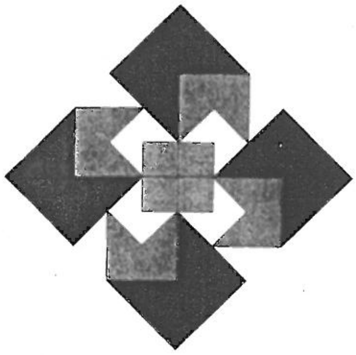
Apprenti Géomètre

un atelier pour travailler les mathématiques

Nicolas Rouche
avec la collaboration de Philippe Skilbecq



Centre de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques

2006

Le logiciel
Apprenti Géomètre

Comment de le procurer ?

Apprenti Géomètre, qui fonctionne aussi bien sur Windows que sur Mac, peut être téléchargé gratuitement à partir du site Internet

<http ://www.enseignement.be/geometre>.

Son origine

Apprenti Géomètre a été créé au cours des années 2003 et 2004 par le

CREM
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique
<crem@sec.cfwb.be>.

Le CREM répondait à une demande de Monsieur Jean-Marc Nollet, Ministre de l'Enfance de la Communauté française de Belgique. Le cahier des charges a été rédigé par une équipe comprenant Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Guy Noël, Nicolas Rouche et Marie-Françoise Van Troeye. L'exécution technique a été confiée à la firme Abaque, de Bruxelles.

Des documents d'accompagnement

Un document d'accompagnement d'Apprenti Géomètre est proposé sur le site Internet mentionné ci-dessus (voir dans la bibliographie : M.-F. Van Troeye [2003]). Il comprend un mode d'emploi, des analyses théoriques et divers exemples d'utilisation en classe. Sur le même site encore, on trouvera un rapport de recherche consacré à Apprenti Géomètre (dans la bibliographie : Ph. Skilbecq [2004]) et contenant lui aussi diverses propositions d'activités en classe.

Vers une deuxième version

Une deuxième version d'Apprenti Géomètre est en préparation et sera probablement disponible vers la fin de l'année 2006.

Remerciements

Laetitia Desmet, Michel Herman, Philippe Mairesse, Guy Noël, Gregory Philippart et André Vandenbruaene ont très utilement relu et critiqué un brouillon de cette étude. Un grand merci à eux.

Table des matières

Apprenti Géomètre : un atelier pour travailler les mathématiques

Nicolas Rouche,
avec la collaboration de Philippe Skilbecq

Résumé

Le logiciel Apprenti Géomètre est une sorte d'atelier prévu pour travailler les mathématiques élémentaires : géométrie, arithmétique, grandeurs, fractions, mesures, etc. Il se présente en trois étages : le kit standard, destiné aux élèves les plus jeunes, le kit libre pour les plus âgés et enfin un dernier étage, le plus complet des trois. Dans cet article, nous décrivons Apprenti Géomètre en détail et discutons les options qui ont présidé à sa conception.

Apprenti Géomètre[1] est un logiciel qui, malgré son nom, a été conçu comme une aide à l'apprentissage des mathématiques en général, et pas seulement de la géométrie. Il n'a été présenté jusqu'à présent qu'une seule fois sous forme d'article (voir N. Rouche et Ph. Skilbecq [2004]). Nous en proposons ici une description plus détaillée et approfondissons les idées qui ont présidé à sa création.

1 Présentation générale d'Apprenti Géomètre

1.1 Une sorte d'atelier

AG est une sorte de laboratoire ou d'atelier[2] qui permet d'amener à l'écran des formes polygonales, des cercles, des cubes en perspective et des réseaux réguliers de points, mais aussi des points isolés et des segments. Il offre à l'utilisateur la possibilité d'appliquer à ces objets quelques opérations simples telles que *découper, assembler, fusionner, glisser, tourner, retourner* (comme on retournerait un polygone en carton), *déformer, colorier* et quelques autres qui seront précisées ci-après. AG est un atelier au sens où il laisse l'entière initiative à l'utilisateur, quitte à ce que celui-ci soit un enseignant préparant des situations à explorer ou des problèmes à résoudre par ses élèves. Dans de tels cas, c'est l'enseignant et non le logiciel qui précise les consignes. AG, comme la majorité des didacticiels de géométrie dynamique, ne propose aucun schéma d'enseignement tout préparé.

[1] Abrégé ci-après en AG.

[2] On pourrait dire aussi un *micro-monde*, au sens de S. Papert [1980].

1.2 Les destinataires de ce logiciel

Au départ, AG a été conçu comme une aide à l'apprentissage de la géométrie élémentaire, ainsi que du triple thème des grandeurs, fractions et mesures. Il est donc destiné d'abord tant aux enseignants qu'aux élèves du primaire et du début du secondaire. Il ne remplace pas – et ceci est *très important* –, les champs d'expérimentation existants, comme par exemple les polygones en carton, le dessin aux instruments, les appareils articulés ou certains autres logiciels : il offre, par rapport à ces moyens d'apprentissage usuels, des possibilités nouvelles et originales, ce que nous nous efforçons de montrer ci-après.

Mais il se fait qu'AG a d'autres destinataires. D'une part – mais cela va de soi – il peut venir à point à toute personne qui s'intéresse aux mathématiques élémentaires, fut-ce en dehors du cadre scolaire. Mais on peut aussi, avec AG, expérimenter certaines questions de géométrie plane qui dépassent clairement un niveau élémentaire (voir entre autres la section 3.5).

AG se prête également au jeu et à la création artistique. Ainsi, par exemple, il est très facile d'amener à l'écran et de manipuler l'ensemble des pièces d'un tangram. Avec un peu d'imagination, on peut créer d'autres jeux ou casse-têtes basés sur des combinaisons de figures géométriques. Mais on peut aussi composer des tableaux abstraits, éventuellement en s'inspirant de peintres modernes (voir section 5). L'expérience a montré que des enfants, dès cinq ou six ans, prennent plaisir à réaliser des compositions abstraites ou figuratives, et que beaucoup d'entre eux sont sensibles à la symétrie. Des enfants aussi jeunes sont à l'aise avec la modalité la plus simple d'AG, celle que nous appelons le *kit standard* (voir section 2).

Enfin, la possibilité d'imprimer les figures réalisées à l'écran et de les incorporer dans un texte composé à l'ordinateur fait qu'AG est aussi un logiciel de dessin géométrique.

1.3 Une structure à trois niveaux

Dès que l'on ouvre AG, on a le choix entre deux contextes de travail, appelés respectivement le kit standard et le kit libre. Le *kit standard* permet d'amener à l'écran un nombre relativement limité de figures simples, auxquelles on peut appliquer quelques opérations, simples elles aussi. Le *kit libre* complète le kit standard en donnant accès à des figures et des opérations plus nombreuses et plus complexes. Tels sont les deux premiers niveaux d'usage d'AG. Mais l'utilisateur peut en outre créer d'autres "kits" en sélectionnant les figures existantes de son choix, en en créant de nouvelles, et en sélectionnant les opérations de son choix. Il s'agit-là d'un troisième niveau d'utilisation d'AG, niveau auquel le menu *Préférences* donne accès.

Ci-après, nous décrivons en détail successivement le kit standard et le kit libre, avant d'expliquer un peu plus le troisième niveau[3].

Mais pourquoi avoir ainsi mis à la disposition de l'utilisateur deux contextes de travail prédéterminés ? Pourquoi ne pas avoir donné accès, d'entrée de jeu, à l'ensemble des possibilités d'AG ? Nous avons dit ci-dessus que notre logiciel ne proposait aucune séquence d'enseignement pré-programmée. Pourquoi alors proposer deux contextes de

[3]Notons aussi qu'on peut modifier le kit standard et le kit libre. Les descriptions que nous en donnons ci-dessous concernent les configurations d'origine de ces deux champs de travail.

travail pré-programmés, d'abord un atelier pourvu d'un équipement minimal, puis un autre comportant plus de figures et d'instruments ?

La raison est qu'il vaut mieux n'avoir *au départ*, dans le champ de son attention, que les objets et les opérations qui contribuent au premier apprentissage. Les quelques objets et instruments rassemblés dans le kit standard non seulement sous-tendent les premières notions de géométrie et d'arithmétique[4], mais encore, dans leur sobriété, permettent déjà un nombre considérable d'expériences.

On demandera peut-être pourquoi ne pas laisser à l'enseignant, principal organisateur des apprentissages, le soin de déterminer lui-même le contexte à proposer à sa classe. D'une part cette possibilité existe de toute façon, via ce que nous avons appelé ci-dessus le troisième niveau d'AG. Mais il nous semble par ailleurs impératif, dans l'état actuel de la formation des instituteurs, de venir en aide à ceux d'entre eux qui ont besoin d'approfondir leur formation mathématique, qui ont peut-être moins d'inclination pour cette discipline que pour les autres, qui auraient de la peine à discerner la géométrie pauvre en cas de figures, celle du kit standard, de la géométrie où les figures ont de multiples visages, celle du kit libre.

La division d'AG en kit standard, kit libre et possibilités plus générales est un peu comme l'organisation en chapitres d'un livre qui se veut progressif. Nous pensons qu'il s'agit là d'une disposition rationnelle et rassurante, essentielle dans l'état actuel de la formation des maîtres. Et nous le pensons d'autant plus qu'un pourcentage important de ceux-ci, en ce début du XXIe siècle, éprouve des réticences face à l'informatique.

Cette dernière remarque nous amène à commenter les modalités d'accès à AG.

1.4 Un accès facile

Les connaissances et les manœuvres informatiques requises pour utiliser AG ont été réduites au strict minimum. À l'ouverture du logiciel, l'utilisateur choisit le kit standard ou le kit libre (un clic de souris). Dans les deux cas apparaissent quelques menus déroulants permettant d'amener à l'écran les figures de son choix et les actions (dupliquer, découper, glisser, ...) qu'on souhaite leur appliquer. En quelques clics, on est plongé dans la géométrie.

De même que d'autres didacticiels, AG est comme un outil qui doit aider à apprendre une matière. Mais il arrive qu'apprendre le fonctionnement de l'outil soit pendant trop longtemps plus absorbant qu'apprendre la matière. C'est là un effet pervers, à moins que l'outil ne soit par lui-même très intéressant. La simplicité d'accès au logiciel AG répond au souci d'amener l'utilisateur quasiment d'emblée sur le terrain de la réflexion mathématique, de vaincre les réticences de ceux qui ont peur d'avoir à exécuter trop de manœuvres auxiliaires et d'aider les enfants à découvrir AG comme un terrain de jeu et de création picturale.

L'expérience a prouvé qu'en deux ou trois leçons de cinquante minutes, la plupart des enfants de 9 ou 10 ans maîtrisent l'ensemble des commandes du kit standard. Des enfants de 5 à 6 ans arrivent aussi en peu de temps à jouer avec quelques objets et opérations bien choisis.

[4] Du moins est-ce là ce que nous tenterons de montrer.

2 Le kit standard

Voyons maintenant en quoi consiste le kit standard. Celui-ci est un univers en soi, un micro-monde. C'est pourquoi nous allons en expliquer le contenu et le fonctionnement de manière complète. En ce faisant, nous traiterons au passage certaines caractéristiques que possède aussi le kit libre. Mais nous n'aborderons ce dernier que dans un deuxième temps (voir la section 3).

Le kit standard propose des figures, des opérations et des mouvements. Détaillons pour commencer les figures polygonales. Elles sont groupées en trois "familles" : celle du carré, celle du triangle équilatéral et celle du pentagone régulier. Nous avons mis "familles" entre guillemets car, comme on va le voir, ce mot est pris ici en un sens peu usuel. Commençons par la famille du carré.

2.1 Le carré et sa famille proche

En un ou deux clics, on peut amener à l'écran chacun des cinq polygones que montre la figure 1.

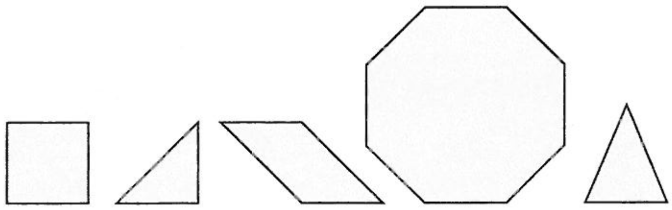


Fig. 1

Ce sont

- un carré ;
- un triangle rectangle isocèle, celui dont on obtient deux exemplaires en coupant le carré en deux le long d'une diagonale ;
- un parallélogramme, celui que l'on obtient en accolant deux demi-carrés (deux triangles rectangles isocèles) ; un tel parallélogramme existe en deux variétés, images l'une de l'autre dans un miroir[5] (voir figure 2) ; une seule de ces deux figures apparaît au départ à l'écran ;
- un octogone régulier avec un côté de même longueur que celui du carré ;
- un triangle isocèle, celui que l'on obtient en coupant l'octogone en 8 triangles superposables.

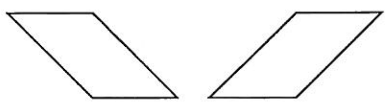


Fig. 2

[5]De deux figures qui sont ainsi images l'une de l'autre dans un miroir et ne sont pas superposables par glissement, on dit qu'elles sont *énantiomorphes*.

Ces cinq polygones sont simples. Deux d'entre eux, le carré et l'octogone, sont des polygones réguliers. Deux autres sont des triangles isocèles, mais très particuliers en ceci que l'un dérive du carré et l'autre de l'octogone régulier. Étant donné leur définition, chacun d'eux aurait eu la même forme si on l'avait dessiné plus grand. En d'autres termes, tous les carrés sont semblables, tous les triangles rectangles isocèles sont semblables, tous les parallélogrammes formés en accolant deux demi-carrés sont semblables, et ainsi des deux autres polygones. Nous dirons que ces figures possèdent *zéro degré de liberté*, exprimant par là que leur définition les décrit complètement, *à similitude près*. Au contraire, par exemple, un parallélogramme peut être mince ou épais, il peut aussi être peu ou très incliné. Les polygones de la famille du carré n'ont par contre chacun qu'un seul cas de figure. On ne doit spécifier aucun paramètre pour en fixer un exemplaire (à similitude près). D'où l'expression *zéro degré de liberté* [6].

Il en résulte que ces figures sont aisément reconnaissables, puisque leur forme ne varie jamais. Elles le sont d'autant mieux que, lors de leur apparition à l'écran, elles ont toujours un côté horizontal et, lorsqu'elles ont un ou plusieurs axes de symétrie, un de ceux-ci est vertical. Le demi-carré fait exception à cette règle : il a lui un côté horizontal et un autre vertical.

Le fait d'avoir un axe de symétrie vertical contribue notablement à la reconnaissance des figures. Comme l'a montré E. Mach [1922], l'existence d'une symétrie orthogonale dans une figure (ou le fait que deux figures soient symétriques orthogonales l'une de l'autre) se reconnaît le plus aisément lorsque la figure est dans un plan frontal et que l'axe de symétrie est vertical et situé dans le plan de symétrie de l'appareil visuel de l'observateur. C'est pourquoi il est plus difficile de reconnaître un carré lorsqu'il n'a pas deux côtés horizontaux, et il est plus difficile de reconnaître qu'un triangle est isocèle lorsque son axe de symétrie n'est pas vertical.

Ainsi, toutes les conditions sont réunies pour que les polygones de la famille du carré soient aisément reconnaissables et par conséquent deviennent vite familiers. Ces précautions facilitant la reconnaissance des figures sembleront peut-être futiles au lecteur familier de la géométrie élémentaire. Mais il ne faut pas oublier que notre logiciel est aussi destiné à des petits enfants.

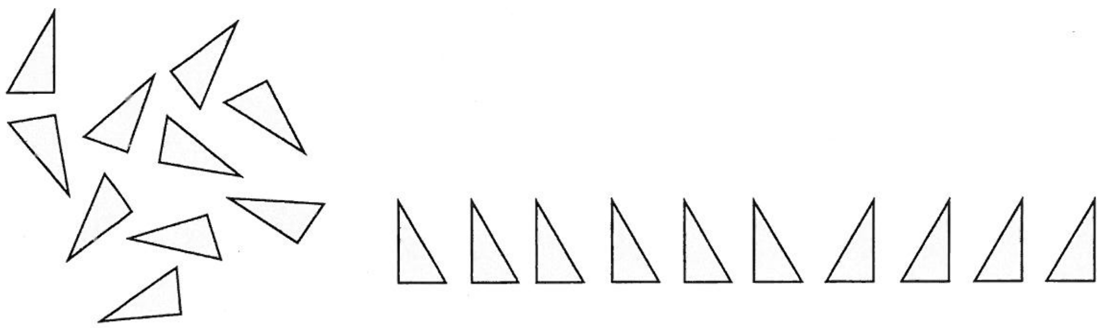
Le fait qu'il soit essentiel d'apprendre, à terme, à reconnaître un carré ou un triangle isocèle en position quelconque n'implique pas que ces figures doivent être présentées d'emblée dans des conditions où elles sont difficiles à identifier. Par ailleurs, AG est ainsi conçu qu'un enseignant peut, le moment venu, préparer pour ses élèves un écran montrant des polygones dans des positions arbitraires. Les positions privilégiées commentées ci-dessus sont celles qui ont été programmées *par défaut*. La figure 3(a) montre des triangles en position quelconque, qui pourraient susciter la question :

Parmi ces triangles, y en a-t-il de deux sortes ?

La réponse devient évidente lorsqu'on les trie et les ordonne comme le montre la figure 3(b).

---

[6] À ce sujet, voir L. Lismont et N. Rouche [2001].



(a) (b)

Fig. 3

Après avoir considéré les polygones de la famille du carré un par un, envisageons-les maintenant ensemble. Ils sont de dimensions invariables. Le carré et l'octogone ont même longueur de côté. Les deux triangles et le parallélogramme ont aussi chacun au moins un côté qui a cette même longueur. Comme nous l'avons vu ci-dessus, on passe dans beaucoup de cas de certains de ces polygones à d'autres par des opérations élémentaires de découpage, assemblage et fusion. C'est pour cela que ces figures ont entre elles de multiples rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires.

Il est alors intéressant d'explorer le champ des autres figures que l'on peut créer en continuant à appliquer aux membres de la famille les mêmes opérations de *découpage, assemblage* et *fusion*. Les figures 4 et 5 donnent une idée des possibilités. Elles montrent que ces polygones s'ajustent bien les uns aux autres, et cela de multiples façons. Ces ajustements sont ce que H. Freudenthal [1973] a appelé du nom anglais de *fitting*, et dont il dit : "The miracles of fitting are a preparation for systematic geometry, but even if this stage is reached, they cannot be dismissed. They remain the rough material of geometric thinking. The pupil should recall them and reconsider the old problems anew at every stage."[7]

Notons au passage qu'à l'écran les fittings se réalisent très bien. En effet, non seulement AG dessine des figures précises, mais encore il les ajuste automatiquement : un fonction de *magnétisme* fait que, lorsque deux figures sont amenées à être presque jointives, le logiciel les accole parfaitement.

Un regard sur l'histoire des mathématiques confirme que de telles combinaisons de figures (les fittings) sont le matériau de la géométrie à ses débuts. Les Chinois et les Indiens ont pratiqué la géométrie avant que les Grecs ne lui donnent la forme axiomatique euclidienne, et aussi bien après. Or ces contributions reposent, dans un très grand nombre de cas, sur des découpages et réajustements de figures du type évoqué ci-dessus. Il suffit, pour en témoigner, d'évoquer les multiples démonstrations chinoises et indiennes du théorème de Pythagore, qui sont toutes de cette nature.

[7] "Les miracles du *fitting* sont une préparation pour une géométrie systématique, mais même lorsque cette étape est atteinte, ils ne peuvent pas être abandonnés. Ils demeurent le matériau brut de la pensée géométrique. L'élève devrait se les rappeler et reconsidérer les anciens problèmes à chaque étape."

