence pratique, le talent dans le domaine artistique ou dans un domaine académique.
- Le deuxième point est que la définition du haut potentiel intègre d'autres composantes que les intelligences, notamment un engagement marqué dans un domaine et un environnement propice au développement de ce potentiel.
- Le troisième point est que la définition comprend aussi bien la performance de haut niveau que le potentiel pouvant conduire à celle-ci.

4.2 Problématique

Pour les enseignants, détecter l'enfant à haut potentiel, l'évaluer en vue de lui proposer des activités l'aidant dans son développement, sont des activités complexes. Leur formation initiale ne les y prépare pas et l'information à ce sujet est assez succincte.

Il n'est pas aisé pour les enseignants de distinguer l'enfant *scolaire* de l'enfant *à haut potentiel*. Le tableau suivant dû au pédopsychiatre Revol permet une comparaison de ces deux types d'enfants.

Enfant scolaire	**Enfant à haut potentiel**
aime apprendre	veut savoir
mémorise bien	devine vite
apprécie la clarté	aime la complexité
connaît la réponse	pose des questions
est réceptif	est intense
est intéressé	est très curieux
copie volontiers	crée du nouveau
a de bonnes idées	a des idées riches
aime l'école	subit l'école

Plus spécifiquement, les enseignants peuvent avoir beaucoup de difficultés à interpréter la souffrance, l'agitation, le désintérêt… de certains élèves comme un ou des signes de douance[6].

Dans son rapport, [14], l'équipe interuniversitaire mentionnée plus haut délimite cinq champs, possédant des interactions multiples :

- le champ **personnel** qui couvre quatre domaines : l'affectivité, le développement (psychomotricité, langage, dyssynchronie), les compétences relationnelles et les démarches mentales (réflexivité, rapport à la performance, humour, créativité, mobilisation dans les activités) ;
- le champ des **apprentissages** qui couvre deux domaines : les contenus (éducation artistique, lecture, écriture, mathématiques, sciences, informatique et nouvelles technologies, langue, orientation spatiale, coordination fine) et les démarches (vitesse, mémorisation, rapport à la complexité, concentration, avidité, esprit de recherche, organisation) ;
- le champ de la **famille** ;
- le champ **scolaire** différencié en quatre traits : relation aux pairs, relation au personnel éducatif, relation à l'apprentissage, relation à l'institution (ennui, investissement) ;
- le champ **social et culturel**.

Les auteurs de la recherche interuniversitaire notent que tous les enfants interrogés rencontrent des difficultés comme des facilités, avec des différences, selon les enfants, les contextes, les situations d'apprentissage… Il faut donc être conscient que la problématique des enfants à haut potentiel est complexe, qu'elle nécessite une étude au cas par cas, et qu'il est donc particulièrement difficile de promouvoir des « recettes toutes faites » pour aider ces enfants dans leurs apprentissages.

Toutefois, en synthèse, les auteurs de cette recherche mettent en évidence quelques traits saillants des enfants à haut potentiel, certains constituent des avantages, d'autres entraînent des difficultés :

[6]Terme canadien désignant le fait d'être doué.

- des ressources importantes dans le domaine des démarches mentales : créativité, intérêt, réflexivité, rapport à la performance, humour, mobilisation ;
- des difficultés dans le domaine de l'affectivité : gestion problématique de la frustration et de l'anxiété ;
- au niveau du développement : bonnes compétences langagières, habiletés psychomotrices, dyssynchronie ;
- aspiration et capacité à l'autonomie, rapport parfois conflictuel à l'autorité avec des comportements de rejet, de mépris ironique ou de provocation subtile.

En fonction de l'objet de notre recherche, nous nous limiterons au champ des apprentissages et au champ scolaire.

4.3 Le champ des apprentissages

En ce qui concerne les contenus, nous nous centrerons principalement sur la lecture, l'écriture, les mathématiques, l'informatique et les nouvelles technologies.

- La lecture constitue un atout de développement pour les enfants à haut potentiel car elle permet de combler un manque, elle est source de connaissances, et elle peut aussi servir d'échappatoire.
- L'écriture – liée à la psychomotricité qui est souvent déficiente chez ces enfants – ne peut être située comme un facteur de ressources ou de difficultés de manière systématique.
- Les mathématiques sont très appréciées par les enfants à haut potentiel qui présentent bien souvent de grandes compétences dans ce domaine. Les auteurs de la recherche interuniversitaire estiment par ailleurs que *cet attrait ne doit pas être négligé dans une pédagogie visant l'intégration de l'enfant à haut potentiel aux autres élèves d'une classe dont une bonne part souvent n'apprécie pas cette branche.*
- L'informatique et les nouvelles technologies semblent être un contexte motivant et apprécié de ces enfants. Ce contexte leur permet de développer des compétences qu'ils ne peuvent pas toujours exercer ailleurs. Nous pensons notamment au processus de création, comme le montrent les figures 1.1 et 1.2 ci-dessous — réalisées par un enfant de 7 ans —, ainsi qu'aux processus de généralisation, simulation, modélisation. Pour un complément de lecture sur ces dernières utilisations, nous renvoyons le lecteur au chapitre 4, *Des activités avec Apprenti Géomètre,* in [12].

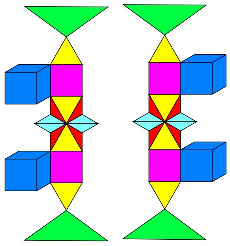


Fig. 1.1

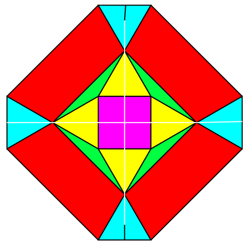


Fig. 1.2

En ce qui concerne les démarches, les recherches montrent que les enfants à haut potentiel ont quelques difficultés à se plier aux contraintes liées à la situation scolaire telles que l'attente des autres et le travail en équipe. Ils ont l'habitude d'utiliser une démarche intellectuelle personnelle, libre et solitaire. De ce fait, ils acceptent difficilement d'adopter une méthode qui leur est imposée, d'analyser les données d'un problème ou de passer par un certain nombre d'étapes pour atteindre un résultat. Ils ne voient pas l'intérêt de se plier aux réalités d'une situation d'apprentissage imposée par l'école pour construire un savoir qu'ils ont l'impression de déjà connaître ou qui ne les attire pas.

- Vitesse et rapidité : beaucoup d'enfants à haut potentiel sont plus rapides que les autres enfants. Cependant, par rapport au groupe scolaire, cette rapidité peut être vécue comme une ressource ou comme une difficulté. Différentes recherches en psychologie cognitive ont montré que cette rapidité est liée au fait que ces enfants réalisent des inférences que d'autres ne peuvent effectuer. Ils établissent rapidement des liens entre des concepts, des situations, des contextes. . . Ces liens peuvent parfois se traduire par des maladresses au niveau du langage oral — parfois écrit — tant l'expression verbale ne peut suivre le rythme accéléré de la pensée.

  On ne peut cependant identifier « enfant à haut potentiel » avec « enfant rapide », ni « enfant en difficulté » avec « enfant lent ». Un enfant à haut potentiel peut avoir besoin de temps pour gérer son travail, du fait qu'il approfondit celui-ci et vérifie soigneusement ses résultats avant de les livrer[7]. Il y a alors un risque de le voir confondre avec un enfant en difficulté.
- Mémorisation : les enfants à haut potentiel possèdent une très bonne mémoire qu'ils utilisent au maximum de leurs potentialités dans les situations d'apprentissage. Ceci est vrai tant pour la mémoire à court terme que pour la mémoire à long terme. La capacité de leur mémoire de travail leur permet également de traiter une masse plus importante d'informations que les autres apprenants.
- Rapport à la complexité : la majorité des observations conduisent à dire que les enfants à haut potentiel sont demandeurs de situations complexes, en tout cas plus complexes que celles devant lesquelles sont placés leurs condisciples du même âge.

  Nous explicitons quelques situations de ce type au chapitre 6 du présent rapport. Dans l'activité d'initiation à *Apprenti Géomètre* qui y est relatée, le choix est laissé aux élèves entre des figures à reproduire. Nous avons constaté que l'enfant à haut

[7]Lire à ce sujet le témoignage de Laurent Schwartz rapporté à l'annexe A.

potentiel essayait d'abord les figures complexes (1.3 et 1.4) avant de tenter la reproduction de figures plus simples à la suite de l'échec de ses premiers essais, (1.5).

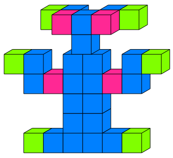


Fig. 1.3

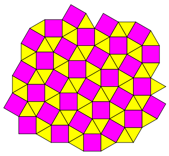


Fig. 1.4

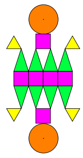


Fig. 1.5

Cependant, comme pour tout apprenant, il faut jauger cette complexité à l'aune des capacités de l'apprenant à réaliser des inférences, d'émettre des hypothèses, de procéder à des vérifications. Ainsi, trop de complexité ou de simplicité conduit à une diminution de la motivation et à l'ennui, accompagnés de leur lot de désagréments divers.

- Concentration : la capacité de concentration est importante chez ces enfants, ce qui est un atout important dans les apprentissages. Cependant ils ont parfois des difficultés à trouver le temps et l'espace suffisants pour se concentrer.
- Avidité : deux types d'avidité sont présents chez les enfants à haut potentiel en âge d'école primaire : l'envie de savoir, de comprendre et l'envie de réussir dans la vie. Ce paramètre est donc aussi à prendre en compte dans la préparation d'activités pédagogiques pour ces enfants.
- Esprit de recherche : ces enfants aiment la recherche et la remise en question. Cet esprit de recherche se retrouve dans toutes les situations de vie.
- Organisation et méthode : ce point semble être une difficulté pour une grande part des enfants en douance. En effet, il semble qu'ils soient peu organisés dans leurs démarches quotidiennes. Organiser son travail, planifier ses tâches, construire une méthode de travail générale et s'y tenir... semble être complexe pour ces enfants. Ceci est sans doute dû au fait que dans l'enseignement primaire cette organisation n'est pas nécessaire pour réussir. Cependant elle devient indispensable au vu de la charge quotidienne de travail dans les enseignements secondaire et supérieur. Ceci peut d'ailleurs être cause d'échec pour ces enfants.

4.4 Le champ scolaire

Les relations entre les enfants peuvent être basées sur des sentiments de jalousie/mépris. Les uns jalousant l'enfant à haut potentiel pour ses facilités à comprendre, à répondre..., l'autre, en réponse, méprisant ses pairs qui ne le comprennent pas. Certaines attitudes individualistes, d'isolement, ou à l'inverse des attitudes de conformisme, en faisant des erreurs intentionnelles, peuvent aussi être observées. On remarque également, de manière plus positive, des comportements de leadership dans diverses activités (créativité, jeu...), la recherche de la présence de pairs afin de pouvoir échanger, de s'intégrer.

La relation au personnel éducatif est influencée par deux paramètres principaux : la personnalité de l'enseignant et le dispositif pédagogique. Des interpellations régulières de la part de l'enfant — ce qui peut être perçu comme perturbant par l'enseignant (ou les pairs)

—, des dépassements souhaités par l'apprenant mais en contradiction avec la matière prévue par l'enseignant, une capacité à répondre rapidement aux questions de l'enseignant... sont des éléments qui sont régulièrement relevés comme étant éléments négatifs et générateurs de difficultés tant pour l'enseignant que pour l'enfant à haut potentiel.

Au niveau de la relation à l'apprentissage, les enfants à haut potentiel sont, dans la grande majorité, motivés à apprendre. Les matières scolaires les intéressent réellement. Ils sont toutefois, dans certains cas, désabusés au vu de ce que l'école leur propose. La vitesse peu élevée de travail figure parmi les facteurs qui peuvent provoquer l'ennui, le désintérêt et la démotivation vis-à-vis de l'école.

Au niveau de la relation à l'institution, des comportements de rejet des règles non expliquées peuvent apparaître. Dans la majorité des cas, c'est toutefois la soumission ou la volonté d'intégration qui prévalent.

5 Des pistes de différenciation

Chacune des composantes d'un apprentissage — l'élève, le maître et le savoir — joue un rôle dans le succès ou l'échec. Il faut donc en tenir compte dans l'aide à apporter aux élèves, en difficulté ou non, à haut potentiel ou non. Certaines pistes de différenciation, très simples, sont valables de façon générale. Il s'agirait par exemple de faire varier divers paramètres de la situation :

- le nombre de consignes ;
- la complexité de la tâche ;
- le rythme des apprentissages (donc le temps laissé aux apprenants) ;
- les aides apportées ;
- les outils (nombre, type...) mis à la disposition ;
- ...

Compte tenu de l'objet de notre recherche, attardons-nous sur les catégories des enfants en difficulté et des enfants à haut potentiel.

5.1 En ce qui concerne les enfants en difficulté

L'étude de Jean-Pierre Brunet[8] résume les points de vue courants dans la littérature concernant le rôle du maître :

- Ne jamais s'enfermer dans un point de vue pseudo-scientifique qui pourrait inciter à cesser de se questionner sur la réalité complexe des difficultés d'apprentissage.

[8] voir `www.adaptationscolaire.org/themes/diap/documents/textes_diap_brunet.pdf`, *Pour une définition des difficultés d'apprentissage.*

- Ne jamais estimer que l'élève est l'unique responsable de ses difficultés. D'abord, il y a peu de chances que cela corresponde à la réalité ; ensuite, cela ne ferait qu'écraser l'élève sous le poids de la responsabilité et de la culpabilité ; enfin, cela prive l'enseignant d'une occasion de se questionner quant à son rôle dans l'apparition des difficultés.
- Ne pas croire que les situations d'échec et leur compréhension soient généralisables. Il existe en effet une variété considérable de cas de figure. Les variables causales étant tellement nombreuses, il serait dangereux de regrouper des situations d'élèves apparemment semblables. Une généralisation hâtive serait abusive et pourrait précipiter une intervention mal adaptée. Il vaut donc mieux estimer au départ que chaque situation est unique et chercher à mettre en évidence ce qui la distingue des autres.
- Procéder par essais et erreurs avec beaucoup de prudence, car il est difficile de connaître les interventions qui donneront des résultats avec un élève en particulier. Il a été mentionné que les élèves en difficulté avaient besoin de repères stables tant au niveau du matériel et des procédures que de la variété dans les démarches proposées. Par contre, la ritualisation excessive des procédés et démarches aurait pour effet de scléroser les fonctions cognitives des élèves et, tout en résolvant parfois certaines difficultés, en feraient apparaître d'autres.
- Chercher à savoir comment l'élève perçoit ses propres difficultés et écouter les explications qu'il en donne. Ces dernières ne doivent pas être considérées comme des indications sûres de ce qui se passe, mais comme la représentation qu'il en a. L'aide fournie devrait tenir compte de son point de vue. Dans le cas contraire, des résistances de sa part pourraient se manifester et nuire considérablement aux efforts de remédiation.

Du point de vue méthodologique, diverses pistes peuvent se révéler intéressantes :

- La pratique la plus régulièrement mise en place est l'intervention compensatoire, aussi appelée remédiation. Les savoirs enseignés mais non encore maîtrisés sont repris et répétés en les allégeant. La remédiation est faite individuellement ou par petits groupes, l'enseignant varie l'approche didactique en utilisant de nouvelles mises en situation, de petits défis dirigés, un travail basé sur la motivation, ...
- D'autres aménagements peuvent être mis en place : le travail par ateliers, le travail en cycles (2,5 – 5 ; 5 –8 ; ...), le passage dans une classe de niveau inférieur lors de certaines activités ou encore l'utilisation de logiciels informatiques.
- Certaines démarches de structuration pourraient être utilisées pour aider à résorber certains facteurs générateurs de difficultés d'apprentissage. Ainsi, la narration de recherche amène à combattre une déficience langagière. La précision des consignes et la réalisation de synthèses non seulement descriptives, mais aussi des savoir-faire utilisés amènent des repères et permettent aux enfants de transférer leurs acquis dans des situations semblables à celles qu'ils ont effectuées. L'utilisation d'outils structurés oblige les élèves à une certaine organisation.

5.2 En ce qui concerne les enfants à haut potentiel

Si on se place au point de vue des enfants à haut potentiel, quatre besoins essentiels se font jour, quel que soit le champ abordé :

- un besoin de reconnaissance de leur situation, de reconnaissance de leur possibilités et de leurs faiblesses ;
- un besoin de motivation, ou de soutien de leur motivation
- un besoin de prévention, de remédiation et parfois de soin,
- un besoin d'équilibre.

Ces besoins peuvent être pris en compte d'une part moyennant une adaptation des dispositifs pédagogiques (tutorat, ateliers, référents, individualisation, changement de classe pour certaines activités, travail par cycle...), d'autre part en permettant à l'enfant à haut potentiel un parcours scolaire individualisé (saut de classe, choix d'un établissement plus approprié).

Du point de vue des activités à proposer à ces élèves, il semble que *cinq axes ou besoins majeurs spécifiques puissent être dégagés*(voir [14]).

- **L'accélération** : les enfants à haut potentiel ont besoin de moins de temps pour comprendre les consignes. On limitera donc ces dernières à l'essentiel, sans verbiage inutile. Il en va de même pour l'ensemble des explications à leur fournir.
- **La complexité** : les enfants à haut potentiel possèdent des capacités d'inférence, d'émission d'hypothèses, de création de liens entre des concepts éloignés, de reconnaissance de similitudes entre des structures de savoir, ... On utilisera ce constat en proposant des dispositifs d'apprentissage incluant des thèmes plus généraux, plus universels et interdisciplinaires. Les initier aux méthodes des sciences expérimentales ne peut que les satisfaire.
- **La profondeur** : placer les enfants à haut potentiel en situation de recherche peut les conduire à creuser davantage une situation, à construire de nouveaux concepts, à créer de nouveaux liens.
- **La nouveauté** : de même, les enfants à haut potentiel développent souvent une connaissance originale d'un concept, à partir d'une méthode personnelle, originale ou pas. Ils peuvent très bien remettre en œuvre une méthode passée mais être efficace. Cette façon de travailler leur permet également d'exercer leur créativité. Il convient de les encourager dans cette voie, plutôt que de tenter de les ramener dans le rang. Les inviter à construire des liens entre des concepts éloignés, encourager cette diversité de pensée sont autant de pistes qui rencontrent leur envie d'apprendre et leurs besoins.
- **L'idéalisme** : il semble que bon nombre d'enfants à haut potentiel soient idéalistes et intéressés par les problèmes de société. Ils développent ainsi de manière précoce des modèles moraux et éthiques. On pourra les laisser inventer des situations utopiques ou réelles, les laisser s'exprimer, argumenter leurs modèles éthiques. Ceci dans le respect des idées et des arguments de chacun.

Certaines pistes sont peu contraignantes à mettre en place et sont susceptibles de rencontrer ces besoins :

- la mise à disposition de logiciels éducatifs et/ou ludiques ;
- l'usage d'outils d'auto-apprentissage de l'écriture, de la lecture, du calcul,
- la pratique d'activités de création et/ou d'activités artistiques
- des lectures personnelles en classe.
- l'usage d'outils multimédias.

Remarque : En apportant des réponses adéquates aux besoins ainsi définis, le fossé entre les savoirs des uns et des autres risque de se creuser. L'enseignant doit accepter que tous ses élèves n'acquièrent pas systématiquement les mêmes savoirs, ni la même « quantité » de savoirs au même moment. Mais ceci n'est-il pas inhérent aux principes mêmes de l'enseignement différencié ?

Chapitre 2

Des alternatives pédagogiques

Dans ce bref chapitre, nous rappelons les principes de trois méthodes pédagogiques pouvant être utilisées en vue de varier les activités proposées aux élèves et donc contribuer à une différenciation de l'enseignement. Les deux premiers paragraphes sont pour l'essentiel extraits de la brochure [11] qui accompagnait le logiciel *Apprenti Géomètre* lors de sa première diffusion. Le troisième n'a pas été exploité au niveau expérimental. Nous indiquons ensuite des possibilités de *schéma didactique*.

1 Les problèmes

1.1 Une situation-problème...

La plupart des mathématiciens — sinon tous — considèrent que le propre de l'activité mathématique est la résolution de problèmes. Qu'il nous suffise de mentionner à cet égard les travaux d'Alan Schoenfeld, en particulier son livre *Mathematical Problem Solving*, [30] et son dernier article *Problem Solving from Cradle to Grave*, [31]. Une bibliographie plus importante figure dans [8].

De nombreuses études ont en effet montré que la pratique des situations-problèmes permet, sous quelques conditions, l'appropriation de connaissances et le développement de compétences d'ordre méthodologique. Dans « *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes* », [8], les auteurs proposent cette définition d'une situation-problème : « un problème est une question suffisamment complexe pour que la réponse ne soit pas facile à trouver ».

C'est dans la confrontation à des situations-problèmes qui lui font sens que l'apprenant va s'investir et investir ses connaissances antérieures, ses représentations – ses *déjà-là* – pour non seulement résoudre le problème mais aussi soumettre ses *déjà-là* à révision, pour les modifier, les compléter ou les rejeter pour construire de nouvelles connaissances. Comme le rappelle G. Brousseau, [5], « ainsi les problèmes les plus intéressants sont ceux qui permettront de franchir un véritable obstacle. »

Épinglons ci-dessous une liste non exhaustive des principales caractéristiques que peut comporter une situation-problème.

Principales caractéristiques des situations problèmes

- être compréhensible par l'élève, y compris au niveau de la lecture ;
- avoir du sens pour l'élève, pour qu'il soit concerné et motivé ;
- être suffisamment complexe pour nécessiter une recherche, ce qui signifie que la démarche de résolution n'apparaisse pas explicitement dans l'énoncé.
- ne pas être un « casse-tête », autrement dit, l'élève doit pouvoir surmonter les difficultés de la résolution ;
- permettre un travail d'approche, par essais et erreurs
- être susceptible de plusieurs démarches de résolution, et parfois de plusieurs solutions.

1.2 L'élève face à une situation-problème

On peut structurer l'activité de résolution de problèmes en trois grandes phases : une première où l'élève prend connaissance du problème, l'analyse, le comprend et émet quelques hypothèses d'action et/ou de solution ; une deuxième au cours de laquelle l'élève agit et avance dans la recherche d'une solution, durant laquelle il partage et confronte ses résultats avec d'autres élèves ; une troisième où l'élève établit sa réponse et la valide en vérifiant sa compatibilité avec toutes les données de l'énoncé. Il la communique à l'ensemble de la classe ou du groupe de travail, soit oralement, soit par écrit. Le tableau suivant expose synthétiquement quelques détails de ces trois phases, ainsi que des indices d'évaluation formative.

Résolution de situations-problèmes

	Actions des élèves	Indices d'évaluation
Situation initiale	Exploration de la situation-problème. Activation des représentations existantes. Construction d'une représentation de la tâche à effectuer. Projection d'une solution, anticipation d'une démarche de recherche. Recherche de documentation, consultation de référentiels ou de synthèses.	Reformuler la consigne. Citer des éléments nécessaires à la résolution : connaissances mathématiques, instrumentales. Annoncer une démarche possible, une solution possible.
Recherche	Investissement des connaissances et des compétences. Partage, confrontation, justification des premières démarches en petits groupes ou en groupe-classe. Réinvestissement individuel des informations partagées.	Garder une trace des étapes de la recherche : dessin à main levée, impression. Exposer sa démarche et l'expliquer, la justifier oralement.
Solution	Réalisation d'un produit final. Mise en commun et exposé des démarches et des réponses en groupe-classe.	Reproduire les figures aux instruments ou imprimer. Expliquer et justifier oralement ou par écrit sa démarche et/ou sa réponse.

Ce tableau est notamment inspiré des travaux de A. Strebelle, C. Depover, B. Noël, [33]. Cette présentation linéaire des démarches ne constitue pas un modèle à reproduire tel quel en classe selon l'ordre proposé. De nombreux va-et-vient seront, sans nul doute, entrepris au cours de la résolution d'une situation-problème.

Après la résolution d'une situation-problème vient une période consacrée à la structuration et l'institutionnalisation des apprentissages, et éventuellement une autre qui organise le transfert des résultats vers d'autres situations.

2 La narration de recherche

L'activité de résolution de problème contient, entre autres, une phase qui consiste en l'exposé de la recherche accomplie et de la réponse obtenue. Cette phase est souvent complexe pour l'élève car elle lui demande un effort de communication, d'évaluation et de mise en ordre de ses démarches. Des difficultés liées à l'écrit proprement dit apparaissent également, notamment au niveau de la syntaxe, de l'orthographe et de la mise en page. Il est donc utile de lier la narration d'une activité mathématique à l'apprentissage de l'écrit.

La narration de recherche est un travail interdisciplinaire qui demande de mettre en œuvre diverses compétences, tant disciplinaires que transversales.

2.1 Qu'est-ce qu'une narration de recherche ?

Pour l'enseignement fondamental, la narration de recherche est l'exposé par l'élève tant de la démarche qu'il a employée au cours de la recherche d'une solution, que de la réponse en elle-même. Cet exposé peut prendre deux formes : l'une orale, très courante, l'autre écrite, plus complexe à mettre en place. Dans les deux cas, ce récit s'appuie à la fois sur la langue française et sur le langage mathématique.

L'exposé oral peut apparaître à divers moments de l'activité de résolution, par exemple lors d'un dialogue entre deux élèves au cours d'une « confrontation » des démarches et/ou des solutions, ou au terme de l'activité de recherche lors de la mise en commun des démarches en groupe-classe. Cet exposé oral peut être soutenu par des dessins (écran d'ordinateur, feuille A4 ou affiche, projection de transparent, dessin au tableau, ...). Il s'agit ici d'une forme « brute » de narration de recherche, où l'élève agit et réagit sans avoir véritablement le temps de structurer sa pensée et son discours. L'intérêt de l'exposé oral est qu'il permet d'entendre les réactions des autres élèves, de pouvoir répondre à celles-ci immédiatement et sans doute, d'approfondir sa pensée. Il permet également une évaluation formative dans l'action de la part de l'enseignant.

L'activité de narration dans sa forme écrite est plus complexe pour l'élève. D'une part, parce qu'il s'agit d'investir le terrain de la langue française avec toutes les difficultés que d'aucun peuvent éprouver, d'autre part parce qu'il s'agit de construire un exposé structuré, au contraire de l'exposé oral spontané. Ceci implique donc que l'élève puisse disposer d'un temps plus long pour raconter « l'histoire » de sa recherche. Comme pour l'exposé oral, la narration de recherche écrite pourra être accompagnée de dessins. Pour cette raison, nous pensons qu'il est parfois utile de préciser à l'avance aux élèves que la situation-problème fera l'objet d'une narration de recherche. De cette façon, ils peuvent prévoir, entre autres, des copies de tracés au fur et à mesure de leur recherche.

À certains moments, la narration de recherche pourra évoluer vers un texte injonctif. En effet, après la mise en commun des démarches des élèves, il est possible de rédiger, en groupe-classe, par petits groupes ou individuellement, un texte qui explique « une marche à suivre pour ... ».

La pratique de la narration de recherche permet, entre autres, de rencontrer des compétences transversales (voir [2]) :

- Résoudre et raisonner ;
- utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents ;
- exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ;
- confronter ses résultats avec ceux des autres et avec une estimation préalable ;
- s'exprimer dans un langage clair et précis ;
- maîtriser le symbolisme mathématique usuel, le vocabulaire et les tournures nécessaires pour décrire les étapes de la démarche ou de la solution ;
- présenter des stratégies qui conduisent à une solution ;
- structurer et synthétiser.

2.2 Des représentations accompagnant une narration de recherche

La narration de recherche, qu'elle soit orale ou écrite, peut être accompagnée par des représentations de figures. Celles-ci peuvent apparaître sur différents supports allant de la simple feuille de papier au transparent pour rétroprojecteur, en passant par le tableau. Nous n'en ferons pas ici l'énumération exhaustive, l'intérêt étant d'employer le support adéquat en fonction de la communication à réaliser.

Les représentations peuvent également prendre différentes formes : dessin aux instruments, dessin à main levée, impression d'un dessin informatique, tracé sur papier pointé (quadrillé ou triangulé). Nous aurons l'occasion d'en rencontrer à plusieurs reprises aux chapitres 7, 8 et 9.

3 La pédagogie du projet

Le concept même de projet n'est pas nouveau, de tout temps l'homme a mis en avant des projets, a utilisé des conduites d'anticipation. Plus particulièrement, en éducation, il semblerait que cette approche pédagogique soit née au XVIII^{e} siècle avec des penseurs comme KANT et ROUSSEAU. Au XX^{e} siècle, entre 1915 et 1920, la pédagogie du projet a connu un essor tout particulier avec des pédagogues comme DEWEY, KILPATRICK, FREINET, Montessori. Mais c'est dans les années 70-80 qu'elle va réellement prendre son envol. De fait, en pratiquant la pédagogie du projet, l'enseignant sollicite différents courants pédagogiques tel que la pédagogie Freinet, la pédagogie institutionnelle, cognitive, par objectifs. . ..

Le concept de projet véhicule différentes idées dont la principale est la notion de temps futur, de prévisions, de visions *a priori*. On y trouve aussi l'idée de désir, d'intention, et le fait que le projet soit un acte conscient, un but. Par ailleurs, un projet se détermine par des moyens à mettre en œuvre, par un programme de travail à établir, par une répartition des tâches parfois, par des processus d'évaluation et de régulation.

De même, la pédagogie du projet est associée à l'idée de **volontarisme** — qui indique « la volonté de l'homme de vouloir tout maîtriser et tout orienter », (voir [13]) — et à l'idée d'**action**. Il s'agit donc « de mettre en œuvre un plan d'actions au service d'une pensée efficace ». Ainsi, cette pédagogie permet de vivre deux étapes importantes dans les activités de création et de production que sont la *conception* et la *réalisation*. La pédagogie du projet est ainsi connotée par le pragmatisme et le béhaviorisme.

3.1 Des étapes du projet

Selon Le Grain (cité dans [13]), le projet se décompose en quatre grandes étapes.

- L'émergence du projet (*projet-visée*).
- Le choix du projet (*projet-programmatique*) qui demande un consensus de la part de tous les acteurs prenant part au projet et une mise au point de la planification du travail.
- La réalisation du projet durant laquelle sa faisabilité est éprouvée et durant laquelle il est parfois nécessaire de renégocier la planification ou de revoir le projet.
- L'évaluation du projet réalisée par le groupe sur les quatre plans suivants : l'évaluation du produit, la réalisation des objectifs pédagogiques, le développement des capacités, l'acquisition de connaissances nouvelles.

Il faut cependant remarquer que la forme du travail peut varier au cours du projet. En effet, notamment au cours de l'étape de réalisation, le travail peut être réalisé individuellement, en groupe ou collectivement.

De même, l'évaluation du projet n'est pas uniquement effective en fin de projet. Il y a lieu d'évaluer l'avancement du projet et sa faisabilité tout au long du processus de réalisation. C'est ainsi que des réajustements seront peut-être obligatoires. Ceux-ci pourront porter soit sur le produit fini en lui-même, soit sur la planification dans le temps du travail, sur la constitution des équipes ou sur l'attribution du travail, sur le matériel nécessaire. . .

3.2 Des richesses de la pédagogie du projet

On trouvera ci-dessous une liste de points significatifs de la pédagogie du projet. Tous ces points ne sont pas nécessairement présents à tous moments dans tous les projets. Mais si on réalise des projets variés, il y a fort à croire que cet ensemble soit rencontré.

- L'expression et les textes libres,
- la correspondance scolaire, la coopération scolaire,
- l'étude du milieu par les enquêtes et recherches,
- la démarche expérimentale et l'analyse de situations, le principe de l'expérience tâtonnée,
- la recherche de l'entente et de la coopération dans le groupe pour rendre efficace son fonctionnement,
- la prise en charge par le groupe d'une situation particulière dans un cadre institutionnel tel que l'école,
- le fait que l'apprenant soit partie prenante de ses apprentissages, et surtout du cadre de ses apprentissages,
- le fait que la motivation soit plus importante,
- la planification et l'individualisation des tâches,
- la détermination d'objectifs précis en termes de résultats observables, et l'évaluation.

Le caractère affectif est également très présent dans cette pédagogie. Comme l'indiquent Desmet et Pourtois, [13], « la pédagogie du projet permet la reconnaissance et la concrétisation de ses propres désirs ».

4 Autres pistes didactiques

À côté des « grandes » alternatives mentionnées ci-dessus, il existe d'autres possibilités d'arriver à la différenciation. On trouvera ci-dessous trois schémas didactiques pouvant convenir à l'étude de certaines situations-problèmes. Elles devraient faire suite à une analyse *a priori* (voir le chapitre 3, en particulier le paragrahe 3).

4.1 La décomplexification

Dans ce premier schéma, la situation-problème proposée au départ est la même pour tous les élèves. La consigne est succincte. Elle peut toutefois être précisée pour qui le demande.

La situation-problème étant complexe, l'élève n'est pas obligé de l'aborder directement. En effet, l'enseignant propose également aux élèves une suite de situations de complexité croissante. Il y aurait par exemple autant de situations « décomplexifiées » qu'il y a d'obstacles importants (concernant les savoirs et/ou les démarches) à la résolution de la situation principale.

L'élève a ainsi la possibilité de progresser vers la situation la plus complexe par petites étapes, comme on monte un escalier. De plus, à tout moment, il peut « lâcher » le processus graduel pour s'investir dans la résolution de la situation-problème initiale.

Ce schéma a pour avantage de permettre, dans la majorité des cas, à tous les élèves de résoudre la situation-problème complexe.

4.2 L'enseignant *interface en différé*

Ce deuxième schéma didactique part du même principe, que le précédent : l'enseignant propose à tous les apprenants la même situation-problème initiale. Il prépare aussi une suite de situations décomplexifiées, chacune correspondant à une des erreurs que les élèves peuvent commettre, erreurs déterminées par une analyse *a priori* (voir le chapitre 3).

Au lieu de proposer d'emblée les situations décomplexifiées aux élèves, l'enseignant observe leur travail et détecte les difficultés et/ou les erreurs commises. À partir de cette évaluation formative, il regroupe les élèves et leur assigne une situation décomplexifiée qui devrait leur permettre d'avoir accès, *in fine*, à la situation initiale. Il prend soin de leur expliquer le nrapport entre cette situation et la situation initiale.

L'activité se termine par une synthèse de chaque groupe qui expose sa démarche.

Dans ce schéma, l'enseignant joue plutôt un rôle d'*interface en différé* entre le savoir et l'apprenant : il intervient après que les erreurs aient été commises.

4.3 L'enseignant *interface en direct*

Un troisième schéma didactique est celui qui, à partir d'une situation-problème complexe et identique pour tous, voit l'enseignant en position d'*interface en direct* entre le savoir et l'élève. Il est donc susceptible d'intervenir à tout moment dans le travail d'un élève pour lui apporter l'aide nécessaire au franchissement d'une difficulté.

Cette position demande autant de préparation que la précédente ainsi que beaucoup d'observation et de dialogue avec les apprenants afin de pouvoir leur apporter les aides conceptuelles ou méthodologiques appropriées à bon escient. Une fois encore, *in fine*, tous les élèves doivent avoir appris quelque chose, et si possible, avoir résolu la situation-problème.

Chapitre 3

Difficultés et obstacles

> *L'apprentissage peut être vu sous cet angle : apprendre, c'est savoir inhiber, savoir renoncer à telle ou telle position, démarche ou solution. D'où une nouvelle conception de l'erreur, comprise comme la conséquence d'une incapacité de renoncer à une solution déjà trouvée, une démarche déjà suivie, une possibilité déjà utilisée.*
>
> H. Trochmé-Fabre, [36]

1 La nécessaire analyse *a priori*

Enseigner ne s'improvise pas. Derrière ce truisme se cache une montagne d'ouvrages savants, d'articles et de documents de toutes espèces qui demanderaient plusieurs années de travail à une équipe de chercheurs pour être simplement analysés, commentés et synthétisés. Heureusement, notre propos n'est pas de rédiger un manuel de didactique — un de plus — mais bien d'explorer dans la pratique des classes des possibilités d'enseignement différencié. Cela nous amènera sans doute à suggérer des *schémas didactiques* particuliers, mais quels que soient ceux-ci, il est une chose à laquelle personne n'échappe : **la nécessité préalable d'une analyse approfondie de la matière à enseigner.**

L'analyse à laquelle nous pensons porte exclusivement sur le contenu mathématique à enseigner par l'enseignant, à apprendre par l'élève. Elle comporte plusieurs facettes.

L'enseignant se doit de situer la nouvelle matière dans le corpus mathématique. Quelle est l'importance du nouveau sujet ? Les concepts en jeu sont-ils accessoires ou fondamentaux ? Sont-ils profondément enracinés au sein des mathématiques ? Ont-ils des prolongements significatifs ?

Il doit aussi situer cette matière dans le contexte de la formation dispensée à ses élèves. Ont-ils précédemment rencontré des sujets connexes qui contribuent à donner du sens au nouveau sujet ? Leur préparation a-t-elle été adéquate ? Seront-ils confrontés ultérieurement à des théories qui exploiteront ces nouvelles connaissances de façon significative ?

Les deux approches qui viennent d'être sommairement décrites se situent à un niveau global. Mais l'enseignant doit aussi en quelque sorte « entrer dans la matière », la décortiquer en détail. Il lui revient d'évaluer l'importance de chaque proposition ou théorème, la justification du choix des définitions. Il compare plusieurs schémas d'enseignement en vue de retenir celui qui met le mieux en valeur les points importants constituant le sens du sujet.

Enfin, il se pose également la question des difficultés que les élèves peuvent rencontrer. Il doit prévoir les « comportements erronés » que les élèves peuvent adopter et rechercher quelles difficultés de compréhension peuvent engendrer ces comportements. Il constatera que certaines difficultés relèvent de l'étourderie, de l'inattention ou de la fatigue et que d'autres peuvent être évitées en variant l'explication, la présentation, l'illustration ou en consacrant un peu plus de temps au sujet. Certaines peuvent même parfois résulter d'une maladresse d'enseignement.

Mais il existe des difficultés qui sont beaucoup plus difficiles à surmonter, ce sont celles que les didacticiens appellent des *obstacles épistémologiques*. Elles apparaissent quand un phénomène nouveau et inattendu se produit, un phénomène qui entraîne une rupture brutale avec des connaissances antérieures.

Pour G. Brousseau, [6], qui a repris l'idée d'obstacle épistémologique chez Bachelard, [4] :

> *Un obstacle se manifeste par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes.*
>
> *De plus, ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une « connaissance » ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions.*

Retenons de ce texte que les obstacles épistémologiques reflètent la résistance de l'individu devant une possible mise en cause de « vérités » antérieures.

Contentons-nous d'un exemple : lorsqu'ils apprennent à diviser un nombre par un autre, les enfants s'habituent à ce que le résultat soit plus petit que le dividende. Un jour, ils rencontreront une division dont le diviseur est une fraction inférieure à 1. Dans ce cas, le quotient sera plus grand que le dividende. Il y a là un conflit entre un nouveau résultat et une conception antérieure, le concept de nombre et celui de division sont remis en question. Il ne faut pas espérer que tous les élèves franchissent en même temps un tel obstacle épistémologique. Chacun doit « connaître un déclic », dont l'enseignant ne contrôle pas complètement la réalisation. Tant que le déclic n'a pas eu lieu, l'élève a tendance à continuer de respecter sa logique antérieure.

La distinction par l'enseignant des difficultés « banales » de celles qui constituent de véritables obstacles épistémologiques constitue l'une des facettes les plus importantes de son analyse de la matière.

Examinons à présent de plus près différents types d'erreurs.

2 Des types d'erreurs

J.-P. Astolfi dans [3] met en évidence les huit types d'erreurs ci-dessous. Il est d'avis que du diagnostic correct de ces erreurs dépendront *les modalités de l'intervention didactique* qui suivra.

- Des erreurs relevant de la compréhension des *consignes de travail.*
- Des erreurs résultant d'*habitudes scolaires* ou d'un *mauvais décodage des attentes.*
- Des erreurs témoignant des *conceptions alternatives des élèves.*
- Des erreurs liées aux *opérations intellectuelles.*
- Des erreurs portant sur les *démarches adoptées.*
- Des erreurs dues à une *surcharge cognitive.*
- Des erreurs ayant leur origine dans une *autre discipline.*
- Des erreurs causées par la *complexité propre du contenu.*

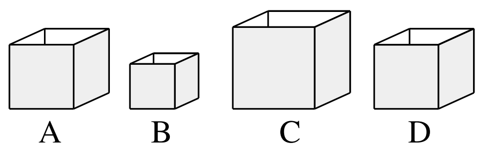
Reconnaître ces erreurs, les comprendre, les rendre conscientes à l'apprenant, en discuter avec lui et avec ses pairs, aménager le cheminement didactique en conséquence, voici des démarches qui devraient permettre d'améliorer l'apprentissage. Reprenons chaque type d'erreur pour l'expliciter quelque peu et y associer quelques exemples vécus en classe au cours des expérimentations.

2.1 Des erreurs relevant de la compréhension de la consigne de travail

Bien souvent, le premier contact des apprenants avec une situation de recherche se réalise par l'écoute ou la lecture d'une mise en situation et d'une consigne, laquelle est généralement[1] libellée sous la forme d'une question. L'apprenant doit alors comprendre ce que demande réellement l'enseignant. Outre les difficultés liées au vocabulaire lui-même — que veulent dire des verbes comme analyser, expliquer, synthétiser, résumer, justifier... pour de jeunes apprenants ? — les usages syntaxiques peuvent être ambigus[2]. Il faut encore y ajouter la longueur de la consigne, le nombre d'informations pertinentes qu'elle contient et les informations non pertinentes — ou « pièges » — que l'on peut y inclure.

À tout ceci peuvent encore s'ajouter les différentes représentations de la situation, entre lesquelles il s'agit d'établir des liens sémantiques, ou ne pas en établir comme ci-dessous :

Juliette a distribué quarante bonbons dans les quatre boîtes A, B, C, D. C'est dans la boîte B qu'elle a placé le plus de bonbons. La boîte D contient le quart des bonbons. La boîte C contient le tiers de la boîte A et la boîte B le double de A. Combien de bonbons y a-t-il dans chaque boîte ?



[1] Il existe des exceptions : des questions implicites, des phrases interrogatives qui ne participent pas à la question mais animent la situation de départ ou des situations qui comportent plusieurs questions...

[2] Nous pensons ici notamment à la problématique de la langue de l'enseignement. Pour une documentation plus complète, le lecteur peut se diriger, entre autres, vers les ouvrages suivants : [3], [?].

Dans ce problème, le dessin ne correspond pas avec l'écrit. Par exemple, le dessin montre deux boîtes A et D identiques, ce qui peut induire qu'il y a autant de bonbons dans chacune de ces deux boîtes. Dès lors, un élève débutant la résolution du problème en ayant en tête ce constat, peut être bloqué ou arriver à une réponse fausse, comme le montre le tableau ci-dessous.

Étapes	Démarches correctes	Démarches erronées
Étape 1	$D = \frac{1}{4}$ de 40 ; soit $D = 10$	$D = \frac{1}{4}$ de 40 ; soit $D = 10$
Étape 2	$A + B + C = 30$	$A = D = 10$
Étape 3	$C = \frac{A}{3}$ et $A \times 2 = B$	$C = \frac{A}{3}$ ...! Comment diviser 10 par 3 ? Ou, comment distribuer 3.333 ... bonbons ?
Étape 4	$A + 2A + \frac{A}{3} = 30$ soit $A = 9$	...

Un autre exemple est extrait d'une situation de travail avec le matériel « Fractionary » [3]. La consigne était la suivante : « *Reformer l'hexagone avec chacune des couleurs. Donc, il faut refaire un hexagone rouge, un hexagone vert...* ». Dans la classe, deux élèves tentent de recomposer l'hexagone en utilisant des figures de différentes couleurs, donc de différentes formes. De ce fait, ils apprenants sont confrontés à des difficultés bien plus complexes que prévu, et leur activité ne permet pas d'atteindre les objectifs visés par l'enseignant. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette démarche de travail ne correspondant pas à la consigne.

- L'apprenant n'a « entendu » que le début de la consigne : « Reformer l'hexagone ».
- L'apprenant ne comprend pas le sens du mot « chacune ». Il associe donc « Reformer l'hexagone » avec « des couleurs ».
- Le fonctionnement mental de l'apprenant est très influencé par l'aspect esthétique. De ce fait, il trouve plus « beau » d'utiliser plusieurs couleurs qu'une seule.
- ...

Notre propos n'est pas ici d'excuser l'élève qui ne respecte pas la consigne. Nous disons simplement que la compréhension et le respect de la consigne sont deux facteurs qui influencent le succès du travail de l'apprenant, de sorte que la consigne doit être formulée clairement.

Ces deux premiers exemples exposent ce que l'on appelle les erreurs liées au *trait de surface* de l'énoncé. C'est-à-dire ce qui correspond à l'habillage du problème. L'incompréhension d'un énoncé peut aussi provenir du *trait de structure*, qui correspond aux opérations logiques nécessaires à sa résolution. Un élève plus influencé par les traits de surface que par les traits de structure, pourrait opter pour une démarche de résolution erronée.

2.2 Des erreurs résultant d'habitudes scolaires ou d'un mauvais décodage des attentes

Apparaissent ici les concepts de contrat didactique, de coutume didactique (Cf. N. Balacheff et G. Brousseau, [6]), du fait de savoir s'il faut répondre à la question posée par la situation-problème ou à l'enseignant... C'est-à-dire toute la problématique du rai-

[3] Ce matériel est composé de formes géométriques. Toutes les pièces de même forme ont même couleur.

sonnement sous influence décrit par Y. Chevallard, [9], ou du métier d'élève cher à P. Perrenoud. Confronté à une situation-problème ou à un problème, l'élève doit produire une réponse. Oui, mais laquelle ? Celle qu'il croit être la bonne en fonction de ses aptitudes, connaissances et compréhension de la situation, ou celle que l'enseignant attend ? Si le contrat didactique est bien instauré dans la classe, explicitement ou non, il y a fort peu de chances pour que la question se pose à chaque résolution. Sinon. . .

De la bonne utilisation, et intégration préalable, de ces coutumes didactiques, dépend en partie la production de « bonnes réponses ». Il faut cependant noter qu'un contrat didactique stéréotypé peut engendrer chez l'élève des représentations erronées. Exposons un exemple pour mieux nous faire comprendre.

Dans certaines classes de 1re ou de 2e primaire, les formes géométriques sont toujours dessinées en plaçant une de leurs « bases » horizontalement. De plus, les rectangles sont systématiquement plus grands que les carrés.

D'autres exemples foisonnent dans les problèmes arithmétiques : devoir utiliser toutes les données, ou à l'inverse, devoir systématiquement trouver la donnée non nécessaire. . . Ces habitudes pourraient constituer un frein sérieux à la résolution de nouvelles situations-problèmes et à la construction de nouvelles connaissances. C'est là un ensemble d'obstacles non imputables à la complexité du domaine, mais dus à la didactique mise en place. C'est ce que l'on appelle des *obstacles didactiques*, par opposition aux *obstacles épistémologiques*.

2.3 Des erreurs témoignant des *conceptions alternatives des élèves*

Le terme « conceptions alternatives » renvoie aussi au concept de « représentations » des élèves, c'est-à-dire l'ensemble des connaissances correctes ou erronées qu'un individu a pu se construire par rapport à un savoir donné. Ces connaissances, ne se forment pas seulement dans le cadre scolaire.

De nombreuses études ont montré combien ces représentations sont tenaces. Il faut, pour les modifier, une dépense importante d'énergie, tant de la part de l'apprenant que de la part du système éducatif, sans être certain qu'elles ne referont pas surface dans une situation particulière. Elles sont souvent liées aux obstacles épistémologiques que l'apprenant n'a pu franchir. En voici un exemple, extrait de [3].

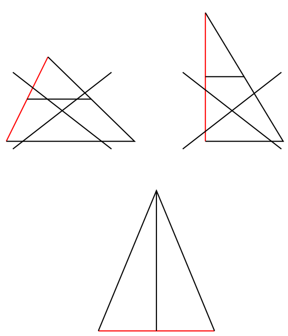


Fig. 3.1

La question posée à l'élève était :
« *Trace un triangle avec un de ses côtés en couleur. Puis trace un segment qui joint le milieu du côté colorié au sommet opposé.* »
L'élève réalise successivement trois dessins (figure 3.1), dont deux ont été rayés par lui. Ce sont les représentations que se fait l'élève du *sommet* et du *côté* d'un triangle qui permettent de comprendre ses ratures et hésitations.

Les différentes réponses erronées peuvent trouver leur origine dans la représentation d'un *sommet*. Généralement, ce mot est compris comme « ce qui est au-dessus de tout ». Or, dans les deux premiers triangles, le sommet opposé au côté se trouve en bas de la figure. Nous pourrions ajouter à cette réflexion émise par l'auteur, la prégnance de l'horizontale et de la verticale dans le dessin d'un segment.

2.4 Des erreurs liées aux *opérations intellectuelles*

Les opérations intellectuelles sont celles liées à l'analyse de la situation, aux niveaux de développement cognitif atteints par les apprenants et aux opérations logico-mathématiques à investir dans la situation.

Prenons un exemple dans le domaine des fractions.

« *Damien joue aux cartes avec Syril. Ils ont chacun 20 cartes. Après le jeu, Damien ne possède plus que la moitié de ses cartes. Combien lui en reste-t-il ?* »

Dans ce problème, il faut comprendre que Damien possède deux fois moins de cartes en fin de jeu qu'au début. Le calcul qui traduit cette situation est assez logiquement la division par deux du nombre initial de cartes, soit 20 : 2. Ce calcul correspond bien à l'idée que lorsqu'on fait agir une fraction sur un nombre ou une grandeur, on obtient un nombre plus petit, ou une grandeur plus petite.

Modifions l'énoncé :

« *Damien joue aux cartes avec Syril. Après le jeu, Damien ne possède plus que 10 cartes, soit la moitié de ce qu'il avait au départ. Combien en avait-il avant de jouer ?* » Dans cette situation, malgré la présence de l'opérateur $\frac{1}{2}$, le calcul devient 10×2. Il faut donc comprendre cette inversion de l'opération. Malgré la présence du mot « moitié », il s'agit de multiplier le nombre par deux pour retrouver la situation initiale. Ceci peut poser problème pour nombre d'élèves, voire d'adultes.

Il est possible de complexifier encore cette situation. Nous sommes ainsi confrontés à la véritable signification du concept de fraction rapport et aux opérations qui lui sont associées. En plus, dans les deux énoncés ci-dessus, il faut d'abord traduire dans le registre symbolique mathématique ce qui est écrit dans le registre de la langue maternelle.

Des opérations logico-mathématiques

La réversibilité, la transitivité, les opérations arithmétiques (addition, soustraction, division, multiplication)... ne sont pas acquises un jour une fois pour toutes. Les exemples ci-dessus montrent combien leur utilisation peut être plus ou moins complexifiée selon le contexte.

Prenons garde aux raisonnements utilisant la transitivité de manière abusive. Dans une situation de travail avec le matériel *Fractionary*[4], l'enseignant demande si on peut paver

[4] M. Pechny, *Fractionary*.

le trapèze isocèle avec des losanges, le losange avec des triangles équilatéraux et le trapèze isocèle avec des triangles équilatéraux.

En manipulant les pièces, l'apprenant constate qu'il ne peut recouvrir exactement un trapèze ni par un losange, ni par deux losanges. Donc il ne peut dire « combien de fois le losange va dans le trapèze isocèle ».

Essayant ensuite de comparer un triangle équilatéral et un losange, l'apprenant observe qu'il peut superposer au losange deux copies identiques du triangle. Donc il peut dire que « le triangle va deux fois dans le losange ».
Pour comparer le triangle équilatéral et le trapèze isocèle, sans manipuler, l'apprenant déclare : « Je ne peux dire combien de fois le triangle va dans le trapèze puisque le triangle va deux fois dans le losange mais que le losange « ne va pas » dans le trapèze. Donc le triangle ne va pas dans le trapèze ».

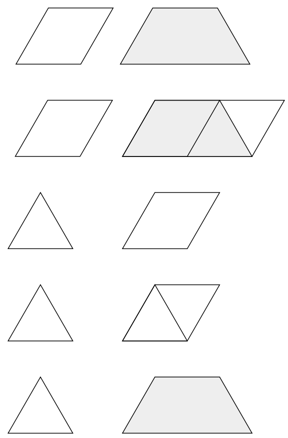


Fig. 3.2

Des opérations mentales

Citons-les simplement : induire, déduire, inférer, pratiquer l'analogie, généraliser, distinguer l'essentiel de l'accessoire, traduire d'un registre dans un autre, résumer, synthétiser, mémoriser, classer, analyser, comparer, formuler une hypothèse, transposer...

2.5 Des erreurs portant sur les *démarches adoptées*

Nous entendons par démarches, les procédures de résolution de problème liées au domaine concerné, en l'occurrence les mathématiques. Ces démarches peuvent être très variées, et parfois elles ne correspondent pas aux démarches prévues par l'enseignant. Dans une partie des cas observés, ces stratégies mettent en évidence des lacunes dans les connaissances des apprenants ou dans la compréhension de la situation proposée. Voici un exemple, dans le cas d'une comparaison de figures.

L'enseignant propose de comparer trois figures géométriques : un triangle équilatéral, un triangle isocèle et un trapèze isocèle. L'objectif de l'enseignant est que l'élève trouve trop long de remplir le trapèze avec le petit triangle et utilise donc une démarche de transitivité pour les comparer.

L'apprenant compare d'abord le triangle équilatéral et le trapèze, ensuite le petit triangle et le triangle équilatéral, enfin le petit triangle et le trapèze. Mais contrairement à ce que l'enseignant avait prévu, l'élève place autant de petits triangles qu'il en faut pour réellement reconstruire le trapèze. Ce comportement peut avoir plusieurs origines, notamment un manque de maîtrise de la transitivité. *In fine*, l'apprenant annoncera la même réponse que celui qui aura utilisé la démarche transitive.

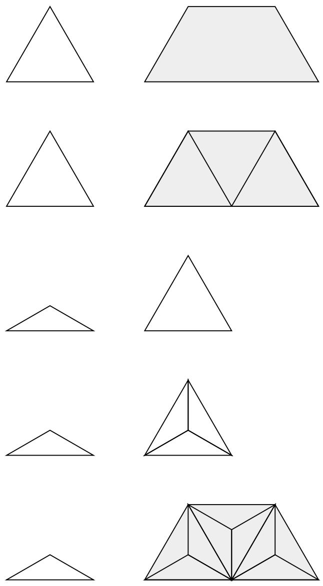


Fig. 3.3

En observant cette situation sous un autre angle, nous constatons combien la seule correction de la réponse donne peu de renseignements sur l'apprentissage réel des apprenants.

2.6 Des erreurs dues à une *surcharge cognitive*

La mémoire joue un rôle actif dans les différents processus mentaux, dont l'apprentissage et la résolution de problèmes. On connaît aussi l'existence de plusieurs types de mémoire, dont la mémoire de travail et la mémoire à long terme.

La mémoire de travail possède une capacité très faible. Son rôle est surtout de traiter les informations de manière temporaire. Ce traitement concerne tant les informations entrantes, que celles présentes en mémoire à long terme. De la capacité de cette mémoire dépend donc le traitement des informations. Lorsque le nombre d'informations à traiter simultanément est trop important ou que les informations sont trop complexes[5], la mémoire de travail peut être incapable de les traiter. On parle dans ce cas de surcharge cognitive. Elle ne peut être surmontée que grâce à un phénomène de *compression* des connaissances (voir [35]) qui conditionne la compréhension en mathématiques.

Dans le cas où les informations entrantes ne possèdent aucune correspondance en mémoire à long terme, le traitement de la situation pourrait ne pas avoir lieu. C'est le cas d'un

[5]Nous pensons notamment à ces informations qui demandent à faire des liens avec nombre de connaissances antérieures.

apprenant face à une situation-problème qui demande de mettre en œuvre des savoirs qu'il ne possède pas.

2.7 Des erreurs ayant leur origine dans une *autre discipline*

Ici se pose le problème des transferts, tant des savoirs que des compétences. Force est de reconnaître que ce concept de transfert pose encore problème aujourd'hui. Deux points de vue s'affrontent à ce sujet, l'un plutôt fonctionnaliste lié à la psychologie cognitive, l'autre plutôt structuraliste, lié à la psychologie génétique dont le représentant le plus connu est PIAGET.

Les traits de surface et les traits de structure d'une consigne jouent également un rôle essentiel dans les possibilités de transfert. En effet, l'apprenant peut reconnaître comme commun à deux situations-problèmes soit un ou des traits de surface, soit un ou des traits de structure, soit un ou des traits de surface et de structure. De cette reconnaissance va naître la possibilité de transfert d'une situation à une autre.

La capacité de reconnaître ou non la présence de ces ressemblances peut provoquer ou non des transferts. Mais si cette capacité d'appréciation est défaillante, des transferts inadéquats peuvent se produire. Or, elle ne semble pas être innée. Il est donc essentiel de confronter les apprenants, de manière consciente, à cette problématique. Cette confrontation n'est guère possible dans des tâches simples, ou entièrement dirigées par l'enseignant. L'emploi de situations-problèmes complexes et neuves est nécessaire et le temps mis à les résoudre peut être important. Une autre démarche, la métacognition, permet également de favoriser l'émergence de cette capacité de transfert.

2.8 Des erreurs causées par la *complexité propre du contenu*

Dans cette catégorie, nous placerons principalement les erreurs dues à des obstacles épistémologiques. Comme on l'a mentionné plus haut, ces erreurs résultent d'un conflit d'une nouvelle connaissance à acquérir avec des connaissances antérieures. Une réorganisation des schémas mentaux de l'élève doit se produire. L'enseignant a peu de prise sur un tel processus. Tant que les connaissances antérieures permettent à l'élève de fournir une réponse qu'il croit correcte, il n'y a aucune raison pour qu'il remette ses schémas mentaux en question. De plus, il ne peut que réagir négativement devant de mauvaises notes qui lui seraient attribuées ou conclure qu'il ne comprend rien. Il risque alors de se réfugier dans la mémorisation de routines et de se couper définitivement du savoir mathématique. Le mieux que l'enseignant puisse faire est de créer des conditions qui obligent l'élève à prendre conscience de ce que ses réponses sont incorrectes.

3 Un schéma didactique

À partir d'une analyse *a priori*, il s'agit de prévoir l'ensemble des comportements, verbaux ou non verbaux, à la disposition de l'enseignant en vue de permettre à l'élève de surmonter la difficulté rencontrée. (Bien sûr, tous les comportements d'élèves ne peuvent être prévus, donc, un élément faisant obstacle pour un élève en particulier peut ne pas avoir été mis en évidence.)

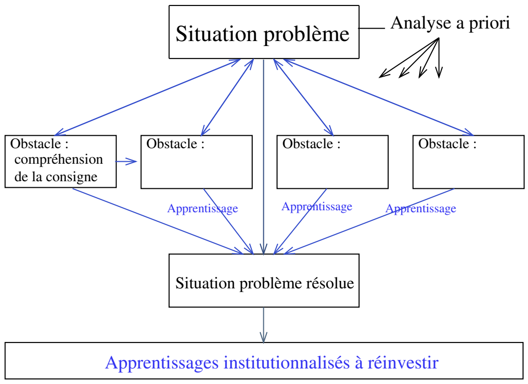


Fig. 3.4

Ces comportements peuvent consister en un questionnement oral, la proposition d'une tâche décomplexifiée, ou d'une tâche ciblée sur l'obstacle dans un contexte identique ou différent, ou d'une aide méthodologique, ... Les *réponses* de l'enseignant doivent viser à permettre à l'élève de surmonter l'obstacle apparu afin de lui permettre de résoudre la situation-problème initialement proposée et d'intégrer le concept recherché.

Deuxième partie

Une expérience didactique

Chapitre 4

Introduction

1 Un objectif à long terme : les fractions

L'expérience relatée dans les chapitres qui suivent porte sur l'apprentissage par des élèves de 8 à 12 ans des concepts de rapport, de proportionnalité, de mesure, le tout débouchant sur les fractions (simples) et le calcul sur celles-ci. Comme l'explicite le titre de ce paragraphe, il s'agit là d'un objectif à long terme, qu'il convient de préparer dès l'école primaire, mais qui ne peut être complètement atteint que dans l'enseignement secondaire.

Les fractions les plus simples, celles qui apparaissent en premier lieu, sont loin d'être interprétées comme des nombres par les enfants. « La moitié de », « Le tiers de » ... sont très clairement des *opérateurs*. Le fait de les désigner par des symboles tels que $\frac{1}{2}$ n'y change rien. De ce point de vue, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ ont des significations très différentes. Les « pourcentages » sont bien entendu des opérateurs. Et les difficultés que beaucoup de personnes éprouvent à ce sujet montrent que ce concept n'est pas nécessairement aussi simple qu'on pourrait le croire.

Après le stade « fraction-opérateur », vient le stade « fraction-rapport » : on passe de la considération d'une opération à celle du résultat de cette opération. C'est aussi l'idée de « mesure » qui apparaît. On peut aussi comparer des rapports et constater le phénomène de proportionnalité, un phénomène fondamental tant dans la vie courante qu'en mathématique. À la fin du secondaire, il débouche sur une étude systématique de la linéarité. Le CREM a consacré une recherche à ce sujet voici quelques années, pour plus d'informations,voir [10].

Avec la fraction-rapport, $\frac{1}{2}$ se rapproche de $\frac{2}{4}$, sans pour autant que ces fractions constituent désormais une seule entité que l'on puisse qualifier de *nombre*. Car le propre des nombres est qu'on peut leur appliquer les « quatre opérations », plus — tant qu'on demeure à un niveau élémentaire — une cinquième propriété : l'ordonnancement. Avant que l'on puisse dire que les fractions ont acquis pour un enfant le statut de nombre, il faut donc qu'il ait été confronté à des situations l'amenant à pratiquer ces opérations. Or si l'on peut faire naître la multiplication et la division des fractions de la composition des opérateurs de fractionnement, on ne trouve guère ni dans la vie courante, ni à l'école primaire, d'occasion d'additionner des fractions.

L'enseignement des fractions à l'école primaire est donc condamné à être une symphonie inachevée, ce qui ne veut pas dire qu'il ne constitue pas une composante essentielle de la formation mathématique à ce niveau.

2 Une analyse globale et des activités pratiques

Pour éviter des lourdeurs et des répétitions inutiles, les différents chapitres de la deuxième partie utilisent sans en rappeler la signification précise, le vocabulaire introduit dans la première (difficulté, obstacle épistémologique, ...). Le lecteur est donc invité à se référer à cette première partie en cas de besoin.

Le chapitre 5 constitue une analyse *a priori* globale de la matière couverte dans les activités qui font l'objet des chapitres suivants. Le processus qui n'a été qu'esquissé ci-dessus, de la fraction-opérateur à la fraction-nombre, y est replacé dans son contexte historique des *grandeurs*, les différentes étapes sont décrites.

Au chapitre 7 est relatée une expérience d'introduction du concept d'*unité de mesure commune* dans des classes de troisième et quatrième primaire. Il s'agit là d'un concept de base puisqu'il permet de comparer des grandeurs différentes (de même espèce). On sait aussi que plus tard il jouera un rôle essentiel dans l'addition des fractions (via la détermination d'un dénominateur commun).

Avec les chapitres 8 et 9 démarre le processus qui aboutira dans l'enseignement secondaire à l'attribution du statut de nombre aux fractions. Tous les deux sont consacrés à une expérience en cinquième primaire, la première s'intéresse à la composition des fractionnements et débouche sur la multiplication des fractions, la seconde prépare l'addition des fractions.

Les trois chapitres qui viennent d'être décrits ont sensiblement la même structure : après une introduction, les fiches sur lesquelles les élèves ont travaillé, sont présentées et commentées. Les commentaires incluent toujours deux rubriques essentielles : une analyse « a priori », où on trouve l'inventaire des difficultés prévues, et les échos des classes qui relatent ce qui s'est réellement produit sur le terrain.

Tout au long de ces expériences, l'activité en classe devait porter sur des grandeurs qu'il s'agissait de comparer, de mesure, de fractionner, de décomposer, de recomposer... D'un point de vue théorique, n'importe quelle espèce de grandeur est susceptible de ces opérations. Mais dans la pratique, certaines grandeurs sont plus faciles à manipuler dans les classes que d'autres. Certes, on peut comparer des capacités en transférant des liquides, mais comment partager des capacités ? (On ne partage jamais que des volumes de liquide, pas des bouteilles, c'est pourtant la bouteille qui a une capacité).

Par contre, quand on veut comparer les aires de deux figures de formes différentes dessinées sur du papier, on peut découper la première figure en morceaux et assembler ces morceaux pour recomposer la deuxième figure. Mais dans le processus, on a perdu la première figure et la comparaison devient virtuelle...

Le matériel didactique traditionnel qui existe dans les classes peut et doit y rester, il permet des manipulations irremplaçables. Mais il ne permet pas toutes les manipulations que l'on voudrait réaliser. De ce point de vue, l'emploi d'un logiciel informatique de dessin est irremplaçable. Une figure réalisée à l'écran peut être dupliquée et découpée, elle peut être fusionnée avec d'autres... De plus, on sait l'attrait qu'exerce l'ordinateur sur les jeunes enfants.

La recherche confiée au CREM par le Ministre Nollet avait explicitement pour objectif d'étudier les possibilités offertes par le logiciel *Apprenti Géomètre* dans le cadre d'un enseignement différencié à l'intention des enfants en difficulté et des enfants à haut potentiel.

On ne s'étonnera donc pas de la présence du logiciel dans les activités relatées aux chapitres suivants, pas plus que de la présence du chapitre 6, consacré à une séquence d'activités d'initiation à *Apprenti Géomètre*. Une telle initiation était évidemment indispensable dans toutes les classes.

Chapitre 5

Des grandeurs aux fractions simples

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les fractions sans jamais oser le demander !

D'après W. Allen

Ce qui suit doit être considéré comme *un aide-mémoire* sur les grandeurs et les fractions. Il n'était pas possible, en effet, de donner de cette matière, en si peu de pages, un exposé complet. On trouvera un tel exposé dans N. Rouche, [29]. Ci-dessous, nous avons marqué les difficultés principales d'un signal « Danger ! » en marge.

1 Les grandeurs non mesurées

1.1 Des propriétés des objets

Les longueurs, les aires, les volumes (y compris les capacités) et les poids[1] sont des grandeurs. Un objet donné peut avoir plusieurs grandeurs : par exemple un manche de brosse possède une longueur, un volume et un poids. Plusieurs objets peuvent avoir la même longueur, ou le même volume, etc. Et donc la longueur, le volume, le poids, etc. ne sont pas des objets. Ce sont des propriétés des objets.

Certains objets ont une grandeur particulière qui s'impose davantage à l'attention. Par exemple, quand on considère une baguette (ou une ficelle), on pense plus facilement à sa longueur qu'à son volume ou à son poids. Quand on considère une boîte, on pense plus facilement à son volume qu'à toute autre grandeur. Et quand on considère un champ, on pense à son aire (souvent appelée *superficie*), ou à la longueur de son pourtour si on doit le clôturer. Il serait par ailleurs difficile de parler du volume ou du poids d'un champ.

S'il est clair, comme nous venons de le voir, qu'un objet et une de ses grandeurs sont deux choses bien distinctes, on peut parfois se risquer à confondre les deux. Par exemple, si on demande de couper une *ficelle* en deux parts égales, tout le monde comprend qu'il s'agit

[1] Les physiciens utiliseraient le terme « masse » plutôt que « poids ».

de couper la ficelle en deux morceaux d'égale *longueur*. Ou si on demande de partager une *bouteille* de limonade en deux parts égales, tout le monde comprend aussi qu'il s'agit de partager le *volume* de limonade en deux parts égales.

Quand il n'y aura pas de confusion possible, il nous arrivera donc ci-après de confondre un objet et une de ses grandeurs (qui s'imposera par le contexte).

1.2 Comparer deux grandeurs de même espèce

On peut toujours comparer deux grandeurs de même espèce pour savoir si elles sont égales, ou si l'une est plus grande que l'autre. Pour comparer deux baguettes (les longueurs de deux baguettes), on les dispose côte à côte en les faisant coïncider à un bout et on regarde de l'autre côté si l'une dépasse l'autre, et laquelle. Pour comparer deux poids, on les dispose sur les deux plateaux d'une balance à plateaux, et on regarde si la balance penche et de quel côté.

Dans toute comparaison de deux grandeurs, on travaille avec deux objets ayant les grandeurs en question.

Si une grandeur est plus petite qu'une autre et celle-ci plus petite qu'une troisième, alors la première est aussi plus petite que la troisième. Cette propriété s'appelle la *transitivité* de l'ordre sur les grandeurs.

1.3 Opérer sur des grandeurs

On peut toujours *additionner* deux grandeurs : par exemple mettre deux bâtons bout à bout pour additionner leurs longueurs, ou agglutiner deux masses de plasticine pour additionner leurs poids.

On peut toujours *multiplier* une grandeur par un nombre naturel. Par exemple, mettre 3 bâtons de même longueur bout à bout pour multiplier leur longueur par 3, ou disposer côte à côte 4 rectangles identiques pour multiplier leur aire par 4.

On peut toujours *partager* une grandeur en un nombre quelconque de parts égales et *prélever* une part. Par exemple, on peut couper un carré en deux parts égales (deux parts de même aire) à l'aide d'une de ses diagonales et conserver un des deux triangles, ou couper un volume d'eau en 3 parts égales, fût-ce en tâtonnant, et prélever une part. On dit dans ces conditions que l'on a *divisé* la grandeur par le nombre en question.

Si on a divisé une grandeur par un nombre, on retrouve la grandeur de départ en multipliant le résultat de la division par ce nombre. Réciproquement, si on a multiplié une grandeur par un nombre, on retrouve la grandeur de départ en divisant le résultat par ce nombre. On exprime ce fait en disant que la multiplication et la division d'une grandeur par un nombre sont *deux opérations inverses l'une de l'autre.*

Dans toute opération sur des grandeurs, on travaille avec des objets ayant les grandeurs en question.

1.4 Des grandeurs discrètes ?

Considérons maintenant non plus des grandeurs, mais des ensembles d'objets, par exemple de billes.

On peut *comparer* deux ensembles de billes en les mettant en correspondance terme à terme, pour savoir s'il y a plus, autant ou moins de billes dans un ensemble que dans l'autre.

On peut *réunir* deux ensembles sans élément commun, simplement en les rassemblant pour n'en plus faire qu'un seul. La réunion est, pour les ensembles, l'analogue de l'addition. Le nombre d'éléments de la réunion est la somme des nombres d'éléments des deux ensembles.

En réunissant plusieurs copies identiques d'un même ensemble, on réalise l'équivalent d'une multiplication par un naturel.

On peut parfois *partager* un ensemble en parts égales et *prélever* une part : par exemple partager un ensemble de 12 billes en 4 parts égales et garder une part. Mais on ne le peut pas toujours : par exemple, on ne peut pas partager un ensemble de 4 billes en 3 parts égales. En cela, les ensembles se distinguent des grandeurs. C'est pourquoi certains appellent les ensembles des *grandeurs discrètes*.

2 Des rapports entiers et des mesures entières

Si une longueur L est égale à une autre L' multipliée par 4, on écrit

$$L = 4L',$$

et on dit que le *rapport* de L à L' est égal à 4. Cette notion de rapport s'étend aux autres grandeurs.

Le *mètre* (symbolisé par la lettre « m ») est une longueur particulière choisie comme unité de mesure des longueurs. Si une longueur L est égale à 1 m multiplié par 5, on écrit

$$L = 5\,\mathrm{m},$$

et on dit que 5 est la mesure de L en m. En utilisant la notion de rapport, on peut aussi dire que le rapport de L au mètre est égal à 5.

Il arrive souvent qu'une longueur ne soit pas égale au mètre multiplié par un nombre naturel. Par exemple, si L' est plus grande que $7\,\mathrm{m}$ et plus petite que $8\,\mathrm{m}$, on dit que les grandeurs $7\,\mathrm{m}$ et $8\,\mathrm{m}$ *encadrent* L'.

Ce que nous venons de dire pour les longueurs se transpose sans peine aux autres grandeurs.

3 Grandeurs proportionnelles

Si on verse de l'eau dans des vases cylindriques identiques (figure 5.1), on dit que les hauteurs atteintes par l'eau dans les vases sont proportionnelles aux volumes d'eau qu'ils contiennent. Cela veut dire que si la hauteur est double (ou triple, ...) dans un vase comparé à un autre, le volume est aussi double (ou triple, ...)
On a donc mis en *correspondance terme à terme les hauteurs et les volumes.*

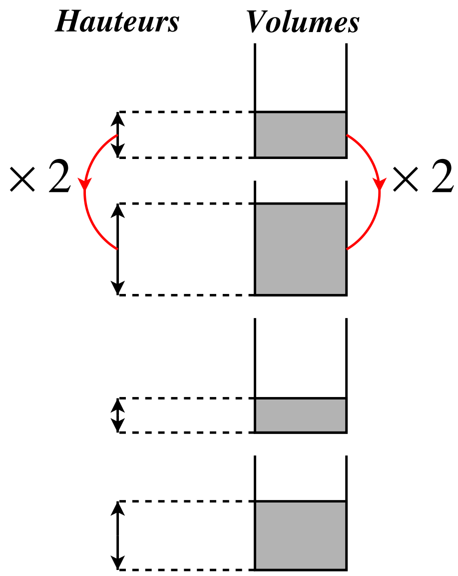


Fig. 5.1

Les exemples de telles correspondances entre grandeurs abondent. Ainsi, on peut faire se correspondre les temps de parcours et les distances parcourues par un marcheur qui avance d'un pas égal : s'il marche 2 fois plus longtemps, il va 2 fois plus loin. Autre exemple : les volumes et les poids d'une matière homogène : à 3 fois plus de volume correspond 3 fois plus de poids. Un exemple familier est celui des achats, qui met en correspondance des marchandises et des prix : il faut payer 2 fois plus si on veut 2 fois plus de farine (2 fois plus de poids).

Ce qui est fondamental dans tout ceci, c'est la *correspondance terme à terme* entre deux ensembles de grandeurs et la conservation des rapports : tant de fois plus (ou moins) d'un côté, tant de fois plus (ou moins) de l'autre.

Si les deux ensembles mis en correspondance sont constitués de grandeurs de même nature, le rapport d'un élément d'une colonne à son vis-à-vis est toujours le même. Par exemple, à la figure 5.2, chaque poids de droite vaut deux fois le poids de gauche.

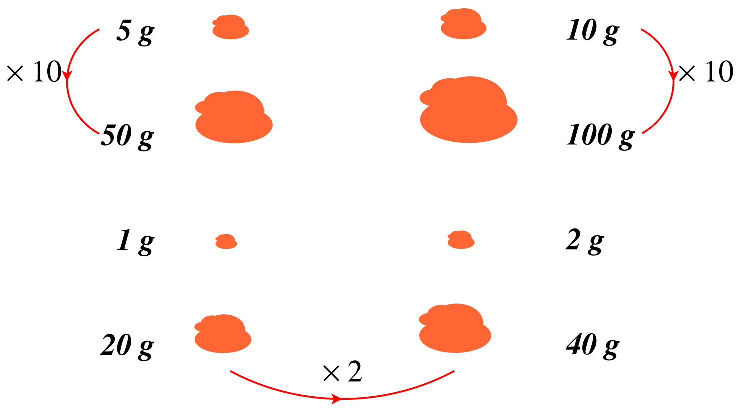


Fig. 5.2

Un rapport entre deux éléments d'une même colonne est appelé *rapport interne*, précisément parce qu'il ne fait pas sortir de la colonne. Le rapport qui fait passer d'une colonne à l'autre est appelé *rapport externe* ou encore *coefficient de proportionnalité*. Les deux tableaux ci-dessus sont des exemples de *tableaux de proportionnalité*. Les grandeurs d'un colonne sont dites *proportionnelles* à celles de l'autre.

Si on associe l'aire d'un carré à la longueur de son côté, on obtient des grandeurs qui ne sont pas proportionnelles : si la longueur du côté est multipliée par 2, l'aire est multipliée par 4.

4 Le fractionnement des grandeurs

Nous avons vu ci-dessus que l'on peut multiplier une grandeur par un nombre naturel, et diviser une grandeur par un nombre naturel. Mais on peut aussi enchaîner ces deux opérations. Par exemple (voir figure 5.3) on peut partager une aire (sur la figure, celle d'un rectangle) en 5 parts égales, puis prélever 3 parts (multiplier par 3 le résultat de la division).

Fig. 5.3

On dit dans ce cas que l'on a pris les 3 cinquièmes de l'aire en question, et on écrit, en désignant par A l'aire de départ et par A' le résultat des deux opérations enchaînées,

$$A' = \frac{3}{5}A.$$

Dans cette expression, l'assemblage de symboles $\frac{3}{5}$ est appelé *fraction.* Le nombre du dessus, en l'occurrence 3, est appelé le *numérateur de la fraction*, et le nombre du dessous, en l'occurrence 5, est appelé le *dénominateur de la fraction.*

Chose intéressante – et nullement évidente –, on obtient le même résultat en faisant les deux opérations dans l'ordre inverse : multiplier A par 3 puis diviser le résultat par 5. En termes plus familiers : j'ai un gâteau, je le coupe en 5 et je prends 3 morceaux, ce qui me donne $\frac{3}{5}$ du gâteau. Dans une autre circonstance, nous sommes 5 amis et nous avons 3 gâteaux. Nous partageons le lot en 5 parts égales, et chacun reçoit $\frac{3}{5}$ de gâteau. Ces deux dernières opérations sont illustrées à la figure 5.4.

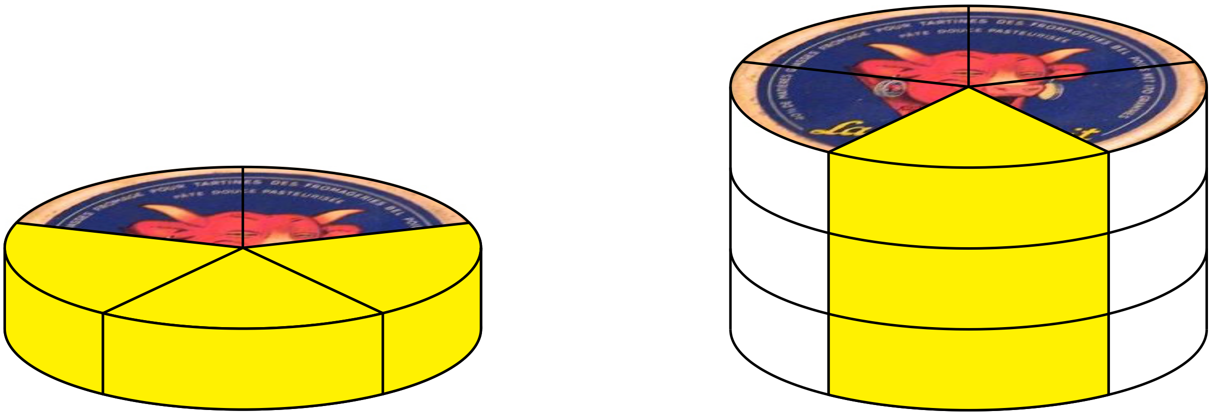


Fig. 5.4

Le mot fraction est associé dans le langage courant à celui de *partie*. En d'autres termes, une fraction d'une chose est, dans la vie quotidienne, plus petite que la chose. En arithmétique, une fraction d'une grandeur peut éventuellement être plus grande que celle-ci. Il faut s'habituer à ce vocabulaire. Par exemple, $\frac{5}{3}$ d'une tarte, c'est 5 fois un tiers. Et bien entendu, pour réaliser cela, il faut avoir au moins 2 tartes. Une circonstance familière où on obtient $\frac{5}{3}$ est la suivante : on est 3 amis et on se partage 5 tartes.

5 Des rapports et des mesures fractionnaires

Considérons les deux carrés de la figure 5.5. En divisant celui de gauche par 4 et en multipliant le résultat par 2, on obtient celui de droite. On dit dans un tel cas que le rapport des aires des deux carrés vaut $\frac{1}{2}$.

Fig. 5.5

La figure 5.6 montre un autre exemple analogue. On a divisé le trapèze de gauche en 6 triangles de même aire, et avec 4 de ces triangles, on a constitué le rectangle de droite. On dit de l'aire du triangle qu'elle est une *unité de mesure, commune* aux aires du trapèze et du rectangle. L'aire A' du rectangle vaut $\frac{4}{6}$ de A, celle du trapèze. On peut écrire que

$$A' = \frac{4}{6}A.$$

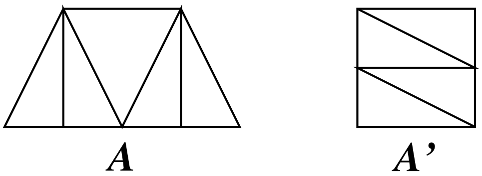


Fig. 5.6

Une question de langage assez délicate intervient ici. Quand une grandeur G' vaut 3 fois une grandeur G, on écrit

$$G' = 3G,$$

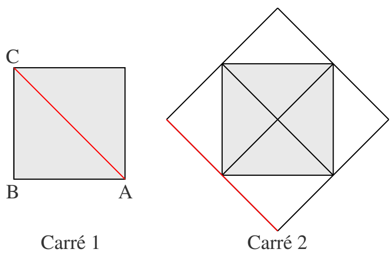
et on dit que G' égale 3 G ou encore que G' égale 3 *fois* G. Ci-dessus, nous avions

$$A' = \frac{4}{6}A,$$

et nous disions que A' égalait 4 sixièmes *de* A. Les rôles de 3 dans $G' = 3G$, et de $\frac{4}{6}$ dans $A' = \frac{4}{6}A$ sont pourtant analogues, à ceci près que 3 sert à agrandir G, tandis que $\frac{4}{6}$ a pour effet de diminuer A. On décide de considérer $\frac{4}{6}$ comme un nombre, au même titre que 3, et on convient de dire que A' égale $\frac{4}{6}$ *fois* A.

Ce passage de *de* à *fois* ne va pas de soi. L'analogie entre les rôles de 3 et $\frac{4}{6}$ nous permet de dire que A' égale $\frac{4}{6}$ fois A. Elle fait partie du processus pédagogiquement difficile qui aboutit à l'attribution du statut de nombre aux fractions. On réalise mieux le statut de nombre que peut prendre une fraction si on place les fractions, au même titre que les nombres naturels et décimaux, sur une droite des nombres munie d'une unité de longueur.

Toutes les situations géométriques ne peuvent être étudiées à l'aide d'une unité de mesure commune.



L'aire du carré 2 vaut deux fois l'aire du carré 1 puisque, sur le dessin de droite, le carré 1 contient quatre petits triangles isocèles rectangles et que le carré 2 en contient huit.

Fig. 5.7

Le rapport de la longueur du côté du carré 2 à celle du côté du carré 1 vaut $\sqrt{2}$.
S'il existait une unité de mesure u, commune aux deux longueurs $|AB|$ et $|AC|$, on aurait à la fois $|AB| = n \cdot u$ et $|AC| = m \cdot u$ où n et m seraient des nombres entiers. Le rapport de $|AB|$ à $|AC|$ serait le quotient de deux entiers : $\frac{n}{m}$. On sait que c'est impossible : le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, ce n'est pas le quotient de deux entiers.
Il n'existe pas d'unité de mesure commune à $|AB|$ et $|AC|$.

6 Comparer deux fractions

On peut toujours comparer deux fractions. Par exemple, la figure 5.7 montre d'une part $\frac{2}{3}$ d'un rectangle R et d'autre part $\frac{3}{4}$ *du même* rectangle. On dit que $\frac{2}{3}$ est plus petite que $\frac{3}{4}$ parce que la grandeur $\frac{2}{3}R$ est plus petite que la grandeur $\frac{3}{4}R$.

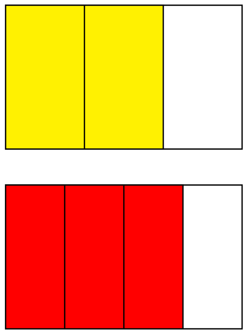


Fig. 5.8

Pour être plus précis, dans le deuxième dessin de la figure 5.7, découpons le rectangle en 4 parties égales, mais disposées horizontalement, et superposons les deux rectangles :

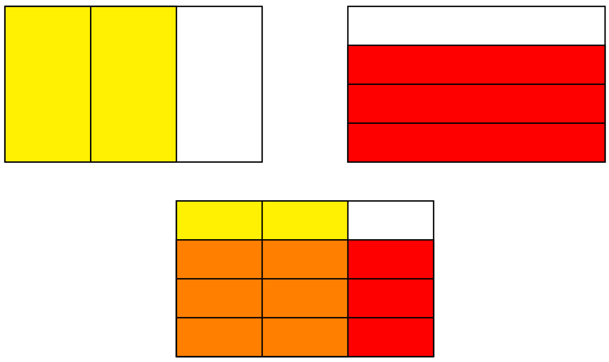


Fig. 5.9

La figure 5.9 fait apparaître des douzièmes. Elle montre que d'une part

$$\frac{2}{3}A = \frac{8}{12}A,$$

et que d'autre part

$$\frac{3}{4}A = \frac{9}{12}A.$$

On s'est arrangé pour avoir des parts égales, ici des douzièmes des deux côtés. La comparaison devient alors facile, car la grandeur la plus grande est celle qui comporte le plus de douzièmes. Il est clair que 9 douzièmes, c'est plus grand que 8 douzièmes.

Le procédé est général. Il s'appelle la *réduction au même dénominateur*. Soit par exemple à comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{11}$. On a que

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 11}{5 \times 11} = \frac{33}{55},$$

car, quand on prend des parts 11 fois plus petites, il faut en prendre 11 fois plus pour avoir la même grandeur. On a de même

$$\frac{7}{11} = \frac{7 \times 5}{11 \times 5} = \frac{35}{55}.$$

La comparaison devient alors facile. Du fait que 33 est plus petit que 35, on déduit que $\frac{33}{55}$ est plus petit que $\frac{35}{55}$, et donc finalement que

$$\frac{3}{5} < \frac{7}{11},$$

où $<$ signifie *plus petit que*.

Un autre cas de comparaison facile apparaît quand les deux fractions ont le même numérateur : la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus petit.

7 Additionner deux fractions

L'addition de deux fractions est analogue à l'addition de deux grandeurs fractionnées. Soit par exemple à additionner $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{11}$. On s'arrange, comme ci-dessus, pour avoir des parts égales dans les deux termes, ce qui donne

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{11} = \frac{33}{55} + \frac{35}{55} = \frac{33+35}{55} = \frac{68}{55}.$$

En d'autres termes, pour additionner facilement les deux fractions, on les a réduites au même dénominateur (voir ci-dessus le sens de cette expression).

8 Multiplier deux fractions

Le plus simple pour expliquer la multiplication des fractions est de montrer comment on recherche l'aire d'un rectangle dont la longueur et la largeur sont données comme des fractions de l'unité de longueur. La figure 5.9 montre (à l'échelle !) un carré de $1\,\mathrm{dm}$ de côté, et dans ce carré un rectangle dont la longueur vaut $\frac{4}{5}\,\mathrm{dm}$ et la largeur $\frac{2}{3}\,\mathrm{dm}$. Elle montre aussi que l'aire du rectangle vaut

$$\frac{4}{5}\,\mathrm{dm} \times \frac{2}{3}\,\mathrm{dm} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}\,\mathrm{dm}^2 = \frac{8}{15}\,\mathrm{dm}^2$$

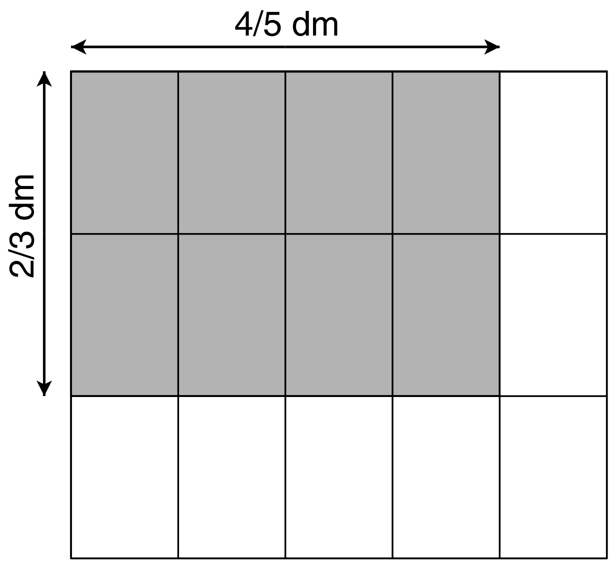


Fig. 5.10

Le numérateur du produit de deux fractions est le produit des deux numérateurs.
Le dénominateur du produit de deux fractions est le produit des deux dénominateurs.

On est encore amené à multiplier deux fractions lorsque, ayant fractionné une grandeur, on fractionne une deuxième fois la grandeur fractionnée. Soit par exemple le rectangle de la figure 5.11(a). On en prend les $\frac{4}{5}$, comme à la figure 5.11(b), et puis, comme à la figure 5.11(c), on prend les $\frac{2}{3}$ du résultat. Il est assez clair que les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ de l'aire du rectangle font au total les $\frac{8}{15}$ de cette aire.

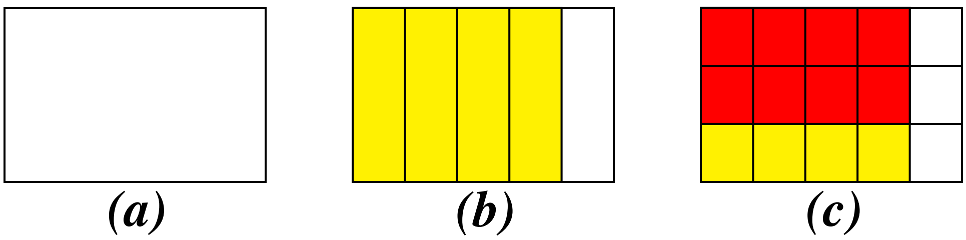


Fig. 5.11

Remarquons que dans notre premier exemple, nous avons dit spontanément $\frac{4}{5}$ *fois* $\frac{2}{3}$, alors que dans le second, nous avons dit les $\frac{4}{5}$ *de* $\frac{2}{3}$. Mais dans les deux cas, nous avons fait le produit des deux numérateurs et le produit des deux dénominateurs.

Chapitre 6

Activités d'initiation au logiciel *Apprenti Géomètre*

Dans la brochure d'accompagnement du cédérom du logiciel *Apprenti Géomètre*, [11], éditée en 2003, nous décrivions une séquence d'activités d'initiation à ce logiciel. Ces activités et les tâches proposées étaient pareilles pour tous les apprenants. Elles avaient pour objectifs d'une part de faire découvrir le logiciel aux apprenants et de les familiariser avec les principales fonctionnalités de celui-ci, d'autre part de rencontrer des concepts mathématiques de base tels que la superposition de figures, l'addition, la multiplication et le fractionnement de grandeurs dans un contexte nouveau.

La séquence d'activités que nous proposons ci-dessous a été conçue pour des élèves de 8 à 12 ans. Elle garde ces mêmes objectifs – s'approprier le fonctionnement du logiciel et rencontrer quelques concepts mathématiques de base – mais s'organise quelque peu différemment. Les activités s'inspirent de la pédagogie différenciée et tentent de rencontrer les besoins et motivations des différents apprenants.

Ainsi, lors de la première activité[1], à partir d'une consigne écrite identique pour tous, nous avons proposé aux apprenants d'acquérir des connaissances instrumentales et mathématiques par la réalisation de dessins différents. Notre volonté était de permettre à chacun de se lancer dans une tâche qu'il pensait pouvoir réaliser. Elle s'est traduite par la liberté laissée aux apprenants quant au choix du dessin à reproduire. Ces derniers devaient cependant, en cours et/ou au terme de l'activité, réaliser le bilan des fonctionnalités et figures utilisées durant la séance.

Cette volonté de respecter les motivations, besoins, savoirs et compétences des apprenants s'est aussi traduite dans la préparation et l'exploitation de la consigne de travail. En effet, celle-ci devait être lue par chaque apprenant mais n'était pas reprise oralement sous une autre formulation, ni par l'enseignant, ni par un pair. Tout au plus, pouvait-elle être discutée au sein des groupes de travail[2]. Cette façon de travailler nous a semblé efficace dans le sens où tous les apprenants se sont lancés dans la tâche et l'ont réussie. Bien sûr,

[1] Fiche 1.1.

[2] Lors des expérimentations, les apprenants travaillaient régulièrement par groupe de deux.

certains apprenants ont demandé quelques explications, mais celles-ci ont été fournies uniquement aux apprenants demandeurs et n'ont pas empêché ceux qui avaient compris la consigne d'entamer l'activité[3]. Cette démarche de travail avec les apprenants est très significative du contrat didactique que nous souhaitions mettre en place, à savoir favoriser l'autonomie de l'élève[4] tout en étant attentifs au progrès de chacun, y compris aux progrès en autonomie.

En ce qui concerne les difficultés rencontrées par les apprenants dès la lecture de la consigne, il est sans doute utile de la part de l'enseignant d'évaluer ce qui leur pose réellement problème. Outre les problèmes liés à l'acte de lire en lui-même[5], il existe différents obstacles à la compréhension d'une consigne. Les concernant, nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 et plus particulièrement aux points concernant les traits de surface et de structure des consignes de travail.

1 Première rencontre avec *Apprenti Géomètre*

De quoi s'agit-il?

Dans le *kit standard*, pour se familiariser avec les principales fonctionnalités d'*Apprenti Géomètre*, les élèves réalisent des dessins figuratifs ou non. Ils complètent également une fiche d'évaluation reprenant les principales fonctionnalités et figures du *kit standard*.

Enjeux

Acquérir des connaissances instrumentales concernant le *kit standard* : découvrir les familles de figures dans le pavé du *kit standard* ;

apprendre à utiliser les commandes disponibles dans les menus

- *Fichiers* : *Nouveau*, *Imprimer* ;
- *Outils* : *Couleur*, *Arrière-plan* et *Avant-plan*, *Effacer* ;
- *Mouvements* : *Déplacer*, *Tourner*, *Retourner*, *Ajuster* ;
- *Opérations* : *Dupliquer*.

De quoi a-t-on besoin?

Les fiches 1.1 à 1.6 ; des crayons.

Comment s'y prendre?

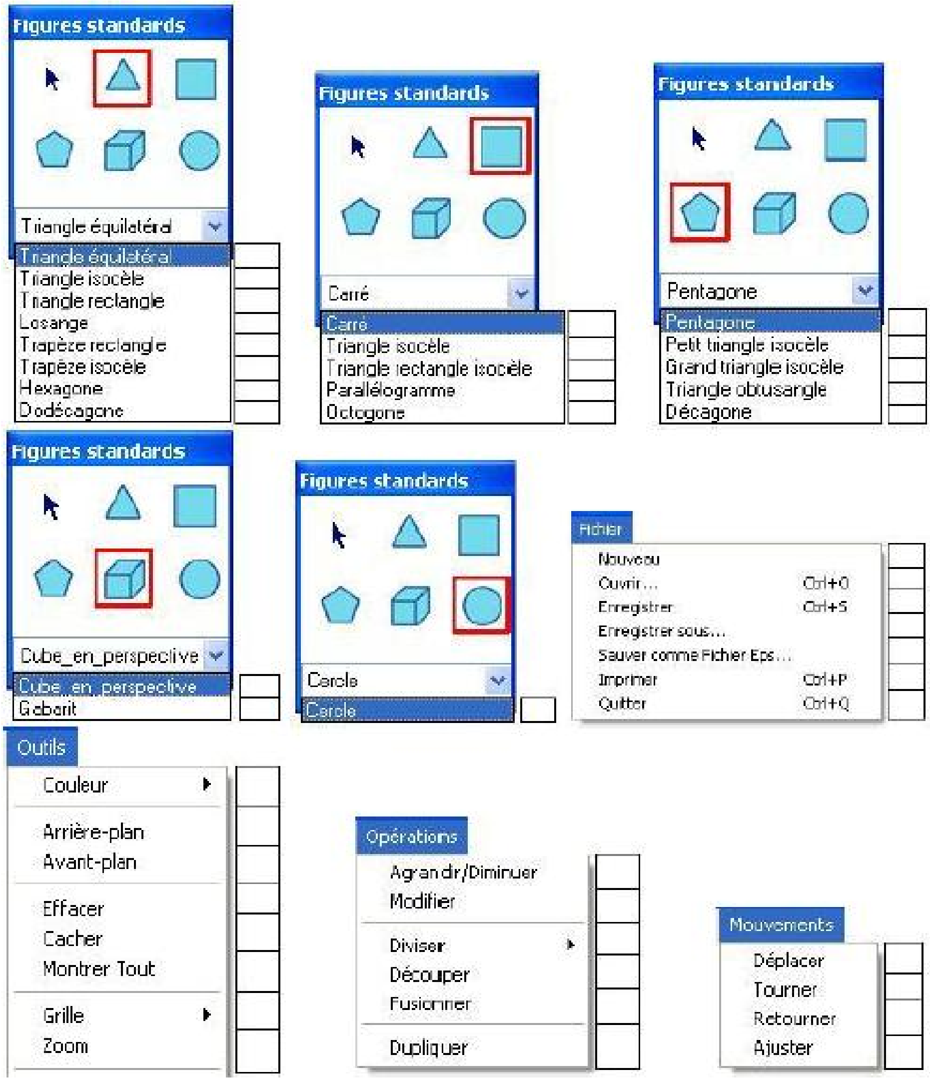
L'enseignant distribue les fiches 1.1 à 1.6 aux élèves qui prennent connaissance de la consigne. Dans un premier temps, celle-ci n'est ni lue ni reformulée par l'enseignant.