Dans le cadre de la présente étude, nous avons renoncé à traduire le terme *fitting*. Nous l'utilisons donc tel quel.

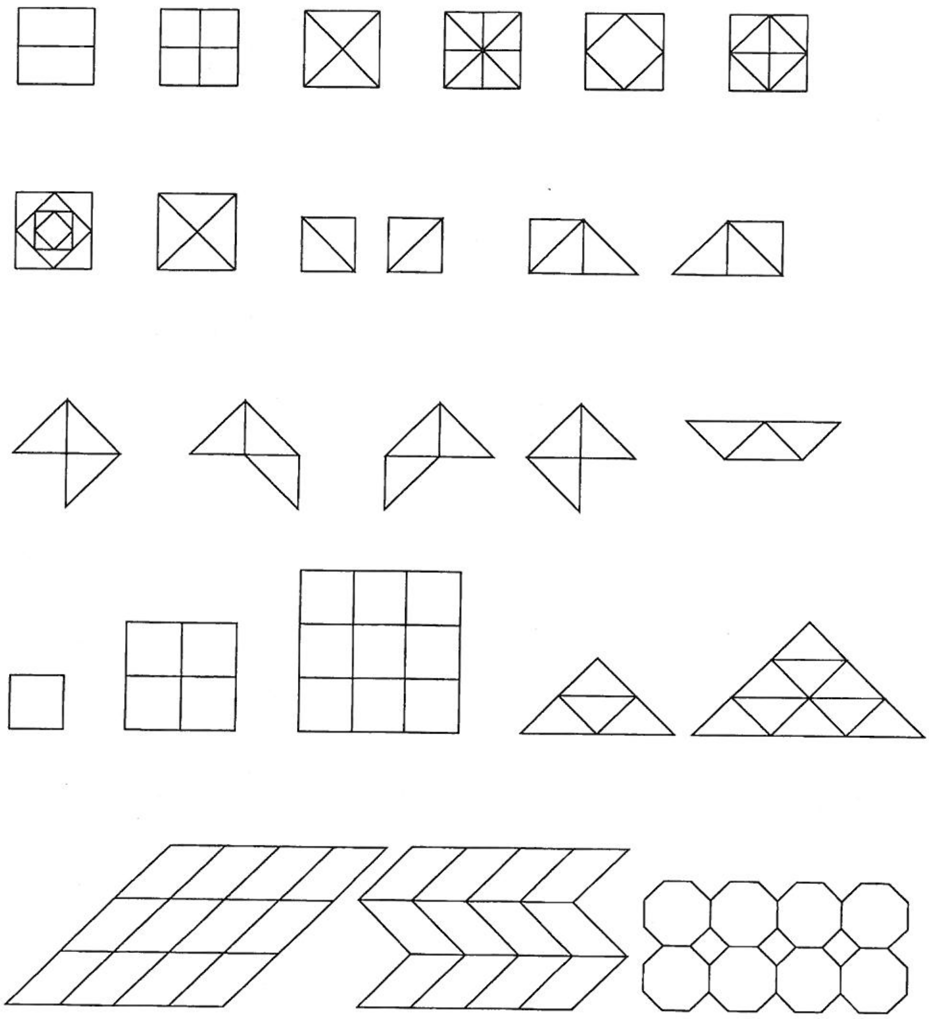


Fig. 4

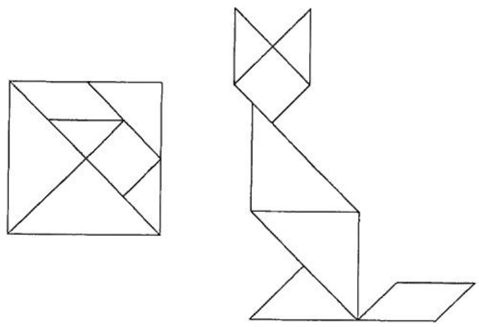


Fig. 5

La prégnance et le caractère en quelque sorte naturel de ces combinaisons exactes de figures très symétriques est aussi attesté par la présence écrasante des pavages et des rosaces dans les arts primitifs et dans les arts décoratifs des siècles passés. Cette allusion aux arts nous conduit aux rapports souvent méconnus entre la géométrie et le sentiment esthétique. Nous y viendrons à la section 5.

On demandera peut-être pourquoi nous n'avons rassemblé dans la famille du carré que les cinq polygones que montre la figure 1. Nous aurions pu proposer une famille nombreuse en ajoutant d'autres parallélogrammes, avec leurs variétés énantiomorphes, des trapèzes rectangles et isocèles, d'autres polygones encore. N'aurait-il pas été intéressant de créer un stock plus riche ?

Nous avons au contraire choisi de proposer peu de formes pour laisser à l'utilisateur la possibilité d'en imaginer et d'en construire d'autres par lui-même. Car l'apprentissage passe plus par l'action – en l'occurrence découper, assembler, fusionner – que par la contemplation. On apprend davantage et plus profondément à l'atelier ou au laboratoire qu'au musée. Piaget et d'autres ont montré que les concepts s'acquièrent dans l'action. On lira avec intérêt à cet égard ce que E. Giusti [2000] et D. Tall [2005] écrivent de la naissance des objets mathématiques. Ceci explique notre option : peu de formes, et néanmoins, vu la multiplicité des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires, un champ immense ouvert à la créativité.

2.2 Deux autres familles de polygones

Nous venons d'expliquer la famille du carré en long et en large. Le kit standard comporte deux autres familles analogues, celle du triangle équilatéral et celle du pentagone régulier.

La figure 6 montre de quoi la première est composée. Outre un triangle équilatéral, on y voit un losange formé de deux de ces triangles accolés et fusionnés, un trapèze isocèle formé de même à partir de trois triangles, un hexagone régulier formé à partir de six triangles, un triangle isocèle obtenu en découpant en trois parts égales le triangle équilatéral de départ, un triangle rectangle obtenu en partageant le triangle équilatéral en deux, un trapèze rectangle composé de trois de ces triangles rectangles, et enfin un dodécagone régulier, au total huit polygones.

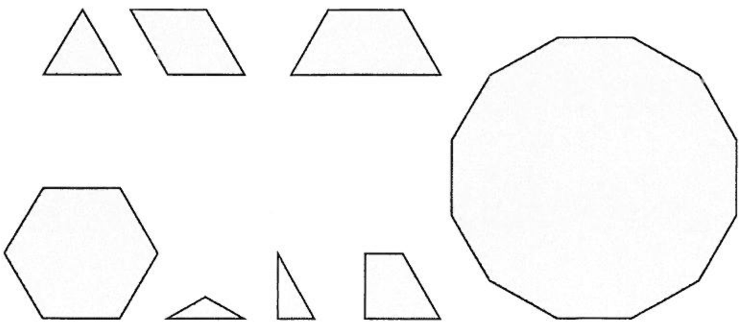


Fig. 6

La figure 7 montre la famille du pentagone régulier. Outre le pentagone, on y voit un triangle isocèle obtenu en découpant celui-ci en 5, puis un décagone régulier et un triangle isocèle obtenu en découpant celui-ci en 10. Le cinquième polygone de la famille est un triangle isocèle tel qu'en l'accolant au précédent, on engendre un triangle isocèle semblable à celui-ci (voir figure 8). Cette famille de cinq polygones recèle de multiples fois le rapport de longueurs connu sous l'appellation de *nombre d'or*.

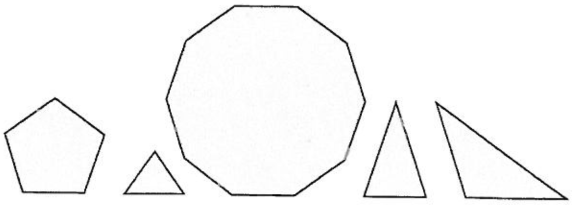


Fig. 7

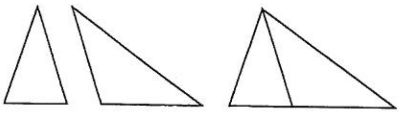


Fig. 8

Ces deux familles ont été conçues sur les mêmes principes que la famille du carré, à savoir, dans les deux cas :

un petit nombre de polygones simples, la plupart présentant plusieurs symétries, comportant chacun zéro degrés de liberté ;

tous ces polygones sont présentés par défaut en position privilégiée, avec un côté horizontal ou un axe de symétrie vertical ;

ils ont entre eux des rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires, ce qui fait qu'en les découpant, assemblant et fusionnant, on peut en tirer (par fitting) une foule d'autres figures ou combinaisons géométriques intéressantes ;

chacune de ces familles est peu nombreuse, pour réserver à l'utilisateur de multiples possibilités de créations nouvelles.

On se demandera sans doute pourquoi avoir ainsi groupé les polygones par familles, pourquoi les présenter en quelque sorte rangés dans trois tiroirs, et ne pas les avoir au contraire fournis en vrac, ce qui aurait augmenté d'autant la richesse des combinaisons possibles. Expliquons donc ce choix. Lorsqu'on cherche à combiner par fitting des polygones issus de plusieurs familles, les chances de tomber sur des combinaisons intéressantes ne sont pas énormes. Il n'y a pas, d'une famille à l'autre, beaucoup de rapports simples de longueurs, d'angles et d'aires, comme à l'intérieur d'une même famille. Certes, il existe des combinaisons intéressantes mobilisant des membres de deux familles distinctes : le pavage de la figure 9 en donne un exemple[8]. Mais ces combinaisons sont plutôt rares, comparées à celles que l'on obtient en restant dans une même famille. Proposer à l'utilisateur de travailler – d'abord – dans une seule famille à la fois, c'est augmenter très sensiblement la probabilité qu'il découvre des combinaisons intéressantes, géométriquement significatives, fut-ce en tâtonnant, en avançant par essais et erreurs. En faisant ce choix, nous avons pensé autant aux jeunes élèves qu'aux enseignants qui, pour tant de raisons possibles, n'ont pas acquis une pleine maturité dans le domaine de la géométrie élémentaire.

[8]On remarquera même que, pour favoriser les fittings "inter-familles", les polygones réguliers des trois familles sont présentés tous avec une même longueur de côté.

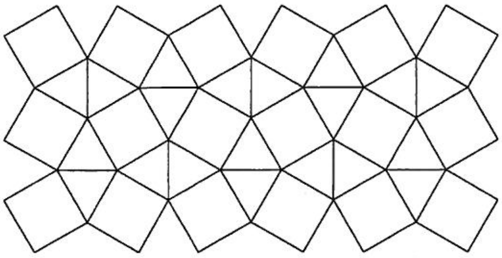


Fig. 9

On demandera peut-être aussi : pourquoi ces trois familles et pas d'autres ? Et nous aurions envie de répondre : parce que trois, quatre et cinq ! Il n'y a pas de polygones à deux côtés. Trois, quatre et cinq sont les nombres naturels qui suivent deux. Le triangle équilatéral, le carré et le pentagone régulier sont trois polygones qui, par leur simplicité, leurs symétries et le grand nombre de leurs propriétés, sont parmi les plus accessibles à la perception claire et à l'intelligence. Il en va de même de l'hexagone régulier, qui appartient à la famille du triangle équilatéral.

Les trois familles de polygones offertes par le kit standard sont le matériau d'une géométrie essentiellement euclidienne[9]. Qui plus est, vu les dimensions invariables des figures, les mouvements et les opérations proposés dans ce kit ne comprennent pas de similitudes[10].

Cette option est-elle justifiée ? Il nous semble qu'on peut l'appuyer sur trois arguments. En premier lieu, le kit standard s'adresse d'abord à des débutants, à des personnes peu familières avec la géométrie. Or celle-ci est au départ la science des figures. Mais pour apprendre à *connaître* une figure, il faut d'abord apprendre à la *reconnaître*, et il est utile à cet égard qu'elle ait une forme et peut-être aussi une taille invariables. Un autre argument est que ces formes simples et possédant beaucoup de rapports entre elles sont celles qui se prêtent aux fittings (au sens de Freudenthal, expliqué ci-dessus) et que les fittings relèvent *d'abord* de l'intelligence des situations. Or celle-ci, essentiellement basée sur une coordination efficace entre les perceptions et les actions, est la forme la plus élémentaire de l'intelligence[11]. Nous verrons ci-après que le kit libre, grâce à l'introduction de figures à un ou deux degrés de liberté, et parfois plus, sollicite davantage l'intelligence discursive (voir la section 3). Un troisième argument enfin relève de l'expérience. Sans que nous puissions faire état d'une étude empirique fondée sur des statistiques, il nous est apparu qu'une grande majorité d'enfants très jeunes (vers cinq ans) non seulement découvrent spontanément beaucoup de fittings, mais encore sont très sensibles aux symétries des polygones et des assemblages de polygones.

[9]Rappelons que la géométrie euclidienne est celle qui étudie les propriétés des figures invariantes par similitude.

[10]Une option d'AG consiste toutefois à augmenter ou diminuer la taille des figures, mais c'est une opération de similitude qui les affecte toutes et ne modifie donc aucun des rapports prévus, à travers les trois familles, entre longueurs et aires. L'idée principale est d'offrir à l'utilisateur des figures dont il juge les dimensions commodes.

[11]Pour le dire simplement, l'intelligence des situations (ou intelligence pratique) est celle qui, sans passer par des représentations ou des symboles, intègre dans le présent des perceptions et des actions pour réaliser un but (voir à cet égard H. Wallon [1970]).

En proposant aux débutants d'explorer d'abord une géométrie euclidienne appliquée à des figures très symétriques et de dimensions constantes, nous ne suivons pas la recommandation de Piaget [1947] selon laquelle il faudrait commencer par des propriétés "topologiques". Pour ne pas interrompre trop longuement le présent exposé, nous renvoyons en appendice une discussion de cette thèse de Piaget.

2.3 Des opérations

Nous avons jusqu'ici concentré notre exposé sur la description et l'analyse des principaux objets – des polygones – présents dans le kit standard, et nous avons évoqué seulement au passage quelques opérations telles que découper, assembler et fusionner, qu'on peut leur appliquer. Le moment est venu maintenant de faire un inventaire plus complet de ces opérations et de les commenter. Envisageons-les une par une.

Après sélection de l'opération *dupliquer*, on peut reproduire chaque figure par un simple clic de souris, et cela autant de fois que l'on veut. Par ce moyen, le kit standard s'ouvre sur les ensembles finis et les nombres naturels. Les figures reproduites apparaissent proches les unes des autres et se recouvrent partiellement (voir figure 10(a)), mais elle peuvent ensuite être redistribuées autrement. Les figures 10(b) et (c) les montrent dans des dispositions souvent associées à l'apprentissage du nombre cinq.

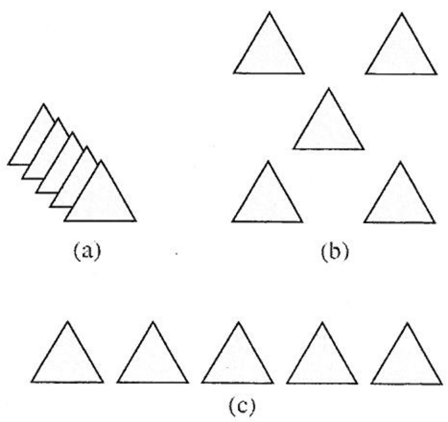


Fig. 10

L'opération *découper* permet de sectionner un polygone en deux le long d'un segment joignant deux de ses sommets (figure 11(a)), voire le long d'une ligne brisée partant d'un sommet, passant par le centre du polygone et revenant à un autre sommet (figure 11(b)). D'autres découpages sont possibles via l'opération *diviser*. Examinons celle-ci.

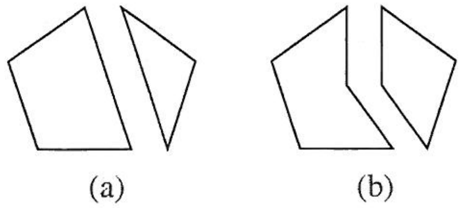


Fig. 11

La commande *diviser* permet de marquer sur un segment (un côté de polygone par ex.) des points qui le divisent en 2, 3 ou 5 segments égaux. En enchaînant plusieurs divisions de ce type, on peut obtenir des divisions en 4, 6, 8, 9, ... segments égaux.

Comparons cette opération avec son analogue dans l'univers quotidien, en supposant qu'on n'y dispose pas d'une règle graduée (dans AG, on n'a non plus aucun instrument de mesure). Couper une bandelette ou une ficelle en 2 parties d'égale longueur est facile. Et aussi en 4, en 8, etc., en répétant la division en 2. Par contre, diviser en 3 ou en 5 est plus difficile et se fait en général par tâtonnement, avec un résultat approximatif. Une procédure précise consiste, pour diviser un segment AB par exemple en 3, à enchaîner trois segments égaux (voir AC) et à réaliser la division souhaitée en traçant des parallèles inspirées par le théorème de Thalès. Mais c'est là une construction assez savante. Dans AG, l'opération *diviser* réalise automatiquement la division du segment. L'utilisateur accède ainsi directement à cette opération, sans devoir s'embarrasser de sa réalisation technique[12].

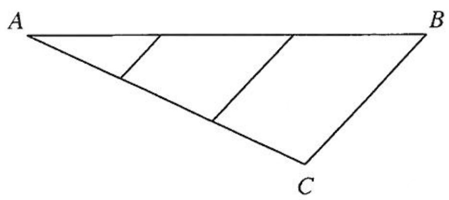


Fig. 12

Revenons aux découpages. Les points marqués sur un segment grâce à la commande *diviser* peuvent servir à des découpages. Par exemple, le triangle de la figure 13 peut être découpé le long d'une médiane (figure 13(a)), ou le long d'un segment joignant un de ses sommets à l'un des points qui divisent le côté opposé en 3 (figure 13(b)).

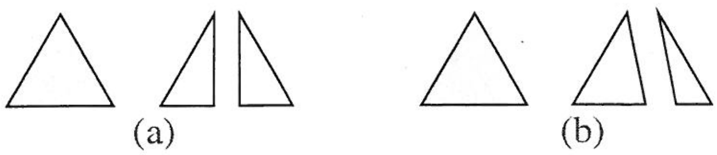


Fig. 13

[12]Ajoutons, une fois de plus, que cette possibilité offerte par AG ne vise nullement à remplacer, dans l'enseignement, les autres procédures, dont les contraintes sont par elles-mêmes instructives.

Une originalité de la commande *découper* est qu'elle laisse subsister à l'écran la figure non découpée. Cette propriété distingue la fonction *découper* à l'écran de celle qui consiste à découper un polygone en papier. Dans ce dernier cas, il reste deux morceaux et on a perdu l'original. AG donne la possibilité de confronter les morceaux à l'original, et même celle de constituer un clone de ce dernier, via la commande *fusionner* (voir ci-dessous).

AG ne comporte pas de commande explicite visant à assembler deux polygones, par exemple en les accolant bord à bord au long de tout un côté. Mais de tels assemblages sont possibles via les commandes de mouvements, expliquées ci-dessous (voir section 2.4).

Lorsque deux polygones sont assemblés bord à bord comme on vient de le dire, une commande permet de les *fusionner* pour n'en faire plus qu'un. La figure 14 illustre sommairement cette possibilité.

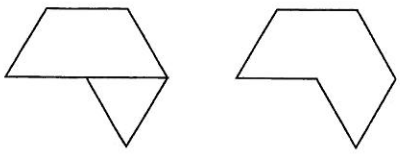


Fig. 14

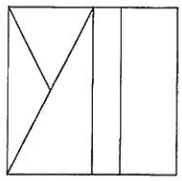


Fig. 15

La combinaison des commandes *dupliquer* et *fusionner* permet d'expérimenter le double thème des fractions et des mesures, en l'occurrence – mais cela va de soi –, dans le cadre de la géométrie plane. Par exemple, à la figure 15, on voit un carré coupé en 5 parties, et l'on peut rechercher quelle fraction de l'aire totale chacune de ces parties représente. Il s'agit en l'occurrence de 1/3, 1/4, 1/6 et 1/8.