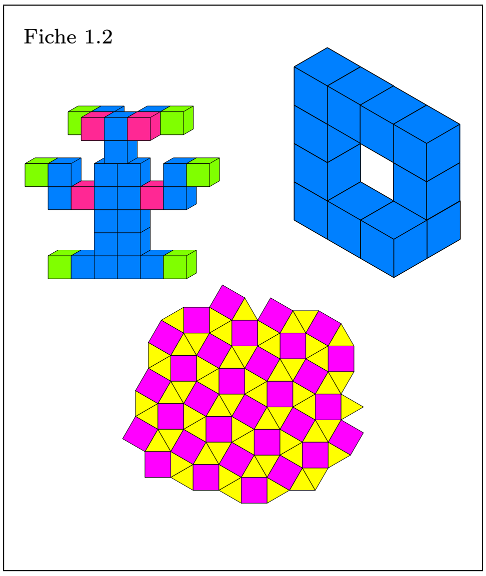
[3]Il faut noter que nombre d'apprenants s'impatientent de pouvoir investir la situation proposée pendant les explications et redites ne concernant qu'une partie de la classe.

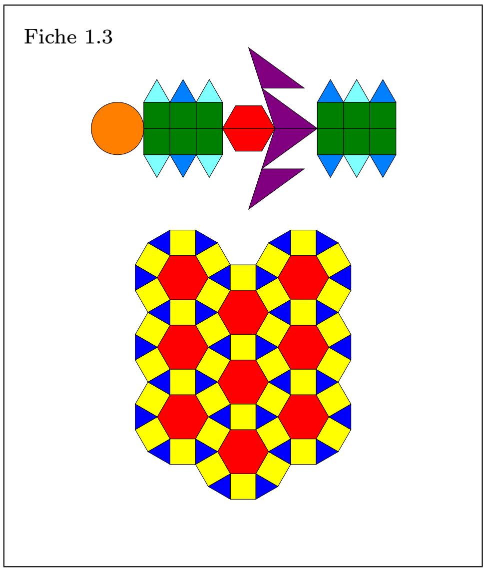
[4]Ce qui ne signifie pas de le laisser seul face à une situation.

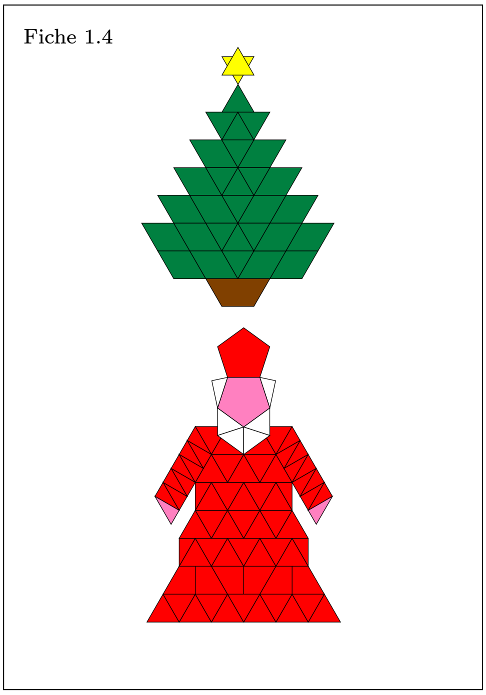
[5]Nous pensons plus précisément à l'acte de déchiffrement.

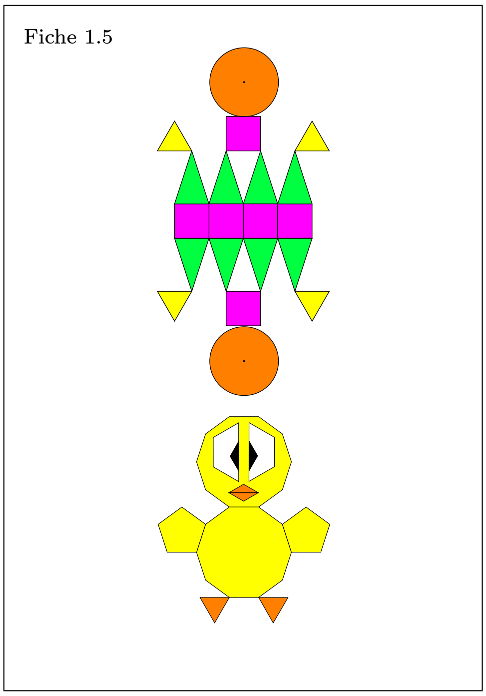
Fiche 1.1 Choisis un dessin parmi ceux des fiches 1.2 à 1.6 et reproduis-le avec les figures du *kit Standard*. Quand tu as terminé, imprime ton dessin. Colorie la case en face des figures et des fonctionnalités que tu as utilisées pour réaliser ce dessin.











Les élèves s'engagent dans la tâche après avoir lu la consigne. Si quelques incompréhensions ou hésitations subsistent, l'enseignant intervient de manière ponctuelle auprès des élèves ayant ces difficultés. Par la suite, en fonction de l'avancement des réalisations et de l'analyse des difficultés des élèves, l'enseignant peut intervenir afin de dispenser une explication nécessaire à toute la classe.

Lorsque la tâche est terminée, les élèves impriment leur réalisation. En cours ou en fin de réalisation, ils complètent la fiche 1.1. Celle-ci sert de synthèse et leur permet d'avoir un regard sur les fonctionnalités qu'ils ont employées au cours de l'activité. Il faut remarquer que cette fiche peut également servir d'aide pour situer une fonctionnalité dans la barre des menus.

En fin d'activité, une synthèse orale en groupe peut être organisée, tout d'abord, pour mettre en évidence l'ensemble des fonctionnalités utilisées, ensuite pour exposer les quelques difficultés rencontrées et les solutions apportées par les élèves.

Échos des classes

Cette activité a été réalisée dans xxx classes de la deuxième étape de l'enseignement fondamental.

En ce qui concerne le choix des dessins à reproduire.
La majorité des enfants choisissent les dessins figuratifs composés de figures planes, principalement le sapin de la fiche 1.4 et le poussin de la fiche 1.5. Ils expliquent ces choix … Nous avons constaté que les enfants à haut potentiel choisissent généralement des dessins plus complexes, notamment les dessins représentant des constructions en trois dimensions (fiche 1.2).

Lors d'une expérimentation, Simon, un enfant à haut potentiel de huit ans pour lequel nous avons préalablement constaté quelques difficultés au niveau visuo-spatial, a d'abord choisi de réaliser le robot (figure 6.1). Il n'y arrive pas car il est confronté au problème d'avant-plan et arrière-plan des cubes. Cependant il ne demande aucune aide. Il décide alors de réaliser le pavage de la figure 6.2. Lorsqu'on lui demande pourquoi il a changé de dessin, il rétorque : « C'est pour faire une activité préparatoire ». Après quelques essais infructueux, sans avoir demandé d'aide à nouveau, Simon change une seconde fois de dessin. Il choisit cette fois la deuxième construction de cubes. La figure 6.3 montre ce à quoi il est arrivé. À nouveau, les problèmes d'avant-plan et d'arrière-plan ne sont pas résolus.

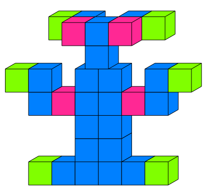


Fig. 6.1

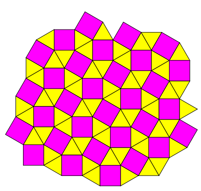


Fig. 6.2

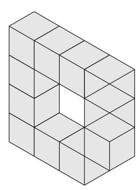


Fig. 6.3

En ce qui concerne les fonctionnalités utilisées.
La majorité des élèves utilisent les mouvements sans trop de problèmes. Seule la fonctionnalité *Ajuster* semble être moins utilisée. Ceci peut être dû au fait que son action est moins visible que celle des trois autres mouvements.

À la fin de cette activité, il est raisonnable de penser que :
– les élèves savent amener une figure à l'écran ;
– ils ont compris que les figures dessinées dans le pavé de figures sont les représentants de familles plus complètes, comprenant des figures auxquelles ils ont accès en cliquant en dessous du pavé ;
– ils peuvent effacer des figures à partir de la fonction *Effacer* du menu *Outils*.

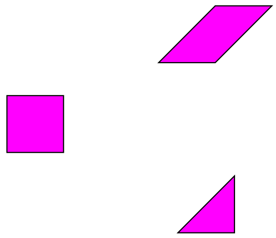
2 Première activité mathématique

Cette activité est semblable à celle décrite au chapitre 6, point 4 (pages 113 et 114) de la brochure [11]. Cependant, comme pour l'activité précédente, ni l'enseignant ni un élève ne reformulent la consigne après sa lecture.

De quoi s'agit-il?	Les élèves découpent un carré en deux selon une diagonale et recouvrent exactement un parallélogramme avec les deux morceaux obtenus. Ils font de même pour recouvrir exactement un triangle isocèle. Ils expliquent oralement leurs démarches.
Enjeux	Apprendre à utiliser des commandes du menu *Outils* : *Diviser* et *Découper* ; renforcer la connaissance des commandes *Déplacer*, *Tourner*, *Retourner*, *Ajuster* ; additionner deux grandeurs de même nature ; rencontrer le fractionnement d'une grandeur ; différencier la forme et la grandeur d'une figure ; renforcer la conservation d'une grandeur, en l'occurrence l'aire.
Compétences	*Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté [. . .]. Additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées.*
De quoi a-t-on besoin?	Le fichier « Découper1 » ; la fiche 2.8 ; des crayons ordinaires ; des règles.
Comment s'y prendre?	L'enseignant soumet la fiche 2.8 aux élèves qui prennent connaissance de la consigne.

Fiche 2.8

Découpe le carré en deux pour pouvoir recouvrir exactement le parallélogramme avec les deux morceaux.
Fais de même pour recouvrir exactement le triangle.
Sur les figures ci-dessous, trace les lignes de découpe.



La consigne n'est reformulée et explicitée que pour les élèves en difficulté de compréhension.

Analyse a priori

Pour construire le parallélogramme, les élèves emploient l'opération *Découper* pour obtenir les deux triangles. Ensuite, ils utilisent les mouvements *Déplacer*, *Tourner* et peut-être *Retourner* pour assembler ces deux figures et ainsi constuire un parallélogramme. Cette dernière fonctionnalité n'est pas utilisée si les élèves découpent le carré selon la diagonale qui part du sommet en haut à droite vers le sommet en bas à gauche (voir note à la rubrique *Échos des classes*).

Les élèves utilisent la fonction *Ajuster* si nécessaire[6], et fusionnent les deux triangles pour obtenir une seule figure qu'ils peuvent aisément superposer au parallélogramme (figures 6.4 et 6.5).

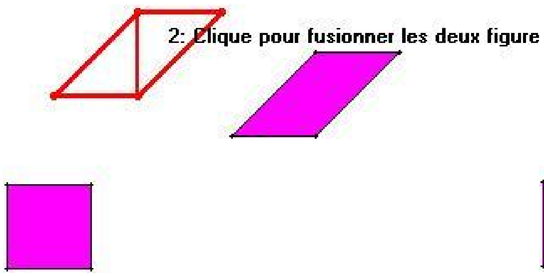


Fig. 6.4

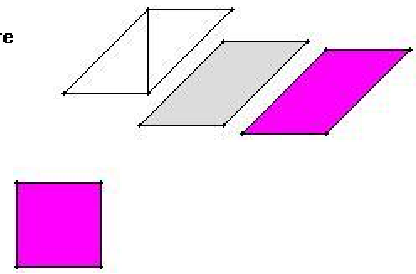


Fig. 6.5

Ils réalisent le même travail pour le triangle. Dans ce cas, seuls les fonctionnalités *Découper*, *Déplacer* et *Tourner* sont employées.

[6]L'emploi de la fonctionnalité *Ajuster* est utile dans un contexte de fusionnement de deux figures. En effet, dans bien des cas, l'ajustement *à vue* n'est pas efficace, il est alors nécessaire d'utiliser l'ajustement automatique des figures avant de pouvoir les fusionner.

En fin d'activité, une synthèse orale[7] devrait mettre en évidence les fonctionnalités utilisées – *Découper, Fusionner, Déplacer, Tourner, Retourner, Ajuster* –, leur utilité – pour que faire ? – et les démarches pour les mettre en œuvre – comment faire ? –. Des connaissances mathématiques telles que la superposition comme moyen de comparaison, les figures de même aire, des propriétés d'une même figure telles que la forme et la grandeur… devraient également être abordées durant cette synthèse. Cette phase orale peut être suivie d'une phase écrite.

Échos des classes

Cette activité nécessite de la part des élèves une analyse *a priori* des figures géométriques en présence. Ils doivent en effet imaginer les axes de découpe possibles du carré afin d'obtenir des figures superposables au parallélogramme. Nous avons constaté au cours des expérimentations que les élèves qui n'avaient été que peu confrontés aux différentes découpes de carrés étaient aussi peu à même d'envisager ces possibilités.
Pour construire le parallélogramme et le triangle, les élèves, en grande majorité, découpent le carré selon une diagonale – la plupart du temps du sommet en haut à gauche vers le sommet en bas à droite[8] – et superposent les deux triangles ainsi obtenus sur une des deux figures.

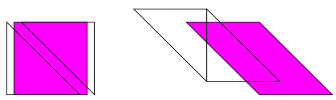


Fig. 6.6

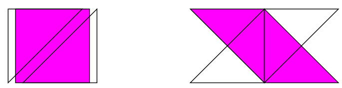


Fig. 6.7

3 Construire des figures

De quoi s'agit-il?

Les élèves construisent une figure de la famille du triangle équilatéral en découpant un triangle équilatéral ou en assemblant plusieurs exemplaires de celui-ci.

Enjeux

Renforcer la connaissance des commandes *Diviser*, *Découper*, *Déplacer*, *Tourner*, *Retourner*, *Ajuster* ;

rencontrer le fractionnement d'une grandeur ;

prépare aux fractionnements de grandeurs et aux rapports entre les grandeurs.

Compétences

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté [. . .]. Additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées.

De quoi a-t-on besoin?

La fiche 1.9 ; des crayons ordinaires ; des règles.

[7]Cette synthèse peut prendre la forme d'une narration de recherche pour certains élèves ou certaines classes en fonction des habitudes de classe, des aptitudes des élèves à rédiger et à réfléchir sur leurs démarches…

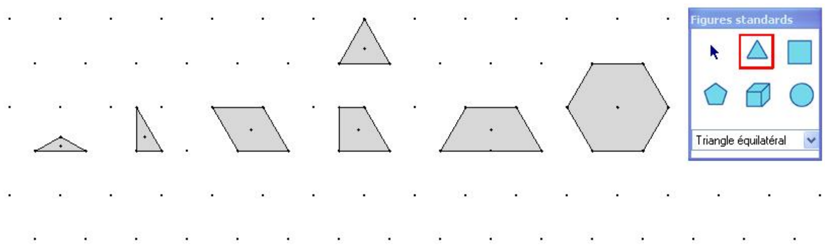
[8]Ceci pourrait s'expliquer par une analogie avec le sens d'écriture.

Comment s'y prendre?

L'enseignant soumet la fiche 1.9 aux élèves qui prennent connaissance de la consigne.

Fiche 1.9

À partir du triangle équilatéral disponible dans le pavé de figure, construis une autre figure de la même famille.



La consigne n'est reformulée et explicitée que pour les élèves en difficulté de compréhension.

Les élèves choisissent une figure à reproduire et la placent à l'écran, ainsi que le nombre de triangles équilatéraux nécessaires à ce travail[9]. Ils emploient les fonctionnalités *Diviser*, *Découper*, *Déplacer*, *Tourner* et peut-être *Retourner* pour réaliser les découpes et assemblages nécessaires à la reproduction de la figure choisie.

Analyse a priori

Pour construire le **triangle isocèle**, l'emploi du centre du triangle équilatéral est nécessaire comme le montrent les figures 6.8 à 6.10. La découpe s'effectue à partir d'un premier sommet, du centre du triangle équilatéral et d'un second sommet.

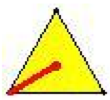


Fig. 6.8

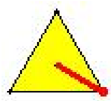


Fig. 6.9

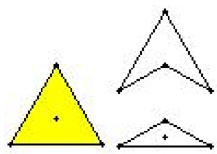


Fig. 6.10

Cette connaissance, tenant à la fois du domaine des connaissances mathématiques et des connaissances instrumentales, complique quelque peu le travail des élèves. En effet, d'un point de vue mathématique, même si les élèves superposent le triangle isocèle au triangle équilatéral (figure 6.11) et découvrent qu'il faut trois exemplaires du premier pour recouvrir le second, donc qu'il faut découper le second en trois pour obtenir le premier, il n'est pas certain qu'ils se rendent compte que le sommet commun aux trois petits triangles isocèles soit au centre du triangle équilatéral.

[9] Note :*ajouter une note sur l'analyse a priori, voir discussion avec Guy*

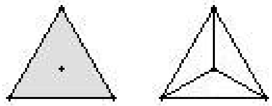


Fig. 6.11

Dans sa version originelle, *Apprenti Géomètre* montre automatiquement le centre des polygones, ce qui aide les élèves. Cependant il se peut que cette fonctionnalité soit désactivée suite à certaines manipulations effectuées au cours d'activités antérieures.

Pour construire le **triangle rectangle**, l'élève doit, préalablement à la *découpe* du triangle équilatéral, créer le *point de division* sur un des côtés de ce triangle. C'est déjà là un apprentissage instrumental important. *Apprenti Géomètre* ne peut découper une figure sans qu'au préalable ne soient définis les points de division. Pour ce faire, l'élève doit diviser un côté du triangle équilatéral en deux, et ainsi obtenir le point de découpe situé au milieu d'un des côtés du triangle (figures références à noter et fichiers à dessiner).

Échos des classes

Au cours des différentes expérimentations réalisées dans des classes de troisième et quatrième primaires, la majorité des élèves construisent des figures plus grandes que le triangle équilatéral. Les justifications que les élèves mettent en avant sont :

– « C'est plus gai de créer ». Il semblerait que pour les élèves, composer à partir d'éléments plus petits soit une activité créative, motivante, agréable ; alors que l'inverse – du plus grand vers le plus petit – l'est moins. Notons que l'acte créatif ne participe pas nécessairement de cette vision expansive. Pensons notamment au sculpteur de pierre.
– Les élèves expriment également leurs difficultés à passer d'une grande figure à une plus petite. Les raisons tiennent tant au domaine mathématique – grandeur, géométrie – qu'au domaine instrumental – quelles fonction utiliser et comment l'utiliser ? –. Dans ce domaine, à ce moment de l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*, les élèves possèdent une expertise encore peu affirmée dans l'utilisation des fonctionnalités telles que *Diviser*, *Découper* et *Montrer le centre des polygones* dans le menu *Préférences*, et de leur association dans la réalisation d'une tâche complexe (Cf. les commentaires ci-dessus). À l'inverse, dupliquer des figures, les juxtaposer pour former une figure plus grande leur semble plus aisé, plus naturel.

Ces deux justifications sont intéressantes et peuvent peut-être induire de nouvelles pratiques didactiques dans la construction des concepts liés aux fractionnements et aux fractions. En effet, serait-il plus judicieux et plus respectueux des premières intuitions des enfants de commencer par multiplier des figures plutôt que de tenter de les diviser pour en trouver la moitié ou le quart ? D'une autre manière, serait-il plus approprié de commencer par le double, le triple, le quadruple ou le quintuple, plutôt que par la moitié – demi – le tiers, le quart ou le cinquième ?

Quelques élèves réalisent le triangle rectangle – moitié du triangle équilatéral –, très peu choisissent le triangle isocèle – tiers du triangle équilatéral –. Ce choix résulte peut-être d'une expertise encore peu affirmée dans l'utilisation des fonctionnalités telles que *Diviser*, *Découper* et *Montrer le centre des polygones* dans le menu *Préférences*, et de leur association dans la réalisation d'une tâche complexe (Cf. les commentaires ci-dessus).

Nous avons également remarqué que certains élèves effectuent la tâche en sens inverse. À savoir qu'ils partent du triangle rectangle pour construire le triangle équilatéral. Ceci participe à nouveau du principe de partir de la figure la plus petite pour aller vers la figure la plus grande.

Chapitre 7

L'unité de mesure commune

Leur espoir : voir désormais tous les hommes du monde entier utiliser le globe comme étalon de mesure commun. Leur but : définir la nouvelle unité de mesure, le mètre, comme la dix-millionième partie de la distance qui sépare le pôle Nord de l'équateur. [...] en remodelant des actions ordinaires dont certaines sont si habituelles que nous les remarquons à peine. Prendre des mesures est un acte des plus courants [...]. Cependant cette omniprésence , justement, finit par dissiper l'acte lui-même.

K. Alder

Observation du concept

Le concept d'*unité de mesure commune*[1] peut s'exercer dans différents contextes mathématiques, en l'occurrence, les grandeurs, plus particulièrement la géométrie (les activités de mesure...), les nombres entiers (les diviseurs communs), et les nombres fractionnaires (les dénominateurs communs).

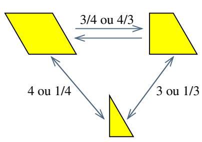


Fig. 7.1

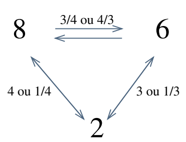


Fig. 7.2

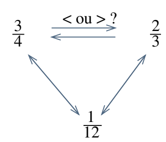


Fig. 7.3

Ainsi, les « unités de mesure commune » employées pour comparer des figures (figure 7.1) sont-elles à mettre en correspondance avec les « diviseurs communs » des nombres naturels (figure 7.2), et par la suite, avec les « dénominateurs communs » des fractions (figure 7.3).

[1] Pour un complément d'information, voir [29].

Plus tard dans le cursus scolaire, nous retrouvons l'*unité de mesure commune* en algèbre, lors de la factorisation des polynômes.

$ab - b^2 = b(a - b)$ Dans cette factorisation, b est le facteur commun à ab et b^2.

Il est fort probable que les élèves, au cours de leur parcours scolaire, soient confrontés à ces différentes représentations de l'unité de mesure commune. Cependant, rares seront les moments consacrés à l'observation de ces différentes représentations et à la mise en évidence de liens entre elles. Cependant, cela pose problème pour certains élèves. Reconnaître la structure mathématique sous-jacente à une situation, établir des liens avec des apprentissages antérieurs, sont des atouts importants pour les apprentissages.

Dans les activités qui suivent, nous essaierons de tisser des liens entre le contexte des grandeurs et le contexte numérique, et cela dans le cadre de l'enseignement à des enfants de 8 à 10 ans. Certaines démarches employées pour résoudre des problèmes dans le contexte des grandeurs peuvent être transférées au contexte des nombres — entiers ou fractionnaires — et ainsi aider les élèves dans l'acquisition et la construction de leur savoir.

Des obstacles à la construction de l'unité de mesure commune et à son transfert

Les activités décrites ci-après proposent donc des situations-problèmes ayant pour objectif de construire le concept d'unité de mesure commune avec des élèves de 3^e et 4^e primaires. Ces situations-problèmes s'inscrivent dans les différents contextes énoncés ci-dessus — grandeurs, géométrie et nombres — d'une part, afin de mettre en évidence le caractère transférable de ce concept, et d'autre part, afin de permettre à chaque élève d'accrocher son apprentissage à un contexte qui lui donne du sens.

Les situations-problèmes correspondent aux paragraphes 5 et 6 du chapitre 5. Une analyse détaillée des difficultés pouvant surgir lors de l'étude de ces sujets nous a servi à concevoir des situations permettant aux élèves de surmonter ces difficultés, individuellement ou en groupe.

Sans distinguer ici les types de difficultés à l'apprentissage, citons celles que l'analyse *a priori* a mises en évidence et celles que nous avons rencontrées ultérieurement lors des expérimentations. Il ne s'agit bien évidemment pas d'une liste exhaustive, pour autant qu'elle soit possible, mais d'un relevé des difficultés les plus communément rencontrées en classe.

Grandeurs

Différencier forme et grandeur d'une figure (notamment le nombre de figures et la surface occupée par ces figures) ; différencier les grandeurs d'une figure : périmètre, aires ; l'aire et sa conservation ; la mesure et la notion d'unité de mesure (conventionnelle ou non). Dans le cas d'unités conventionnelles et d'usage commun, on utilise parfois le mot « étalon ».

Géométrie

« Voir » les décompositions possibles de figures en triangles ou en polygones (lignes remarquables : hauteur, médianes, diagonales, axes de symétrie...) ; décomposer des figures en triangles, en rectangles, en carrés... ; décomposer des figures en figures isométriques (équidécomposition).

Démarches

Comparer des grandeurs : l'appariement de figures ayant même aire, la superposition comme outil de comparaison de figures, emploi de grilles.

La figure 7.4 expose ces obstacles et les liens possibles entre ceux-ci, principalement dans les contextes des grandeurs et de la géométrie.

Il faut remarquer que ce qui peut apparaître comme un obstacle dans une situation d'apprentissage du concept d'unité de mesure commune peut constituer un apprentissage en soi dans une autre situation mathématique. Ces apprentissages viendront donc renforcer le concept d'unité de mesure commune. Le décloisonnement des apprentissages apparaît plus nettement de la sorte, et les liens peuvent sans doute mieux être mis en évidence. Prenons par exemple la *superposition* de figures. Cette notion mathématique appartient plutôt au domaine de la géométrie. Elle intervient dans l'apprentissage des transformations (translation, rotation et symétrie miroir) du plan. Mais c'est également un outil puissant de comparaison de figures. En effet, si je peux superposer exactement deux figures, cela signifie qu'elles ont à la fois la même forme et la même aire. Dans une situation de comparaison d'aires, cette démarche est donc utile.

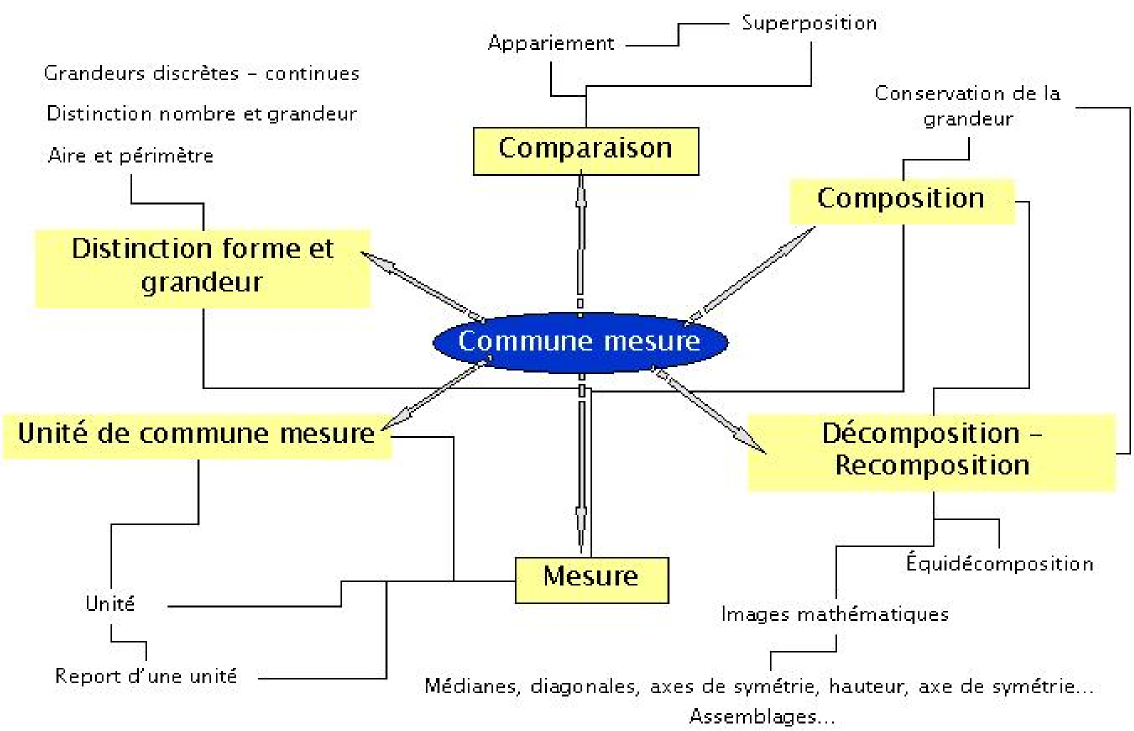
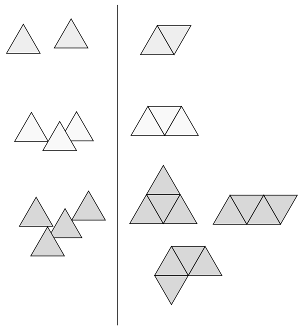


Fig. 7.4

Prenons un autre exemple. Celui des découpages et assemblages de figures. Dans bien des cas, cette activité sera privilégiée en maternelle et au début de l'enseignement primaire. Elle sera également placée dans le domaine de la géométrie. Or, construire des figures à partir de plus petites est une activité importante pour les apprentissages futurs en grandeurs et en numération. En effet, construire différentes formes à partir d'un même ensemble de formes plus petites permet de mettre en place un concept comme la conservation de l'aire, de différencier la forme et la grandeur. Cette activité, décrite dans la brochure [11], [Crem, 2003], est succinctement présentée ci-dessous.

Fiche 2.7

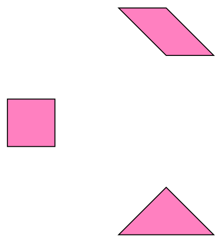
À partir de la famille du triangle équilatéral, fais apparaître deux triangles équilatéraux. Forme toutes les figures possibles en assemblant les triangles par les côtés.
Par la suite, fais de même avec trois triangles, puis avec quatre triangles.



Il est tout aussi enrichissant de décomposer une forme en morceaux identiques pour construire d'autres figures à l'aide de ceux-ci. Le concept d'*unité de mesure commune* y est aussi inscrit.

Fiche 2.8

Découpe le carré en deux pour pouvoir recouvrir exactement le parallélogramme avec les deux morceaux.
Fais de même pour recouvrir exactement le triangle.

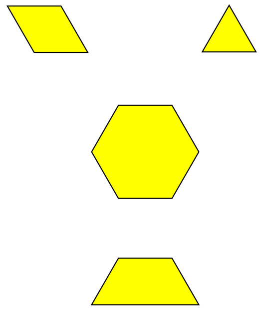


Des constats tels que
- ces figures sont de même aire,
- ces figures n'ont pas la même forme mais sont de même aire,
- ces figures contiennent toutes α triangles,
- ces figures ont toutes une aire de α triangles,
- plus généralement, des figures peuvent avoir des formes différentes mais avoir des aires égales.

De même, des activités de découpage d'une figure permettent de construire des images géométriques utiles dans le cadre de la construction de l'unité de mesure commune.

Fiche 2.9

Découpe l'hexagone pour obtenir un trapèze, un losange et un triangle.



1 Un test : prégnance du langage et de l'image

Le test élaboré et exposé ci-dessous a pour premier objectif d'évaluer les démarches et les connaissances des élèves dans des situations de comparaison de figures géométriques. Il a pour deuxième objectif d'évaluer la prégnance du langage et des perceptions dans ces mêmes situations auprès d'enfants de 8 à 10 ans. Les conclusions que nous mettons en avant suite à ce test sont cependant relatives à la classe dans laquelle il a été proposé et nous n'avons pas l'intention de les étendre à l'ensemble de la population scolaire du même âge. La réalisation de ce test dans une seconde classe d'élèves de 8 à 9 ans permet cependant de confirmer certaines observations.

En aucun cas ce test n'a été conçu comme une activité permettant de mettre à niveau les élèves par rapport à quelque prérequis que ce soit. Dans le cadre de la pédagogie diffférenciée, ce test a avant tout pour objet de connaître les forces et les faiblesses de chacun des élèves, leurs représentations quant à l'apprentissage à aborder... afin d'ajuster l'intervention de l'enseignant.

De quoi s'agit-il?

Les élèves complètent individuellement la fiche 2.1.

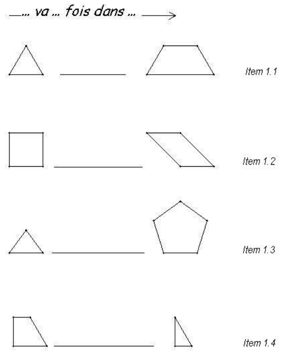
Comment s'y prendre?

L'objectif de ce travail est clairement annoncé aux élèves : observer leur comportement face à des problèmes de comparaison de figures géométriques. Il leur est également précisé qu'aucune cote ne sera attribuée à cette activité.

La consigne, lue collectivement, indique que l'élève doit compléter la fiche en notant « combien de fois la figure de gauche va dans la figure de droite ».

Fiche 2.1

Complète. Tu peux utiliser une latte ou tout autre instrument.



Les élèves réalisent le test individuellement sur une période de 30 minutes maximum.

Analyse a priori

Les réponses attendues à ces items sont :

– pour l'item 1.1 : 3 ou 3× ;
– pour l'item 1.2 : 1 ou 1× (la réponse *le même* est acceptée) ;
– pour l'item 1.3 : 5 ou 5× ;
– pour l'item 1.4 : $\frac{1}{3}$ ou × $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$× .

Item 1.1

La comparaison des deux figures peut s'effectuer en dessinant les triangles équilatéraux dans le trapèze. Pour réaliser ce dessin, il est nécessaire d'utiliser le point milieu de la grande base du trapèze. Ce point est assez facile à déterminer par l'élève, car d'une part il appartient au périmètre de la figure — trace visible de la figure —, et d'autre part, il est assez naturel d'employer le point au milieu d'un segment pour réaliser des tracés — pensons notamment aux médianes —.

L'unité de mesure commune est donc donnée au départ. Cependant, dans l'esprit des élèves, elle n'est pas révélée.

Item 1.2

La comparaison des figures ne peut se réaliser directement par la reproduction du carré dans le parallélogramme, ou l'inverse. Il faut donc trouver l'unité de commune mesure permettant la comparaison.

Item 1.3

Cet item possède au moins un point commun avec l'item 1, l'unité de mesure commune est donnée. Cependant, pour pouvoir dessiner les triangles isocèles dans le pentagone, c'est-à-dire employer la même démarche que pour l'item 1.1, il est nécessaire de percevoir le centre du pentagone comme étant le sommet de chacun des triangles. Or, ce point est très peu souvent dessiné ou employé dans l'enseignement de la géométrie. De plus, il n'est pas situé sur le périmètre de la figure et, sans doute, est-il « extérieur » à la figure dans l'esprit des élèves.

Item 1.4

Cet item est le plus complexe des quatre car il demande de comparer une figure plus grande à une figure plus petite. Ceci est inverse de ce qui est habituellement proposé dans les classes.

C'est probablement aussi pour cet item que la consigne est la plus perturbante. En effet, indiquer *combien de fois une figure va dans une autre*, en première lecture, induit que l'on puisse mettre *physiquement* une figure dans l'autre. Ce qui est impossible à l'item 4.

Il est cependant possible de dessiner trois triangles rectangles dans le trapèze, ce qui fait apparaître le rapport entre les deux figures.

Échos des classes

Le tableau 1, page 78, expose l'évaluation des réponses des élèves en termes de réponses attendues aux quatre items proposés — 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 —, ainsi que les commentaires ajoutés par ces mêmes élèves — Com 1.1, Com 1.2, Com 1.3 et Com 1.4 —.

Le graphe ci-dessous (figure 7.5) montre la dissymétrie des résultats et l'influence de l'interaction entre le langage et les figures géométriques. Les items sont classés en fonction de leur difficulté décroissante (voir les caractéristiques décrites ci-dessus). En effet, les résultats décroissent de manière inversement proportionnelle à l'augmentation de la difficulté des situations géométriques proposées.

Sur la partie gauche, items 1.1 et 1.3, la comparaison entre les figures peut être considérée comme directe, pratiquement immédiate. L'unité de mesure commune est donnée. Qui plus est, la situation proposée à l'item 1.1 est couramment rencontrée en classe.

Sur la partie droite, la comparaison n'est pas directe, une opération de décomposition de la figure de départ est nécessaire. Il faut trouver l'unité de mesure commune.

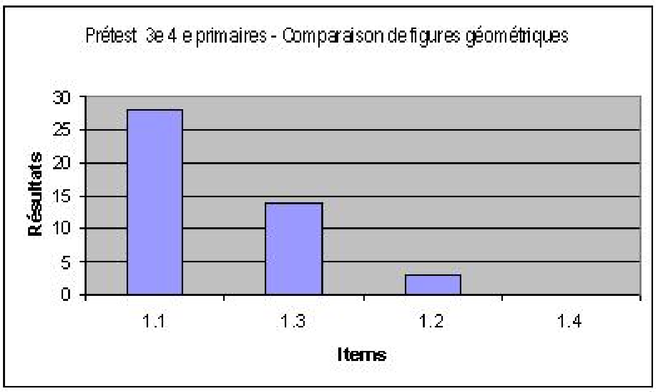


Fig. 7.5

L'analyse des résultats permet de mettre en avant trois points qui nous semblent essentiels :

– la prégnance du langage et des perceptions dans la résolution de problèmes à caractère géométrique ;

1.1	1.2	1.3	1.4	Com 1.1	Com 1.2	Com 1.3	Com 1.4
1	0	0	0	3	2	4	0
1	1	0	0	3 x	1 x	10 x	2 x
1	0	1	0	3 (avec tracés des T3 dans le T4)	2 (avec médianes sur les grands côtés du P4)	5 (avec tracés des T3 dans le P5)	1 (avec tracé du TR dans le T4)
1	0	0	0	3 fois	1 fois et un petit peu	2 fois	
1	0	0	0	3 fois	2 x	8 fois	1 fois
1	0	1	0	3 fois	2 fois	5 fois	- 2 formes
1	0	1	0	va 3 fois	va 2 fois	5 fois	2 fois
1	0	1	0	va 3 fois (avec coloriage des 3 T3 dans P4)	On pourrait allonger le carré	va 5 fois dans	va 3 fois (avec flèche du TR vers P4)
1	0	0	0	3 fois (avec tracés des T3 dans P4)	2 fois (avec tracé imprécis médiane sur grands côtés P4)	12 fois (avec deux tracés dans P5)	3 fois (avec tracés précis TR dans P4)
1	0	1	0	3 fois	2 fois	5 fois	3 fois
1	0	0	0	3 x	1 x et un petit peu	6 x	0 x
1	0	0	0	3 x	5x (avec tracés imprécis de carrés différents dans P4)	9 x (avec tracés imprécis de T3 dans P5)	0 x
1	1	0	0	3 fois	1 fois	14 fois	divise 3
1	0	1	0	x 3		x 5	-3
1	0	1	0	3 fois	1 et un 1/4	5 fois	0 fois
1	0	1	0	3 fois (avec tracés des T3 dans P4)	J'ai l'impression que le carré a été alongé et bougé	5 fois	3 fois
1	0	0	0	3 fois (avec tracés des T3 dans P4)	2 fois (avec tracé imprécis médiane sur grands côtés P4)		diviser en 3
1	0	1	0	3x		5x	3x
1	0	1	0	3 fois	2 fois	5 fois	1 fois
1	0	1	0	x 3	0 x	x 5	: 3
1	0	0	0	3 fois		6 fois	3 fois (avec tracé de 3 TR dans T4)
1	0	0	0	3 fois	2 fois	6 fois	2 fois
1	1	0	0	3	1	2 et un peu	2
1	0	0	0	3	2	4	2
1	0	0	0	3 fois (avec tracés d'1 T3 dans P4 et...)	2 fois (avec tracé d'1 diagonale dans carré)		3 fois (avec tracés de TR dans P4)
1	0	1	0	va 3 fois	va 2 fois	va 5 fois (avec tracés des 5 T3 dans P5)	va 2 fois (avec tracé TR dans T4)
1	0	1	0	3 fois (avec tracés des T3 dans P4)	Il faut le mettre de travers	5 fois	3 fois
1	0	1	0	3 fois	Il faut le mettre de travers	5 fois	Il faut le diviser en 2

28	3	14	0
100	11	50	0

Résultats : comparaison de figures géométriques

– la variabilité des procédures utilisées par un élève pour résoudre des problèmes d'un même type ;
– la capacité des élèves à adapter une situation faisant problème afin de pouvoir y fournir une réponse.

Détaillons quelque peu les trois propositions et étayons-les à l'aide de l'analyse des réponses des élèves.

• L'item 1.1 est réussi par 100% des élèves, avec 6 élèves qui dessinent les triangles dans le trapèze. Pour les autres, sans dessin, ils expriment correctement « combien de fois le triangle va dans le trapèze ».

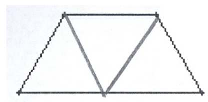


Fig. 7.6

• L'item 1.3, similaire à l'item 1.1 du fait que l'unité de mesure commune est donnée, n'est réussi que par 50% des élèves. Comme annoncé ci-dessus, le moindre taux de réussite de cet item est probablement dû au fait que cette figure est moins souvent rencontrée en classe et que le tracé des triangles dans le pentagone nécessite de percevoir le centre de cette figure comme un sommet commun aux cinq triangles inscrits. L'observation des tracés des élèves semble confirmer cette hypothèse.

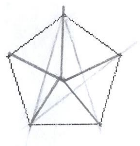


Fig. 7.7

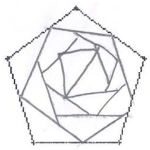


Fig. 7.8

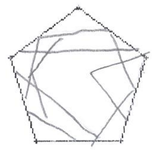


Fig. 7.9

Sur les figures 7.8 et 7.9 nous voyons que les élèves essaient de dessiner des triangles dans le pentagone sans toutefois dessiner des triangles identiques. Nous pouvons également observer que les sommets des triangles sur ces deux dessins sont des milieux de côtés et en aucun cas un centre de figure.

• L'item 1.2 n'est réussi que par 11% des élèves (6% dans une autre classe). Cet item confronte particulièrement les élèves au concept d'unité de mesure commune que nous souhaitons rencontrer avec eux. En effet, pour comparer le carré et la parallélogramme, il faut nécessairement rechercher une troisième figure — l'unité de mesure commune — qui permet de les paver.

Certes, il est raisonnable de penser que si les élèves avaient pu superposer ces deux figures, une majorité d'entre eux aurait « vu » qu'en décomposant l'une des deux en triangles, il était possible de reconstituer l'autre.

Nous pensons que ces résultats sont aussi induits par le fait que la recherche d'une unité de mesure commune n'est que très peu pratiquée en classe. Même si des activités de pavage, peu nombreuses également, sont réalisées, elles sont pour la plupart effectuées dans un seul sens, à savoir utiliser un petit pavé pour réaliser un pavage (Cf. items 1.1 et 1.2) ou employer des figures de formes différentes pour recouvrir une surface plus grande. Peu d'activités sont construites et proposées pour rechercher les différents pavés qui permettraient de paver une figure donnée. Les figures 7.10 et 7.11 exposent un exemple à partir de pièces du Tangram. Cette situation peut être aménagée en problème à partir d'un énoncé tel que : confectionner un foulard de forme donnée à l'aide de morceaux de tissus identiques. . . .

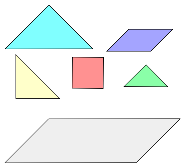


Fig. 7.10

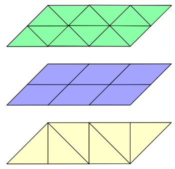


Fig. 7.11

Les réponses et les commentaires des élèves à cet item 1.2 laissent à supposer que dans un premier temps ils ont voulu reproduire la même stratégie que pour l'item 1.1 : dessiner la plus petite figure dans la plus grande. Or dans l'item 1.2, cette stratégie n'est pas applicable. Pour une bonne part d'entre eux, les élèves ont alors employé une stratégie plus « géométrique », à savoir proposer des déformations de figures comme le montrent les figures 7.12 à 7.14. En lieu et place d'une réponse à caractère quantitatif, les élèves ont fourni une réponse qualitative.

Fig. 7.12

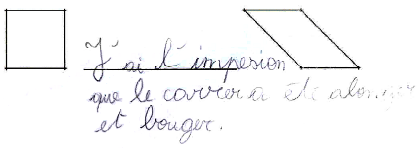


Fig. 7.13

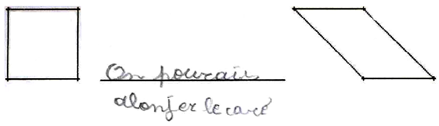


Fig. 7.14

• L'item 4 ne compte aucune bonne réponse pour cette classe. Les causes de ces résultats sont multiples probablement. Tout d'abord, la forme linguistique de la consigne influe certainement sur la manière avec laquelle certains élèves s'engagent dans la situation : « va . . . de fois dans ». Pour des élèves de 8 à 10 ans, cela signifie combien de fois une figure peut être mise « physiquement » et « entièrement » dans une autre. Comprendre que l'on puisse *mettre* une grande figure dans une petite peut être considéré comme un obstacle épistémologique. Depuis leur plus jeune âge, les élèves sont confrontés à des situations où ils doivent placer une petite figure dans une grande ou un objet plus petit dans un plus grand.

Ce n'est cependant pas ce qui est demandé dans cet item. Ne pouvant placer *physiquement* la grande figure dans la plus petite, certains élèves modifient l'item pour le conformer à une stratégie connue. Ils aménagent l'item en changeant le sens de la comparaison, à savoir dire *combien de fois la plus petite va dans la plus grande.*

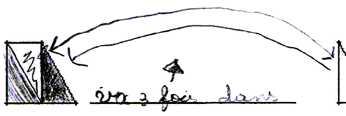


Fig. 7.15

Cette hypothèse est étayée par les huit réponses de type « 3× » — soit près de 30% des élèves — qui correspondent à la stratégie de placer la plus petite figure dans la plus grande. La figure 7.15 montre cet aménagement de l'énoncé.

D'autres élèves, gardant l'énoncé tel quel, répondent que l'*on ne sait pas mettre* le trapèze dans le triangle, ou que le trapèze va 0× dans le triangle. Ces réponses sont du même ordre que celle décrite ci-dessus. Elles montrent combien les élèves sont attachés aux formes linguistique et géométrique dans des situations mathématiques telles que celles-ci.
Cet ensemble de trois réponses représente 50% des réponses fournies dans la classe 8 - 10 ans et 60% des réponses dans la classe 8 - 9 ans.

Enfin, d'autres élèves répondent qu'il faut *diviser* le trapèze *en trois* pour obtenir le triangle. Cette réponse est correcte d'un point de vue mathématique, cependant elle ne répond pas à la question posée. Elle correspond à un processus de construction de la figure de droite.

Commentaires

Ce test nous a permis de mettre quelque peu en évidence la prégnance du langage et de la perception des situations géométriques chez les enfants de 8 à 10 ans. De même que la capacité des élèves à adapter une situation pour pouvoir fournir une réponse par l'utilisation de démarches connues.

Il apparaît aussi clairement que la recherche d'une unité de mesure commune n'est pas une démarche installée chez les enfants, bien qu'ils mesurent depuis la première année primaire. Or, ce concept intervient dans différents domaines mathématiques et cela tout au long de la scolarité, comme nous l'avons montré au début de ce chapitre. Un travail conséquent de ce concept semble donc pertinent.

L'intérêt d'*Apprenti Géomètre* apparaît au niveau des découpes et assemblages de figures, des comparaisons de figures. . ., activités fondatrices de la notion d'unité de mesure commune[2]. En effet, *Apprenti Géomètre* permet aisément de découper et d'assembler des figures tout en conservant les figures d'origine, ce qui n'est pas le cas avec des figures en carton ou en

[2]Ces activités d'assemblage et de découpages étaient abondantes dans les mathématiques chinoises, indiennes et arabes qui ont fondé nombre de théories géométriques et algébriques.

bois. Nous pensons que la persistance à la fois de la figure d'origine et des figures images permet la construction de la notion d'aire et notamment des figures isosuperficielles.

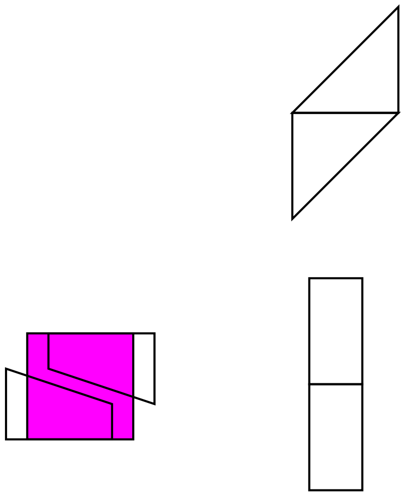


Fig. 7.16

2 La commune mesure dans le Tangram

Cette activité est initiée à partir du logiciel *Apprenti Géomètre*. Nous supposons que les élèves sont capables d'utiliser, sans trop de difficultés, les fonctions *Déplacer, Tourner, Retourner, Ajuster, Fusionner, Diviser* et *Découper*. En tout cas, ces connaissances instrumentales ne devraient plus constituer des obstacles majeurs à la résolution de la situation-problème.

De quoi s'agit-il? Sur *Apprenti Géomètre*, les élèves comparent deux assemblages de figures par fractionnement puis par superposition et/ou comptage pour déterminer quel assemblage de figures possède la plus grande aire.

Analyse a priori L'analyse *a priori* de cette situation-problème peut être schématisée par la figure 7.17, ci-dessous (voir le chapitre 3, *in fine*).

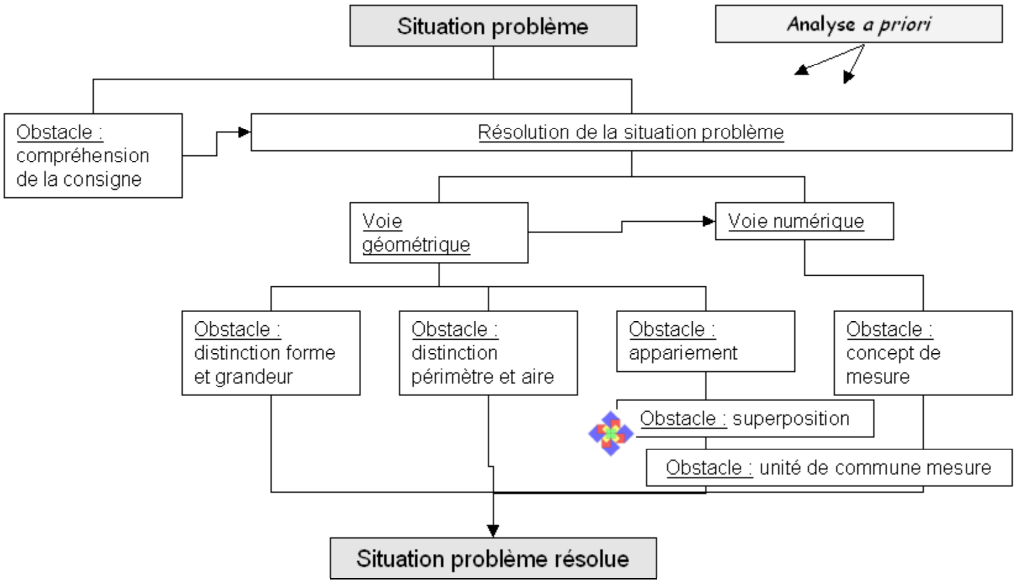
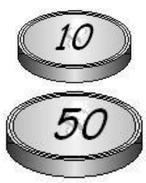


Fig. 7.17

Nous avons relevé cinq difficultés principales pour lesquelles nous avons préparé cinq *réponses*. Cependant, nous ne prétendons pas avoir épuisé les attitudes possibles des élèves et avoir prévu l'ensemble des *réponses* que l'enseignant peut fournir... Son savoir-faire et la connaissance de sa classe lui permettront de répondre de manière appropriée au comportement d'un élève en particulier.

– Un première difficulté est liée à **la compréhension de la consigne**. La *réponse* apportée par l'enseignant devrait être orale, adressée individuellement ou à un groupe si nécessaire, et s'organiser autour du questionnement de l'élève pour mieux cerner la problématique. En effet, l'incompréhension peut être d'origine lexicale et dans ce cas une reformulation de la consigne peut suffire. Mais elle peut être plus profonde et liée à des compétences mathématiques que nous situons ci-dessous.
– Une autre difficulté est **la différenciation entre forme et grandeur**. En effet, pour quelques élèves, le nombre de figures est plus prégnant que la surface occupée par ces figures, et cela même s'ils ont bien compris que l'on focalisait l'attention sur la *place* que prend un ensemble de figures. Si l'on transfère ce problème dans un autre contexte, en l'occurence celui des pièces de monnaie, la situation devient plus significative et plus instructive.



Prenons par exemple deux pièces de monnaie, l'une de 10 centimes d'Euro, l'autre de 50 centimes d'Euro. Si l'on donne une pièce à un élève, et l'autre à un autre élève, nous pouvons dire que chaque élève a reçu le même nombre de pièces de monnaie, mais nous ne pouvons pas dire qu'ils ont reçu chacun la même somme, la même quantité d'argent.

Cette situation est plus simple que la situation géométrique composée d'assemblages de figures (figure 7.18). Dans le cas des pièces de monnaie, les deux éléments à comparer sont uniques, alors que dans la situation géométrique proposée, il faut comparer deux assemblages de figures. Dans chacun des cas, il faut distinguer la *forme* — le nombre de pièces, les figures qui composent l'assemblage... — et la *grandeur* — en l'occurrence la valeur de la pièce ou l'aire occupée par l'assemblage de figures —. D'autres situations peuvent *montrer* cette distinction à réaliser entre la forme et la grandeur : deux feuilles de papier de grandeurs différentes, deux bouteilles d'eau de contenu différents, deux groupes de solides de masses différentes... Dans le cas des bouteilles (figure 7.19) il y a égalité au niveau du nombre d'éléments — une bouteille de part et d'autre — cependant une bouteille contient plus que l'autre. À la question, « Où y a-t-il le plus de liquide ? », l'élève constate que c'est dans la bouteille de droite. De même en ce qui concerne les masses, la figure 7.20 montre un cas où le nombre d'éléments est différent dans chacun des groupes de masses, et où le groupe le plus lourd est celui contenant le moins d'éléments. Ce travail est indispensable pour les élèves qui ne perçoivent pas la différence entre la forme et la grandeur de celle-ci, particulièrement en ce qui concerne l'aire d'une figure.

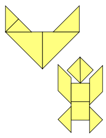


Fig. 7.18

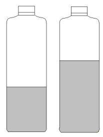


Fig. 7.19

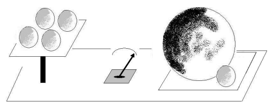


Fig. 7.20

- **La différenciation entre des grandeurs : périmètre et aire**
  Pour quelques élèves, cette différenciation du périmètre et de l'aire reste une difficulté. En effet, face à une situation de comparaison de figures quant à la place qu'elles prennent, un nombre important d'élèves, encore en sixième primaire, se lancent rapidement dans la mesure du périmètre. Sans doute est-ce là encore une manifestation de la prégnance de l'image. En effet, que voit l'élève lorsqu'il regarde une figure, si ce n'est dans la plupart du temps une corde noire.
- **L'appariement**[3] est aussi une démarche à laquelle les élèves ne pensent pas généralement. Or elle est très utile pour *débroussailler* une situation. Elle permet de diminuer rapidement le nombre des données ou la grandeur des données. Par exemple, dans une situation telle que celle des « cartables de Simon et Mélanie » décrite à la section 5, une première démarche peut-être de supprimer ce qui est commun aux deux situations présentes.

[3] L'appariement a déjà pu être utilisé dans l'enseignement maternel, notammentlors d'activités utilisant la correspondance terme à terme : vérifier sil y a plus de filles ou de garçon dans la classe...

Situation de départ		Pour les fardes, les situations peuvent évoluer vers	
Simon a ...	Mélanie a ...	Simon a ...	Mélanie a ...
2 fardes	3 fardes	~~2 fardes~~ 0 farde	~~3 fardes~~ 1 farde
3 cahiers	7 cahiers	3 cahiers	7 cahiers
5 livres	1 livre	5 livres	1 livre

Ces processus de compensation peuvent aisément être montrés à l'aide d'une balance à plateaux et d'objets miniaturisés, réalisés en plasticine et respectant les rapports énoncés dans la cnsigne. Le rappel de comportements utilisés au niveau maternel peut aussi être une voie explicative et faisant appel aux connaissances vécues par l'élève.

– Enfin, l'appropriation erronée ou incomplète du concept de mesure peut aussi être un frein à la résolution de la situation-problème.
La mesure, dans son acception d'action de mesurer, reste bien souvent assez peu claire dans l'esprit des élèves. La mesure en tant qu'expression d'un résultat leur est plus familière. Or, dans le contexte qui nous préoccupe, la démarche de mesure est fondamentale. Pour mesurer une grandeur, il faut déterminer une unité de mesure, et la reporter autant de fois que nécessaire « sur » ou « dans » la grandeur à mesurer. C'est bien de cela qu'il s'agit dans notre situation-problème.

Enjeux

Renforcer la distinction entre forme et grandeur ;

renforcer la notion d'aire et la notion de conservation de l'aire ;

constuire la notion de commune mesure ;

comparer des aires par superposition ;

aborder la notion de grandeur fractionnée ;

aborder la composition de deux fractionnements.

Compétences

Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...] aires, [...]). Fractionner des objets en vue de les comparer. Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.

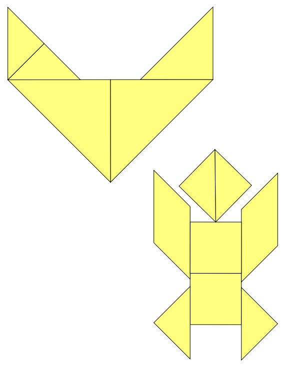
De quoi a-t-on besoin?

Les fiches 2.2 et 2.3 ; des crayons.

Comment s'y prendre?

L'enseignant distribue les fiches 2.2 et 2.3 aux élèves qui préparent leur écran de travail.

Fiche 2.2
Julie et Tom ont tous les deux créé un modèle avec des pièces du Tangram.
Julie a construit une tête de chat et Tom un bonhomme qui lève les bras.
Les voici représentés sur un écran d'ordinateur.
Qui a utilisé le plus de papier ?
Note ta réponse et explique comment tu as trouvé.



Les élèves essaient d'apparier des pièces. Cependant, ceci n'est réalisable que pour les deux petits triangles isocèles rectangles. Très vite, les élèves sont confrontés au fait qu'ils ne peuvent plus superposer les figures (figure 7.21). L'appariement géométrique direct ne peut plus être réalisé. Les élèves doivent donc rechercher une autre démarche pour poursuivre la comparaison :

- soit en recouvrant une figure à l'aide de plusieurs plus petites — addition de grandeurs — (figures 7.22 et 7.23), mais là encore, le chemin est limité ;
- soit en fractionnant certaines figures après avoir essayé la superpostion. Ces découpes devraient faire apparaître l'unité de mesure commune qu'est le petit triangle rectangle isocèle (figure 7.24).

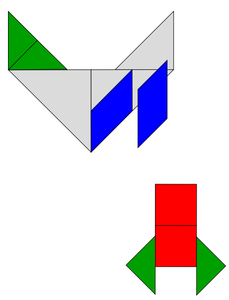


Fig. 7.21

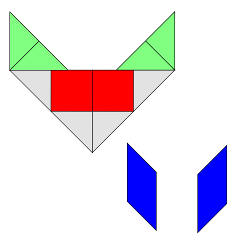


Fig. 7.22

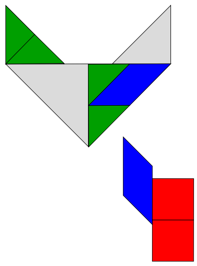


Fig. 7.23

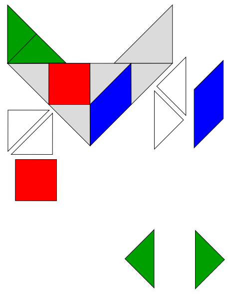


Fig. 7.24

Ainsi, les élèves peuvent-ils se rendre compte que deux petits triangles isocèles rectangles assemblés font un triangle isocèle moyen. Par ailleurs, après avoir asssemblé ces deux petits triangles isocèles rectangles (figure 7.25), les élèves peuvent les fusionner et ainsi obtenir un triangle superposable au triangle isocèle rectangle moyen. Ensuite, conclure que les deux petits triangles sont ensemble aussi grands que le triangle moyen.

De même, pour un des deux grands triangles isocèles rectangles, les élèves peuvent superposer un parallélogramme après l'avoir tourné, puis s'apercevoir que le carré doit être découpé en deux triangles à superposer sur le grand triangle (figure 7.26).

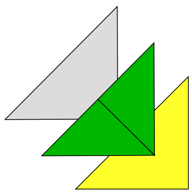


Fig. 7.25

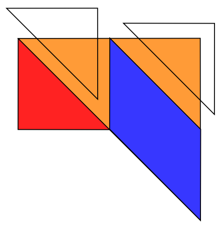


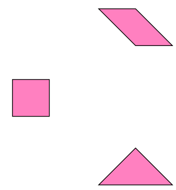
Fig. 7.26

Ces opérations peuvent être réalisées à partir des fonctionnalités des menus *Opérations* — *Diviser, Découper, Fusionner* — et *Mouvements* — *Déplacer, Tourner, Retourner, Ajuster* —.

Pour les élèves qui ne perçoivent pas ces découpes, l'enseignant peut, après avoir enregistré le travail déjà effectué par les élèves, proposer à ceux-ci d'ouvrir le fichier *Decouper1* dans le dossier *Initiation* et de réaliser le travail de la fiche 2.8.

Cette activité propose de découper des figures qui sont présentes dans l'activité de départ mais dans un contexte plus épuré, simplement géométrique. De plus, la consigne indique les opérations à effectuer. Cette situation devrait permettre aux élèves concernés de percevoir et de comprendre que des figures peuvent être découpées et que les figures ainsi obtenues peuvent être assemblées d'une autre manière afin de construire une autre figure. Celle-ci est de forme différente mais de même aire que la figure d'origine.

Fiche 2.8
Découpe le carré en deux pour pouvoir recouvrir exactement le parallélogramme avec les deux morceaux. Fais de même pour recouvrir exactement le triangle.



Ces caractéristiques sont mises en évidence avec les élèves. Une synthèse peut être notée sur la fiche, le segment de découpe du carré et les triangles constituant le parallélogramme et le triangle isocèle peuvent être dessinés. Par la suite, les élèves ouvrent à nouveau le fichier de la situation initiale sauvegardé et reprennent l'activité de comparaison en investissant les apprentissages réalisés. L'enseignant peut aider à la mise en évidence des liens existant entre les deux situations géométriques, d'une part la situation initiale, d'autre part la situation plus simple imprimée.

Une autre façon de réaliser la comparaison des constructions de Julie et de Tom est d'employer une démarche numérique. Sachant que toute figure peut être recouverte exactement et sans chevauchement par un ensemble fini de petits triangles identiques[4]. Il s'agit de se rendre compte que le petit triangle rectangle isocèle est l'unité de mesure commune pour cet ensemble de formes comprises dans les deux constructions. La comparaison de figures se transforme alors en deux mesurages puis en une comparaison de mesures. Le chat de Julie comprend 12 petits triangles et le bonhomme de Tom en comprend 12 aussi (figure 7.27).

Force est cependant de constater que cette voie numérique s'appuie au départ sur une *vision géométrique* de la décomposition de figures. Géométrie et numération sont ici intimement liées.

[4]Ceci peut être rencontré dans des activités de recouvrement de figures, de découpage de figures selon les médianes, les diagonales, des points remarquables...

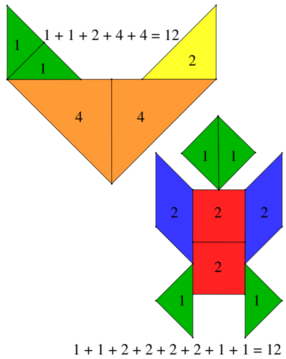


Fig. 7.27

Après les manipulations, les élèves, individuellement ou par groupe de deux, rédigent leur narration de recherche (fiche 2.3). Celle-ci doit exposer tant la réponse que les démarches utilisées pour résoudre la situation-problème. Des dessins peuvent compléter l'ecrit.

Une mise en commun doit pouvoir mettre en évidence deux démarches principales de résolution de la situation-problème :

– une démarche géométrique dans laquelle on superpose, on découpe, on assemble des figures géométriques ;
– une démarche numérique dans laquelle après avoir trouvé l'unité de mesure commune, on dénombre, on additionne, on compare le nombre d'unité de mesure commune contenue dans chaque assemblage.

Il est intéressant également de mettre en évidence les points communs entre ces deux démarches, notamment l'unité de mesure commune qui est dans les deux cas le triangle rectangle isocèle. Il est également possible de réfléchir aux types de comparaison. Dans le cas de la démarche géométrique, on compare une figure à une autre, on est centré sur un élément à la fois. Dans le cas de la démarche numérique, on globalise d'abord, ensuite, on compare un ensemble d'éléments à un autre ensemble d'éléments, ou plutôt le cardinal d'un ensemble au cardinal d'un autre ensemble.

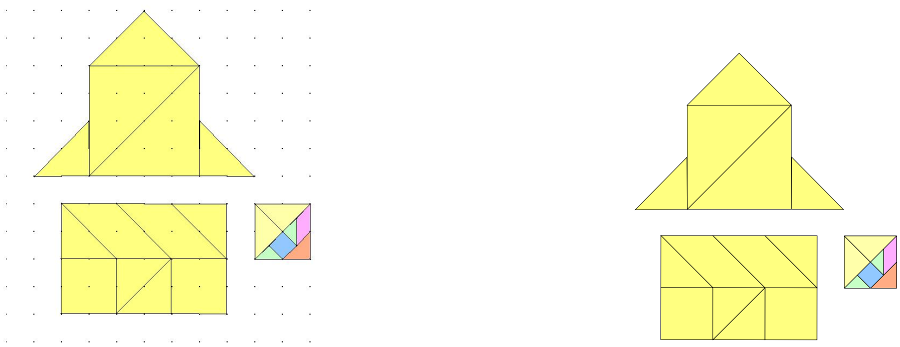
Au cours de cette mise en commun, il est également exposé que le nombre de figures contenues dans les deux assemblages n'intervient pas dans la comparaison. En effet, alors que ces deux assemblages occupent la même aire, nécessitent la même *quantité* de papier pour les réaliser, elles ne contiennent pas le même nombre de « morceaux », le même nombre de figures. La tête de chat en contient 5, le bonhomme de Tom en contient 8. Une réflexion concernant la grandeur de chaque figure devrait permettre de fournir une justification qualitative à ce fait : il faut moins de figure dans la tête de chat car les figures sont plus grandes que celles utilisées pour le bonhomme. À l'inverse, le bonhomme étant constitué de figures plus petites, il en faudra plus pour avoir la même *quantité de papier* que dans la tête de chat.

Au-delà de ce raisonnement qualitatif et empiriste, se trouve en substance la notion des fractions équivalentes. En effet, si deux fractions sont égales mais que leurs dénominateurs sont différents, la fraction avec le dénominateur le plus petit (la figure la plus petite) aura le numérateur le plus grand (le plus grand nombre de figures).

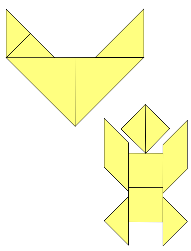
Ci-dessous, deux fiches similaires qui peuvent être utilisées soit lors de la première activité afin que tous les élèves n'aient pas la même situation-problème, soit comme situation permettant de réinvestir les nouveaux apprentissages. Ces problèmes peuvent être résolus soit en utilisant le logiciel *Apprenti Géomètre* pour les élèves qui éprouvent encore quelques difficultés et qui doivent encore superposer et découper les figures, soit directement sur la fiche papier. Dans ce dernier cas, il est encore possible de différencier à partir des fiches puisqu'une des deux présente le montage de figures sur une grille (fiche 2.4).

Fiches 2.4 et 2.5

Pierre a créé deux montages à l'aide des pièces du Tangram.
Faut-il autant de papier pour construire le rectangle que pour réaliser la fusée ? Ou bien y a-t-il un dessin qui demande plus de papier ?



Échos des classes



Une majorité d'élèves comparent les pièces du bonhomme aux pièces du chat. Ils expliquent cela par le fait que les pièces du bonhomme sont plus petites. S'ils utilisaient les triangles du chat, ils devraient les découper.

Globalement, quatre types de démarches de résolution peuvent être observées :
- la comparaison des nombres de pièces de chacun des deux montages ;
- la comparaison des périmètres ;
- l'appariement géométrique ;
- la recherche et l'emploi d'une unité de mesure commune.

Il faut cependant noter, d'une part, que les deux dernières démarches ne sont pas exclusives. Dans bien des cas, les élèves commencent à apparier puis, comme décrit dans l'activité, ils découpent les figures pour continuer à superposer. En cours de travail, certains *voient* que les deux montages auraient pu être construits à l'aide de petits triangles rectangles isocèles. D'autre part, en début d'activité, lorsqu'il sobservent les deux figures, certains élèves se laissent guider par leurs perceptions et comparent ces deux assemblages par rapport à leur *largeur* et leur *hauteur* relatives.

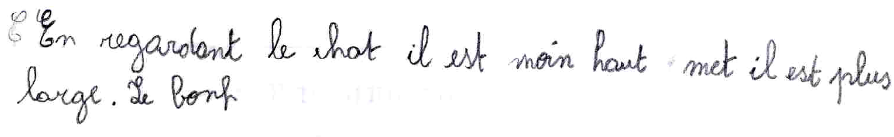


Fig. 7.28

Certains élèves se forgent une première idée de solution à partir de cette démarche pour ensuite manipuler les figures afin de confirmer leur première impression.

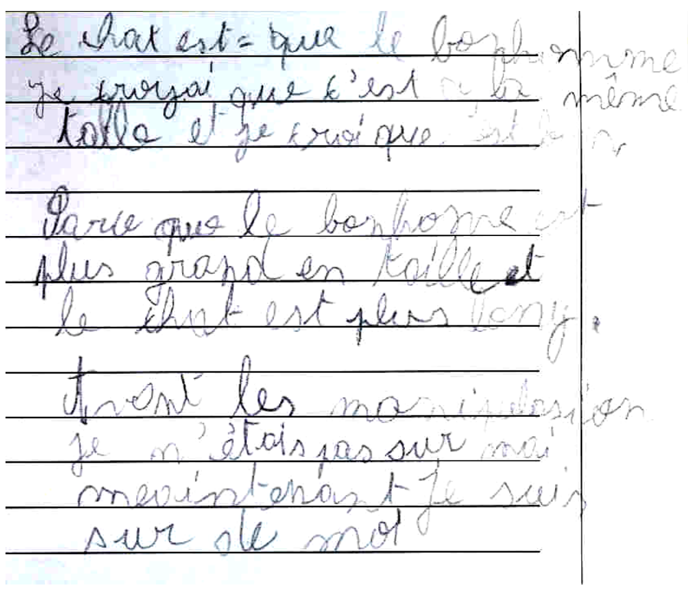


Fig. 7.29

Cette démarche est assez naturelle et employée encore par nombre d'adultes dans une première approche d'une situation de comparaison d'aire ou de volume. Elle a pour intérêt de mettre en évidence les dimensions utiles dans le calcul de l'aire ou du volume : la *largeur*, la *longueur* et la *hauteur*.

Détaillons quelques peu les quatre démarches exposées ci-dessus.

- La première, la plus fréquemment employée par les élèves en difficulté, consiste à compter le nombre de pièces contenues dans chaque assemblage (voir narrations ci-dessous, figures 2 et 2), puis à comparer ces nombres. Une première explication a cette démarche est l'interprétation de la consigne et plus particulièrement de « qui a utilisé *le plus de* papier ? ».

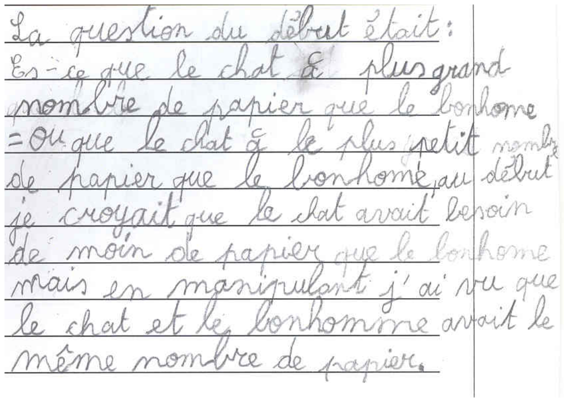

La question du début était :
Es-ce que le chat & plus grand
nombre de papier que le bonhomme
= Ou que le chat & le plus petit nombre
de papier que le bonhome au début
je croyait que le chat avait besoin
de moin de papier que le bonhome
mais en manipulant j'ai vu que
le chat et le bonhomme avait le
même nombre de papier.

Fig. 7.30

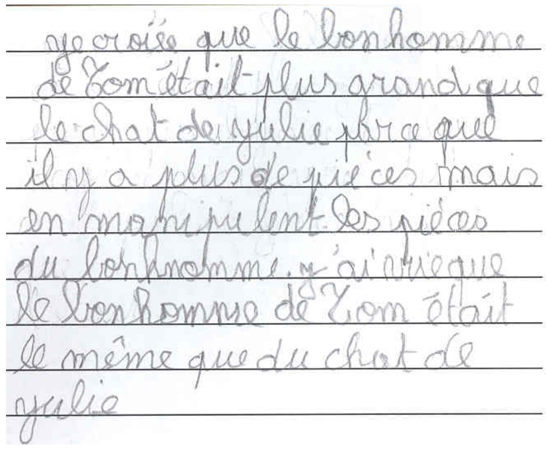

je croise que le bonhomme
de Tom était plus grand que
le chat de julie parce que
il y a plus de pièces mais
en manipulent les pièces
du bonhomme j'ai vue que
le bonhomme de Tom était
le même que du chat de
julie

Fig. 7.31

Pour ces élèves, la transposition dans un autre contexte, comme celui des pièces de monnaie décrit ci-dessus, est une aide complémentaire à toute explication quant à la formulation de la consigne et plus particulièrement à l'emploi de l'expression « qui a utilisé *le plus de* papier ? ».

– Une deuxième démarche consiste à avoir recours à mesurer le périmètre[5]. Deux raisons, entre autres, apparaissent pour expliquer cette démarche. D'une part, la confusion entre *périmètre* et *aire* encore fréquente à cet âge et à ce stade du cursus scolaire. Cette explication est sans doute ce qui correspond au plus grand nombre. D'autre part, cette démarche de mesure des périmètres peut être amorcée par la formulation de la question et l'emploi du « qui a le plus de » qui amène l'élève à rechercher deux nombres à comparer. Le réflexe de la mesure apparaît et ce qui est le plus évident à mesurer[6] dans le cas de figures planes, c'est le périmètre.

  Bien souvent, les élèves formulent oralement la demande suivante « Comment faire pour mesurer le tour ? ». La réponse tombe comme un couperet : cette mesure n'est pas possible directement sur *Apprenti Géomètre* ! En effet, ce logiciel permet de construire la notion de mesure mais n'affiche pas numériquement et explicitement le résultat de la mesure.

  Pour permettre aux élèves de percevoir une autre démarche de résolution, nous avons privilégié la relecture et une réflexion sur l'énoncé de la situation-problème ; ceci permettant d'emmener les élèves sur une démarche de comparaison d'aires. Cependant, un travail sur les variations de périmètres et d'aires, notamment à partir des grilles carrées et triangulées (figure 7.32), devrait être entrepris avec ces élèves afin qu'ils

[5]Cette approche par la mesure du périmètre est confirmée par l'expérimentation dans une autre classe où la même situation a été proposée uniquement sur papier. Certes dans ce cas, la superposition des figures est irréalisable physiquement sans la possibilité de découper ces figures ou sans l'emploi de transparents.

[6]Il faut comprendre ici la mesure comme un *résultat* à lire sur un instrument. Il ne s'agit nullement de l'opération de report d'un étalon qui permet, *in fine*, d'obtenir un nombre correspondant au nombre de fois que ce report a été effectué.

distinguent d'autant mieux ces deux grandeurs que sont le périmètre et l'aire d'une figure.

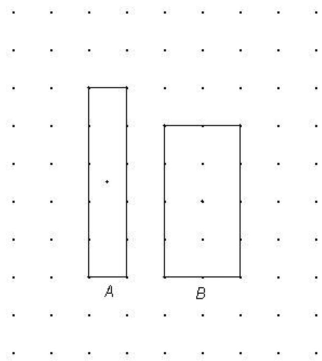


Fig. 7.32

Par exemple, pour les figures ci-contre, bien que leurs périmètres soient tous deux égaux à 12 côtés de carré de la grille, leurs aires sont sensiblement différentes.
aire de A = 5 carrés de la grille,
aire de B = 8 carrés de la grille.
D'autres variations peuvent être abordées, telles que rechercher différents périmètres pour une même aire, rechercher la plus grande aire pour un périmètre donné ou l'inverse...

Ces activités ont pour objet de différencier le périmètre de l'aire dans un premier temps, mais également de construire les formules de calcul des aires. Une activité allant dans ce sens a été décrite dans la brochure [11], [Crem, 2003], aux pages 150 et suivantes.

– Une troisième démarche employée par les élèves est l'appariement géométrique. Celui-ci se réalise par la superposition des figures. Cependant, comme précisé dans la description de l'activité, après avoir superposé les petits triangles isocèles, pour une part, les élèves ne « voient » plus ce qu'ils peuvent réaliser comme travail, comme l'indique le récit ci-dessous.

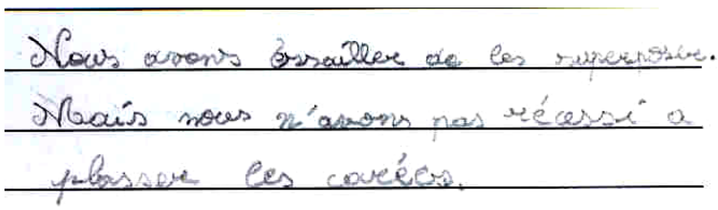


Fig. 7.33

À ce stade, le rappel d'activités de découpage et d'assemblage de figures a aidé certains élèves à percevoir d'autres superpositions possibles, notamment les activités décrites dans la brochure [11], [Crem, 2003], et reprises ci-dessous à la section 3, par exemple l'activité de découpage d'un carré, figure 7.34.
Suite à ce rappel, les élèves continuent leur comparaison par superposition de figures soit en superposant plusieurs plus petites à une plus grande comme le montre la figure 7.35, soit en découpant puis en superposant comme explicité dans la description de l'activité, figure 7.24.

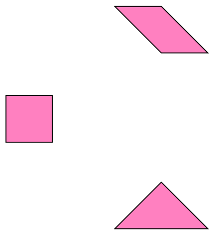


Fig. 7.34

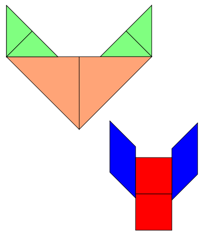


Fig. 7.35

Cette démarche permet *in fine* de superposer entièrement un assemblage sur l'autre. Il faut donc autant de papier pour l'assemblage de Tom que pour celui de Julie.

– Une quatrième démarche consiste à découvrir, tout de suite ou en cours de travail, l'unité de mesure commune et d'utiliser une approche numérique. Cette démarche est cependant peu observée chez les élèves. Simon a quant à lui rapidement utilisé cette démarche, il a rapidement perçu que le petit triangle rectangle isocèle était constitutif de toutes les autres. Par contre, la démarche par superposition lui pose problème. Non pas la démarche en elle-même, il est bien conscient que l'on peut superposer les figures et même les découper puisqu'il a accès à l'unité de mesure commune, mais dans la réalisation de cette démarche au niveau géométrique. En effet, comme constaté lors des activités d'initiation, la perception géométrique des situations proposées pose problème pour Simon. De ce fait, son activité de découpage et de superposition est quelque peu désorganisée.

Lors de la narration de recherche, les élèves éprouvent quelques difficultés à exprimer leurs démarches. Ceci reste un exercice complexe pour eux car, d'une part, il faut réfléchir à ses pratiques, revoir le film des manipulations mais, d'autre part, il faut également exprimer par écrit cette histoire vécue. Deux contextes sont donc à prendre en compte simultanément : le contexte mathématique et le contexte linguistique. Des activités de structuration de l'écrit sont donc nécessaires autant que la pratique de l'activité réflexive, ou *métacognitive*. Nous présentons ci-dessous quatre exemples de narration de recherche.

j'ai le chat de julie et
le bonhome de Tom je me demande
qui a utilisé le plus de papier ?
pour le savoir j'ai mi les forme
du bonhome de Tom sur le
chat de julie.
1) j'ai passer les pieds et
le pier du bonhome et je les ai
mi sur les oreils du chat.
2) j'ai pris le parallélogramme
je l'ai tourner et je l'ai mi
sur le museau du chat.
3) Il y a 2 carrée j'ai été
dans opération j'ai été prandre
découper, je l'ai s'ai tourner
et mi sur la tête du chat.
Il a plusieur solution :
1) le chat > le bonhome
2) Le chat = Le bonhome
3) Le chat < Le bonhome
La solution final est que
Le chat est = au bonhome

Si julie avais plus ou moins
de papier que tom. Ma réponse
de départ était le même. J'
refléchi pour savoir la
solution. Je me suis dit qu'
il fallait superposer. Puis
on à commencer a superposer.
Mais à la fin, on a u rien
problème, c'est que a un endroit
il manquait des morceau de
triangle et on avais des carrés.
Mais heureusement, J'ai
refléchi et je me suis dit de
découper. Mais après madame
m'a dit qu'il fallait les voir
quand les triangles était
transparent et je ne savais
pas mettre en couleur et je
me suis dit de dupliquer et
sa a marchée.
ma réponse est que
c'est autant de papier pour
le chat qu'au bonhome.

Ma réponse d'avant était que le chat
était plus grand mais après on a manipulé
avec l'ordinateur et j'ai vu que
c'était égal, on a mi toute les pièces
du bonhomme sur le chat et les
carrés on les a coupé en deux pour
faire des triangle (comme on a coupé les
deux il y avait 4 triangles)

Je crois que le bonhomme
était plus grand que le chat.
Mais en fesant les manipulation.
J'ai découper le bonhomme pour
le mettre sur le chat et ont
n'a tourner pour le mettre sur
le chat. Et puis j'ai découvert
que c'est la même chose.

Commentaires De l'usage d'*Apprenti Géomètre* dans les processus de différenciation.

Durant ces expérimentations, nous avons pu observer et entendre que l'usage d'*Apprenti Géomètre* ne confrontait pas les élèves au même type d'activité scolaire. En d'autres termes, certains élèves ont été confrontés à une situation d'apprentissage car la situation à partir d'*Apprenti Géomètre* ler posait un réel problème quant à l'appariement géométrique à réaliser soit directement soit après découpe des figures. Par contre, d'autres élèves ont été confrontés à une situation d'exercisation, comme ce fut le cas pour Simon, l'enfant à haut potentiel. La problématique d'appariement et de découpe de figure pour faire correspondre des aires de formes différentes n'existant plus pour ceux-ci. Cependant, comme l'indique l'interview ci-dessous, d'autres apprentissages que ceux visés ont pu être réalisés.

Au cours de interview effectuée juste après l'activité à l'ordinateur, à la question « Cette activité à l'ordinateur t'a-t'elle permis d'apprendre quelque chose ? », Simon répond : « *Non... Mais j'ai appris que, ça je suis maintenant certain que si on a deux triangles rectangles isocèles ça fait un carré.* »

À cette autre question « Quelles ont été tes difficultés pour réaliser cette activité ? », Simon répond : « *Euh, un peu pour savoir comment on doit superposer les pièces.* [Donc c'était un problème de position des pièces ?] *Ce n'est pas la position, si je vois la position sous les yeux je ne crois pas que j'aurais eu du mal à les reproduire. Sauf s'il fallait tout découper, euh tout découper en deux puis tout remonter dans des ordres un peu...* ».

Dans cette réponse, il faut comprendre que Simon ne maîtrisait pas encore suffisamment le logiciel que pour utiliser avec aisance les quatre mouvements géométriques contenus dans le menu *Mouvements*.

À la question, « Si le même problème avait été présenté sur la fiche papier uniquement, est-ce que tu aurais pu le résoudre sans déplacer, ou découper les pièces, même mentalement ? », Simon, après avoir réfléchi et proposé des découpages et des superposition « *dans sa tête* » que nous refusons, réponds : « *Non, là j'aurais été bloqué !* »

Donc, placer les élèves face à une situation problème à résoudre à partir d'*Apprenti Géomètre* et constater la réussite de la tâche ne garanti pas qu'il y ait eu apprentissage par tous les élèves. En tout cas, cela ne garantit pas qu'il y ait eu apprentissage de la notion visée, en l'occurence l'unité de mesure commune. La phase de structuration en fin d'activité est très importante. C'est un moment durant lequel chacun peut exprimer ses difficultés, ses apprentissages, ses étonnements, ses échecs, ses réussites. C'est aussi à ce moment que des prolongements peuvent apparaître, tels que cette possibilité de résoudre la situation sur la fiche sans superposer.

L'intérêt du logiciel *Apprenti Géomètre*, ou de tout autre didacticiel du même type, est qu'il permet aux élèves de mémoriser des images mentales[7] liées à des actions géométriques. Ce sont ces images mentales qui seront transférées au contexte papier.

[7]Ces images mentales sont importantes en mathématiques et notamment en géométrie parce qu'elles servent de « guides » lors de l'approche des situations-problèmes. FREUDENTHAL nomment ces images des *fitting*.

3 Décomplexification de la démarche géométrique

Ces activités ont pour objet d'aider les élèves en difficulté par rapport à la situation-problème de départ. Elles sont proposées aux élèves qui ne maîtrisent même pas la démarche d'appariement géométrique. Durant ces activités, l'attention des élèves est surtout portée sur la conservation de l'aire après découpage et assemblage, ainsi que sur la forme des découpes (fiches 2.8 et 2.9) ou des figures de base des assemblages (fiche 2.7). Chaque fois que cela s'avère nécessaire, soit à cause d'un manque de connaissance du logiciel, soit à cause d'une difficulté à maîtriser les mouvements de la souris. . ., il est nécessaire de recourrir aux manipulations de matériel plus traditionnel tel que des figures en carton. Il faut cependant noter que ce dernier matériel, dans les activités de découpage et assemblage, ne permet pas de conserver la figure d'origine. En effet, lorsqu'on découpe le carré en deux triangles rectangles isocèles, on ne possède plus le carré entier mais bien deux triangles. Par contre, *Apprenti Géomètre* permet de conserver le carré de départ et ainsi de comparer toutes les figures, le carré, les deux triangles et le parallélogramme constitué à partir des deux triangles.

Le plus souvent possible, des liens sont mis en évidence entre la situation décomplexifiée et la situation-problème de départ, notamment en ce qui concerne la découpe du carré et du parallélogramme en deux triangles rectangles isocèles. Ce constat devrait fait suite à un questionnement de l'enseignant et ne pas être énoncé directement pas lui. Cette reconnaissance de similitudes entre deux situations faisant également partie des apprentissages nécessaires aux transferts de démarches.

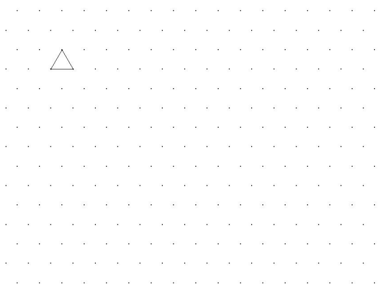
Ces activités sont présentées succinctement ci-dessous. Elles ont été décrites complètement dans la brochure [11], [Crem, 2003], aux pages 108 à 115.

3.1 Assembler des figures

De quoi s'agit-il?	Dans le *kit standard*, les élèves assemblent des triangles équilatéraux pour construire de nouvelles figures. Ils commencent avec deux, puis font de même avec trois et quatre triangles équilatéraux. Ils tracent ensuite les figures réalisées sur le papier pointé triangulaire.
Enjeux	Utiliser la superposition comme moyen de comparaison ; différencier deux propriétés d'un objet : la forme et la grandeur ; multiplier une grandeur par un nombre naturel ; utiliser le papier pointé triangulaire comme support de dessin.
Compétences	*Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet. Tracer des figures simples.*

Fiche 2.7

À partir de la famille du triangle équilatéral, fais apparaître deux triangles équilatéraux. Forme toutes les figures possibles en assemblant les triangles par les côtés.
Par la suite, fais de même avec trois triangles, puis avec quatre triangles.
Sur le papier pointé ci-dessous, reproduis à main levée les figures construites.



3.2 Découper et assembler des figures

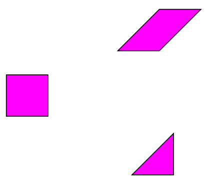
De quoi s'agit-il? Les élèves découpent un carré en deux selon une diagonale et recouvrent exactement un parallélogramme avec les deux morceaux obtenus. Ils font de même pour recouvrir exactement un triangle.

Enjeux Différencier la forme et la grandeur d'une figure ;
renforcer la conservation d'une grandeur, en l'occurrence l'aire ;
additionner deux grandeurs de même nature ;
rencontrer le fractionnement d'une grandeur ;
rencontrer la composée de deux fractionnements.

Compétences *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées.*

Fiche 2.8

Découpe le carré en deux pour pouvoir recouvrir exactement le parallélogramme avec les deux morceaux.
Fais de même pour recouvrir exactement le triangle.

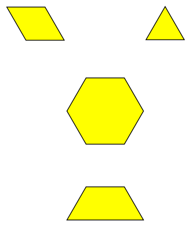


3.3 Découper des figures

De quoi s'agit-il?	Les élèves découpent un hexagone pour obtenir un trapèze, un losange et un triangle.
Enjeux	Différencier la forme et la grandeur d'une figure ; renforcer la conservation d'une grandeur, en l'occurrence l'aire ; additionner deux grandeurs de même nature ; rencontrer le fractionnement d'une grandeur ; rencontrer la composée de deux fractionnements.
Compétences	*Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté [. . .]. Additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées.*

Fiche 2.9

Découpe l'hexagone pour obtenir un trapèze, un losange et un triangle.



D'autres activités de comparaison de figures géométriques peuvent également être envisagées, comme celles décrites dans la brochure [11], [Crem, 2003], pages 140 à 150.

4 Entraînement de la démarche géométrique

Cette activité a pour objet d'utiliser dans une autre situation ce qui vient d'être mis à jour dans les activités de décomplexification ci-dessus. Il s'agit bien d'une activité d'entraînement à proposer aux élèves soit avant de réinvestir la situation-problème de départ, soit après pour renforcer la démarche.

Les activités des fiches 2.4 et 2.5 peuvent également être utilisées à ce stade comme activités d'entraînement pour les élèves n'ayant pas encore suffisamment fixé la démarche.

De quoi s'agit-il?	Les élèves comparent des figures pour déterminer celles qui ont et celles qui n'ont pas même aire. Pour y parvenir, ils décomposent les figures en triangles ou en figures composées de triangles.
Enjeux	Décomposer une figures en triangles ou en figures composées de triangles ; construire le concept d'unité de mesure commune.

Compétences *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...] aires, [...]). Fractionner des objets en vue de les comparer.*

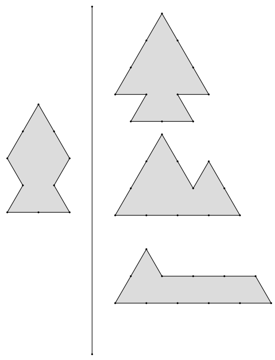
De quoi a-t-on besoin? Les fiches 2.10 et 2.11.

Comment s'y prendre? L'enseignant distribue la fiche 2.10 aux élèves.

Fiche 2.10

Voici quatre dessins. Parmi les trois dessins de droite, retrouve celui qui a été réalisé à partir du dessin de gauche, par découpage puis assemblage de pièces.

Utilise Apprenti Géomètre pour t'aider si nécessaire.



En s'aidant des points situés sur le pourtour de chaque figure, les élèves peuvent s'essayer à la décomposition en triangles. Cependant, tous les points permettant ce tracé ne sont pas présents sur les figures. Nous pensons notamment aux points situés à l'intérieur des figures que les élèves doivent imaginer.

Le logiciel *Apprenti Géomètre* ne sera utilisé que par les élèves ne pouvant percevoir les découpes utiles. En effet, la superposition de la figure de gauche à une des figures de droites peut mettre en évidence certaines découpes comme le montre la figure 7.36. Une autre démarche est de superposer la figure de gauche à celle du milieu à droite, puis de découper le trapèze qui dépasse en dessous. Enfin, il faut superposer les deux morceaux ainsi obtenus à cette figure de droite, on obtient le dessin du milieu de la figure 7.37 et on constate une différence au niveau des aires.

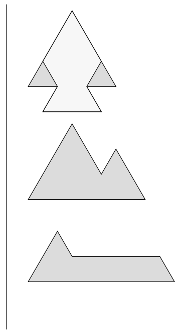


Fig. 7.36

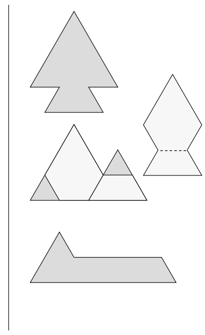


Fig. 7.37

À nouveau, le logiciel est utilisé pour permettre aux élèves d'analyser les mouvements et les tracés qu'ils pouront ensuite reproduire sur un support papier. Ces processus de mémorisation et de transfert d'images mentales n'apparaîtraient probablement pas si les élèves employaient directement des figures en carton à contourner (figures 7.38 et 7.39). En effet dans ce cas, les traits sont directement dessinées sur la fiche de travail et aucun travail de mémorisation ou de réflexion n'est effectué par l'élève.

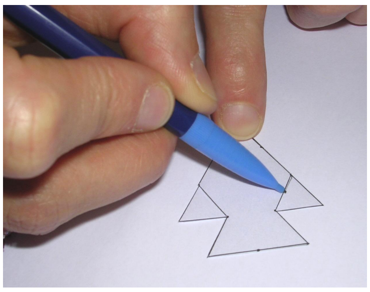


Fig. 7.38

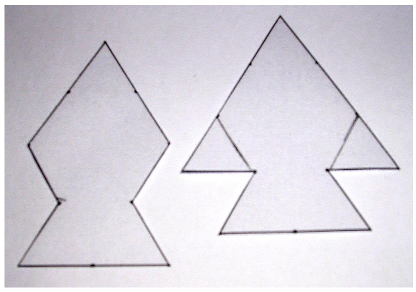


Fig. 7.39

Échos des classes

À partir du contexte papier, seuls 2 élèves sur 29 ont éprouvé quelques difficultés pour reconnaître les tracés à effectuer à l'intérieur des figures (figures 7.40 et 7.41). Un travail avec *Apprenti Géomètre* a permis de mettre en évidence les superpositions et découpages possibles. Ce travail a par la suite été réalisé sur la fiche en papier.

D'autres, 3 élèves sur 29, ont décomposé la figure de gauche en un triangle et trois trapèzes qu'ils ont reportés sur les figures de droite. Ils ont utilisé de la sorte une démarche similaire à celle employée dans la situation initiale de la tête de chat et du bonhomme (figure 7.42).

Les 24 autres élèves ont utilisé la démarche de l'unité de mesure commune et ont compté le nombre de triangles équilatéraux contenus dans chacune des figures. La comparaison de ces nombres a permis de déterminer quelle était la figure de droite de même aire que la figure de gauche (figure 7.43).