2.4 Des mouvements

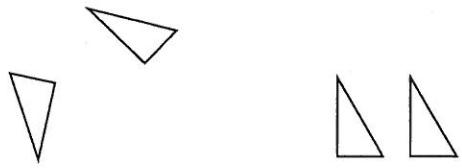
Les opérations que nous avons introduites jusqu'à présent pourraient sans doute être appelées opérations de base de la géométrie à son début. En effet, s'il est vrai que les fittings sont parmi les premiers révélateurs des propriétés géométriques élémentaires (on se souviendra des géométries chinoise et indienne), encore faut-il manipuler les formes pour créer les fittings. Les opérations que nous avons introduites l'ont été à cet effet.

Toutefois, elles sont insuffisantes. En effet et tout d'abord, pour apercevoir la possibilité d'un assemblage intéressant de deux ou plusieurs polygones, il faut rapprocher ceux-ci et leur donner une orientation cohérente. Pour exécuter ensuite le fitting dont on a réalisé la possibilité, il faut pouvoir faire glisser, tourner et parfois retourner les polygones de manière appropriée.

Reprenons cette idée à son début et considérons le fitting le plus élémentaire et le plus fondamental qui soit, celui qui consiste à superposer deux figures identiques[13]. L'action de reconnaître si deux figures sont exactement superposables est sans doute une des toutes premières qui engage la pensée géométrique.

[13]On pourrait dire *isométriques*, mais nous préférons, au moins provisoirement, éviter ce terme qui évoque l'idée de mesure, étrangère à notre propos.

Revenons à nouveau à l'analyse de Mach en considérant un exemple, celui des deux triangles de la figure 16(a). Sont-ils superposables ? Il est difficile d'en juger immédiatement. Par contre, si on les amène l'un près de l'autre, tous deux en position privilégiée (avec un côté horizontal, voir ci-dessus), et donc avec leurs paires de côtés correspondants parallèles (figure 16(b)), on voit qu'ils sont (très vraisemblablement) superposables. Pour les superposer ensuite effectivement, on fait glisser l'un des deux sur l'autre.



(a) (b)

Fig. 16

(a) (b)

Fig. 17

Comme nous l'avons vu ci-dessus (à la section 2.1), un autre cas peut se présenter, celui qu'illustre la figure 17. Les deux triangles étant rapprochés l'un de l'autre et amenés en position privilégiée, il n'est plus possible d'obtenir que leurs paires de côtés correspondants soient parallèles. Par contre, ils se disposent de part et d'autre d'un axe de symétrie vertical. Dans ces conditions, on perçoit assez clairement aussi qu'ils sont (selon toute vraisemblance) superposables. Mais pour les superposer effectivement, il faudrait d'abord retourner l'un des deux, pour se ramener au cas précédent. Nous verrons ci-dessous comment "retourner" une figure dessinée à l'écran, ce qui paraît a priori impossible. On doit à Mach [1922] ces observations sur la reconnaissance de la superposabilité de deux figures. Les dispositions illustrées par les figures 16(b) et 17(b) sont celles où la superposabilité se reconnaît le plus sûrement. Cette reconnaissance est plus difficile dans les dispositions illustrées par les figures 18(a), (b), (c) et (d), pour ne pas parler des dispositions plus sauvages, comme celles des figures 16(a) et 17(a).

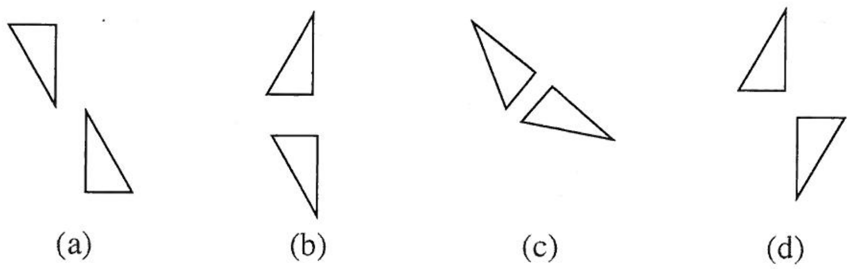


Fig. 18

On le voit, pour réaliser le type de fitting le plus élémentaire, à savoir la superposition de deux figures, on a besoin de soumettre celles-ci à des mouvements. Voyons les possibilités offertes à cet égard par le kit standard.

Premièrement, on peut traîner une figure “à la souris” d'une place quelconque de l'écran à une autre, sans que son orientation[14] change. C'est le type de mouvement qui a été nommé *déplacer* dans la première version d'AG et qui sera dénommé *glisser* dans la deuxième. La figure 19 montre, à l'aide d'étapes intermédiaires, trois mouvements de cette sorte. La manière la plus économique de glisser une figure que l'on veut amener quelque part est de la conduire en ce nouvel endroit en ligne droite, comme le montre la figure 18(a), c.-à-d. de sorte que chacun de ses points décrive une trajectoire rectiligne. Mais on voit qu'on peut conduire la figure par des chemins plus fantaisistes, au point même de faire décrire à chacun de ses points une trajectoire circulaire (figures 19(b) et (c)).

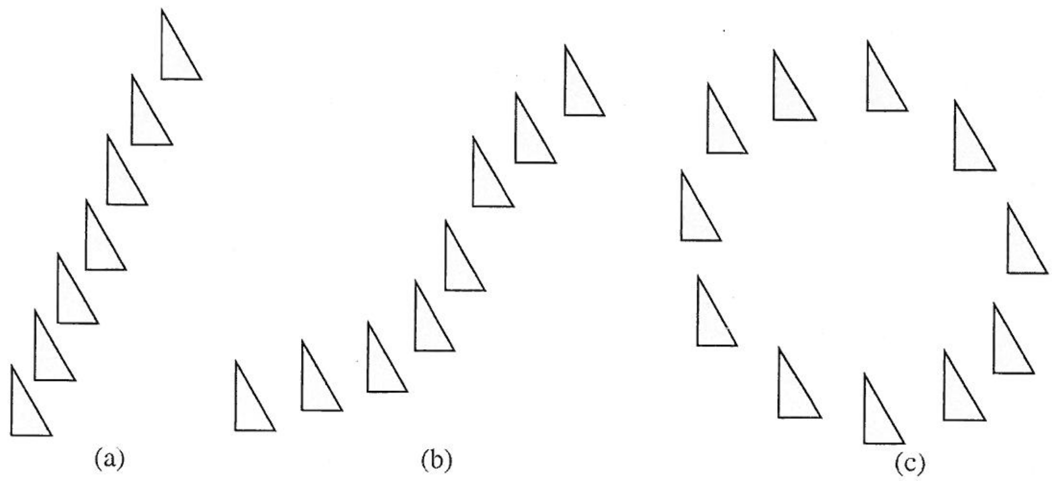


Fig. 19

Le deuxième mouvement prévu dans le kit standard consiste à *tourner* la figure, ce que l'on obtient aussi en la tirant par un de ses points (pas nécessairement un sommet) à l'aide de la souris. L'utilisateur n'a pas dans ce mouvement le choix du centre de la rotation. Celui-ci, s'il s'agit d'un polygone, est automatiquement le centre de la

[14]Par *orientation constante,* on entend ici que chaque côté du polygone déplacé demeure dans toutes ses positions successives parallèle à sa position de départ.

figure, ou plus précisément son centre d'inertie[15]. Par contre l'utilisateur a le choix de l'angle dont il la fait tourner. Mais il ne s'agit pas d'un angle à donner en degrés ou en radians. Simplement, la figure s'arrête de tourner lorsque l'opérateur arrête de tirer dessus. L'angle de la rotation est choisi à vue. La figure 20 montre, à l'aide d'étapes de ce genre, deux figures que l'on fait tourner.

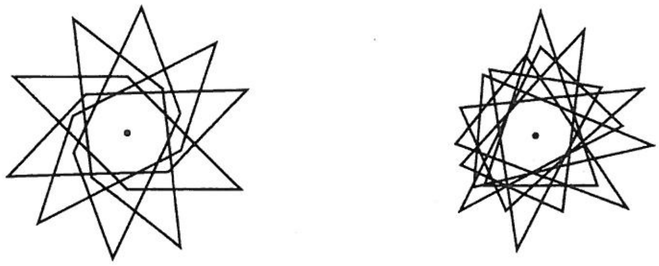


Fig. 20

Les mouvements de glisser et tourner sont, si on peut dire, distincts l'un de l'autre autant que faire se peut. On entend par là que dans le glissement, la figure change de place, tandis que son orientation reste invariable, alors que dans le mode tourner, seule l'orientation change. Le centre de la figure ne bougeant pas, celle-ci tourne en quelque sorte sur place, elle ne change pas de lieu.

Le troisième mouvement prévu dans le kit standard est celui de *retourner*. Il est un peu plus difficile à expliquer. Si le polygone dont on s'occupe était collé sur l'écran par une de ses faces, on pourrait le décoller, le retourner et le recoller sur l'écran par son autre face. On peut aussi *imaginer* qu'on le retourne en le faisant tourner autour d'un axe vertical passant par son centre, ce qui le ferait sortir de l'écran pour l'y ramener aussitôt. Comme nous supposons l'écran vertical, il s'agit d'un axe situé dans l'écran.

C'est ce mouvement que la commande *retourner* s'efforce d'imiter. À l'écran, on voit le polygone devenir de plus en plus mince jusqu'à qu'il apparaisse comme un segment vertical, exactement comme le polygone en carton qui passerait en tournant par une position où on n'en percevrait plus que la tranche. Le polygone alors réapparaît des deux côtés du segment et grossit jusqu'à représenter le polygone en carton retourné. Ce qu'on voit donne l'illusion d'une retournement réel.

Deux observations s'imposent. D'abord l'axe de la rotation est vertical, et donc, toujours d'après l'étude de Mach sur la perception des symétries, le retournement est présenté à l'observateur de la façon la plus claire possible. Ensuite, comme nous l'avons dit, l'axe de la "rotation" passe par le centre de la figure, ce qui fait que celle-ci se retourne sans changer de place (plus précisément sans que son centre change de place).

Si nous passons en revue les trois mouvements qui viennent d'être décrits, nous voyons que *glisser* ne change pas l'orientation de la figure et ne la retourne pas, que *tourner* change son orientation sans quasiment la changer de place ni la retourner, et que *retourner* ne la change non plus quasiment pas de place et n'a rien à voir avec tourner. En d'autres termes, AG isole et singularise ce que l'on pourrait appeler les trois mouvements de base de la géométrie plane. C'est là un caractère fondamental de notre logiciel.

[15]Le centre d'inertie d'une figure coïncide avec son centre de gravité lorsque la figure est constituée d'une plaque pesante homogène.

Nous l'avons dit au début de cette section : le kit standard comporte des figures, des opérations et des mouvements. Or on peut aussi se procurer des figures en carton ou en plastique sans recours à l'informatique, et de même on peut les découper, les assembler et les fusionner avec des ciseaux et du scotch. Mais ce que l'on ne trouve pas, ou que l'on trouve rarement, dans la réalité quotidienne, ce sont les trois mouvements canoniques décrits ci-dessus. Lorsqu'on manipule des polygones en carton, on leur imprime spontanément les mouvements les plus libres, on pourrait dire les plus sauvages, où glissements, rotations et retournements se trouvent indissociablement et confusément mêlés. Au contraire, AG offre à l'utilisateur un univers de mouvements analysé et ordonné.

Changer une figure de lieu et d'orientation *de la façon la plus générale* est toujours possible avec AG, mais on ne peut le faire que par une combinaison appropriée des trois mouvements de base. Il faut donc apprendre à reconnaître les quelques mouvements de base à enchaîner (à composer) pour amener une figure à l'endroit et dans l'orientation que l'on veut. On peut aussi se demander si on peut réaliser cela de plusieurs façons, et comment le faire en enchaînant un nombre minimum de mouvements.

On remarquera que les mouvements, qui peuvent certes être étudiés pour leur intérêt propre, sont introduits ici dans un contexte plus large, qui leur donne une raison d'être : ils servent à réaliser des fittings.

Il arrive que, dans les analyses de la pensée géométrique, on conçoive les mouvements comme des isométries qui se réaliseraient par une évolution continue dans le temps. Mais ce genre d'intuition demeure souvent vague. Dans le kit standard, nous avons défini précisément les trois mouvements de base. Ceux-ci ne s'identifient pas aux isométries canoniques que sont les translations, rotations et symétries orthogonales (ou symétries miroirs). Nous verrons ci-après, dans notre étude du kit libre, non seulement en quoi elles s'en distinguent, mais encore comment elles y préparent. Étudier les mouvements, c'est faire un premier pas vers les isométries.

L'insistance sur les mouvements dans le kit standard répond au courant de pensée théorique et pédagogique qui, au XIX^{e} siècle, a cherché à les réhabiliter dans la pensée géométrique. Ce courant est représenté principalement pas Kirchhoff, Méray, Bourlet et Borel. Pour une synthèse à ce sujet, voir R. Bkouche [1991].

2.5 Un cercle et des cubes

L'essentiel du kit standard est constitué des trois familles de polygones introduites ci-dessus, ainsi que des opérations et mouvements qu'on peut leur appliquer. Toutefois, deux autres types de figures sont aussi prévues.

D'abord, on peut faire apparaître à l'écran un cercle dont le rayon a pour longueur celle qui a aussi été donnée au côté de tous les polygones réguliers du kit standard. En particulier, le rayon de ce cercle est égal au côté du triangle équilatéral et à celui de l'hexagone régulier. Et donc ce dernier peut être inscrit dans le cercle.

La parenté entre ce cercle, le triangle et l'hexagone en question est telle qu'il eut été intéressant de ne pas traiter le cercle à part, et de l'incorporer à la famille du triangle équilatéral.

L'autre possibilité est de faire apparaître à l'écran des cubes dessinés en perspective cavalière. Ils peuvent être dessinés de deux façons, comme l'illustre la figure 21.

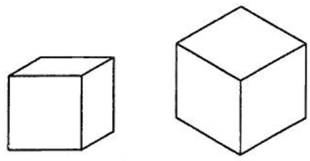


Fig. 21

Pourquoi avoir ajouté au kit standard ces représentations planes de solides ? L'écran d'un ordinateur étant plan, n'aurait-il pas été plus naturel de consacrer AG à l'étude de la géométrie plane ?

L'objection est qu'il y a beaucoup d'arguments en faveur d'une étude simultanée, au niveau élémentaire, des figures planes et des solides de l'espace. Il s'agit d'une idée ancienne que nous ne saurions développer longuement ici.

L'incorporation au kit standard des deux cubes en perspective cavalière s'inspire de l'idée que les représentations planes, qui abondent dans la civilisation d'aujourd'hui, peuvent être abordées directement, c'est-à-dire sans être identifiées d'emblée à des projections parallèles (et dans d'autres cas à des projections centrales)[16]. En effet, on peut arriver à comprendre, à "voir dans l'espace", ce que représentent des dessins en perspective tels que ceux de la figure 22 ou d'autres analogues.

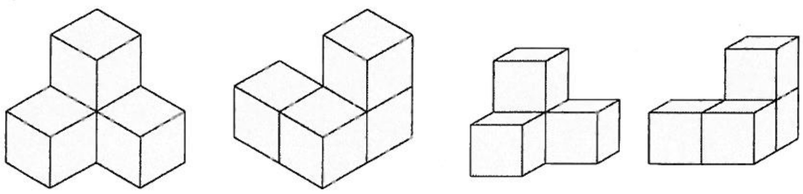
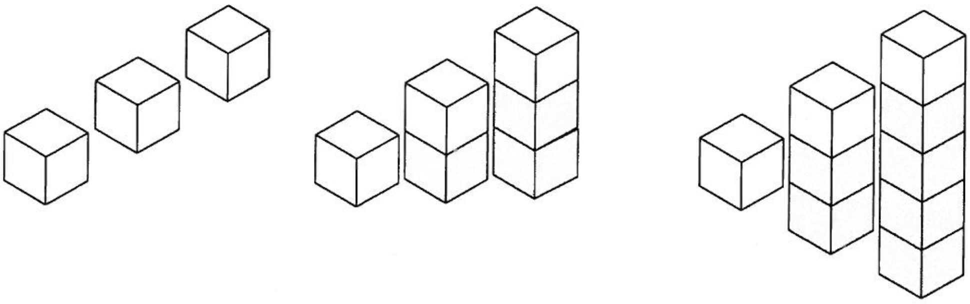


Fig. 22

Mais on peut aussi s'entraîner à percevoir leur ambiguïtés possibles, le passage de l'espace au plan n'étant pas univoque. Par exemple, la figure 23(a) représente trois cubes, dont on penserait à première vue qu'ils sont alignés dans un plan horizontal. Mais sans toucher au dessin de ces trois cubes, on peut, en le complétant par le dessin d'autres cubes, s'arranger pour les faire percevoir dans de tout autres dispositions que la rangée aperçue d'abord. C'est ce que montrent[17] les figures 23(b) et (c).

[16]Les projections sont ce qui permet de rattacher les représentations planes à un principe mathématique unique, dictant des règles d'exécution et d'interprétation cohérentes.

[17]Ces figures illustrent de façon saisissante la *loi de la bonne forme* en psychologie de la forme (voir P. Guillaume [1979]) : une figure qui peut théoriquement être interprétée de plusieurs façons, est habituellement perçue dans son interprétation "la plus naturelle". Ici, c'est le contexte des cubes rajoutés qui détermine la perception. Dans chacun des assemblages, les cubes situés "le plus bas" sont perçus comme étant en ligne sur un plan horizontal, et cette interprétation détermine celle de la position des cubes situés "le plus haut".



(a) (b) (c)

Fig. 23

Les cubes du kit standard sont présentés tous deux avec trois arêtes verticales, et une face de dessus visible (*a priori* supposée horizontale), c'est-à-dire comme s'ils étaient posés sur une table. C'est ainsi qu'on les perçoit le mieux. Cette orientation privilégiée a été choisie pour les mêmes raisons que les présentations privilégiées des polygones, commentées aux section 2.1 et 2.2 : il s'agit d'en faciliter la perception en l'inscrivant dans le cadre naturel à l'être humain, celui où les directions verticale et horizontale sont prégnantes.

Par ailleurs, on peut appliquer à ces cubes les trois mouvements de glisser, tourner et retourner (mais non les opérations de couper et fusionner). On peut donc – et c'est intéressant – changer le point de vue d'où on est supposé les regarder. La figure 24 donne trois exemples de cela.

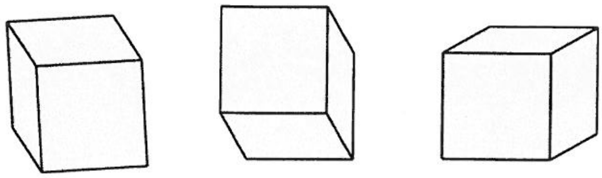
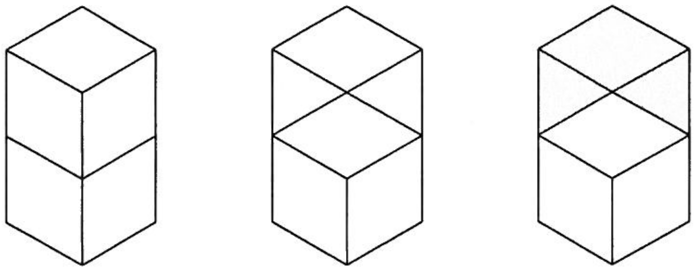


Fig. 24

Les assemblages de cubes nous donnent l'occasion d'expliquer une particularité d'AG. Les figures que l'on crée successivement à l'écran se trouvent dans des plans superposés, la dernière étant à l'avant-plan et cachant éventuellement, en tout ou en partie, les précédentes. Ceci fait que si l'on veut, par exemple, poser un cube sur un autre, comme le montre la figure 25(a), on doit commencer par amener à l'écran celui de dessous, avant de commander l'arrivée de celui du dessus. Si on procède dans l'ordre inverse, on obtient la figure la figure 25(b). On peut alors corriger cette dernière en appliquant la commande *avant-plan* au cube du dessus, ou la commande *arrière-plan* à celui du dessous.

La figure 25(b) peut être interprétée comme représentant deux cubes disposés non plus l'un sur l'autre, mais l'un derrière l'autre, et se touchant par une arête. On perçoit plus facilement cette disposition spatiale si on dessine un des deux cubes en grisé[18] (figure 25(c)).

[18]Ou, si c'est à l'écran, dans une autre couleur.



(a) (b) (c)

Fig. 25

Soulignons que les deux dessins de cubes présents dans le kit standard ne sont qu'une modeste invitation à se familiariser avec les représentations planes. Dans la pratique scolaire, d'autres représentations, travaillées en relation directe avec les objets de l'espace correspondants, sont intéressantes et utiles. Nous pensons aux trois vues coordonnées (qui découlent des projections orthogonales), aux plan cotés, aux développements de polyèdres et aussi aux éléments de la perspective à points de fuite[19].

2.6 Les commandes

Venons-en maintenant à quelques commentaires[20] sur les commandes qui soit amènent une figure à l'écran, soit permettent d'imprimer un mouvement à une figure ou d'opérer sur elle (dupliquer, découper, fusionner, diviser). Rappelons au passage que nous sommes toujours en train de décrire et expliquer le kit standard.

À part les familles de figures, le cercle et les cubes, auxquels on accède en cliquant sur un icone, tout appel d'une figure et toute commande d'un mouvement ou d'une opération s'obtient en cliquant sur le nom de la figure, du mouvement ou de l'opération apparaissant dans un menu déroulant. Et donc tout objet est appelé *par son nom*, et toute manipulation aussi, ce qui signifie un passage par la langue, par l'intellect, par la représentation linguistique du concept. Nous n'avons pas prévu ce que l'on appelle couramment des *raccourcis claviers*, qui sont en quelque sorte des symbolisations au second degré, une association de touches qui représente un mot, qui lui-même renvoie à une chose ou une action.

De plus, l'appel des objets et des actions sur ceux-ci se fait *un à la fois*. Il n'y a pas de raccourcis qui permettent de susciter d'un seul coup l'apparition de plusieurs figures ou l'enchaînement de plusieurs actions. Toute entreprise est dissociée en ses composantes[21]. Cette particularité d'AG nous a semblé convenir à l'apprentissage des mathématiques élémentaires, là où il est utile de ramener tout projet à un enchaînement d'actions les plus simples possibles. C'est une question d'intelligibilité pour les débutants. Il est vrai que décomposer ainsi toute opération complexe en ses éléments ultimes risque de

[19]Sur l'intérêt d'apprendre à interpréter et réaliser des représentations planes avant de s'initier aux projections, voir Ch. Hauchart, coord. [à paraître]. On trouvera aussi dans cet article des arguments pour une présence plus importante des représentations planes dans l'enseignement primaire.

[20]Certains de ces commentaires sont dus à G. Noël (communication privée).

[21]Et donc nous n'avons pas cherché à créer des *macros* qui auraient permis de gagner du temps et des opérations mentales.

devenir fastidieux dès que l'on maîtrise, à travers des mots et des symboles nouveaux, des concepts complexes, résumant chacun tout un processus. Ce qui veut dire qu'AG est un logiciel pour débutants et qu'il doit à terme céder la place à d'autres, plus évolués, plus synthétiques.

Puisqu'une action implique un ou des objets, la question se pose de savoir si on sélectionne d'abord le ou les objets et ensuite l'action, ou si on procède dans l'ordre inverse. La pratique informatique la plus courante consiste à sélectionner d'abord l'objet et ensuite l'action. Par exemple, lorsqu'on veut imprimer un texte, on sélectionne d'abord celui-ci et ensuite on actionne la commande *imprimer*. Dans AG, en général, on fait le contraire. Expliquons la raison de ce choix en nous bornant au cas où on sélectionne un seul objet.

Celui qui sélectionne un objet peut ne pas avoir d'autre raison que de le contempler, tandis que celui qui sélectionne une action doit avoir en vue l'objet de celle-ci (ou au moins une catégorie d'objets) et son résultat. Il doit avoir un projet, mobiliser mentalement l'objet de départ dans sa relation avec le ou les objets à l'arrivée.

Insistons sur ce point. L'action implique une relation : il y a quelque chose avant et quelque chose après. L'action est en quelque sorte une relation étalée dans le temps[22]. N'est-il pas raisonnable alors de suggérer que, l'opérateur ayant saisi globalement la situation, c'est-à-dire dans une même pensée l'action à faire et la chose qui subira l'action, il commande d'abord l'action (ce qui ne le distraira qu'assez peu de la chose, puisque l'action a trait à la chose) et ensuite l'exécute en revenant à la chose. Si au contraire il sélectionne d'abord la chose, celle-ci ayant une existence indépendante, ne risque-t-il pas de s'éloigner de son projet, de changer de direction sans le vouloir[23] ?

Bien entendu, cela peut avoir aussi un sens de sélectionner un objet sans penser immédiatement à une action, ne serait-ce que pour le singulariser, l'apercevoir mieux dans un contexte éventuellement touffu. Cette réserve ne nous semble pas affaiblir l'argumentation précédente. Bien entendu aussi, un projet portant sur *une* action n'est le plus souvent qu'une phase d'un projet qui en comporte *plusieurs* et va vers un objectif plus lointain. C'est pourquoi, dans AG, certaines suites d'opérations sont facilitées par le fait qu'à l'issue d'une opération, l'objet de celle-ci reste sélectionné, et l'opération elle-même reste aussi sélectionnée.

2.7 Quel univers géométrique ?

Après avoir décrit le contenu et le fonctionnement du kit standard, demandons-nous maintenant en quoi consiste exactement l'univers géométrique qu'il propose.

Pas de points ni de droites isolés. Nous avons signalé déjà (voir section 2.2) qu'il s'agissait d'une géométrie euclidienne. Mais n'attendrait-on pas d'un instrument

[22]C'est sans doute parce que l'action implique une relation que Piaget et Wallon situent le développement de la pensée dans les actions, non dans les choses. Les concepts ne sont le plus souvent pas des images abstraites de choses, mais ils procèdent des actions. La mobilité de la pensée est due à l'existence des relations. Le titre de l'ouvrage de Wallon [1970], *De l'acte à la pensée*, est significatif. Voir aussi à cet égard l'ouvrage de E. Giusti [2000].

[23]En outre et d'un point de vue pratique, une action en deux temps (sélectionner l'action puis l'appliquer à la chose) est plus simple qu'une action en trois temps (sélectionner la chose, sélectionner l'action, puis revenir à la chose pour lui appliquer l'action).

d'initiation à la géométrie qu'il propose des points et des droites, puisque ce sont là les éléments de départ de la plupart des exposés de géométrie ? Or dans le kit standard

> il n'y a de points que les sommets et les centres des figures et les points de division des segments,
>
> il n'y a pas de droites,
>
> il n'y a même pas d'autres segments que les côtés des polygones et les arêtes des cubes,
>
> il n'y a pas de parallèles en dehors des côtés parallèles des figures,
>
> et il n'y a pas de perpendiculaires, sinon dans les figures également.

La raison de cette sorte de pauvreté en concepts est précisément qu'il s'agit d'une géométrie pour débutants. Les points et les droites isolés, c.-à-d. considérés en eux-mêmes, sont des concepts de fondement, de même que le parallélisme et l'orthogonalité. Or on ne fonde pas ce que l'on n'a pas encore.

Dans le kit standard, les points, les segments, les parallèles et les perpendiculaires appartiennent à des figures dans lesquelles ils ont un rôle, une signification. C'est en maniant ces figures, en réalisant des fittings et en se posant des questions à leur propos que l'on est amené, petit à petit, à *dégager* les concepts de point, segment, droite, parallèle et perpendiculaire, et cela dans la mesure où ils jouent un rôle dans les explications (les descriptions, les définitions, les preuves).

On le verra ci-après (section 3), les points, les segments (pas encore les droites, ces objets infinis tellement abstraits), ainsi que les segments parallèles et perpendiculaires apparaîtront dans le kit libre.

Pas de mesures. Venons-en maintenant à ce qui pourrait apparaître comme une autre lacune du kit standard. Celui-ci ne comporte pas de mesures, ni pour les longueurs, ni pour les aires, ni pour les angles. C'est que la mesure n'est pas une notion première, elle doit s'acquérir, se construire[24]. Voyons cela en détail, en prenant en compte l'analogie entre les ensembles que l'on dénombre et les grandeurs que l'on mesure.

Les nombres entiers positifs et leur numération naissent du besoin de comparer les ensembles finis, les petits puis les plus grands. Mais comment apprendre – et enseigner – cela sans passer par les manipulations élémentaires de ces ensembles (non encore dénombrés !) : les correspondances terme à terme, les regroupements, les réunions (additions ensemblistes), les réunions répétées, etc. ?

Les fractions et les nombres décimaux positifs naissent principalement de la comparaison et de la mesure des grandeurs. Mais comment apprendre cela sans passer par les manipulations élémentaires de ces grandeurs (non encore mesurées !) : les comparaisons directes d'objets longs, pesants, ..., l'addition de deux grandeurs de même espèce, l'addition répétée, le partage d'une grandeur en parts égales, la recherche d'une unité de commune mesure entre deux grandeurs, la recherche de sous-unités de mesure de plus en plus petites, etc. ?

[24]Dans l'enseignement primaire, on confond souvent *grandeur* et *grandeur mesurée*. On passe sans doute souvent trop rapidement à cette première symbolisation des grandeurs que constituent les mesures, pour ne pas parler d'un passage précoce aux symbolisations algébriques par les formules d'aires et de volumes.

En bref, dans une genèse naturelle des notions, il y a d'abord les ensembles finis d'objets et les grandeurs de diverses sortes, avec les opérations élémentaires auxquels ils se prêtent. Sur ce terrain se construisent les dénombrements et les mesures. Ces derniers sont la source des nombres abstraits[25], lorsque l'on passe de 25 billes à 25, de $\frac{3}{4}$ de litres à $\frac{3}{4}$ ou de 1,7 mètres à 1,7.

Dans AG, il n'y a pas de mesures, il y a des ensembles d'objets et des grandeurs (longueurs, aires et angles) non mesurées. Cela signifie que les mesures et les nombres doivent encore être élaborés[26].

Il ne faut pas conclure de l'absence de mesures dans AG que les élèves devraient être privés de mesures jusqu'à ce que celles-ci aient été dûment et systématiquement construites. Au contraire, la vie apporte aux enfants dans un ordre quelconque des notions diverses qu'ils assimilent diversement, et c'est très bien ainsi. Simplement, AG leur offre un terrain d'expérimentation sur lequel certaines de ces notions – en l'occurrence celles de mesure et de nombre – trouvent à s'approfondir, se reconstruire et s'organiser.

La verticale, l'horizontale et la symétrie du corps humain. Un autre caractère du kit standard est qu'il s'appuie sur quelques notions qui n'ont rien de géométrique. Les polygones et les cubes, nous l'avons dit, y sont présentés selon les cas avec des côtés et des axes de symétrie horizontaux ou verticaux. Or la verticale et l'horizontale sont des notions physiques, car elles ne doivent leur existence qu'au champ de la pesanteur. Mais elles jouent un rôle essentiel pour l'être humain dont l'attitude naturelle est verticale et dont les organes sensoriels possèdent un plan de symétrie vertical. Ainsi, des connotations physiques et anatomiques jouent un rôle dans l'acquisition de la géométrie à son début. Ces connotations ont vocation de disparaître dès que la géométrie se constitue en discipline déductive abstraite. Mais elles jouent au départ un rôle pratique essentiel.

La possibilité offerte par le kit standard de colorier les figures est également étrangère à la géométrie (la couleur est un facteur physique), mais elle aide à en expliquer les éléments.

Des figures dessinées avec précision. Un autre point encore mérite d'être noté concernant l'univers géométrique d'AG. On a dit parfois que la géométrie est l'art de raisonner exactement sur des figures inexactes, propos qui renvoie au caractère souvent sommaire des figures tracées à la main. Or les figures d'AG sont dessinées avec beaucoup plus de précision et, grâce à la propriété magnétique, s'ajustent entre elles sans défauts apparents. Ainsi, l'univers d'AG est, si on peut dire, à mi-chemin entre l'univers du tableau et de la craie et celui des figures idéales, celles que personne ne verra jamais puisqu'elles n'existent que dans l'esprit, qu'elles sont immatérielles. On a besoin de figures idéales, car celles qui ne le sont pas se prêtent plus difficilement au

[25]Bien entendu, on peut aussi, sans se soucier des mesures, construire les nombres dans un cadre purement ensembliste, en passant pas les cardinaux ou l'axiomatique de Peano, les couples de naturels qui conduisent aux rationnels, etc. Cette construction, qui relève des fondements, n'est pas appropriée à l'enseignement élémentaire.

[26]Parmi les éléments utiles à la construction de la notion de mesure se trouvent, du côté des angles, des unités naturelles telles que le tour complet, le demi-tour, le quart et le sixième de tour.

raisonnement rigoureux. Il n'est peut-être pas indifférent de pouvoir recourir parfois à un univers matériel "à peu près" idéal.

Un univers très ordonné. En plus du tableau et de la craie, l'enseignement de la géométrie élémentaire s'appuie souvent sur des manipulations de polygones en carton ou en plastique. Comment se comparent celles-ci avec les manipulations à l'écran des figures du kit standard ? Plusieurs différences méritent d'être soulignées.

> Les cartons tombent en désordre sur la table lorsqu'on vide la boîte où on les a rangés. Les polygones du kit standard apparaissent à l'écran toujours dans la même orientation.
>
> Les polygones en carton énantiomorphes tombent sur la table au hasard sur une face ou sur l'autre. Dans AG, c'est toujours la même variété qui apparaît.
>
> On peut saisir plusieurs polygones en carton à la fois, on peut les manier au petit bonheur, leur faire décrire des mouvements "sauvages", mal indentifiés, parfois mal maîtrisés. Nous avons déjà noté cela à la section 2.4. Dans AG au contraire, chaque mouvement est un mouvement simple, bien identifié, appelé par son nom dans un menu déroulant. Il doit être choisi avant d'être exécuté et ne s'applique qu'à une figure à la fois.
>
> Les polygones en carton – nous l'avons déjà noté aussi – sont assemblés de façon approximative, vu les tremblements de la main, et bougent dans les courants d'air. Les polygones d'AG s'ajustent exactement entre eux et ne peuvent quitter leur position que moyennant une commande (consciente, voulue) d'un nouveau mouvement.

Ainsi, le kit standard est un champ d'expérimentation particulièrement ordonné et intelligible. Il comporte des contraintes qui n'existent pas dans l'univers réel, où la plupart des mouvements sont absolument libres.

Ces observations ne visent nullement à suggérer que les manipulations à l'écran soient supérieures aux manipulations des polygones en carton. Au contraire, *la manipulation des objets dans l'univers réel est indispensable.* Elle relie les mouvements à des perceptions visuelles et tactiles, elle développe la motricité fine et elle apprend à abstraire d'un univers – complexe par nature – les éléments qui permettent de le reconstruire analytiquement dans le cadre de la géométrie. Notre espoir est que le kit standard soit un champ d'expérience *original* qui facilite, par des transferts appropriés, la compréhension du monde réel.

2.8 Un univers arithmétique

Nous avons annoncé au début de cette étude qu'AG avait été conçu pour l'apprentissage des mathématiques élémentaires en général, et pas seulement de la géométrie. Cette affirmation n'est sans doute pas évidente, tant nous avons jusqu'ici parlé géométrie. Montrons donc maintenant, par quelques exemples suffisamment variés, comment le kit standard donne accès à l'arithmétique.

La figure 26 montre que l'on peut faire apparaître à l'écran des représentations des premiers nombres dans des dispositions symétriques favorables à leur perception. La partie de la figure en bas à droite, examinée ligne par ligne, montre en particulier que $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 3$.

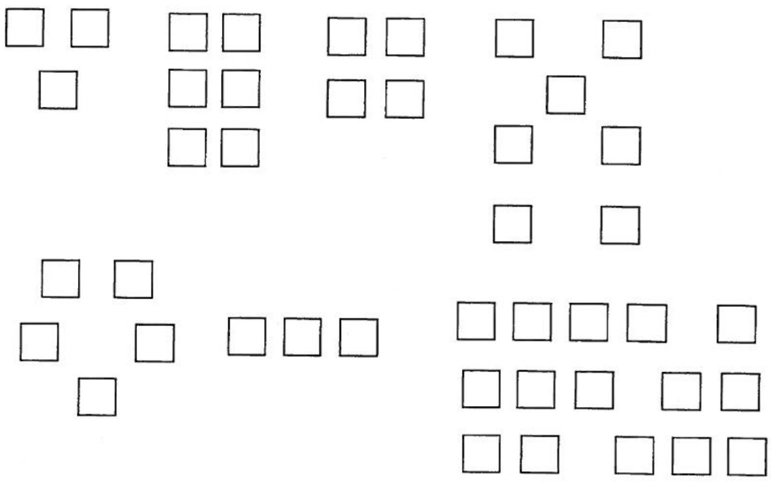


Fig. 26

La figure 27 illustre le fait que pour compter des objets, il est pratique de les grouper convenablement.

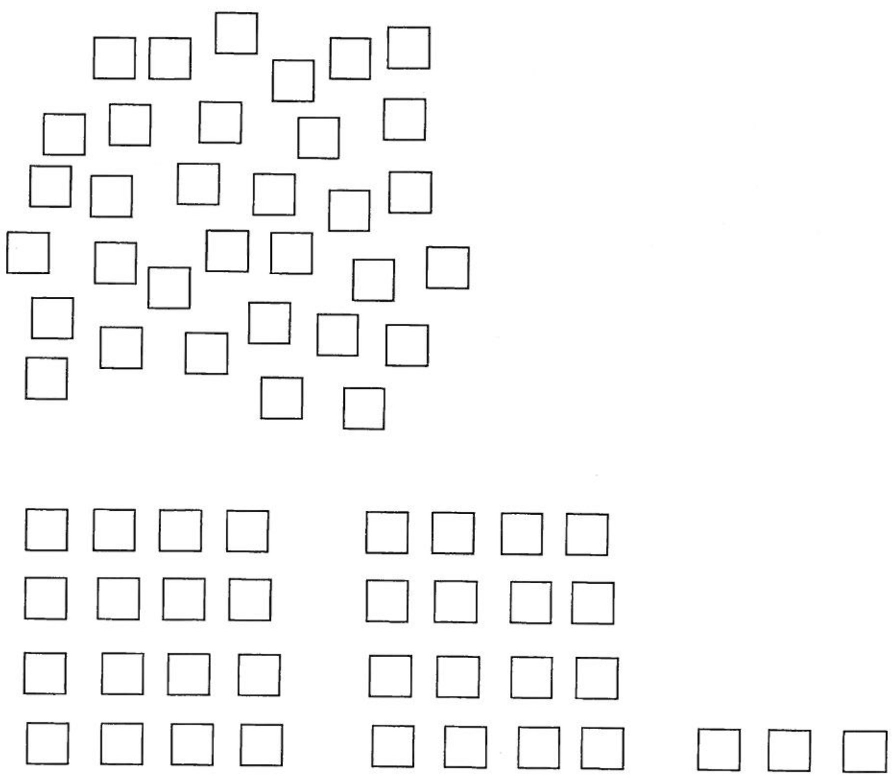


Fig. 27

En montrant la méthode classique pour réaliser un carré d'aire double d'un carré donné, le figure 28 illustre la recherche d'une unité de commune mesure entre deux aires.