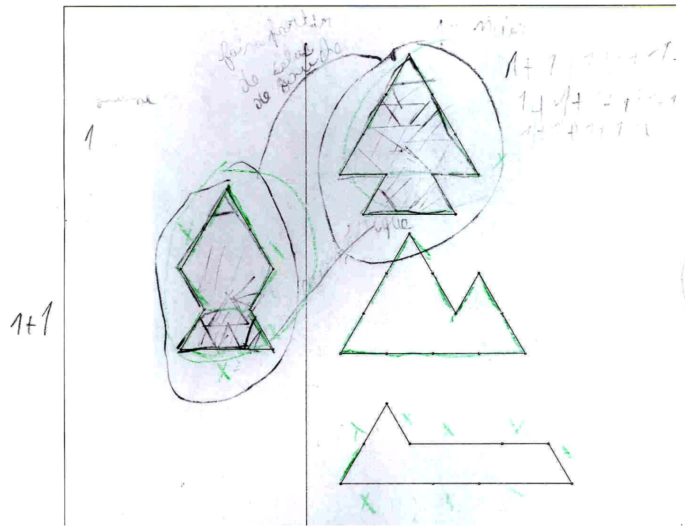


Fig. 7.40

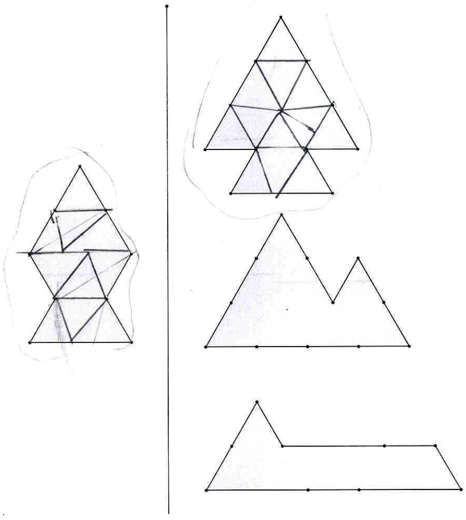


Fig. 7.41

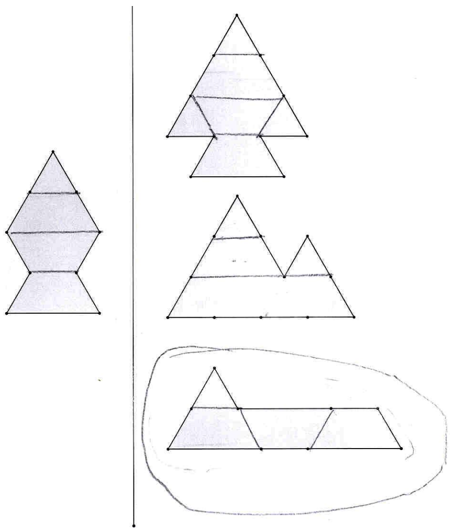


Fig. 7.42

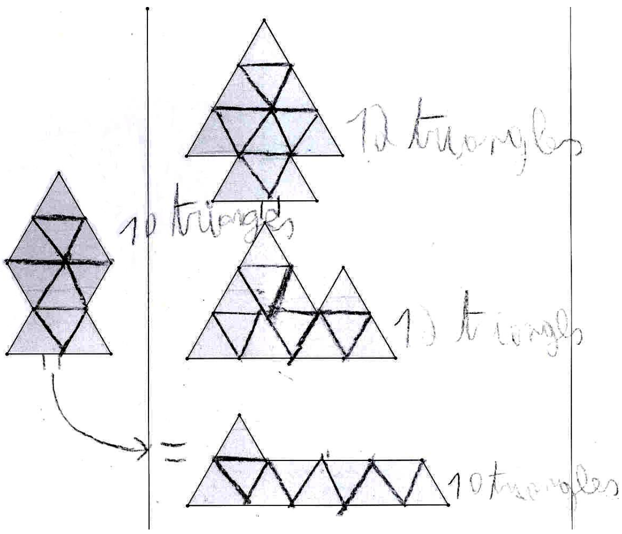


Fig. 7.43

5 La démarche numérique dans un autre contexte

Au cours de la résolution de la situation-problème de départ, deux démarches principales ont été utilisées — l'une géométrique utilisée par une majorité, l'autre numérique esquissée par quelques élèves — et la mise en commun a permis de les exposer à tous les élèves. La démarche numérique est par ailleurs celle qui va permettre d'ancrer nombre d'apprentissages concernant les fractions. C'est donc cette démarche qui va surtout être l'objectif à atteindre par tous les élèves.

L'activité qui suit, ainsi que les activités d'entraînement de la section 6, visera donc la structuration et l'apprentissage de la démarche d'appariement numérique, et plus particulièrement, la recherche d'une unité de mesure commune dans un autre contexte que le contexte géométrique.

De quoi s'agit-il? Les élèves comparent le contenu deux cartables pour déterminer lequel est le plus lourd.

Analyse a priori Plusieurs chemins numériques peuvent être utilisés pour arriver à une solution. Ceux-ci sont comparables à la résolution géométrique. Nous en exposons deux.

– Une première démarche consiste à percevoir l'unité de mesure commune — en l'occurence le poids d'un cahier — et de « transformer » tous les poids (ou masse) en unité « cahier ». Ce qui se traduit par :

Dans son cartable, Simon a mis...	Dans son cartable, Mélanie a mis...
2 fardes, soit 6 cahiers,	3 fardes, soit 9 cahiers,
3 cahiers	7 cahiers,
5 livres, soit 10 cahiers	1 livre, soit 2 cahiers,
Pour un total de 19 cahiers.	Pour un total de 18 cahiers.

La solution apparaît alors par la simple comparaison de deux nombres.

– Une deuxième démarche consiste d'abord à ôter de la situation tous les éléments communs, comme ci-dessous.

Dans son cartable, Simon a mis...	Dans son cartable, Mélanie a mis...
~~2 fardes~~	~~3 fardes~~ 1 farde
~~3 cahiers~~	~~7 cahiers~~ 4 cahiers
~~5 livres~~ 4 livres	~~1 livre~~

Ensuite, il faut utiliser l'unité de mesure commune pour pouvoir comparer ce qui reste à chacun des élèves.

Enjeux Construire le concept d'unité de mesure commune ;

transférer ce concept dans un nouveau contexte, en l'occurrence les poids.

Compétences *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...] aires, [...]). Fractionner des objets en vue de les comparer.*

De quoi a-t-on besoin? La fiche 2.12 ; des crayons.

Comment s'y prendre? L'enseignant distribue les fiches aux élèves qui lisent la consigne et résolvent la situation individuellement. La consigne est explicitée si une majorité d'élèves ne la comprennent pas. Dans les autres cas, l'enseignant répond individuellement aux élèves.

Fiche 2.12

Simon et Mélanie ont tous les deux acheté le même cartable. Après l'avoir rempli de leurs fardes, livres et cahiers, ils comparent leur poids. Simon prétend que son cartable est plus lourd que celui de Mélanie.
A-t-il raison ?
Explique comment tu as fait.

Le cartable de Simon	Le cartable de Mélanie
	
Dans son cartable, Simon a mis...	Dans son cartable, Mélanie a mis...
2 fardes 3 cahiers 5 livres	3 fardes 7 cahiers 1 livre

Le poids d'une farde = le poids de 3 cahiers
Le poids d'un livre = le poids de 2 cahiers

Dans cette situation, aucune superposition n'est possible. Il s'agit donc pour les élèves d'employer la démarche d'appariement sur des objets non manipulables physiquement. Notons que, si nécessaire, des objets en plasticine représentant les fardes, livres et cahiers peuvent être réalisés et utilisés par les élèves. Il faut cependant que les rapports des poids entre ces objets soient respectés. L'utilisation d'une balance à plateau peut alors fournir la solution. Cependant l'explication reste toujours à formuler. Les appariements d'objets ou de groupes d'objets peuvent également être facilités grâce à l'emploi de la balance.

Si nécessaire, l'enseignant peut interrompre l'activité afin de mettre en évidence les aspects communs entre cette situation et la situation géométrique initiale — tête de chat et bonhomme —. Ceci devrait permettre aux élèves en difficulté de percevoir la démarche d'appariement à transférer.

Échos des classes

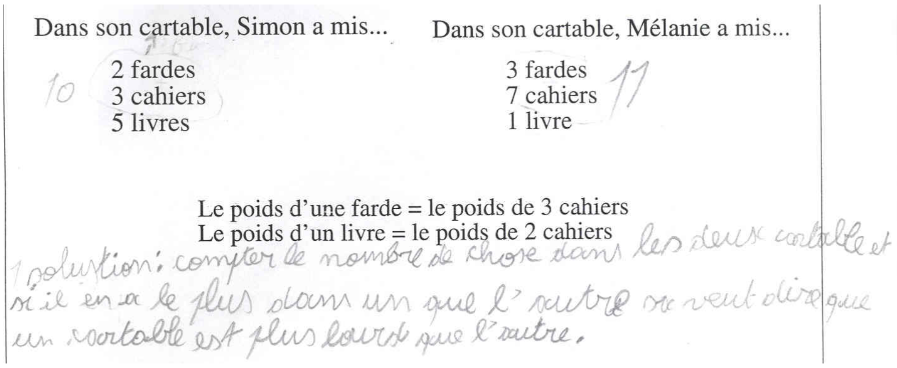
Comme pour la situation initiale, quelques élèves comptent le nombre d'éléments dans chaque ensemble — cartable — et comparent ces nombres (figure 7.44). Ces mêmes élèves n'utilisaient cependant plus cette démarche dans le contexte géométrique. Il semble que nous puissions émettre les hypothèses suivantes pour expliquer ce constat, sans prétendre l'exhaustivité de celles-ci :

- la démarche d'appariement n'est pas suffisamment ancrée pour qu'elle puisse être transférée à un nouveau contexte ;
- la similitude de structure entre les deux situations n'apparaît pas aux élèves et donc il s'agit pour eux d'une nouvelle situation dans laquelle ils investissent des procédures qui répondent au besoin de fournir une

réponse.

D'autres élèves, dont Simon, utilisent systématiquement la démarche de l'unité de mesure commune (figure 7.45).

D'autres élèves encore emploient une démarche mixte. D'abord ils éliminent des éléments de part et d'autre par appariement. Ensuite, ils comparent ce qui reste en utilisant l'unité de commune mesure (figures 7.46 et 7.47).


Dans son cartable, Simon a mis...

10
2 fardes
3 cahiers
5 livres

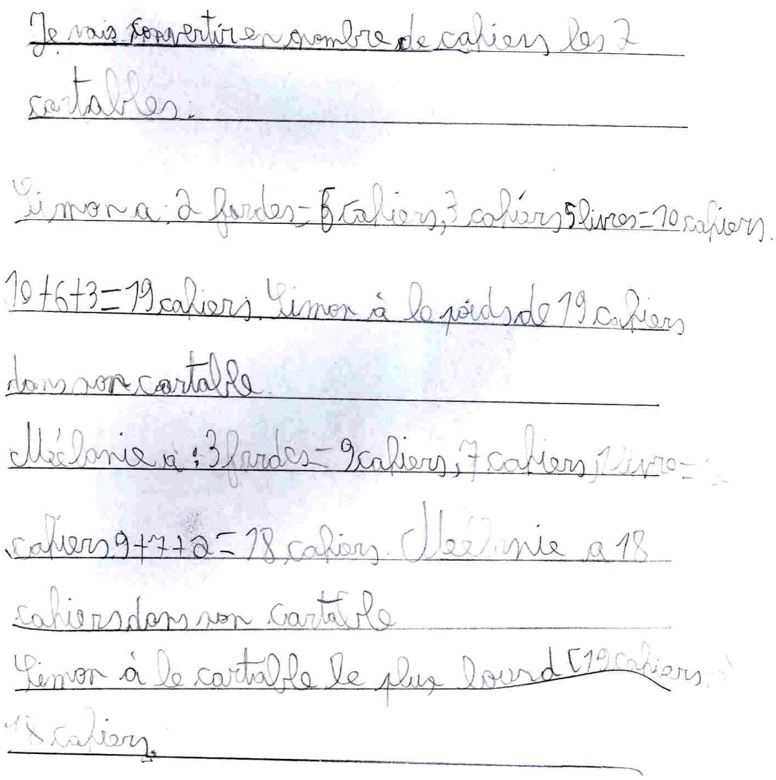
Dans son cartable, Mélanie a mis...

3 fardes
7 cahiers
1 livre
11

Le poids d'une farde = le poids de 3 cahiers
Le poids d'un livre = le poids de 2 cahiers

1 solution: compter le nombre de chose dans les deux cartable et si il en a le plus dans un que l'autre ça veut dire que un cartable est plus lourd que l'autre.

Fig. 7.44


Je vais convertir en nombre de cahiers les 2 cartables.

Simon a: 2 fardes = 6 cahiers, 3 cahiers, 5 livres = 10 cahiers.

10+6+3=19 cahiers. Simon à le poids de 19 cahiers dans son cartable

Mélanie à: 3 fardes = 9 cahiers, 7 cahiers, 1 livre = 2 cahiers 9+7+2=18 cahiers. Mélanie a 18 cahiers dans son cartable

Simon à le cartable le plus lourd [19 cahiers, 18 cahiers.

Fig. 7.45

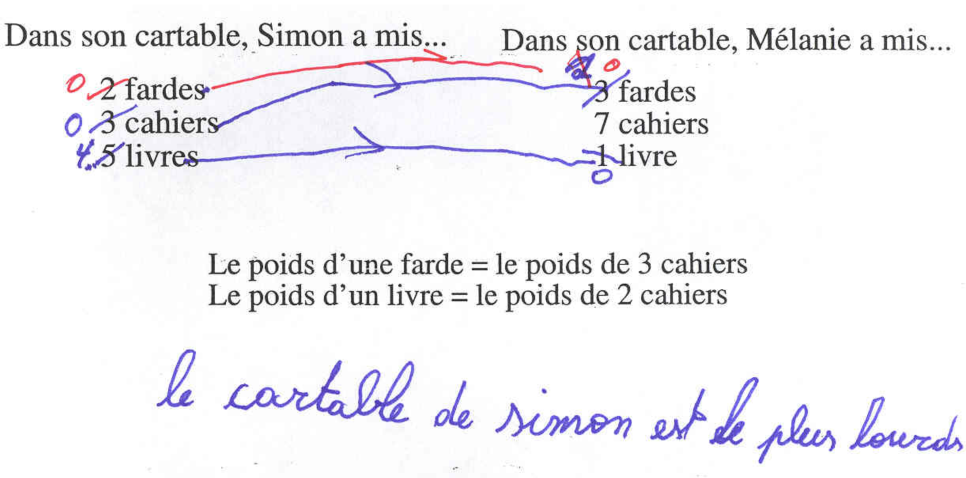


Fig. 7.46

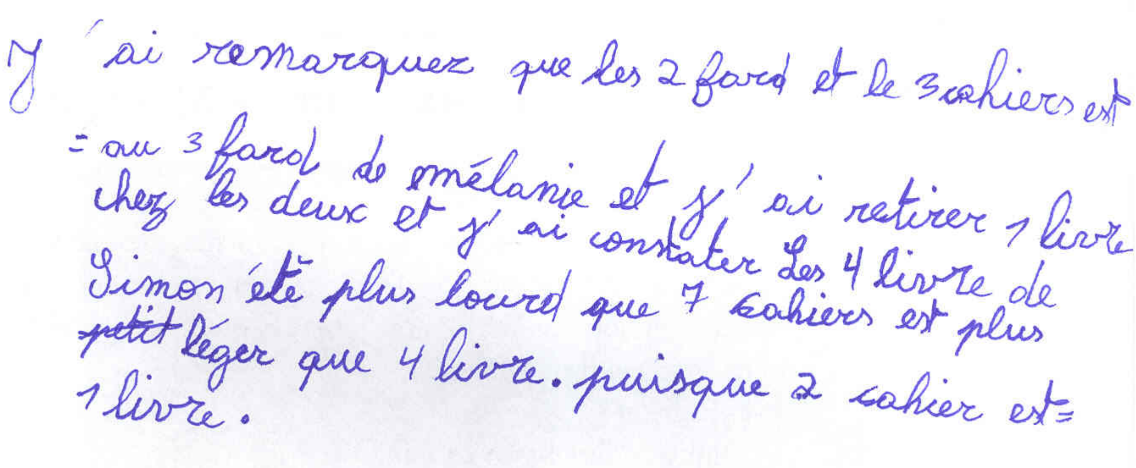


Fig. 7.47

6 Travail de groupe, activités d'entraînement

Après avoir travaillé l'unité de commune mesure de manière individuelle ou dans des groupes de niveaux, nous, la titulaire de la classe et l'équipe d'expérimentation, avons souhaité replacer cet apprentissage dans une perspective de classe. C'est la raison pour laquelle, pour les activités d'entraînement décrites ci-dessous, nous avons opté pour une collaboration entre des élèves ayant des difficultés ou des facilités différentes. L'objectif est que chaque élève participant au groupe puisse contribuer à la compréhension par chacun du concept d'unité de mesure commune et à la réalisation de la tâche proposée. La composition des groupes est donc préparée par l'enseignant au préalable.

Les activités qui suivent ont été préparées à l'initiative de la titulaire de la classe.

De quoi s'agit-il? Les élèves, par groupe de trois ou quatre, résolvent des problèmes de comparaison pour lesquels la recherche d'une unité de commune mesure est nécessaire.

Enjeux Construire le concept d'unité de mesure commune ;

transférer et utiliser des démarches d'appariement et de recherche d'unité de mesure commune.

Compétences *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...] aires, [...]). Fractionner des objets en vue de les comparer. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.*

De quoi a-t-on besoin? Les fiches 2.13 à 2.18.

Comment s'y prendre? Après constitution des groupes, l'enseignant distribue les fiches 2.13 et 2.18. Il énonce également les consignes générales qui devraient régir le travail au sein de chacun des groupes.

- Lecture individuelle préalable de l'énoncé avant toute discussion ;
- partage de la compréhension du problème, relecture et explication si nécessaire ;
- recherche individuelle de quelques minutes ;
- partage des démarches et réponses, confrontation et explication ;
- mise en commun et recherche d'une solution commune ;
- rédaction de la démarche et de la solution.

Fiche 2.13

Juliette et Lucie ont chacune rassemblé leurs économies dans leur porte-monnaie.

Celui de Juliette contient ...	Celui de Lucie contient ...
2 billets de 5 euros 1 billet de 10 euros 1 billet de 20 euros	

Lucie prétend avoir la même somme que Juliette. Combien de pièces de 2 euros, 20 et 50 centimes d'euros suffit-il de placer dans le porte-monnaie de Lucie pour qu'elle ait la même somme que Juliette ? Recherchez deux solutions possibles.

Fiche 2.14

Pour l'anniversaire de leur maman, Jules et Henry préparent chacun un apéritif.

Pour son apéritif, Henry a besoin de :
- 3 verres de jus d'orange,
- 5 cuillères à café de jus de citron,
- 3 cuillères à soupe de lait de coco.

Pour le sien, Jules a besoin de :
- 2 verres de jus de pamplemousse,
- 7 cuillères à café de coulis de fraise,
- 3 cuillères à soupe de jus d'orange.

Sachant que la contenance d'un verre est égale à 10 cuillères à café et que la contenance d'une cuillère à soupe est égale à 2 cuillères à café, peut-on dire qui, de Jules ou de Henry, a la plus grande quantité d'apéritif ?

Fiche 2.15

Pierre et Pol parcourent chacun une distance en effectuant des pas d'éléphants, des sauts de chat et des sauts de lapin.

Pierre fait...
- 3 pas d'éléphant,
- 4 sauts de chat,
- 10 sauts de lapin.

Pol fait...
- 6 pas d'éléphant,
- 2 sauts de chat,
- 5 sauts de lapin.

Sachant que 1 pas d'éléphant = 2 sauts de lapin,
et qu'un saut de lapin = 2 sauts de chat,

qui a réalisé le plus grand parcours ?

Fiche 2.16

Voici deux carafes identiques dans lesquelles on verse :

Dans la première :
- 75 cl de jus de citron,
- 2 dl de jus d'orange,
- 1 cl de grenadine.

Dans la deuxième :
- 60 cl de jus d'orange,
- 3 dl de jus d'ananas,
- 4cl de cassis.

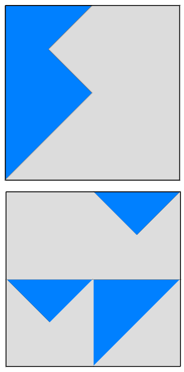
Vous devez savoir que : 1dl = 10 cl.

Laquelle de ces deux carafes est la plus remplie ?

Fiche 2.17

Voici deux carrés bleus identiques partiellement recouverts par des formes grises.

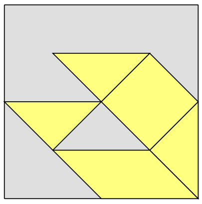
Lequel de ces deux carrés bleus est le plus recouvert de figures grises ?



Fiche 2.18

Voici un carré.

Quelle partie de ce carré les figures jaunes cachent-elles ?



7 Des opérations et des fractions

Les deux activités décrites ci-dessous constituent un ensemble permettant de rencontrer tant l'unité de mesure commune que les fractions équivalentes. L'intégration de ces deux notions est importante pour la compréhension et la réalisation des opérations sur les fractions.

Cependant, ces deux activités ne doivent pas nécessairement être réalisée durant une même période de cours de 50 minutes. Il se peut aussi que pour certains élèves, la première activité, qui constitue en quelque sorte une synthèse du travail effectué jusqu'alors, ne soit pas nécessaire ou soit effectuée rapidement. Dans ce cas, ces élèves peuvent entreprendre la seconde activité plus rapidement que les autres élèves.

De quoi s'agit-il? Les élèves recherchent l'opération à effectuer pour obtenir une figure plus petite à partir d'une figure considérée comme unité. Ils notent ensuite la fraction que cette figure plus petite représente par rapport à la figure unité.

Enjeux Construire le concept d'unité de mesure commune ;

construire le concept de fraction rapport ;

différencier la fraction opérateur de la fraction rapport ;

rencontrer la notion de fractions équivalentes à partir d'un support géométrique ;

construire les notions de numérateur et de dénominateur dans le cadre de fractions équivalentes.

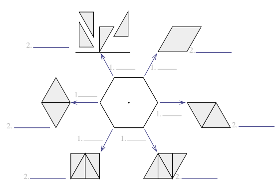
Compétences *Comparer des grandeurs de même nature et concevoir la grandeur comme une propriété de l'objet, la reconnaître et la nommer. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ([...] aires, [...]). Fractionner des objets en vue de les comparer. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.*

De quoi a-t-on besoin? La fiche 2.19 ; des crayons.

Comment s'y prendre? L'enseignant distribue la fiche 2.19 aux élèves. Ces derniers prennent connaissance de la consigne et s'engagent individuellement dans la tâche. La consigne n'est reprécisée par l'enseignant qu'en cas de demande formulée par un ou plusieurs élèves.

Fiche 2.19

1. Quelle opération réaliser à partir de l'hexagone pour obtenir une figure autour de l'hexagone ?
2. Que représente chaque figure autour de l'hexagone par rapport à l'hexagone ?



Une mise en commun permet de préciser les démarches et les réponses. L'équivalence des fractions est également mise en évidence à partir de l'égalité des aires des figures autour de l'hexagone. Une synthèse écrite reprenant tant les images géométriques que les notations fractionaires peut être réalisée.

Échos des classes

Cette activité pose peu de problèmes aux élèves, même pour ceux qui sont en difficulté. Il est cependant nécessaire d'expliciter quelque peu ce qui est attendu au niveau de la première question : « Quelle opération réaliser à partir de l'hexagone pour obtenir une figure autour de l'hexagone ? » Il s'agit effectivement de décrire soit à l'aide de mots (figure 7.48) soit à l'aide d'opérations arithmétiques (figure 7.49) ce qu'il faut réaliser comme opérations pour obtenir une figure plus petite que l'hexagone.

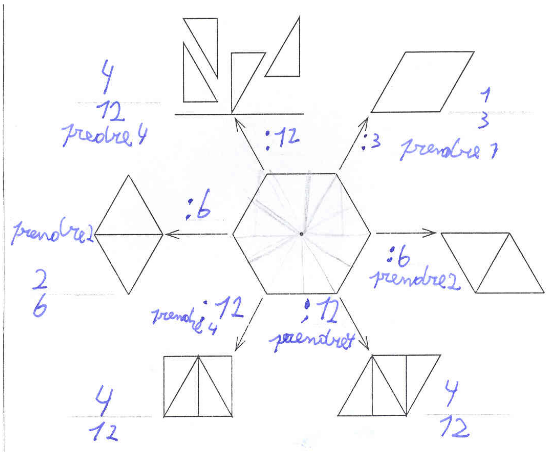


Fig. 7.48

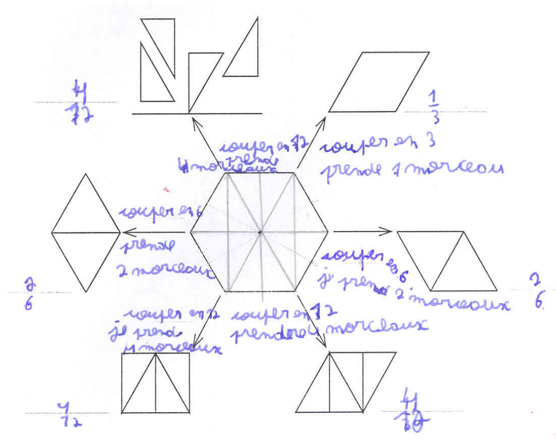


Fig. 7.49

La figure 7.50 expose une autre manière de décomposer l'hexagone pour obtenir des douzièmes. La figure 7.51 est la copie de la feuille de Simon. On peut y voir clairement la volonté d'être complet dans la réponse avec la présence d'astérisques qui renvoient à des notes de bas de page. Cette volonté d'exhaustivité explique en partie le fait que Simon n'est pas un des premiers élèves à rendre sa copie. Bien qu'enfant à haut potentiel, il n'est pas nécessairement l'enfant le plus rapide de la classe.

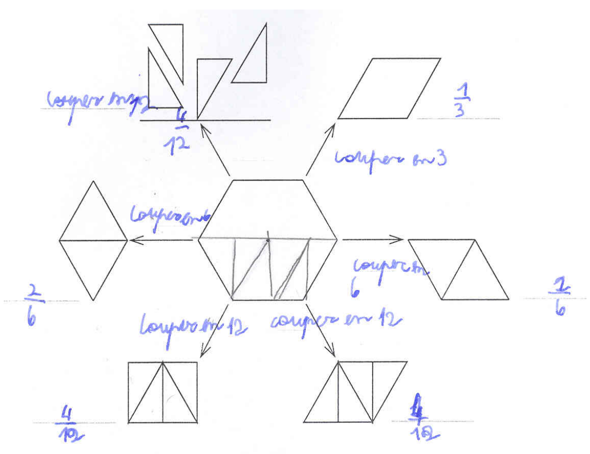


Fig. 7.50

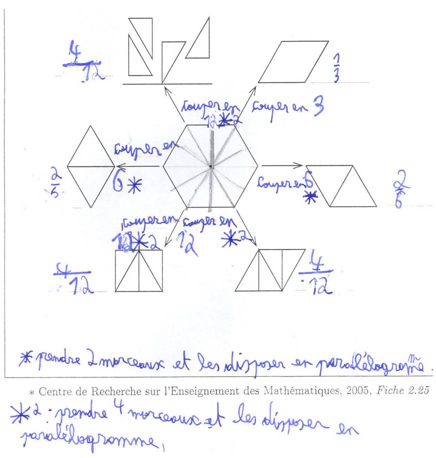


Fig. 7.51

La deuxième activité nécessite l'emploi d'*Apprenti Géomètre*.

De quoi s'agit-il? Les élèves dessinent deux assemblages de figures. Le deuxième sera une fraction du premier.

Enjeux Construire le concept d'unité de mesure commune ;
construire le concept de fraction rapport ;
différencier la fraction opérateur de la fraction rapport.

Compétences *Déterminer le rapport entre deux grandeurs.*

De quoi a-t-on besoin? La fiche 2.20 ; des crayons.

Comment s'y prendre? L'enseignant distribue la fiche 2.20 aux élèves qui prennent connaissance de la consigne. Celle-ci n'est pas systématiquement répétée ni expliquée.

> Fiche 2.20
> Construis deux assemblages de figures. Le deuxième sera une fraction du premier, à savoir $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ ou ...).
> Quand tu as terminé, imprime ton dessin et colle-le ci-dessous. Au dos de cette fiche, explique à l'aide de dessins, de phrases, de flèches... pourquoi ton deuxième dessin est la moitié, le tiers... du premier.

Les élèves s'engagent dans la tâche. Le choix du *kit* dans lequel ils vont travailler leur est laissé. Le *kit standard* offre assurément des familles de figures dans lesquelles ces figures ont entre elles des rapports simples. Par contre, le choix du *kit libre* impose la construction de ces rapports par découpage (figure 7.52) ou duplication (figure 7.53) d'une figure de base.

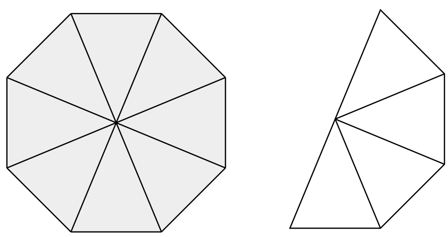


Fig. 7.52

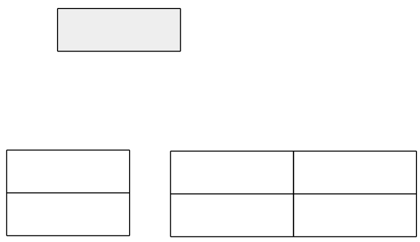


Fig. 7.53

Les élèves impriment leurs réalisations et les collent sur leur fiche. Ils décrivent ensuite leur travail, expriment le rapport entre les deux figures et justifient celui-ci.

Échos des classes En début d'activité, durant les premiers moments de discussion, Simon, l'enfant à haut potentiel, a formulé une question quant aux possibles liens avec la théorie du chaos et celle des fractales. Nous pensons que cette question traduit surtout les intérêts actuels de lecture de Simon, plutôt qu'une réelle volonté de trouver des liens entre l'activité présente et ces deux théories.
Cependant, nous avons choisi de suivre Simon sur l'idée des fractales. Le travail proposé à Simon a été de dessiner des fractales à partir d'un

triangle équilatéral et de rechercher le rapport existant entre une représentation de fractale et la suivante. Ce problème fait largement intervenir l'unité de mesure commune et les fractions.

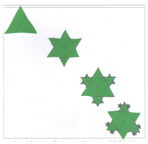


Fig. 7.54

Considérons les deux premiers dessins ; si l'on utilise le premier comme unité, le deuxième est plus grand. En utilisant une unité de mesure commune triangulaire comme le montre la troisième figure, Simon exprime le rapport entre les deux premiers dessins comme étant égal à $\frac{12}{9}$.

8 Conclusion

Comme nous l'avons annoncé dans les rapports précédents[8], *Apprenti Géomètre* n'a pas été conçu comme une panacée pour l'enseignement des mathématiques. Les expérimentations menées dans le cadre de cette recherche confirment ceci.

Parmi les avantages de l'outil informatique, il faut d'abord retenir qu'il permet de passer rapidement d'un fichier de travail à un autre ; soit pour résoudre une situation moins complexe et ensuite revenir à la situation-problème, soit pour complexifier rapidement une situation trop simple. Ceci est particulièrement intéressant dans le cadre d'une pédagogie différenciée. De plus, ces fichiers sont rapidement accessibles et peuvent être sauvegardés pour constituer une base de travail future pour d'autres élèves. Ces fichiers peuvent aussi être enregistrés dans un dossier au nom de l'élève afin qu'il puisse y avoir recours à nouveau en cas de problème. Cet avantage a été exploité dans les premières activités et plus particulièrement dans l'activité *Des puzzles*.

Apprenti Géomètre constitue aussi un champ d'expérimentation permettant de laisser à l'élève le choix des objets de l'activité proposée. En particulier, l'activité *Des fractions sous forme d'assemblage* présente cet avantage.

Cependant, des manipulations de figures en carton et des tracés à la règle ou à main levée restent tout aussi importantes, car l'apprentissage est d'autant plus fructueux qu'il met en relation des contextes différents. Lors de ces activités, des transferts sont effectués par les élèves. Ceux-ci en prennent conscience lors de séances de mise en commun, de narration de recherche ou d'analyse réflexive.

C'est ainsi qu'à plusieurs reprises, nous avons alterné des activités avec le logiciel et des activités sur papier. Ces deux contextes complémentaires n'exposent pas les élèves aux mêmes difficultés. C'est de leur complémentarité que nous avons essayé d'abuser dans les activités mises en place.

Il faut préciser ici que les activités mises en place, aussi ciblées soient-elles, n'auraient pu être aussi efficaces sans les questionnements réguliers des élèves de la part de l'enseignant

[8] [11] et [12].

au sujet des démarches employées et de leur confiance en leurs réponses, ... Il nous semble que la pratique d'une pédagogie différenciée est surtout basée sur une attitude d'enseignant. Qu'ils soient traditionnels ou informatisés, les outils ne détermnent aucune pédagogie particulière, c'est l'usage que l'on en fait qui en favorise une ou une autre.

Chapitre 8

Vers la multiplication des fractions

Préambule

Les activités menées dans le cadre de ce chapitre ont pour but d'initier les élèves de 10 à 12 ans à la multiplication des fractions. Dans ce cadre, ils sont amenés à composer des fractionnements successifs d'une même forme dont la complexité peut varier d'un élève à l'autre. Ces fractionnements sont aussi effectués sur des ensembles d'objets, ce qui permet de lier les fractions opérateurs et les fractions nombres. La commutativité de la multiplication des fractions est également abordée en partageant une même forme de différentes façons.

La séquence comporte trois activités. La première est un prétest, destiné à évaluer la situation de départ et détecter les principales difficultés des élèves. La seconde, intitulée ci-dessous « Différentes représentations d'un même partage » met en scène des compositions de fractionnement aboutissant au même résultat. Dans la troisième, « Vers une expression numérique », nous introduisons la multiplication des fractions.

Durant ces activités, les élèves seront amenés à rédiger des narrations de recherche au cours desquelles ils expliqueront leurs méthodes de travail. Dans un souci de varier les représentations, ils complèteront aussi des arbres représentant les fractionnements successifs d'une même figure. Enfin, la rédaction d'une synthèse sous forme de tableau permettra d'avancer un peu plus encore vers les opérations multiplicatives.

1 Prétest

De quoi s'agit-il?

Lors du prétest, les élèves effectuent des partages successifs de formes ou d'ensembles d'objets. Ils expliquent la démarche de résolution qu'ils ont utilisée. Ils multiplient également des fractions. L'analyse des réponses fournies permettra à l'enseignant de déterminer les préacquis des élèves concernant la composition de deux fractionnements.

De quoi a-t-on besoin?

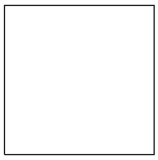
Fiches 3.1 et 3.2 ; de quoi écrire.

Comment s'y prendre?

L'enseignant distribue les fiches 3.1 et 3.2. Avant de commencer, il explique aux élèves la fonctionnalité de ce test afin d'éviter que certains ne le considèrent comme un contrôle et soient stressés s'ils ne peuvent pas répondre à certains exercices. Les élèves résolvent ensuite les exercices individuellement.

Fiche 3.1

Coupe le carré en quatre parties égales. Colorie la moitié d'une des parties obtenues.



Quelle fraction du carré de départ as-tu coloriée? ____

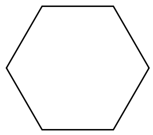
Prendre un tiers d'une demi-tarte, c'est prendre ____________ de la tarte.
Prendre un quart d'une demi-tarte, c'est prendre ____________ de la tarte.
Prendre un tiers d'un quart de tarte, c'est prendre ____________ de la tarte.

On partage 24 cartes Yu-Gi-Oh entre quatre groupes d'enfants. Dans chaque groupe, il y a trois enfants. Combien de cartes recevra chacun d'eux? Quelle partie des 24 cartes cela représente-t-il?

____
____
____
____
____

Fiche 3.2

Colorie un douzième de l'hexagone

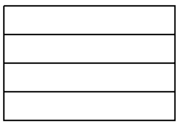


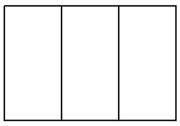
Explique ta façon de procéder.

Effectue les opérations suivantes.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \ldots$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \ldots$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \ldots$
$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \ldots$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \ldots$	$\frac{5}{8} = \frac{1}{8} \times \ldots$

Voici deux rectangles de mêmes dimensions.





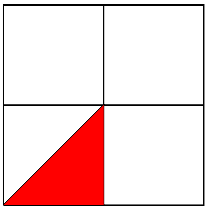
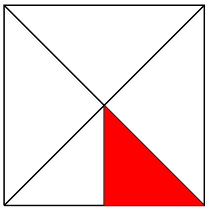
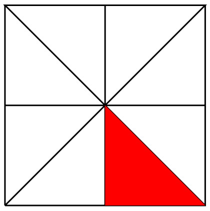
A quelle fraction du rectangle de gauche correspond la plus petite partie obtenue quand je lui superpose exactement le rectangle de droite? Explique.

La correction de ce prétest permet à l'enseignant de vérifier la maîtrise qu'a chaque élève des compositions de fractionnements ; ceci facilitera la différenciation des apprentissages lors des activités proprement dites.

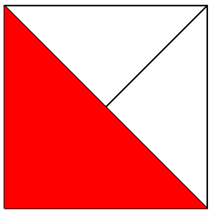
Analyse a priori

Nous avons tenté de dresser une liste des principales réponses qu'il est plausible de rencontrer pour les différents items. Suivant les réponses fournies à ces exercices, des ajustements doivent être envisagés pendant les activités.

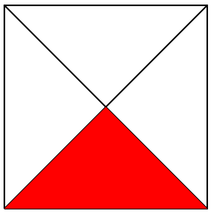
– Au premier item, les élèves pourraient fournir la réponse correcte de plusieurs manières. En voici trois.

Ils pourraient aussi couper correctement en quatre, mais colorier la moitié du carré.



Ils pourraient couper en quatre et colorier un quart.



En ce qui concerne la fraction coloriée, ils pourraient donner la solution correcte $\frac{1}{8}$, mais aussi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ ou encore $\frac{2}{8}$.

– Au deuxième item, les solutions correctes pourraient être fournies soit littéralement (un sixième, un huitième et un douzième), soit sous forme de fractions.

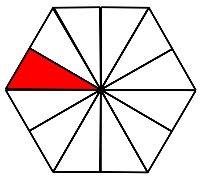
Mais les élèves pourraient aussi additionner les dénominateurs et répondre un cinquième, un sixième et un septième.

Certains pourraient également obtenir trois demis, quatre demis et trois quarts en « plaçant » les tiers sur les demis, les quarts sur les demis et les tiers sur les quarts.

– Au troisième item, les élèves qui fourniraient la réponse correcte effectueraient les opérations 24 : 4 = 6, puis 6 : 3 = 2 et indiqueraient enfin que 2 est le douzième de 24.

D'autres élèves pourraient mal effectuer leurs divisions ; ne pas tenir compte du mot partie et, de ce fait, partager 24 en 2 et répondre 12 ou encore se tromper dans la fraction.

– Au quatrième item, les réponses correctes comporteraient le dessin de l'hexagone partagé en douze parties égales dont une est coloriée.



Les justifications des élèves indiqueraient les différentes étapes de découpe qu'ils auraient utilisées ; par exemple, couper en deux puis en six ou l'inverse.

Comme réponse erronée, les élèves pourraient se tromper en coupant l'hexagone, mais aussi lors de la justification qui pourrait manquer de précision : « J'ai coupé en douze et j'ai colorié une partie » ou être tout à fait fausses : « J'ai coupé en six, puis encore en six ».

– Au cinquième item, les cinq premières solutions correctes devraient être fournies sous forme de fractions (respectivement $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{32}$), la dernière par un nombre entier, 5.

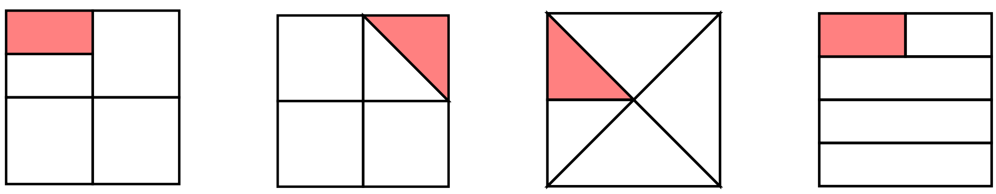
  Mais certains élèves pourraient additionner les numérateurs et les dénominateurs, plutôt que de les multiplier. D'autres pourraient mal effectuer les multiplications. Dans les cas où l'opération est demandée en sens inverse ($\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \ldots$ ou $\frac{5}{8} = \frac{1}{8} \times \ldots$), certains élèves pourraient ne pas tenir compte de la place des signes et donc multiplier les deux fractions (et obtenir $\frac{1}{12}$ et $\frac{5}{64}$).

– Au sixième item, la réponse correcte donnerait la fraction $\frac{1}{12}$. Une justification indiquant la démarche utilisée et le résultat obtenu serait par exemple : en dessinant les « lignes » du rectangle de droite sur le rectangle de gauche, on obtient 12 parties égales, donc des douzièmes. Des erreurs possibles pourraient survenir dans la fraction trouvée ou également lors des explications des élèves. Ainsi, certains élèves pourraient mal effectuer la superposition et trouver d'autres réponses tandis que d'autres pourraient ne pas du tout répondre à la question posée.

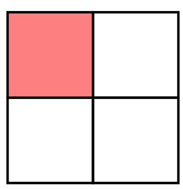
Échos des classes

Le prétest s'est déroulé dans une classe de cinquième primaire composée de 25 élèves, dont un est détecté comme étant à haut potentiel. Il couvrait une période de cinquante minutes. Nous présentons ci-dessous le détail des réponses fournies par les élèves de cette classe.

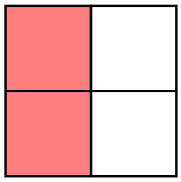
– Au premier item, 18 élèves ont fourni un dessin correct. Les bonnes représentations obtenues sont les suivantes.



  Les 7 autres élèves ont fourni des dessins incorrects. Ils ont tous partagé le carré en quatre ; mais, parmi eux, 5 ont colorié un quart du carré de départ,



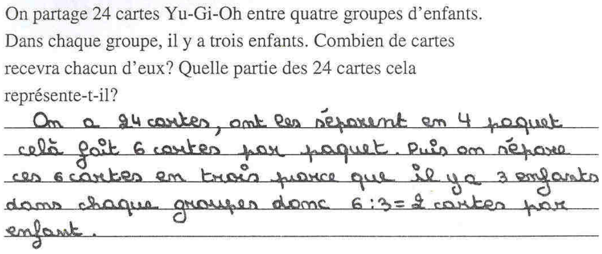
  tandis que les deux derniers ont colorié une moitié de ce carré.



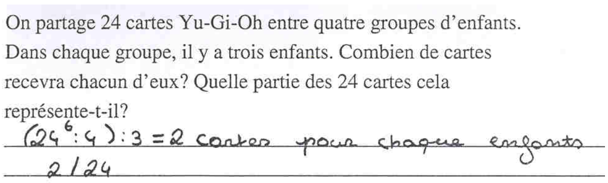
Ces erreurs semblent provenir d'une mauvaise lecture ou d'une mauvaise compréhension de l'énoncé du problème.
En ce qui concerne la fraction à fournir, 7 élèves ont bien indiqué $\frac{1}{8}$, mais 16 ont donné une réponse erronée, dont douze fois $\frac{1}{4}$, deux fois $\frac{1}{2}$, une fois $\frac{2}{4}$ et une fois $\frac{4}{4}$. Enfin, deux élèves n'ont pas répondu à la question.
Il semble donc difficile pour la plupart des élèves de cette classe d'établir un rapport entre la partie coloriée et la fraction qui lui correspond.

– Au deuxième item, 11 élèves ont fourni les trois réponses correctes, à savoir un sixième, un huitième et un douzième. Neuf d'entre eux ont présenté ces réponses sous forme de fractions et les deux autres ont utilisé une expression verbale.
Un élève a donné deux bonnes réponses et a effectué une erreur de calcul à la troisième en donnant un dixième comme solution lorsqu'on prend le tiers d'un quart de tarte.
Les 14 autres élèves n'ont fourni aucune réponse correcte.
  – Trois n'ont répondu à aucune des trois demandes.
  – Six ont donné $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ comme réponses en ne tenant pas compte de la demi-tarte pour les deux premières demandes et en plaçant un 3 au numérateur pour représenter le tiers à la troisième.
  – Trois ont répondu en indiquant un nombre de parts correspondant à la première partie de la demande (respectivement trois, quatre et trois parts) et en ne tenant pas compte de la demi ou du quart de tarte.
  – Un élève a bien calculé le dénominateur à indiquer, mais a utilisé les demi et quart de tarte pour trouver le numérateur et a donc fourni les réponses $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$ et $\frac{4}{12}$.
  – Un dernier a utilisé la première partie des demandes comme numérateurs et la seconde comme dénominateurs en donnant $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$ et $\frac{3}{4}$ comme réponses.
– Au troisième item, 18 élèves sur les 25 ont bien répondu à la première question en donnant 2 cartes comme réponse ; 5 se sont trompés et deux n'y ont pas répondu.
Parmi ceux qui ont fourni une mauvaise réponse, trois n'ont pas tenu compte du nombre d'enfants par groupe et ont donc partagé 24 en 4 pour obtenir 6 cartes.
Un autre n'a pas tenu compte du nombre de groupes et a divisé les 24 cartes en 3 (nombre d'enfants de chaque groupe) pour obtenir 8 cartes comme réponse.
Le dernier a fait une erreur de calcul en obtenant 3 lorsqu'il divise 6

par 3. Seize des dix-sept élèves ayant fourni une réponse correcte ont en outre bien détaillé leur façon de procéder comme l'attestent les deux exemples repris ci-dessous.


On partage 24 cartes Yu-Gi-Oh entre quatre groupes d'enfants. Dans chaque groupe, il y a trois enfants. Combien de cartes recevra chacun d'eux? Quelle partie des 24 cartes cela représente-t-il?

On a 24 cartes, ont les séparent en 4 paquet celà fait 6 cartes par paquet. Puis on sépare ces 6 cartes en trois parce que il y a 3 enfants dans chaque groupes donc 6:3=2 cartes par enfant.

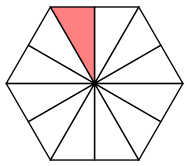

On partage 24 cartes Yu-Gi-Oh entre quatre groupes d'enfants. Dans chaque groupe, il y a trois enfants. Combien de cartes recevra chacun d'eux? Quelle partie des 24 cartes cela représente-t-il?

$(24^{6}:4):3 = 2$ cartes pour chaque enfants

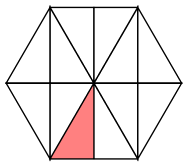
2/24

Seulement huit élèves ont répondu à la seconde question. Ces réponses étaient toutes correctes. Cinq donnaient $\frac{1}{12}$ et trois $\frac{2}{24}$. Le peu de réponses fournies pourrait provenir d'une méconnaissance de la réponse, mais il semble plus probable qu'il résulte d'une lecture incomplète de l'énoncé comme cela arrive régulièrement chez des élèves de cet âge.

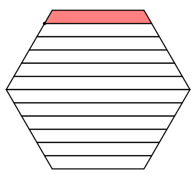
– Au quatrième item, 24 élèves ont réalisé un dessin correct de l'hexagone partagé en douze parties égales. 23 ont donné la représentation attendue, à savoir



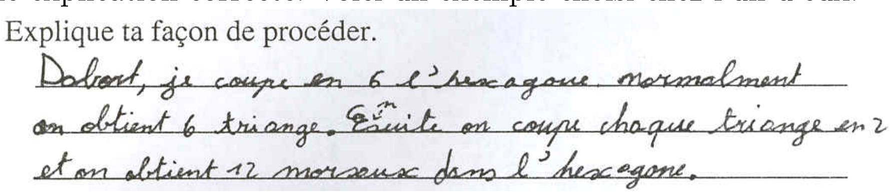
tandis que le dernier fournissait le dessin suivant.



L'élève qui s'est trompé a partagé « la hauteur » de l'hexagone en douze comme ci-dessous.

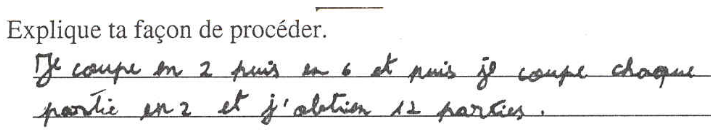


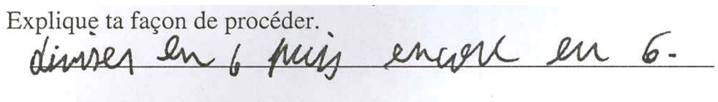
En ce qui concerne l'explication du procédé, seuls 4 élèves ont fourni une explication correcte. Voici un exemple choisi chez l'un d'eux.

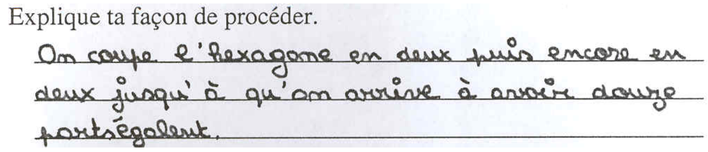

Explique ta façon de procéder.

Dabort, je coupe en 6 l'hexagone normalment on obtient 6 triange. Ensuite on coupe chaque triange en 2 et on obtient 12 morseaux dans l'hexagone.

Deux n'ont pas donné d'explication tandis que 19 fournissaient une explication erronée. Voici quelques exemples choisis parmi ces explications.


Explique ta façon de procéder.
Je coupe en 2 puis en 6 et puis je coupe chaque partie en 2 et j'obtien 12 parties.


Explique ta façon de procéder.
divser en 6 puis encore en 6.


Explique ta façon de procéder.
On coupe l'hexagone en deux puis encore en deux jusqu'à qu'on arrive à avoir douze partségalent.

Comme nous pouvons le constater, ces erreurs semblent principalement concerner la composition de fractionnements. Les élèves éprouvent de fortes difficultés à bien expliquer ce phénomène et s'attachent plus au nombre de lignes qu'ils tracent sur le dessin qu'au partage qu'ils effectuent, ce qui les induit en erreur.

- Au cinquième item, 8 élèves ont fourni six réponses correctes. 3 élèves en ont donné cinq, leur erreur se situant lorsque le signe égal n'est pas placé en fin d'opération. 6 élèves ont donné quatre bonnes réponses. Pour cinq d'entre eux, les erreurs sont également dues à la place du signe égal tandis que le dernier a soustrait les numérateurs et les dénominateurs lors des deux dernières opérations. Un élève a fourni trois réponses correctes. Dans ses réponses erronées, il a additionné les numérateurs des fractions. Un autre élève a donné une seule bonne réponse et a additionné les dénominateurs chaque fois qu'il s'est trompé. Enfin, 6 élèves n'ont pas répondu à l'item. Il est à noter que la place du signe égal en fin d'opération est tellement ancrée dans l'esprit des élèves que certains d'entre eux effectuent leurs opérations de manière machinale sans regarder la place des signes.
- Au sixième item, 13 élèves ont bien indiqué $\frac{1}{12}$ comme solution tandis que 4 ont donné une réponse erronée et 8 n'ont pas répondu à la question. Les quatre mauvaises réponses fournies sont $\frac{1}{9}$, qui semble être dû à une erreur de calcul, $\frac{1}{4}$, qui semble ne pas avoir tenu compte du rectangle de droite, 6 et 0,9 cm, réponses moins explicables à première vue. Il est à noter que deux élèves sont passé par le pliage de la feuille pour trouver la solution. Il est à noter que l'élève à haut potentiel n'a pas répondu à cet item.

Commentaires Les erreurs relevées dans les productions des élèves montrent bien l'hétérogénéité de la classe en ce qui concerne la composition des fractionnements. Grosso modo, les items 2, 3, 5 et 6 ne sont relativement bien résolus que par une moitié de la classe. Il est également à noter qu'aucun élève n'est parvenu à fournir une réponse correcte à chacun des items proposés. Ainsi, au moment de la passation du test, la conceptualisation de la composition des fractionnements — base de la multiplication des fractions — était encore inachevée pour de nombreux élèves. Ceci justifie l'opportunité de l'activité qui a suivi, ainsi que la différenciation qui a été essayée à cette occasion. Il s'imposait en effet que l'activité proposée soit susceptible de deux traitements différents selon le degré de conceptualisation atteint par chacun.

Comme on l'a déjà signalé ci-dessus, on notera aussi la persistance jusqu'à cet âge de l'interprétation du signe « = » comme un « déclencheur de calcul » qui explique que les exercices du type $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \cdots$, où le signe « = » est placé à gauche de l'opération, sont moins bien résolus que lorsqu'il est placé à droite. En l'occurrence, c'est le concept d'égalité lui-même qui est encore inachevé.

2 Différentes représentations d'un même partage

De quoi s'agit-il?

Les élèves utilisent le *kit libre* d'*Apprenti Géomètre* pour partager une même forme de quatre manières différentes. Ils rédigent ensuite le « film » de l'activité. Cette activité a pour objectif de permettre aux élèves de faire évoluer leur conceptualisation de la composition de fractionnements.

La différenciation porte, dans un premier temps, sur la possibilité laissée aux élèves de découper les figures de façons différentes. Ainsi, chacun va pouvoir réaliser des compositions de fractionnements plus ou moins compliquées selon les cas. Elles correspondront aux perceptions des fractionnements propres à chaque élève.

Dans un deuxième temps, la narration de l'activité va amener les élèves à choisir une des découpes qu'ils ont réalisées et à tenter d'expliquer le chemin emprunté pour y arriver. Cette activité doit permettre à chacun d'exprimer son explication suivant le degré de conceptualisation qu'il possède à ce moment précis.

Enjeux

Partager une figure ;

effectuer deux fractionnements successifs d'une figure ;

utiliser correctement les fonctionnalités du menu *Opérations* : *Diviser* et *Découper* ;

utiliser correctement la fonctionnalité du menu *Mouvements* : *Déplacer* ;

utiliser correctement les fonctionnalités du menu *Outils* : *Effacer*, *Couleur* et *Cacher* ;

rédiger une narration de recherche de l'activité.

Compétences

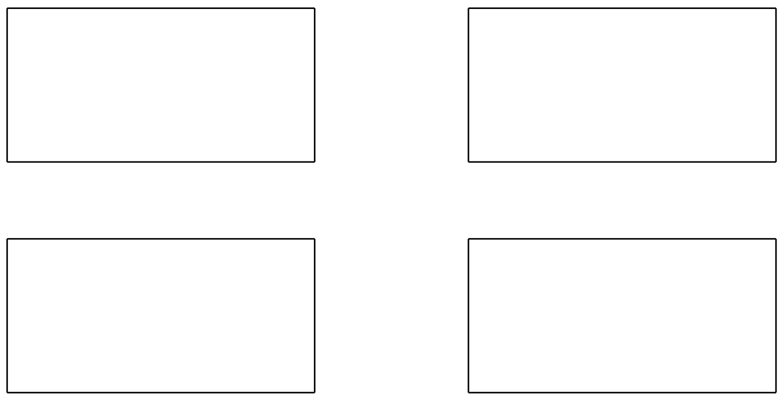
Composer plusieurs fractionnements d'un objet réel, ou représenté, en se limitant à des fractions de numérateur 1 (par exemple, prendre le tiers de la moitié d'un objet).

De quoi a-t-on besoin? Le fichier « quatresixième » ; les fiches 4.1 et 4.2 ; des crayons ordinaires ; des règles.

Comment s'y prendre? L'enseignant soumet la fiche 4.1 aux élèves qui prennent connaissance de la consigne.

Fiche 4.1

Découpe chaque rectangle en six parties égales. Colorie une de ces parties dans chacun des rectangles. Les rectangles ne peuvent pas être coupés de la même manière.

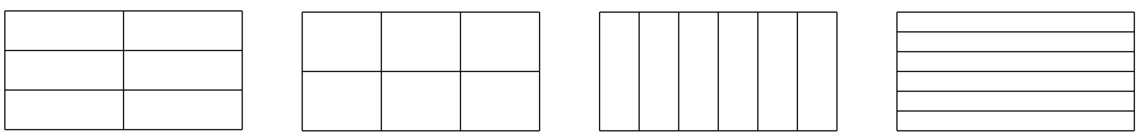


La consigne n'est reformulée et explicitée que pour les élèves en difficulté de compréhension.

Les élèves emploient les fonctionnalités *Diviser*, *Découper* et peut-être *Déplacer* pour réaliser les différentes découpes. Ils peuvent également employer les fonctionnalités *Effacer* ou *Cacher* pour ne garder à l'écran que les figures dont ils ont besoin.

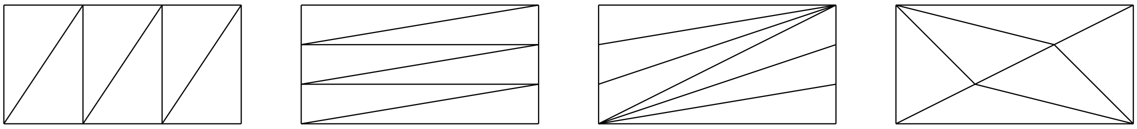
Ils reproduisent ensuite les partages effectués sur la fiche 4.1.

Analyse a priori Suivant les découpes effectuées, plusieurs possibilités de réponses sont envisageables. Les partages les plus fréquemment représentés devraient être les quatre suivants.



Parmi ces quatre possibilités, il est à noter que les deux premières consistent en partages successifs de la longueur et de la largeur, tandis que dans les deux dernières, le partage s'effectue selon une seule direction.

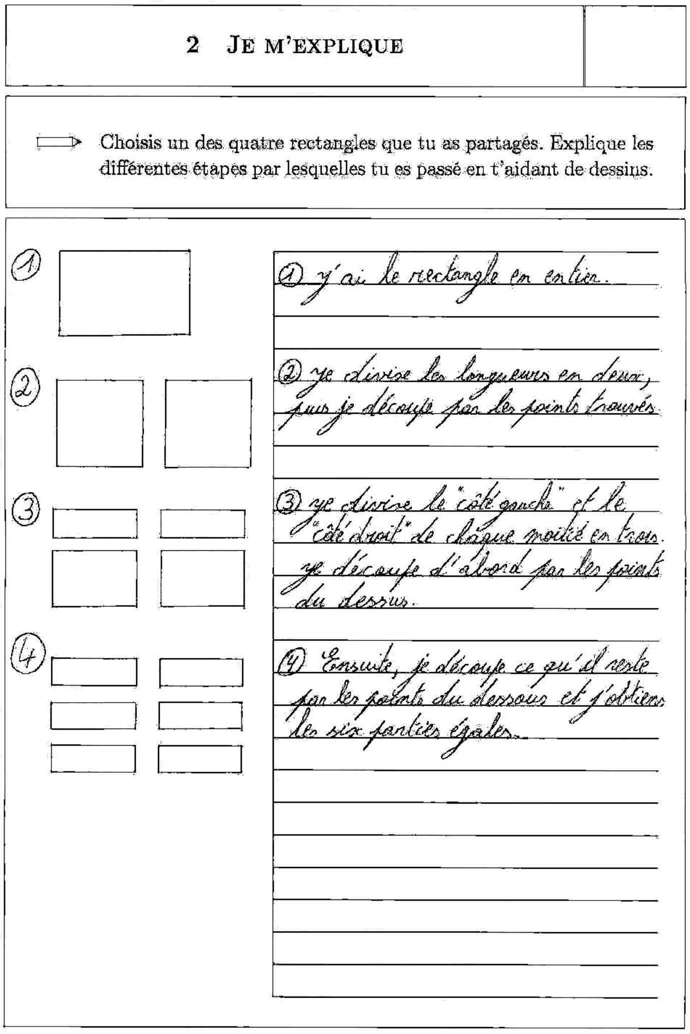
D'autres partages sont tout aussi corrects et pourraient éventuellement être proposés par les élèves. En voici quatre possibles.



Il convient de ne pas les rejeter, mais il sera certainement nécessaire d'expliquer leur validité.

Dans un second temps, les élèves choisissent un des quatre partages qu'ils ont effectués. Ils réalisent alors une narration de recherche se rapportant à cette situation à l'aide de la fiche 4.2 ; chaque étape du partage est décrite littéralement et illustrée par une représentation de la situation à ce moment précis.

Voici un exemple de narration possible.



2 JE M'EXPLIQUE

Choisis un des quatre rectangles que tu as partagés. Explique les différentes étapes par lesquelles tu es passé en t'aidant de dessins.

* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2004, *Fiche 1.2* *

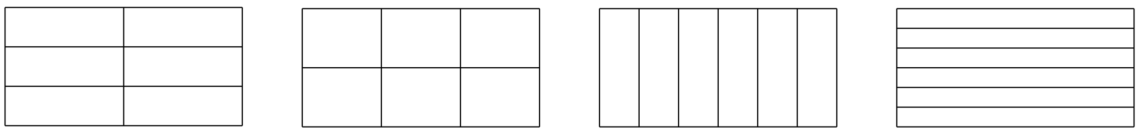
Le troisième point de cet exemple est une étape intermédiaire par laquelle les élèves passent à l'écran. Elle pourrait ne pas être reprise dans l’explication des élèves pour autant que celle-ci soit suffisamment claire et précise.

Échos des classes

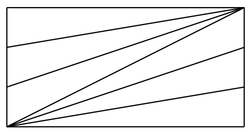
L’activité a été menée dans une classe de cinquième primaire dans laquelle les élèves étaient répartis par groupes de deux ou trois. Elle s’est déroulée en trois séances. La première séance a duré 30 minutes.
Dans un premier temps, certains élèves n’avaient pas assimilé la consigne leur demandant de découper le rectangle en six parties égales. Ils essayaient de le partager en dessinant des segments à l’intérieur. Après relecture de la consigne, ils ont compris ce qui leur était demandé.

Vu le temps réduit dont ils disposaient, la plupart des élèves n’ont pu mener cette séance à terme. Ils ne sont ainsi parvenus à trouver qu’une ou deux découpes correctes. Il s’agissait dans tous les cas des deux plus courantes, celles qui reposent sur le partage de tous les côtés du rectangle, ce qui, au niveau des fractions, correspond à couper une des dimensions en deux et l’autre en trois. L’élève à haut potentiel faisait partie d’un des groupes qui a donné ces deux réponses.

Deux groupes d’élèves sont parvenus au bout de cette partie de l’activité en trouvant quatre découpes correctes. Le premier d’entre eux a proposé les quatre partages les plus attendus.

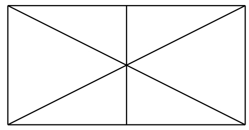


Le second groupe a remplacé la quatrième figure par une découpe utilisant une des diagonales du rectangle.



Un groupe n’a quant à lui réalisé aucune découpe correcte à la fin de la séance.

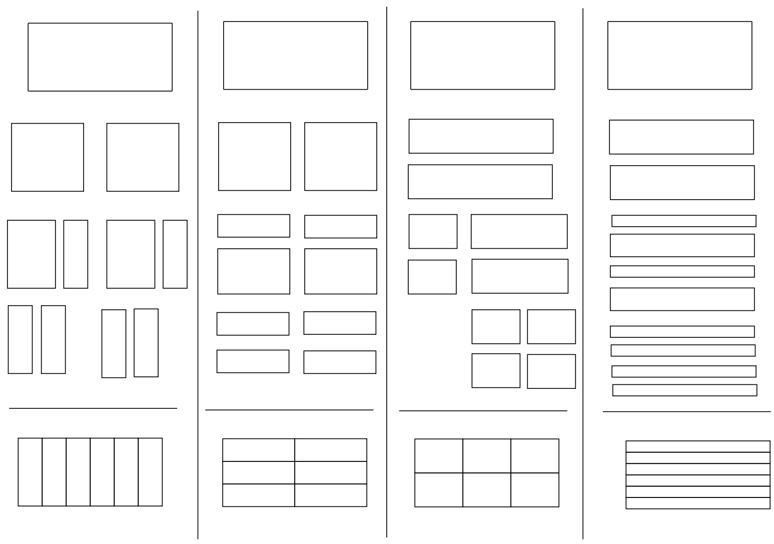
Des réponses erronées ont également été proposées par certains groupes. Elles étaient toutes identiques et présentaient une découpe par les diagonales et une des médianes.



La plupart des élèves de ces groupes ont rapidement remarqué que cette solution n'était pas correcte et présentait « des morceaux plus grands que les autres ».

Suite aux constatations effectuées lors de cette première séance, il a été décidé de débuter par une synthèse orale lors de la deuxième séance. Au cours de celle-ci, certains élèves sont venus présenter les solutions qu'ils avaient trouvées en expliquant leur validité.

Les cinq solutions trouvées ci-dessus par les élèves ont été représentées et expliquées. Les élèves qui sont venus présenter leurs solutions n'ont rencontré aucune difficulté de manipulation d'*Apprenti Géomètre* pour diviser et découper les rectangles. Ils sont également parvenus à bien exprimer ce qu'ils faisaient à l'écran. La découpe trouvée à partir de la diagonale du rectangle a nécessité des explications, puisque l'égalité des parts n'apparaît pas clairement à l'écran. Ces explications furent cependant restreintes pour éviter de trop compliquer cette partie de l'activité. Au terme de cette énumération des solutions, l'écran présentait, en quatre colonnes, les « films » des quatre découpes les plus fréquentes.

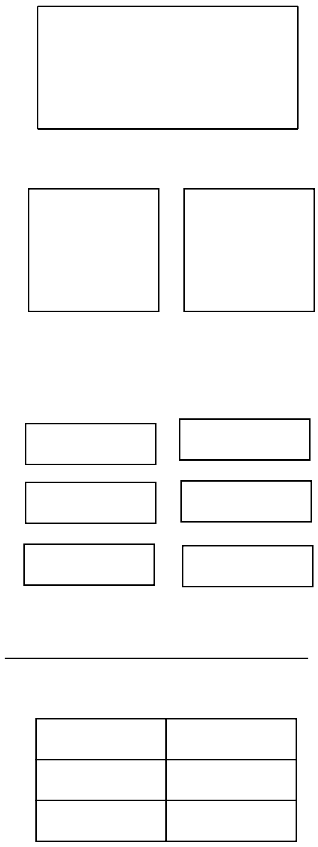


En s'aidant des représentations à l'écran, les élèves ont ensuite rédigé une narration reprenant, au choix, le « film » d'une des quatre possibilités.

Effectuant ce type de travail pour la première fois, ils ont rencontré certaines difficultés pour bien mettre en parallèle leurs explications avec les dessins. Un exemple de « film » déjà réalisé aurait été fort utile pour qu'ils découpent leur texte plus correctement.

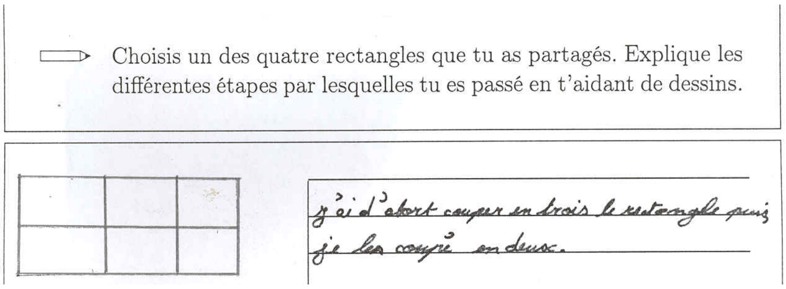
Toutefois, il est à noter que la majorité des élèves ont bien indiqué qu'ils avaient coupé en deux, puis en trois ou inversement.

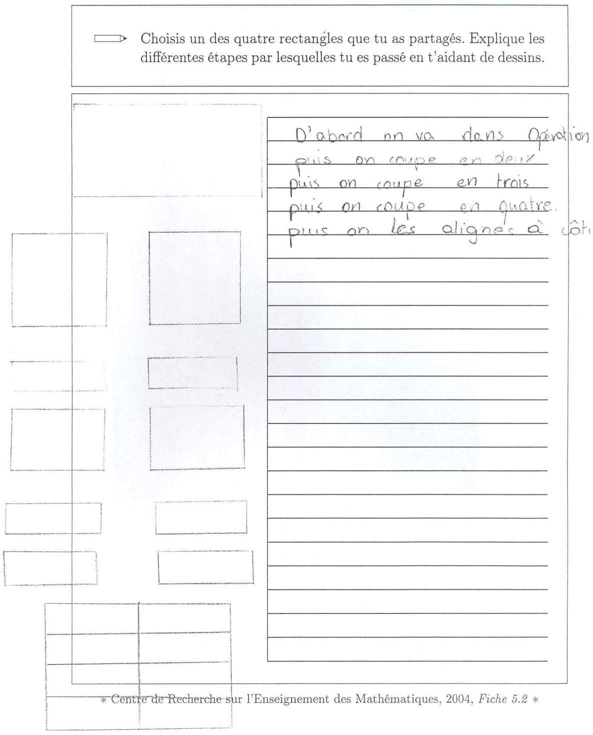
La principale erreur rencontrée concerne la description de l'étape intermédiaire. En effet, puisque la découpe en trois s'effectue en deux étapes, certains élèves expliquent qu'ils ont d'abord coupé en deux, puis en trois et puis encore en deux. Cette erreur pourrait être évitée en effaçant la représentation des deux tiers comme ci-dessous.

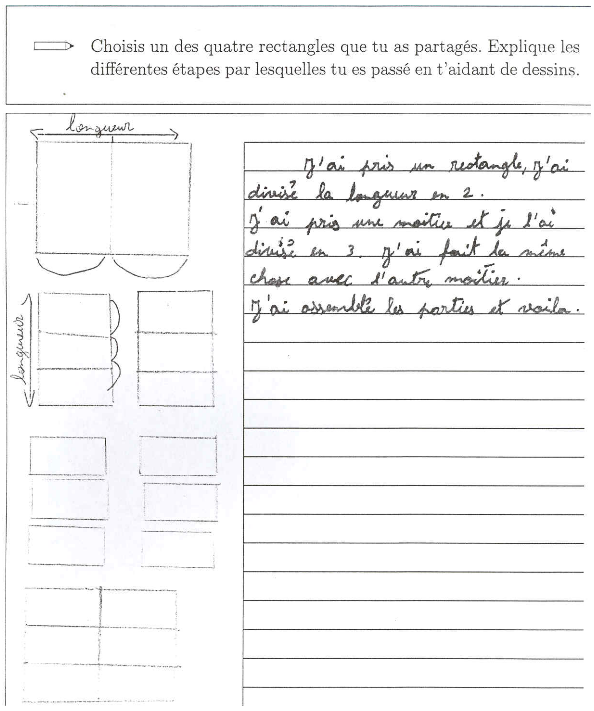


Pour terminer cette séance, les élèves ont repris la fiche 4.1 et ont complété celle-ci pour représenter quatre découpes.

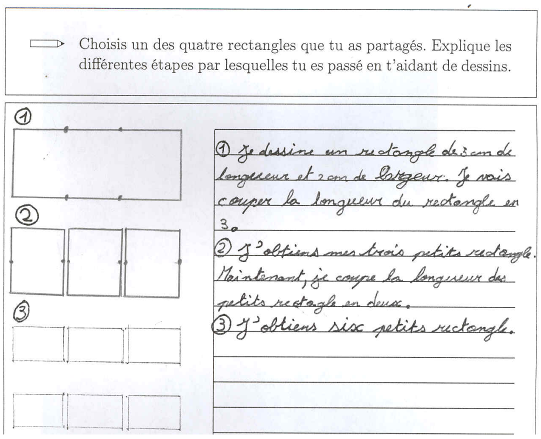
Après analyse des narrations et vu les difficultés rencontrées, il a été décidé de retravailler ce sujet lors d'une troisième séance. Au cours de celle-ci, quelques exemples de narrations rédigées lors de la séance précédente ont été discutés avec les élèves pour en dégager les manquements, mais aussi les points importants qui doivent figurer dans une narration correcte. Voici trois des narrations analysées.

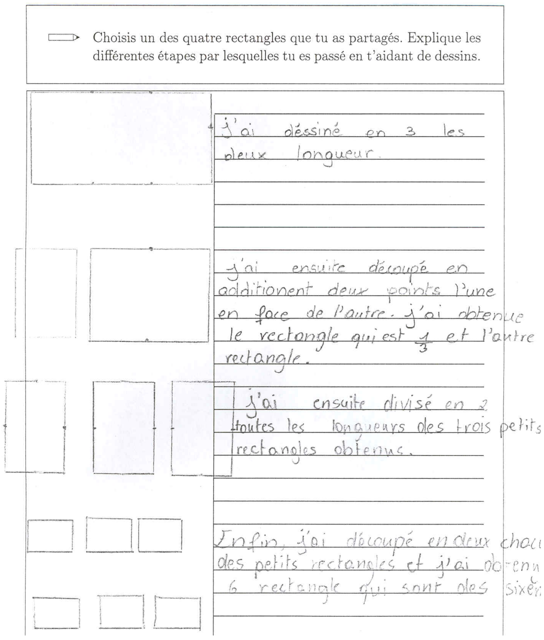






Les deux premières présentent des erreurs de partage, tandis que la troisième se rapproche déjà de ce qui est attendu. Après avoir dégagé les éléments devant figurer dans la narration, les élèves ont repris celle qu'ils avaient rédigée et ont essayé de l'améliorer à partir de ce qui a été discuté. Cette séance a duré une trentaine de minutes. Lors de l'analyse de cette seconde narration, il a été constaté une certaine amélioration des productions. Les textes contenaient des informations plus précises et étaient également mieux structurés. Voici les deux textes qui correspondent aux deux premières narrations présentées ci-dessus.





Commentaires Nous pouvons remarquer que les élèves qui réussissent le mieux l'activité sont sensiblement les mêmes que ceux qui avaient le mieux répondu au prétest. Ce sont également ceux chez qui la conceptualisation de la composition de fractionnements est la mieux développée.

Le concept de composition de fractionnements ne semble pas poser de problème particulier à l'élève à haut potentiel. Toutefois, ses représentations sur feuilles sont assez approximatives et les explications réduites à leur plus simple expression : « Couper en deux, puis en trois ». Il semble chercher à aller directement à l'essentiel.

L'erreur qui consistait en une découpe par les diagonales et une des médianes montre la prégnance que possèdent ces droites particulières dans l'esprit des élèves. Ce genre d'activité permet de remettre en cause leur perception à cet égard.

Les erreurs relevées dans les narrations de recherche montrent que les élèves éprouvent énormément de difficultés à exprimer ce qu'ils ont réellement effectué. Exprimer ce qui a été fait leur rarement demandé, alors que cela permet souvent de voir de manière assez claire s'ils ont assimilé ou non un concept. Cela peut se faire par écrit comme c'est le cas ici ou oralement grâce à une simple question posée aux élèves.

3 Vers une expression numérique

De quoi s'agit-il? Les élèves découpent des carrés respectivement en six, huit et neuf parties égales. Ils complètent ensuite des arbres qui reprennent les étapes par lesquelles ils sont passés et les rapports entre les différentes parties et le carré de départ. Enfin, ils mettent en parallèle les rapports multiplicatifs, de division et fractionnaires entre les figures.

Cette activité permet de transférer ce qui a été travaillé auparavant dans un contexte présentant d'autres découpes à réaliser. La différenciation porte donc sensiblement sur les mêmes points que lors de l'activité précédente. Elle permet à certains de renforcer leur degré de conceptualisation de la composition de fractionnements et à d'autres de se rapprocher d'une bonne perception de ce concept.

Les représentations sous forme d'arbres doivent aider les élèves à structurer la notion étudiée. La synthèse tend à les amener progressivement à la multiplication des fractions.

Enjeux

Partager une figure ;

effectuer plusieurs fractionnements successifs d'une figure ;

utiliser correctement les fonctionnalités du menu *Opérations* : *Diviser* et *Découper* ;

utiliser correctement la fonctionnalité du menu *Mouvements* : *Déplacer* ;

utiliser correctement les fonctionnalités du menu *Outils* : *Effacer* et *Cacher* ;

compléter un arbre reprenant les différentes étapes de découpe de la figure.

Compétences

Composer plusieurs fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est 1 (par exemple, prendre le tiers de la moitié d'un objet).

De quoi a-t-on besoin?

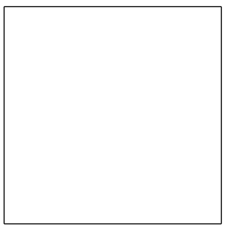
Les fiches 4.3 à 4.8 ; des crayons ordinaires ; des règles.

Comment s'y prendre?

L'enseignant soumet les fiches 4.3, 4.4 et 4.5 aux élèves qui prennent connaissance des consignes. Ils choisissent alors celle qu'ils ont envie de résoudre.

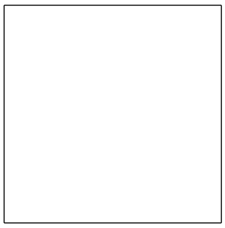
Fiche 4.3

Dans le *kit Libre*, dessine un carré. Découpe-le en six parties égales.



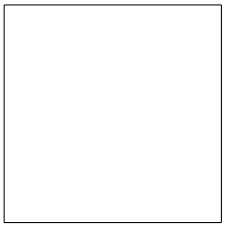
Fiche 4.4

Dans le *kit Libre*, dessine un carré. Découpe-le en huit parties égales.



Fiche 4.5

Dans le *kit Libre*, dessine un carré. Découpe-le en neuf parties égales.



Comme précédemment, les élèves utilisent les fonctionnalités *Diviser* et *Découper* pour réaliser les différentes découpes. Ils emploient ensuite la fonctionnalité *Déplacer* pour placer les différentes figures les unes sous les autres.

Ils reproduisent alors les partages réalisés sur les fiches 4.3, 4.4 et 4.5. Suivant les découpes effectuées, plusieurs possibilités de réponses sont envisageables aussi bien pour les sixièmes que pour les huitièmes ou les neuvièmes. Nous n'allons pas les énumérer ici, puisqu'elles ressemblent fortement à celles réalisées lors de l'activité précédente.

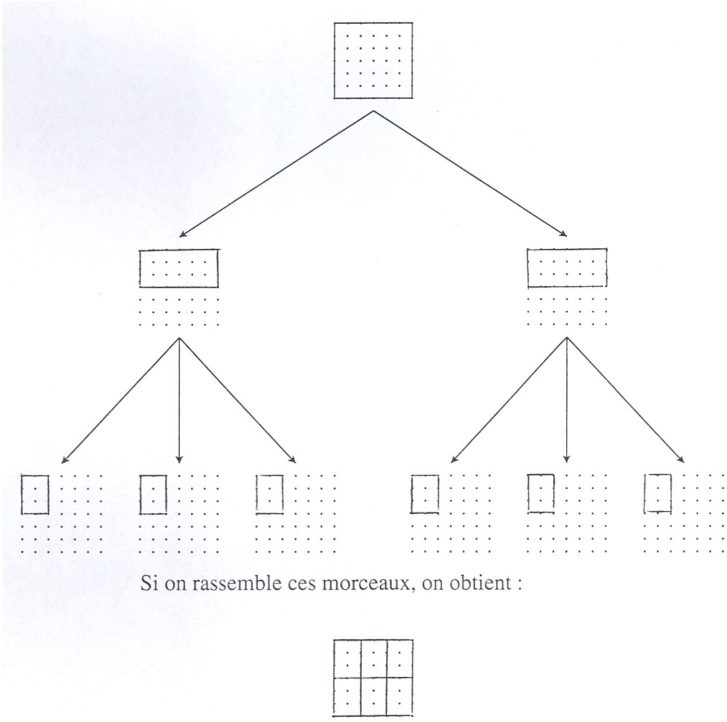
Après avoir réalisé ce travail, chaque élève va choisir la fiche qui correspond aux partages effectués. Il s'agit donc d'une des fiches 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9.

Les deux premières fiches concernent le partage en sixièmes. Le choix de la fiche adéquate est déterminé par les découpes que les élèves ont réalisées. En effet, s'ils ont d'abord coupé en deux, ils choisissent la fiche 4.6 tandis que s'ils ont d'abord coupé en trois, ils prennent la fiche 4.7.

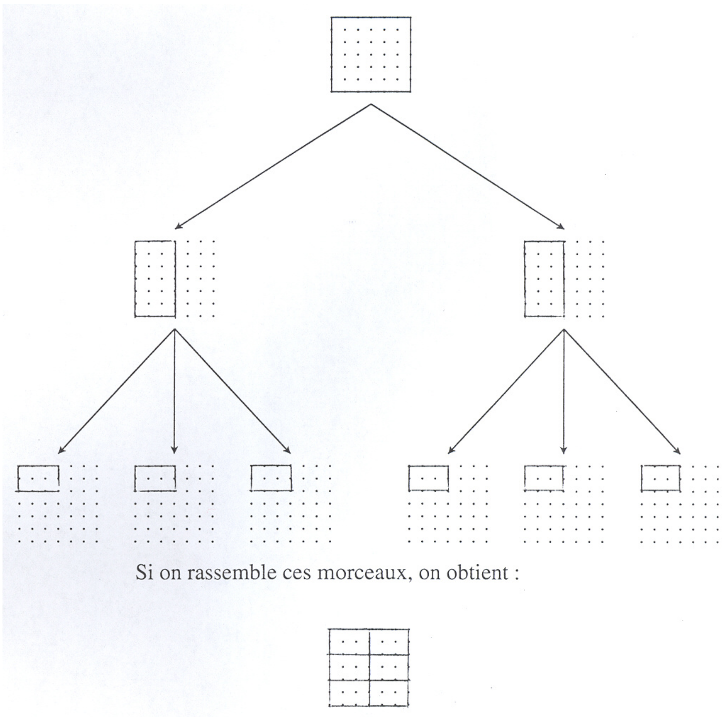
La troisième fiche concerne le partage en huitièmes, enfin, la quatrième concerne le partage en neuvièmes.

Les élèves doivent compléter leur arbre en fonction des découpes qu'ils ont réalisées à l'aide du logiciel. Les carrés en papier pointé leur permettent de fournir des représentations correctes des figures qu'ils vont dessiner. Même s'ils ont choisi de découper en un nombre de parts identiques, les dessins peuvent être différents suivant qu'ils ont commencé à découper horizontalement, ou verticalement

Découpage horizontal

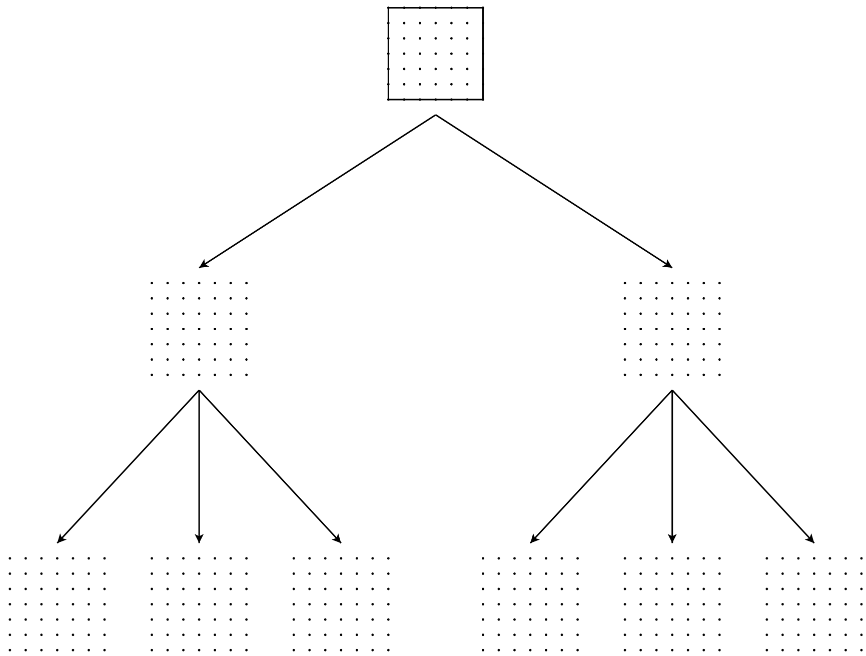


Découpage vertical

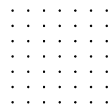


Fiche 4.6

Complète l'arbre en t'aidant des découpes que tu as réalisées dans le carré. Dans chaque forme dessinée, indique quelle partie du carré de départ elle représente.

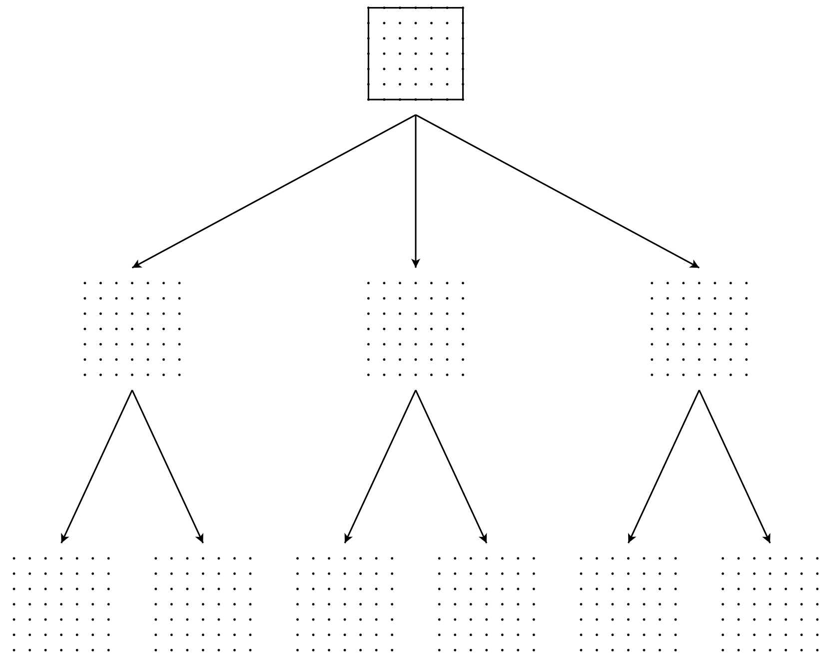


En assemblant ces morceaux, on obtient :



Fiche 4.7

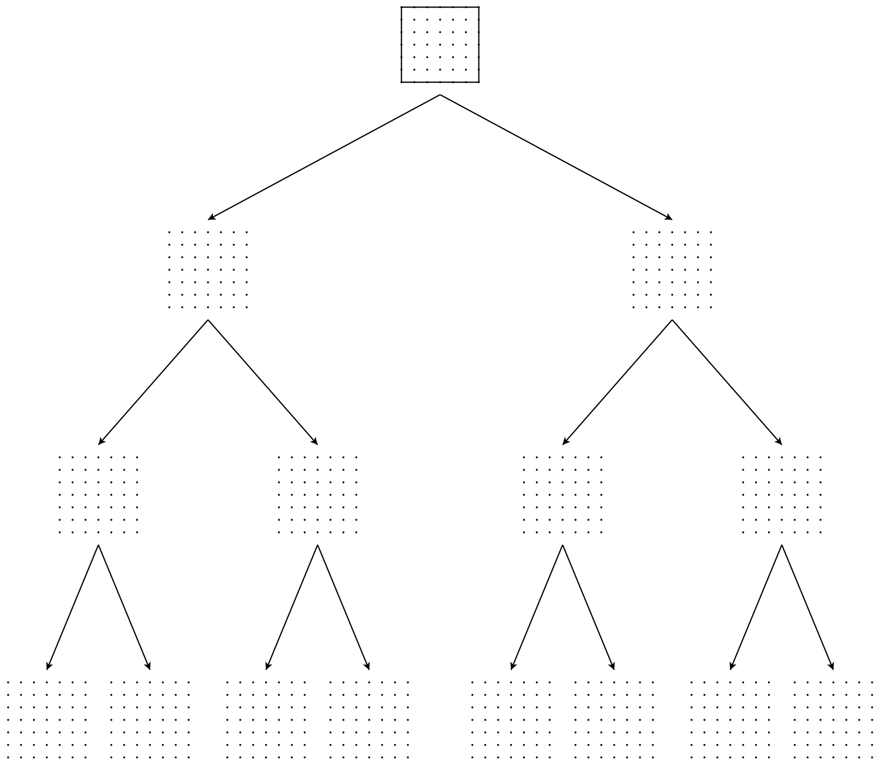
Complète l'arbre en t'aidant des découpes que tu as réalisées dans le carré. Dans chaque forme dessinée, indique quelle partie du carré de départ elle représente.



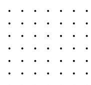
Si on rassemble ces morceaux, on obtient :

Fiche 4.8

Complète l'arbre en t'aidant des découpes que tu as réalisées dans le carré. Dans chaque forme dessinée, indique quelle partie du carré de départ elle représente.

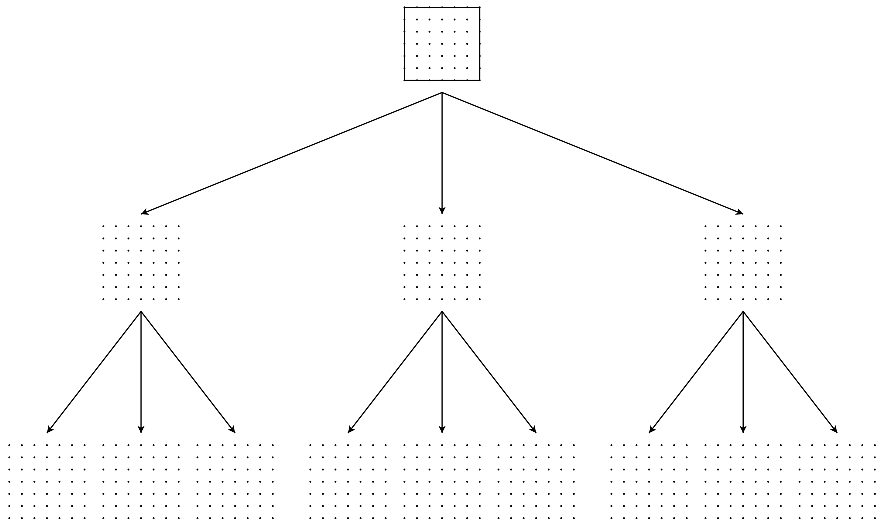


Si on rassemble ces morceaux, on obtient :



Fiche 4.9

Complète l'arbre en t'aidant des découpes que tu as réalisées dans le carré. Dans chaque forme dessinée, indique quelle partie du carré de départ elle représente.

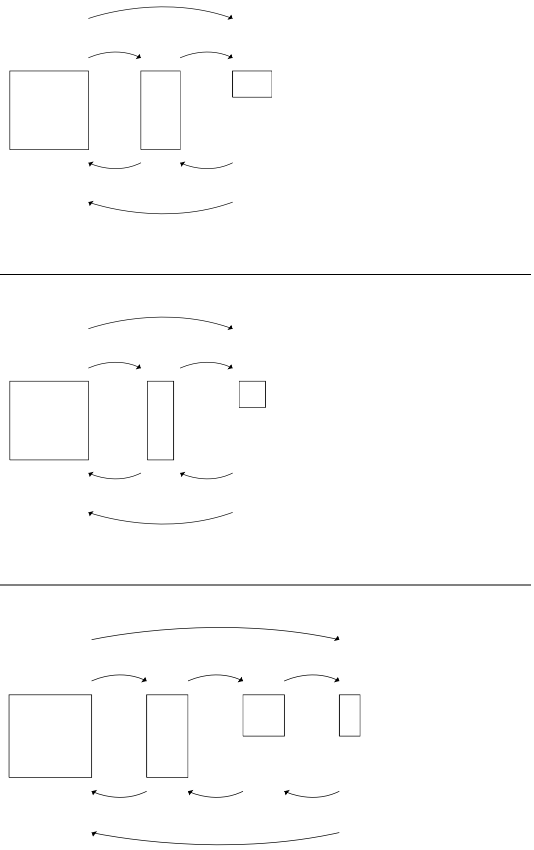


Si on rassemble ces morceaux, on obtient :

S'ils ont complété correctement leur arbre, les élèves reçoivent la fiche de synthèse

Fiche 4.10

Indique au-dessus des flèches l'opération effectuée pour passer d'une figure à l'autre.



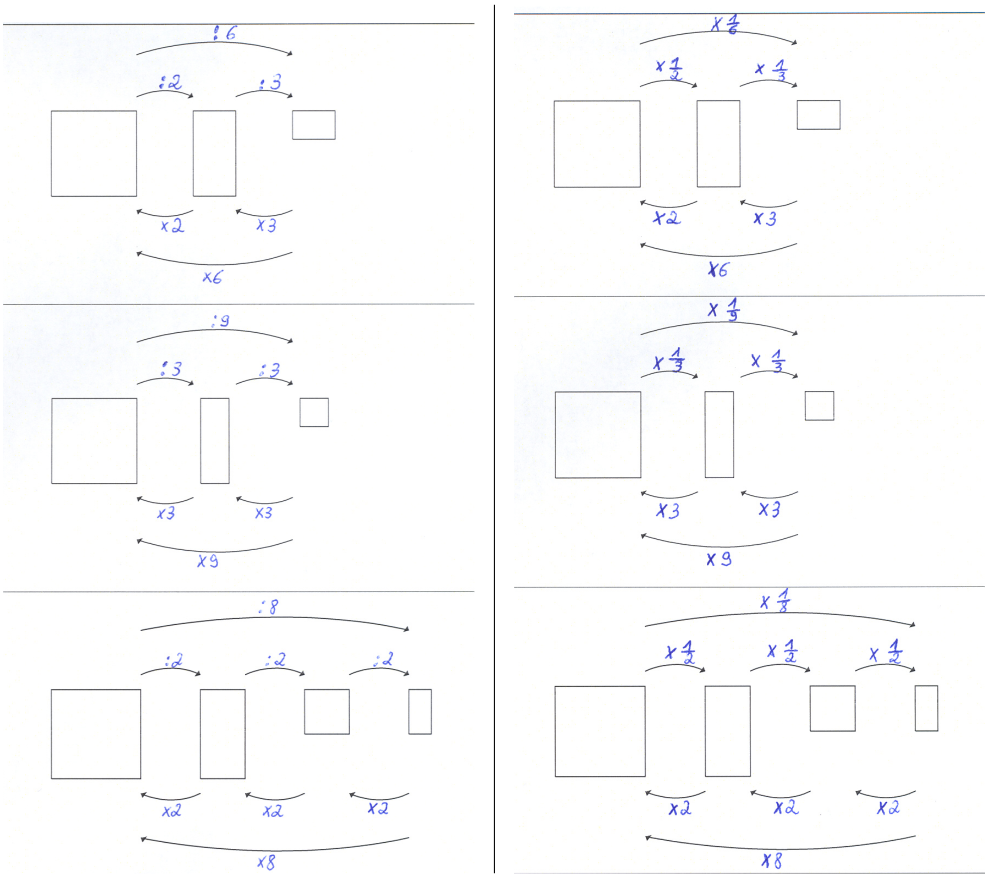
Les élèves commencent par compléter le schéma qui correspond à ce qu'ils ont effectué à l'aide du logiciel. Pour cela, ils s'aident de l'arbre qu'ils ont complété. Pour la décomposition en sixièmes, nous n'avons proposé que le partage en deux puis en trois puisque ces opérations sont commutatives. S'ils ont terminé ce schéma, ils peuvent essayer de compléter celles qui correspondent aux découpes réalisées par les autres élèves.

Une synthèse globale collective est ensuite effectuée au tableau avec explication par les élèves des opérations qu'ils ont indiquées au-dessus des flèches des différents schémas. Si nécessaire, les schémas antérieurs des élèves sont ensuite ajustés pour correspondre à la solution correcte ci-dessous.

Analyse a priori

Dans un premier temps, il est fort probable que, comme dans la colonne de gauche ci-dessous, les élèves n'utilisent que des nombres entiers pour compléter les trois schémas.

Si tel est le cas, il convient de les amener vers les expressions fractionnaires qui y correspondent. Puisque les élèves savent que partager une figure en deux, c'est en prendre la moitié, ils peuvent faire de même avec les expressions numériques et dire que $\div 2$ équivaut à $\times\frac{1}{2}$. Ils obtiennent alors la synthèse suivante présentée dans la colonne de droite.



Échos des classes

Cette activité s'est déroulée en deux séances de 30 minutes dans une classe de cinquième primaire composée de 25 élèves.
En ce qui concerne la découpe des carrés, les élèves n'ont, dans leur ensemble, rencontré que très peu de difficultés. Ils se sont en général référés aux découpes réalisées dans les rectangles lors de l'activité précédente bien que la majorité ait choisi de partager le carré en huitièmes ou en neuvièmes.

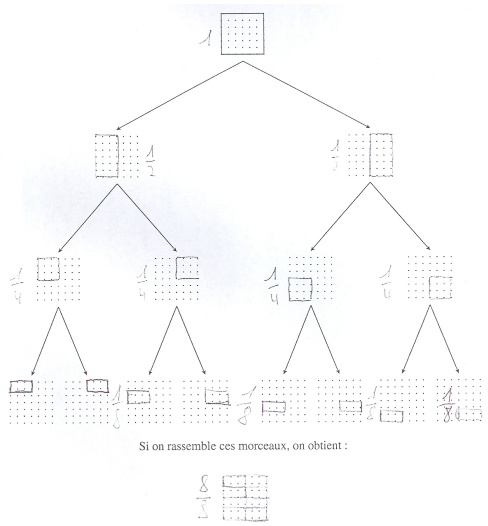
Seuls trois élèves, un peu plus en difficulté, ont préféré travailler à nouveau avec les sixièmes. Les découpes proposées par les élèves étaient toutes correctes et, dans l'ensemble, assez classiques puisqu'elles privilégiaient les partages alternatifs sur la longueur et la largeur.

La reproduction de l'activité sur les fiches a amené quelques difficultés chez certains élèves qui, pour partager correctement leur figure, mesuraient les côtés du carré. En effet, les mesures n'étant pas toujours précises, les segments dessinés par certains élèves ne correspondaient pas parfaitement à des parts égales du carré. Cela s'est surtout marqué dans le partage en neuvièmes. Le côté du carré avait pourtant été choisi de manière à éviter au maximum cette difficulté puisque son côté était de six centimètres.

Cette constatation tend à montrer que la mesure à l'aide de la latte n'est pas encore forcément maîtrisée parfaitement à cet âge. Cette difficulté n'a pas été rencontrée lors du travail à l'aide d'*Apprenti Géomètre* puisque les divisions sont automatiquement effectuées par ce dernier.

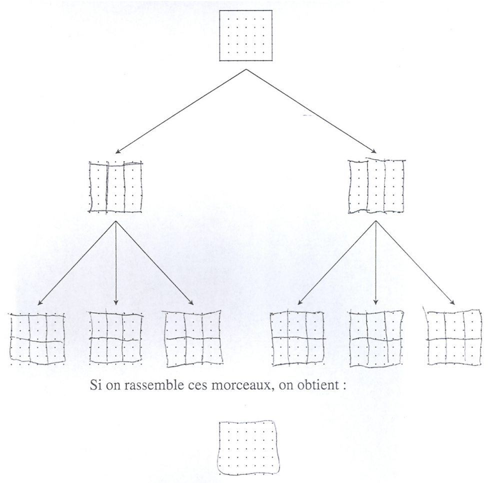
Le choix de la fiche reprenant l'arbre a posé quelques problèmes à une dizaine d'élèves qui ont pris leur fiche au hasard sans regarder ce qu'elle contenait. Ce n'est que lorsqu'ils ont voulu la compléter qu'ils ont remarqué que la fiche ne correspondait pas à leur travail. Ils sont alors venu la changer en étant cette fois bien attentifs.