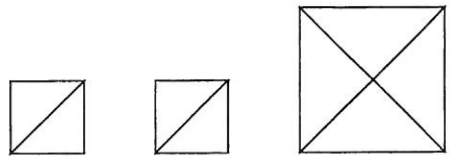


Fig. 28

À la figure 15, nous avons déjà décomposé l'aire d'un carré en sous-figures dont chacune a pour aire une fraction de l'aire totale.

À la figure 29, l'aire d'un rectangle est mesurée à l'aide d'une unité d'aire carrée U et d'une sous-unité quatre fois plus petite u. Si on désigne par A l'aire du rectangle de départ, on voit que

$$\begin{aligned} A &= 6\mathrm{U} + 11\mathrm{u} \\ &= 6\mathrm{U} + 8\mathrm{u} + 3\mathrm{u} \\ &= 8\mathrm{U} + \frac{3}{4}\mathrm{U} \\ &= (8 + \frac{3}{4})\mathrm{U}. \end{aligned}$$

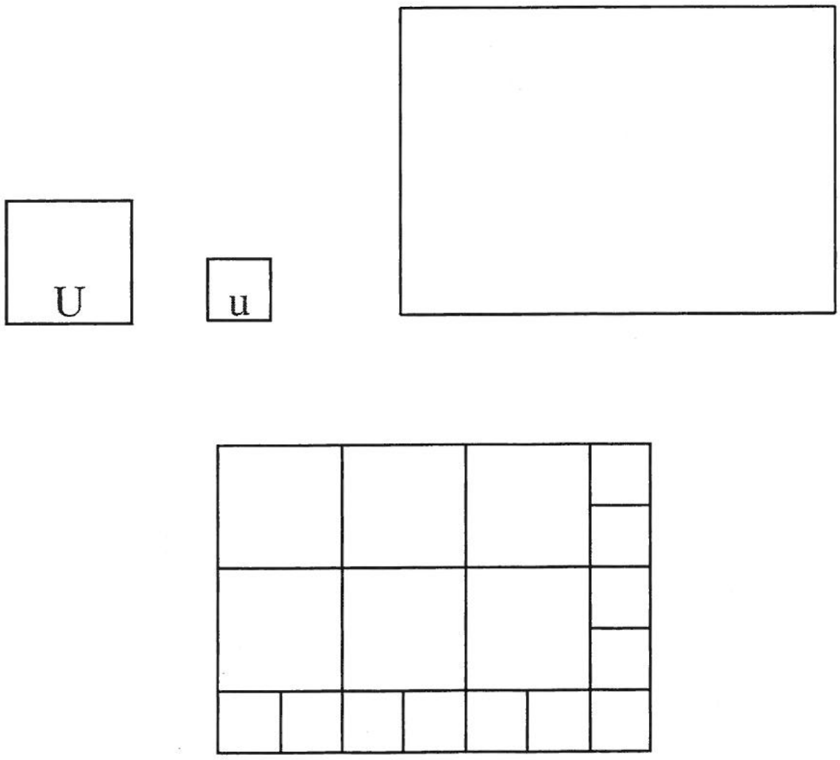


Fig. 29

La figure 30 montre comment estimer l'aire d'un cercle par des pavages carrés intérieurs et extérieurs à celui-ci.

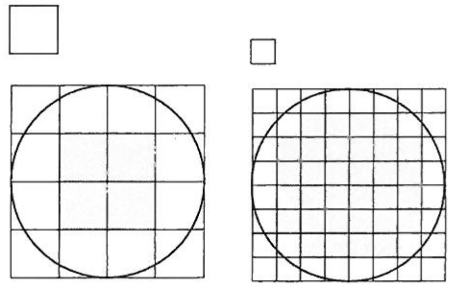


Fig. 30

La figure 31 illustre la notion de nombre triangulaire. Les autres nombres figurés (carrés, pentagonaux, etc.) peuvent être représentés aussi simplement.

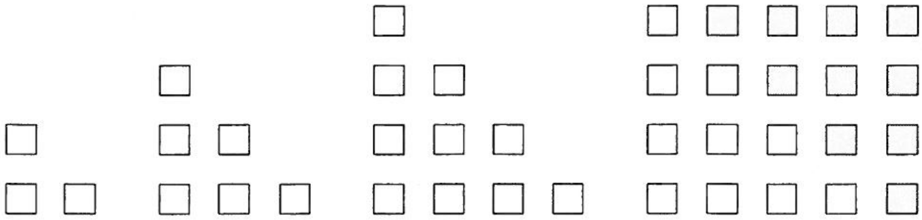


Fig. 31

La figure 32 fait voir un assortiment de figures de 4 sortes, teintées de 3 façons, à savoir en blanc, gris et noir. Elle illustre une des réalisations pratiques des produits 3×4 et 4×3 (produits cartésiens : 12 couples de propriétés (forme, couleur)).

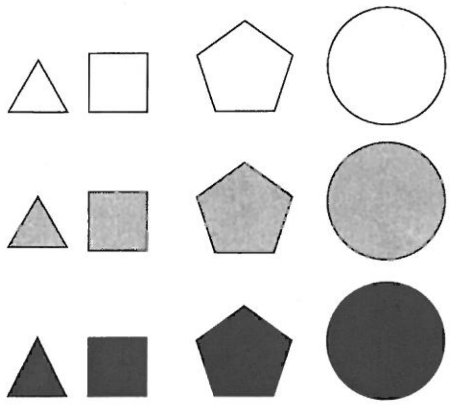


Fig. 32

Ces quelques exemples suffisent dans doute à montrer que des question variées d'arithmétique élémentaire peuvent être traitées à l'aide d'AG. Loin de nous l'idée qu'AG soit meilleur, dans tous ces exemples, qu'un ensemble de jetons ou de figures dessinées ou découpées. L'expérience montrera si l'usage du logiciel dans ce genre de questions s'avère intéressant.

3 Le kit libre

Comme nous l'avons dit au début de cette étude, dès qu'on ouvre AG, on a le choix entre deux contextes de travail : le kit standard et le kit libre. Le premier est le plus élémentaire des deux. Présentons maintenant le second.

L'utilisateur familier du kit standard n'est pas dépaysé en arrivant dans le kit libre. Celui-ci en effet est organisé comme le premier, avec seulement de nouvelles figures et un petit nombre d'opérations nouvelles . Plus précisément, le kit libre permet les mêmes opérations que le kit standard, à savoir *dupliquer*, *découper*, *fusionner* et *diviser*, et les mêmes mouvements, à savoir *glisser*, *tourner* et *retourner*. Mais il comporte en plus *modifier*, *translation*, *rotation* et *symétrie miroir*.

De plus, les commandes dans le kit libre ont pour l'essentiel les mêmes caractéristiques que celles du kit standard : on exécute une seule commande à la fois, chaque figure ou opération est commandée par son nom et enfin, en général, l'action est sélectionnée avant l'objet sur lequel elle porte. La philosophie générale des actions dans le kit libre est donc la même que celle en vigueur dans kit standard. Par contre, les figures sont différentes. Voyons d'abord cela.

3.1 De nouvelles familles de polygones

Comme le kit standard, le kit libre propose des figures regroupées par familles, mais il s'agit ici de *familles en un tout autre sens du mot.*

L'une d'elles est celle des polygones réguliers. Elle comprend le triangle équilatéral, le carré, ainsi que les polygones réguliers de 6 à 12 côtés. Chacun d'eux est amené à l'écran avec une taille et dans une orientation qui se règlent à la souris. Plus précisément, après avoir choisi le polygone que l'on veut, disons un octogone, on dessine à la souris son premier côté dans une direction quelconque, en lui donnant un longueur quelconque, et l'octogone se construit automatiquement. Il se construit dans le sens trigonométrique.

Une autre famille est celle des triangles : elle comprend les triangles "quelconques"[27], isocèle, équilatéral, rectangle et isocèle rectangle. Il s'agit donc de la famille des triangles en général, avec ses divers cas particuliers classiques. À titre d'exemple, voyons comment se dessine un triangle isocèle. On trace sa "base" à la souris, puis on écarte le pointeur de la base, ce qui fixe la hauteur du triangle. On peut ainsi obtenir des triangles de taille et d'orientation quelconque. La figure 33 en montre trois spécimens.

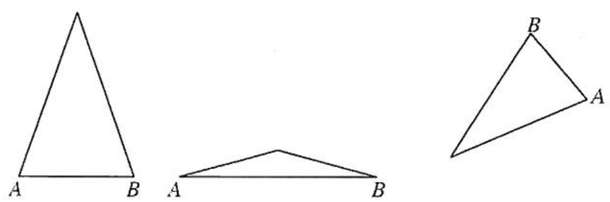


Fig. 33

[27]Nous avons mis des guillemets à l'adjectif *quelconque* parce qu'il est ambigu. Souvent par *quelconque* on veut dire "qui n'est ni isocèle, ni équilatéral, ni rectangle et ni isocèle rectangle". Dans notre cas, *quelconque* signifie "n'importe lequel", c'est-à-dire aussi bien un des triangles réputés particuliers qu'un triangle sans angle droit ni côtés égaux. Le quantificateur logique *pour tout* correspond bien à ce sens du mot *quelconque* : *pour tout*, c'est vraiment "n'importe lequel".

Une fois la base fixée, par exemple AB à la figure 33, on peut encore choisir la hauteur et donc obtenir ainsi une infinité de triangles. La figure 34 en donne une idée.

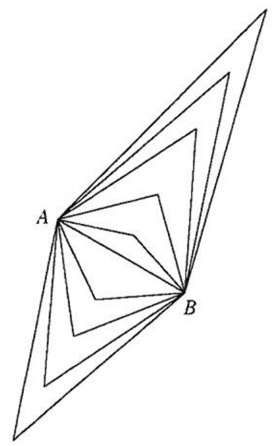


Fig. 34

Vient ensuite la famille des quadrilatères, qui comprend le quadrilatère quelconque[28], le trapèze, le trapèze rectangle, le losange et enfin le carré. Pour dessiner par exemple un quadrilatère quelconque, on trace librement ses trois premiers côtés, et le quatrième apparaît automatiquement en même temps que le troisième.

Enfin vient la famille des polygones quelconques, toujours au même sens du terme *quelconque*. Cette famille contient les polygones possédant de 5 à 10 côtés.

On se souviendra que les polygones du kit standard avaient, à similitude près, zéro degré de liberté. Mis à part ceux qui sont réguliers, les polygones du kit libre ont au moins un degré de liberté. Expliquons cela.

Partons de l'exemple des rectangles. Pour en dessiner un, on trace d'abord à la souris un côté AB (figure 35) auquel on donne une longueur quelconque. Ensuite, on n'a pas le choix de l'angle entre AB et BC, puisque c'est un angle droit, mais on a le choix de la longueur de BC. Une fois le point C fixé, le rectangle est déterminé : les côtés BC, CD et DA apparaissent en même temps.

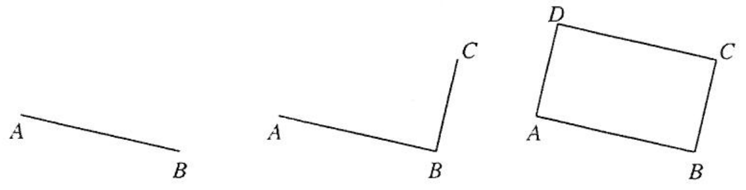


Fig. 35

Comptons maintenant les paramètres que l'on a choisis pour dessiner le rectangle. On ne considère pas la longueur de AB, car comme annoncé, on ne s'occupe ici des degrés de liberté qu'à similitude près. Un seul paramètre est donc en jeu : c'est la

[28] *Quelconque* au sens expliqué à la note 27.

longueur de BC ou, si on veut, le rapport des longueurs de AB et BC. Le rectangle possède donc, à similitude près, un seul degré de liberté.

Un parallélogramme par contre en possède deux. En effet, après avoir choisi la longueur de son premier côté AB (figure 36), on choisit encore l'angle entre AB et BC et la longueur de BC (ou le rapport des longueurs de AB et BC). Ceci fait, le parallélogramme est déterminé et le dessin se complète automatiquement.

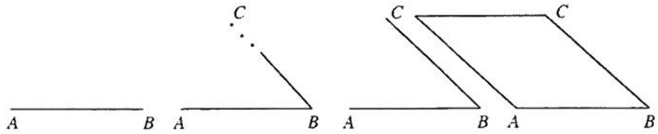


Fig. 36

En raisonnant de manière analogue, on réalise qu'un quadrilatère quelconque a 4 degrés de liberté, un pentagone 6, un hexagone 8, un octogone 12 et un dodécagone 20. En général, un polygone quelconque à n côtés a, à similitude près, un nombre de degrés de liberté égal à $2(n-2)$

Pourquoi mettre ainsi en évidence le nombre de degrés de liberté des polygones ? La raison est simple. C'est que, plus grand est ce nombre, plus grande est la variété des figures répondant à une définition donnée.

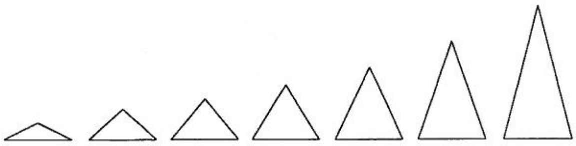


Fig. 37

La figure 37 donne (à similitude près) une idée de tous les triangles isocèles possibles. On y discerne comme cas particulier un triangle équilatéral. Le triangle isocèle possède 1 degré de liberté, ce qui permet d'en imaginer tous les cas de figure possibles à l'aide de quelques cas disposés dans une seule rangée. On passe mentalement d'un cas au suivant par déformation continue, ce qui souligne la parenté de tous les cas.

Il en va de même du rectangle, comme le montre la figure 38. Dans cette figure se trouve un carré comme cas particulier.

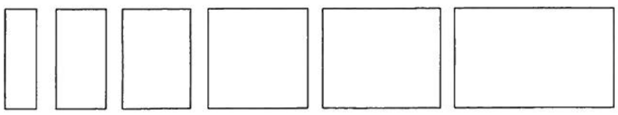


Fig. 38

La figure 39 donne une idée de tous les parallélogrammes possibles. Mais comme le parallélogramme a 2 degrés de liberté, on est obligé de répartir les cas de figure en un tableau à double entrée. Dans chaque ligne du tableau, le rapport des longueurs des côtés est constant, et dans chaque colonne les angles sont invariables. Il est bien plus difficile de se faire une idée de tous les parallélogrammes possibles, de les parcourir en pensée, que de faire de même pour tous les triangles isocèles ou tous les rectangles. La figure 39 évoque non seulement tous les parallélogrammes possibles, mais également, comme cas particuliers nombreux, tous les rectangles, tous les losanges et tous les carrés possibles.

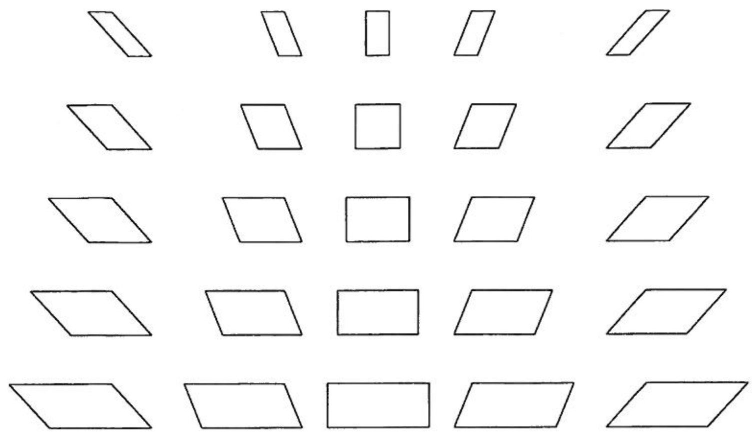


Fig. 39

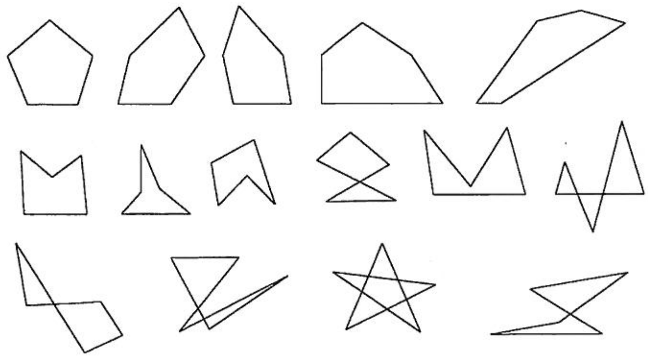


Fig. 40

Si on en vient maintenant au quadrilatère quelconque, qui a 4 degrés de liberté, on devrait, pour aider à imaginer tous les cas de figure possibles, dresser un tableau à 4 entrées, autrement dit un tableau dans un espace à 4 dimensions. Ceci traduit le fait que le quadrilatère admet une variété de cas de figures qui confond l'imagination. Et que dire alors du pentagone quelconque et des polygones suivants ? La figure 40 présente des spécimens du pentagone quelconque, mais n'est pas d'une grand aide à celui qui veut parcourir en imagination, à travers des déformations continues, le champ de tous les pentagones possibles.

Insistons sur la signification de figures comme celles de 36 à 39. La première donne une idée de tous les triangles isocèles possibles, mais seulement à travers quelques spécimens. Comme nous l'avons suggéré, on peut tenter de passer mentalement, par déformation continue, de chaque spécimen au suivant. On s'approche ainsi en imagination de l'ensemble infini des triangles isocèles. Or le kit libre comporte une commande appelée *modifier*[29], qui permet de *réaliser physiquement, à l'écran, de telles déformations continues.* Il suffit pour cela de tirer à la souris sur l'un des points qui a servi à tracer le triangle présent à l'écran.

On peut faire un commentaire analogue pour tous les polygones du kit libre. On obtient ainsi, à l'écran, un parcours continu dans la famille des triangles, dans celle des parallélogrammes, celle des pentagones, etc.

De tels parcours donnent un idée assez fidèle des formes en cause, à condition qu'il s'agisse de polygones à 1 ou 2 degrés de liberté. Lorsque le nombre de degrés de liberté va croissant, l'exploration par déformation continue confond de plus en plus l'imagination. Par exemple, déformer un pentagone quelconque à la souris ne permet sans doute pas d'acquérir sur ce polygone beaucoup plus d'information que ceci : certains sont convexes, d'autres non, et il y en a dont les côtés se croisent. En d'autres termes, on peut maîtriser la souris, lui imprimer des mouvements assez systématiques et ordonnés pour obtenir une bonne idée des triangles isocèles, des rectangles, ... Mais pour ce qui est des pentagones, il n'y a guère de parcours privilégiés, simples à organiser. L'esprit ne peut plus guider la main qui tient la souris. Le pentagone est trop fantasque. Ceci est d'autant plus vrai que le kit libre, au rebours du kit standard, n'impose aux polygones ni dimensions, ni orientation fixes.

3.2 Des opérations concrètes aux opérations formelles.

Nous sommes à même maintenant de bien comprendre le saut qualitatif entre le kit standard et le kit libre.