Le remplissage des arbres a amené un grand nombre d'erreurs. En effet, seulement 4 élèves ont rempli correctement leur arbre, 15 l'ont fait de manière erronée et 6 n'ont pas entamé le travail. Parmi les quatre arbres bien complétés, un seul élève avait également indiqué les fractions correspondantes comme on peut le voir ci-dessous.

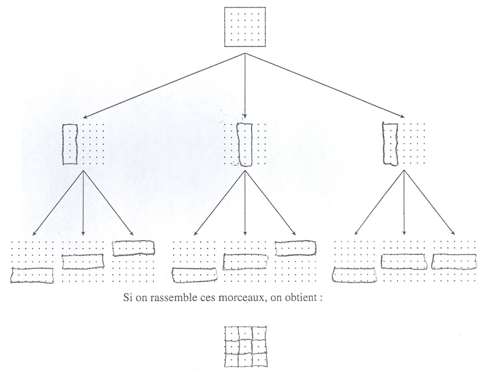


Aucune fraction n'a été indiquée dans les arbres de tous les autres élèves de la classe, ce qui conforte l'impression que les élèves ne lisent qu'une partie de la consigne.

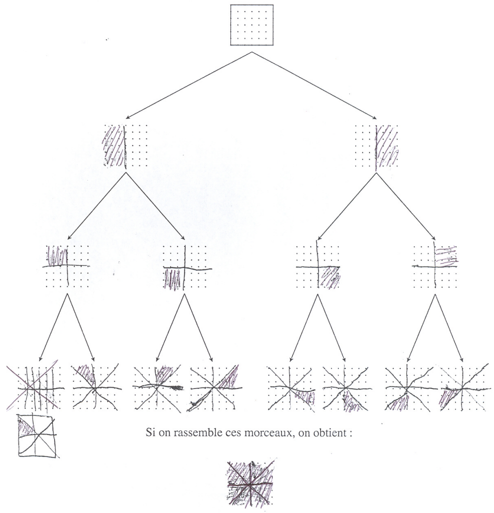
Parmi les mauvaises représentations rencontrées, la plupart provenaient soit du dessin complet d'un carré avec ses partages à chacune des étapes (pour 7 d'entre eux),



soit de découpes réalisées à chaque étape en repartant du carré de départ (pour 5 d'entre eux)

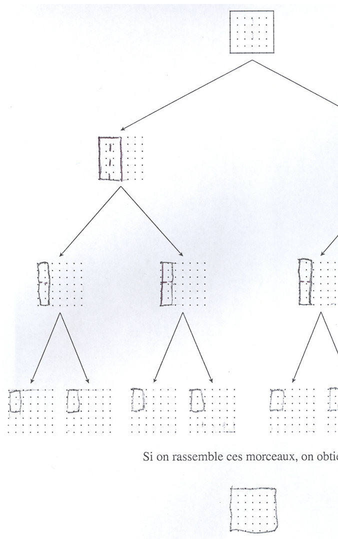


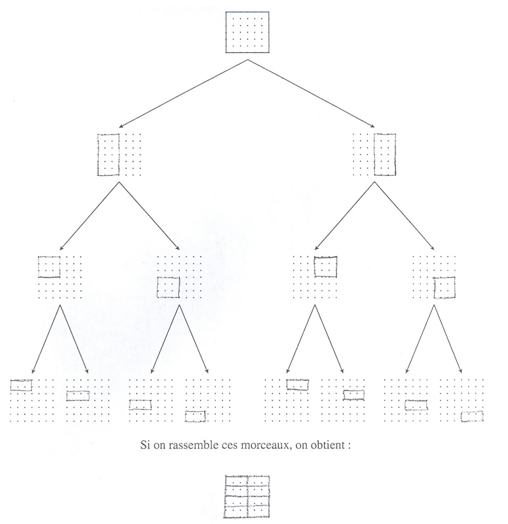
Un autre élève a, quant à lui, uniquement représenté les découpes qu'il a réalisées et a colorié les différentes parties qu'il prenait.

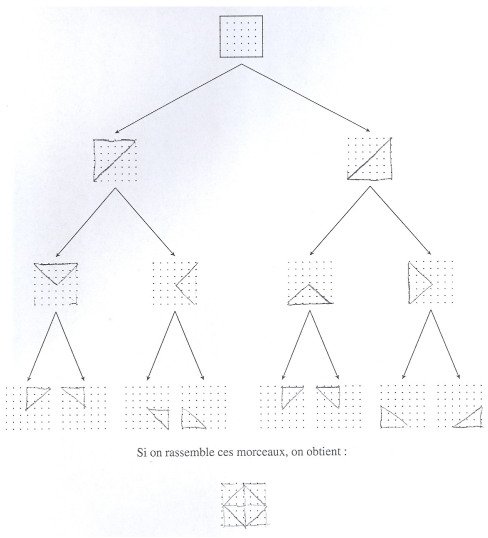


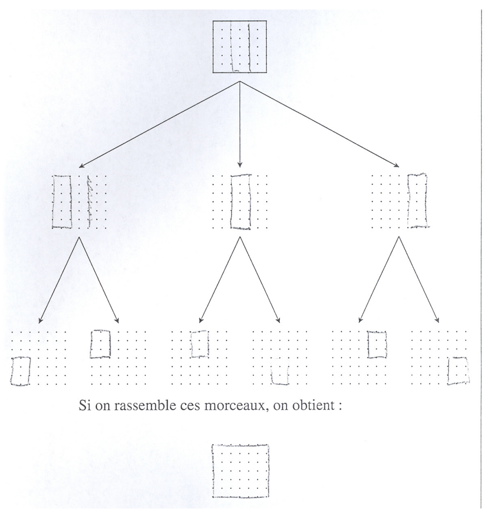
Il s'agissait de l'élève détecté à haut potentiel de cette classe. Il n'a pas réellement reproduit l'arbre tel qu'on le lui avait demandé et c'est pourquoi il est classé dans les erreurs, mais, à l'évidence, il a parfaitement compris le principe de composition de fractionnements.

Au début de la deuxième séance de cinquante minutes, les différents arbres présentés ci-dessus ont été repris au tableau et les qualités et défauts de chacun d'eux ont été mis en évidence lors d'une discussion orale au cours de laquelle chaque élève avait la possibilité de s'exprimer et de débattre. À la fin de cette discussion, un nouvel arbre a été distribué à chaque élève pour qu'il puisse le compléter à partir de ce qui avait été dit lors de la discussion. À ce moment, 24 élèves ont effectué une représentation correcte de l'arbre. Voici quelques-unes de ces représentations.

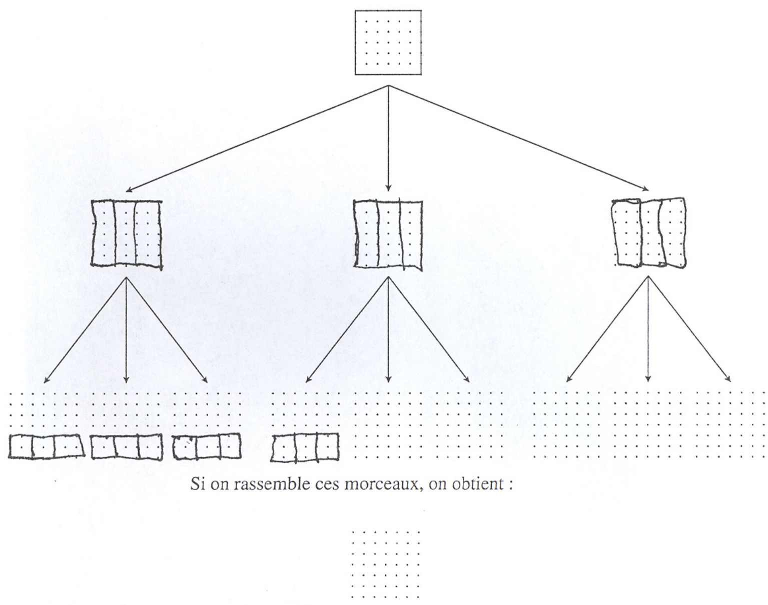








Comme on peut le constater, deux élèves parmi les quatre présentés ci-dessus n'ont pas représenté les différents morceaux lors de la remise en commun de ceux-ci. Au total de la classe, ce sont 8 élèves qui ont pratiqué de la sorte. Nous pouvons également constater qu'aucun de ces enfants n'a, à nouveau, indiqué les fractions qui correspondent aux différents morceaux. Seuls deux élèves ont notés ces dernières, dont celui qui l'avait déjà fait la première fois. L'élève qui s'est à nouveau trompé a fourni la représentation suivante.



Il en est resté au dessin et ne semble pas avoir tenu compte du travail effectué sur *Apprenti Géomètre*.

Faute de temps disponible, la synthèse n'a malheureusement pas pu être réalisée par nos soins avec les élèves. C'est pourquoi il n'y aura pas d'échos à ce sujet.

Commentaires La relative facilité avec laquelle les élèves ont réussi à effectuer leurs découpes tend à montrer que le concept de composition de fractionnements a fortement évolué depuis le prétest et que pratiquement tous les élèves sont maintenant capables de composer des fractionnements successifs d'une même figure. Par contre, la première représentation de ces fractionnements sous forme d'arbres a engendré de nombreuses erreurs auxquelles une discussion a permis de remédier. Il nous semble que les difficultés sont surtout dues à la nouvelle forme de représentation. De nombreux élèves de cet âge semblent éprouver de grosses difficultés lorsqu'une situation est totalement nouvelle pour eux. D'où l'importance de diversifier les approches afin de les placer le plus souvent possible face à des situations de caractères différents.

Le nombre d'erreurs provenant de la lecture (ou plutôt du manque de lecture) des consignes amène à dire que les consignes données aux élèves doivent être les plus claires et les plus concises possibles, afin qu'elles soient lues jusqu'au bout et comprises dans leur entièreté.

Les erreurs commises lors de la représentation sur papier indiquent qu'à cet âge, les instruments de mesure ne sont pas encore parfaitement utilisés par tous les élèves. De plus, le recours à ces instruments semble institutionnalisé puisque beaucoup d'élèves les utilisent même lorsque ce n'est pas nécessaire (papier pointé).

En conclusion, et bien que le temps nous ait manqué pour mener à bien l'activité jusqu'à son terme complet, il semble qu'elle a permis aux élèves d'évoluer et de mieux concevoir le concept de composition de fractionnements, puisqu'ils sont maintenant tout à fait capables de réaliser correctement des compositions.

Toutefois, lors d'une mise en place de l'activité en classe, il ne serait pas superflu de présenter aux élèves une narration de recherche correctement rédigée sur un autre thème (pas forcément mathématique), afin de permettre aux élèves de dégager les caractéristiques de ce genre de texte.

Chapitre 9

Addition et soustraction de fractions

Dans le chapitre 5, nous avons vu que l'apprentissage de l'addition et de la soustraction de fractions peut se réaliser en partant des grandeurs pour aller vers les fractions simples.

La séquence proposée dans ce chapitre, conçue pour des élèves de 10 à 12 ans, est une situation-problème géométrique basée sur des fractions d'aires. Pour comparer précisément ces fractions d'aires et les additionner, l'utilisation d'une unité de mesure commune, pour une réduction des fractions au même dénominateur, est incontournable.

Nous sommes conscients que certaines étapes dans la résolution de cette situation-problème pourraient faire obstacle aux élèves. Nous choisissons cependant de maintenir une situation complexe comme point de départ car certains élèves, notamment ceux à haut-potentiel, pourraient être capables de la résoudre d'emblée[1] Nous répondons aux besoins spécifiques de chaque élève par des dispositifs de différenciation — que nous détaillons dans *De quoi s'agit-il ?* de la section 2.1 (p. 153) — et l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*.

Cette différenciation est possible notamment par l'utilisation et l'analyse d'un *prétest*, semblable à une évaluation formative, et présenté dans la section 1 de ce chapitre.

1 Prétest

De quoi s'agit-il?

Ce prétest a été conçu pour mettre en évidence les démarches utilisées par les élèves de 10 à 12 ans dans diverses situations relatives aux fractions. Une première situation (exercice a) est purement géométrique et permet d'observer si les élèves perçoivent et utilisent la symétrie. D'autres situations (exercices b, e, f) sont géométriques mais le recours au numérique, dont des fractions, est une stratégie pertinente. Elle est même incontournable dans le cas des exercices e et f. Enfin, le prétest comporte des situations d'opérations sur des fractions, l'une présentée verbalement (exercice c), l'autre présentée sous la forme d'une série de calculs (exercice d).

[1]Ce choix didactique est présenté de manière plus approfondie au chapitre 2, section 4.

Les réponses fournies à cet ensemble d'exercices indiquent si les élèves ont tendance à utiliser une démarche géométrique ou numérique. Elles peuvent aussi faire apparaître des difficultés dans le domaine géométrique et/ou dans le domaine numérique. Enfin, le prétest permet de voir si les élèves adaptent leur stratégie en fonction du contexte.

De quoi a-t-on besoin?

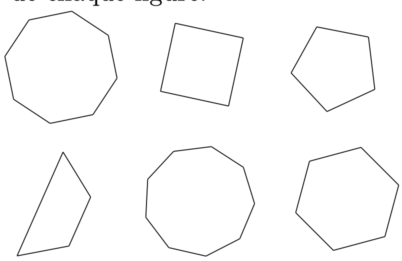
Les fiches 5.1, 5.2, 5.3 ; de quoi écrire, une règle.

Comment s'y prendre?

L'enseignant distribue les fiches. Les élèves prennent connaissance des consignes écrites et travaillent ensuite individuellement. Des explications concernant les consignes sont fournies aux élèves qui le souhaitent.

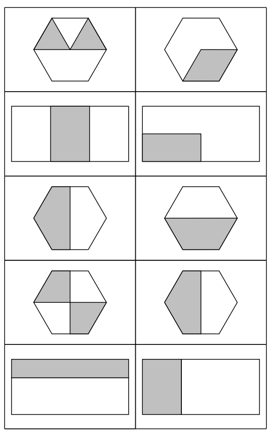
Fiche 5.1

a. Colorie une moitié de chaque figure.



b. Réponds par vrai ou faux et explique pourquoi.

Les parties coloriées ont même aire.



C'est - - - -
parce que - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- -

C'est - - - -
parce que - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- -

C'est - - - -
parce que - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- -

C'est - - - -
parce que - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- -

C'est - - - -
parce que - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- -

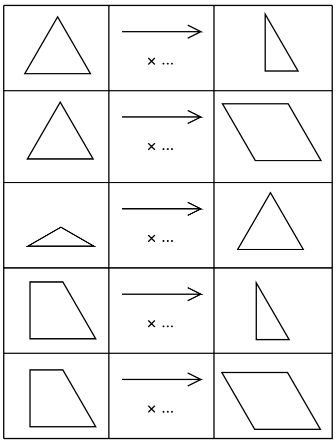
c. Pierre mange une moitié d'un gâteau.
Puis il en mange encore un quart.
Quelle part du gâteau a-t-il mangée au total ?
Quelle part du gâteau reste-t-il ?
....
....

Fiche 5.2

d. Calcule . . .

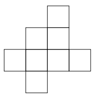
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \ldots \qquad \frac{3}{4}-\frac{2}{4} = \ldots$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \ldots \qquad \frac{5}{6}+\frac{5}{10} = \ldots$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \ldots \qquad \frac{4}{8}+\frac{2}{8} = \ldots$$

e. Complète . . .

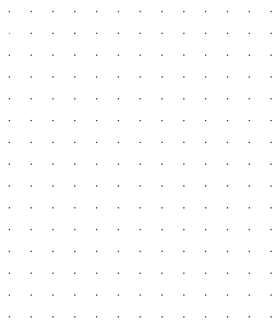


Fiche 5.3

f. Voici une figure.



Colorie ci-dessous une moitié de celle-ci de deux façons différentes.
Si d'autres solutions sont possibles, dessine-les en-dessous.



Analyse a priori

Pour l'exercice « a » :

– Certains élèves pourraient découper les figures en parts inégales.
– Pour obtenir des parts égales, le carré, l'hexagone et l'octogone seront

vraisemblablement découpés selon leurs diagonales, leurs médianes, ou d'autres segments passant par leur centre. Le pentagone et l'ennéagone seront découpés selon un segment passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Le trapèze sera quant à lui découpé selon le segment joignant les milieux des deux bases.
- Cet exercice permet d'observer si les élèves utilisent les axes de symétrie pour fractionner une figure en deux parts égales, ou si certains d'entre eux sont en difficulté d'un point de vue géométrique.

Pour l'exercice « b » :
- Une confusion, due à la consigne, pourrait être de comparer les parties coloriées à l'intérieur d'un même hexagone pour les items 1 et 4.
- Certains élèves pourraient ne pas percevoir l'égalité entre l'aire d'une figure et la somme des aires de ses deux moitiés, ce qui se traduirait par une réponse erronée aux items 1 et 4.
- Certains élèves pourraient ne pas concevoir que deux parties d'une figure de formes différentes peuvent avoir même aire. Ceci entraînerait des réponses erronées.
- Les justifications aux réponses données peuvent être basées sur les formes ou les aires et donc être géométriques ou contenir des fractions.

Dans son ensemble, cet exercice permet de se rendre compte si les élèves utilisent des nombres (en l'occurrence des fractions), des formes, des mesures de grandeurs ou le concept de surface pour traiter cette situation géométrique. Il pourrait aussi mettre en évidence, chez certains élèves, une difficulté en ce qui concerne les équivalences d'aire.

Pour l'exercice « c » :
- L'énoncé pourrait ne pas être compris.
- Il pourrait aussi être traduit par un calcul inadéquat.
- Le calcul pourrait être effectué incorrectement.
- L'élève pourrait aussi ne tenir compte que d'une des deux questions.

Ce problème permet de se rendre compte des possibilités qu'ont les élèves d'opérer sur des fractions présentées dans un contexte significatif uniquement de manière verbale.

Pour l'exercice « d » :
- Les additions et les soustractions pourraient être incorrectement réalisées.
- Dans les erreurs commises, on pourrait observer des additions ou soustractions entre numérateurs et entre dénominateurs sans réduction à un dénominateur commun. Ce type d'erreur reflète une maîtrise incomplète du concept de fraction.
- On pourrait aussi observer des erreurs de calcul malgré une procédure correcte.

Cet ensemble de calculs permet d'observer les élèves face à des opérations numériques sur les fractions, sans le support de la géométrie et des grandeurs. Il se pourrait cependant que toutes les réponses soient correctes alors que l'élève applique une procédure de calcul de façon purement mécanique. L'exercice ne permet donc pas de savoir quel sens les élèves attribuent aux objets qu'ils manipulent.

Pour l'exercice « e » :

- Le rapport de grandeur entre les deux formes géométriques, situées de part et d'autre de la flèche, pourrait ne pas être correctement perçu.
- Un rapport correctement perçu pourrait encore être bien ou mal exprimé. Par exemple, au premier item, l'élève qui se rendrait compte que la forme de gauche doit être coupée en deux pour obtenir la forme de droite, pourrait ne pas savoir exprimer le rapport sous une des formes « $\frac{1}{2}$ », « un demi », ...

La présentation et le contenu de cet exercice le rendent particulièrement difficile (une autre version est présentée dans les fiches ...). Par exemple, l'élève répondra plus facilement « divisé par 2 » que « multiplié par $\frac{1}{2}$ ». Pour beaucoup d'élèves, il est trop tôt pour concevoir la multiplication et la division comme des opérations inverses l'une de l'autre ! Tout comme il est difficile pour les élèves de réaliser l'équivalence entre « un demi de ... » et « ... $\times \frac{1}{2}$ ». Le dernier item est par ailleurs le plus complexe puisqu'il s'agit d'une multiplication par quatre tiers. Malgré cette complexité, il se peut que certains élèves utilisent spontanément les fractions, indiquant une certaine maîtrise dans ce domaine.
La présence de cet exercice complexe dans notre prétest se justifie par le fait que des élèves à haut potentiel pourraient déjà avoir cette connaissance avancée des fractions. L'activité qui suit le prétest devrait alors en tenir compte et éviter l'enseignement d'un savoir déjà acquis.

Pour l'exercice « f » :
Cet exercice n'est pas complexe pour les élèves qui utilisent une stratégie numérique mais il peut s'avérer impossible à résoudre pour ceux qui n'envisagent que la voie géométrique et qui recherchent un axe de symétrie.

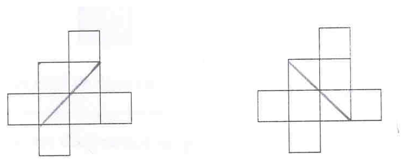
Échos des classes

Ce prétest a été utilisé dans une classe de 5^{e} primaire de 24 élèves. L'analyse des résultats s'efforce d'envisager les exercices comme un ensemble révélateur des stratégies qu'utilisent les élèves. Nous avons pu mettre en évidence différents profils d'élèves.

Trois élèves, sur le groupe testé, étaient en difficulté d'un point de vue géométrique. Marie, Charlotte et Delphine ne comparent les figures que du point de vue de la forme et non de l'aire. Delphine, étant même perturbée par la présentation *oblique* des figures de l'exercice « a », a indiqué

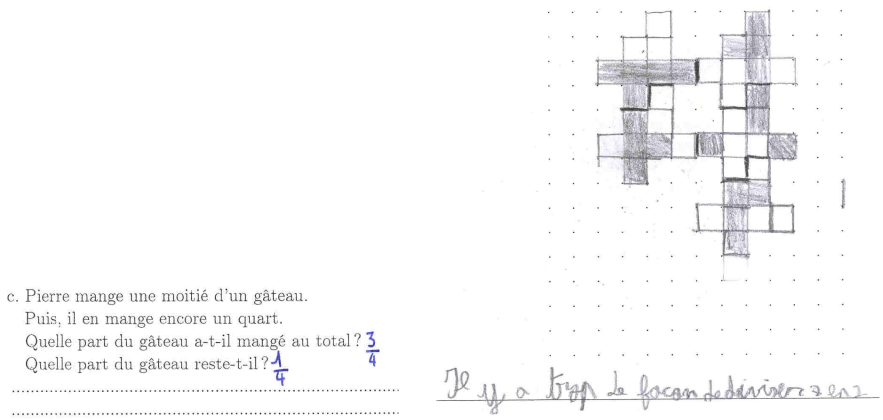
« *Je n'aime pas quand c'est de travers* ». Marie – qui se focalise sur les dimensions des figures pour l'exercice « b – » et Charlotte – qui ne voit que leurs formes –, ont indiqué que l'exercice « f » était impossible, n'envisageant ni l'aire de la figure, ni le nombre de carrés. Marie a des difficultés dans le domaine mathématique et a été diagnostiquée dyscalculique[2].

Julien a, quant à lui, obtenu de nombreuses réponses correctes. Le plus caractéristique chez lui est qu'il affiche nettement une stratégie visuelle. Il accompagne le problème d'un schéma, dessine l'unité de commune mesure sur les figures de l'exercice « b » et découpe la figure de l'exercice « f » par un axe oblique (son dessin est présenté ci-dessous).



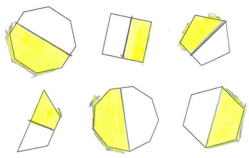
À la différence de Julien, Pierre, diagnostiqué à haut-potentiel, Tom et Arthur, également à haut-potentiel selon l'enseignant, et François utilisent la voie numérique pour les différents exercices. Ce propos est illustré ci-dessous par des exemples.

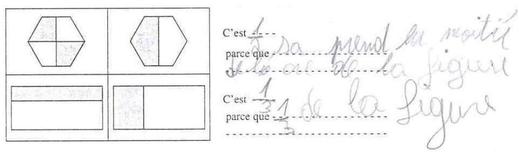
Quelques réponses de Pierre.



[2]Selon le dictionnaire de logopédie, [7], un enfant dyscalculique présente « une forme d'échec spécifique, durable et tenace dans l'apprentissage des nombres et dans celui de l'effectuation des opérations, même aux stades élémentaires, à un âge où ces notions devraient être acquises depuis longtemps, alors qu'il est d'intelligence normale et que, par ailleurs, il raisonne fort justement dans les circonstances quotidiennes. »

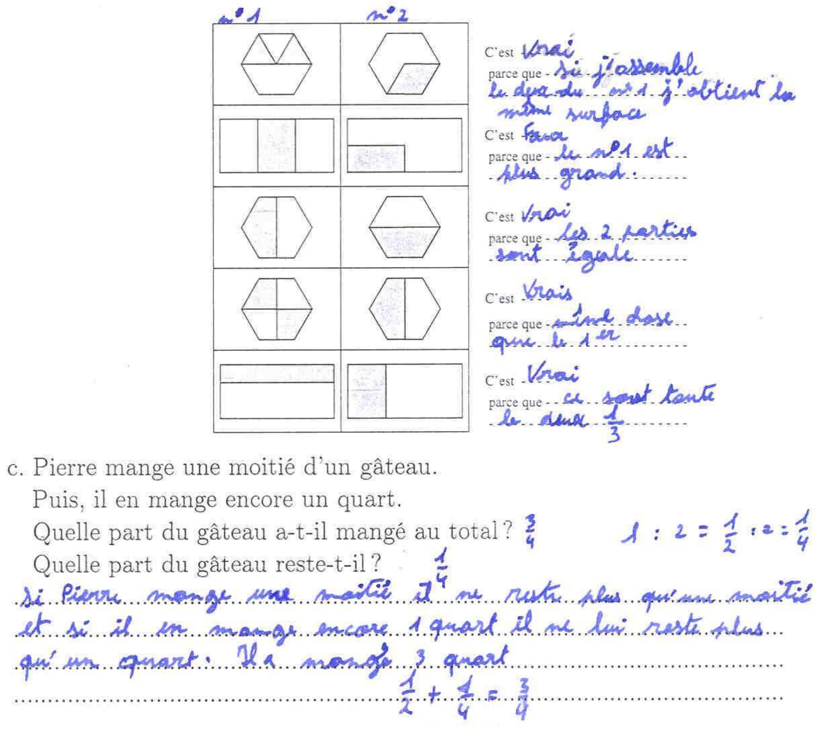
Quelques réponses d'Arthur.



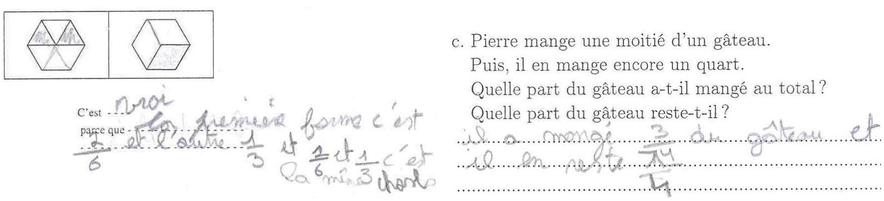


(Il compte le nombre de côtés pour diviser la figure.)

Quelques réponses de Tom.



Quelques réponses de François.



Arthur utilise des nombres pour l'entièreté de l'exercice « b », alors que Pierre et Tom réservent le numérique aux items qui l'exigent. Pierre et Arthur ont pensé à la multiplication par un demi comme équivalent à la division par deux, ce qui n'est pas le cas d'Arthur. Il n'y a, dans la classe, que Pierre et François, qui, pour cet exercice, alternent la multiplication par un entier et celle par une fraction. Pierre obtient trois réponses correctes et François quatre.

Pour les élèves qui n'ont quasiment pas de réponses correctes, certains utilisent des entiers pour toutes les comparaisons, d'autres des fractions de numérateur 1, sans passage de l'un à l'autre. Trois élèves ont utilisé des nombres décimaux (0,1 ou 0,5).

Hormis les élèves cités, tantôt en difficulté, tantôt performants d'un point de vue géométrique ou numérique, l'ensemble de la classe marque une tendance à utiliser assez peu des nombres. Ces élèves privilégient la voie géométrique, conduisant par ailleurs à un nombre élevé de réponses correctes. En ce qui concerne les additions et soustractions de fractions de l'exercice « d », huit élèves sur les vingt-quatre présents ne proposent aucune réponse correcte. Les autres élèves maîtrisent les procédures de transformation en fractions équivalentes ayant un dénominateur commun ainsi que celles d'addition et de soustraction. Certains semblent cependant appliquer une règle de manière mécanique. Notons que plusieurs élèves, par distraction sans doute, additionnent là où il faudrait soustraire.

En ce qui concerne le prétest en lui-même, l'exercice « b » s'est avéré difficile pour certains à cause de sa présentation. Quelques élèves ne savaient pas si le tableau devait être abordé verticalement ou horizontalement[3].

La consigne de l'exercice « e » s'est révélée trop peu explicite[4], les élèves ne comprennent pas ce qui est attendu d'eux. Nous leur avons précisé oralement qu'il s'agissait en fait de répondre à la question « *Combien de fois la figure de gauche peut-elle être contenue dans la figure de droite ?* ». Malgré tout, quand les élèves perçoivent que la figure de gauche doit être partagée en deux pour obtenir celle de droite, ils ne parviennent pas à l'exprimer par la multiplication par un demi (sauf Pierre). Notons enfin que la consigne de l'exercice « f » n'est pas toujours bien comprise[5].

[3]Une nouvelle version de cet exercice apparaît dans les fiches didactiques de ce rapport.
[4]Une nouvelle version de cet exercice apparaît dans les fiches didactiques de ce rapport.
[5]Nous avons réalisé une autre version de l'exercice f qui figure dans les fiches didactiques du présent rapport.

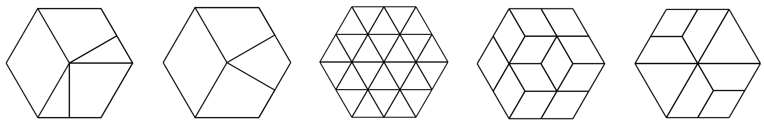
2 Activités

2.1 Situation-problème.

De quoi s'agit-il?

La situation-problème est, dans un premier temps, présentée sous une forme « papier ». Les élèves disposent des différents hexagones placés au tableau, en grand format. La consigne est d'en choisir un, de le coller sur la fiche et de colorier une moitié de son aire. Nous avons choisi cette manière de faire afin d'éviter l'encombrement visuel de la fiche par les puzzles qui n'ont pas été sélectionnés par l'élève. La particularité de la situation est que chaque hexagone est fractionné en différentes petites formes et que pour colorier une moitié de l'aire, les élèves ne peuvent sélectionner que des formes entières. Les différents hexagones sont de complexité variable. Les élèves travaillent individuellement.

Fiche 6.1
Plusieurs puzzles hexagonaux sont affichés au tableau.
Choisis l'un d'eux et colle-le ci-dessous.
Colorie une moitié de son aire en n'utilisant que des pièces entières.
Différents outils, dont *Apprenti Géomètre*, sont disponibles si tu en as besoin.



Différentes stratégies peuvent être adoptées pour résoudre cette situation-problème (voir l'analyse *a priori*).

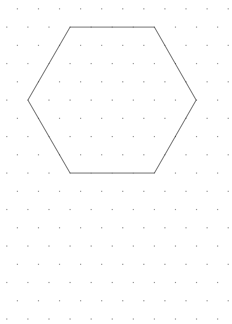
Afin que nous puissions nous rendre compte au mieux de la stratégie utilisée par les élèves, ceux-ci doivent réaliser une narration de recherche. Nous leur demandons de reproduire l'hexagone qu'ils ont choisi et d'expliquer pourquoi les pièces qu'ils ont coloriées correspondent effectivement à une moitié de l'aire de l'hexagone. Ils précisent leur raisonnement par un dessin sur du papier pointé accompagné d'une phrase explicative.

Fiche 6.8

Narration de recherche.

Reproduis l'hexagone que tu as choisi avec ses pièces et colorie celles que tu as sélectionnées.

Explique pourquoi les pièces coloriées correspondent à une moitié.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

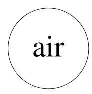
Nous demandons aux élèves d'expliquer pourquoi les pièces choisies constituent une moitié et non pas comment ils ont résolu la situation-problème. La narration attendue n'est pas un simple relaté des actions effectuées, mais bien une justification de l'exactitude de leur réponse.

Pour les aider à réaliser cette justification, nous leur proposons un exemple du même type dans un domaine extérieur aux mathématiques. Nous avons choisi l'explication du rebond d'une balle pour la possibilité de l'accompagner par des schémas. Nous avons voulu cette explication accessible aux élèves. Bien entendu, des experts de la physique ne pourraient pas en être satisfaits.

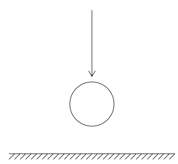
Fiche 6.16

Pourquoi une balle rebondit-elle ?

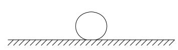
1. Une balle, est constitué d'une enveloppe élastique remplie d'air.



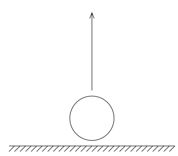
2. Lorsque la balle est lâchée, elle tombe sur le sol.



3. A l'instant où elle touche le sol, la balle et le sol se déforment et se repoussent l'un l'autre. Le sol se déforme moins que la balle. Il pousse l'enveloppe de celle-ci vers l'intérieur, la balle se déforme et l'air qu'elle contient se comprime.



4. La force exercée vers le haut par le sol et l'élasticité de la balle permettent à celle-ci de rebondir.



Cette activité met en oeuvre certaines pistes de différenciation qui ont été présentées au chapitre 1. Nous les détaillons ci-dessous :

– Le nombre de consignes : la consigne écrite permet à certains élèves plus autonomes de commencer d'emblée l'activité, tandis que d'autres recevront si nécessaire un soutien dans la compréhension de cette consigne.
– La complexité de la tâche : malgré une consigne unique, le choix du puzzle, laissé à l'élève, influencera la complexité de la tâche.
– Le rythme d'apprentissage : d'une part, l'enseignant est libre dans le nombre de réponses correctes qu'il demande à l'élève. D'autre part, la stratégie numérique (voir analyse *a priori*) n'est pas imposée au départ, ce qui laisse le temps à certains élèves de rencontrer l'utilité de cette stratégie.
– Les aides apportées : certains élèves, qui n'ont plus besoin de manipulations concrètes travaillent d'emblée sur le papier, alors que d'autres disposent de pièces mobiles ou d'*Apprenti Géomètre*. L'utilisation non dirigée d'*Apprenti Géomètre* permet la différenciation puisque l'élève formule lui-même une question et choisit les manipulations qui conduiront à une réponse.

Enjeux Le concept d'aire et les équivalences d'aires ;
les symétries ;
le concept d'unité de mesure commune ;
les rapports fractionnaires ;
les fractions équivalentes.

Compétences Additionner deux grandeurs fractionnées. Déterminer le rapport d'une grandeur à une autre, passer d'un rapport au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin? Les fiches 6.1, 6.8, 6.16 ; de quoi écrire, de la colle, les puzzles hexagonaux (fiches 6.2 à 6.6) en grand format et ces mêmes puzzles prédécoupés en petit format.

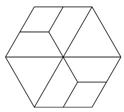
Comment s'y prendre? L'enseignant distribue les fiches et demande aux élèves de lire attentivement la consigne écrite avant de commencer le travail. Il précise que pour chaque hexagone, il y a plusieurs réponses correctes. Il précise aussi que dans un premier temps il attend une réponse correcte accompagnée d'une narration de recherche précise. Les autres possibilités de réponses seront recherchées par la suite si le temps le permet. Si les élèves n'ont jamais réalisé de narration de recherche précédemment, l'enseignant signale qu'un exemple de narration de recherche est présenté sur la fiche 6.16. Cette aide par l'exemple s'avère indispensable.
Le choix est laissé aux élèves en ce qui concerne la ou les stratégies adoptées (géométrique ou numérique) pour résoudre la situation-problème. Dans un premier temps, on les laisse travailler sans outil particulier mais l'enseignant reste à l'écoute et fournit, au fur et à mesure du déroulement de l'activité, l'outil adéquat à l'élève en fonction de l'obstacle qu'il rencontre. Il est important que l'élève puisse lui-même expliciter l'outil dont il aurait besoin pour résoudre la situation.

Analyse a priori

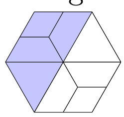
Une première stratégie de résolution est visuelle et simple. L'élève peut en effet assembler mentalement les pièces pour reconstituer un demi-hexagone obtenu par découpe selon une diagonale ou une médiane. Une stratégie plus complexe serait de procéder par des compensations (voir l'exemple ci-dessous).

Une deuxième stratégie est numérique tout en s'appuyant sur la géométrie. L'élève peut travailler avec des nombres entiers en attribuant la valeur 1 à une pièce qu'il utilise comme unité de mesure commune aux autres pièces. Il peut aussi utiliser des fractions attribuées à chacune des pièces en fonction du rapport de leurs aires à celle de l'hexagone.

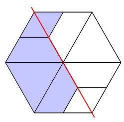
Illustrons ces deux types de stratégie par un exemple. Prenons l'hexagone composé de deux triangles équilatéraux, de quatre trapèzes isocèles et de deux losanges.



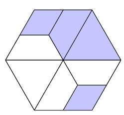
En utilisant une stratégie géométrique, il est possible de colorier une moitié de l'hexagone en sélectionnant toutes les pièces constituant une moitié et situées d'un côté d'une diagonale dessinée.



Toujours par rapport à une diagonale, il est possible de procéder par compensation de part et d'autre de celle-ci. Par exemple, en observant la diagonale qui traverse les deux losanges, on peut colorier un de ceux-ci et compenser le fait qu'une moitié dépasse de la diagonale, en ne coloriant pas le deuxième losange. Bien sûr, on colorie aussi deux trapèzes et un triangle équilatéral.

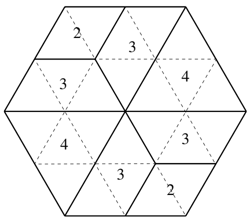


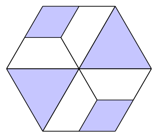
Enfin, toujours par une stratégie géométrique, voire visuelle, on peut imaginer qu'un élève colorie aléatoirement quelques pièces qu'il estime correspondre à une moitié. La réponse obtenue pourrait être correcte, par chance, ou erronée comme ci-dessous.



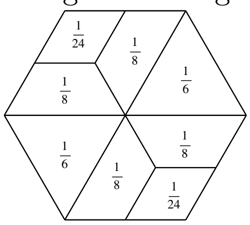
Cette situation-problème peut aussi être résolue numériquement et cela de différentes manières. Premièrement, on peut rechercher une unité de mesure commune et lui attribuer la valeur 1. Chaque pièce a alors une valeur exprimée par un nombre entier. Dans notre exemple, cette

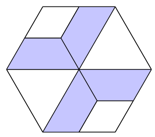
unité serait le triangle équilatéral obtenu en découpant un losange par une des diagonales de l'hexagone. Chaque losange vaudrait alors deux, chaque trapèze vaudrait trois et chaque grand triangle équilatéral vaudrait quatre. L'hexagone entier aurait alors une valeur de vingt-quatre et tout ensemble de pièces dont le total des mesures vaut douze serait une réponse correcte. La résolution repose donc sur la décomposition du nombre 12 en une somme de termes égaux soit à 2, soit à 3, soit à 4, étant bien entendu que nous ne pouvons utiliser au maximum que deux termes égaux à 2, deux termes égaux à 4 et quatre termes égaux à 3.
Dans le cas de notre exemple, il y a trois sommes différentes[6], 2+2+4+4, 2+3+3+4, 3+3+3+3, correspondant à vingt-six possibilités de coloriage correct.



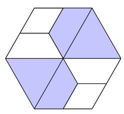


La situation-problème peut aussi être abordée numériquement par les fractions. À chaque pièce est alors attribuée une fraction égale au rapport de son aire à celle du grand hexagone.

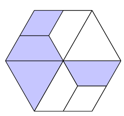




Toujours en travaillant avec des nombres, un élève pourrait, de manière erronée ou fortuitement correcte, compter le nombre de pièces et diviser ce nombre en deux. Ainsi, dans notre exemple, l'élève colorierait quatre pièces au hasard et pourrait obtenir la réponse erronée ci-dessous.



Enfin, dans le cas de notre exemple, ayant constaté que chaque pièce est utilisée un nombre pair de fois pour constituer l'hexagone, on peut choisir de colorier un losange sur les deux, un triangle sur les deux et deux trapèzes sur les quatre.



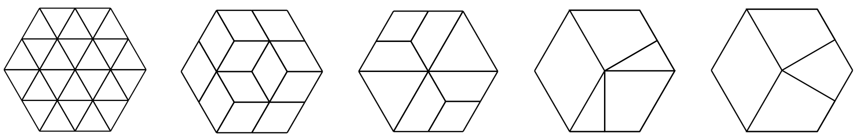
[6]Pour notre problème, il n'y a pas lieu de considérer comme différentes deux sommes qui ne diffèrent que par l'ordre des termes.

Les élèves pourraient buter sur différents obstacles.

– Un élève pourrait ne pas comprendre la consigne écrite, même après plusieurs lectures. Dans ce cas, l'accompagnement oral par un pair ou par l'enseignant s'avère nécessaire.
– Il est possible aussi qu'un élève ne perçoive pas ce qu'est la moitié de l'aire d'un hexagone. Pour cet élève, la fiche 6.7 est appropriée. Il découpe l'hexagone de papier et on lui demande de plier celui-ci en deux de telle sorte que les deux parties obtenues aient même aire. Les plis les plus fréquemment réalisés mettent en évidence les diagonales et les médianes. L'élève peut ensuite retourner à la situation-problème.
– Pour d'autres élèves, il peut être difficile de déplacer les pièces mentalement. Les fiches 6.2 à 6.6 peuvent alors être utilisées. Les pièces de l'hexagone choisi par l'élève sont découpées ainsi que l'hexagone de la fiche 6.7 ce qui permet à l'élève de déplacer réellement les pièces sur l'hexagone de papier. À l'aide de cet outil, l'élève répond à la consigne de départ.
– Cependant, toutes les possibilités de réponses ne peuvent pas être obtenues simplement par déplacement mental ou réel des pièces. Certaines solutions n'apparaissent qu'en utilisant des compensations (voir ci-dessus). Cet aspect pourrait poser problème à certains élèves qui souhaiteraient découper réellement les pièces pour les superposer avant d'admettre l'équivalence d'aire. Pour ces élèves, *Apprenti Géomètre* est l'outil par excellence et les fiches 6.10 à 6.14 sont prévues à cet effet. Toutes les découpes et déplacements de pièces peuvent être réalisés avec facilité et grande précision. Ces élèves disposent alors d'*Apprenti Géomètre* pour répondre à la consigne initiale et expliquent leurs démarches dans la narration de recherche.
– Enfin, pour d'autres élèves, il peut être difficile de percevoir la grandeur des pièces. C'est-à-dire qu'ils peuvent penser qu'une pièce est équivalente à une autre sans s'inquiéter de leurs aires. Ils peuvent aussi ne pas concevoir que des pièces de formes différentes ont même aire. Pour cet ensemble de difficultés, *Apprenti Géomètre* est un outil qui permet de comparer les différentes pièces en les découpant et en les juxtaposant. Un accompagnement attentif de ces élèves serait sans doute approprié.

Échos des classes

Cette activité a été menée dans la classe de 5e primaire qui avait passé le prétest. Pour la clarté du texte qui suit, attribuons un numéro à chaque puzzle hexagonal.



1 2 3 4 5

Tout d'abord, nous avons pu constater que la majorité des élèves (quinze sur vingt-cinq) choisissent d'aborder la situation-problème avec le puzzle

1. Cinq élèves travaillent avec le puzzle 2, trois avec le puzzle 4 et deux avec le puzzle 5. Aucun élève ne choisit le puzzle 3.

Certains élèves ont travaillé uniquement sur le premier puzzle qu'ils avaient choisi, notamment parce qu'ils ne parvenaient pas aisément à réaliser la narration de recherche demandée. D'autres élèves, ont tenté de répondre à la consigne pour différents puzzles. Huit élèves ont travaillé sur deux puzzles et quatre élèves ont eu le temps de choisir trois puzzles.

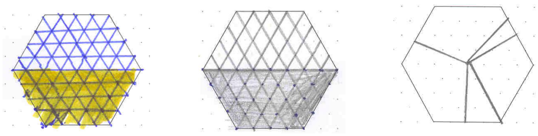
Nous avons orienté le second et le troisième choix des élèves vers des puzzles plus complexes en fonction des possibilités de chacun. Nous avons suggéré le puzzle 4, car une des pièces peut servir d'unité de mesure, et le puzzle 5 ensuite. Pour les élèves qui ont travaillé sur différents puzzles, le premier choisi, souvent plus simple, a eu un effet positif sur leur confiance en eux et leur motivation. Il semble qu'avec ce premier puzzle, ils se soient familiarisés avec la consigne, aient été rassurés quant à la possibilité de résoudre la situation-problème et qu'ils aient ensuite eu l'envie d'en résoudre d'autres.

Durant la séance d'expérimentation, tous les élèves ont été mobilisés par la situation-problème et ont manifesté un enthousiasme certain. Au niveau des coloriages, sur les quarante-deux fournis, une seule erreur a été commise. Nous avons observé chez tous les élèves une certaine satisfaction de la réussite.

Cette réussite au niveau des coloriages réalisés est cependant à nuancer par les narrations de recherche réalisées. Malgré l'exemple qui a été fourni, accompagné d'explications orales, de nombreux élèves fournissent une narration relative à la manière dont ils ont reproduit l'hexagone sur le papier triangulé. Ils négligent donc la consigne « Explique **pourquoi** les pièces coloriées correspondent à une moitié ». Dans un souci de différenciation et d'autonomisation, les élèves devaient prendre connaissance eux-mêmes des consignes écrites et de l'exemple de narration. Or nous avons constaté que les élèves avec lesquels nous avons expérimenté ne lisent pas attentivement ce qui est à leur disposition. Cette observation renvoie probablement à une attitude globale de ces élèves, extérieure à notre expérimentation.

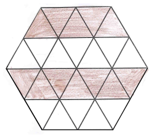
Rappelons que la fiche consacrée à la narration de recherche comportait un papier triangulé destiné à la réalisation d'un schéma et un espace pour des phrases explicatives. La reproduction sur le papier pointé a posé problème pour un tiers des élèves de la classe. Les réalisations ne respectent pas les propriétés du modèle, telles que le parallélisme, la perpendicularité, ou parfois même des propriétés évidentes telles que le nombre ou la forme des pièces.

Comme reproduction des puzzles 1 et 4, des élèves ont réalisé les dessins ci-dessous.



Les solutions proposées par les élèves pour le puzzle 1, qui laisse apparaître les diagonales de l'hexagone et un ensemble de vingt-quatre pièces identiques, sont variées. Certains élèves, qui colorient des pièces juxtaposées, l'expliquent d'un point de vue géométrique et d'autres numériquement.

Julien, que nous avions trouvé très « visuel » lors du prétest, colorie douze triangles situés en-dessous de la diagonale horizontale et indique dans sa narration que « Le mot moitié signifie une forme coupée en deux. Comme cet hexagone, il est coupé en deux ». Un autre élève nous indique que « une forme coupée en deux $= \frac{1}{2}$ ». D'autres élèves, qu'ils aient colorié douze pièces juxtaposées ou non, expliquent qu'ils ont colorié douze triangles parce que l'hexagone en contient vingt-quatre. Une élève colorie des « bandes » de triangles (son dessin apparaît ci-dessous) et s'explique par la symétrie et le retournement des bandes pour recomposer le trapèze obtenu par la découpe selon une diagonale. Elle écrit :« J'ai imaginé que si j'assemblais les deux morceaux, ça ferait le demi ».



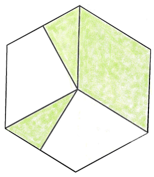
Marie, dyscalculique, colorie douze pièces rassemblées d'un côté d'une diagonale. Elle indique : « en tout, des deux côtés, ça fait 12 morceaux ». Ce qui ne permet pas de savoir si elle perçu ce nombre comme étant la moitié du total des pièces, ou comme étant le nombre de pièces contenues dans une moitié *géométrique*.