Les figures du kit standard, rappelons-le, sont de formes et de dimensions stables et apparaissent toujours dans une orientation où on les voit au mieux. Les familles de figures, dans ce kit, ne correspondent pas à un concept : ce ne sont pas la famille des triangles, celle des quadrilatères, etc. Ce sont des familles d'objets divers, mais qui s'associent en faisant voir entre eux, grâce aux fittings, des relations géométriques significatives. Ces relations *tombent sous le sens* : on les dégage en observant et en arrangeant ces objets invariables que l'on a sous les yeux. Elles relèvent de ce que Piaget a appelé *les opérations concrètes* et Wallon *l'intelligence des situations* : on saisit des rapports de convenance entre des choses et on manie celles-ci en conséquence, dans le but d'obtenir un arrangement, un fitting donné.

Le kit libre introduit l'utilisateur *progressivement* dans un tout autre registre d'action et de pensée. Les polygones déformables y obéissent à une définition. Ils matérialisent un concept. Un concept (de polygone en l'occurrence) est un ensemble décrit par une ou quelques propriétés (reprises dans sa définition). Celle-ci le saisit, comme on dit parfois, *en compréhension.* La commande *modifier* du kit libre permet de parcourir cet ensemble *en extension,* de voir beaucoup beaucoup de cas de figure et, grâce à la continuité des déformations, de saisir ce qui les relie entre eux.

Le kit libre introduit *par paliers* à cet univers d'un type nouveau. Il provoque le passage des opérations concrètes aux *opérations formelles,* comme dit Piaget, ou selon

[29]Notons que la *flèche* disponible dans les menus de figures, permet de réaliser des opérations similaires et également de faire glisser toutes les figures.

Wallon, de l'intelligence des situations à *l'intelligence discursive.* Voyons comment cela se passe.

Quand une figure a 1, voire 2 degrés de liberté, on peut encore y *voir* certaines propriétés et, dans la mesure où on les voit, elles n'ont pas immédiatement besoin de preuve. Par exemple, si un triangle a deux côtés égaux, en le regardant en position privilégiée comme une échelle double posée sur un sol horizontal, on s'assure que ses deux angles à la base sont égaux. Et l'on n'hésite guère sur le fait que cette proposition s'étend à tous les triangles isocèles possibles.

Par exemple encore, si un quadrilatère a trois angles droits, on réalise qu'il en a un quatrième. *Le mode de construction des polygones dans le kit libre met en évidence des conditions déterminantes de ceux-ci.*

Par contre, comment *voir* des propriétés des quadrilatères ou des pentagones quelconques dans le fouillis des cas de figure possibles ? Lorsque le nombre de degrés de liberté d'une figure dépasse 2, on ne peut plus comprendre celle-ci par la seule intuition. On est obligé de la saisir par sa définition, pas ses propriétés et par le raisonnement. Les polygones à plus de 2 degrés de liberté sortent du champ de l'évidence. Ils obligent à construire la géométrie discursivement, déductivement, en s'appuyant sur le langage. La géométrie passe ainsi par nécessité de l'intuition à l'entendement.

On accède aux familles de figures (celle des triangles isocèles, celle des rectangles, celle des losanges, etc.) de façon bien différente par le dessin aux instruments et par le kit libre. Pour dessiner un triangle isocèle, il faut en connaître la définition et concevoir une suite d'opérations aux instruments qui réalise celle-ci. L'ordre des opérations est crucial. La réalisation demande du temps, et on obtient un triangle à la fois. Dans le kit libre, on obtient un triangle isocèle en choisissant son nom dans un menu déroulant, puis en cliquant en trois points de l'écran, dans un ordre quelconque et sans se soucier de la définition. Les actions se succèdent rapidement. Et ensuite, on accède par déformation continue à une infinité de cas de figure.

Dans le dessin aux instruments, le concept est mobilisé en compréhension, c'est-à-dire par ses propriétés caractéristiques. Dans le kit libre, il est perçu en extension, c'est-à-dire à travers ses diverses manifestations possibles. Une façon n'est ni meilleure ni moins bonne que l'autre. Elles ont toutes deux leur utilité. Cela a un sens d'aller acheter toutes sortes de pains chez le boulanger. Cela a un sens aussi, complémentaire et profond, d'apprendre la recette du pain et d'en faire soi-même.

3.3 Points, segments, parallèles et perpendiculaires

Les points et les segments sont des objets aux formes pauvres, c'est le moins que l'on puisse dire et, de ce fait, ils ne sont pas par eux-mêmes très stimulants. Ils ne deviennent surtout intéressants que comme éléments de figures plus complexes et outils d'explication de celles-ci. Le kit standard, dont l'objectif est de permettre une première exploration des figures les plus intelligibles, ne les propose pas. Par contre ils sont présents dans le kit libre, de même que les opérations de tracé de segments parallèles ou perpendiculaires.

Le kit standard fourmille de segments parallèles et d'angles droits, mais qui sont là dans des figures et non considérés isolément. Ils n'ont pas encore été abstraits. Le kit libre débouchant, comme nous venons de le voir, sur une géométrie davantage raisonnée, on y a mis à la disposition de l'utilisateur ces figures élémentaires et ces deux relations fondamentales, matériaux premiers des argumentations géométriques.

La droite, cet objet infini qui ne peut être représenté que par un segment traversant tout l'écran, ne se trouve pas dans le kit libre. La raison de cette absence est qu'elle est un concept abstrait, certes nécessaire au fondement de la géométrie, mais peut-être prématuré à ce stade. Par contre le kit libre proposera, dans la seconde version d'AG, une opération de *prolongement d'un segment*, ce qui est une manière d'accéder à la droite infinie par le biais de l'infini potentiel : on peut toujours prolonger un segment autant qu'on veut. Il est possible de considérer que, de même que d'autres figures telles que le triangle ou le parallélogramme, le segment comporte une infinité de cas de figure, à savoir les segments de toutes les longueurs possibles[30].

Remarquons enfin que le kit libre, comme le kit standard, ne comporte pas de mesures de longueurs, d'angles ou d'aires. Il représente encore une étape et une modalité de la géométrie où les nombres décimaux, voire réels, ne sont pas présents. Les relations géométriques étudiées ne sont pas transposées, symbolisées, dans le domaine numérique. Elles appartiennent à l'intuition spatiale pure. On les conçoit certes, puisqu'il s'agit d'une géométrie de plus en plus raisonnée, mais d'abord *on les voit.*

Qu'on nous comprenne bien. En ne prenant pas les mesures en compte dans le kit libre, les concepteurs d'AG proposent à l'utilisateur un atelier de géométrie pure qu'ils considèrent comme utile et intéressant. Ils n'ont pas voulu dire par là qu'il serait important d'exclure les mesures, ou d'exclure pendant longtemps les mesures, de la pratique de la géométrie. Les élèves apprennent très tôt à mesurer, et c'est une bonne chose qu'ils se servent de mesures en géométrie dès qu'ils peuvent le faire pertinemment[31].

3.4 Trois transformations

Dans le kit libre, on peut appliquer à toute figure une *translation,* une *rotation* ou une *symétrie miroir.* Les commandes de ces trois opérations apparaissent dans un menu déroulant intitulé *transformations.* Voyons de quoi il s'agit.

Commençons par la translation. Dans le kit standard, nous avons vu le mouvement *glisser.* Il consiste à changer une figure de place de manière continue et sans la faire tourner. La figure se trouve à un certain endroit au départ, et à un autre à l'arrivée. Bien entendu, une fois le glissement effectué, seule demeure la figure à l'arrivée. La figure au départ a donc disparu, et il ne reste rien de ses apparitions aux stades intermédiaires du glissement. Dans une *translation*, on considère la figure au départ et la figure à l'arrivée, et on ne se soucie pas des mouvements possibles qui permettraient de passer de l'une à l'autre. Pour soumettre une figure à une translation (on dit aussi pour la *translater*), on doit spécifier par un segment AB (voir figure 41(a)) la direction, le sens et la distance de la translation : on clique sur A, puis sur B. Ensuite, on clique sur la figure à translater, et la translatée apparaît instantanément. Sur la figure 41, nous avons grisé celle-ci pour la distinguer de la figure au départ. Cette dernière subsiste après l'opération. En résumé, une translation établit une correspondance entre deux figures, l'une au départ et l'autre à l'arrivée. Elles ont toutes deux même orientation.

---

[30]On trouvera dans GEM [1981] une reconstruction de la géométrie à partir de la notion de *segment prolongeable* considérée comme plus primitive que celle de droite.

[31]Toutefois, nous ne souscrivons pas à l'affirmation de Piaget [1948] : "Or, la géométrie métrique, c'est celle dont s'occupe l'enseignement élémentaire." *Métrique* signifie chez Piaget "qui s'appuie sur les mesures". La géométrie avant toute mesure est importante aussi.

Sur la figure 41(b), le segment AB qui défini la translation a été choisi sur la figure au départ elle-même.

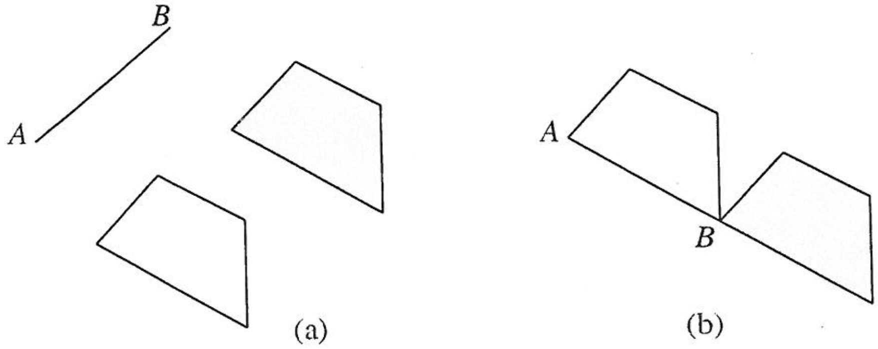


Fig. 41

De manière analogue, soumettre une figure à une *rotation*, c'est la mettre en correspondance dans une position de départ avec une position à l'arrivée, sans se soucier d'un mouvement intermédiaire (voir figure 42). Mais ici la deuxième figure s'obtient en faisant tourner la première. On commande une rotation d'abord en cliquant sur un point O qui sera son centre, puis en cliquant sur trois points A, B et C qui déterminent l'angle de la rotation. À la figure 42(b), le centre et l'angle ont été choisis sur la figure de départ elle-même. La rotation, comme la translation, s'exécute instantanément et donc on ne voit pas la figure tourner d'un mouvement continu. Et bien entendu, la figure de départ est maintenue à l'écran.

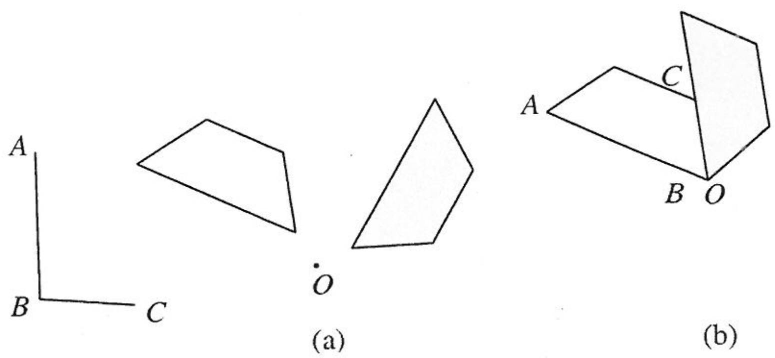


Fig. 42

La symétrie miroir fonctionne selon des principes analogues. Pour y soumettre une figure, on doit spécifier l'axe de la symétrie par deux de ses points A et B. La figure 43 en montre deux exemples. Dans le cas (b), l'axe de la symétrie a été choisi sur la figure de départ. Lorsqu'on exécute la symétrie, on ne voit pas – comme dans le mouvement *retourner* – de déformation continue amenant la figure de départ sur la figure à l'arrivée. Et enfin, ici aussi, la figure de départ est maintenue à l'écran.

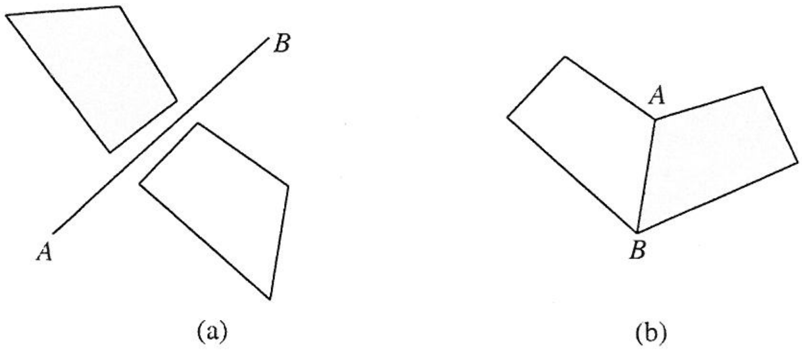


Fig. 43

Nous avons vu à la section 3.1 que la commande *modifier* permet de changer la forme et la taille d'un polygone. Si on change de cette façon la figure de départ d'une transformation, la figure transformée subit le même changement. On peut ainsi explorer l'effet de la transformation sur tout un ensemble de figures obtenu par déformation continue.

Les trois mouvements du kit standard, à savoir *glisser, trouner* et *retourner*, demeurent disponibles dans le kit libre. Et si on soumet la figure de départ d'une transformation à l'un quelconque de ces mouvements, la transformation s'applique à la figure qui subit le mouvement, et non plus à celle de départ.

De plus, la commande *modifier* permet aussi d'agir sur les éléments qui définissent une transformation, que ce soit le segment orienté pour une translation, le centre et l'angle pour une rotation ou enfin l'axe pour une symétrie. Et lorsqu'on modifie ainsi les éléments déterminants d'une transformation, la figure de départ de celle-ci ne change pas, mais la figure d'arrivée se change en la figure d'arrivée de la nouvelle transformation. On peut ainsi explorer l'effet sur une figure déterminée de tout un ensemble de transformations obtenues par modification continue, selon le cas du segment orienté, du centre, de l'angle ou de l'axe de symétrie.

Comparons les trois transformations réalisées sur papier et aux instruments avec leur exécution dans le kit libre. Dans le premier cas, leur définition est mobilisée et dicte les opérations successives de construction. Dans ces conditions, chaque transformation est un concept saisi en compréhension. Dans le second cas, après que l'on ait spécifié les éléments déterminants de la transformation (centre, angle, axe, ...), celle-ci s'exécute automatiquement. Elle est donc moins saisie en compréhension. Mais la possibilité d'en explorer par déformation continue une foule de cas fait qu'elle est davantage saisie en extension.

Il est intéressant de comparer le *translation*, la *rotation* et la *symétrie miroir* aux trois mouvements *glisser*, *tourner* et *retourner.*

La rotation par exemple est *plus générale* que l'action de tourner. En effet, son centre peut être choisi librement, alors que dans *tourner*, le centre coïncide avec le centre d'inertie de la figure. Pour le dire simplement, un figure à laquelle on applique *tourner* tourne "sur place", alors que si on la soumet à une rotation, elle peut "changer de lieu".

Pour une raison analogue, la symétrie miroir est *plus générale* que l'opération de retourner. En effet, dans la symétrie miroir, l'axe de la symétrie peut être choisi librement : on peut le situer n'importe où, et il ne doit pas être nécessairement vertical. Et donc, dans la symétrie miroir, la figure ne se retourne pas “sur place”, elle peut aussi en même temps “changer de lieu”.

Les trois transformations sont *plus abstraites* que les trois mouvements. Aucune des trois ne fait voir un mouvement continu du départ jusqu'à l'arrivée. Il y a saut brusque : seules comptent les positions initiale et finale. Cette caractéristique éloigne les transformations de leur illustration pratique par des mouvements de polygones en carton.

Les trois transformations sont *plus techniques* que les trois mouvements. En effet, chacune d'elles est définie par des éléments déterminants : un segment pour la translation, un centre et un angle pour la rotation, un axe pour la symétrie miroir. Ces éléments pratiques nécessaires à l'exécution conduisent à définir chaque transformation techniquement. Le passage des trois mouvements aux trois transformations s'accompagne ainsi d'un progrès de l'intelligence des situations vers l'intelligence discursive.

Remarquons toutefois que ces données techniques ne sont pas spécifiées numériquement. AG demeure sur ce point un atelier de géométrie pure, sans mesures. Soulignons une fois de plus que ce choix de ne pas proposer de mesures ne devrait jamais empêcher les élèves, dans quelque contexte que ce soit, de recourir aux mesures qui leur sont familières. Simplement, avec le kit libre, ils ont une occasion de plus de travailler les phénomènes géométriques en eux-mêmes, non encore symbolisés numériquement.

On sait que, dans le cadre de la théorie géométrique, les transformations ont vocation de changer de nature (et donc de définition) en devenant des transformations du plan tout entier. Les trois transformations proposées dans le kit libre n'ont pas encore atteint ce degré supplémentaire d'abstraction[32].

Ce que nous venons d'expliquer illustre encore le fait que le kit standard et le kit libre sont deux paliers successifs sur le chemin de la géométrie abstraite. Les mouvements proposés dans le kit standard préfigurent sur un mode concret les transformations que l'on découvre ensuite dans le kit libre.

On peut considérer les mouvements, les transformations d'une figure, ces mêmes transformations définies en recourant aux mesures et les transformations du plan entier comme des concepts différents. Mais on peut aussi les voir comme des étapes successives de la construction des concepts mathématiques d'isométrie. Dans cette optique, on souscrira sans doute à l'opinion de Gonseth [1936] selon laquelle les concepts les plus abstraits n'ont pas dans l'esprit d'existence indépendante. Un concept, au sens le plus large et probablement le plus utile du terme, est la réunion de sa définition dans un cadre axiomatique et de ses avatars antérieurs, sources des intuitions qui le soutiennent, qui en désignent les tenants et aboutissants.

C'est pour cette raison que dans le kit libre, les mouvements ont une raison d'être à côté des transformations. Celles-ci ne remplacent pas ceux-là, elles les complètent. De même que les transformations saisies analytiquement et étendues à tout le plan viendront plus tard achever cet édifice conceptuel.

[32]Les tranformations étendues au plan entier sont des concepts de fondement. Ils sont requis pour organiser les transformations en *groupes de transformations*, au sens technique du mot *groupe*.

3.5 Des fichiers dynamiques

Expliquons maintenant une possibilité intéressante liée au triple fait que chaque transformation laisse subsister la figure de départ, que l'on peut modifier continûment celle-ci et la soumettre à des mouvements, et que l'on peut aussi modifier continûment les éléments déterminants des transformations.

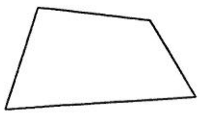


Fig. 44

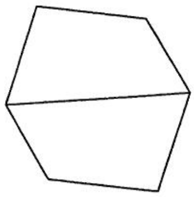


Fig. 45

Voyons cela sur un exemple. La figure 44 montre un quadrilatère quelconque. Par un rotation d'un demi-tour autour du milieu d'un de ses côtés, accolons-lui un autre quadrilatère identique (figure 45). Nous obtenons un hexagone muni d'une de ses diagonales, et dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Assemblons plusieurs hexagones de ce type. Nous obtenons un pavage du plan par ces hexagones, et donc aussi par les quadrilatères de départ (figure 46).