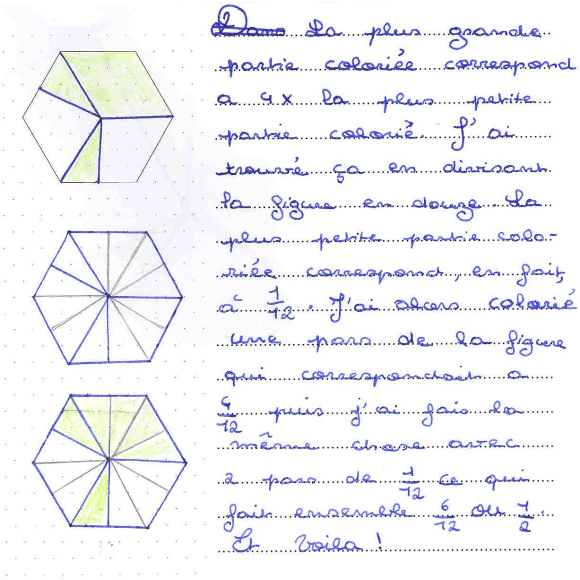
Sur l'ensemble de ceux qui ont choisi ce puzzle, un élève ne justifie pas sa réponse, dix élèves s'expliquent par le nombre de pièces et cinq élèves utilisent les formes. Une élève combine les deux approches.

En ce qui concerne le puzzle 2, sur les huit réponses que nous avons récoltées, six élèves expliquent leur réponse en décomposant 24 en deux fois 12, et deux élèves n'apportent pas d'explication.

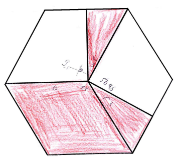
Le puzzle 3, n'a été choisi que par une élève qui avait déjà colorié le puzzle 1. Ses deux coloriages respectent strictement les diagonales, son explication du premier coloriage est numérique. Son deuxième coloriage n'est pas expliqué.

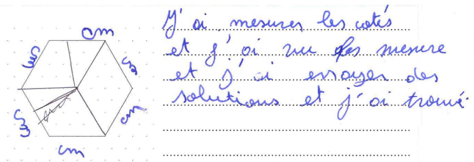
Deux élèves ont opté pour le puzzle 4 comme premier choix et nous avons guidé sept élèves vers ce problème en deuxième choix. Une élève, dont nous n'avions pas parlé précisément dans notre analyse du prétest, a travaillé seule, sans pièces mobiles, sans *Apprenti Géomètre* et a fourni une excellente justification de sa réponse. Nous la reprenons ci-dessous.



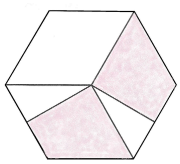


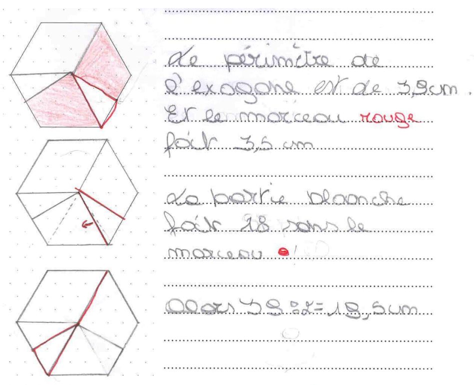
Nous avons également pu observer pour ce problème que deux élèves justifiaient l'exactitude de leur réponse par la mesure du périmètre de l'hexagone, et des côtés des pièces qui se superposent au contour de l'hexagone. Ainsi, Arthur, dont nous avions parlé précédemment, et qui avait montré une tendance à privilégier le numérique dans ses raisonnements, mesure les côtés de l'hexagone, avec un manque flagrant de précision, observe que le périmètre est de 39 cm, que les côtés extérieurs du losange mesurent 13 cm, ceux des trapèzes respectivement 9 et 9,5 cm (erreur de mesure) et le côté extérieur de chaque triangle 3 cm. Par une addition des mesures de ces côtés, il tente d'obtenir la moitié de 39 cm et pense obtenir ainsi une moitié de l'aire de l'hexagone. Dans le cas du puzzle choisi, la réponse obtenue est correcte mais il convient de montrer à cet élève son erreur de raisonnement.





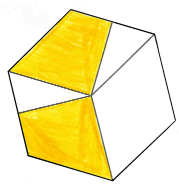
L'autre élève qui a pensé à la mesure du périmètre pour résoudre la situation, propose l'explication reprise ci-dessous. Ici aussi le raisonnement est imprécis et comporte des erreurs.

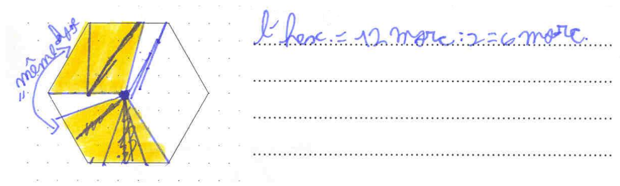




Les outils que nous avions prévus ont eu les effets escomptés. Lorsqu'un élève, après quelques minutes de réflexion, ne parvenait pas à résoudre la situation-problème, nous lui donnions un hexagone en carton et les pièces du puzzle choisi, réalisées en papier transparent. Outre que la manipulation de ces pièces a suscité un grand enthousiasme chez les élèves[7], elles ont permis d'obtenir rapidemment une solution. Sept élèves ont reçu les pièces correspondant à leur puzzle et sont alors parvenus à une solution.

Pierre, un élève à haut potentiel, qui travaillait sur le puzzle 4, avait pensé au triangle rectangle comme unité de mesure commune et a souhaité, explicitement, vérifier son idée à l'aide d'*Apprenti Géomètre*. Cependant, il a éprouvé ensuite quelques difficultés à fournir une bonne narration de recherche. Nous lui avons alors précisé qu'il pouvait expliquer son raisonnement par des opérations si cela lui semblait plus simple qu'un texte.





On peut voir ci-dessus que l'explication qu'il a finalement fournie, laisse entrevoir qu'il a compté le nombre de fois que l'unité de mesure commune était contenue dans l'hexagone avant de choisir le coloriage des deux trapèzes pour le nombre d'unités qu'ils contenaient. Cependant, son expression n'est pas correcte d'un point de vue mathématique. Elle comporte en effet des égalités en chaîne avec une utilisation abusive du signe « = ». Pour l'élève, le signe « = » est utilisé pour marquer la réalisation d'une opération.

Lors de cette expérimentation, les élèves ont utilisé des stratégies variées auxquelles nous nous attendions. Beaucoup d'élèves ont abordé la situation-problème par le déplacement imaginé ou réel des pièces, ce qui est naturel étant donné la présentation géométrique du problème. Un élève a utilisé une unité de mesure commune et des nombres entiers et un autre l'hexagone comme unité de mesure commune et des fractions. Nous avons donc tenté de mettre en évidence ces stratégies et leur intérêt pour l'ensemble des élèves.

[7]Ils ont d'ailleurs souhaité les conserver après l'activité.

2.2 Mise en commun des stratégies.

De quoi s'agit-il?

Après avoir tenté de résoudre la situation-problème complexe avec ou sans outil complémentaire à leur disposition et réalisé une narration de recherche, les élèves vont à présent devoir expliquer aux autres la stratégie qu'ils ont adoptée. L'enseignant met en évidence, avec ses élèves, qu'il est possible de résoudre la situation en travaillant avec les figures uniquement, mais qu'il est aussi possible de travailler avec des nombres. Cette stratégie numérique apparaîtra naturellement si certains élèves de la classe l'ont utilisée. Quoi qu'il en soit, l'objectif est ici de mettre en évidence les nombres et ils seront abordés, si nécessaire, par l'enseignant.

Enjeux

Exprimer son raisonnement ;

faire des liens entre différentes manières de résoudre une même situation.

Compétences

Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes. S'exprimer dans un langage clair et précis. Présenter des stratégies qui conduisent à une solution.

De quoi a-t-on besoin?

L'hexagone numéro 4 (voir plus haut) (fiche 6.3 réalisé en grand format avec l'ensemble de ses pièces), la fiche 6.15, de quoi écrire.

Comment s'y prendre?

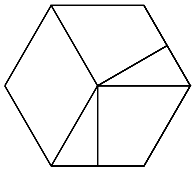
L'activité se déroule lors d'une séance qui suit celle de la situation-problème. À l'aide de l'hexagone en grand format placé au tableau, ou d'un rétroprojecteur et de transparents, un élève explique la manière dont il a procédé pour résoudre la situation. Si certains élèves ont adopté une stratégie différente, ils l'exposent à leur tour. L'enseignant demande ensuite aux élèves de trouver les points communs ou les différences entre ces stratégies.

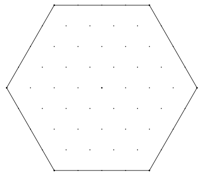
L'objectif est de mettre en évidence que l'on peut travailler avec les figures seules, notamment en les déplaçant, ou accompagner celles-ci de nombres entiers ou fractionnaires.

La dernière étape de la séance est de prendre note de ces deux stratégies en les illustrant, sur la fiche 6.15. Chaque élève complète sa fiche.

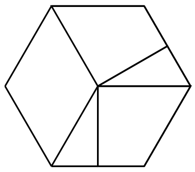
Fiche 6.15

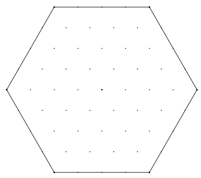
Prends note des différentes stratégies possibles pour résoudre cette situation-problème (fiche 3.1). La consigne est de colorier une moitié de ce puzzle en n'utilisant que des pièces entières.





....
....
....
....
....
....
....
....
....
J'utilise ....





....
....
....
....
....
....
....
....
....
J'utilise ....

Échos des classes

L'expérimentation a été réalisée dans une classe de 5^{e} primaire. Les élèves de cette classe ont suivi les séances précédentes de cette séquence et nous en avons parlé dans nos échos des classes.
La séance leur a été présentée comme étant un moment de mise en commun des stratégies qu'ils avaient découvertes pour résoudre le problème des puzzles hexagonaux.

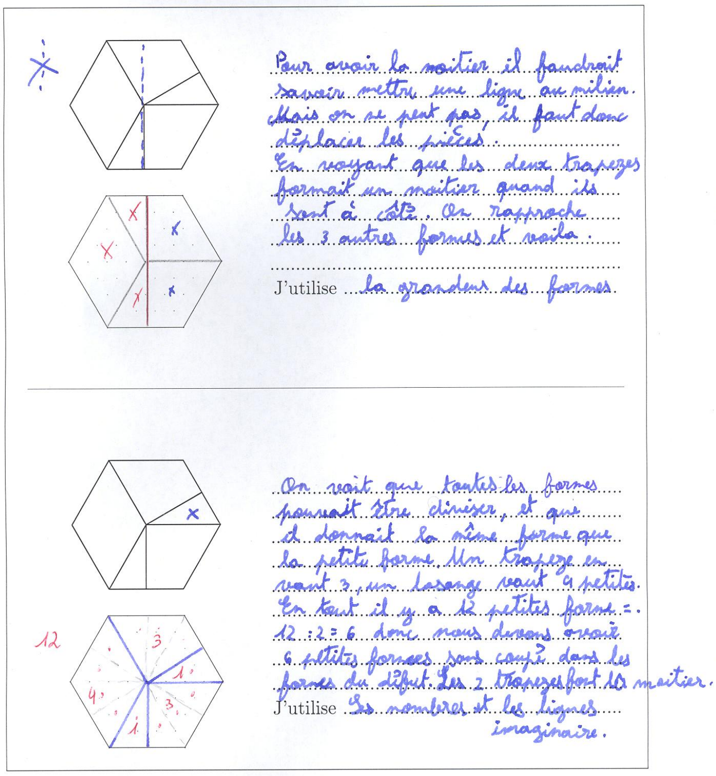
Nous avons d'abord demandé aux élèves quelles étaient les deux réponses possibles pour le puzzle 4, présenté par rétroprojection. Ensuite nous leur avons demandé pourquoi ces réponses étaient exactes, et comment ils les avaient découvertes.

Une élève a répondu : « On voit que les deux trapèzes font une moitié, si on enlève le triangle entre eux ». Sur le transparent, nous avons alors réellement déplacé les deux trapèzes à l'aide de formes prédécoupées. Ils ont été placés l'un à côté de l'autre en les superposant à une moitié d'hexagone obtenue par la médiane.

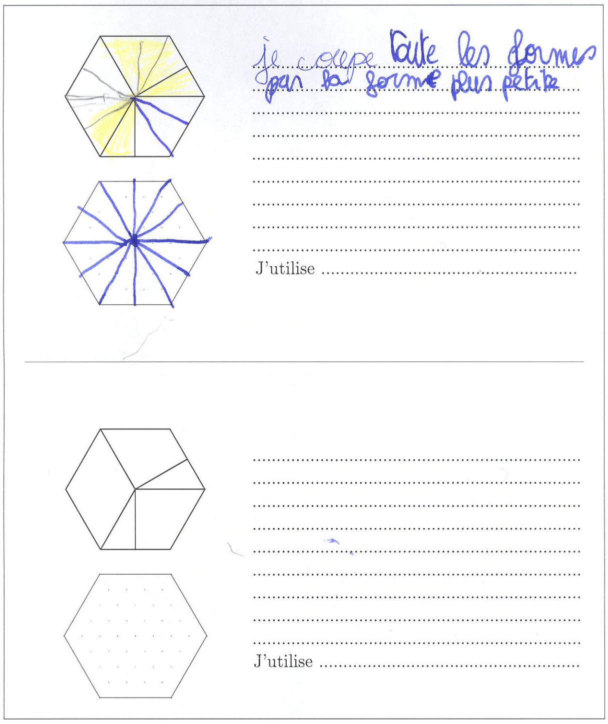
Une autre élève a ensuite placé les trois pièces restantes pour reconstituer l'autre moitié. Oralement, avec l'ensemble des élèves, nous avons expliqué que nous venions de déplacer les pièces pour reconstituer « une moitié que l'on peut voir ». Une élève a justifié que c'était bien une moitié car si l'hexagone était en carton, on pourrait le plier en deux de cette façon.

Rappelons que deux élèves de la classe avaient opté pour l'utilisation de nombres dans la résolution du puzzle 4. Nous aurions pu leur laisser la possibilité de présenter leur solution aux autres élèves et d'observer à ce moment-là la réaction des élèves qui n'avaient pas pensé aux nombres. Nous avons plutôt choisi de demander à l'ensemble des élèves s'il était possible d'utiliser des nombres pour le puzzle présenté. Nous avons donc montré les puzzles 1 et 2 en annonçant que beaucoup d'élèves de la classe avaient compté le nombre de pièces de ces puzzles pour en trouver une moitié. À la question « est-il possible de résoudre ce puzzle-ci de la même façon ? », les élèves répondent que ce ne serait pas correct étant donné que les pièces n'ont pas la même grandeur. « Comment faire alors ? » Les élèves parlent alors de lignes invisibles, qui sont les diagonales et les médianes, faisant ainsi apparaître douze triangles rectangles. Ils indiquent spontanément qu'il est maintenant possible de compter les pièces et qu'il y en a douze. Une élève, qui n'était pas encore intervenue, lève la main pour indiquer « qu'on a un problème parce qu'on ne peut prendre que des pièces entières ». Très rapidement, plusieurs élèves indiquent que si on prend les deux trapèzes, on obtient six triangles, ce qui fait la moitié. Vient alors la mesure de chaque pièce, avec le triangle comme unité. Nous indiquons sur le transparent, pour chaque pièce, le nombre de triangles qu'elle contient. Nous explicitons, ensemble, que nous avons utilisé des nombres pour résoudre la situation-problème.

Il est ensuite demandé aux élèves de compléter la fiche pour garder une trace des deux stratégies mises en évidence. Une des fiches complétées est reprise ci-dessous. Nous l'avons choisie pour sa qualité tant au niveau des schémas, qu'au niveau des phrases qui les accompagnent.



Cet exemple de narration doit être nuancé par d'autres. Celle ci-dessous laisse apparaître une compréhension lacunaire du concept d'unité de mesure commune pour la comparaison des pièces, et manque cruellement de précision.



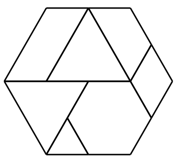
Dans l'ensemble, en observant les fiches qu'ils ont complétées, les élèves semblent avoir compris que nous avons fait apparaître les petits triangles dans le but de comparer les pièces du puzzle. Cependant, il reste à savoir s'ils seront capables d'utiliser ce concept spontanément dans la situation-problème suivante, ou dans d'autres contextes.

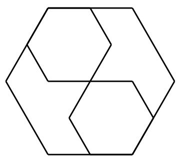
2.3 Vers les fractions.

De quoi s'agit-il?

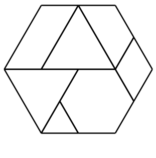
Cette activité s'adresse à des élèves qui ont suivi les deux activités précédentes. L'enseignant leur indique qu'ils vont découvrir deux nouveaux hexagones construits selon les mêmes principes que ceux précédemment rencontrés et qu'ils doivent à nouveau en colorier une moitié. La particularité cette fois est qu'il est imposé aux élèves d'utiliser des nombres. L'enseignant leur rappelle la stratégie numérique mise en évidence à l'aide de la fiche 6.15 (qui peut rester à leur disposition).

Fiche 6.16
Voici deux nouveaux puzzles hexagonaux.
Choisis l'un d'eux. Sur la fiche qui lui correspond, colories-en une moitié en n'utilisant que des pièces entières.
Utilise des nombres pour justifier ta ou tes réponse(s).





Fiche 6.17 (et fiche 6.18[8])
Colorie les pièces que tu as sélectionnées pour faire une moitié.
Explique à côté, avec des nombres, pourquoi ces pièces valent une moitié de l'aire.



....
....
....
....
....

Enjeux

Trouver et utiliser une unité de mesure commune ;
Exprimer son raisonnement.

[8]La fiche 6.18 est l'équivalente de la fiche 6.17 pour le deuxième puzzle hexagonal.

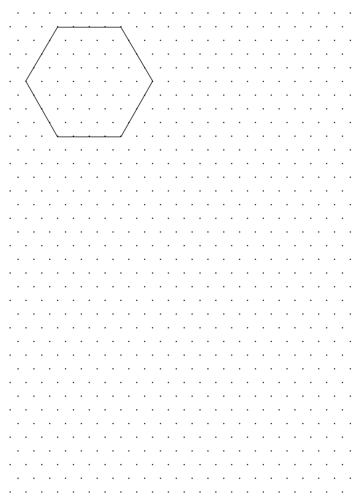
Compétences Effectuer des opérations dans des situations variées avec des fractions. Additionner et soustraire des grandeurs fractionnées.

De quoi a-t-on besoin? Les fiches , 6.17, 6.18, 6.19, de quoi écrire.

Comment s'y prendre? Dans un premier temps, les élèves peuvent utiliser des nombres entiers. Par la suite, les résultats obtenus avec ceux-ci et la démarche de recherche d'une unité de mesure commune seront réanalysés et les fractions seront introduites. Il est important de faire les liens, sur une même situation-problème, entre les rapports exprimés par les entiers et ceux exprimés par les fractions.
L'enseignant distribue les fiches et rappelle qu'il s'agit à présent d'utiliser des nombres pour résoudre la nouvelle situation-problème.

Il se peut que certains élèves parviennent à déterminer le rapport de l'aire de chacune des pièces à celle de l'hexagone sans autre outil que la représentation sur la fiche. Il est cependant probable qu'une majorité d'élèves ait besoin d'un outil pour réaliser cela. Nous proposons deux aides différentes. Le premier, sans doute le plus complexe, est une grille triangulée sur laquelle figure déjà l'hexagone mais pas ses pièces. L'élève utilise la grille triangulée pour dessiner le nombre de fois qu'il le souhaite, avec l'agencement qu'il souhaite, les pièces afin de déterminer le rapport des aires. Avec cet outil, il peut découvrir le nombre de fois que chaque pièce est contenue dans l'hexagone et par la suite attribuer à la pièce une fraction : son rapport à l'hexagone.

Fiche 6.19
Utilise la grille pour découvrir la valeur de chaque pièce. Attribue ensuite à chaque pièce le nombre qui lui correspond.

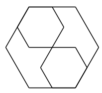


L'autre outil pour déterminer ces rapports d'aire est bien entendu *Apprenti Géomètre*. Ce dernier est sans doute plus approprié pour des élèves en difficulté. Il permet aisément de dupliquer les pièces, de les déplacer, de les ajuster pour les superposer et les comparer.

La fiche 6.20 est quant à elle destinée aux élèves qui ne comprendraient pas d'emblée que la consigne appelle en réalité à le recherche et à l'utilisation d'une figure comme unité de mesure commune. L'aide de l'enseignant, ou d'un pair, est alors conseillée.

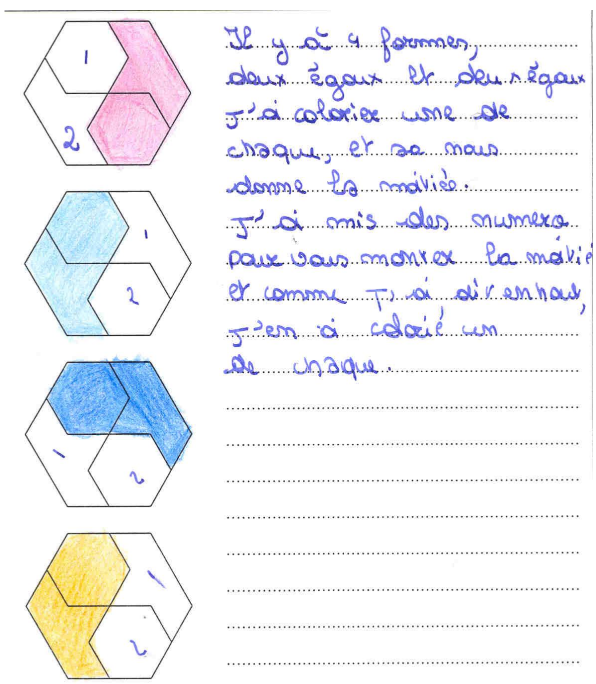
Échos des classes

Nous avons expérimenté cette activité dans la classe de 5^{e} année primaire précédemment citée. Etant donné que certains élèves de ce groupe ne prennaient pas correctement connaissance des consignes, nous avons oralement insisté sur cette nécessité.

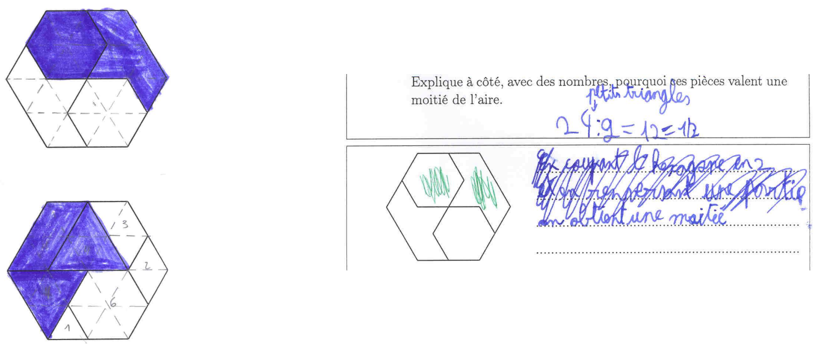


Dix-neuf élèves ont choisi de travailler avec le puzzle à quatre pièces, repris ci-dessus. Toutes les réponses fournies sont correctes. Cependant, deux élèves n'ont pas utilisé d'unité de mesure commune et semblent ne pas maîtriser ce concept. Un d'entre eux déplace les pièces et les numérote. L'autre élève propose deux réponses correctes mais ne parvient pas à les justifier. Parmi eux, Marie, dyscalculique, fournit une très bonne narration et n'a pas eu de difficultés à utiliser des nombres dans ce contexte.

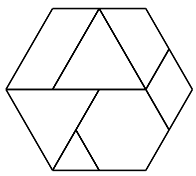
Treize élèves semblent maîtriser l'utilisation d'une unité de mesure commune. Les quatre derniers élèves ont utilisé la particularité du puzzle de contenir quatre pièces, deux à deux de même aire et de même forme. Une de leurs narrations figure ci-dessous.



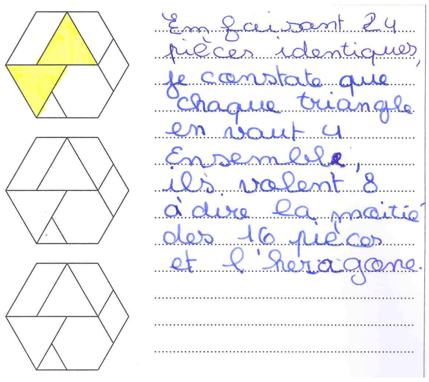
Nous l'avons dit, beaucoup d'élèves n'ont pas de difficulté à utiliser une unité de mesure commune. Nous retrouvons par contre des difficultés dans leurs narrations. Leurs phrases sont souvent peu précises, proches du langage oral, et l'ensemble du texte est peu structuré. Bien souvent, on devine ce que l'élève a voulu dire, plus qu'on ne le lit. Nous avons obtenu une justification sous la forme d'un calcul, mais contenant un usage abusif du signe « = ». Cette explication est celle de Pierre, élève à haut potentiel.



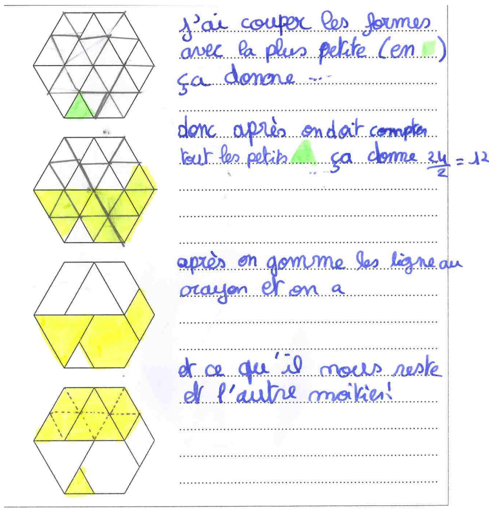
Onze élèves, dont certains avaient déjà travaillé sur le premier puzzle, ont choisi ce second puzzle. Les coloriages réalisés sont corrects dans l'ensemble mais des erreurs apparaissent. À deux reprises, des pièces ont été partiellement coloriées – ce qu'interdisait la consigne – et à deux reprises également, les deux grands triangles équilatéraux ont été considérés comme une moitié.



Une élève est en difficulté par rapport à l'unité de mesure commune. Elle sait que chaque grand triangle équilatéral vaut quatre petits triangles équilatéraux, unité de mesure commune aisée, mais elle ne tient pas compte de la valeur totale de l'hexagone. Précédemment, cette élève avait choisi le puzzle contenant vingt-quatre triangles identiques, et avait colorié la moitié inférieure obtenue par la diagonale horizontale. Sa justification indique qu'elle a compté les triangles mais ne comporte pas de nombres. De plus, son coloriage est erroné.



Exception faite de cette élève, tous ont utilisé le petit triangle équilatéral comme unité de mesure commune, ainsi qu'une narration mettant en évidence cette utilisation. Deux exemples de narrations correctes apparaissent ci-dessous, elles sont exceptionnelles par leur précision mais toutes les narrations obtenues font apparaître l'utilisation d'une unité de mesure commune.



Le papier pointé proposé aux élèves a eu une utilité mitigée. Les élèves qui ont d'emblée pensé à l'unité de mesure commune n'ont pas eu besoin de cet outil pour la faire apparaître. Certains ont préféré l'usage d'*Apprenti Géomètre* pour vérifier leur intuitions concernant les rapports entre les pièces. Pour les élèves en difficulté par rapport à ce concept, cet outil seul n'était d'aucun secours. L'écartement des points a même amené certains à utiliser une unité de mesure commune trop petite. De plus l'utilisation d'une couleur unique pour les tracés sur cette grille a amené des confusions par rapport aux pièces originales. Il est alors difficile de respecter la consigne.

L'utilisation d'*Apprenti Géomètre* a été intéressante. Six élèves ont eu une demande précise de découpe des pièces. Tous ont découpé en petits triangles équilatéraux, pour ensuite déplacer et superposer ceux-ci aux autres pièces. Leur objectif était de mettre en évidence le nombre de triangles pouvant être contenus dans les pièces. Malheureusement, la diposition expérimentale ne prévoyait qu'un ordinateur pour la classe et certains élèves en difficulté n'ont pas eu accès à *Apprenti Géomètre*. Nous pensons cependant qu'un accompagnement de ces élèves avec le logiciel aurait été bénéfique.

2.4 Conclusion

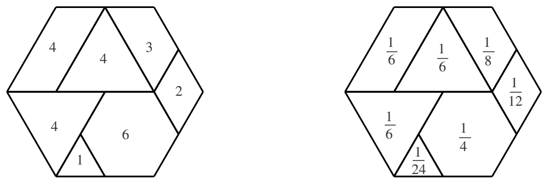
Le prétest a permis d'observer que quelques élèves, notamment l'élève à haut potentiel, étaient déjà capables d'opérer sur des fractions dans des contextes variés. Cet élève en particulier pense spontanément à l'utilisation des fractions, conçoit « $\times\frac{1}{2}$ » comme équivalent à « : 2 » et utilise avec aisance le principe d'une unité de mesure commune. Cette habileté à utiliser une stratégie numérique semble être réservée à des élèves assez performants en mathématiques. D'autres élèves sont encore très attachés au contexte géométrique, et se limitent parfois aux formes. Dans les activités proposées, nous avons tenu compte de cette hétérogénéité du groupe d'élèves.

Notre objectif était d'arriver aux opérations d'additions et de soustraction de fractions, pour l'ensemble des élèves. Nous avons respecté le rythme des élèves n'utilisant pas de nombres lors du prétest. Ils ont pu manipuler des outils, tels qu' *Apprenti Géomètre* et des formes en papier, pour approfondir leur stratégie et découvrir les rapports existants entre les figures. Dans la séquence *« Vers les fractions »* (2.3), nous les avons guidés pour que ces observations s'expriment par des nombres. Une élève dyscalculique est elle aussi parvenue à résoudre la situation-problème en utilisant une unité de commune mesure et des nombres. Les élèves qui avaient marqué une tendance au numérique dès le départ ont pu réinvestir cette stratégie dans la situation-problème et s'exercer à justifier leur démarches à travers la narration de recherche.

Pour la majorité des élèves, l'expression d'un raisonnement en français, ou en langage mathématique, n'est pas chose aisée. Les activités proposées dans ce chapitre ne fixaient pas cette compétence comme objectif, mais nos observations mènent à penser qu'il y a là un domaine de recherche et d'apprentissage à part entière. Les élèves performants, comme l'élève à haut potentiel, n'échappent pas à cette difficulté d'expression.

Enfin, le lecteur aura certainement remarqué que nous n'avons pas réalisé avec les élèves de « réelles » additions et soustractions de fractions. Cependant, comme développé dans le chapitre 5, nous avons travaillé des fractions de grandeurs et l'utilisation d'une unité de commune mesure. Notre cadre mathématique et des expérimentations précédentes (non publiées) indiquent que par ce chemin, si on y consacre du temps, les élèves découvrent par eux-mêmes les équivalences de fractions et la réduction au même dénominateur, indispensables aux opérations mentionnées.

Une suite intéressante aux activités développées dans ce chapitre serait de revenir à un des puzzles hexagonaux, repris ci-dessous. Celui-ci contient des pièces correspondant aux fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{24}$. Après manipulation des figures, notamment à l'aide d'*Apprenti Géomètre*, des rapports pourraient être exprimés soit par des nombres entiers, soit par des rationnels, après le choix d'une unité de mesure commune. Les élèves de la classe expérimentale, à l'exception de trois élèves qui auraient besoin d'une aide plus approfondie, sont parvenus à exprimer les valeurs des pièces à l'aide de nombres entiers.



Le fait de choisir une unité de mesure plus petite que les figures est assez naturel. Cependant pour exprimer les figures présentes sous la forme de fractions, il faut choisir le grand hexagone comme unité. Les liens entre l'expression des rapports avec ces différentes unités doivent être explicités avec les élèves. On peut alors, notamment, se rendre compte que le petit triangle est contenu vingt-quatre fois dans le grand hexagone et qu'il correspond donc à $\frac{1}{24}$ de celui-ci. Si une pièce vaut 4 petits triangles, ce qui est le cas des deux grands triangles et du parallélogramme, elle vaut $\frac{4}{24}$, que l'on peut simplifier en $\frac{1}{6}$. On peut arriver à des additions de fractions de grandeurs telles que, si je rassemble les deux grands triangles, j'obtiens $\frac{8}{24}$, ce qui équivaut à $\frac{1}{3}$ de l'hexagone. De nombreuses opérations sont alors possibles, toujours avec le support concret des pièces.

En travaillant avec ce puzzle hexagonal — et les autres proposés — on peut donc aboutir à des comparaisons et des équivalences de fractions, des réductions au même dénominateur et à des opérations d'addition et de soustraction de fractions.

Il nous semble important de préciser que cette activité sur des fractions de grandeurs devrait être complétée par d'autres qui font varier la grandeur observée (longueur, masse, capacité. . .) et les fractionnements réalisés. La variété des fractions concrètement rencontrées ne peut que favoriser une meilleure abstraction.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Annexe 1 – Les formes d'esprit

Les formes d'esprit

> Je ne puis commencer une phrase en sachant comment elle finira ; je ne sais pas peser mes mots, je ne puis préciser ma pensée en l'exprimant sous une forme parfaite. [...] Non, ce n'est pas l'intuition qui trompe, c'est le fait de ne pas avoir assez d'intuition.
>
> H. LESBESQUE

Laurent SCHWARTZ a été l'un des grands mathématiciens du XX^ième siècle. Or comme le prouve son témoignage (voir ci-après), il avait l'esprit lent et était incapable de voir dans l'espace. Alexandre GROTHENDIECK a été lui aussi un mathématicien très profond. Or il était, comme le montre le témoignage ci-dessous, incapable de raisonner sur une théorie en s'appuyant sur un exemple. L'existence parmi les mathématiciens, de formes d'esprit aussi dépourvues de qualités que l'on relève souvent comme constitutives de la capacité à faire des mathématiques devrait nous rendre extrêmement prudents lorsque nous affirmons qu'un élève ne s'en sort pas en mathématiques.
Il n'y a pas de raison que ce qui est vrai des mathématiciens, à la fois la diversité de leurs formes d'esprit et les sortes de « handicaps » de leur intelligence, ne soit vrai aussi du commun des mortels et en particulier des élèves. Qu'on nous permette d'étayer ce jugement par une citation, elle aussi d'un grand mathématicien :
« Entre le travail d'un étudiant qui essaie de résoudre un problème de géométrie ou d'algèbre et un travail d'invention, on peut dire qu'il n'y a qu'une différence de degré, de niveau, les deux travaux étant d'une nature analogue. » [1].
Il apparaît donc comme extrêmement important de discerner dans une classe les éventuelles capacités cachées de chaque élève. Ce n'est sans doute pas facile. Mais qu'on nous permette de conclure avec H. Poincarré :
« Il faut donc nous résigner à la diversité des esprits, ou mieux, il faut nous en réjouir. » [2]

Deux aveux de L. SCHWARTZ.

En dépit de ces succès, j'étais profondément anxieux quant à mes capacités intellectuelles et me croyais inintelligent. J'avais en effet – et j'ai d'ailleurs toujours – l'esprit lent. Il me faut du temps pour saisir les choses parce que j'éprouve le besoin absolu de les comprendre à fond. Si je répondais le premier aux questions du professeur, j'avais parfaitement conscience que c'était parce qu'il posait des questions dont je connaissais plus ou moins la réponse. Si en revanche une question nouvelle surgissait, il n'était pas rare que des élèves

[1] (cf. J. Hadamard, Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, Gauthier-Villars, Paris, 1978 ; (1[ière] éd. en anglais 1945))
[2] [25].

plus faibles répondissent plus vite que moi. Vers la fin de la première, j'en vins à penser que j'étais bête. Cela me donna du souci pendant une longue période. Non seulement je ne me croyais pas intelligent, mais je ne m'expliquais pas la contradiction entre cette apparence de bêtise et ma réussite scolaire. Je n'en parlais à personne mais n'en étais pas moins convaincu qu'un beau jour l'imposture serait dévoilée : le monde – et moi-même – finirait bien par s'apercevoir que ce que l'on prenait pour de l'intelligence n'était évidemment qu'une illusion. Apparemment la chose est passée inaperçue, bien que j'aie toujours l'esprit aussi lent ! Quand un professeur dictait son cours, j'avais du mal à le prendre en notes, et j'ai toujours quelque difficulté à suivre un séminaire.
À la fin de la classe de première, je pris ce que je considère être la mesure de la situation : *la rapidité d'esprit n'a pas de rapport précis avec l'intelligence.* [3] Ce qui importait était de comprendre les choses en profondeur, ainsi que *leurs relations les unes avec les autres.* Là résidait l'intelligence. Le fait d'être rapide ou lent n'y changeait rien. Naturellement, il est plus avantageux d'avoir l'esprit rapide, comme d'avoir de la mémoire. Mais ce n'est ni nécessaire ni suffisant pour la réussite intellectuelle. Les lauriers récoltés au concours général me libérèrent définitivement de mon angoisse. Premier prix de thème latin et premier accessit de version latine, je n'étais plus seulement un lycéen brillant : j'acquérais une distinction nationale. Le concours général compta beaucoup dans ma vie en me débarrassant d'un complexe terrible. Bien entendu, je ne me suis pas métamorphosé et j'ai toujours été confronté aux mêmes embarras, simplement, je sais depuis ce jour-là qu'ils ne sont pas des obstacles infranchissables et qu'en dépit de passages délicats, voire pénibles, ils ne me barrent pas la voie de l'accomplissement qu'est pour moi la recherche. Heureusement, j'étais servi par une excellente mémoire. Ainsi, en classe de terminale, en mathématiques, je crois qu'à la fin de l'année je me souvenais, sans avoir rien écrit, de tout ce que j'avais étudié. Tout en connaissant parfaitement mes limites, j'éprouvais désormais une solide confiance dans mes possibilités. (cf. Laurent Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997 ; 529 pages, pages 42-43.)

Ma compréhension de la géométrie comporte une caractéristique peu banale. J'ai déjà mentionné « la vacuité de mon hémisphère droit » et mon incapacité à me repérer dans l'espace. Je ne voyais donc rien à la géométrie dans l'espace, ou à peu près rien, et ne visualisais pas plus une figure formée d'un certain nombre de droites et de cercles dans le plan. Si je la traçais, je pouvais y comprendre quelque chose mais rien ne subsistait dans ma mémoire. Je me basais uniquement sur les problèmes géométriques qui, d'une manière ou d'une autre, peuvent se ramener à des propriétés locales ou simples. Cela permettait de traiter parfaitement tous les problèmes auxquels j'ai fait allusion ici. L'inversion, l'espace projectif, la conique ombilicale, ne nécessitent aucune vision géométrique perfectionnée. Mais c'était une manière quelque peu étrange de faire de la géométrie, et, par la suite, j'ai été de plus en plus perturbé par une absence presque complète de vision des figures. Le bon vieux théorème de première selon lequel le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de la hauteur par l'aire de la base ne m'apparaissait pas bien clairement. La décomposition du parallélépipède en réunion de trois tétraèdres de même volume n'est pas perceptible pour moi. J'avais une énorme mémoire, me souvenant non seulement de

[3]Les passages en caractères italiques de ce texte, sont ceux que nous souhaitons mettre en évidence.

tout ce que j'avais lu, mais aussi des problèmes que j'avais faits. Je ne dépassai jamais les dimensions deux et trois, et n'étais pas sûr qu'il fût rigoureux de parler de l'espace à quatre dimensions. J'interrogeai Julien pour savoir si, de même que l'ellipse était une projection orthogonale d'un cercle, un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe était projection orthogonale d'une sphère dans un espace euclidien à quatre dimensions. Cela lui semblait suspect et il me déconseilla d'utiliser de telles propriétés, ce que l'on me confirma à peu près dans les termes en spéciales. Je ne persévérai pas, des applications du type $x' = ax, y' = by, z' = cz$, pouvant donner à partir d'une sphère un ellipsoïde quelconque, sans monter en dimension. Mais je reste étonné, en me remémorant ce que j'avais étudié et compris, que les espaces à n dimensions, pour n plus grand que 3, me soient restés étrangers. On n'en parlait dans aucun des livres que j'avais lus, et je ne les ai pas découverts seul. Plus tard, jusqu'à l'École normale comprise, on ne m'en parla jamais, excepté dans le cours de Leray au Collège de France qui mentionnait les espaces de Banach de dimension infinie, mais on ne rencontrait pas ailleurs d'espace euclidien de dimension n au moins égale à 4. C'est bien étrange.

Le contraste entre mon amour pour la géométrie et mon absence presque complète de vision géométrique tient vraiment du mystère. Dans mes connaissances actuelles, il ne subsiste que ce qui n'est pas figuratif : la géométrie analytique (variétés complexes), la géométrie différentielle et la topologie algébrique pas trop poussées, mais ni la topologie différentielle, ni les catastrophes de Thom, ni la théorie des nœuds, etc. *En gros, j'aime la géométrie assez proche de l'algèbre ou de l'analyse, pas la géométrie visuelle.* Cette incapacité à me repérer dans l'espace explique que je n'ai jamais appris à conduire. Mon absence de vision topographique est presque totale. Dans Paris même, il suffit que je tourne deux ou trois fois, pour ne plus savoir situer la direction de la première rue. Connaissant par cœur la liste des stations de certaines lignes de métro ou d'autobus parce que chaque mot engendre le suivant, je n'ai pas la moindre idée du paysage correspondant. Je sais que, si l'on projette orthogonalement un point du cercle circonscrit à un triangle sur les trois côtés, les projections sont sur une même droite, la droite de Simson de ce point, *mais je ne me représente pas la figure. Néamoins, il m'est possible, sans y voir, de démontrer le théorème de Simson.* Je savais démontrer que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle était une hypocycloïde à trois rebroussements, mais je ne le voyais pas. Je sais pareillement démontrer le théorème de Pappus, mais je ne vois pas la figure : la démonstration que j'avais exposée à mon examinateur (et qui n'est pas la plus élémentaire) ne le nécessite pas. Je suis incapable de me représenter ma filiation avec un parent éloigné et, en l'absence d'un arbre généalogique, je suis obligé d'y réfléchir à deux fois. Je ne pourrais sûrement pas jouer une partie d'échecs sans voir l'échiquier, mais je ne suis pas le seul dans ce cas. Mon éducation comme mes chasses aux papillons auraient dû me guérir de *mon crétinisme topographique*, mais elles ne sont pas parvenues à effacer ce trait trop fortement génétique, dont sont affligés d'ailleurs, à un moindre degré, d'autres membres de ma famille. (cf Laurent Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997 ; 529 pages, pages 57-58.)

Un témoignage sur A. Grothendieck.

Un caractère frappant du mode de pensée de GROTHENDIECK est qu'il semblait s'appuyer tellement peu sur des exemples. On peut voir cela dans la légende de ce qu'on a appelé « le nombre premier de GROTHENDIECK ». Lors d'une conversation mathématique, quelqu'un suggéra à GROTHENDIECK de considérer un nombre premier particulier. GROTHENDIECK demanda : « Vous voulez dire vraiment un nombre particulier ? » L'autre personne répondit : « oui, vraiment un nombre particulier ». GROTHENDIECK suggéra : « Très bien, prenons 57. »
Mais GROTHENDIECK devait savoir que 57 n'est pas premier, non ? Absolument pas, dit David MUMFORD de Brown University. « Il ne pense pas concrètement ». Il faut considérer par contraste le mathématicien indien RAMANUJAN, qui connaissait familièrement les propriétés de nombreux nombres, certains énormes. Cette manière de penser relève d'un univers aux antipodes de celui de GROTHENDIECK. « En réalité – observe MUMFORD – jamais il ne travaillait sur des exemples. »
« Je ne comprends les choses qu'à travers les exemples et en les choisissant petit à petit plus abstraits. Je pense que cela n'aidait pas le moins du monde GROTHENDIECK de considérer un exemple. En réalité, il arrivait à maîtriser une situation en la pensant de la façon absolument la plus abstraite possible. C'est tout à fait étrange. Mais c'est comme cela que son esprit fonctionnait. » Norbert A'CAMP de l'Université de Bâle posa un jour une question à GROTHENDIECK à propos des solides platoniciens. Les solides platoniciens sont tellement beaux et exceptionnels, dit-il, qu'il ne faut pas imaginer qu'une beauté si exceptionnelle se retrouve dans une situation plus générale. (cf. page 1196 Allyn Jackson,*As if summoned from the void : the life of Alexandre Grothendieck*, Notices of the A.M.S., 51, 2004, pages 1196-1212.)

Annexe B

Bibliographie

[1] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, [1997], *Décret « Missions de l'École »*, Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[2] Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, [1999], *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*, Ministère de la Communauté française, Bruxelles.

[3] J.-P. Astolfi, [1997], *L'erreur, un outil pour enseigner*, ESF, Issy-les-Moulineaux.

[4] G. Bachelard, [1992], *Épistémologie, textes choisis*, Presses Universitaires de France, Paris.

[5] G. Brousseau, [1983], Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des Mathématiques*, 4.2, p.165–198.

[6] G. Brousseau, [1998], *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[7] C. Campolini, A. Timmermans, et A. Vansteelandt, [2002], *Dictionnaire de logopédie : La construction du nombre*, Peeters, Leuven.

[8] Jean-Pierre Cazzaro, Guy Noël, Frédéric Pourbaix, et Philippe Tilleuil, [2001], *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, De Boeck, Bruxelles.

[9] Yves Chevallard, [1985], *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[10] CREM, [2002], *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[11] CREM, [2003], *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[12] CREM, [2004], *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[13] H. Desmet et J.-P. Pourtois, [1997], *L'éducation postmoderne*, Presse Universitaire de France, Paris.

[14] Equipe interuniversitaire, [2001], *Les enfants et adolescents à haut potentiel, Rapport final 31 août 2001*, Ministère de la Communauté française de Belgique, Bruxelles. Recherche-action.

[15] Howard Gardner, [1997], *Les formes de l'intelligence*, Ed. Odile Jacobs, Paris.

[16] D. Hammil, Dorald, [february, 1990], On defining learning disabilities : an emerging consensus., *Journal of learning disabilities*, (23), p.74–84.

[17] K.A Heller, F.J Münks, R.J. Sternberg, et R.F Subotnik, editors, [2000], *International Handbook of Giftedness and Talent*, Pergamon Press, New York.

[18] K.A. Kavale et S.R. Fortness, [1985], Learning disability and the history of science : paradigm or paradox ?, *Remedial and special education*, (6), p.12–23.

[19] K.A. Kavale et C. Nye, [1985-1986], Parameters of learning disabilities in achievment, linguistic, neuropsychological, and social/behavioral domains., *Journal on special education*, (19), p.443–458.

[20] Samuel Kirk, [1962], *Educating exceptional children*, Hougton Mifflin, Boston.

[21] L. Legrand, [1986], *La différenciation pédagogique*, Scarabée, Paris.

[22] Ph. Meirieu, [1995], *Enseigner, scénario pour un métier nouveau*, ESF édition, Paris. 7e édition.

[23] S Molina Garcia, [1997], *El fracaso en el aprendisaje escolar. Dificultades globales de tipo adaptativo*, Aljibe, Málaga.

[24] D. Normand-Guérette, [1993], *Entretiens avec Moncef Guitouni*, Presses de l'Université du Québec, Sainte-Foy.

[25] H. Poincaré, [1918], *Sciences et méthode*, Flammarion, Paris.

[26] Halima Przesmycki, [1991], *La pédagogie différenciée*, Hachette, Paris.

[27] J.S. Renzulli, [1978], What makes giftdness ? Reexaming a definition, *Phi Delta Kappa*, (60), p.180–184.

[28] J.S. Renzulli. The three ring conception of giftedness : a developmental model of creation productivity. In R.J. Sternberg et J.E. Davidson, editors, *Conceptions of giftdness*, p. 53–92. Cambridge University Press, New York, 1986.

[29] N. Rouche, [1998], *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*, Ellipses, Paris.

[30] Alan Schoenfeld, [1985], *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, FL.

[31] Alan Schoenfeld, [2006], Problem Solving from Cradle to Grave, *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, A paraître, . Paper presented at the symposium "Mathematical learning from early childhood to adulthood", Mons, Belgium, July 7–9, 2005.

[32] R.J. Sternberg, [1985], *Beyond IQ : a triarchic theory of intelligence*, Cambridge University Press, New York.

[33] A. Strebelle, C. Depover, et B. Noël, [septembre 2002], Pour une prise en compte didactique des obstacles à la compétence, *Le point sur la recherche en Éducation*, 25, . Ministère de la Communauté Française, Bruxelles.

[34] H. Lee Swanson, [1991], Operational definitions and learning disabilities : an overview, *Learning disability quarterly*, 14, p.242–254.

[35] D. Tall, [1991], *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[36] H. Trochmé-Fabre, [1999], *Réinventer le métier d'apprendre*, Éditions d'Organisation, Paris.

[37] D. Wechsler, [1996], *WISC III : Échelle d'Intelligence de Wechsler pour enfants*, Éditions du Centre de Psychologie Appliquée, Paris. Troisième édition.

[38] A. Ziegler et K.A. Heller. Conceptions of giftedness from a meta-theoretical perspective. In Heller et al. [17].