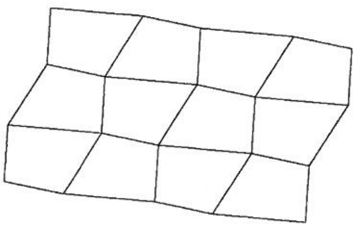


Fig. 46

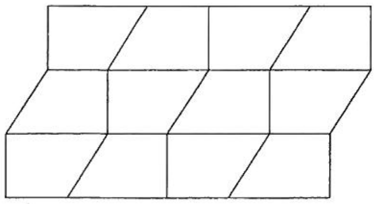


Fig. 47

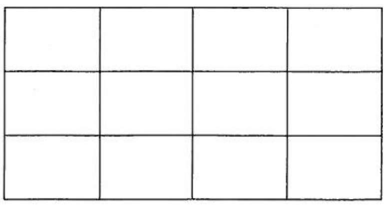


Fig. 48

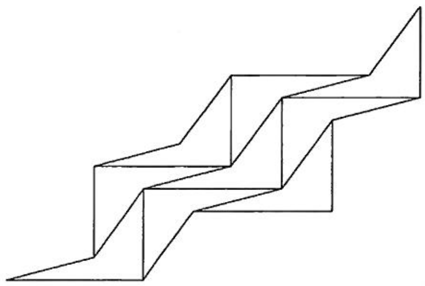


Fig. 49

Ceci fait, si nous déformons à la souris le quadrilatère de départ, tous les autres changent de la même façon, et le pavage entier est modifié. Les figures 47, 48 et 49 montrent trois pavages obtenus ainsi par déformation continue du pavage de la figure 46.

Nous appelons *fichiers dynamiques* les figures ainsi construites en enchaînant (en liant) des créations de figures et des transformations, de sorte que le résultat puisse à la fin se transformer comme un tout.

Les fichiers dynamiques recèlent une grande richesse de possibilités et peuvent conduire à étudier certaines questions de géométrie assez avancées. Donnons quelques exemples de cela.

Si on trace deux segments parallèles, puis que l'on fait subir à une figure quelconque, par exemple un triangle, une symétrie miroir par rapport à un axe représenté par le premier segment, puis une seconde symétrie miroir par rapport à un axe représenté par le second, on constate que l'on peut transporter le triangle de départ sur le triangle final par une translation. L'amplitude de celle-ci est égale à deux fois la distance entre les deux axes. On voit cela sur la figure 50. Celle-ci illustre le théorème qui dit que

> *La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.*

Si, grâce à la fonction *modifier*, on déplace un des deux axes, ou encore si on déplace la figure de départ, on obtient toutes sortes de cas de figure illustrant ce théorème. La figure 51 montre un deuxième cas, moins évident que celui de la figure 50. Dans celle-ci en effet, le quadrilatère saute par dessus le premier axe en un bond vers la droite, puis par dessus le second en allant toujours vers la droite. La composition des deux bonds est assez facile à réaliser. Dans la figure 51 par contre, le quadrilatère commence par exécuter un grand bond vers la gauche, avant de faire un deuxième bond vers la droite, et il est bien plus difficile dans ces circonstances de discerner que l'amplitude du bond résultant égale deux fois la distance entre les axes.

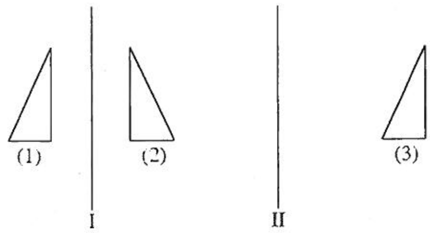


Fig. 50

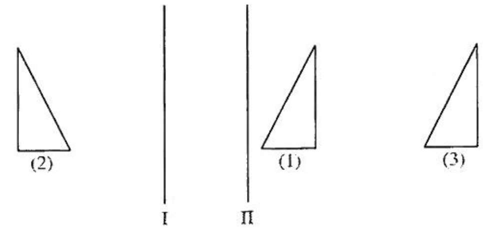


Fig. 51

La figure 52 illustre un deuxième théorème de composition des isométries, celui que dit que

> *La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.*

Il est instructif de modifier, dans cette figure, l'angle entre les deux axes ou la position de la figure de départ (voir un exemple à la figure 53), mais ce n'est pas ici le lieu de commenter cette figure en détail.

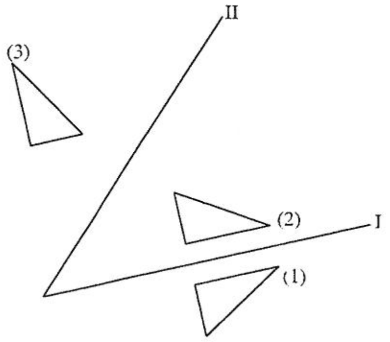


Fig. 52

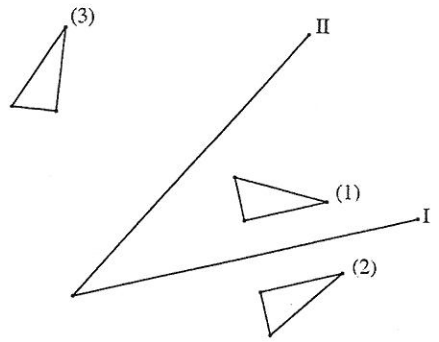


Fig. 53

Soulignons simplement qu'à l'aide de fichiers dynamiques, on peut explorer l'ensemble des théorèmes de composition des isométries du plan[33].

Voici d'autres exemples d'utilisation de fichiers dynamiques dans des situations non élémentaires.

Sachant qu'il existe 7 types de frises, on peut en construire des modèles à partir d'un motif arbitraire, et ensuite explorer chaque type en variant continûment le motif ou les transformations constitutives de la frise. On sait de même qu'il existe 17 types de réseaux plans, et on peut ici aussi en construire des modèles que l'on peut ensuite explorer par déformation du motif de départ.

La figure 54 montre un tel réseau. On l'a construit en partant du motif grisé que l'on voit en bas à gauche. On est passé de celui-ci à tous les autres par des rotations de 120° dont les angles ont été empruntés à l'hexagone situé lui aussi en bas à gauche et par des translations de trois types commandées à partir des trois diagonales de cet hexagone. En déformant le motif de départ, on change ce réseau par exemple en ceux que montrent les figure 55 et 56.

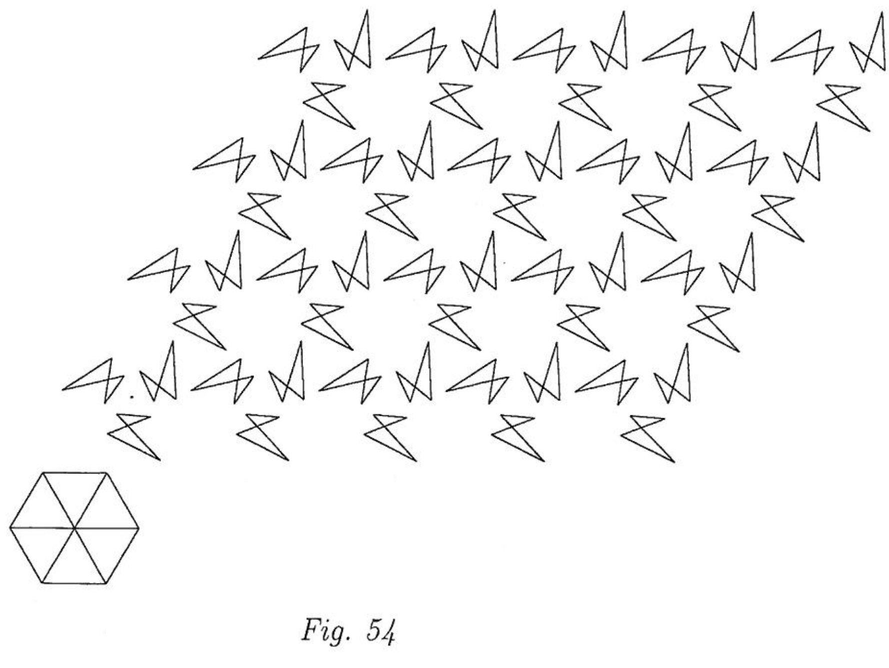


Fig. 54

[33]Sur ces théorèmes et leurs preuves, voir par exemple N. Rouche et coll. [1982].

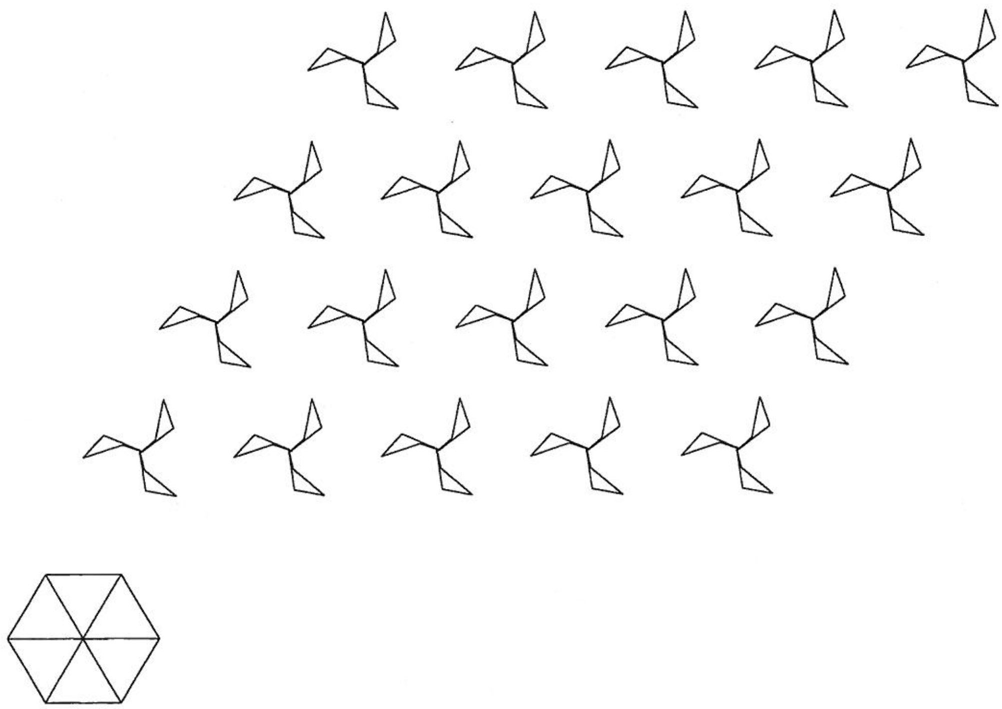


Fig. 55

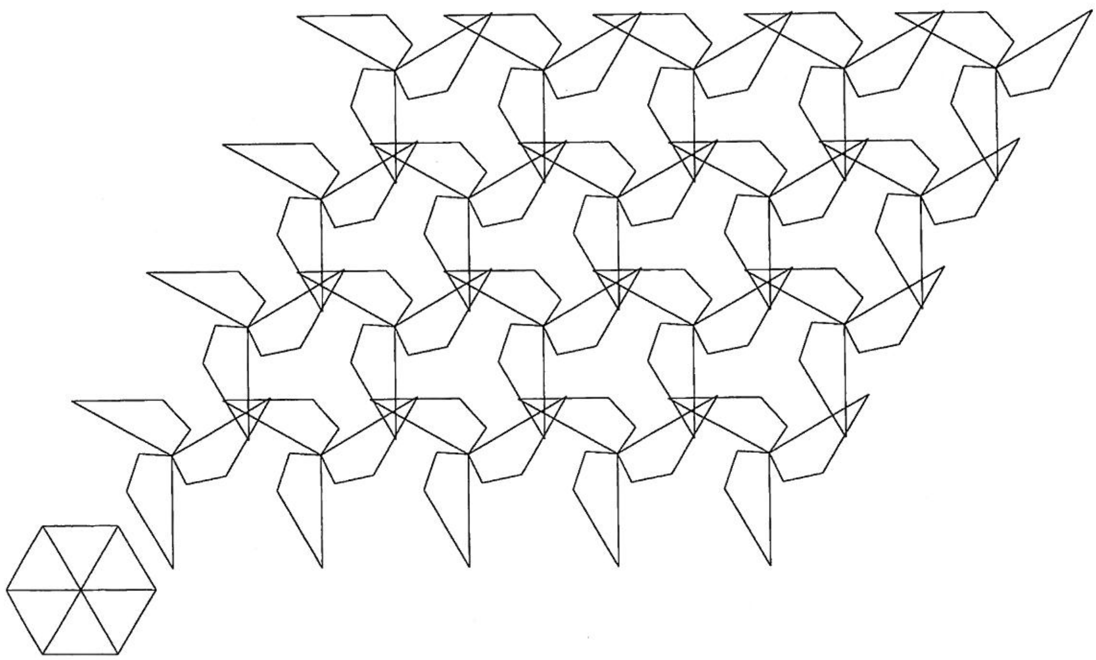


Fig. 56

3.6 Deux réseaux de points

Dans le kit libre, on peut couvrir l'écran par deux réseaux de points[34], l'un carré (figure 57) et l'autre triangulaire équilatéral (figure 58). La taille des mailles de ces réseaux ainsi que la grosseur des points sont réglables. Lorsqu'un réseau est présent à l'écran, seuls ses points possèdent la propriété magnétique.

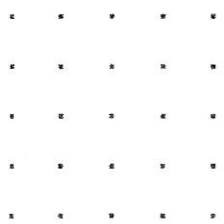


Fig. 57

Fig. 58

Ces réseaux peuvent être imprimés et se prêtent alors au dessin à main libre. Ils sont parents du géoplan, outil didactique assez connu constitué d'une planche sur laquelle des clous sont plantés en un réseau carré. À l'aide d'élastiques passés autour des clous, on forme des polygones dont les sommets occupent chacun la position d'un clou.

Les réseaux de points peuvent être exploités de multiples façons dans l'enseignement. Contentons-nous d'en mentionner deux.

Tout d'abord, ils permettent d'aborder la notion d'aire d'une figure plane, la maille élémentaire du réseau servant alors le plus souvent d'unité d'aire. Par exemple, la figure 59 montre deux polygones dessinés sur un réseau triangulaire, et l'on peut se demander lequel des deux a la plus grande aire. Pour le savoir, on est quasiment obligé de mobiliser la notion primaire de mesure d'aire, c'est-à-dire de compter le nombre de fois que chacun des deux polygones contient l'unité d'aire. Autre exemple : la figure 60 montre deux trapèzes semblables dessinés sur une grille carrée. Les mesures de l'un (longueurs de côtés, hauteur, ...) valent deux fois celles de l'autre. Leurs aires, qui valent respectivement 9 et 36 fois l'unité, sont entre elles comme 1 est à $4 = 2^2$.

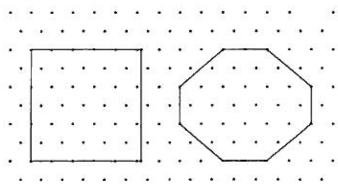


Fig. 59

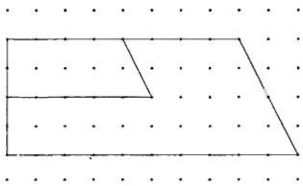


Fig. 60

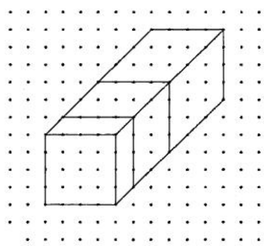


Fig. 61

Autre exemple d'utilisation des deux grilles : la disposition régulière des points favorise l'apprentissage des représentations de solides en perspective cavalière. Elle aide à respecter les deux règles principales de ces représentations, à savoir *le respect*

[34] Ces réseaux sont aussi disponibles dans le kit standard. Nous les introduisons seulement ici, car les possibilités de s'en servir sont beaucoup plus riches dans le kit libre.

des parallèles et celui des rapports de longueurs dans chaque direction. La figure 61 illustre sur une grille carrée la mise bout à bout de trois prismes à base carrée et dont les longueurs sont entre elles respectivement comme 1, 2 et 3. Cette figure illustre aussi – notons le au passage –, une illusion que donne ce genre de perspective, à savoir que les fuyantes semblent diverger (alors qu'elles sont en réalité parallèles) dès qu'elles sont un peu longues.

4 Apprenti Géomètre dans toute son extension

Comme nous l'avons expliqué, le kit standard et le kit libre sont comme deux paliers d'accès à la géométrie. Le *kit standard*, rappelons-le, comporte

un petit nombre de figure très régulières,

quelques opérations simples.

Le *kit libre* de son côté propose

d'autres figures plus générales et groupées autrement,

les mêmes opérations que le kit standard, plus quelques autres.

Un troisième palier d'AG, qui ne sera disponible que dans sa deuxième version, est tout simplement constitué par la réunion des deux premiers auxquels on a ajouté

un certain nombre de figures : la droite, des polygones étoilés, ...

quelques opérations : la symétrie centrale, ...

L'utilisateur entre ainsi dans un univers de formes et d'opérations riche mais touffu. Il s'y trouvera à l'aise s'il est suffisamment familier de ce qui s'y rencontre et l'aborde avec un projet. Un débutant qui l'explorerait au hasard risquerait de s'y perdre un moment.

Par ailleurs, AG offre à l'utilisateur, via le menu *Préférences*, la possibilité de constituer à son usage personnel ou, s'il est enseignant, à l'usage de sa classe, un atelier comprenant seulement

les opérations qu'il souhaite y voir, choisies parmi celles qui existent dans AG,

un choix quelconque de figures parmi celles proposées d'office par AG,

n'importe quelles figures supplémentaires qu'il créerait avec les moyens disponibles dans AG.

Un exemple d'un tel atelier est celui qui comporte les pièces du tangram et les deux mouvements *glisser* et *tourner* (plus éventuellement *retourner*). Le jeu de tangram se trouve ainsi amené à l'écran dans toute son agréable sobriété, c'est-à-dire sans pièces ni opérations superflues.

Un autre exemple serait d'amener à l'écran l'ensemble des pentaminos et les mouvements qui permettent de les assembler.

Mentionnons enfin la possibilité offerte par AG d'enregistrer, et donc de consulter après une session de travail, la suite des manœuvres exécutées par l'utilisateur. Celui-ci (ou son professeur) peut ainsi porter un regard critique sur le travail accompli.

5 Un atelier de création artistique

AG est un instrument de création picturale. Les figures 62 et 63 montrent deux compositions, la première abstraite et la seconde figurative, dessinée au moment de la fête d'Halloween, réalisées grâce au kit standard par des enfants de 8 et 7 ans.

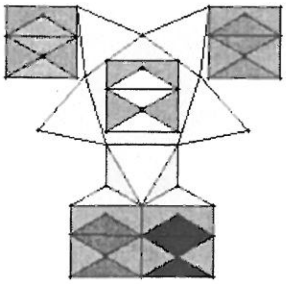


Fig. 62

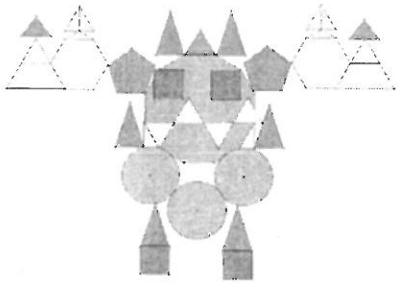


Fig. 63

Les figures 64, 65 et 66 ont été réalisées dans le cadre du kit libre.

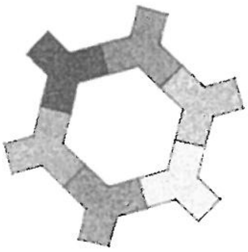


Fig. 64

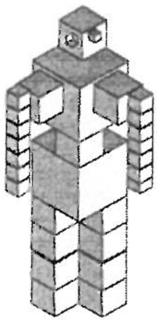


Fig. 65

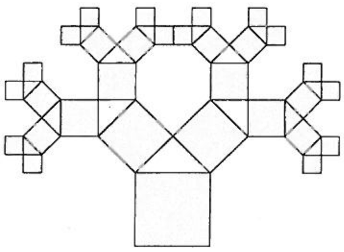


Fig. 66

Les peintres abstraits du XX^e siècle, tels que Malevitch, Vasarely, Mondrian, Klee ou Kandinsky, offrent beaucoup de sources d'inspiration, et il peut être intéressant de copier, avec les moyens d'AG, des tableaux qui s'y prêtent. La figure 67 reproduit un tableau de Mondrian et la figure 68 en montre une "copie" dans AG.

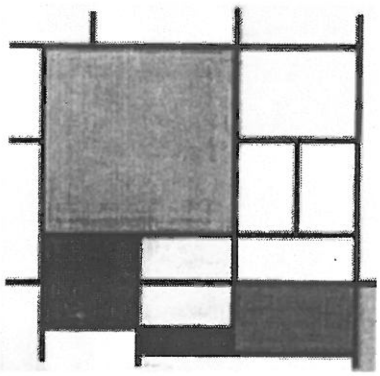


Fig. 67

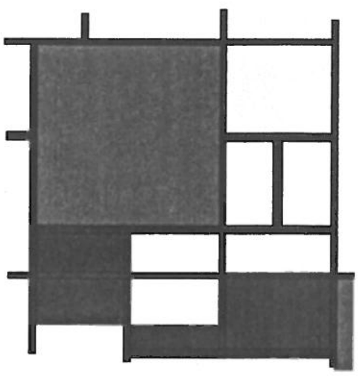


Fig. 68

Les arts primitifs sont aussi une source abondante d'inspiration. À titre d'exemples, les figures 69 et 70 reproduisent deux *litema* (pluriel de *tema*). Ce sont des motifs de décoration murale peints par les populations Sotho, en Afrique du Sud[35].

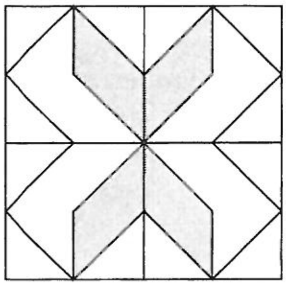


Fig. 69

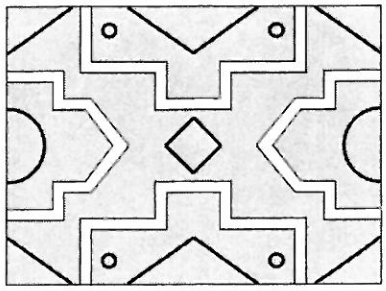


Fig. 70

Beaucoup de grands peintres copient des œuvres dans les musées, pour tenter de s'approprier la maîtrise de leurs prédécesseurs. Copier des œuvres n'est donc pas une occupation servile : elle est source d'observations attentives et profondes. Elle implique d'identifier chaque forme et les actions nécessaires pour la copier. Elle amène à observer et comprendre la composition (la mise en page) et à effectuer les repérages nécessaires pour la reproduire. La géométrie apparaît là sur un terrain original (pour plus de détails et des applications pratiques, voir M. Ballieu et M.-F. Guissard [2004]). Il est à souhaiter que les professeurs d'art plastique s'emparent d'AG comme d'un outil prometteur, ouvrant à leurs élèves les possibilités d'une technique de création moderne.

Ceci dit, il est sans doute intéressant de commenter ici, dans la mesure du possible, les liens subtils qui unissent la géométrie et les arts plastiques. Considérons pour commencer une des figures les plus pures qui soient, à savoir la droite. E. Mach écrit à son propos :

> La *ligne droite*, en tous ses éléments, conserve *la même*[36] direction, et excite partout le même type de sensation d'espace. D'où son avantage esthétique évident. Par ailleurs, les lignes droites qui se trouvent dans le plan médian[37] ou qui lui sont perpendiculaires bénéficient d'une situation intéressante, en ce qu'elles occupent une position symétrique et se comportent de la même manière par rapport aux deux moitiés de l'appareil visuel. On ressent toute autre position des lignes droites comme une distorsion par rapport à la symétrie, et comme "allant de travers".

Ainsi, la droite possède une qualité esthétique par elle-même, à cause de sa régularité, mais en outre, la possibilité de l'amener dans des positions privilégiées par rapport à l'observateur ajoute, en améliorant la perception, à la satisfaction intime qu'elle provoque.

Ce qui vient d'être observé à propos de la droite s'étend aux droites parallèles, aux perpendiculaires, aux figures symétriques, aux ensembles de figures isométriques ou semblables (frises, réseaux, rosaces), etc. Dans chaque cas, on discerne des qualités

[35]Voir à ce sujet : M. Ballieu et M.-F. Guissard [2004], Ph. Skilbecq [2004].

[36]Dans les deux cas, c'est Mach qui souligne.

[37]Il s'agit du plan de symétrie de l'observateur humain.

intrinsèques de simplicité, de régularité, et ensuite la possibilité d'améliorer la perception par une disposition spatiale accordée à la symétrie des organes de perception de l'être humain[38].

Or, nous l'avons déjà relevé précédemment, ces propriétés de régularité et de symétrie sont le matériau premier de la pensée géométrique (un univers chaotique n'engendrerait aucune idée utile), et les positions privilégiées par rapport à l'être humain sont celles où les relations scientifiquement pertinentes sont le plus facilement et le plus clairement saisies. Il y a donc bien un lien entre la satisfaction esthétique élémentaire que provoquent les figures simples et régulières, et le démarrage de la réflexion géométrique, entre l'équilibre des perceptions et l'intelligibilité des situations spatiales. Comme le dit Mach encore : "Une géométrie scientifique est impensable hors de la coopération de l'intuition sensible et de l'entendement."

Après, au fur et à mesure que se développent d'une part les activités de création artistique et de l'autre les constructions de la géométrie, les objectifs et les moyens divergent, mais peut-être sans que se perde le souvenir d'une origine commune.

Appendice : Piaget et la topologie

Comme nous l'avons vu, le kit standard, spécialement conçu pour un premier contact avec la géométrie, propose à l'utilisateur un contexte essentiellement euclidien : des figures de forme et de grandeur invariables, dont beaucoup très symétriques, des mouvements apparentés aux isométries. Cette option est en contradiction avec la position exprimée par Piaget en 1947 dans son ouvrage sur *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Il y écrit page 5 :

> Or nous constaterons précisément sans cesse que l'espace enfantin, dont la nature essentielle est active et opératoire, débute par des intuitions topologiques élémentaires, bien avant de devenir simultanément projectif et euclidien.

Cette étude de Piaget porte sur la génétique des notions et non sur l'enseignement. Il y exprime pourtant une opinion sur celui-ci en écrivant[39] p. 6 :

> On a dit que la "théorie des ensembles" de Cantor devrait s'enseigner à l'école primaire. Nous ne serions pas éloignés d'en penser autant de la topologie...

À la suite de la publication de cet ouvrage, on a vu apparaître dès l'enseignement maternel des notions dites de topologie. Or il nous semble qu'il y a des malentendus cachés sous ce terme. Essayons d'y voir clair.

Et tout d'abord, quel sens Piaget donne-t-il au terme *topologie* ? Cette question mérite une citation assez longue. Il écrit, p. 18 et 19 :

> Cependant, dès l'âge de 5 à 6 semaines, on peut constater, à suivre ses sourires, que le nourrisson est capable de récognitions précises : il reconnaît une physionomie familière malgré l'éloignement ou les changements de perspectives, etc. Du point de vue spatial, cette récognition d'une figure au

[38]Certains ont dit que les mathématiques étaient la science des *patterns*, c'est-à-dire des régularités. D'où l'importance de favoriser dans l'enseignement la prise de conscience de celles-ci et des conditions de leur meilleure perception. C'est là une sorte de préalable à leur étude scientifique.

[39]Toutes les citations de Piaget dans cet appendice sont empruntées au même ouvrage de 1947.

> travers de ses transformations constitue une correspondance terme à terme (ou "bi-univoque") entre les éléments donnés au cours des états successifs de la figure (c'est-à-dire à parler concrètement, que le bébé retrouve, en chaque état nouveau de la figure, les mêmes yeux, le même nez, etc.). Mais en quoi consiste alors la structure de cette correspondance, ou le principe de ce que l'on pourrait appeler cette transposition perceptive élémentaire ? Ce ne saurait être une structure euclidienne, puisqu'il n'y a pas encore de constance des dimensions, ni d'organisation des déplacements en tant que distingués des changements d'état. Ce ne saurait être non plus une structure projective, puisqu'il n'y a pas encore de constance de la forme et que les changements de perspectives ne sont pas encore compris comme tels, c'est-à-dire comme liés à des changements de points de vue. La figure perçue est donc comparable à ces structures déformables et élastiques qu'envisage la topologie et la ressemblance de la figure avec elle-même est alors assimilable à une sorte "d'homéomorphie", c'est-à-dire de simple correspondance topologique bi-univoque et bi-continue, mais naturellement tout intuitive et sans aucune opération exacte, puisqu'il s'agit de pures perceptions.

Piaget veut parler de la topologie au sens usuel en mathématiques, puisqu'il utilise le terme "homéomorphie"[40] et l'explicite par *correspondance topologique bi-univoque et bi-continue.* S'agissant de bébés, il dit "une sorte" d'homéomorphie et la qualifie de "tout intuitive". Mais la référence mathématique est néanmoins claire.

Or la tête de la mère est homéomorphe à celle du père et même à celle du chien. Si l'enfant reconnaît sa mère grâce à la constance de certains caractères géométriques[41], ce ne peut être que parce que le visage de celle-ci demeure semblable, ou suffisamment semblable, à chaque apparition, et *semblable* doit être pris ici au sens géométrique. On sait combien de petits défauts de similitude, compatibles avec une transformation topologique, peuvent altérer un visage. Ce qui prouverait, de façon assez convaincante, que le bébé est sensible à la similitude.

Piaget dit : "Ce ne saurait être une structure euclidienne" et "ce ne saurait être non plus une structure projective", parce que – ceci est implicite – nous avons prouvé par ailleurs que ce n'était pas possible à cet âge. Il nous semble qu'il faut au contraire poser la question : ces preuves venues d'ailleurs ne sont-elles pas tout simplement invalidées par l'expérience de la reconnaissance de la mère ?

Sans doute Piaget aurait-il récusé notre allusion à la tête du chien. Mais alors, de quelles transformations topologiques parle-t-il ? Sans doute de transformations assez peu importantes pour qu'elles respectent une similitude, ne serait-ce qu'approximativement ? D'où la conclusion que la topologie de Piaget, quoiqu'il en dise, n'est pas celle qui a cours en mathématiques.

Une autre observation permet d'affirmer que Piaget donne au mot *topologie* un sens différent du sens usuel. C'est qu'il parle (entre autres p. 33) de *formes euclidiennes* et de *formes topologiques.* Les premières ont celles où on discerne des segments de droite, des angles, des symétries et qui sont en général simplement connexes[42], les autres étant

[40] On dit plus couramment "homéomorphisme".

[41] Piaget ne parle pas d'autres facteurs de reconnaissance possibles comme les couleurs, l'odeur ou le timbre de la voix.

[42] Pour le dire rapidement, une surface plane est qualifiée de *simplement connexe* si elle ne comporte pas de trous. Un disque est simplement connexe. La surface située entre deux cercles dont l'un est

dessinées plus librement et souvent formées d'une surface percée d'un ou de deux trous. Or au sens usuel du mot topologie, toute figure possède des *propriétés* topologiques et des *propriétés* euclidiennes, et il n'y a pas de *figures* que l'on puisse qualifier de topologique ou d'euclidienne.

Piaget parle pourtant aussi de propriétés topologiques (pp. 63 à 65). Il appelle l'une d'elles le *voisinage.* Mais (voir p. 66) le voisinage "serait respecté" par exemple lorsque dans le dessin d'un visage, les yeux sont représentés l'un à côté de l'autre. On voit que *voisinage* veut dire ici *proximité*, ce qui est son sens quotidien et non pas mathématique. Il appelle une autre propriété la *relation d'ordre.* Par exemple, si un enfant inverse dans le dessin d'un visage les positions de la bouche, du nez et des yeux, "il ne respecte pas la relation d'ordre". Il est difficile de voir là une propriété topologique, ou alors il faudrait en savoir, sur le dessin en question, plus que ce que Piaget n'en dit .

Piaget cite encore ce qu'il appelle *les rapports d'entourage et d'enveloppement.* Il s'agit de la propriété des courbes de Jordan (en gros des courbes planes fermées) de déterminer deux zones, l'une à l'intérieur de la courbe et l'autre à l'extérieur. Viennent ensuite les *rapports élémentaires de continuité et de discontinuité*, ce qui revint, mathématiquement parlant, à la connexité et la non-connexité. Exemple : "un chapeau demeurera suspendu au dessus d'une tête" au lieu de la toucher. Ces deux dernières propriétés sont effectivement topologiques au sens usuel.

Quoiqu'il en soit du registre de propriétés que Piaget appelle topologiques, est-il vrai que celles-ci sont acquises avant les autres par les enfants ? Rappelons d'abord une distinction importante. Selon Piaget, les enfants parcourraient le stade sensori-moteur (de quelques semaines à 2 ou 3 ans, lorsque la pensée s'applique à des objets présents) dans l'ordre topologique, projectif et euclidien. Après ce stade vient celui des représentations (à partir de 3 ou 4 ans, lorsque la pensée s'exerce indépendamment des perceptions), parcouru lui aussi, en une sorte de recommencement, dans l'ordre topologique-projectif-euclidien, ces trois adjectifs étant bien entendu pris au sens de Piaget.

Ceci veut dire que les enfants entrant à l'école maternelle sont capables de discerner les "formes topologiques et euclidiennes" lorsqu'ils les manipulent. Et quant à la possibilité ultérieure de se les représenter, on lit chez Clements et Battista [1992] :

> En tout cas, il apparaît que certaines notions euclidiennes sont présentes à un âge précoce et que, contrairement à Piaget et Inhelder et à ceux qui les ont interprétés, même les enfants[43] de l'école maternelle peuvent être capables de travailler avec certaines idées euclidiennes.

On lit encore dans cette étude :

> On devrait probablement attendre, chez les élèves de tous les âges, une tendance gestaltiste générale vers la symétrie et la simplicité, par exemple dans les tâches d'ajustement[44] et de reproduction.

Et les mêmes auteurs concluent :

> Au total, bien que non totalement infirmée, la théorie de la primauté du topologique n'est pas étayée. Il se peut que les enfants ne construisent pas

intérieur à l'autre n'est pas simplement connexe, le cercle intérieur délimitant un trou.

[43]Ou peut-être "même des enfants". Le texte anglais dit "even children".

[44]En anglais "matching".

> d'abord les idées topologiques, et ensuite les idées projectives et euclidiennes. Plutôt, il se peut que les idées de tous les types se développent au cours du temps, en s'intégrant et se synthétisant de plus en plus.

S'agissant alors d'AG, il nous semble raisonnable de dire que les enfants de la fin de l'école maternelle et du début du primaire peuvent jouer avec les formes du kit standard, sans recourir à leurs noms. Et qu'un peu plus tard, il peuvent faire le va-et-vient entre les objets et les opérations du kit standard et leurs dénominations. Notre expérience, pas encore très longue, tend à confirmer cela.

Pour illustrer encore un peu la thèse de Piaget, rappelons que celle-ci, en rangeant les géométries dans l'ordre topologique-projective-affine-euclidienne, les envisage dans l'ordre qui va du général au particulier. Piaget considère cet ordre comme celui de "la construction mathématique elle-même". Il écrit en effet p. 6 :

> L'enseignement de la géométrie ne saurait trop gagner à s'adapter à l'évolution spontanée des notions, et cela d'autant plus que – on vient de le pressentir – cette évolution est beaucoup plus proche de la construction mathématique elle-même, que ne le sont la plupart des manuels soi-disants "élémentaires".

L'idée de classer les géométries du général au particulier – ou du particulier au général – remonte au célèbre texte de F. Klein [1872] connu sous le nom de *Programme d'Erlangen*. Mais l'ordre qui va du général au particulier n'est pas *par nature* "celui de la construction mathématique elle-même". On peut parfaitement, sans faute de rigueur, commencer par la géométrie la plus particulière, et ensuite, en enlevant des axiomes, passer à des géométries de plus en plus générales. Et c'est d'ailleurs exactement le chemin qu'emprunte F. Klein [1925] lui-même dans son ouvrage consacré à l'enseignement de la géométrie au lycée : il y va du particulier au général.

On peut se demander s'il est bien raisonnable de proposer comme première géométrie à acquérir celle qui, étant la plus générale, renvoie à un univers de figures tellement vaste et divers que l'intuition s'y embarrasse souvent et qu'en conséquence le raisonnement formel y devient un recours nécessaire.

Si c'était là le projet initial de Piaget, il ne l'a pas réalisé, car il ne le pouvait pas. Cette topologie-là n'est pas la sienne. Au point que Freudenthal a pu écrire : "Ce que Piaget présente comme de la topologie n'est presque rien". Et cette citation souligne un autre aspect des choses.

Pour de plus amples analyses sur la thèse de Piaget, on recourra utilement à l'ouvrage de Clements et Battista [1992], mais aussi aux remarques détaillées et fortement étayées de Freudenthal [1983], principalement mais pas seulement au chapitre 8.

Bibliographie

M. Ballieu et M.-F. Guissard, *Pour une culture mathématique accessible à tous*, CREM, Nivelles, [2004].

R. Bkouche, Variations autour de la réforme de 1902/1905, in H. Gispert et al. coord., *La forme mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris, 1991.

D. H. Clements et M. T. Battista, Geometry and spatial reasoning, in D.A. Grows, ed., *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, NCTM et MacMillan, New York, 1992.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

GEM, *Fouetter un chat avec une droite*, Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1981.

E. Giusti, *La naissance des objets mathématiques*, Ellipses, Paris, 2000.

F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité, essai sur la méthode axiomatique*, Blanchard, Paris, 1936.

P. Guillaume, *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris, 1979.

Ch. Hauchart, coord., Les représentations planes comme un fil conducteur, in *Actes du Colloque de Mons* (2005) *: L'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*, à paraître.

F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Andreas Deichert, Erlangen, 1972. Trad. française par H. Padé sous le titre *Le programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

L. Lismont et N. Rouche, coord., *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, CREM, Nivelles, 2001.

E. Mach, *L'analyse des sensations, le rapport du physique au psychique*, 1922, trad. de l'allemand par F. Eggers et J.-M. Monnoyer, Jacqueline Chambon, Nîmes, 1996.

S. Papert, *Le jaillissement de l'esprit*, Flammarion, Paris, 1980.

J. Piaget et B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, 1947.

J. Piaget, B. Inhelder et A. Szeminska, *La géométrie spontanée de l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, 1948.

N. Rouche et coll., *L'archipel des isométries, essai de redécouverte*, Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1982.

N. Rouche et Ph. Skilbecq, Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel, *Mathématique et Pédagogie*, n° 149, 68-84, 2004. Le même article, avec de brèves additions, est paru également dans le *Bulletin de l'APMEP*, n° 457, 273-280, [2005] et n° 458, 387-394, [2005]. Une traduction en italien paraîtra sous peu dans la revue *L'Insegnamento della Matematica*.

S. Papert, *Le jaillissement de l'esprit,* Flammarion, Paris, 1980.

A. V. Shubnikov et V. A. Kopstik, *Symmetry in science and art,* Plenum Press, New York, 1974.

Ph. Skilbecq, coord., *Apprenti Géomètre,* rapport de recherche, Communauté Française de Belgique et CREM, Nivelles, [2004] ; disponible uniquement à l'adresse <www.enseignement.be/geometre>.

D. Tall, A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof, in *Actes du colloque de Mons : L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte* (2005), à paraître.

M.-F. Van Troeye, coord. *Apprenti Géomètre, grandeurs, fractions, mesures,* Communauté Française de Belgique et CREM, Nivelles, [2003] ; disponible uniquement à l'adresse <www.enseignement.be/geometre>.

H. Wallon, *De l'acte à la pensée,* Flammarion, Paris, 1970.